答案及解析

模块一 | 数与式

▼考点 1　实数

1. B 【解析】$-|-2\ 021|=-2\ 021$，$-2\ 021$ 的倒数是 $-\frac{1}{2\ 021}$. 故选 B.

2. C 【解析】$-1^{2\ 021}=-1$，-1 的相反数是 1. 故选 C.

3. D 【解析】因为点 A，点 C 表示的数互为相反数，所以原点就是线段 AC 的中点，由此得出点 A 表示的数是 -2，点 C 表示的数是 2，所以点 B 对应的数是 4. 故选 D.

4. D 【解析】由题意得 $|m|=|m+2|$，$\therefore m=m+2$ 或 $m=-(m+2)$，$\therefore m=-1$. 故选 D.

5. A 【解析】551 万 $=5\ 510\ 000=5.51\times10^{6}$. 故选 A.

6. C 【解析】803.8 亿 $=80\ 380\ 000\ 000=8.038\times10^{10}$. 故选 C.

7. 4.07×10^{-7} 【解析】$0.000\ 000\ 407=4.07\times10^{-7}$. 故答案为 4.07×10^{-7}.

8. B 【解析】根据有理数比较大小的方法，可得 $-3<-2<0<3$，$\therefore$ 各数中最小的数是 -3. 故选 B.

9. B 【解析】$\because 2^{0}=1$，$2^{-1}=\frac{1}{2}$，$|-2|=2$，$\therefore \frac{1}{2}<1<\sqrt{2}<2$，$\therefore$ 最小的数是 2^{-1}. 故选 B.

10. A 【解析】$\because |0|=0$，$|-0.5|=0.5$，$|1|=1$，$|-2|=2$，$\therefore |0|<|-0.5|<|1|<|-2|$，$\therefore$ 各数中绝对值最小的数是 0. 故选 A.

11. 16 【解析】$\because 4^{2}=16$，$\therefore$ 4 是 16 的算术平方根. 故答案为 16.

12. 2 【解析】$\because 2^{3}=8$，$\therefore$ 8 的立方根为 2. 故答案为 2.

13. ±2 【解析】$\because$ 4 的立方等于 64，$\therefore$ 64 的立方根等于 4. 4 的平方根是 ±2，故答案为 ±2.

14. B 【解析】A 选项，$\sqrt{2}+\sqrt{3}\neq\sqrt{5}$，故 A 错误. B 选项，$\sqrt{12}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$，故 B 正确. C 选项，$\sqrt{2}\times$

$\sqrt{12}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}\neq6\sqrt{2}$，故 C 错误. D 选项，$\sqrt{3}\div\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\neq\frac{1}{4}\sqrt{6}$，故 D 错误. 故选 B.

15. D 【解析】A 选项，$(3-\pi)^0=1$，故本选项不符合题意；B 选项，$\sqrt{9}=3$，故本选项不符合题意；C 选项，$3^{-1}=\frac{1}{3}$，故本选项不符合题意；D 选项，$(\sqrt{5}-2)^2=5-4\sqrt{5}+4=9-4\sqrt{5}$，故本选项符合题意. 故选 D.

16. $3\sqrt{3}$ 【解析】原式 $=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$. 故答案为 $3\sqrt{3}$.

17. 3 【解析】原式 $=\sqrt{18\times\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$. 故答案为 3.

18.【解】原式 $=1+\sqrt{\frac{36}{25}}-4=1+\frac{6}{5}-4=-\frac{9}{5}$.

19.【解】原式 $=-2-|2-2\sqrt{3}|-4$

$=-2-(2\sqrt{3}-2)-4$

$=-2-2\sqrt{3}+2-4$

$=-2\sqrt{3}-4$.

▼考点2　整式与因式分解

1. D　【解析】$(-a)^{12}\div(-a)^3=(-a)^{12-3}=(-a)^9=-a^9$. 故选 D.

2. D　【解析】$(-a^3b)^2=a^6b^2$. 故选 D.

3. B　【解析】A 选项,原式 $=2a^2$,原计算错误,故此选项不符合题意;B 选项,原式 $=a^6$,原计算正确,故此选项符合题意;C 选项,a^3 与 a^2 不是同类项,不能合并,原计算错误,故此选项不符合题意;D 选项,原式 $=a^2-2ab+b^2$,原计算错误,故此选项不符合题意. 故选 B.

4. B　【解析】由题意,得 $a-\sqrt{3}=0$,$9a^2-12ab+4b^2=0$,解得 $a=\sqrt{3}$,$b=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,所以 $ab=\sqrt{3}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9}{2}$. 故选 B.

5. $\dfrac{3}{4}$　【解析】$\because 9^m=3^{2m}=3$,$27^n=3^{3n}=4$,$\therefore 3^{2m-3n}=\dfrac{3^{2m}}{3^{3n}}=\dfrac{3}{4}$. 故答案为 $\dfrac{3}{4}$.

6. 5　【解析】$\because a-b-2=0$,$\therefore a-b=2$,$\therefore 1+2a-2b=1+2(a-b)=1+4=5$. 故答案为 5.

7. D　【解析】A 选项,$2ab^2-4ab=2ab(b-2)$,故错误;B 选项,a^2+b^2 不能分解因式,故错误;C 选项,$x^2+2xy-4y^2$ 不能分解为 $(x-y)^2$,故错误;D 选项,$-my^2+4my-4m=-m(2-y)^2$,故正确. 故选 D.

8. $2y(x+2y)(x-2y)$　【解析】$2x^2y-8y^3=2y(x^2-4y^2)=2y(x+2y)(x-2y)$. 故答案为 $2y(x+2y)(x-2y)$.

9. $ab(a-b)^2$　【解析】$a^3b-2a^2b^2+ab^3=ab(a^2-2ab+b^2)=ab(a-b)^2$. 故答案为 $ab(a-b)^2$.

10. 6^2　$(1+2+3+\cdots+n)^2$　$\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$　$2n^4+4n^3+2n^2$　【解析】【规律探究】由题意可得 $1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2=6^2$.

【解决问题】由 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

【拓展应用】由题意得 $2^3+4^3+6^3+\cdots+(2n)^3=2^3\times1^3+2^3\times2^3+2^3\times3^3+\cdots+2^3\times n^3=2^3\times(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)=8\times\left[\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}\right]=2n^2(n+1)^2=2n^4+4n^3+2n^2$.

11.【解】(1)根据已知等式可知,

第 5 个等式：$\frac{24}{25}\times\left(1-\frac{1}{6}\right)=1-\frac{1}{5}$.

(2) 根据已知等式可知，

第 n 个等式：$\frac{n^2-1}{n^2}\times\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n}$.

证明：左边 $=\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\times\frac{n}{n+1}=\frac{n-1}{n}=1-\frac{1}{n}=$右边，

所以等式成立.

12.【解】(1) 根据题意，得第一层有 $2\times1-1=1$(个)白色棋子，第二层有 $2\times2-1=3$(个)白色棋子，第三层有 $2\times3-1=5$(个)白色棋子，第四层有 $2\times4-1=7$(个)白色棋子，…，

$\therefore$ 第 n 层有 $(2n-1)$ 个白色棋子.

从第一层到第二层共有 $1+3=4=2^2$(个)白色棋子；

从第一层到第三层共有 $1+3+5=9=3^2$(个)白色棋子；

从第一层到第四层共有 $1+3+5+7=16=4^2$(个)白色棋子；

…

$\therefore$ 图中从第一层到第 n 层一共有 $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$(个)白色棋子.

故答案为 $(2n-1)$，n^2.

(2) $1\ 921+1\ 923+1\ 925+\cdots+2\ 021$

$=(1+3+5+7+\cdots+2\ 021)-(1+3+5+7+\cdots+1\ 919)$

$=1\ 011^2-960^2$

$=100\ 521$.

▼考点3　分式

1. B　【解析】$\because \frac{x}{y}=2$，$\therefore x=2y$，$\therefore \frac{x+y}{x-y}=\frac{2y+y}{2y-y}=3$.

故选 B.

2. A　【解析】若把分式$\frac{3xy}{x-y}$(x,y 均不为 0)中的 x 和 y 都扩大 3 倍，则$\frac{3\cdot 3x\cdot 3y}{3x-3y}=\frac{27xy}{3(x-y)}=3\cdot\frac{3xy}{x-y}$.

故原分式的值扩大了 3 倍. 故选 A.

3. D　【解析】A 选项，原式$=\frac{a+b}{a-b}\neq 1$，故 A 错误；B 选项，原式$=\frac{bm-an}{ab}$，故 B 错误；C 选项，原式$=-\frac{1}{a}$，故 C 错误；D 选项，原式$=\frac{1}{a-b}$，故 D 正确.

4. D　【解析】$\because \frac{c}{a}=a+6$，$\frac{c}{b}=b+6$，$\therefore c=a^2+6a$，$c=b^2+6b$，$\therefore a^2+6a=b^2+6b$，$a^2=c-6a$，$b^2=c-6b$，$\therefore a^2-b^2=-6(a-b)$，$\therefore (a+b)(a-b)=-6(a-b)$. $\because a\neq b\neq c$，$\therefore a-b\neq 0$，$\therefore a+b=-6$，$\therefore \frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{c}-\frac{36}{c}=\frac{c-6a}{c}+\frac{c-6b}{c}-\frac{36}{c}=\frac{2c-6(a+b)-36}{c}=2-\frac{6\times(-6)+36}{c}=2-0=2$.

故选 D.

5. D　【解析】$\because a_1=a_1$，$a_2=1-\frac{1}{a_1}$，$a_3=1-\frac{1}{1-\frac{1}{a_1}}=1-\frac{a_1}{a_1-1}=\frac{-1}{a_1-1}=\frac{1}{1-a_1}$，$a_4=1-(1-a_1)=a_1$，$\therefore a_n$ 以三个数为一个循环组. $\because 2\ 021\div 3=673\cdots\cdots 2$，$\therefore a_{2\,021}=a_2=1-\frac{1}{a_1}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$. 故选 D.

6. 【解】原式$=\frac{(a+1)(a-1)-a(a-2)}{a(a+1)}\cdot\frac{(a+1)^2}{a(2a-1)}$

$=\frac{2a-1}{a(a+1)}\cdot\frac{(a+1)^2}{a(2a-1)}=\frac{a+1}{a^2}$.

$\because a^2-a-1=0$，$\therefore a^2=a+1$，$\therefore$ 原式$=\frac{a+1}{a+1}=1$.

7. 【解】$\left(x-\frac{2x-1}{x}\right)\div\frac{x^3-x}{x^2}$

$=\frac{x^2-(2x-1)}{x}\cdot\frac{x^2}{x(x+1)(x-1)}$

$=\frac{(x-1)^2}{x}\cdot\frac{x^2}{x(x+1)(x-1)}$

$=\frac{x-1}{x+1}$.

由于 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{13}$，且 $x \neq 0$，$x+1 \neq 0$，$x-1 \neq 0$，

$\therefore x$ 不能取 -1，0，1，$\therefore x$ 可取 2，3.

当 $x=2$ 时，原式 $=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$；

或当 $x=3$ 时，原式 $=\frac{3-1}{3+1}=\frac{1}{2}$.

▼考点4　二次根式

1. $7\leqslant x\leqslant10$　【解析】由题意得 $x-7\geqslant0$，且 $10-x\geqslant0$，解得 $7\leqslant x\leqslant10$. 故答案为 $7\leqslant x\leqslant10$.

2. $x\geqslant2$　【解析】代数式 $\dfrac{\sqrt{x-2}}{x+1}$ 有意义，则 $x-2\geqslant0$ 且 $x+1\neq0$，解得 $x\geqslant2$. 故答案为 $x\geqslant2$.

3. 27　【解析】$\because\ \sqrt{x-2y+9}$ 与 $|x-y-3|$ 互为相反数，$\therefore\ \sqrt{x-2y+9}+|x-y-3|=0$，$\therefore\ \begin{cases}x-2y+9=0,①\\x-y-3=0,②\end{cases}$ ②－①，得 $y=12$. 把 $y=12$ 代入②，得 $x-12-3=0$，解得 $x=15$，$\therefore\ x+y=12+15=27$. 故答案为 27.

4. B　【解析】$\because\ 2<3<4<5$，$\therefore\ \sqrt{2}<\sqrt{3}<\sqrt{4}<\sqrt{5}$，即 $\sqrt{2}<\sqrt{3}<2<\sqrt{5}$，$\therefore$ 在 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{5}$ 之间的整数有 1 个，就是 2. 故选 B.

5. C　【解析】$\because\ 9<10<16$，$\therefore\ 3<\sqrt{10}<4$. $\because\ 3.5^2=12.25$，$\therefore\ \sqrt{10}$ 最接近的整数是 3，$\therefore\ \sqrt{10}-1$ 最接近的整数是 2. 故选 C.

6. C　【解析】$\because\ 1<\sqrt{2}<2$，$\therefore\ 2<\sqrt{2}+1<3$. 又 $\because\ AB=-1-(-2.5)=1.5$，$BC=1-(-1)=2$，$CD=3.5-1=2.5$，$AC=1-(-2.5)=3.5$. 故两点之间的距离最接近 $\sqrt{2}+1$ 的是点 C 和点 D. 故选 C.

7. B　【解析】$\because\ 1\ 936<2\ 021<2\ 025$，$\therefore\ 44<\sqrt{2\ 021}<45$，$\therefore\ n=44$. 故选 B.

8. C　【解析】因为 $\sqrt[3]{80}>\sqrt[3]{64}=4$，$\sqrt[3]{125}=5$，$\sqrt[3]{200}<\sqrt[3]{216}=6$，且 $\sqrt[3]{80}<\sqrt[3]{125}<\sqrt[3]{200}$，所以 $\sqrt[3]{80}<5<\sqrt[3]{200}$. 故选 C.

9. C　【解析】$(2\sqrt{3}+6\sqrt{2})\times\sqrt{\dfrac{1}{3}}=(2\sqrt{3}+6\sqrt{2})\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}+6\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2+2\sqrt{6}$. $\because\ 2\sqrt{6}=\sqrt{24}$，$4<\sqrt{24}<5$，$\therefore\ 6<2+\sqrt{24}<7$，即 $6<2+2\sqrt{6}<7$. 故选 C.

10. A　【解析】$\because\ 3<\sqrt{10}<4$，$\therefore\ 2<6-\sqrt{10}<3$. $\because\ 6-\sqrt{10}$ 的整数部分为 a，小数部分为 b，$\therefore\ a=2$，$b=6-\sqrt{10}-2=4-\sqrt{10}$，$\therefore\ (2a+\sqrt{10})b=(2\times2+\sqrt{10})\times(4-\sqrt{10})=(4+\sqrt{10})(4-\sqrt{10})=6$. 故选 A.

模块二　方程(组)与不等式组

考点5　一次方程(组)及其应用

1. $x=4$　【解析】方程$\frac{x-3}{2}=1-\frac{x-1}{6}$. 去分母,得$3(x-3)=6-(x-1)$. 去括号,得$3x-9=6-x+1$. 移项、合并同类项,得$4x=16$. 系数化为1,得$x=4$. 故答案为$x=4$.

2. $\begin{cases}x=2,\\y=-2\end{cases}$　【解析】$\begin{cases}x+2y=-2,①\\2x+y=2,②\end{cases}$ ①×2－②,得$3y=-6$,即$y=-2$. 将$y=-2$代入②,得$2x+(-2)=2$,解得 $x=2$,所以方程组的解为$\begin{cases}x=2,\\y=-2.\end{cases}$故答案为$\begin{cases}x=2,\\y=-2.\end{cases}$

3. C　【解析】依题意得$\begin{cases}\frac{x}{3}=y-2,\\\frac{x-9}{2}=y.\end{cases}$故选C.

4.【解】设该超市购进A品牌矿泉水x箱,B品牌矿泉水y箱.

依题意,得$\begin{cases}x+y=600,\\20x+35y=15\ 000,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=400,\\y=200.\end{cases}$

共获利润为$400\times(32-20)+200\times(50-35)=7\ 800$(元).

答:该超市共获利润7 800元.

▼考点6　分式方程及其应用

1. D　【解析】$\because \frac{1}{x}=\frac{2}{3x-3}$，$\therefore \frac{1}{x}=\frac{2}{3(x-1)}$. 去分母，得$3(x-1)=2x$. 去括号，得 $3x-3=2x$. 移项，得 $3x-2x=3$. 合并同类项，得 $x=3$. 检验：当 $x=3$ 时，$3x(x-1)\neq 0$，$\therefore$ 这个方程的解为 $x=3$. 故选 D.

2. C　【解析】$\frac{2}{x-3}+2=\frac{1}{3-x}$. 去分母，得 $2+2x-6=-1$. 移项、合并同类项，得 $2x=3$. 系数化为 1，得$x=\frac{3}{2}$. 经检验，$x=\frac{3}{2}$是原分式方程的解，$\therefore$ 原方程的解为 $x=\frac{3}{2}$. 故选 C.

3.【解】去分母，得 $2(x-1)=x-3$，解得 $x=-1$.

检验：当 $x=-1$ 时，$(x-1)(x-3)\neq 0$，

所以 $x=-1$ 是原分式方程的解.

4.【解】移项，得$\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{4-x^2}=0$.

$\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{x^2-4}+\frac{1}{x^2-4}=0$.

$\frac{1}{x-2}-\frac{2x-1}{x^2-4}=0$.

去分母，得 $x+2-2x+1=0$，解得 $x=3$.

经检验，$x=3$ 是原方程的解.

5. A　【解析】$\because$ 实际每天种植 x 万棵，$\therefore$ 原计划每天种植 $x\div(1+15\%)$万棵. 由题意，得$\frac{20}{x\div(1+15\%)}-\frac{20}{x}=4$，整理，得$\frac{20(1+15\%)}{x}-\frac{20}{x}=4$. 故选 A.

▼考点 7　一元二次方程及其应用

1. C　【解析】$x(x-7)=8(7-x)$，$x(x-7)+8(x-7)=0$，$(x-7)(x+8)=0$，解得 $x_1=7$，$x_2=-8$. 所以因式分解法最简便快速. 故选 C.

2. A　【解析】由原方程，得 $x^2-\frac{3}{2}x=\frac{1}{2}$，$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}=\frac{1}{2}+\frac{9}{16}$，$\left(x-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}$，故选 A.

3. A　【解析】设 $a^2+b^2=t$，则原方程化为 $t^2-t-6=0$，解得 $t_1=3$，$t_2=-2$，即 $a^2+b^2=3$ 或 $a^2+b^2=-2$. 因为 $a^2+b^2\geqslant 0$，所以 a^2+b^2 的值为 3. 故选 A.

4.【解】原方程化为 $(x+3)(x-1)=0$，

解得 $x_1=-3$，$x_2=1$.

5. A　【解析】由关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m+2)x+m=0$，得 $a=1$，$b=-(m+2)$，$c=m$，$\therefore \Delta=(m+2)^2-4m=m^2+4m+4-4m=m^2+4>0$，则方程有两个不相等的实数根. 故选 A.

6. C　【解析】要使 $\sqrt{1-k}$ 有意义，则 $1-k\geqslant 0$，解得 $k\leqslant 1$. $\because$ 方程 $x^2-\sqrt{1-k}x-1=0$ 有两个不相等实数根，$\therefore \Delta=(-\sqrt{1-k})^2-4\times 1\times(-1)>0$，解得 $k<5$，$\therefore k$ 的取值范围是 $k\leqslant 1$. 故选 C.

7. D　【解析】$\because$ 直线 $y=-x+a$ 不经过第一象限，$\therefore a\leqslant 0$. 当 $a=0$ 时，关于 x 的方程 $ax^2+4x+1=0$ 是一元一次方程，解得 $x=-\frac{1}{4}$；当 $a<0$ 时，关于 x 的方程 $ax^2+4x+1=0$ 是一元二次方程，$\because \Delta=4^2-4a>0$，$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根. 故选 D.

8. 1　【解析】$\because$ 关于 x 的方程 $x^2-2x+k=0$ 有两个相等的实数根，$\therefore \Delta=(-2)^2-4\times 1\times k=0$，解得 $k=1$. 故答案为 1.

9. $k\geqslant 1$　【解析】①当 $x^2-(x+1)\leqslant 1$ 时，方程变为 $kx^2-1=0$. $\because$ 此时方程有两个不相等实数根，$\therefore \Delta>0$，即 $\Delta=4k>0$，$\therefore k>0$，$\therefore$ 方程的解为 $x=\pm\sqrt{\frac{1}{k}}$. 又$\because x^2-(x+1)\leqslant 1$，$\therefore -1\leqslant x\leqslant 2$，$\therefore -1\leqslant -\sqrt{\frac{1}{k}}<\sqrt{\frac{1}{k}}\leqslant 2$，解得 $k\geqslant 1$.

②当 $x^2-(x+1)>1$ 时，$x>2$ 或 $x<-1$，此时方程变为 $k(x+1)-1=0$.

当 $k\neq 0$ 时，此方程是一元一次方程，由题意可得 $x=\frac{1}{k}-1$，只有一个实数解，与题意不符；

当 $k=0$ 时，方程不存在，不符合题意.

综上，k 的取值范围是 $k\geqslant 1$.

10. B 【解析】根据题意，得 $0.63(1+x)^2=0.68$. 故选 B.

11. 50% 【解析】设二月份降价的百分比为 x，则三月份涨价的百分比为 $2x$. 依题意，得 $a(1-x)(1+2x)=a$，即 $2x^2-x=0$，解得 $x_1=0.5=50\%$，$x_2=0$（不合题意，舍去）. 故答案为 50%.

12.【解】(1) 设甲工厂生产 x 万个口罩，则乙工厂生产 $(2\ 000-x)$ 万个口罩. 由题意，得 $0.6x\leqslant 0.8(2\ 000-x)\times\dfrac{3}{4}$，解得 $x\leqslant 1\ 000$.

答：甲工厂最多可生产 1 000 万个口罩.

(2) 由题意，得 $(6-0.5m)(0.8+0.2m)=6\times 0.8+1.6$，

整理，得 $m^2-8m+16=0$，解得 $m_1=m_2=4$.

答：m 的值为 4.

13.【解】(1) $\because$ 购买数量超过 60 台，每增加 1 台，所购买的这批设备每台均降价 0.5 万元，

$\therefore$ 优惠后的每台设备的价格为 $120-0.5(x-60)=-0.5x+150$（万元）.

(2) 设 A 省购买了这种设备 y 台.

$\because 120\times 60=7\ 200$（万元），$7\ 200<8\ 800$，

$\therefore y>60$.

依题意，得 $y(-0.5y+150)=8\ 800$，

整理，得 $y^2-300y+17\ 600=0$，解得 $y_1=80$，$y_2=220$.

$\because$ 公司规定每台售价的最大优惠率不得超过 20%，

$\therefore -0.5y+150\geqslant 120\times(1-20\%)$，

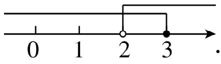
$\therefore y\leqslant 108$，$\therefore y=80$.

当每台售价优惠 20% 时，购买数量为 $\dfrac{8\ 800}{120\times(1-20\%)}=91\dfrac{2}{3}$（台）.

$\because 91\dfrac{2}{3}$ 不为整数，$\therefore$ 舍去.

答：A 省购买了这种设备 80 台.

▼考点8　一次不等式(组)及其应用

1. A　【解析】$\begin{cases}6-3x<0, ①\\ x\leqslant 1+\dfrac{2}{3}x, ②\end{cases}$ 解不等式①,得 $x>2$,解不等式②,得 $x\leqslant 3$,∴ 不等式组的解集为 $2<x\leqslant 3$,在数轴上表示为. 故选 A.

2. $x\leqslant 3$　【解析】去分母,得 $1-x\geqslant -2$. 移项,得 $-x\geqslant -2-1$. 合并同类项,得 $-x\geqslant -3$. 系数化为 1,得 $x\leqslant 3$. 故答案为 $x\leqslant 3$.

3. $a\geqslant 6$　【解析】$\begin{cases}2x-a>0, ①\\ 3x-4<5, ②\end{cases}$ 解不等式①,得 $x>\dfrac{1}{2}a$,解不等式②,得 $x<3$. ∵ 该不等式组无解,∴ $\dfrac{1}{2}a\geqslant 3$,∴ $a\geqslant 6$. 故答案为 $a\geqslant 6$.

4.【解】$\begin{cases}x>\sin 30°, ①\\ (1-\sqrt{3})x>3(1-\tan 60°), ②\end{cases}$

解不等式①,得 $x>\dfrac{1}{2}$,解不等式②,得 $x<3$,

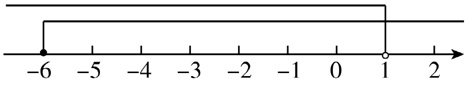
∴ 不等式组的解集为 $\dfrac{1}{2}<x<3$,

∴ 原不等式组的整数解为 1,2.

5.【解】解不等式①,得 $x<1$;解不等式②,得 $x\geqslant -6$,

∴ 不等式组的解集为 $-6\leqslant x<1$.

在数轴上表示解集如下.



6.【解】设该学校购买 x 本《诗经》,则购买 $(100-x)$ 本《孟子》.

依题意得 $20x+14(100-x)\leqslant 1\ 790$,解得 $x\leqslant 65$.

答:该学校最多可以购买 65 本《诗经》.

模块三 | 函数

考点9 一次函数及其应用

1. A 【解析】根据 y 随 x 的增大而减小得 $k<0$. 又∵ $kb>0$,∴ $b<0$,∴ 此函数的图象经过第二、三、四象限,即不经过第一象限. 故选 A.

2. D 【解析】由题意,得 $\begin{cases}2m+1>0,\\m-3\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{2}<m\leqslant 3$. 故选 D.

3. D 【解析】A 选项,观察一次函数图象发现,图象过第一、二、四象限,∴ $k<0$, $b>0$,∴ $kb<0$,故 A 正确. B 选项,结合函数图象能够发现,当 $x<0$ 时,$y>b$,故 B 正确. C 选项,∵ $k<0$,∴ 函数值 y 随 x 的增大而减小. ∵ $-1<2$,∴ $y_1>y_2$,故 C 正确. D 选项,将函数图象向左平移 1 个单位后得到解析式为 $y=k(x+1)+b=kx+k+b$. ∵ 经过原点,∴ $k+b=0$,故 D 错误. 故选 D.

4. D 【解析】由图象可得 $k>0$, $a<0$, $c>0$,对称轴 $x=-\frac{b}{2a}>0$,∴ $b>0$. ∵ m_1 和 m_2 是 $ax^2+(b-k)x+c=0$ 的两个根,且 $m_1>m_2$,∴ $m_1m_2=\frac{c}{a}<0$,∴ m_1, m_2异号. ∵ $m_1>m_2$,∴ $m_1>0$, $m_2<0$,故函数 $y=m_1x+m_2$的图象经过第一、三、四象限. 故选 D.

5. C 【解析】∵ $k<0$,∴ 双曲线 $y=\frac{k}{x}$在第二、四象限,函数$y=k-kx$ 的图象经过第一、三、四象限. 故选 C.

6. C 【解析】∵ 甲车以 40 千米/时的速度匀速行驶,行驶 3 小时后出现故障,停车维修 1 小时,∴ 甲车出现故障时,行驶的路程是 $40\times 3=120$(km),此时往后 1 小时,甲的路程不变. 故选项 A、B 不符合题意. ∵ 乙车在甲车出发 2 小时后以 80 千米/时的速度匀速前往 B 地,∴ 乙车行驶 120 km 用的时间为 $120\div 80=1.5$(时),即乙出发 1.5 小时与甲相遇. 故选项 C 正确,选项 D 错误. 故选 C.

7. 【解】(1) 当 $0<x\leqslant 60$ 时,设 $y_1=k_1x+b_1(k_1\neq 0)$.

把(0,180),(60,60)代入,得 $\begin{cases}b_1=180,\\60k_1+b_1=60,\end{cases}$

解得$\begin{cases}k_1=-2,\\b_1=180,\end{cases}$

$\therefore y_1=-2x+180(0<x\leqslant 60)$;

当$60<x\leqslant 100$时,$y_1=60$.

综上,$y_1=\begin{cases}-2x+180(0<x\leqslant 60),\\60(60<x\leqslant 100).\end{cases}$

(2)设购买樟树x棵,则购买樱花树$(100-x)$棵.

由$0.7x+0.9(100-x)\geqslant 100\times 80\%$,解得$x\leqslant 50$,

$\therefore 10\leqslant x\leqslant 50$.

设购树所需费用为W元.

当购买樟树棵数满足$10\leqslant x<40$时,购买樱花树棵数满足$60<100-x\leqslant 90$,

即$10\leqslant x<40$时,$W=(-2x+180)x+70(100-x)=-2(x-27.5)^2+2\times 27.5^2+7\ 000$.

$\because$抛物线开口朝下,且$27.5-10>40-27.5$,

$\therefore$当$x=10$时,W可取到最小值,

$\therefore W_{最小}=-2\times(10-27.5)^2+2\times 27.5^2+7\ 000=2\times(27.5^2-17.5^2)+7\ 000=7\ 900$.

当购买樟树棵数满足$40\leqslant x\leqslant 50$时,购买樱花树棵数满足$50\leqslant 100-x\leqslant 60$,

即$40\leqslant x\leqslant 50$时,$W=(-2x+180)x+100(100-x)=-2(x-20)^2+10\ 800$.

$\because$抛物线开口朝下,在对称轴$x=20$的右侧,W随着x的增大而减小,

$\therefore$当$x=50$时,W可取到最小值,

$\therefore W_{最小}=-2\times(50-20)^2+10\ 800=9\ 000$.

$\because 7\ 900<9\ 000$,$\therefore$当购买樟树10棵,樱花树90棵时,可使得所需的总费用最少,购树所需费用最少为7 900元.

8. B 【解析】由函数图象,得甲的速度为$12\div 3=4$(米/秒),乙的速度为$400\div 80=5$(米/秒),故①正确;设乙离开起点x秒后,甲、乙两人第一次相遇.根据题意,得$5x=12+4x$,解得$x=12$,$\therefore$离开起点后,甲、乙两人第一次相遇时,距离起点为$12\times 5=60$(米),故②错误;当甲、乙两人之间的距离超过32米时,$\begin{cases}5x-(4x+12)>32,\\4x+12<400-32,\end{cases}$可得$44<x<89$,故③正确;$\because$乙到达终点时,所用时间为80秒,甲先出发3秒,$\therefore$此时甲跑的时间为83秒,$\therefore$甲跑的路程为$83\times 4=332$(米),$\therefore$乙到达终点时,甲、乙两人相距$400-332=68$(米),故④正确.结论正确的个数为3.故选B.

9.【解】(1)设 A 型服装的单价是 x 元,B 型服装的单价是 y 元.

依题意,得 $\begin{cases}2x+3y=4\ 600,\\ x+2y=2\ 800,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=800,\\ y=1\ 000.\end{cases}$

答:A 型服装的单价是 800 元,B 型服装的单价是 1 000 元.

(2)设购进 A 型服装 m 件,则购进 B 型服装 $(60-m)$ 件. 根据题意,得 $m\geqslant 2(60-m)$,$\therefore m\geqslant 40$.

设购买 A,B 两种型号的服装的总费用为 w 元.

$\because w=800m+1\ 000\times 0.75\times(60-m)=50m+45\ 000$,$\therefore w$ 随 m 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $m=40$ 时,$w_{最小}=50\times 40+45\ 000=47\ 000$.

答:该专卖店至少需要准备 47 000 元的货款.

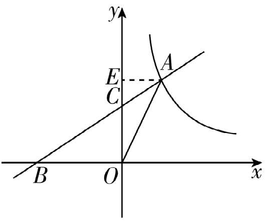
▼考点 10　反比例函数及其应用

1. A 【解析】①反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 中自变量 x 的取值范围是 $x\neq0$，故说法正确；②因为 $-3\times2=-6$，所以点 P 在 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象上，故说法正确；③因为 $k=3>0$，所以反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 的图象，在每一个象限内，y 随 x 的增大而减小，故说法错误. 故选 A.

2. A 【解析】选项 A，B 中直线 $y=ax+b$ 经过第一、二、三象限，$\therefore a>0,b>0$. $\because y=0$ 时，$x=-\frac{b}{a}$，即直线 $y=ax+b$ 与 x 轴的交点为 $\left(-\frac{b}{a},0\right)$，由选项 A，B 中直线和 x 轴的交点知：$-\frac{b}{a}>-1$，即 $b<a$，$\therefore a-b>0$，此时双曲线位于第一、三象限. 故选项 B 不成立，选项 A 正确. 选项 C，D 中直线 $y=ax+b$ 经过第一、二、四象限，$\therefore a<0,b>0$，此时 $a-b<0$，双曲线位于第二、四象限. 故选项 C，D 均不成立. 故选 A.

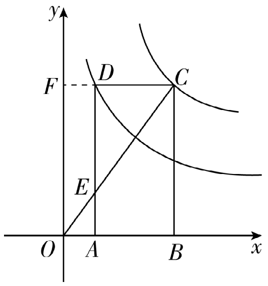
3. < 【解析】$\because k=a^2+1>0$，$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{a^2+1}{x}$ 的图象位于第一、三象限，且在每个象限内 y 随 x 的增大而减小. $\because$ 点 $A(-3,y_1)$，$B(-4,y_2)$ 同在第三象限，且 $-3>-4$，$\therefore y_1<y_2$. 故答案为 <.

4. 4 【解析】如图，过点 A 作 $AE\perp y$ 轴于点 E. $\because \frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOC}}=\frac{AC}{BC}=\frac{1}{2}$，$\triangle AOB$ 的面积为 4，$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{4}{3}$，$S_{\triangle BOC}=\frac{8}{3}$.



$\because \angle AEC=\angle BOC=90^\circ$，$\angle ACE=\angle BCO$，$\therefore \triangle AEC\backsim\triangle BOC$，$\therefore \frac{S_{\triangle AEC}}{S_{\triangle BOC}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^2=\frac{1}{4}$，$\therefore S_{\triangle AEC}=\frac{8}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{3}$，$\therefore S_{\triangle AOE}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=2=\frac{1}{2}|k|$，$\therefore k=4$（取正值）. 故答案为 4.

5. 3 【解析】如图，延长线段 CD，交 y 轴于 F. $\because CB\perp x$ 轴，$DA\perp x$ 轴，$CD\parallel x$ 轴，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，$\therefore AB=CD$. $\because CD\parallel x$ 轴，$\therefore CF\perp y$ 轴，$\therefore$ 四边形



$BCFO$ 是矩形，四边形 $OADF$ 是矩形. ∵ 点 C 在反比例函数 $y=\frac{8}{x}(x>0)$ 的图象上，∴ $S_{矩形BCFO}=8$，同理 $S_{矩形OADF}=k$. ∵ $CD // OB$，∴ $\triangle OAE \backsim \triangle CDE$，∴ $\frac{OA}{CD}=\frac{OE}{CE}=\frac{3}{5}$，∴ $OA=\frac{3}{5}CD=\frac{3}{5}AB$，∴ $OA=\frac{3}{8}OB$，∴ $S_{矩形OADF}=\frac{3}{8}S_{矩形BOFC}=\frac{3}{8}\times 8=3$，∴ $k=3$. 故答案为 3.

6.【解】(1) 设点 A 的坐标为 (a,b).

∵ $AC // x$ 轴，点 C 的坐标为 $(0,5)$，∴ $b=5$.

又∵ 点 A 在反比例函数 $y=\frac{10}{x}$ 的图象上，

∴ $5a=10$，∴ $a=2$，∴ 点 A 的坐标为 $(2,5)$.

(2) 由反比例函数系数 k 的几何意义可得，$S_{\triangle OAC}=\frac{1}{2}k_1$，$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}k_2$.

∵ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle OBC}-S_{\triangle OAC}$，∴ $4=\frac{1}{2}(k_2-k_1)$，

∴ $k_2-k_1=8$，即 $k_1-k_2=-8$.

7. A **【解析】**∵ 反比例函数 $y=\frac{m}{x}(m\neq 0)$ 的图象经过 $A(-3,2)$，$B(n,-3)$ 两点，∴ $m=-3\times 2=-3n$，∴ $n=2$. 直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 沿 y 轴向下平移 2 个单位后，得到直线 $y=kx+b-2$，将 $A(-3,2)$，$B(2,-3)$ 代入，得 $\begin{cases}-3k+b-2=2,\\2k+b-2=-3,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=1,\end{cases}$ ∴ $k+b=-1+1=0$. 故选 A.

8. 10 **【解析】**由题可知直线 l 的解析式是 $y=x-b$，与 $y=\frac{5}{x}$ 联立得 $x-b=\frac{5}{x}$，即 $x^2-bx=5$. 直线 $y=x-b$ 与 x 轴交点 B 的坐标是 $(b,0)$. 设 A 的坐标是 (x,y)，∴ $OA^2-OB^2=x^2+y^2-b^2=x^2+(x-b)^2-b^2=2x^2-2bx=2(x^2-bx)=2\times 5=10$. 故答案为 10.

9. -25 **【解析】**∵ 直线 $l:y=x+b$ 与 y 轴、x 轴分别交于 A，$B(-10,0)$ 两点，∴ $0=-10+b$，∴ $b=10$，∴ $y=x+10$. 令 $x=0$，则 $y=10$，∴ $A(0,10)$，∴ $OA=OB=10$. ∵ $OP\perp l$ 于 P，∴ P 是 AB 的中点，∴ $P(-5,5)$. ∵ 双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 过点 P，∴ $k=-5\times 5=-25$. 故答案为 -25.

10.【解】(1) 把 $A(0,-4)$，$B(2,0)$ 代入一次函数 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}b=-4,\\2k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\b=-4,\end{cases}$

$\therefore$ 一次函数的解析式为 $y=2x-4$.

当 $x=3$ 时，$y=2\times3-4=2$，$\therefore$ 点 $C(3,2)$.

$\because$ 点 C 在反比例函数 $y=\frac{m}{x}$的图象上，$\therefore m=3\times2=6$，

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y=\frac{6}{x}$. 即一次函数的解析式为 $y=2x-4$，反比例函数的解析式为$y=\frac{6}{x}$.

(2) $\because$ 点 P 在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$的图象上，点 Q 在一次函数 $y=2x-4$ 的图象上，

$\therefore$ 点 $P\left(n,\frac{6}{n}\right)$，点 $Q(n,2n-4)$，$\therefore PQ=\frac{6}{n}-(2n-4)$，

$\therefore S_{\triangle PDQ}=\frac{1}{2}n\left[\frac{6}{n}-(2n-4)\right]=-n^2+2n+3=-(n-1)^2+4$，

$\therefore$ 当 $n=1$ 时，$S_{\triangle PDQ}$最大，最大值为 4.

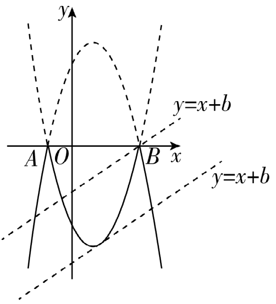
▼考点 11　二次函数及其应用

1. D　【解析】∵ 函数 $y=-(x+2)^2-1$，∴ 该函数图象开口向下，故选项 A 错误；顶点坐标为 $(-2,-1)$，故选项 B 错误；当 $x=0$ 时，$y=-5$，即该函数图象与 y 轴的交点为 $(0,-5)$，故选项 C 错误；对称轴是直线 $x=-2$，故选项 D 正确. 故选 D.

2. D　【解析】∵ 一次函数 $y=ax+b$ 的图象经过第一、二、四象限，∴ $a<0$，$b>0$，∴ 二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象开口方向向下，对称轴在 y 轴右侧. 故选 D.

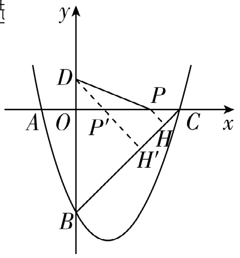
3. D　【解析】∵ 二次函数 $y=ax^2-bx$ 的图象开口向上，∴ $a>0$. ∵ 对称轴在 y 轴右侧，∴ $b>0$，∴ $a+b>0$，∴ 一次函数 $y=(a+b)x+b$ 的图象不经过第四象限. 故选 D.

4. A　【解析】二次函数解析式为 $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，∴ 抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 的顶点坐标为 $(1,4)$. 当 $y=0$ 时，$x^2-2x-3=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$，则抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴的交点为 $A(-1,0)$，$B(3,0)$，把抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 图象 x 轴上方的部分沿 x 轴翻折到 x 轴下方，则翻折部分的抛物线解析式为 $y=(x-1)^2-4(-1\leqslant x\leqslant 3)$，顶点坐标为 $(1,-4)$. 如图，当直线 $y=x+b$ 过点 B 时，直线 $y=x+b$ 与该新图象恰好有三个公共点，∴ $3+b=0$，解得 $b=-3$；当直线 $y=x+b$ 与抛物线 $y=(x-1)^2-4(-3\leqslant x\leqslant 1)$ 相切时，直线 $y=x+b$ 与该新图象恰好有三个公共点，即 $(x-1)^2-4=x+b$ 有两个相等的实数解，整理得 $x^2-3x-b-3=0$，∴ $\Delta=(-3)^2-4(-b-3)=0$，解得 $b=-\dfrac{21}{4}$，所以 b 的值为 -3 或 $-\dfrac{21}{4}$. 故选 A.



5. D　【解析】∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，$a>0$，对称轴为直线 $x=2$，∴ 当 $x>2$ 时，y 随着 x 的增大而增大，故 A 正确；∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象过点 $(-1,0)$，∴ $a-b+c=0$，即 $a+c=b$，∴ $(a+c)^2=b^2$，故 B 正确. ∵ $A(x_1,m)$，$B(x_2,m)$ 是抛物线上的两点，∴ 抛物线对称轴为 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$，∴ $2x=x_1+x_2$. ∵ $x=x_1+x_2$，∴ $2x=x$，∴ $x=0$，∴ 此时，$y=$

$ax^2+bx+c=c$，故 C 正确. ∵ 抛物线 $y=a(x+1)(5-x)$ 与 x 轴交于 $(-1,0)$，$(5,0)$ 两点，∴ 抛物线与直线 $y=-1$ 的交点横坐标 $x_1>-1$，$x_2<5$，∴ 若方程 $a(x+1)(x-5)=-1$ 的两根为 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则 $-1<x_1<x_2<5$，故 D 错误. 故选



6. A　【解析】如图，作 $PH\perp BC$ 于 H，$DH'\perp BC$ 于 H'，交 OC 于点 P'. ∵ $B(0,-3)$，二次函数解析式为 $y=x^2-2x+c$，∴ $c=-3$，∴ 二次函数解析式为 $y=x^2-2x-3$. 当 $x^2-2x-3=0$ 时，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$，∴ $A(-1,0)$，$C(3,0)$. ∵ $OB=OC=3$，$\angle BOC=90°$，∴ $\angle PCH=45°$. 在 Rt$\triangle PCH$ 中，$PH=\frac{\sqrt{2}}{2}PC$.

∵ $\sqrt{2}DP+PC=\sqrt{2}\left(PD+\frac{\sqrt{2}}{2}PC\right)=\sqrt{2}(PD+PH)$. 根据垂线段最短可知，当 D，P，H 共线时，$\sqrt{2}DP+PC$ 的值最小，最小值为 $\sqrt{2}DH'$. 在 Rt$\triangle DH'B$ 中，∵ $BD=OB+OD=4$，$\angle DBH'=45°$，∴ $DH'=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=2\sqrt{2}$，

∴ $\sqrt{2}DP+PC$ 的最小值为 $\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4$，故选 A.

7. (1) 1　(2) $m=-1$ 或 $-17<m\leqslant-10$

【解析】(1) ∵ 抛物线 $y=ax^2-4x+5$ 的对称轴为直线 $x=2$，∴ $-\frac{-4}{2a}=2$，∴ $a=1$. 故答案为 $a=1$.

(2) 由 (1) 知，$a=1$，∴ 抛物线 $y=ax^2-4x+5+m$ 为 $y=x^2-4x+5+m$. 由题意可知 $\Delta\geqslant0$，∴ $16-4(5+m)\geqslant0$，解得 $m\leqslant-1$. ∵ 对称轴为直线 $x=2$，∴ 抛物线 $y=x^2-4x+5+m$ 在 $-1<x<6$ 内与 x 轴只有一个交点，分两种情况：①抛物线 $y=x^2-4x+5+m$ 的顶点是 $(2,0)$，∴ $0=4-4\times2+5+m$，解得 $m=-1$；②当 $x=-1$ 和 $x=6$ 时，对应的函数值异号，而当 $x=-1$ 时，$y=10+m$，$x=6$ 时，$y=17+m$，

∴ $\begin{cases}10+m>0,\\17+m<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}10+m<0,\\17+m>0,\end{cases}$ 解得 $-17<m<-10$.

当 $m=-17$ 时，抛物线 $y=x^2-4x+5+m$ 在 $-1<x<6$ 内没有交点，当 $m=-10$ 时，抛物线 $y=x^2-4x+5+m$ 在 $-1<x<6$ 有一个交点 $(5,0)$，符合题意. 综上所述，m 取值范围是 $m=-1$ 或 $-17<m\leqslant-10$. 故答案为 $m=-1$ 或 $-17<m\leqslant-10$.

8.【解】(1) 设点 A，B 坐标分别为 $(m,0)$，$(0,n)$，

将两坐标分别代入直线解析式 $y=-\frac{3}{4}x+3$，得 $0=$

$-\frac{3}{4}m+3, n=3$，解得 $m=4, n=3$，

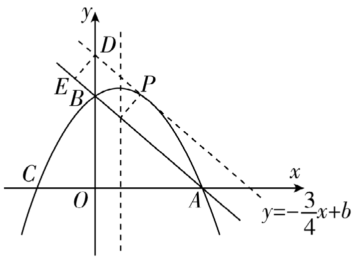
∴ 点 A,B 坐标分别为 $(4,0),(0,3)$.

将 $A(4,0),B(0,3)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$，

得 $\begin{cases}0=-16+4b+c,\\3=c,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=\frac{13}{4},\\c=3,\end{cases}$

∴ 抛物线的函数解析式为 $y=-x^2+\frac{13}{4}x+3$.

(2) 如图，根据题意可设点 P 到直线 AB 的距离取得最大值时经过的直线为 $y=-\frac{3}{4}x+b$，



联立 $\begin{cases}y=-x^2+\frac{13}{4}x+3,\\y=-\frac{3}{4}x+b,\end{cases}$

整理，得 $x^2-4x+b-3=0$.

令 $\Delta=0$，则有 $16-4(b-3)=0$，解得 $b=7$，

∴ 此时点 P 所在直线为 $y=-\frac{3}{4}x+7$.

设直线 $y=-\frac{3}{4}x+7$ 与 y 轴的交点为点 $D(0,7)$，过点 D 作 $DE\perp AB$ 交其延长线于点 E，则有 $BD=4$，$OA=4, OB=3$，∴ $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$.

∵ $\angle DEB=\angle AOB=90°, \angle DBE=\angle ABO$，

∴ $\triangle DEB\backsim\triangle AOB$，∴ $\frac{DE}{AO}=\frac{BD}{AB}$，

即 $\frac{DE}{4}=\frac{4}{5}$，解得 $DE=\frac{16}{5}$，

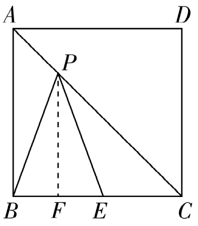
∴ 点 P 到直线 AB 的距离最大值是 $\frac{16}{5}$.

▼考点 12　二次函数图象与 a,b,c 的关系

1. A　【解析】①由图象可知 $a<0,b>0,c>0$，$\therefore abc<0$，故①正确；②当 $x=3$ 时，函数值小于 0，即 $y=9a+3b+c<0$，且 $x=-\dfrac{b}{2a}=1$，即 $a=-\dfrac{b}{2}$，代入得 $9\times\left(-\dfrac{b}{2}\right)+3b+c<0$，得 $2c<3b$，故②正确；③由对称知，当 $x=2$ 时，函数值大于 0，即 $y=4a+2b+c>0$，故③错误；④当 $x=1$ 时，y 的值最大，此时，$y=a+b+c$. 而当 $x=m$ 时，$y=am^2+bm+c$，所以 $a+b+c\geqslant am^2+bm+c$，故 $a+b\geqslant am^2+bm$，即 $a+b\geqslant m(am+b)$，故④错误. 故正确的结论有①②. 故选 A.

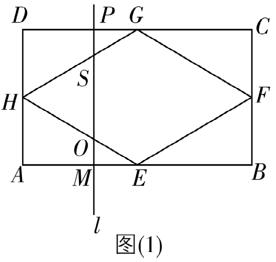
2. B　【解析】由抛物线的开口向下可得 $a<0$，根据抛物线的对称轴在 y 轴右边可得 a,b 异号，所以 $b>0$，根据抛物线与 y 轴的交点在正半轴可得 $c>0$，$\therefore abc<0$，故①错误；$\because$ 抛物线与 x 轴有两个交点，$\therefore b^2-4ac>0$，故②正确；$\because$ 直线 $x=1$ 是抛物线 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的对称轴，所以 $-\dfrac{b}{2a}=1$，可得 $b=-2a$，由图象可知，当 $x=-2$ 时，$y<0$，即 $4a-2b+c<0$，$\therefore 4a-2\times(-2a)+c<0$，即 $8a+c<0$，故③正确；由图象可知，当 $x=2$ 时，$y=4a+2b+c>0$；当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c>0$，两式相加得 $5a+b+2c>0$，故④正确. $\therefore$ 结论正确的是②③④，共 3 个. 故选 B.

3. D　【解析】如图，过点 P 作 $PF\perp BC$ 于 F. $\because PE=PB$，$\therefore BF=EF$. $\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$\therefore AC=\sqrt{2}$. $\because AP=x$，$\therefore PC=\sqrt{2}-x$，$\therefore PF=FC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2}-x)=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$\therefore BF=EF=1-FC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$\therefore y=\dfrac{1}{2}BE\cdot PF=\dfrac{1}{2}\times2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\right)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\,(0<x<\sqrt{2})$. 故选 D.



4. D　【解析】①如图(1)，当 M 点在 AE 段运动，即 $0\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 时，$S=S_{\triangle HAE}+S_{\triangle GHD}-S_{\triangle EOM}-S_{\triangle GPS}$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，直线 $l\perp AB$，H,E,F,G 分别为 AD,AB,BC,CD 的中点，$\therefore AH=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{1}{2}BC=1$，

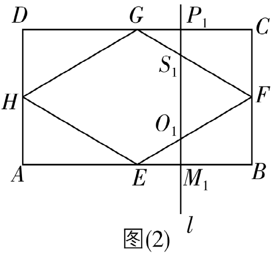
$AE=\frac{1}{2}AB=\sqrt{3}$，$S_{\triangle HAE}=S_{\triangle GHD}$，$S_{\triangle EOM}=S_{\triangle GPS}$，$\therefore S=2S_{\triangle HAE}-2S_{\triangle EOM}$，$\therefore S_{\triangle HAE}=\frac{1}{2}AE\cdot AH=\frac{\sqrt{3}}{2}$；$\because$ 直线 $l\perp AB$，$\therefore \angle OME=\angle A=90°$，$\angle HEA=\angle OEM$，$\therefore \triangle HAE\backsim\triangle OME$，$\therefore \frac{AH}{AE}=\frac{OM}{ME}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\therefore OM=\frac{\sqrt{3}}{3}ME$.



图(1)

又$\because ME=AE-AM=\sqrt{3}-x$，$\therefore OM=\frac{\sqrt{3}}{3}ME=\frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-x)$，$\therefore S_{\triangle EOM}=\frac{1}{2}OM\cdot ME=\frac{\sqrt{3}}{6}(\sqrt{3}-x)^2$，$\therefore S=2S_{\triangle HAE}-2S_{\triangle EOM}=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-x)^2$，此时，对应抛物线开口向下；

②如图(2)，当 M 点在 BE 段运动，即 $\sqrt{3}<x\leqslant 2\sqrt{3}$ 时，$S=S_{\triangle HAE}+S_{\triangle GHD}+S_{\triangle EO_1M_1}+S_{\triangle GP_1S_1}$，即 $S=2S_{\triangle HAE}+2S_{\triangle EO_1M_1}$. 与①同理，$O_1M_1=\frac{\sqrt{3}}{3}M_1E$. 又$\because M_1E=AM_1-AE=x-\sqrt{3}$，$\therefore O_1M_1=\frac{\sqrt{3}}{3}M_1E=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$，$\therefore S_{\triangle EO_1M_1}=\frac{1}{2}O_1M_1\cdot M_1E=\frac{\sqrt{3}}{6}(x-\sqrt{3})^2$，$\therefore S=2S_{\triangle HAE}+2S_{\triangle EO_1M_1}=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})^2$，此时，对应抛物线开口向上. 故选 D.



图(2)

5. ①②④ 【解析】由图象可得，$a<0$，$b>0$，$c>0$，则 $abc<0$，故①正确；$\because -\frac{b}{2a}=1$，$\therefore b=-2a$，$\therefore 2a+b=0$，故②正确；$\because$ 函数图象与 x 轴的正半轴交点在点$(2,0)$和$(3,0)$之间，对称轴是直线 $x=1$，$\therefore$ 函数图象与 x 轴的另一个交点在点$(0,0)$和点$(-1,0)$之间，故④正确；$\therefore$ 当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c<0$，$\therefore y=a+2a+c<0$，$\therefore 3a+c<0$，故③错误. 故答案为①②④.

▼考点 13　二次函数的应用

1.【解】【尝试】(1) 当 $t=2$ 时，$y=2(x^2-4x+3)+(1-2)(-x+1)=2x^2-7x+5$，

函数的对称轴为 $x=\frac{7}{4}$，故顶点坐标为 $\left(\frac{7}{4},-\frac{9}{8}\right)$.

故答案为 $\left(\frac{7}{4},-\frac{9}{8}\right)$.

(2) 当 $x=1$ 时，$y=t(x^2-4x+3)+(1-t)(-x+1)=0$，

故点 A 在抛物线 E 上.

(3) 当 $x=2$ 时，$n=y=t(x^2-4x+3)+(1-t)(-x+1)=-1$.

【发现】由(2)和(3)的演算可知，对于 t 取任何不为零的实数，抛物线 E 总过定点，定点坐标为 $(1,0)$ 和 $(2,-1)$.

故答案为 $(1,0)$ 和 $(2,-1)$.

【应用】是. 理由：

由题意，得 $y=-3x^2+8x-5=t(x^2-4x+3)+(1-t)(-x+1)$，

化简并整理得 $t=-3$.

2.【解】(1) ∵ 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 经过点 $B(0,3)$ 和点 $A(3,0)$，∴ $\begin{cases}c=3,\\-9+3b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\c=3,\end{cases}$

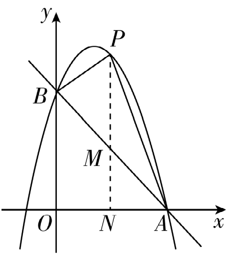
∴ 抛物线的函数解析式是 $y=-x^2+2x+3$.

设直线 AB 的函数解析式为 $y=kx+m(k\neq0)$，

根据题意得 $\begin{cases}m=3,\\3k+m=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\m=3,\end{cases}$

∴ 直线 AB 的函数解析式是 $y=-x+3$.

(2) 如图，过 P 点作 $PN\perp OA$ 于 N，交直线 AB 于 M. 设点 P 横坐标为 a，则点 P 的坐标为 $(a,-a^2+2a+3)$，点 M 的坐标是 $(a,-a+3)$.



又∵ 点 P，M 在第一象限，

∴ $PM=-a^2+2a+3-(-a+3)=-a^2+3a$，

∴ $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PAM}+S_{\triangle PBM}=\frac{1}{2}PM\cdot OA=\frac{1}{2}(-a^2+3a)\times3=-\frac{3}{2}\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$，

∴ 当 $a=\frac{3}{2}$ 时，$S_{\triangle PAB}$ 有最大值，最大值为 $\frac{27}{8}$，

此时点 P 坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$.

3.【解】(1)∵ 直线 $y=kx+2$ 经过 A,C 两点,

∴ 当 $x=0$ 时,$y=2$,∴ $C(0,2)$. 将 $B(1,0)$,$C(0,2)$

代入抛物线得 $\begin{cases} a-\dfrac{3}{2}+c=0, \\ c=2, \end{cases}$ ∴ $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}, \\ c=2. \end{cases}$

∴ 抛物线的解析式为 $y=-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x+2$.

当 $y=0$ 时,$x_1=-4$,$x_2=1$,∴ $A(-4,0)$.

将 $A(-4,0)$ 代入直线 $y=kx+2$ 得 $k=\dfrac{1}{2}$,

∴ $a=-\dfrac{1}{2}$,$c=2$,$k=\dfrac{1}{2}$.

(2)根据(1)可得直线 $y=\dfrac{1}{2}x+2$.

设点 $D\left(m,\dfrac{1}{2}m+2\right)$,∴ $E\left(m,-\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{3}{2}m+2\right)$.

∵ $EF\perp y$ 轴,∴ $F\left(-m^2-3m,-\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{3}{2}m+2\right)$,

∴ $DE=-\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{3}{2}m+2-\left(\dfrac{1}{2}m+2\right)=-\dfrac{1}{2}m^2-2m$,$EF=-m^2-3m-m=-m^2-4m$,

∴ 矩形 $DEFG$ 的周长 $l=2(DE+EF)=-3m^2-12m=-3(m+2)^2+12$,

∴ 当 $m=-2$ 时,l 的最大值为 12.

4.【解】(1)将点 $A(-1,0)$,$B(3,0)$,$C(0,3)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$,得 $\begin{cases} 0=a-b+c, \\ 0=9a+3b+c, \\ 3=c, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-1, \\ b=2, \\ c=3, \end{cases}$

∴ 该抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)设点 $F(x,-x^2+2x+3)$,则点 $E(x,0)$.

∵ $EF=AE$,∴ $-x^2+2x+3=x+1$,

解得 $x=2$ 或 $x=-1$.

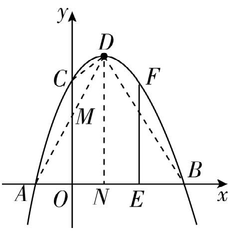
∵ 点 E 不与 A,B 重合,∴ $x=2$,

∴ $y_F=-x^2+2x+3=3$,∴ 点 $F(2,3)$.

(3)∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过点 $A(-1,0)$,$B(3,0)$,∴ $y=a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)=a(x-1)^2-4a$,

∴ 点 C 坐标为 $(0,-3a)$,点 D 坐标为 $(1,-4a)$.

如图,连接 CD,AD,BD,且 AD 与 y 轴交于点 M,过点 D 作 $DN\perp x$ 轴于 N,∴ $\dfrac{AO}{AN}=\dfrac{MO}{DN}$,



即 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{MO}{-4a}$,解得 $MO=-2a$,

∴ $CM=CO-OM=-3a-(-2a)=-a$,

$S_1=\frac{1}{2}\times CM\times(AO+ON)=\frac{1}{2}\times(-a)\times(1+1)=-a$,

$S_2=\frac{1}{2}\times AB\times DN=\frac{1}{2}\times4\times(-4a)=-8a$,

$\therefore\frac{S_1}{S_2}=\frac{-a}{-8a}=\frac{1}{8}$.

5.【解】(1)把 $x=0$ 代入 $y=\frac{1}{2}x-2$,得 $y=-2$,

$\therefore C(0,-2)$.

把 $y=0$ 代入 $y=\frac{1}{2}x-2$,得 $x=4$,$\therefore B(4,0)$.

设抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}(x-4)(x-m)$,

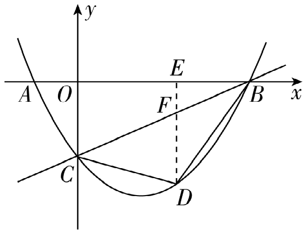
将 $C(0,-2)$ 代入,得 $2m=-2$,解得 $m=-1$,

$\therefore A(-1,0)$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}(x-4)(x+1)$,

即 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2$.

(2)如图(1)所示,过点 D 作 $DE\perp x$ 轴,垂足为 E,交 BC 与点 F. 设 $D\left(x,\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2\right)$,则 $F\left(x,\frac{1}{2}x-2\right)$,$\therefore DF=\left(\frac{1}{2}x-2\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x-2\right)=-\frac{1}{2}x^2+2x$,



图(1)

$\therefore S=S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}OB\cdot DF=\frac{1}{2}\times4\times\left(-\frac{1}{2}x^2+2x\right)=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$,

$\therefore$ 当 $x=2$ 时,S 有最大值,最大值为 4.

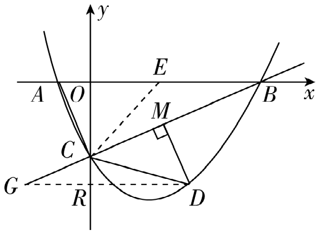
(3)如图(2)所示,过点 D 作 $DR\perp y$ 轴,垂足为 R,直线 DR 交直线 BC 于点 G.

$\because A(-1,0)$,$B(4,0)$,$C(0,-2)$,

$\therefore AC=\sqrt{5}$,$BC=2\sqrt{5}$,$AB=5$,

$\therefore AC^2+BC^2=AB^2$,

$\therefore\triangle ABC$ 为直角三角形,$\angle ACB=90°$.



图(2)

取 AB 的中点 E,连接 CE,则 $CE=BE=AE$,

$\therefore\angle OEC=2\angle ABC$,$\tan\angle OEC=\frac{OC}{OE}=\frac{4}{3}$.

①当$\angle MCD=2\angle ABC$时，即$\angle MCD=\angle OEC$.

$\because \angle OEC+\angle OCE=90°$，

$\therefore \angle MCD+\angle OCE=90°$，$\therefore \angle ECM+\angle DCR=90°$.

又$\because \angle ECB=\angle EBC$，$\angle EBC+\angle OCB=90°$，

$\therefore \angle DCR=\angle OCB$.

又$\because \angle COB=\angle CRD=90°$，

$\therefore \triangle OCB\backsim\triangle RCD$，$\therefore \dfrac{OC}{CR}=\dfrac{OB}{RD}$.

设$D\left(x,\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2}x-2\right)$，则$DR=x$，$CR=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x$，$\therefore \dfrac{2}{-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x}=\dfrac{4}{x}$，

解得$x=0$(舍去)或$x=2$，

$\therefore$点D的横坐标为2.

②当$\angle CDM=2\angle ABC$时，$\angle CDM=\angle OEC$，$\tan\angle CDM=\dfrac{4}{3}$，设$MD=3k$，$CM=4k$，$CD=5k$，$k>0$，$\tan\angle ABC=\dfrac{1}{2}$.

$\because DR/\!/OB$，$\therefore \angle OBC=\angle MGD$，

$\therefore \tan\angle MGD=\dfrac{1}{2}$，$\therefore GM=6k$，$GD=3\sqrt{5}k$，

$\therefore GC=MG-CM=2k$.

$\because DR/\!/OB$，$\therefore \triangle GRC\backsim\triangle BOC$，$\therefore \dfrac{GR}{OB}=\dfrac{CR}{OC}=\dfrac{GC}{BC}$，

$\therefore GR=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}k$，$CR=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}k$，$\therefore RD=3\sqrt{5}k-\dfrac{4\sqrt{5}}{5}k=\dfrac{11\sqrt{5}}{5}k$，$\therefore \dfrac{CR}{DR}=\dfrac{-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{3}{2}x}{x}=\dfrac{\dfrac{2\sqrt{5}k}{5}}{\dfrac{11\sqrt{5}k}{5}}$，

整理得$-\dfrac{11}{2}x^2+\dfrac{29}{2}x=0$，解得$x=0$(舍去)或$x=\dfrac{29}{11}$，

$\therefore$点D的横坐标为$\dfrac{29}{11}$.

综上所述，当点D的横坐标为2或$\dfrac{29}{11}$时，$\triangle CDM$中的一个角恰好等于$\angle ABC$的2倍.

6.【解】(1)设$y=kx+b$(k，b为常数，$k\neq0$).

根据题意得$\begin{cases}25k+b=110,\\30k+b=100,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-2,\\b=160,\end{cases}$

$\therefore y$关于x的函数解析式为$y=-2x+160$.

(2)设售价是x元/千克时，日销售利润为w元.

根据题意，得$w=(-2x+160)(x-20)=-2x^2+200x-3\ 200=-2(x-50)^2+1\ 800$，

$\therefore$ 当 $x=50$ 时，w 有最大值，最大值为 1 800.

答：当售价是 50 元/千克时，日销售利润最大，最大利润是 1 800 元.

(3) 根据题意，得 $w=(x-20-m)(-2x+160)=-2x^2+(200+2m)x-3\ 200-160m$.

$\because$ 对称轴为 $x=\frac{100+m}{2}$，

$\therefore$ ①当 $\frac{100+m}{2}<40$ 时，$m<-20$，不合题意；

②当 $\frac{100+m}{2}\geqslant 40$，即 $x=40$ 时，w 取得最大值，最大值为 1 280，即 $-2\times 40^2+(200+2m)\times 40-3\ 200-160m=1\ 280$，解得 $m=4$.

7.【解】(1) 设 y 与 x 之间的函数解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，将表中数据 (55，70)，(60，60) 代入得 $\begin{cases}55k+b=70,\\60k+b=60,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=180.\end{cases}$

$\therefore$ y 与 x 之间的函数解析式为 $y=-2x+180$.

(2) 由题意，得 $(x-50)(-2x+180)=600$，

整理，得 $x^2-140x+4\ 800=0$，

解得 $x_1=60$，$x_2=80$.

答：为保证某天获得 600 元的销售利润，则该天的销售单价应定为 60 元/千克或 80 元/千克.

(3) 设当天的销售利润为 w 元，则 $w=(x-50)(-2x+180)=-2(x-70)^2+800$.

$\because -2<0$，$\therefore$ 当 $x=70$ 时，$w_{最大}=800$.

答：当销售单价定为 70 元/千克时，才能使当天的销售利润最大，最大利润是 800 元.

8.【解】(1) 由题意可得，当 $x>0$ 时，抛物线的解析式为 $y=a(x-4)^2+6(0\leqslant x\leqslant 10)$，把 (10，0) 代入得 $0=a(10-4)^2+6$，解得 $a=-\frac{1}{6}$，

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{6}(x-4)^2+6(0\leqslant x\leqslant 10)$.

令 $x=0$，得 $y=-\frac{1}{6}\times 16+6=\frac{10}{3}$，

$\therefore$ 这个装饰物的高度为 $\frac{10}{3}$ 米.

(2) $\because$ 当 $x>0$ 时，抛物线 $y=-\frac{1}{6}(x-4)^2+6$ 的对称轴为 $x=4$，喷水头以水池为圆心，分别以 1.5 米，3 米，4.5 米，6 米，7.5 米为半径呈圆形放置，

$\therefore$ 当 $x=4.5$ 时，可达到最高喷射高度，此时 $y=\frac{143}{24}$，$\therefore$ 直线型喷水头最高喷射高度为 $\frac{143}{24}$ 米.