答案及解析

第一部分 | 压轴题猜押

▼第九题　平面直角坐标系中的规律探究

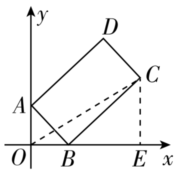
1. $(-1,11)$ 【解析】由题图可知 $A_5(5,1)$，将点 A_5 向左平移 6 个单位，再向上平移 6 个单位，可得 $A_6(-1,7)$，将点 A_6 向左平移 7 个单位，再向下平移 7 个单位，可得 $A_7(-8,0)$，将点 A_7 向右平移 8 个单位，再向下平移 8 个单位，可得 $A_8(0,-8)$，将点 A_8 向右平移 9 个单位，再向上平移 9 个单位，可得 $A_9(9,1)$，将点 A_9 向左平移 10 个单位，再向上平移 10 个单位，可得 $A_{10}(-1,11)$，故答案为 $(-1,11)$.

2. D 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$A(1,-1)$，$D(3,-1)$，$\therefore$ 中心坐标为 $(2,-2)$. $\because$ 先沿 y 轴翻折，再向下平移 1 个单位为一次变换，$\therefore$ 第 1 次变换后，中心坐标为 $(-2,-3)$，$\therefore$ 第 2 次变换后，中心坐标为 $(2,-4)$，$\therefore$ 第 n 次变换后，中心坐标为 $((-1)^n\times2,-n-2)$，$\therefore$ 当 $n=2\ 022$ 时，中心坐标为 $(2,-2\ 024)$，故选 D.

3. C 【解析】$\because \triangle OA_1B_1$ 是边长为 2 的等边三角形，$\therefore A_1$ 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$，B_1 的坐标为 $(2,0)$. $\because \triangle B_2A_2B_1$ 与 $\triangle OA_1B_1$ 关于点 B_1 成中心对称，$\therefore$ 点 A_2 与点 A_1 关于点 B_1 成中心对称. $\because 2\times2-1=3,2\times0-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$，$\therefore$ 点 A_2 的坐标是 $(3,-\sqrt{3})$. $\because \triangle B_2A_3B_3$ 与 $\triangle B_2A_2B_1$ 关于点 B_2 成中心对称，$\therefore$ 点 A_3 与点 A_2 关于点 B_2 成中心对称. $\because 2\times4-3=5,2\times0-(-\sqrt{3})=\sqrt{3}$，$\therefore$ 点 A_3 的坐标是 $(5,\sqrt{3})$. $\because \triangle B_3A_4B_4$ 与 $\triangle B_3A_3B_2$ 关于点 B_3 成中心对称，$\therefore$ 点 A_4 与点 A_3 关于点 B_3 成中心对称. $\because 2\times6-5=7,2\times0-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$，$\therefore$ 点 A_4 的坐标是 $(7,-\sqrt{3})$，$\cdots$. $\because 1=2\times1-1,3=2\times2-1,5=2\times3-1,7=2\times4-1,\cdots$，$\therefore A_n$ 的横坐标是 $2n-1$，A_{2n+1} 的横坐标是 $2(2n+1)-1=4n+1$. $\because$ 当 n 为奇数时，A_n 的纵坐标是 $\sqrt{3}$，当 n 为偶数时，A_n 的纵坐标是 $-\sqrt{3}$，$\therefore$ 顶点 A_{2n+1} 的纵坐

标是$\sqrt{3}$，∴ $\triangle B_{2n}A_{2n+1}B_{2n+1}$（$n$ 是正整数）的顶点 A_{2n+1} 的坐标是$(4n+1,\sqrt{3})$. 故选 C.

4. B 【解析】如图，过点 C 作 $CE\perp x$ 轴于点 E，连接 OC. ∵ $OA=OB=2$，∴ $\angle ABO=\angle BAO=45°$. ∵ $\angle ABC=90°$，∴ $\angle CBE=45°$. ∵ $BC=3\sqrt{2}$，



∴ $CE=BE=3$，∴ $OE=OB+BE=5$，∴ $C(5,3)$. ∵ 矩形 $ABCD$ 绕点 O 顺时针旋转，每次旋转 90°，则第 1 次旋转后，点 C 的坐标为$(3,-5)$；第 2 次旋转后，点 C 的坐标为$(-5,-3)$；第 3 次旋转后，点 C 的坐标为$(-3,5)$；第 4 次旋转后，点 C 的坐标为$(5,3)$；…. 发现规律：每旋转 4 次为一个循环. ∵ $2\,022\div4=505\cdots\cdots2$，∴ 第 2 022 次旋转后，点 C 的坐标为$(-5,-3)$. 故选 B.

5. D 【解析】在菱形 $OABC$ 中，$A(4,0)$，$\angle OAB=120°$，∴ $OA=4$，$OD\perp AC$，$\angle OAD=\frac{1}{2}\angle OAB=60°$，∴ $\angle DOA=30°$，∴ $AD=\frac{1}{2}OA=2$，∴ $OD=\sqrt{3}AD=2\sqrt{3}$，∴ D 点的横坐标为 $OD\cdot\cos\angle DOA=2\sqrt{3}\times\cos30°=3$，$D$ 点的纵坐标为 $OD\cdot\sin\angle DOA=2\sqrt{3}\times\sin30°=\sqrt{3}$，∴ $D(3,\sqrt{3})$. ∵ 菱形 $OABC$ 绕点 O 逆时针方向旋转，每次旋转 60°，∴ 在平面直角坐标系中转一周需转 $360°\div60°=6$（次），每转一周，D 点回到初始位置一次，∴ 若旋转 n 次后，点 D 的坐标是$(3,\sqrt{3})$，则 n 是 6 的倍数，而 2 022 是 6 的倍数，故选 D.

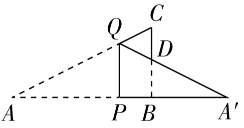
6. D 【解析】由题意得 $C_2(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$，$C_3(2,4)$，$C_4(2+\sqrt{2},2+\sqrt{2})$，$C_5(4,2)$，$C_6(2+\sqrt{2},2-\sqrt{2})$，$C_7(2,0)$，$C_8(2-\sqrt{2},2-\sqrt{2})$，$C_9(0,2)$，…，发现旋转 8 次为一循环. ∵ $2\,022\div8=252\cdots\cdots6$，∴ $C_{2\,022}$ 的坐标与 C_6 的坐标相同，∴ $C_{2\,022}$ 的坐标为$(2+\sqrt{2},2-\sqrt{2})$，故选 D.

7. A 【解析】∵ A 点坐标为$(1,0)$，∴ $OA=1$，∴ 第一次旋转后，点 A_1 在第一象限，$OA_1=2$；第二次旋转后，点 A_2 在第二象限，$OA_2=2^2$；第三次旋转后，点

A_3 在 x 轴负半轴，$OA_3=2^3$；第四次旋转后，点 A_4 在第三象限，$OA_4=2^4$；第五次旋转后，点 A_5 在第四象限，$OA_5=2^5$；第六次旋转后，点 A_6 在 x 轴正半轴，$OA_6=2^6$；如此循环，每旋转 6 次为一个循环. $\because 2\,022\div6=337$，$\therefore$ 循环了 337 次，点 $A_{2\,022}$ 在 x 轴正半轴上，且 $OA_{2\,022}=2^{2\,022}$，$\therefore A_{2\,022}(2^{2\,022},0)$. 故选 A.

第十题　函数图象的分析与判断

1. D　【解析】$\because \angle ABC=90°, AB=2BC=4, \therefore \tan A=\frac{1}{2}$. 由题意知 $AP=t, \therefore PQ=AP\cdot\tan A=\frac{1}{2}t$. 由折叠的性质可得 $A'P=AP, \angle APQ=\angle A'PQ=90°$，当点 P 与 AB 中点重合时，则有 $t=2$，当点 P 在 AB 中点的左侧，即 $0\leqslant t<2$ 时，$\triangle A'PQ$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分的面积为 $S_{\triangle A'PQ}=\frac{1}{2}A'P\cdot PQ=\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{2}t=\frac{1}{4}t^2$；当点 P 在 AB 中点的右侧，即 $2<t\leqslant 4$ 时，如图. 由折叠性质可得 $A'P=AP=t, \angle APQ=\angle A'PQ=90°, \tan A=\tan A'=\frac{1}{2}, \therefore BP=4-t, PQ=\frac{1}{2}t, \therefore A'B=2t-4$,



$\therefore BD=A'B\cdot\tan A'=t-2, \therefore \triangle A'PQ$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分的面积为 $S_{\text{梯形}PBDQ}=\frac{1}{2}(PQ+BD)\cdot PB=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t+t-2\right)(4-t)=-\frac{3}{4}t^2+4t-4$. 综上所述，能反映 $\triangle A'PQ$ 与 $\triangle ABC$ 重叠部分的面积 S 与 t 之间函数关系的图象只有 D 选项，故选 D.

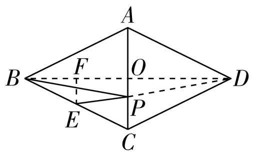
2. A　【解析】由题图(2)知 $AB+AC=26$. $\because AB=AC, \therefore AB=13$. $\because AD\perp BC, \therefore \angle ADB=90°$. 在 $Rt\triangle ABD$ 中，$AD^2+BD^2=AB^2=169$. ① 由题图(2)知 $\triangle BDP$ 的面积最大值为 30，$\therefore \frac{1}{2}AD\cdot BD=30, \therefore AD\cdot BD=60$，② ①+2×②得，$AD^2+BD^2+2AD\cdot BD=169+2\times60=289, \therefore (AD+BD)^2=289, \therefore AD+BD=17$(负值已舍去)，$\therefore BD=17-AD$. ③ 将③代入②得，$AD(17-AD)=60$，解得 $AD=5$ 或 $AD=12$. $\because AD<BD, \therefore AD=5$，故选 A.

3. C　【解析】根据题图(2)知当点 P 与点 B 重合时，$AP=AB=3$；当 $AP\perp BC$ 时，$AB+BP=4.8, \therefore BP=1.8, \therefore$ 此时 $AP=\sqrt{AB^2-BP^2}=\sqrt{3^2-1.8^2}=2.4$；当点 P 到达点 C 时，过点 A 作 $AE\perp BC$ 于 E，由题图(2)得 $AP=AC=4, \therefore EC=\sqrt{AC^2-AE^2}=\sqrt{4^2-(2.4)^2}=3.2, \therefore BC=BE+EC=1.8+3.2=5$. 故

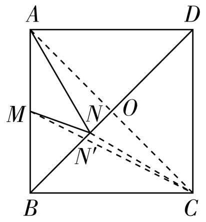
选 C.

4. B 【解析】根据题图(2),可知当点 P 与点 A 重合时,$PD+PE=7$,即 $AD+AE=7$;当点 P 与点 E 重合时,$PD+PE=DE=5$. 设 $AD=m$, $AE=n$, 则 $\begin{cases}m+n=7,\\m^2+n^2=25,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=4,\\n=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=3,\\n=4.\end{cases}$ $\because AD>\frac{1}{2}AB$, $\therefore AD=4$, $AB=6$, $\therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积为 24,故选 B.

5. B 【解析】根据题图得点 P 与点 C 重合时,$AP=AC=2$,$PB+PE=CB+CE=\frac{3\sqrt{5}}{2}$. $\because$ E 是边 BC 的中点,$\therefore$ $CB=\sqrt{5}$, $CE=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 如图,连接 BD 交 AC 于点 O,连接 DE,交 AC 于一点,即点 P. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore$ AC 是线段 BD 的垂直平分线,$\therefore$ $PB=PD$,$\therefore$ $PB+PE=PD+PE$,$\therefore$ 当 E,P,D 三点共线时,$PD+PE$ 的值最小,即 $PB+PE$ 的值最小. 过点 E 作 $EF\perp BD$ 于点 F. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,$\therefore$ $AC\perp BD$,$OA=OC=1$,$\therefore$ $OB=OD=\sqrt{CB^2-OC^2}=2$. $\because$ $EF/\!/AC$,$\therefore$ $\triangle BEF\backsim\triangle BCO$,$\therefore$ $\frac{EF}{OC}=\frac{BF}{BO}$. $\because$ E 是 BC 的中点,$\therefore$ $EF=\frac{1}{2}OC=\frac{1}{2}$,$OF=\frac{1}{2}OB=1$,$\therefore$ $FD=3$,$\therefore$ $DE=\sqrt{EF^2+FD^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+3^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$,$\therefore$ 图象最低点的纵坐标是 $\frac{\sqrt{37}}{2}$. 故选 B.



6. A 【解析】如图,连接 AC 交 BD 于点 O,连接 NC,连接 MC 交 BD 于点 N'. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore$ O 是 BD 的中点. $\because$ 点 M 是 AB 的中点,$\therefore$ N' 是 $\triangle ABC$ 的重心,$\therefore$ 易得 $N'D=\frac{2}{3}BD$. $\because$ A, C 关于 BD 对称,$\therefore$ $NA=NC$,$\therefore$ $AN+MN=NC+MN$,$\therefore$ 当 M,N,C 共线时,y 的值最小,即为 MC 的长,$\therefore$ $MC=2\sqrt{5}$,此时点



N 与点 N' 重合. 设正方形的边长为 m，则 $BM=\dfrac{1}{2}m$.

在 Rt$\triangle BCM$ 中，由勾股定理得 $MC^2=BC^2+MB^2$，

$\therefore 20=m^2+\left(\dfrac{1}{2}m\right)^2$，解得 $m=4$（负值已舍去），

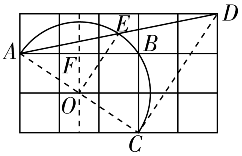
$\therefore BD=4\sqrt{2}$，$\therefore a=N'D=\dfrac{2}{3}BD=\dfrac{2}{3}\times4\sqrt{2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$，故

选 A.

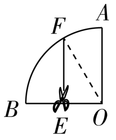
第十四题　弧长与阴影面积的计算

1. $\frac{4\pi}{3}$　【解析】连接 OD. ∵ $\angle DOB=2\angle DCB=120°$，$OB=\frac{1}{2}AB=2$，∴ $\overset{\frown}{BD}$ 的长为 $\frac{120\cdot\pi\cdot 2}{180}=\frac{4\pi}{3}$，故答案为 $\frac{4\pi}{3}$.

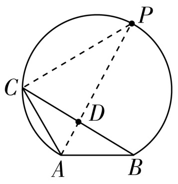
2. $\frac{\sqrt{13}}{4}\pi$　【解析】如图，分别作线段 AB，BC 的垂直平分线，两线交于 O，∴ 点 O 为该圆弧所在圆的圆心，F 为 AB 的中点，连接 AC，OE，CD. ∵ $\angle ABC=90°$，∴ AC 为 ⊙O 直径，∴ AC 经过点 O. 由垂径定理得 $AF=\frac{1}{2}AB=\frac{3}{2}$，∴ $OA=\sqrt{AF^2+OF^2}=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$. 由勾股定理易得 $AC^2+CD^2=AD^2$，且 $AC=CD$，∴ $\triangle ACD$ 为等腰直角三角形，∴ $\angle CAD=45°$，∴ $\angle AEO=\angle CAD=45°$，∴ $\angle AOE=90°$，∴ 弧 AE 的长为 $\frac{90\pi\times\frac{\sqrt{13}}{2}}{180}=\frac{\sqrt{13}}{4}\pi$，故答案为 $\frac{\sqrt{13}}{4}\pi$.



3. $4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$　【解析】如图，连接 OF. ∵ EF 是 OB 的中垂线，∴ $\angle OEF=90°$，$OE=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}OF=1$，∴ $\angle EFO=30°$，∴ $\angle EOF=60°$，∴ $\angle AOF=30°$. 由勾股定理得 $EF=\sqrt{3}$，由折叠得右边部分经过两次展开并压平后所得的图形的周长为 $4EF+4l_{\overset{\frown}{AF}}=4\sqrt{3}+4\times\frac{30\pi\times 2}{180}=4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$. 故答案为 $4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$.



4. 4π　【解析】如图，连接 AD 并且延长交 $\overset{\frown}{ACB}$ 于点 P，连接 CP，此时点 P 到点 D 的距离最大. 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为边 BC 的中点，$AB=AC=6$，$\angle ACB=30°$，∴ $AP\perp BC$，$\angle CAB=120°$，AP 平分 $\angle CAB$，∴ AP 是 $\overset{\frown}{ACB}$ 所在圆的直径，$\angle CAP=60°$，



$\therefore \angle ACP=90°, \therefore \angle APC=30°, \angle PCB=60°, \therefore AP=2AC=12$，$\overparen{BP}$ 所对的圆心角为 $2\angle PCB=120°$，$\therefore \overparen{BP}$ 的长为 $\frac{120\times\pi\times12}{360}=4\pi$. 故答案为 4π.

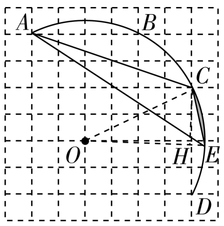
5. $2+\frac{2\pi}{3}$　【解析】连接 AC. 由题意可知，A,P,C 三点共线时阴影部分周长最小，此时周长为 $AC+\overparen{AC}$ 的长. $\because$ 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle D=60°$，$AB=2$，$\therefore \angle ABC=\angle D=60°$，$BC=AB=2$，$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore AC=2$，$\therefore \overparen{AC}$ 的长为 $\frac{60\pi\times2}{180}=\frac{2\pi}{3}$，$\therefore$ 阴影部分周长的最小值为 $2+\frac{2\pi}{3}$. 故答案为 $2+\frac{2\pi}{3}$.

6. $\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{5}{2}\pi$　【解析】菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=30°$，$AB=3$，$\therefore BC=AB=3$，$\angle BCD=\angle A=30°$. $\because$ 点 C 关于 BM 的对称点为 N，$\therefore \angle BNM=\angle BCM=30°$. $\because MN\perp CD$，$\therefore \angle CMN=90°$，$\therefore \angle NBC=30°$ 或 $150°$，$\therefore$ 劣弧 NC 的长为 $\frac{30\pi\times3}{180}=\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{150\pi\times3}{180}=\frac{5}{2}\pi$，故答案为 $\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{5}{2}\pi$.

7. B　【解析】在矩形 $ABCD$ 中，$CD=2$，$\therefore CE=AB=CD=2$，$\angle BCD=90°$. $\because E$ 为 AB 中点，$\therefore BE=1$，$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CEB$ 中，$BE=\frac{1}{2}CE=1$，$\therefore \angle ECB=30°$，$BC=\sqrt{CE^2-BE^2}=\sqrt{3}$，$\therefore \angle ECD=60°$，$\therefore$ 题图中阴影部分的面积为 $2\times\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}-\frac{60\pi\times2^2}{360}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{2\pi}{3}$，故选 B.

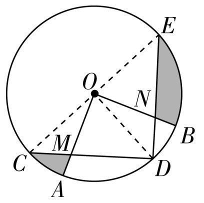
8. D　【解析】设 $O'A'$ 与 $\overparen{AB}$ 交于点 D. 连接 OO'. $\because O'C/\!/OA$，$\angle AOB=120°$，$\therefore \angle OCO'=60°$. $\because C$ 是 OB 的中点，$\therefore OC=CB=CO'=1$，$\therefore \triangle OCO'$ 是等边三角形，$\therefore \angle OO'C=\angle COO'=60°$，$\angle CBO'=\angle CO'B=30°$，$\therefore \angle OO'B=\angle A'O'B=90°$，$\therefore O,O',A'$ 三点共线，$BO'=\sqrt{3}$，$\therefore$ 阴影部分的面积为 $S_{扇形BOD}-S_{\triangle OBO'}=\frac{60\pi\times2^2}{360}-\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

9. $\frac{5}{3}\pi-5$ 【解析】如图，易得格点 O 为 $\overset{\frown}{AD}$ 所在圆的圆心，连接 OC，OE，过点 C 作 $CH\perp OE$ 于点 H，则 $OC=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.



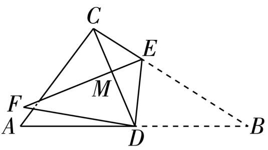
$\because \angle CAE=15°$，$\therefore \angle COE=30°$，$\therefore$ 在 Rt$\triangle OCH$ 中，$CH=\frac{1}{2}OC=\sqrt{5}$，$\therefore$ 阴影部分的面积为 $S_{扇形OCE}-S_{\triangle OCE}=\frac{30\times\pi\times(2\sqrt{5})^2}{360}-\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=\frac{5}{3}\pi-5$. 故答案为$\frac{5}{3}\pi-5$.

10. $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$ 【解析】如图，连接 OC，OD，OE. 设 OA 交 CD 于点 M，OB 交 DE 于点 N. $\because \angle CDE=90°$，$\therefore CE$ 是$\odot O$ 的直径. $\because OC=OE$，$CD=DE$，$\therefore \angle COD=\angle DOE=90°$. $\because OD=OE$，$\therefore \angle EDO=\angle DEO=45°$，$\therefore \angle ODC=45°$，$\therefore \angle ODC=\angle DEO$. $\because OA\perp OB$，$\therefore \angle MON=90°$，$\therefore \angle MON-\angle DON=\angle DOE-\angle DON$，即 $\angle MOD=\angle NOE$. $\because OD=OE$，$\therefore \triangle ODM\cong\triangle OEN$（ASA），$\therefore S_{\triangle ODM}=S_{\triangle OEN}$，$\therefore S_{扇形AOD}-S_{\triangle ODM}=S_{扇形BOE}-S_{\triangle OEN}$，即 $S_{阴影}=S_{弓形CD}$. $\because CD=\sqrt{2}$，$\therefore OD=OC=1$，$\therefore S_{阴影}=\frac{90\cdot\pi\times1^2}{360}-\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$. 故答案为$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

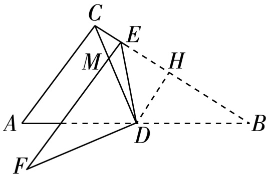


第十五题　图形折叠的计算

1. $\frac{11}{2}$或 7　【解析】∵ 在 Rt△ABC 中，$AC=6$，$BC=8$，∴ $AB=10$. ∵ 点 D 是 AB 中点，∴ $AD=BD=CD=5$. 如图(1)，当∠$FMD=90°$时，∵ 由翻折得∠F=∠B，∠FMD=∠$ACB=90°$，∴ △FDM∽△BAC，∴ $\frac{DF}{AB}=\frac{DM}{AC}$，∴ $\frac{5}{10}=\frac{DM}{6}$，∴ $DM=3$，∴ $CM=CD-DM=2$. ∵ $CD=BD$，∴ ∠ECM=∠B. 又∵ ∠CME=∠$ACB=90°$，∴ △CEM∽△BAC，∴ $\frac{CE}{AB}=\frac{CM}{BC}$，∴ $\frac{CE}{10}=\frac{2}{8}$，∴ $CE=\frac{5}{2}$，∴ $BE=\frac{11}{2}$；当∠$FDM=90°$时，如图(2). ∵ ∠F=∠B=∠BCD，∠FMD=∠CME，∴ ∠CEM=∠$FDM=90°$，∴ ∠FED=∠$BED=45°$. 作 $DH\perp BC$ 于 H，则△BDH∽△BAC，∴ $\frac{DB}{AB}=\frac{DH}{AC}=\frac{BH}{BC}$，∴ $\frac{5}{10}=\frac{DH}{6}=\frac{BH}{8}$，∴ $DH=3$，$BH=4$，∴ $EH=DH=3$，∴ $BE=3+4=7$. 综上所述，$BE=\frac{11}{2}$或 7，故答案为$\frac{11}{2}$或 7.

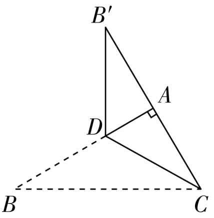


图(1)



图(2)

2. $3\sqrt{3}-3$ 或 $2\sqrt{3}$　【解析】在 Rt△ABC 中，∠$BAC=90°$，∠$B=30°$，$AC=3$，∴ $AB=3\sqrt{3}$，∠$ACB=60°$. 分两种情况：①若∠$ADB'=90°$，则 $AC/\!/B'D$，∴ ∠ACB'=∠$DB'C$=∠$B=30°$，∴ ∠$BCB'=30°$. 由折叠可得∠$DCB'=\frac{1}{2}$∠$BCB'=15°$，∴ ∠ACD=∠$ADC=45°$，∴ $AC=AD=3$，∴ $BD=AB-AD=3\sqrt{3}-3$. ② 如图所示，若∠$DAB'=90°$，则 B'，A，C 三点共线，由折叠可得∠B'=∠$B=30°$，∴ Rt△$AB'D$ 中，$AD=\frac{1}{2}B'D=\frac{1}{2}BD$. 又∵ $AB=3\sqrt{3}$，



$\therefore BD=\frac{2}{3}AB=2\sqrt{3}$. 综上所述，$BD$ 的长为 $3\sqrt{3}-3$ 或 $2\sqrt{3}$. 故答案为 $3\sqrt{3}-3$ 或 $2\sqrt{3}$.

3. 1 或 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$ 【解析】由题意易得 $\angle A=30°$，$\angle B=60°$. ①当 $\angle APA_1=90°$ 时，由折叠的性质可知 $\angle A=\angle A_1=30°$，$CA=CA_1$，$\therefore \angle PDA_1=60°$，$\therefore \angle CDB=60°$. $\because \angle B=60°$，$\therefore \triangle CDB$ 为等边三角形，$\therefore BD=BC=CD=1$，$\therefore A_1D=A_1C-CD=\sqrt{3}-1$，$\therefore A_1P=\frac{\sqrt{3}}{2}A_1D=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AP=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

②当 $\angle PDA_1=90°$ 时，由折叠的性质可知 $CA=CA_1$，$AP=A_1P$. $\because \angle B=60°$，$\angle CDB=90°$，$\therefore BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}$，$CD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AD=\frac{3}{2}$，$A_1D=A_1C-CD=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 设 $AP=x$，则 $PD=\frac{3}{2}-x$. $\because PD^2+A_1D^2=PA_1^2$，$\therefore \left(\frac{3}{2}-x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=x^2$，解得 $x=1$，$\therefore AP=1$，故 AP 的长为 1 或 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$. 故答案为 1 或 $\frac{3-\sqrt{3}}{2}$.

4. $(4\sqrt{3}-4)$ 或 $\left(4-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 【解析】$\because M$，N 分别是矩形 $ABCD$ 的对边 AD，BC 的中点，把四边形 $ABPM$ 沿直线 MP 折叠，点 A，B 分别落在 A'，B' 处，$\therefore A'M=AM=\frac{1}{2}AD=4$ 厘米，$CN=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=4$ 厘米.

①当 $A'C=CN=4$ 厘米时，$A'M=A'C=4$ 厘米. $\because CD=AB=MN=4$ 厘米，$\therefore$ 四边形 $MNCD$ 内不可能存在点 A' 使 $A'M=A'C=4$ 厘米，故此情况不存在；

②当 $A'N=CN=MN=A'M=4$ 厘米时，$\triangle A'MN$ 为等边三角形，$\therefore \angle A'MA=90°+60°=150°$，$\therefore \angle A'MP=\angle AMP=75°$. 连接 BM，过 P 作 $PQ\perp BM$ 于点 Q，$\therefore$ 易得 $\angle AMB=\angle PBM=45°$，$\therefore \angle BMP=75°-45°=30°$. $\because PQ\perp BM$，$\angle PBM=45°$，$\therefore BQ=QP$. 设 $BQ=QP=a$ 厘米，则 $QM=\sqrt{3}a$ 厘米. $\because BQ+QM=BM=\sqrt{2}AB$，$\therefore a+\sqrt{3}a=4\sqrt{2}$，$\therefore a=2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$，$\therefore BP=\sqrt{2}a=(4\sqrt{3}-4)$ 厘米；

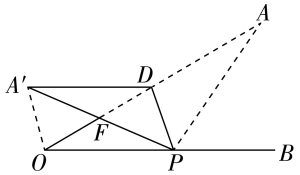
③当 $A'N=A'C$ 时，连接 $A'D$，$\therefore$ 点 A' 在 NC 的垂直平

分线上. ∵ 易知点 A' 在 MD 的垂直平分线上，∴ $A'D=A'M=AM=DM$，∴ $\triangle A'DM$ 为等边三角形，∴ $\angle A'MD=60°$，∴ $\angle A'MN=30°$，$\angle AMA'=180-60°=120°$，∴ $\angle A'MP=\frac{1}{2}\angle AMA'=60°$，∴ $\angle NMP=30°$，∴ $NP=\frac{\sqrt{3}}{3}MN=\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 厘米，∴ $BP=BN-NP=\left(4-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 厘米.

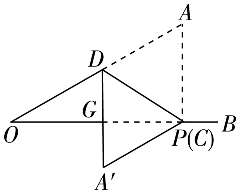
综上所述，BP 的长为 $(4\sqrt{3}-4)$ 厘米或 $\left(4-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$ 厘米. 故答案为 $(4\sqrt{3}-4)$ 或 $\left(4-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$.

5. 2 **或** $2\sqrt{3}$ 【**解析**】①如图(1)，若 PA' 与 AO 交于点 F，连接 $A'O$. ∵ D 为 OA 的中点，$OA=4$，∴ $OD=AD=2$. 由折叠性质可得 $A'D=AD=2$. ∵ $\triangle DPA'$ 与 $\triangle ODP$ 的重叠部分的面积恰好为 $\triangle ODP$ 面积的一半，∴ $S_{\triangle DFP}=\frac{1}{2}S_{\triangle ODP}=\frac{1}{2}S_{\triangle ADP}=\frac{1}{2}S_{\triangle A'DP}$，∴ $DF=\frac{1}{2}OD=OF$，$PF=\frac{1}{2}A'P=A'F$，∴ 四边形 $A'DPO$ 是平行四边形，∴ $OP=A'D=2$.

②如图(2)，过点 A 作 $AC\perp OB$ 于点 C，若 DA' 与 OC 交于点 G，同理可得 $GP=\frac{1}{2}OP=OG$，$DG=\frac{1}{2}DA'=1$. ∵ $OD=AD$，∴ $DG=\frac{1}{2}AP=1$，∴ $AP=2$. ∵ $\angle AOB=30°$，$OA=4$，∴ $AC=2$，$OC=2\sqrt{3}$，∴ 点 P 与点 C 重合，∴ $OP=OC=2\sqrt{3}$. 故答案为 2 或 $2\sqrt{3}$.



图(1)

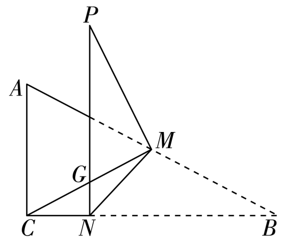


图(2)

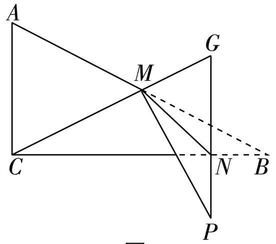
6. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ **或** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ 【**解析**】在 Rt $\triangle ABC$ 中，$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. 分以下两种情况进行讨论：

①当点 P 在 BC 上方时，如图(1). ∵ $\angle ACB=90°$，M 为 AB 边的中点，∴ $AM=CM=BM=\sqrt{5}$，∴ $\angle BCM=\angle B$. 由折叠的性质可知 $\angle P=\angle B$，$PM=BM=\sqrt{5}$，∴ $\angle BCM=\angle P$. ∵ $PN\mathbin{/\mkern-6mu/}AC$，∴ $\angle PNC=90°$. 又 ∵ $\angle CGN=\angle PGM$，∴ $\angle PMG=\angle PNC=90°=$

$\angle ACB$，∴ $\triangle PGM \backsim \triangle BAC$，∴ $\frac{GM}{PM}=\frac{AC}{BC}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，解得 $GM=\frac{\sqrt{5}}{2}$，∴ $CG=CM-GM=\frac{\sqrt{5}}{2}$.



图(1)



图(2)

②当点 P 在 BC 的下方时，如图(2).

同理可得 $\angle PMC=90°$，$\triangle PGM \backsim \triangle BAC$，∴ $\frac{GM}{PM}=\frac{AC}{BC}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，解得 $GM=\frac{\sqrt{5}}{2}$，∴ $CG=CM+GM=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

综上，CG 的长为$\frac{\sqrt{5}}{2}$或$\frac{3\sqrt{5}}{2}$，故答案为$\frac{\sqrt{5}}{2}$或$\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

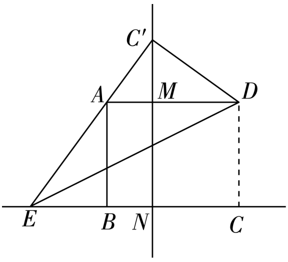
7. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ **或** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 【**解析**】由翻折的性质，得 $AB=AB'$，$BE=B'E$. 易证四边形 $ABNM$ 为矩形，∴ $MN=AB=3$. ①当 $MB'=2$，$B'N=1$ 时，设 $EN=x$，得 $B'E=\sqrt{x^2+1}$. 易得 $\triangle B'EN \backsim \triangle AB'M$，则 $\frac{EN}{B'M}=\frac{B'E}{AB'}$，即 $\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{3}$，解得 $x^2=\frac{4}{5}$，∴ $BE=B'E=\sqrt{\frac{4}{5}+1}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. ②当 $MB'=1$，$B'N=2$ 时，设 $EN=x$，得 $B'E=\sqrt{x^2+2^2}$，易得 $\triangle B'EN \backsim \triangle AB'M$，则 $\frac{EN}{B'M}=\frac{B'E}{AB'}$，即 $\frac{x}{1}=\frac{\sqrt{x^2+4}}{3}$，解得 $x^2=\frac{1}{2}$，∴ $BE=B'E=\sqrt{\frac{1}{2}+4}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，故答案为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$或$\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

8. 2 **或** $\frac{1}{2}$ 【**解析**】如图(1)，当 E 点在 B 点左侧时，由折叠可知，$CD=C'D$. ∵ $AB=5$，$BC=6$，$AM=\frac{1}{3}AD$，$BN=\frac{1}{3}BC$，∴ $AM=2$，$BN=2$，$MN \perp AD$，∴ $MD=4$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle DMC'$ 中，$C'M=\sqrt{C'D^2-MD^2}=\sqrt{25-16}=3$，∴ $C'N=8$，$\tan\angle C'DM=\frac{3}{4}$. ∵ $\angle C'DM+\angle MC'D=$

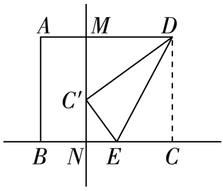
$90°$，$\angle MC'D+\angle EC'M=90°$，$\therefore\ \angle C'DM=\angle EC'M$，

$\therefore\ \dfrac{3}{4}=\dfrac{EN}{C'N}$，$\therefore\ \dfrac{3}{4}=\dfrac{EN}{8}$，$\therefore\ EN=6$，$\therefore\ CE=10$，

$\therefore\ \tan\angle DEC=\dfrac{CD}{EC}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$.



图(1)

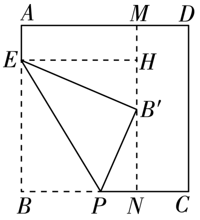


图(2)

如图(2)，当 E 点在 B，C 之间时，由折叠可知，$CD=C'D=5$. $\because\ MD=4$，$\therefore\ C'M=3$，$\therefore\ C'N=2$. 设 $CE=x$，则 $NE=4-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle NEC'$ 中，$C'E^2=NE^2+C'N^2$，$\therefore\ x^2=(4-x)^2+4$，解得 $x=\dfrac{5}{2}$，$\therefore\ EC=\dfrac{5}{2}$，$\therefore\ \tan\angle DEC=\dfrac{CD}{EC}=\dfrac{5}{\frac{5}{2}}=2$. 综上所述，$\tan\angle DEC$ 的值为 2 或 $\dfrac{1}{2}$，故答案为 2或$\dfrac{1}{2}$.

9. $\dfrac{5}{7}\sqrt{21}$**或 15** **【解析】**过 B' 作 $MN/\!/AB$ 分别交 AD，BC 于点 M，N，过 E 作 $EH/\!/AD$ 交 MN 于 H. $\because\ AD/\!/BC$，$MN/\!/AB$，$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 是平行四边形. 又 $\because\ \angle A=90°$，$\therefore$ 四边形 $ABNM$ 是矩形. 同理可得四边形 $AEHM$ 是矩形.

①如图(1)，若点 B' 在 AD 下方，则 $B'M=3$ cm，$B'N=3$ cm. $\because\ MH=AE=1$ cm，$\therefore\ B'H=2$ cm. 由折叠可得，$EB'=EB=5$ cm，$\therefore\ \mathrm{Rt}\triangle EB'H$ 中，$EH=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$ (cm)，$\therefore\ BN=AM=EH=\sqrt{21}$ cm. 设 $BP=t$ cm，

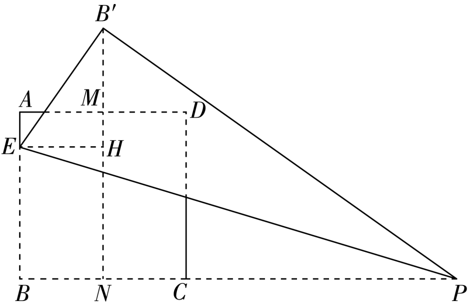


图(1)

$\therefore\ PB'=t$ cm，$PN=(\sqrt{21}-t)$ cm. $\because\ \mathrm{Rt}\triangle PB'N$ 中，$B'P^2=PN^2+B'N^2$，$\therefore\ t^2=(\sqrt{21}-t)^2+3^2$，解得 $t=\dfrac{5}{7}\sqrt{21}$.

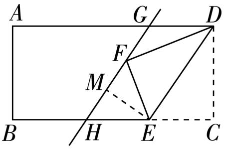
②如图(2)，若点 B' 在 AD 上方，则 $B'M=3$ cm，$B'N=9$ cm，易得 $EH=3$ cm. 设 $BP=t$ cm，$\therefore\ B'P=t$ cm，$PN=(t-3)$ cm. $\because\ \mathrm{Rt}\triangle PB'N$ 中，$B'P^2=PN^2+$

$B'N^2$，∴ $t^2=(t-3)^2+9^2$，解得 $t=15$. 综上所述，BP 的长为 $\frac{5}{7}\sqrt{21}$ 或 15.



图(2)

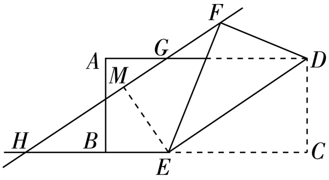
10. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **或** $\frac{\sqrt{6}}{3}$　**【解析】**①如图(1)，当 $AG=\frac{2}{3}AD$ 时，过点 E 作 $EM\perp GH$ 于点 M. ∵ $DE//GH$，$AD//BC$，∴ 四边形 $HEDG$ 是平行四边形，∴ $\angle MED=90°$，$HE=GD=\frac{1}{3}AD=1$. 由折叠可知 $\angle FED=\angle CED$. ∵ $\angle MED=90°$，即 $\angle FEM+\angle FED=90°$，∴ $\angle CED+\angle HEM=90°$，∴ $\angle HEM=\angle FEM$. ∵ $\angle EMF=\angle EMH=90°$，$ME=ME$，∴ $\triangle HEM\cong\triangle FEM$(ASA)，∴ $HM=MF$，$EF=HE=1$，∴ $EF=EC=1$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle C=90°$，$DC=AB=\sqrt{2}$. Rt$\triangle EDC$ 中，$DE=\sqrt{DC^2+EC^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$，∴ $GH=DE=\sqrt{3}$. ∵ $ME\perp HG$，$HG//DE$，∴ $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}ME\times DE=S_{\triangle DEC}=\frac{1}{2}DC\times EC$，∴ $ME=\frac{DC\times EC}{DE}=\frac{\sqrt{2}\times 1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Rt$\triangle HME$ 中，$HM=\sqrt{HE^2-ME^2}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ $FG=HG-HF=HG-2HM=\sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.



图(1)

②如图(2)，当 $AG=\frac{1}{3}AD=1$ 时，过点 E 作 $EM\perp GH$ 于点 M，同理可得 $HE=GD=AD-AG=3-1=2$，$EC=EF=HE=2$，∴ $DE=HG=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$，∴ $ME=\frac{DC\times EC}{DE}=\frac{\sqrt{2}\times 2}{\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Rt$\triangle HME$ 中，$HM=$

$\sqrt{HE^2-ME^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$\therefore$ $FG=HF-HG=2HM-HG=\frac{4\sqrt{6}}{3}-\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故答案为$\frac{\sqrt{3}}{3}$或$\frac{\sqrt{6}}{3}$.



图(2)

▼第二十二题　二次函数的综合

1.【解】(1)根据题意设 y 关于 x 的函数解析式为 $y=a(x-3)^2+3$. 把 $\left(0,\frac{5}{3}\right)$ 代入解析式得 $\frac{5}{3}=a(0-3)^2+3$,解得 $a=-\frac{4}{27}$,∴ y 关于 x 的函数解析式为 $y=-\frac{4}{27}(x-3)^2+3$.

(2)该女生在此项考试中得满分. 理由:

令 $y=0$,则 $-\frac{4}{27}(x-3)^2+3=0$,

解得 $x_1=7.5$,$x_2=-1.5$(舍去).

∵ $7.5>6.70$,∴ 该女生在此项考试中得满分.

2.【解】(1)∵ $OA=4$,且点 A 在 y 轴正半轴上,

∴ $A(0,4)$.

(2)∵ 抛物线最高点 B 的坐标为$(4,12)$,

∴ 设抛物线的解析式为 $y=a(x-4)^2+12$.

∵ $A(0,4)$,∴ $a(0-4)^2+12=4$,解得 $a=-\frac{1}{2}$,

∴ 抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+12$.

(3)∵ 在 Rt△CDE 中,$\frac{CE}{DE}=\frac{3}{4}$,$CD=2.5$,∴ 易得 $CE=1.5$,$DE=2$,∴ 点 D 的纵坐标为 -1.5.

令 $-\frac{1}{2}(x-4)^2+12=-1.5$,解得 $x_1=4+3\sqrt{3}\approx 9.19$,$x_2=4-3\sqrt{3}\approx -1.19$(不合题意,舍去),∴ $D(9.19,-1.5)$,∴ $OC=9.19-2=7.19\approx 7.2$(米),∴ OC 的长约为 7.2 米.

3.【解】(1)设函数解析式为 $y=kx+b(k\neq 0)$. 由题意得 $\begin{cases}60k+b=200,\\80k+b=100,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-5,\\b=500,\end{cases}$ ∴ $y=-5x+500$.

当 $y=0$ 时,$-5x+500=0$,解得 $x=100$,∴ y 与 x 之间的函数解析式为 $y=-5x+500(50<x<100)$.

(2)设月销售利润为 w 元,则 $w=(x-50)(-5x+500)=-5x^2+750x-25\ 000=-5(x-75)^2+3\ 125$.

∵ $-5<0$,$50<x<100$,∴ 当 $x=75$ 时,w 有最大值,为 3 125,∴ 当销售单价定为 75 元时,该种油茶的月销售利润最大,最大利润是 3 125 元.

4.【解】(1)①∵ 二次函数 $y=a(x-2)^2-1(a>0)$ 的图

象经过点$(3,1)$，$\therefore 1=a-1$，解得 $a=2$，

$\therefore$ 二次函数的解析式为 $y=2(x-2)^2-1$.

②$\because y_1=y_2$，$\therefore M,N$ 关于抛物线的对称轴对称.

$\because$ 对称轴是直线 $x=2$，$\therefore x_2+x_1=4$. 又$\because x_2-x_1=3$，

$\therefore x_1=\frac{1}{2}, x_2=\frac{7}{2}$. 当 $x=\frac{1}{2}$时，$y_1=2\times\left(\frac{1}{2}-2\right)^2-1=\frac{7}{2}$，$\therefore$ 当 $y_1=y_2$ 时，顶点到 MN 的距离为$\frac{7}{2}+1=\frac{9}{2}$.

(2) 易知点 M,N 在对称轴直线 $x=2$ 的异侧时，二次函数的最小值为-1.

分以下两种情况进行讨论：

当 $y_1\geqslant y_2$ 时，$x_1<2$，$x_2=x_1+3>2$，$2-x_1\geqslant x_2-2$，$\therefore -1<x_1\leqslant\frac{1}{2}$. 此时 y 的最大值为 $y_1=a(x_1-2)^2-1$，$\therefore y_1-(-1)=1$，$\therefore a=\frac{1}{(x_1-2)^2}$. 又$\because -1<x_1\leqslant\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{9}{4}\leqslant(x_1-2)^2<9$，$\therefore \frac{1}{9}<\frac{1}{(x_1-2)^2}\leqslant\frac{4}{9}$，即$\frac{1}{9}<a\leqslant\frac{4}{9}$.

当 $y_1<y_2$ 时，$x_1<2$，$x_2=x_1+3>2$，$x_2-2>2-x_1$，$\therefore \frac{1}{2}<x_1<2$. 此时 y 的最大值为 $y_2=a(x_2-2)^2-1=a(x_1+1)^2-1$，$\therefore y_2-(-1)=1$，易得 $a=\frac{1}{(x_1+1)^2}$.

又$\because \frac{1}{2}<x_1<2$，$\therefore \frac{9}{4}<(x_1+1)^2<9$，$\therefore \frac{1}{9}<\frac{1}{(x_1+1)^2}<\frac{4}{9}$，即$\frac{1}{9}<a<\frac{4}{9}$.

综上，a 的取值范围为$\frac{1}{9}<a\leqslant\frac{4}{9}$.

5.【解】(1)$\because$ 已知二次函数 $y=x^2+bx+m$ 图象的对称轴为直线 $x=2$，$\therefore b=-4$.

(2) 如图(1). 由(1)知 $y=x^2-4x+m$. ①令 $y=0$，则 $x^2-4x+m=0$，解得 $x=2-\sqrt{4-m}$或 $x=2+\sqrt{4-m}$. $\because M$ 在 N 的左侧，$\therefore M(2-\sqrt{4-m},0)$，$N(2+\sqrt{4-m},0)$，

$\therefore MN=2\sqrt{4-m}$，$MN$ 的中点坐标为$(2,0)$.

$\because \triangle MNP$ 为直角三角形，$P(0,m)$，$\therefore$ 点 P 到 MN 中点的距离等于$\frac{1}{2}MN$，即$\sqrt{4+m^2}=\sqrt{4-m}$，解得 $m=0$(舍去)或 $m=-1$.

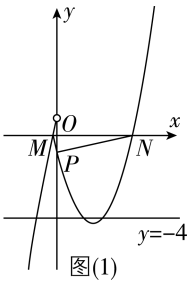
②$\because m=-1$，$\therefore y=x^2-4x-1(x\geqslant0)$，$M(2-\sqrt{5},0)$，$N(2+\sqrt{5},0)$. 令 $x^2-4x-1=-4$，解得 $x=1$ 或 $x=3$，

$\therefore$ 抛物线 $y=x^2-4x-1(x\geqslant0)$ 与直线 $y=-4$ 的交点为 $(1,-4)$，$(3,-4)$. $\because$ $y=x^2-4x-1(x<0)$ 关于 x 轴对称的抛物线表达式为 $y=-x^2+4x+1(x<0)$，当 $-x^2+4x+1=-4$ 时，解得 $x=5$(舍去)或 $x=-1$，$\therefore$ 抛物线 $y=-x^2+4x+1(x<0)$ 与直线 $y=-4$ 的交点为 $(-1,-4)$，$\therefore$ $-1\leqslant x<2-\sqrt{5}$ 或 $0\leqslant x\leqslant1$ 或 $3\leqslant x<2+\sqrt{5}$ 时，$-4\leqslant y<0$.

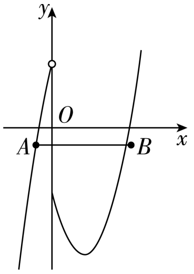
(3) $-4\leqslant m<-1$ 或 $1\leqslant m<3$.

$y=x^2-4x+m(x<0)$ 关于 x 轴对称的抛物线表达式为 $y=-x^2+4x-m(x<0)$. 如图(2)，当 $y=-x^2+4x-m(x<0)$ 的图象经过点 A 时，$-1-4-m=-1$，解得 $m=-4$，$\therefore$ $y=x^2-4x-4(x\geqslant0)$. 当 $x=5$ 时，$y=1$，$\therefore$ $y=x^2-4x-4(x\geqslant0)$ 的图象与线段 AB 有一个交点，$\therefore$ $m=-4$ 时，线段 AB 与图象 C 恰有两个公共点；如图(3)，当 $y=x^2-4x+m(x\geqslant0)$ 的图象经过点 $(0,-1)$ 时，$m=-1$，此时图象 C 与线段 AB 有三个公共点，$\therefore$ $-4\leqslant m<-1$ 时，线段 AB 与图象 C 恰有两个公共点；如图(4)，当 $y=-x^2+4x-m$ 的图象经过点 $(0,-1)$ 时，$m=1$，此时图象 C 与线段 AB 有两个公共点；如图(5)，当 $y=x^2-4x+m(x\geqslant0)$ 的图象的顶点在线段 AB 上时，$m-4=-1$，解得 $m=3$，此时图象 C 与线段 AB 有一个公共点，$\therefore$ $1\leqslant m<3$ 时，线段 AB 与图象 C 恰有两个公共点.

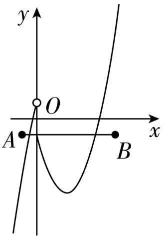
综上所述，$-4\leqslant m<-1$ 或 $1\leqslant m<3$ 时，线段 AB 与图象 C 恰有两个公共点.



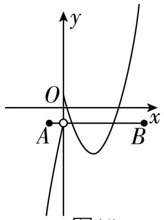
图(1)



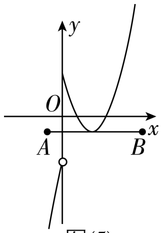
图(2)



图(3)



图(4)



图(5)

▼第二十三题　几何综合

1.【解】【操作探究】在网格中取格点 E，构建两个直角三角形，分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDE$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\tan\angle BAC=\frac{1}{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，$\tan\angle DCE=\frac{1}{2}$，所以 $\tan\angle BAC=\tan\angle DCE$，所以 $\angle BAC=\angle DCE$.

因为 $\angle ACP+\angle DCE=\angle ACB=90^\circ$，

所以 $\angle ACP+\angle BAC=90^\circ$，所以 $\angle APC=90^\circ$，

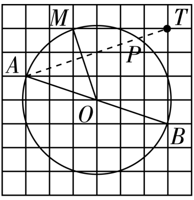
即 $AB\perp CD$. 故答案为 $\tan\angle DCE=\frac{1}{2}$.

【拓展应用】(1)如图(1)，点 P 即为所求.

作法：取格点 T，连接 AT 交 $\odot O$ 于点 P，点 P 即为所求.

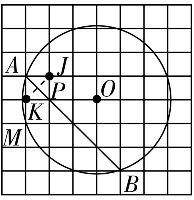
证明：由作图可知，$OM\perp AP$.

$\because OM$ 是半径，$\therefore \overset{\frown}{PM}=\overset{\frown}{AM}$.



图(1)

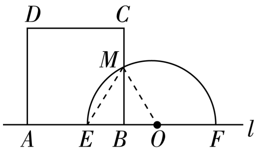
(2)如图(2)，点 P 即为所求.



图(2)

作法：取格点 J，K，连接 JK 交 AB 于点 P，点 P 即为所求.(作法不唯一)

2.【解】(1)如图(1)，设 BC 与半圆 O 交于点 M，连接 EM，OM.



图(1)

当 $t=2.5$ 时，$BE=2.5$.

$\because EF=10$，$\therefore OE=\frac{1}{2}EF=5$，$\therefore OB=2.5$，$\therefore EB=OB$.

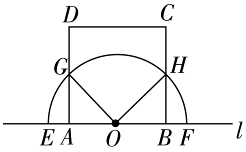
在矩形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$\therefore ME=MO$.

又$\because MO=EO$，$\therefore ME=EO=MO$，$\therefore \triangle MOE$ 是等边三

角形，$\therefore \angle EOM=60°$，$\therefore l_{\overset{\frown}{ME}}=\dfrac{60\pi\times5}{180}=\dfrac{5\pi}{3}$，

即半圆 O 在矩形 $ABCD$ 内的弧的长度为$\dfrac{5\pi}{3}$.

（2）如图（2）.



图(2)

$\because \angle GOH=90°$，

$\therefore \angle AOG+\angle BOH=90°$.

$\because \angle AGO+\angle AOG=90°$，

$\therefore \angle AGO=\angle BOH$.

在$\triangle AGO$ 和$\triangle BOH$ 中，$\begin{cases}\angle GAO=\angle HBO,\\ \angle AGO=\angle BOH,\\ OG=OH,\end{cases}$

$\therefore \triangle AGO\cong\triangle BOH$（AAS），$\therefore OB=AG=t-5$.

$\because AB=7$，$\therefore AE=t-7$，$\therefore AO=5-(t-7)=12-t$.

在 $Rt\triangle AGO$ 中，$AG^2+AO^2=OG^2$，$\therefore (t-5)^2+(12-t)^2=5^2$，解得 $t_1=8$，$t_2=9$，即 t 的值为 8 或 9.

3.【解】（1）过点 C 作 $CG\perp AB$ 于 G，如图（1）.

$\because EF\perp AB$，$\therefore \angle EFD=\angle CGD=90°$.

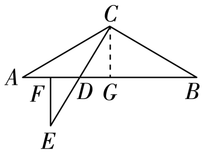
$\because \angle EDF=\angle CDG$，$DE=CD$，

$\therefore \triangle EDF\cong\triangle CDG$（AAS），$\therefore EF=CG$.

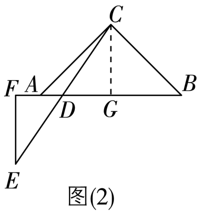
在$\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle ACB=120°$，

$\therefore \angle A=\angle B=\dfrac{1}{2}\times(180°-120°)=30°$，

$\therefore CG=\dfrac{1}{2}AC$，$\therefore EF=\dfrac{1}{2}AC$. 故答案为 $EF=\dfrac{1}{2}AC$.



图(1)



图(2)

（2）①$AD+DF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$. 理由：

过点 C 作 $CG\perp AB$ 于 G，如图（2）.

与（1）同理，可证$\triangle EDF\cong\triangle CDG$，

$\therefore DF=DG$，$\therefore AD+DF=AD+DG=AG$，

在$\triangle ABC$ 中，$AC=BC$，$\angle ACB=90°$，

$\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\therefore \angle CAG=45°$，

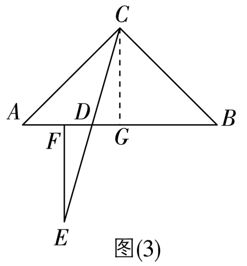
$\therefore \triangle ACG$ 是等腰直角三角形，

$\therefore AG=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$，$\therefore AD+DF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AC$.

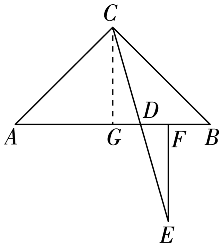
②AC 的长为 $4\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2}$.

如图，过点 C 作 $CG\perp AB$ 于 G. 当 D，F 在 G 点左侧时，与(1)同理可证 $\triangle EDF\cong\triangle CDG$，$\therefore DF=DG=1$.

$\because AD=3$，$\therefore AG=DG+AD=1+3=4$. 与①同理，可证 $\triangle ACG$ 是等腰直角三角形，$\therefore AC=\sqrt{2}AG=4\sqrt{2}$；



图(3)



图(4)

当点 D，F 在点 G 右侧时，如图(4)，

$\therefore AG=AD-DG=3-1=2$，

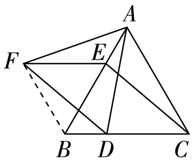
同理可证 $\triangle ACG$ 是等腰直角三角形，$\therefore AC=\sqrt{2}AG=2\sqrt{2}$. 综合上述，线段 AC 的长为 $4\sqrt{2}$ 或 $2\sqrt{2}$.

4.【解】(1) $\because \triangle ABC$，$\triangle ADF$ 都是等边三角形，

$\therefore EF=AB=CD$，$\angle ADC=\angle FED$，$\therefore EF/\!/CD$，

故答案为 $CD=EF$，$CD/\!/EF$.

(2)结论成立. 理由：如图(1)，连接 BF.



图(1)

$\because \triangle ABC$，$\triangle ADF$ 都是等边三角形，$\therefore \angle FAD=\angle BAC$，$AF=AD$，$AB=AC$，$\therefore \angle FAB=\angle DAC$，

$\therefore \triangle FAB\cong\triangle DAC$(SAS)，

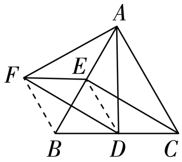
$\therefore BF=CD$，$\angle ABF=\angle ACD=60°$.

$\because AE=BD$，$AB=BC$，$\therefore BE=CD=BF$，

$\therefore \triangle EFB$ 是等边三角形，

$\therefore EF=BF=CD$，$\angle FEB=\angle ABC=60°$，$\therefore EF/\!/CD$.

(3)当点 D 是 BC 的中点时，四边形 $EFDC$ 的面积是 $\triangle ABC$ 的面积的一半. 此时四边形 $BDEF$ 是菱形. 理由：如图(2)，连接 BF. 由(2)可知，$\triangle BEF$ 是等边三角形，$BF=BE=EF=CD$.



图(2)

$\because BD=CD$，$\therefore BE=\dfrac{1}{2}CB$，$EF=BD$.

$\because \triangle BEF\backsim\triangle ABC$，

$\therefore \dfrac{S_{\triangle BEF}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{BE}{CB}\right)^2=\dfrac{1}{4}$.

$\because EF/\!/CD$，$EF=CD$，$\therefore$ 四边形 $EFDC$ 是平行四边形，$\therefore S_{\text{平行四边形}EFDC}=2S_{\triangle EFB}$，$\therefore \dfrac{S_{\text{平行四边形}EFDC}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{2}$.

连接 DE. $\because EF/\!/BD$，$EF=BD$，

$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 为平行四边形.

又$\because BF=EF$，$\therefore$ 四边形 $BDEF$ 是菱形.