第二部分 | 热点猜押

▼热点一　相似常考模型

1.【解】$\because DE\perp AB$，$\therefore \angle BED=90°$.

又$\because \angle C=90°$，$\therefore \angle BED=\angle C$.

又$\because \angle B=\angle B$，$\therefore \triangle BED\backsim\triangle BCA$，

$\therefore \dfrac{BD}{AB}=\dfrac{DE}{AC}$，$\therefore DE=\dfrac{BD\cdot AC}{AB}=\dfrac{8\times7}{14}=4$.

2.【解】(1)$\because$ 四边形 $BFED$ 是平行四边形，

$\therefore DE/\!/BF$，$\therefore DE/\!/BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{1}{4}$. $\because AB=8$，$\therefore AD=2$.

(2)$\because \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{DE}{BC}\right)^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$.

$\because \triangle ADE$ 的面积为 1，$\therefore \triangle ABC$ 的面积是 16.

$\because$ 四边形 $BFED$ 是平行四边形，

$\therefore EF/\!/AB$，$DE=BF$，$\therefore \triangle EFC\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{CF}{BC}\right)^2=\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{9}{16}$，$\therefore \triangle EFC$ 的面积为 9，$\therefore$ 平行四边形 $BFED$ 的面积为 $16-9-1=6$.

3. (1)【证明】$\because \angle BCE=\angle ACD$，

$\therefore \angle BCE+\angle ACE=\angle ACD+\angle ACE$，

$\therefore \angle ACB=\angle DCE$.

又$\because \angle A=\angle D$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle DEC$.

(2)【解】$\because \triangle ABC\backsim\triangle DEC$，$\therefore \dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle DEC}}=\left(\dfrac{CB}{CE}\right)^2=\dfrac{4}{9}$，

$\therefore \dfrac{CB}{CE}=\dfrac{2}{3}$. 又$\because BC=6$，$\therefore CE=9$.

4. (1)【证明】$\because BD$ 是$\triangle ABC$ 的角平分线，

$\therefore \angle ABD=\angle CBD$.

$\because AB=AE$，$\therefore \angle ABD=\angle E$，$\therefore \angle E=\angle CBD$.

$\because \angle EDA=\angle BDC$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle CDB$.

(2)【解】$\because AE=AB$，$AB=6$，$\therefore AE=6$.

$\because \triangle ADE\backsim\triangle CDB$，$\therefore \dfrac{AE}{BC}=\dfrac{DE}{BD}$.

$\because BD=4$，$DE=5$，$\therefore \dfrac{6}{BC}=\dfrac{5}{4}$，$\therefore BC=\dfrac{24}{5}$.

5. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore AD/\!/BC$，$AD=BC$，$\therefore \angle ADE=\angle ECF$.

$\because E$ 为 DC 中点,$\therefore DE=CE$.

$\because \angle AED=\angle CEF$,$\therefore \triangle ADE\cong\triangle FCE$(ASA),

$\therefore AD=CF$,$\therefore BC=CF$.

(2)【解】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,E 为 DC 中点,$\therefore AB/\!/CD$,$AB=CD=2EC$,

$\therefore \angle GEC=\angle ABG$,$\angle GCE=\angle GAB$,

$\therefore \triangle CEG\backsim\triangle ABG$,$\therefore \dfrac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle CEG}}=\left(\dfrac{AB}{CE}\right)^2=4$.

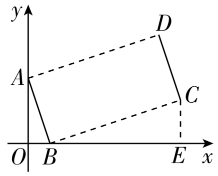
$\because \triangle GEC$ 的面积为 2,$\therefore S_{\triangle ABG}=4S_{\triangle CEG}=8$.

$\because \triangle CEG\backsim\triangle ABG$,$\therefore \dfrac{AG}{GC}=\dfrac{AB}{CE}=2$,

$\therefore S_{\triangle BCG}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABG}=4$,$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABG}+S_{\triangle BCG}=12$,

$\therefore S_{平行四边形ABCD}=2S_{\triangle ABC}=24$.

6. D 【解析】如图,过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于点 E. $\because \angle ABC=90°$,$\therefore \angle ABO+\angle CBE=90°$. $\because \angle CBE+\angle BCE=90°$,$\therefore \angle ABO=\angle BCE$. $\because \angle AOB=\angle BEC=90°$,$\therefore \triangle ABO\backsim\triangle BCE$,$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AO}{BE}=\dfrac{OB}{EC}=\dfrac{1}{2}$,$\therefore BE=2OA=6$,$EC=2OB=2$,$\therefore$ 点 C 是点 B 向右平移 6 个单位,再向上平移 2 个单位得到的,$\therefore$ 点 D 是点 A 向右平移 6 个单位,再向上平移 2 个单位得到的. $\because A(0,3)$,$\therefore D(6,5)$,故选 D.



7.【证明】(1)$\because AB=AC$,$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because \angle BDE=180°-\angle B-\angle DEB$,$\angle CEF=180°-\angle DEF-\angle DEB$,$\angle DEF=\angle B$,$\therefore \angle BDE=\angle CEF$,

$\therefore \triangle BDE\backsim\triangle CEF$.

(2)$\because \triangle BDE\backsim\triangle CEF$,$\therefore \dfrac{BE}{CF}=\dfrac{DE}{EF}$.

$\because$ 点 E 是 BC 的中点,$\therefore BE=CE$,$\therefore \dfrac{CE}{CF}=\dfrac{DE}{EF}$.

$\because \angle DEF=\angle B=\angle C$,$\therefore \triangle DEF\backsim\triangle ECF$,

$\therefore \angle DFE=\angle CFE$,$\therefore FE$ 平分 $\angle DFC$.

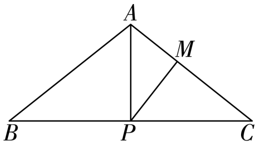
8. (1)【证明】$\because AB=AC$,$\therefore \angle B=\angle C$.

$\because \angle BAP+\angle B+\angle APB=180°=\angle APB+\angle APM+\angle CPM$,$\angle APM=\angle B$,$\therefore \angle BAP=\angle CPM$,

$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle PCM$.

(2)【解】$\because$ $\triangle ABP \backsim \triangle PCM$，$\triangle PCM$ 为直角三角形，$\therefore$ $\triangle ABP$ 为直角三角形.

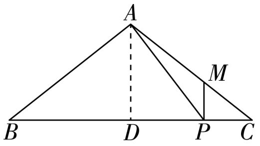
①当 $\angle APB=90°$ 时，如图(1)所示.



图(1)

$\because AB=AC$，$\therefore BP=PC=\dfrac{1}{2}BC=4\ \text{cm}$；

②当 $\angle BAP=90°$ 时，过点 A 作 $AD\perp BC$ 于点 D，如图(2)所示.



图(2)

$\because AB=AC$，$\therefore BD=\dfrac{1}{2}BC=4\ \text{cm}$. $\because \cos\angle ABP=\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{AB}{BP}=\dfrac{4}{5}$，$\therefore \dfrac{5}{BP}=\dfrac{4}{5}$，$\therefore BP=\dfrac{25}{4}\ \text{cm}$.

综上所述，当 $\triangle PCM$ 为直角三角形时，线段 PB 的长为 $4\ \text{cm}$ 或 $\dfrac{25}{4}\ \text{cm}$.

▼热点二　二次函数与几何综合

1.【解】(1)将 $A(0,3)$ 和 $B\left(\frac{7}{2},-\frac{9}{4}\right)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$，得 $\begin{cases}c=3,\\-\left(\frac{7}{2}\right)^2+\frac{7}{2}b+c=-\frac{9}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\c=3,\end{cases}$

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)设直线 AB 的解析式为 $y=kx+n$. 把 $A(0,3)$ 和 $B\left(\frac{7}{2},-\frac{9}{4}\right)$ 代入，得 $\begin{cases}n=3,\\\frac{7}{2}k+n=-\frac{9}{4},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-\frac{3}{2},\\n=3,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{3}{2}x+3$.

当 $y=0$ 时，$-\frac{3}{2}x+3=0$，解得 $x=2$，

$\therefore$ C 点坐标为 $(2,0)$.

$\because PD\perp x$ 轴，$PE/\!/x$ 轴，$\therefore \angle ACO=\angle DEP$，$\angle AOC=\angle DPE=90^\circ$，$\therefore \triangle DPE\backsim\triangle AOC$，

$\therefore \frac{PD}{PE}=\frac{OA}{OC}=\frac{3}{2}$，$\therefore PE=\frac{2}{3}PD$，$\therefore PD+PE=\frac{5}{3}PD$.

设点 P 的坐标为 $(a,-a^2+2a+3)$，则 D 点坐标为 $\left(a,-\frac{3}{2}a+3\right)$，

$\therefore PD=(-a^2+2a+3)-\left(-\frac{3}{2}a+3\right)=-\left(a-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{49}{16}$，

$\therefore PD+PE=-\frac{5}{3}\left(a-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{245}{48}$.

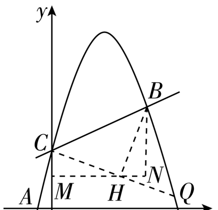
$\because -\frac{5}{3}<0$，$\therefore$ 当 $a=\frac{7}{4}$ 时，$PD+PE$ 有最大值，为 $\frac{245}{48}$.

2.【解】(1)将点 $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$，$B\left(3,\frac{7}{2}\right)$ 代入 $y=ax^2+bx+2$，得 $\begin{cases}\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}b+2=0,\\9a+3b+2=\frac{7}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=\frac{7}{2},\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+\frac{7}{2}x+2$.

(2)存在，点 Q 坐标为 $\left(\frac{23}{6},\frac{13}{18}\right)$ 或 $\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

①当 Q 在 BC 下方时，如图(1)，连接 CQ，过 B 作 $BH\perp CQ$ 于 H，过 H 作 $MH\perp y$ 轴交 y 轴



于 M，过 B 作 $BN\perp MH$ 交 MH 延长线于 N，则 $\angle BHC=\angle CMH=\angle HNB=90°$.

$\because\ \angle QCB=45°$，

$\therefore\ \triangle BHC$ 是等腰直角三角形，$\therefore\ CH=HB$，

$\therefore\ \angle CHM+\angle BHN=\angle HBN+\angle BHN=90°$，

$\therefore\ \angle CHM=\angle HBN$，$\therefore\ \triangle CHM\cong\triangle HBN(AAS)$，

$\therefore\ CM=HN$，$MH=BN$.

当 $x=0$ 时，$y=2$，则 C 点坐标为 $(0,2)$.

设点 H 的坐标为 (m,n)，则 $M(0,n)$，$N(3,n)$.

$\because\ C(0,2)$，$B\left(3,\dfrac{7}{2}\right)$，$\therefore\ CM=2-n$，$HN=3-m$，$MH=m$，$BN=\dfrac{7}{2}-n$，

$\therefore\ \begin{cases}2-n=3-m,\\ \dfrac{7}{2}-n=m,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\dfrac{9}{4},\\ n=\dfrac{5}{4},\end{cases}$ $\therefore\ H\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{5}{4}\right)$.

设直线 CH 的解析式为 $y=px+q$.

将 $C(0,2)$，$H\left(\dfrac{9}{4},\dfrac{5}{4}\right)$ 分别代入得

$\begin{cases}\dfrac{9}{4}p+q=\dfrac{5}{4},\\ q=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=-\dfrac{1}{3},\\ q=2,\end{cases}$

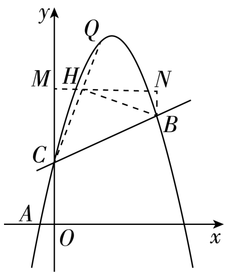
$\therefore$ 直线 CH 的解析式为 $y=-\dfrac{1}{3}x+2$.

联立直线 CH 与抛物线的解析式得 $\begin{cases}y=-x^2+\dfrac{7}{2}x+2,\\ y=-\dfrac{1}{3}x+2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=0,\\ y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\dfrac{23}{6},\\ y=\dfrac{13}{18},\end{cases}$ $\therefore\ Q\left(\dfrac{23}{6},\dfrac{13}{18}\right)$.

② 当 Q 在 BC 上方时，如图(2)，连接 CQ，过 B 作 $BH\perp CQ$ 于 H，过 H 作 $MN\perp y$ 轴交 y 轴于 M，过 B 作 $BN\perp MN$ 于 N.

同理得 $Q\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)$.



图(2)

综上，点 Q 的坐标为 $\left(\dfrac{23}{6},\dfrac{13}{18}\right)$

或$\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

3.【解】(1)$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴交于 $A(-2,0)$,$B(6,0)$两点,

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y=a(x+2)(x-6)$.

$\because D(4,3)$在抛物线上,$\therefore 3=a(4+2)\times(4-6)$,

解得 $a=-\frac{1}{4}$,$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{4}(x+2)(x-6)=-\frac{1}{4}x^2+x+3$.

设直线 l 的解析式为 $y=kx+m(k\neq 0)$.

$\because$ 直线 l 经过 $A(-2,0)$,$D(4,3)$,

$\therefore \begin{cases}-2k+m=0,\\4k+m=3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=\frac{1}{2},\\m=1,\end{cases}$

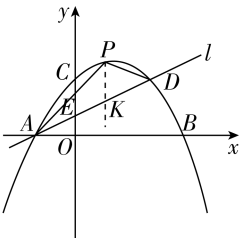
$\therefore$ 直线 l 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+1$.

(2)如图,过点 P 作 $PK/\!/y$ 轴交 AD 于点 K.

设 $P\left(m,-\frac{1}{4}m^2+m+3\right)$,则 $K\left(m,\frac{1}{2}m+1\right)$.

$\because S_{\triangle PAD}=\frac{1}{2}\cdot(x_D-x_A)\cdot PK=3PK$,

$\therefore$ 当 PK 的值最大时,$\triangle PAD$ 的面积最大.



$\because PK=-\frac{1}{4}m^2+m+3-\frac{1}{2}m-1=-\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{2}m+2=-\frac{1}{4}(m-1)^2+\frac{9}{4}$,$-\frac{1}{4}<0$,$\therefore$ 当 $m=1$ 时,$-\frac{1}{4}m^2+m+3=\frac{15}{4}$,且 PK 的值最大,最大值为$\frac{9}{4}$,此时$\triangle PAD$ 的面积的最大值为$\frac{27}{4}$,P 点坐标为$\left(1,\frac{15}{4}\right)$.

4.【解】(1)$\because$ 抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 的对称轴是直线 $x=1$,与 x 轴交于点 A,$B(3,0)$,$\therefore A(-1,0)$,

$\therefore \begin{cases}a-2+c=0,\\9a+6+c=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-1,\\c=3,\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2)存在.$\because y=-x^2+2x+3$,$\therefore C(0,3)$.

设直线 BC 的解析式为 $y=kx+3$.

将点 $B(3,0)$ 代入得 $0=3k+3$,解得 $k=-1$,

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y=-x+3$.

设点 D 坐标为 $(t,-t^2+2t+3)$,则点 $N(t,-t+3)$.

$\because A(-1,0),C(0,3)$,$\therefore AC^2=1^2+3^2=10$,

$AN^2=(t+1)^2+(-t+3)^2=2t^2-4t+10$,

$CN^2=t^2+(3+t-3)^2=2t^2$.

①当 $AC=AN$ 时,$AC^2=AN^2$,$\therefore 10=2t^2-4t+10$,

解得 $t_1=2$,$t_2=0$(不合题意,舍去),

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(2,1)$;

②当 $AC=CN$ 时,$AC^2=CN^2$,$\therefore 10=2t^2$,

解得 $t_3=\sqrt{5}$,$t_4=-\sqrt{5}$(不合题意,舍去),

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $(\sqrt{5},3-\sqrt{5})$;

③当 $AN=CN$ 时,$AN^2=CN^2$,

$\therefore 2t^2-4t+10=2t^2$,解得 $t=\dfrac{5}{2}$,

$\therefore$ 点 N 的坐标为 $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

综上,点 N 的坐标为$(2,1)$或$\left(\sqrt{5},3-\sqrt{5}\right)$或$\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{1}{2}\right)$.

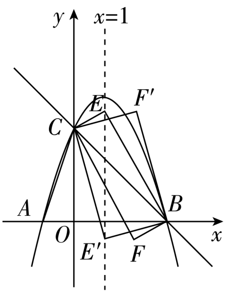
(3)存在,点 F 坐标为 $\left(2,\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$或$\left(2,\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$

或$(4,1)$或$(-2,1)$.

设 $E(1,a)$,$F(m,n)$.

$\because B(3,0),C(0,3)$,$\therefore BC=3\sqrt{2}$.

①当 BC 为对角线时,如图(1).



图(1)

$\because BC^2=CE^2+BE^2$,

$\therefore (3\sqrt{2})^2=1^2+(a-3)^2+a^2+(3-1)^2$,

解得 $a=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$或 $a=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$,

$\therefore$ 点 E 坐标为 $\left(1,\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$或$\left(1,\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

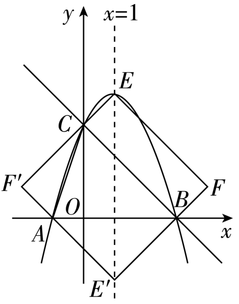
$\because B(3,0),C(0,3)$,

$\therefore m+1=0+3, n+\frac{3+\sqrt{17}}{2}=0+3$ 或 $n+\frac{3-\sqrt{17}}{2}=0+3$,

$\therefore m=2, n=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$ 或 $n=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$,

$\therefore$ 点 F 的坐标为 $\left(2,\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $\left(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

②当 BC 为边时,如图(2). $\because BE^2=CE^2+BC^2$ 或 $CE^2=BE^2+BC^2$, $\therefore a^2+(3-1)^2=1^2+(a-3)^2+(3\sqrt{2})^2$ 或 $1^2+(a-3)^2=a^2+(3-1)^2+(3\sqrt{2})^2$,解得 $a=4$ 或 $a=-2$, $\therefore$ 点 E 坐标为$(1,4)$或$(1,-2)$.



图(2)

$\because B(3,0), C(0,3), \therefore m+0=1+3, n+3=0+4$ 或 $m+3=1+0, n+0=3-2, \therefore m=4, n=1$ 或 $m=-2, n=1$,

$\therefore$ 点 F 的坐标为$(4,1)$或$(-2,1)$.

综上所述,点 F 的坐标为 $\left(2,\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $\left(2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$ 或$(4,1)$或$(-2,1)$.

▼热点三　几何图形动态探究题

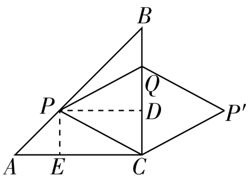
1.【解】(1)∵ $\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=4$ cm，∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$(cm). 由题意得 $AP=\sqrt{2}t$ cm，$BQ=t$ cm，则 $BP=(4\sqrt{2}-\sqrt{2}t)$ cm.

∵ $PQ\perp BC$，∴ $\angle PQB=90^\circ$，∴ $\angle PQB=\angle ACB$，

∴ $PQ/\!/AC$，∴ $\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}$，∴ $\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}t}{4\sqrt{2}}=\frac{t}{4}$，解得 $t=2$，

∴ t 的值为 2.

(2)过点 P 作 $PD\perp BC$ 于 D，$PE\perp AC$ 于 E，如图.



∵ $\angle ACB=90^\circ$，$AC=BC=4$ cm，

∴ $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，四边形 $PECD$ 为矩形，∴ $\angle A=\angle B=45^\circ$，易得 $\triangle APE$ 和 $\triangle PBD$ 为等腰直角三角形，∴ $PE=AE=\frac{\sqrt{2}}{2}AP=t$ cm，$BD=PD$，

∴ $CE=AC-AE=(4-t)$ cm.

∵ 四边形 $PECD$ 为矩形，∴ $PD=EC=(4-t)$ cm，

∴ $BD=(4-t)$ cm，∴ $QD=BD-BQ=(4-2t)$ cm.

在 Rt$\triangle PCE$ 中，$PC^2=PE^2+CE^2=t^2+(4-t)^2$.

在 Rt$\triangle PDQ$ 中，$PQ^2=PD^2+DQ^2=(4-t)^2+(4-2t)^2$.

∵ 四边形 $QPCP'$ 为菱形，∴ $PQ=PC$，∴ $t^2+(4-t)^2=(4-t)^2+(4-2t)^2$，解得 $t_1=\frac{4}{3}$，$t_2=4$(舍去)，∴ 当 t 的值为 $\frac{4}{3}$ 时，四边形 $QPCP'$ 为菱形.

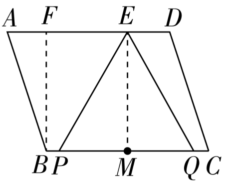
2.【解】(1)过点 B 作 $BF\perp AD$ 于点 F，连接 EM，如图(1). ∵ M 是 BC 的中点，$\triangle EPQ$ 是等边三角形，

∴ $\angle PEQ=60^\circ$，$EM\perp BC$.

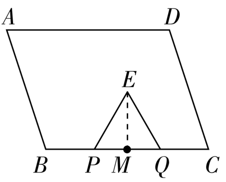
∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $BF=EM$.

∵ $S_{\square ABCD}=BC\cdot BF=24\sqrt{3}$，∴ $EM=BF=3\sqrt{3}$，

∴ $PM=3$，∴ $t=\frac{3}{1}=3$. 故答案为 3.



图(1)



图(2)

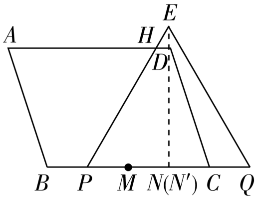
(2) 当 $PM=2$ 时，有两种情况：

①如图(2)，连接 EM. 当点 P 由点 M 向点 B 运动时，$PM=QM=2$，$\therefore PQ=4$.

$\because \triangle EPQ$ 为等边三角形，$\therefore EM\perp PQ$，$\therefore EM=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{\triangle EPQ}=\dfrac{1}{2}\times4\times2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$.

②如图(3)，过点 E 作 $EN\perp PQ$ 于点 N. 当点 P 由点 B 向点 M 运动时，可知当 $t=6$ 时，$PM=2$，$MQ=6$，则 $PQ=8$.



图(3)

$\because \triangle EPQ$ 为等边三角形，$EN\perp PQ$，$\therefore \angle EPN=60^\circ$，$PN=NQ=4$，$\therefore MN=2$，$EN=4\sqrt{3}$.

$\because MC=4$，$\therefore NC=2$.

过 D 作 $DN'\perp BC$ 于 N'. 由(1)可知 $DN'=BF=3\sqrt{3}$.

$\because \angle A=\angle DCN'$，$\therefore \tan\angle DCN'=\tan A=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore \dfrac{DN'}{CN'}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore CN'=2=CN$，$\therefore N'$ 与 N 重合，$\therefore$ 点 D 在 EN 上，$\therefore ED=\sqrt{3}$.

又$\because$ 易得 $\triangle EPN\backsim\triangle EHD$，$\therefore \dfrac{HD}{PN}=\dfrac{ED}{EN}=\dfrac{\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}=\dfrac{1}{4}$，

$\therefore HD=1$，$\therefore S_{四边形PCDH}=\dfrac{1}{2}\times(6+1)\times3\sqrt{3}=\dfrac{21}{2}\sqrt{3}$.

综上，$\triangle EPQ$ 与 $\square ABCD$ 重叠部分的面积为 $4\sqrt{3}$ 或 $\dfrac{21}{2}\sqrt{3}$.

3.【解】(1) $EF=BF$. 证明如下：如图(1)，分别延长 AD，BF 相交于点 P.

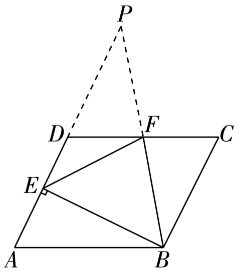
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD/\!/BC$，

$\therefore \angle PDF=\angle C$，$\angle P=\angle FBC$.

$\because F$ 为 CD 的中点，

$\therefore DF=CF$.

在 $\triangle PDF$ 和 $\triangle BCF$ 中，



图(1)

$\begin{cases}\angle P=\angle FBC, \\ \angle PDF=\angle C, \\ DF=CF,\end{cases}$

$\therefore \triangle PDF \cong \triangle BCF$，$\therefore FP=FB$，即 F 为 BP 的中点，

$\therefore BF=\dfrac{1}{2}BP$. $\because BE\perp AD$，$\therefore \angle BEP=90°$，

$\therefore EF=\dfrac{1}{2}BP$，$\therefore EF=BF$.

(2) $AG=BG$. 证明如下：

$\because$ 将▱$ABCD$ 沿着 BF 所在直线折叠，点 C 的对应点为 C'，

$\therefore \angle CFB=\angle C'FB=\dfrac{1}{2}\angle CFC'$，$FC'=FC$.

$\because F$ 为 CD 的中点，$\therefore FC=FD=\dfrac{1}{2}CD$，

$\therefore FC'=FD$，$\therefore \angle FDC'=\angle FC'D$.

$\because \angle CFC'=\angle FDC'+\angle FC'D$，

$\therefore \angle FC'D=\dfrac{1}{2}\angle CFC'$，

$\therefore \angle FC'D=\angle C'FB$，$\therefore DG/\!/FB$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore DC/\!/AB$，$DC=AB$，

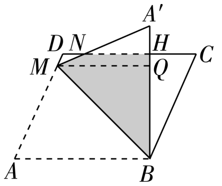
$\therefore$ 四边形 $DGBF$ 为平行四边形，

$\therefore BG=DF$，$\therefore BG=\dfrac{1}{2}AB$，$\therefore AG=BG$.

(3) 阴影部分的面积为$\dfrac{22}{3}$.

如图(2)，过点 M 作 $MQ\perp A'B$ 于 Q.

$\because$ 将▱$ABCD$ 沿过点 B 的直线折叠，点 A 的对应点为 A'，$\therefore A'B=AB$，$\angle A=\angle A'$，$\angle ABM=\angle MBH$.



图(2)

$\because$ ▱$ABCD$ 的面积为 20，边长 $AB=5$，$A'B\perp CD$ 于点 H，$\therefore BH=20\div5=4$，

$\therefore CH=\sqrt{BC^2-BH^2}=2$，$A'H=A'B-BH=1$.

$\because A'B\perp CD$ 于点 H，$AB/\!/CD$，$\therefore A'B\perp AB$，

$\therefore \angle MBH=45°$，$\therefore \triangle MBQ$ 是等腰直角三角形，

$\therefore MQ=BQ$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle A=\angle C$，$\therefore \angle A'=\angle C$.

$\because \angle A'HN=\angle CHB$，$\therefore \triangle A'NH\backsim\triangle CBH$，

$\therefore \frac{BH}{NH}=\frac{CH}{A'H}$，即 $\frac{4}{NH}=\frac{2}{1}$，

解得 $NH=2$.

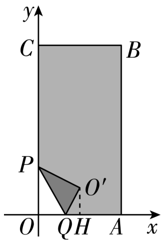
$\because A'B\perp CD$，$MQ\perp A'B$，

$\therefore NH /\!/ MQ$，$\therefore \triangle A'NH\backsim\triangle A'MQ$，

$\therefore \frac{A'H}{A'Q}=\frac{NH}{MQ}$，即 $\frac{1}{5-MQ}=\frac{2}{MQ}$，解得 $MQ=\frac{10}{3}$，

$\therefore S_{阴影}=S_{\triangle A'MB}-S_{\triangle A'NH}=\frac{1}{2}A'B\cdot MQ-\frac{1}{2}A'H\cdot NH=\frac{1}{2}\times5\times\frac{10}{3}-\frac{1}{2}\times1\times2=\frac{22}{3}$.

4.【解】（Ⅰ）如图(1)，过点 O' 作 $O'H\perp OA$ 于点 H.


图(1)

$\because$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle POQ$ 中，$\angle OPQ=30°$，

$\therefore \angle PQO=60°$.

由折叠的性质可知 $QO=QO'=1$，

$\angle PQO=\angle PQO'=60°$，

$\therefore \angle O'QA=180°-60°-60°=60°$，

$\therefore QH=QO'\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}$，$O'H=QO'\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore OH=OQ+QH=\frac{3}{2}$，$\therefore O'\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

（Ⅱ）$\because A(3,0)$，$\therefore OA=3$.

$\because OQ=t$，$\therefore AQ=3-t$.

由(1)同理得 $\angle EQA=60°$，$\therefore \angle QEA=30°$，$\therefore QE=2QA=6-2t$.

$\because O'Q=OQ=t$，$\therefore EO'=t-(6-2t)=3t-6\ (2<t<3)$.

（Ⅲ）$\because OQ=t$，$\angle OPQ=30°$，$\therefore OP=\sqrt{3}t$.

当 $0<t\leqslant2$ 时，$S_{\triangle QO'P}$ 即为折叠后重合部分的面积，

$\therefore S_{重合}=S_{\triangle QO'P}=S_{\triangle QOP}=\frac{1}{2}QO\cdot OP=\frac{1}{2}t\cdot\sqrt{3}t=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$. 又 $\because 0<t\leqslant2$，$\therefore 0<S_{重合}\leqslant2\sqrt{3}$，$\therefore$ 当 $0<t\leqslant2$ 时，重合部分的面积不可能为 $3\sqrt{3}$.

当 $2<t<3$ 时，折叠后重合部分为四边形 $QEFP$.

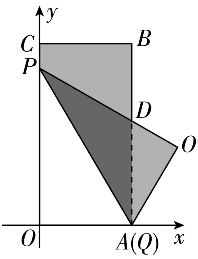
由(2)可得 $O'E=3t-6$，$\therefore O'F=O'E\cdot\tan 30°=$

$\frac{\sqrt{3}}{3}(3t-6)$，$\therefore S_{重合}=S_{四边形QEFP}=S_{\triangle QO'P}-S_{\triangle EO'F}=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2-\frac{1}{2}(3t-6)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}(3t-6)=-\sqrt{3}(t-3)^2+3\sqrt{3}$.

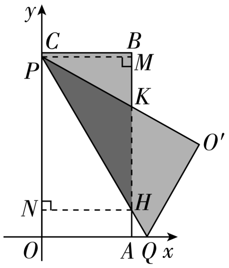
又$\because 2<t<3$，$\therefore 2\sqrt{3}<S_{重合}<3\sqrt{3}$，$\therefore$ 当 $2<t<3$ 时，重合部分的面积不可能为 $3\sqrt{3}$.

当 $t=3$ 时，点 Q 与点 A 重合，如图(2).

$\because AO'=AO=3$，易得 $\angle DAO'=30°$，$\therefore AD=\frac{AO'}{\cos 30°}=2\sqrt{3}$，$\therefore S_{重合}=S_{\triangle ADP}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3=3\sqrt{3}$，$\therefore$ 当 $t=3$ 时，重合部分的面积为 $3\sqrt{3}$.



图(2)



图(3)

当 $3<t<2\sqrt{3}$ 时，如图(3)，重合部分为 $\triangle HKP$，过 H 作 $HN\perp y$ 轴于 N，过 P 作 $PM\perp AB$ 于 M，$\therefore HN=AO=3$. 由折叠易得 $\angle NPH=\angle HPK=\angle KPM=30°$，

$\therefore PN=MH=3\sqrt{3}$，$KM=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，

$\therefore HK=MH-KM=3\sqrt{3}-\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

$\therefore S_{重合}=S_{\triangle HKP}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3=3\sqrt{3}$，

$\therefore$ 当 $3<t<2\sqrt{3}$ 时，重合部分的面积始终为 $3\sqrt{3}$.

综上所述，当 $3\leqslant t<2\sqrt{3}$ 时，重合部分的面积均为 $3\sqrt{3}$. 故答案为 3 或 $\frac{10}{3}$（答案不唯一）.