第二部分 | 热点猜押

▼热点一　相似常考模型

1.【解】(1)$\because \angle ACB=90°, AC=BC=4\ \text{cm}$,

$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}\ (\text{cm})$.

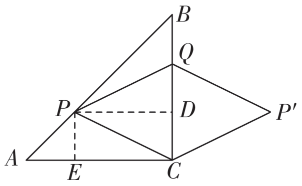
由题意得 $AP=\sqrt{2}t\ \text{cm}$, $BQ=t\ \text{cm}$, 则 $BP=(4\sqrt{2}-\sqrt{2}t)\ \text{cm}$.

$\because PQ\perp BC$, $\therefore \angle PQB=90°$, $\therefore \angle PQB=\angle ACB$,

$\therefore PQ/\!/AC$, $\therefore \dfrac{BP}{BA}=\dfrac{BQ}{BC}$,

$\therefore \dfrac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}t}{4\sqrt{2}}=\dfrac{t}{4}$, 解得 $t=2$, $\therefore$ 若 $PQ\perp BC$, 则 t 的值为 2.

(2)过点 P 分别作 $PD\perp BC$ 于 D, $PE\perp AC$ 于 E, 如图. 由(1)知, $AP=\sqrt{2}t\ \text{cm}$, $BQ=t\ \text{cm}$. $(0\leqslant t<4)$



$\because \angle ACB=90°$, $AC=BC=4\ \text{cm}$, $\therefore \triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\therefore \angle A=\angle B=45°$,

$\therefore \triangle APE$ 和 $\triangle PBD$ 均为等腰直角三角形, $\therefore PE=AE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AP=t\ \text{cm}$, $BD=PD$,

$\therefore CE=AC-AE=(4-t)\ \text{cm}$.

易得四边形 $PECD$ 为矩形,

$\therefore PD=EC=(4-t)\ \text{cm}$,

$\therefore BD=(4-t)\ \text{cm}$, $\therefore QD=BD-BQ=(4-2t)\ \text{cm}$.

在 $\text{Rt}\triangle PCE$ 中, $PC^2=PE^2+CE^2=t^2+(4-t)^2$.

在 $\text{Rt}\triangle PDQ$ 中, $PQ^2=PD^2+DQ^2=(4-t)^2+(4-2t)^2$.

$\because$ 四边形 $QPCP'$ 为菱形, $\therefore PQ=PC$, $\therefore t^2+(4-t)^2=(4-t)^2+(4-2t)^2$, $\therefore t_1=\dfrac{4}{3}$, $t_2=4$(舍去),

$\therefore$ 当 t 的值为 $\dfrac{4}{3}$ 时, 四边形 $QPCP'$ 为菱形.

2.【解】由题意得 $BD/\!/AC$,

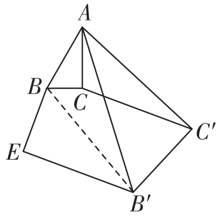
$\therefore \angle D=\angle ACD$, $\angle A=\angle ABD$, $\therefore \triangle BDE\backsim\triangle ACE$,

$\therefore \frac{BD}{BE}=\frac{AC}{AE}$, $\therefore \frac{1}{0.2}=\frac{AC}{1.8-0.2}$,

解得 $AC=8$.

答:井深 AC 的长为 8 米.

3. B 【解析】如图,连接 BB'.



$\because \angle BAC=30°$, $\angle ACB=90°$, $\therefore \cos 30°=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because \triangle ABC \backsim \triangle AB'C'$, $\therefore \frac{AB}{AB'}=\frac{AC}{AC'}$, $\angle ACB=\angle AC'B'=90°$, $\angle BAC=\angle B'AC'=30°$, $\therefore \angle BAC+\angle CAB'=\angle B'AC'+\angle CAB'$,

$\therefore \angle BAB'=\angle CAC'$,

$\therefore \triangle BAB' \backsim \triangle CAC'$, $\therefore \angle BB'A=\angle CC'A$, $\frac{CC'}{BB'}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 由平移得 $CC'=B'E=\sqrt{6}$, $CC'//B'E$,

$\therefore \frac{B'E}{BB'}=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because CC'//B'E$,

$\therefore \angle CC'B'+\angle AB'C'+\angle BB'A+\angle BB'E=180°$,

$\therefore \angle CC'B'+\angle AB'C'+\angle CC'A+\angle BB'E=180°$,

$\therefore \angle AC'B'+\angle AB'C'+\angle BB'E=180°$.

$\because \angle AC'B'=90°$, $\angle B'AC'=30°$,

$\therefore \angle AB'C'=90°-\angle B'AC'=60°$,

$\therefore \angle BB'E=30°$,

$\therefore \angle BB'E=\angle CAB=30°$,

$\therefore \triangle BCA \backsim \triangle BEB'$,

$\therefore \angle BEB'=\angle ACB=90°$,

$\therefore BE=B'E \cdot \tan 30°=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{2}$, 故选 B.

4. (1)【证明】$\because AB=AC$, $\therefore \angle B=\angle FCE$.

$\because \angle AFD=\angle B$, $\angle AFC=\angle AFE+\angle EFC=\angle B+\angle FAB$,

$\therefore \angle EFC=\angle FAB$, $\therefore \triangle FAB \backsim \triangle EFC$,

$\therefore \dfrac{AB}{FC}=\dfrac{BF}{CE}$,

即 $AB\cdot EC=BF\cdot CF$,$\therefore AC\cdot EC=BF\cdot CF$.

(2)【解】①$\because DF/\!/AB$,$\therefore \angle BAF=\angle AFE$,

$\therefore$ 易得 $\angle BAF=\angle ACB$. 又$\because \angle ABF=\angle CBA$,

$\therefore \triangle FAB\backsim\triangle ACB$,$\therefore \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{BF}{AB}$,

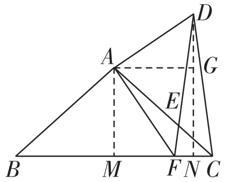
$\therefore BF=\dfrac{AB^2}{BC}=\dfrac{100}{16}=\dfrac{25}{4}$,

$\therefore CF=BC-BF=\dfrac{39}{4}$.

$\because DF/\!/AB$,$\therefore \triangle CEF\backsim\triangle CAB$,

$\therefore \dfrac{EF}{AB}=\dfrac{CF}{BC}=\dfrac{\frac{39}{4}}{16}=\dfrac{39}{64}$.

②如图,过点 A,D 分别作 $AM\perp BC$,$DN\perp FC$,垂足分别为 M,N,过点 A 作 $AG\perp DN$ 于点 G.



在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC$,$AM\perp BC$,

$\therefore BM=CM=8$,则 $AM=\sqrt{AB^2-BM^2}=6$,

$\therefore \tan B=\dfrac{AM}{BM}=\dfrac{3}{4}$.

$\because \angle AFD=\angle B$,$\angle DAF=90°$,

$\therefore \tan\angle AFD=\dfrac{AD}{AF}=\dfrac{3}{4}$.

$\because \angle AMN=\angle GNM=\angle AGN=90°$,

$\therefore$ 四边形 $MNGA$ 是矩形,

$\therefore GN=AM=6$,$\angle MAG=90°$.

又$\because \angle FAD=90°$,$\therefore \angle FAM+\angle FAG=\angle DAG+\angle FAG=90°$,

$\therefore \angle FAM=\angle DAG$.

又$\because \angle AMF=\angle AGD=90°$,

$\therefore \triangle FAM\backsim\triangle DAG$,

$\therefore \dfrac{AG}{AM}=\dfrac{AD}{AF}=\dfrac{3}{4}$,则 $AG=\dfrac{3}{4}AM=\dfrac{9}{2}$,

$\therefore MN=AG=\dfrac{9}{2}$,则 $CN=CM-MN=8-\dfrac{9}{2}=\dfrac{7}{2}$.

$\because DF=CD$，$\therefore CF=2CN=7$，

$\therefore FM=CM-CF=1$.

由$\triangle FAM\backsim\triangle DAG$，得$\dfrac{DG}{FM}=\dfrac{AD}{AF}=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore DG=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore DN=DG+GN=\dfrac{3}{4}+6=\dfrac{27}{4}$，

$\therefore S_{\triangle DCF}=\dfrac{1}{2}CF\cdot DN=\dfrac{1}{2}\times7\times\dfrac{27}{4}=\dfrac{189}{8}$.

▼热点二　二次函数与几何综合

1.【解】(1)当 $k=10$ 时,抛物线 $B-E-F$ 的表达式为 $y=b(x-2)^2+10$,

把 $B(0,6)$ 代入,得 $6=4b+10$,解得 $b=-1$.

把 $D(1,6)$ 代入抛物线 DC 的表达式 $y=a(x-7)^2$,

得 $6=36a$,解得 $a=\frac{1}{6}$,$\therefore a=\frac{1}{6}$,$b=-1$.

(2)由(1)知,抛物线 $B-E-F$ 的表达式为 $y=-(x-2)^2+10$,抛物线 DC 的表达式为 $y=\frac{1}{6}(x-7)^2$,把 $y=3.75$ 代入 $y=-(x-2)^2+10$ 中,解得 $x=4.5$ 或 $x=-0.5$(舍去);

把 $x=4.5$ 代入 $y=\frac{1}{6}(x-7)^2$ 中,解得 $y=\frac{25}{24}$.

$\therefore$ 他距 DC 的竖直距离为 $3.75-\frac{25}{24}=\frac{65}{24}$.

(3)在 $y=a(x-7)^2$ 中,当 $x=7$ 时,$y=0$,$\therefore C(7,0)$.

把 $(0,6)$ 代入 $y=b(x-2)^2+k$,可得 $k=6-4b$,

$\therefore y=b(x-2)^2+6-4b$.

由题可知,当 $x=7$ 时,$y\leqslant0$,

即 $25b+6-4b\leqslant0$,解得 $b\leqslant-\frac{2}{7}$,

$\therefore b$ 的取值范围是 $b\leqslant-\frac{2}{7}$.

2.【解】(1)$\because E,F$ 分别为 AB,AD 的中点,

$\therefore EF=\frac{1}{2}BD$. 同理,$GH=\frac{1}{2}BD$.

$\because EF+BD+GH+AC=80$,$AC=x$,

$\therefore BD=40-\frac{1}{2}x$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是筝形,

$\therefore y=\frac{1}{2}\left(40-\frac{1}{2}x\right)x=-\frac{1}{4}x^2+20x$.

(2)$\because AC\leqslant\frac{4}{3}BD$,$\therefore x\leqslant\frac{4}{3}\left(40-\frac{1}{2}x\right)$,

$\therefore x\leqslant32$,$\therefore 25\leqslant x\leqslant32$.

$\because y=-\frac{1}{4}x^2+20x=-\frac{1}{4}(x-40)^2+400$,

又 $-\frac{1}{4}<0$,

$\therefore$ 当 $x=32$,即 AC 的长为 32 cm 时,这个风筝的面积最大,此时最大面积为 384 cm^2.

3.【解】(1)∵ 抛物线的顶点 $M(0,4)$，

∴ 设抛物线的表达式为 $y=ax^2+4$.

∵ 抛物线与 x 轴交于 $A(-2,0)$，

∴ $4a+4=0$，解得 $a=-1$，

∴ 抛物线的表达式为 $y=-x^2+4$.

(2)∵ 顶点 $M(0,4)$，$A(-2,0)$，∴ $B(2,0)$.

∵ 点 $C(0,2)$，$\angle COB=90°$，

∴ $OC=OB$，∴ $\angle OCB=\angle OBC=45°$.

∵ $PQ/\!/y$ 轴，$PR/\!/x$ 轴，

∴ $\angle PRQ=\angle OBC=45°$，$\angle PQR=\angle OCB=45°$，

∴ $\angle PRQ=\angle PQR=45°$，∴ $PQ=PR$，$\angle RPQ=90°$.

∵ $\triangle PQR$ 的面积为 2，

∴ $\frac{1}{2}PR\cdot PQ=\frac{1}{2}PQ^2=2$，∴ $PQ=2$.

∵ $B(2,0)$，$C(0,2)$，

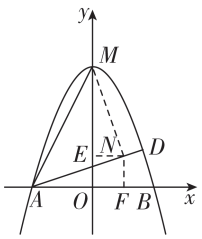
∴ 直线 BC 的表达式为 $y=-x+2$.

设 $P(m,-m^2+4)$，则 $Q(m,-m+2)$，

∴ $PQ=-m^2+4-(-m+2)=2$，解得 $m=1$ 或 $m=0$(舍去)，则 $-m^2+4=3$，

∴ P 点坐标为 $(1,3)$.

(3)存在. 过点 M 作 $MN\perp AD$ 于 N，过点 N 分别作 $NE\perp y$ 轴于 E，$NF\perp x$ 轴于 F，如图，∴ 易得 $NE\perp NF$，∴ $\angle MEN=\angle AFN=\angle ENF=90°$.



∵ $\angle MNE=\angle MNA-\angle ENA=90°-\angle ENA$，

$\angle ANF=\angle ENF-\angle ENA=90°-\angle ENA$，

∴ $\angle MNE=\angle ANF$.

∵ $\angle MAD=45°$，$MN\perp AD$，

∴ $MN=AN$，

∴ $\triangle MNE\cong\triangle ANF$(AAS)，

∴ $NE=NF$，

∴ 设 $N(n,n)$，则 $ME=AF=4-n$，

则 $AO=4-2n$.

∵ $A(-2,0)$，

∴ $4-2n=2$，解得 $n=1$，

∴ $N(1,1)$.

设直线 AN 的表达式为 $y=kx+t$.

将 A,N 的坐标分别代入，得 $\begin{cases} k+t=1, \\ -2k+t=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=\dfrac{1}{3}, \\ t=\dfrac{2}{3}, \end{cases}$

$\therefore$ 直线 AN 的表达式为 $y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}$.

联立 $\begin{cases} y=\dfrac{1}{3}x+\dfrac{2}{3}, \\ y=-x^2+4, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=-2, \\ y=0 \end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases} x=\dfrac{5}{3}, \\ y=\dfrac{11}{9}, \end{cases}$

$\therefore D$ 点坐标为 $\left(\dfrac{5}{3},\dfrac{11}{9}\right)$.