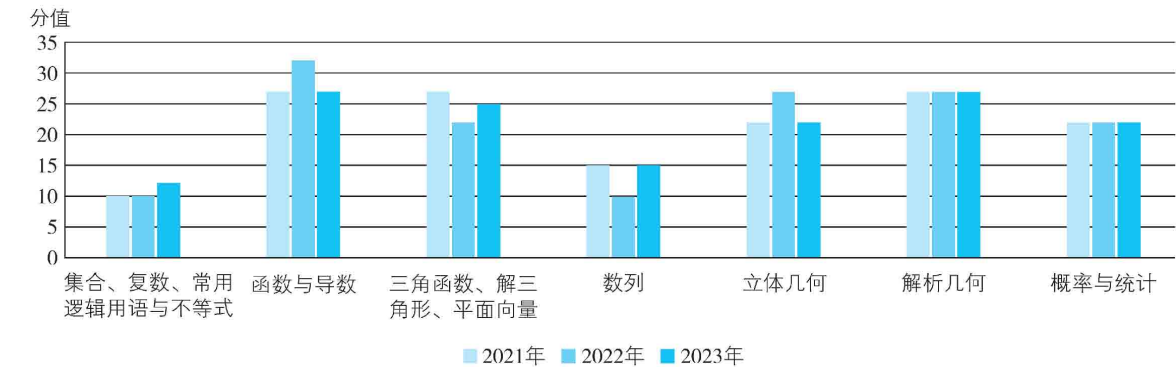


1 2023 年普通高等学校招生全国统一考试(全国新课标 I 卷)

名师综评 ▶ 广东中山一中 朱 欢

在“新课标、新教材、新高考”背景下,2023 年新课标 I 卷保持了全国卷基础、综合、灵活的特色,稳中求进.在对基础知识、基本技能、基本活动经验和基本思想方法考查的同时,突出对数学素养的考查,展现了数学学科的育人价值,落实“立德树人”的根本任务,体现高考改革要求.本套试题起点低、入口宽、多层次,给不同能力水平的学生提供了展示的平台,对数学学科的日常教学及深化改革有积极的引导作用.

一、试卷考点与分值预览



二、考点分布与考查趋势分析

考点	2021	2022	2023	变化趋势分析
集合、复数、常用逻辑用语与不等式	1,2	1,2	1,2,7	◆2023 年 第 7 题: I 卷第一次增加考查充分必要条件
函数与导数	7,13,15,22	7,10,12,15,22	4,10,11,19	◆2023 年 第 4 题:出现复合函数单调性问题,第 10 题:函数模型首次出现在多选题,第 19 题:导数一改往年压轴题的难度,题号提前,难度降低
三角函数、解三角形、平面向量	4,6,10,19	3,6,18	3,8,15,17	◆2023 年 第 8 题:三角恒等变换首次作为单选最后一题出现,考查此考点能力的要求有所提高
数列	16,17	17	7,20	◆2023 年 第 7 题:结合充分必要进行考查
立体几何	3,12,20	4,8,9,19	12,14,18	◆2023 年 第 12 题:创新度增强,探究几何体是否能整体放入正方体容器中
解析几何	5,11,14,21	11,14,16,21	5,6,16,22	相对稳定
概率与统计	8,9,18	5,13,20	9,13,21	◆2023 年 第 21 题:概率解答题题序相较往年后移,两点分布与数列求和结合的问题首次出现

三、试卷评析

1. 合理控制试题难度,落实“四翼”考查要求,助力“双减”政策落地

试卷难度相对于 2022 年有所降低,注重回归数学本源,突出学科基础性的要求.试题突出考查学生分析问题和解决问题的能力,重点关注数学本质和思维品质的考查,强化素养导向,注重数学思想方法的渗透,深入考查关键能力,具有很好的选拔功能.如第 7 题、第 20 题考查了等差数列概念、求通项、求和的通性通法;第 8 题、第 17 题考查了三角恒等变换的基本思想与策略,彰显了数学运算、逻辑推理等数学核心素养;第 12 题考查了正方体模型中多面体、球体、圆柱体的切接问题,彰显了空间想象、数学模型等数学核心素养;第 22 题以顶点不在坐标原点的抛物线为命题背景考查了圆锥曲线中的取值范围问题;第 21 题将概率统计与数列融合在一起,概率统计中“隐藏”了构造法求通项公式、数列求和的知识点等.

2. 试卷布局 (特别是解答题) 发生了较大变化

相对于 2022 年, 整套试卷降低了对对数应用的考查; 对于三角恒等变换、空间几何体的结构特征及体积、圆锥曲线等部分的考查难度有所增加.

解答题部分, 第 17 题考查解三角形, 第 18 题考查立体几何, 属于常规题型; 第 19 题考查导数及其应用, 难度降低; 第 20 题考查数列, 难度比之前有所增加, 对数学运算能力的要求提升; 第 21 题考查概率与数列的结合, 第 22 题考查圆锥曲线, 两个题目综合性较强, 难度较大.

3. 关注数学应用, 考查实践能力, 提升数学建模能力

试题关注数学知识和方法的灵活应用. 实际应用问题关注学生的身边事, 体现了数学源于生活且高于生活, 以及数学作为基础学科的应用价值. 如第 10 题以噪声污染为背景, 以表格的形式给出了各类型汽车的声压级与声源距离的关系, 考查了学生分析图表数据、估值等数学应用能力; 第 21 题以学生熟悉的投篮比赛创设生活实践情境, 通过研究甲、乙两人投篮命中的概率, 建立适当模型, 考查学生灵活运用概率统计知识分析问题和解决问题的能力, 引导学生用数学的思考方式解决问题从而认识世界.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	D	D	A	B	C	B	BD	ACD
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	ABC	ABD	64	$\frac{7\sqrt{6}}{6}$	$[2, 3)$	$\frac{3\sqrt{5}}{5}$				

1. C 【命题点】一元二次不等式的解法及集合的交集运算

【解析】由  $x^2-x-6 \geq 0$ , 得  $x \leq -2$  或  $x \geq 3$ , 则  $N = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$ .  $\because M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $\therefore M \cap N = \{-2\}$ , 故选 C.

2. A 【命题点】复数的四则运算及其共轭复数的概念

【解析】 $z = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)^2}{2(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{2(1-i^2)} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i$ , 则  $\bar{z} = \frac{1}{2}i$ ,  $\therefore z - \bar{z} = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i = -i$ , 故选 A.

3. D 【命题点】平面向量的坐标运算及垂直

【解析】由于  $a = (1, 1)$ ,  $b = (1, -1)$ , 则  $a + \lambda b = (1, 1) + (\lambda, -\lambda) = (1 + \lambda, 1 - \lambda)$ ,  $a + \mu b = (1, 1) + \mu(1, -1) = (1 + \mu, 1 - \mu)$ . 又  $\because (a + \lambda b) \perp (a + \mu b)$ ,  $\therefore (a + \lambda b) \cdot (a + \mu b) = 0$ , 即  $(1 + \lambda)(1 + \mu) + (1 - \lambda)(1 - \mu) = 0$ , 解得  $\lambda\mu = -1$ , 故选 D.

4. D 【命题点】复合函数的单调性

【解析】因为  $y = 2^x$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数, 所以函数  $y = x(x-a) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$  在  $(0, 1)$  上单调递减 (提示: 复合函数的单调性遵循“同增异减”原则), 所以  $\frac{a}{2} \geq 1$ , 解得  $a \geq 2$ , 即  $a$  的取值范围是  $[2, +\infty)$ , 故选 D.

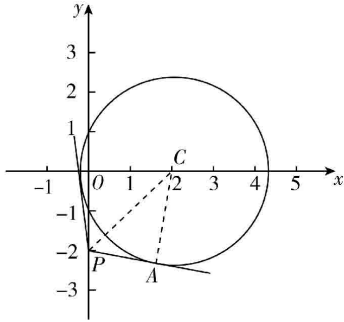
5. A 【命题点】椭圆的离心率

【解析】由椭圆  $C_1$  的方程知离心率  $e_1 = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ , 由椭圆  $C_2$  的方程知  $e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 又  $\because e_2 = \sqrt{3}e_1$ , 即  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ , 化简得  $a^2 = 4a^2 - 4$ ,  $\therefore a^2 = \frac{4}{3}$ .  $\because a > 1$ ,  $\therefore a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 故选 A.

6. B 【命题点】直线与圆相切、二倍角的正弦公式

【解析】设圆  $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$  为圆  $C$ , 化简得  $(x-2)^2 + y^2 = 5$ , 圆心为  $C(2, 0)$ , 半径  $r = \sqrt{5}$ . 如图, 设  $\angle CPA = \theta$ , 则  $\alpha = 2\theta$ ,  $\sin \theta = \frac{|CA|}{|CP|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{(2-0)^2 + [0-(-2)]^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ , 易知  $\cos \theta > 0$ , 则

$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ , 所以  $\sin \alpha = \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ . 故选 B.



7. C 【命题点】等差数列的判断, 充分、必要条件的判断

【解析】充分性: 若数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 设其公差为  $d$  (常数), 则  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ,  $\therefore \frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d$ , 则  $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \left(a_1 + \frac{n}{2}d\right) - \left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right) = \frac{d}{2}$  (常数), 故数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是首项为  $a_1$ , 公差为  $\frac{d}{2}$  的等差数列, 充分性成立;

必要性: 若数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  为等差数列, 设其公差为  $d'$  (常数), 则  $\frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + (n-1)d'$ , 当  $n=1$  时,  $\frac{S_1}{1} = a_1$ ,  $\therefore S_n = na_1 + n(n-1)d'$ , 当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = [na_1 + n(n-1)d'] - [(n-1)a_1 + (n-1)(n-2)d'] = a_1 + 2(n-1)d'$ , 当  $n=1$  时,  $a_1$  符合上式, 显然数列  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公差为  $2d'$  的等差数列, 因此必要性成立. 故甲是乙的充要条件. 故选 C.

8. B 【命题点】两角和与差的正弦公式及二倍角的余弦公式

思路导引  $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$ ,  $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6} \rightarrow \sin \alpha \cos \beta$  的值  $\rightarrow \sin(\alpha + \beta)$  的值  $\xrightarrow{\text{二倍角公式}} \cos(2\alpha + 2\beta)$  的值

【解析】 $\because \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{3}, \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{6},$   
 $\therefore \sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{3} + \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$   
 $\therefore \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \therefore \cos(2\alpha+2\beta) = \cos[2(\alpha+\beta)] = 1 - 2\sin^2(\alpha+\beta) = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9},$ 故  
 选 B.

9. BD 【命题点】样本的数据特征

【解析】对于选项 A:  $\because x_1, x_6$  不确定,  $\therefore x_1, x_2, \dots, x_6$  的平均数不确定, 如 1, 2, 2, 2, 2, 4 的平均数不等于 2, 2, 2, 2 的平均数, 故 A 错误;  
 对于选项 B: 不妨设  $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ , 则  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的中位数为  $\frac{x_3+x_4}{2}, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  的中位数为  $\frac{x_3+x_4}{2}$ , 故 B 正确;  
 对于选项 C:  $\because x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  的波动性不小于  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的波动性,  $\therefore x_2, x_3, x_4, x_5$  的标准差不大于  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  的标准差, 故 C 错误;  
 对于选项 D: 不妨设  $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ , 则  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6, \therefore x_5 - x_2 \leq x_6 - x_1$ , 即  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的极差不大于  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  的极差, 故 D 正确.  
 故选 BD.

10. ACD 【命题点】对数的运算及实际应用

【解析】由  $L_p = 20\lg \frac{p}{p_0}$ , 对于燃油汽车  $60 \leq 20\lg \frac{p_1}{p_0} \leq 90$ , 即  
 $3 \leq \lg p_1 - \lg p_0 \leq \frac{9}{2}, \therefore \lg(1\,000p_0) = 3 + \lg p_0 \leq \lg p_1 \leq \frac{9}{2} + \lg p_0 = \lg\left(10^{\frac{9}{2}}p_0\right),$  即  $1\,000p_0 \leq p_1 \leq 10^{\frac{9}{2}}p_0$ ; 同理, 对于混合动力汽车  $10^{\frac{5}{2}}p_0 \leq p_2 \leq 1\,000p_0$ ; 对于电动汽车  $20\lg \frac{p_3}{p_0} = 40$ , 则  $\lg p_3 - \lg p_0 = 2, \therefore \lg p_3 = 2 + \lg p_0 = \lg(100p_0), \therefore p_3 = 100p_0$ , 选项 C 正确.  $p_1 \geq p_2$ , 选项 A 正确.  $10p_3 = 1\,000p_0$ , 则  $p_2 \leq 10p_3$ , 选项 B 错误.  $10^{\frac{9}{2}}p_0 \leq 100p_2 \leq 10^5p_0$ , 则  $p_1 \leq 100p_2$ , 选项 D 正确. 故选 ACD.

11. ABC 【命题点】抽象函数求值、函数的奇偶性、判断函数的极值点

【解析】对于 A, 令  $x=y=0$ , 得  $f(0)=0$ , 故 A 正确;  
 对于 B, 令  $x=y=1$ , 得  $f(1)=f(1)+f(1)=2f(1)$ , 所以  $f(1)=0$ , 故 B 正确;  
 对于 C, 令  $x=y=-1$ , 得  $f(1)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)=0$ , 所以  $f(-1)=0$ , 所以  $f(-xy) = y^2f(-x) + x^2f(y) = y^2[f(x)+x^2f(-1)] + x^2f(y) = y^2f(x) + x^2f(y) = f(xy)$  在定义域  $\mathbf{R}$  上恒成立, 所以  $f(x)$  是偶函数, 故 C 正确;  
 对于 D, 函数  $f(x)=0$  为常数函数, 且满足  $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$ , 而常数函数没有极值点, 故 D 错误. 故选 ABC.

► 一题多解 选项 A: 令  $x=y=0$ , 则  $f(0)=0 \times f(0) + 0 \times f(0)$ , 则  $f(0)=0$ , 故 A 正确;  
 选项 B: 令  $x=y=1$ , 则  $f(1)=1 \times f(1) + 1 \times f(1)$ , 则  $f(1)=0$ , 故 B 正确;  
 选项 C: 令  $x=y=-1$ , 则  $f(1)=(-1)^2 \times f(-1) + (-1)^2 \times$

$f(-1)$ , 则  $f(-1)=0$ , 再令  $y=-1$ , 则  $f(-x)=(-1)^2f(x)+x^2f(-1)$ , 即  $f(-x)=f(x)$ , 又  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 所以  $f(x)$  是偶函数, 故 C 正确;

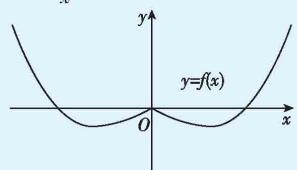
选项 D: 对式子两边同时除以  $x^2y^2(x^2y^2 \neq 0)$ , 得到  $\frac{f(xy)}{x^2y^2} = \frac{f(x)}{x^2} + \frac{f(y)}{y^2}$ , 故可构造函数  $\frac{f(x)}{x^2} = \ln|x| (x \neq 0)$ ,

若  $x=0$ , 则由 A 选项知  $f(0)=0$ , 所以  $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$

则当  $x>0$  时,  $f(x) = x^2 \ln x, f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$ , 令  $f'(x) > 0$ , 则  $x > e^{-\frac{1}{2}}$ , 令  $f'(x) < 0$ , 则  $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ , 故  $f(x)$  在  $(0, e^{-\frac{1}{2}})$  上单调递减, 在  $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$  上单调

递增, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2} = 0$ , 又  $f(x)$

是偶函数, 故  $f(x)$  的图像如图  
 所示, 所以  $x=0$  为  $f(x)$  的极大值点, 故 D 错误.  
 故选 ABC.

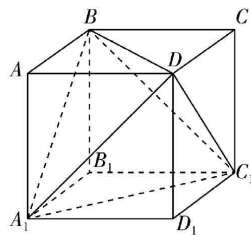


12. ABD 【命题点】空间几何体的综合问题

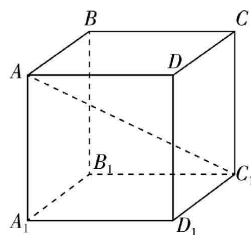
► 思路导引 对于 A, 正方体内切球直径大于 0.99 m, 故满足条件;  
 对于 B, 找出正方体内部最大的正四面体 → 求出该四面体的棱长 → 发现大于 1.4 m, 故满足条件;  
 对于 C, 将该圆柱体看成长度为 1.8 m 的线段 → 该线段与正方体体对角线比较大小 → 不满足条件;  
 对于 D, 将该圆柱体看成直径为 1.2 m 的圆 → 正方体的正六边形截面的内切圆直径大于 1.2 m, 故满足条件.

【解析】对于 A 选项, 正方体内切球的直径为 1 m, 故 A 符合题意;

对于 B 选项, 如图, 正方体内部最大的正四面体棱长为  $BA_1 = \sqrt{2} \text{ m}, \sqrt{2} \text{ m} > 1.4 \text{ m}$ , 故 B 符合题意;



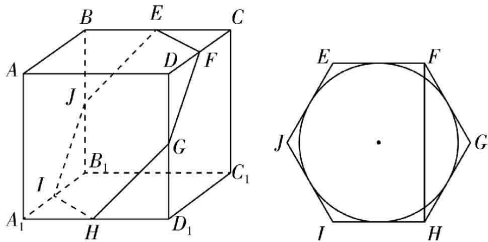
对于 C 选项, 圆柱底面直径为 0.01 m, 可忽略不计, 高为 1.8 m, 圆柱可看作长度为 1.8 m 的线段. 如图, 正方体的体对角线为  $AC_1 = \sqrt{3} \text{ m} < 1.8 \text{ m}$ , 故 C 不符合题意;



对于 D 选项, 圆柱高为 0.01 m, 可忽略不计, 底面直径为



- 1.2 m,圆柱可看作直径为 1.2 m 的圆.如图, $E,F,G,H,I,J$ 为各棱的中点,六边形  $EFGHIJ$  为正六边形,其边长为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  m,其内切圆直径  $FH=\sqrt{3}FG=\frac{\sqrt{6}}{2}$  m, $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=\frac{6}{4}>(1.2)^2=1.44$ ,故 **D** 符合题意.

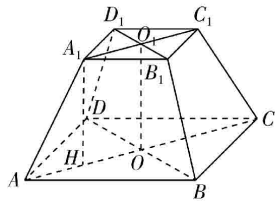


13.64 【命题点】组合、分类与分步计数原理

【解析】由题知,选修 1 门体育类选修课和 1 门艺术类选修课的所有可能结果有  $C_4^1C_4^1=16$ (种);选修 2 门体育类选修课和 1 门艺术类选修课的所有可能结果有  $C_4^2C_4^1=24$ (种);选修 1 门体育类选修课和 2 门艺术类选修课的所有可能结果有  $C_4^1C_4^2=24$ (种).所以不同的选课方案共有  $16+24+24=64$ (种).

14.  $\frac{7\sqrt{6}}{6}$  【命题点】棱台的体积

【解析】如图,连接  $AC,BD$  交于点  $O$ ,连接  $A_1C_1,B_1D_1$  交于点  $O_1$ ,连接  $OO_1$ ,过点  $A_1$  作  $A_1H \perp AC$  于点  $H$ ,则  $OO_1$  为正四棱台  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的高.在等腰梯形  $A_1ACC_1$  中, $AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2},A_1C_1=\sqrt{2}A_1B_1=\sqrt{2}$ ,则  $AO=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2},A_1O_1=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,所以  $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}$ .又  $AA_1=\sqrt{2}$ ,所以  $A_1H=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ,所以  $OO_1=A_1H=\frac{\sqrt{6}}{2}$ ,所以正四棱台  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的体积为  $\frac{1}{3} \times (1^2+2^2+\sqrt{1^2 \times 2^2}) \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$ .



15. [2,3] 【命题点】三角函数的零点问题

【解析】令  $f(x)=\cos \omega x-1=0$ ,得  $\cos \omega x=1$ ,又  $x \in[0,2 \pi]$ ,则  $\omega x \in[0,2 \omega \pi]$ ,所以  $4 \pi \leqslant 2 \omega \pi < 6 \pi$ ,解得  $2 \leqslant \omega < 3$ ,即  $\omega$  的取值范围是  $[2,3)$ .

一题多解 令  $f(x)=\cos \omega x-1=0(\omega>0)$ ,得  $\cos \omega x=1$ ,即  $\omega x=2 k \pi(\omega>0), k \in \mathbf{Z}$ ,解得  $x=\frac{2 k \pi}{\omega}(\omega>0), k \in \mathbf{Z}$ .因为  $f(x)$  在区间  $[0,2 \pi]$  有且仅有 3 个零点,且  $f(0)=0$ ,所以  $f(x)$  的 3 个零点对应  $k=0,1,2$ ,所以  $f\left(\frac{2 \pi}{\omega}\right)=f\left(\frac{4 \pi}{\omega}\right)=0$  且  $\frac{4 \pi}{\omega} \leqslant 2 \pi < \frac{6 \pi}{\omega}$ ,解得  $2 \leqslant \omega < 3$ ,即  $\omega$  的取值范围是  $[2,3)$ .

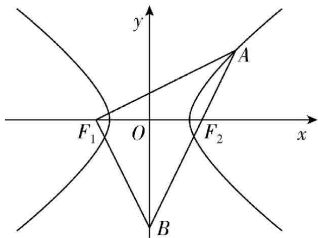
16.  $\frac{3 \sqrt{5}}{5}$

思路导引 思路一:设点  $F_1, F_2, B$  的坐标  $\rightarrow$  根据  $\overrightarrow{F_2 A}=-\frac{2}{3} \overrightarrow{F_2 B}$  得点  $A$  的坐标  $\rightarrow$  根据  $\overrightarrow{F_1 A} \perp \overrightarrow{F_1 B}$  得  $\overrightarrow{F_1 A} \cdot \overrightarrow{F_1 B}=0 \rightarrow$  将点  $A$  的坐标代入  $C$  的方程  $\rightarrow$  得到关于  $a$  和  $c$  的等式  $\rightarrow$  求出离心率

思路二:根据  $\overrightarrow{F_2 A}=-\frac{2}{3} \overrightarrow{F_2 B}$  设  $|F_2 A|=2 x$ ,则  $|F_2 B|=3 x \rightarrow$  根据双曲线的定义及几何性质表示出  $|F_1 B|,|A F_1| \rightarrow$  设  $\angle F_1 A F_2=\theta$ ,利用  $\cos \theta=\frac{4}{5}$  求出  $x \rightarrow$  利用余弦定理求得  $a$  与  $c$  的关系  $\rightarrow$  求出离心率

【命题点】求双曲线的离心率

【解析】建立如图所示的坐标系,依题意可以设  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), B(0, n)$ .



由  $\overrightarrow{F_2 A}=-\frac{2}{3} \overrightarrow{F_2 B}$ ,得  $A\left(\frac{5}{3} c,-\frac{2}{3} n\right)$ .又  $\overrightarrow{F_1 A} \perp \overrightarrow{F_1 B}$ ,且  $\overrightarrow{F_1 A}=\left(\frac{8}{3} c,-\frac{2}{3} n\right), \overrightarrow{F_1 B}=(c, n)$ ,则  $\overrightarrow{F_1 A} \cdot \overrightarrow{F_1 B}=\left(\frac{8}{3} c,-\frac{2}{3} n\right) \cdot (c, n)=\frac{8}{3} c^2-\frac{2}{3} n^2=0$ ,所以  $n^2=4 c^2$ .

又点  $A$  在双曲线  $C$  上,则  $\frac{25 c^2}{a^2}-\frac{4 n^2}{b^2}=1$ ,整理得  $\frac{25 c^2}{a^2}-\frac{4 n^2}{b^2}=9$ ,将  $n^2=4 c^2, b^2=c^2-a^2$  代入,得  $\frac{25 c^2}{a^2}-\frac{16 c^2}{c^2-a^2}=9$ ,即  $25 e^2-\frac{16 e^2}{e^2-1}=9$ ,解得  $e^2=\frac{9}{5}$  或  $e^2=\frac{1}{5}$ (舍去),故  $e=\frac{3 \sqrt{5}}{5}$ .

一题多解

由  $\overrightarrow{F_2 A}=-\frac{2}{3} \overrightarrow{F_2 B}$  得  $\frac{|F_2 A|}{|F_2 B|}=\frac{2}{3}$ ,设  $|F_2 A|=2 x$ ,则  $|F_2 B|=3 x,|A B|=5 x$ .由双曲线的对称性可得  $|F_1 B|=3 x$ ,由双曲线的定义可得  $|A F_1|=2 x+2 a$ .设  $\angle F_1 A F_2=\theta$ ,则  $\sin \theta=\frac{3 x}{5 x}=\frac{3}{5}$ ,所以  $\cos \theta=\frac{4}{5}=\frac{2 x+2 a}{5 x}$ ,解得  $x=a$ ,所以  $|A F_1|=4 a,|A F_2|=2 a$ .在  $\triangle A F_1 F_2$  中,由余弦定理可得  $\cos \theta=\frac{16 a^2+4 a^2-4 c^2}{16 a^2}=\frac{4}{5}$ ,即  $5 c^2=9 a^2$ ,可得  $e=\frac{3 \sqrt{5}}{5}$ .

17. 【命题点】利用正弦定理解三角形

【解】(1)在  $\triangle A B C$  中, $A+B=3 C$ ,又  $A+B+C=\pi$ , (解三角形要注意三角形内角和定理的应用)

所以  $C=\frac{\pi}{4}$ . ..... 2 分



又因为  $2\sin(A-C) = \sin B$ , 即  $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right) = \sin B$ ,  
 所以  $\sin B = 2\cos B$ . ..... 3 分  
 又因为  $\sin^2 B + \cos^2 B = 1, B \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ ,  
 所以  $\sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos B = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  
 所以  $\sin A = \sin(B+C) = \sin\left(B+\frac{\pi}{4}\right) = \sin B \cos \frac{\pi}{4} + \cos B \cdot$   
 $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ . ..... 5 分

(利用两角和的正弦公式)

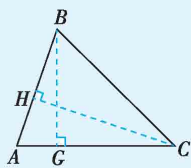
(2) 在  $\triangle ABC$  中, 记内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  
 因为  $AB = c = 5, C = \frac{\pi}{4}, \sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ ,  
 所以由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ , 可得  $\frac{a}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{b}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} =$   
 $\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ , 解得  $a = 3\sqrt{5}, b = 2\sqrt{10}$ . ..... 7 分

设  $AB$  边上的高为  $h$ ,  
 由三角形的面积公式可得  $\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}c \cdot h$ ,  
 即  $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5h$ ,  
 解得  $h = 6$ ,  
 即  $AB$  边上的高为 6. .... 10 分

►一题多解 (1) 因为  $A+B=3C, A+B+C=\pi$ , 所以  $C=\frac{\pi}{4}$ .  
 ..... 2 分

因为  $2\sin(A-C) = \sin B$ , 所以  $2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}-A\right)$ ,  
 所以  $\sqrt{2}\sin A - \sqrt{2}\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos A + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin A$ ,  
 即  $\sin A = 3\cos A$ . ..... 3 分  
 因为  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1, A \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ ,  
 所以  $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ . ..... 5 分

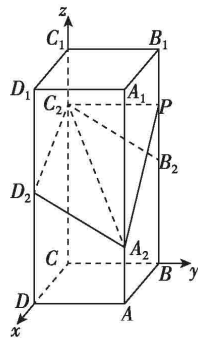
(2) 如图, 过点  $B$  作  $BG \perp AC$  于  $G$ , 过点  
 $C$  作  $CH \perp AB$  于  $H$ ,  
 由(1)知  $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ .  
 因为  $AB = 5$ , 所以  $BG = AB \cdot \sin A = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ ,  
 所以  $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ . ..... 6 分  
 因为  $C = \frac{\pi}{4}$ , 所以  $CG = BG = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ ,  
 所以  $AC = AG + CG = 2\sqrt{10}$ . ..... 8 分



所以  $CH = \frac{BG \cdot AC}{AB} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{2} \times 2\sqrt{10}}{5} = 6$ ,  
 即  $AB$  边上的高为 6. .... 10 分

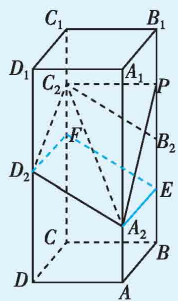
### 18. 【命题点】空间平行关系的证明和利用空间向量解决与二面角有关的问题

(1) 【证明】如图, 以  $CD, CB, CC_1$  所在直线分别为  $x, y, z$  轴, 建立空间直角坐标系.



因为  $AB = 2, AA_1 = 4, AA_2 = 1, BB_2 = DD_2 = 2, CC_2 = 3$ ,  
 所以  $A_2(2, 2, 1), B_2(0, 2, 2), C_2(0, 0, 3), D_2(2, 0, 2)$ , ..... 3 分  
 所以  $\overrightarrow{A_2D_2} = \overrightarrow{B_2C_2} = (0, -2, 1)$ , 又  $A_2, D_2, B_2, C_2$  四点不共线,  
 所以  $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ . .... 5 分

►一题多解 如图, 过点  $A_2$  作  $A_2E \perp BB_1$  于点  $E$ , 过点  $D_2$   
 作  $D_2F \perp CC_1$  于点  $F$ , 在正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB =$   
 $2, AA_1 = 4$ , 点  $A_2, B_2, C_2, D_2$  分别在棱  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$   
 上, 且  $AA_2 = 1, BB_2 = DD_2 = 2, CC_2 = 3$ , 所以  $A_2E \parallel D_2F, B_2E \parallel$   
 $C_2F$ , 所以四边形  $A_2EFD_2, B_2C_2FE$  均为平行四边形, ..... 3 分  
 所以  $A_2D_2 \parallel EF, B_2C_2 \parallel EF$ , 所以  $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ . .... 5 分



(2) 【解】设  $P(0, 2, a) (0 \leq a \leq 4)$ , 由(1)中建系可知  $A_2(2,$   
 $2, 1), C_2(0, 0, 3), D_2(2, 0, 2)$ ,  
 则  $\overrightarrow{A_2C_2} = (-2, -2, 2), \overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1), \overrightarrow{A_2P} = (-2, 0, a-1)$ . 设平面  $A_2C_2D_2$  的法向量为  $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$ , 所以  
 $\begin{cases} \overrightarrow{A_2C_2} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{A_2D_2} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} -2x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 0, \\ -2y_1 + z_1 = 0, \end{cases}$  取  $y_1 = 1$ , 可得  $x_1 = 1,$   
 $z_1 = 2$ , 所以  $\mathbf{m} = (1, 1, 2)$ . .... 8 分  
 设平面  $PA_2C_2$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$ , 所以  
 $\begin{cases} \overrightarrow{A_2C_2} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{A_2P} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$  即  $\begin{cases} -2x_2 - 2y_2 + 2z_2 = 0, \\ -2x_2 + (a-1)z_2 = 0, \end{cases}$  取  $z_2 = 1$ , 可得  $x_2 =$   
 $\frac{a-1}{2}, y_2 = \frac{3-a}{2}$ , 所以  $\mathbf{n} = \left(\frac{a-1}{2}, \frac{3-a}{2}, 1\right)$ . .... 10 分  
 因为二面角  $P-A_2C_2-D_2$  为  $150^\circ$ ,

所以  $|\cos \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle| = \frac{\left| \frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}| |\boldsymbol{n}|} \right|}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

即  $\frac{\left| \frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{2} + 2 \right|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-a}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 解得  $a=1$  或  $a=3$ , 所以点  $P$  为  $B_2B$  的中点或  $B_2B_1$  的中点, 即  $B_2P=1$ .

..... 12 分

**19. 【命题点】**利用导数研究函数的单调性、不等式证明

(1)【解】因为  $f(x) = a(e^x + a) - x$ , 所以  $f'(x) = ae^x - 1$ ,

(对  $a$  分类讨论判断导函数的正负)

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$  恒成立, 所以  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减;

..... 2 分

当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = 0$ , 可得  $x = -\ln a$ ,

当  $x$  变化时,  $f(x)$  与  $f'(x)$  变化如下表:

$x$	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

当  $x \in (-\infty, -\ln a)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减,

当  $x \in (-\ln a, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.

综上, 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减; 当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, -\ln a)$  上单调递减, 在  $(-\ln a, +\infty)$  上单调递增.

..... 5 分

(2)【证明】由(1)可知当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, -\ln a)$  上单调递减, 在  $(-\ln a, +\infty)$  上单调递增,

所以  $f(x)_{\min} = f(-\ln a) = a\left(\frac{1}{a} + a\right) + \ln a = a^2 + \ln a + 1$ , ..... 7 分

构造函数  $g(a) = a^2 + \ln a + 1 - 2\ln a - \frac{3}{2} = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$ , ... 8 分

(构造关于  $a$  的函数  $g(a)$ , 只需证明  $g(a)$  的最小值大于 0 即可)

则  $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$ ,

令  $g'(a) = 0$ , 解得  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (负值舍去).

当  $a \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  时,  $g'(a) < 0$ ,  $g(a)$  单调递减, 当  $a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$  时,  $g'(a) > 0$ ,  $g(a)$  单调递增, ..... 10 分

所以  $g(a)_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \ln \sqrt{2} > 0$ ,

所以当  $a > 0$  时,  $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ . ..... 12 分

**20. 【命题点】**等差数列基本量的运算及通项公式、前  $n$  项和公式

【解】(1) 由  $3a_2 = 3a_1 + a_3$ , 得  $3(a_1 + d) = 3a_1 + a_1 + 2d$ ,

整理得  $a_1 = d$ , 所以  $a_n = nd$ ,  $b_n = \frac{n+1}{d}$ . ..... 2 分

由  $S_3 + T_3 = 21$ , 得  $d + 2d + 3d + \frac{2}{d} + \frac{3}{d} + \frac{4}{d} = 21$ ,

整理得  $2d^2 - 7d + 3 = 0$ , 解得  $d = 3$  或  $d = \frac{1}{2}$  (舍), ..... 5 分

故  $a_n = 3n$ . ..... 6 分

(2) 若  $\{b_n\}$  是等差数列, 则  $b_1 + b_3 = 2b_2$ ,

即  $\frac{2}{a_1} + \frac{12}{a_3} = 2 \times \frac{6}{a_2}$ , 所以  $a_2a_3 + 6a_1a_2 = 6a_1a_3$ ,

所以  $(a_1 + d)(a_1 + 2d) + 6a_1(a_1 + d) = 6a_1(a_1 + 2d)$ ,

整理得  $a_1^2 - 3a_1d + 2d^2 = 0$ , 解得  $a_1 = d$  或  $a_1 = 2d$ . ..... 8 分

① 若  $a_1 = d$ , 则  $a_n = nd$ ,  $b_n = \frac{n+1}{d}$ ,

由  $S_{99} - T_{99} = 99$ , 得  $50d - \frac{51}{d} = 1$ , 即  $50d^2 - d - 51 = 0$ ,

解得  $d = -1$  (舍) 或  $d = \frac{51}{50}$ ; ..... 10 分

② 若  $a_1 = 2d$ , 则  $a_n = (n+1)d$ ,  $b_n = \frac{n}{d}$ ,

由  $S_{99} - T_{99} = 99$ , 得  $51d - \frac{50}{d} = 1$ , 即  $51d^2 - d - 50 = 0$ ,

解得  $d = 1$  (舍) 或  $d = -\frac{50}{51}$  (舍).

综上,  $d = \frac{51}{50}$ . ..... 12 分

**21. 【命题点】**离散型随机变量的期望、概率与数列的综合

【解】(1) 第 2 次投篮的人是乙分两种情况:

第 1 次投篮的人是甲且投篮未命中, 其概率为  $0.5 \times (1 - 0.6) = 0.2$ ; ..... 2 分

第 1 次投篮的人是乙且投篮命中, 其概率为  $0.5 \times 0.8 = 0.4$ ,

所以第 2 次投篮的人是乙的概率为  $0.2 + 0.4 = 0.6$ . ..... 4 分

(2) 设第  $i$  次投篮的人是甲为事件  $A_i$ ,

则  $P(A_1) = 0.5$ ,  $P(A_{i+1}) = P(A_i) \times 0.6 + (1 - P(A_i)) \times (1 - 0.8) = \frac{2}{5}P(A_i) + \frac{1}{5}$ ,

所以  $P(A_{i+1}) - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}\left[P(A_i) - \frac{1}{3}\right]$ ,

所以  $\left\{P(A_i) - \frac{1}{3}\right\}$  是以  $\frac{1}{6}$  为首项,  $\frac{2}{5}$  为公比的等比数列,

..... 6 分

所以  $P(A_i) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$ ,

所以  $P(A_i) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$ ,  $i \in \mathbf{N}^*$ . ..... 8 分

(3) 由(2)知, 第  $i$  次投篮的人是甲的概率为  $P(A_i) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$ ,  $i \in \mathbf{N}^*$ ,

第  $i$  次投篮的人是甲记为  $X_i = 1$ , 否则记为  $X_i = 0$ , 则  $X_i$  服从两点分布, 且  $P(X_i = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}$ , ..... 10 分

由题意知  $E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n P(X_i = 1) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{i-1}\right] = \frac{6n+5}{18} - \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ . ..... 12 分

**22. > 思路导引** (2) 设  $A, B, D$  三点在曲线  $W$  上, 设出点  $A, B, D$  的坐标, 直线  $AB$  的方程  $\xrightarrow{\text{矩形的性质}}$  直线  $AD$  的斜率  $\rightarrow$  将直线  $AB$  与曲线  $W$  的方程联立  $\xrightarrow{\text{弦长公式}}$   $|AB|$  的表达式  $\xrightarrow{\text{同理}}$   $|AD|$  的表达式  $\rightarrow |AB| + |AD|$  的表达式  $\xrightarrow{\text{不等式的性质}}$   $|AB| + |AD|$  的取值范围  $\rightarrow$  证得结论

导数

【命题点】曲线与方程、直线与抛物线的位置关系

(1)【解】设点  $P(x, y)$ , 由题意, 得  $|y| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}$ ,

化简, 得  $y = x^2 + \frac{1}{4}$ ,

所以  $W$  的方程为  $y = x^2 + \frac{1}{4}$ . ..... 4 分

(2)【证明】设  $A, B, D$  三点在曲线  $W: y = x^2 + \frac{1}{4}$  上, 显然直线  $AB$  的斜率存在且不等于零.

设  $A\left(x_0, x_0^2 + \frac{1}{4}\right), B\left(x_1, x_1^2 + \frac{1}{4}\right), D\left(x_2, x_2^2 + \frac{1}{4}\right)$ , 直线  $AB$  的斜率为  $k$ , 则直线  $AD$  的斜率为  $-\frac{1}{k}$ , 直线  $AB$  的方程为  $y - \left(x_0^2 + \frac{1}{4}\right) = k(x - x_0)$ , 由对称性不妨设  $0 < |k| \leq 1$ . ..... 6 分

由  $\begin{cases} y - \left(x_0^2 + \frac{1}{4}\right) = k(x - x_0), \\ y = x^2 + \frac{1}{4} \end{cases}$  消去  $y$ , 得  $x^2 - kx + kx_0 - x_0^2 = 0$ , 解得

$x = x_0$  或  $x = k - x_0$ ,

所以  $x_1 = k - x_0, |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_0| = \sqrt{1+k^2} |k - 2x_0|$ .

同理可得  $|AD| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} |x_2 - x_0| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \left| -\frac{1}{k} - 2x_0 \right|$  (提示: 用  $-\frac{1}{k}$  替换  $k$  可得), ..... 8 分

所以  $|AB| + |AD| = \sqrt{1+k^2} \left( |k - 2x_0| + \left| \frac{1}{k} + 2x_0 \right| \right) \geq \sqrt{1+k^2} \left( |k - 2x_0| + \left| \frac{1}{k} + 2x_0 \right| \right) \geq \sqrt{1+k^2} \left| k + \frac{1}{k} \right| = \sqrt{\frac{(1+k^2)^3}{k^2}}$ . ..... 10 分

(不易求得取值范围, 构造函数, 利用导数求取值范围)

令  $t = k^2, f(t) = \frac{(1+t)^3}{t} (0 < t \leq 1)$ ,

则  $f'(t) = \frac{3t(1+t)^2 - (1+t)^3}{t^2} = \frac{(1+t)^2(2t-1)}{t^2}$ ,

所以  $f(t)$  在  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  上单调递减, 在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  上单调递增,

所以  $f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{4}$ .

由于两处取等条件不一致, 故  $|AB| + |AD| > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 从而矩形

$ABCD$  的周长大于  $3\sqrt{3}$ . ..... 12 分

一题多解

(2) 将抛物线  $W$  向下平移  $\frac{1}{4}$  个单位长度得到抛物线  $W': y = x^2$  (提示: 为了方便计算, 将抛物线平移后进行推理运算), 矩形  $ABCD$  变换为矩形  $A'B'C'D'$ , 则问题等价于矩形  $A'B'C'D'$  的周长大于  $3\sqrt{3}$ .

设  $B'(t_0, t_0^2), A'(t_1, t_1^2), C'(t_2, t_2^2)$  在抛物线  $W'$  上, 根据对称性不妨设  $t_0 \geq 0$ , 则  $k_{A'B'} = t_1 + t_0, k_{B'C'} = t_2 + t_0$ .

因为  $A'B' \perp B'C'$ ,

所以  $(t_1 + t_0)(t_2 + t_0) = -1$ . ..... 6 分

又  $|A'B'| = \sqrt{1+(t_1+t_0)^2} |t_1 - t_0|, |B'C'| = \sqrt{1+(t_2+t_0)^2} |t_2 - t_0|$ , 且  $t_0$  介于  $t_1, t_2$  之间,

则  $|A'B'| + |B'C'| = \sqrt{1+(t_1+t_0)^2} |t_1 - t_0| + \sqrt{1+(t_2+t_0)^2} |t_2 - t_0|$ .

令  $t_2 + t_0 = \tan \theta$ , 则  $t_1 + t_0 = -\frac{1}{\tan \theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $t_2 = \tan \theta - t_0, t_1 = -\frac{1}{\tan \theta} - t_0$ , ..... 8 分

则  $|A'B'| + |B'C'| = \sqrt{1+\frac{1}{\tan^2 \theta}} \left(2t_0 + \frac{1}{\tan \theta}\right) + \sqrt{1+\tan^2 \theta} (\tan \theta - 2t_0) =$

$2t_0 \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta}\right) + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{2t_0(\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$ .

当  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$  时,  $|A'B'| + |B'C'| \geq \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} +$

$\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}} = 2\sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}} \geq 2\sqrt{2} > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ; ..... 10 分

当  $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  时, 由于  $t_1 < t_0 < t_2$ , 从而  $-\frac{1}{2\tan \theta} < t_0 < \frac{\tan \theta}{2}$ .

又  $t_0 \geq 0$ , 所以  $0 \leq t_0 < \frac{\tan \theta}{2}$ ,

所以  $|A'B'| + |B'C'| = \frac{2t_0(\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} >$

$\frac{\sin \theta(\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta \cos^2 \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$

$= \sqrt{\frac{2}{\sin^2 \theta \sin^2 \theta \cdot 2\cos^2 \theta}} \geq \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

综上, 矩形  $ABCD$  的周长大于  $3\sqrt{3}$ . ..... 12 分

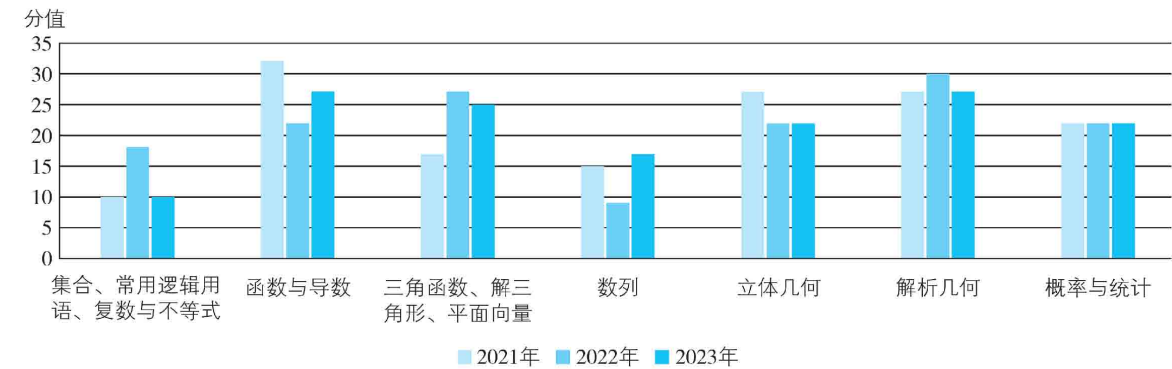
2 2023 年普通高等学校招生全国统一考试(全国新课标 II 卷)

名师综评 ▶ 重庆南开中学 陈盛斌

2023 年新课标 II 卷认真贯彻了党的二十大精神, 落实高考内容改革的要求, 严格依据高中课程标准, 聚焦学科核心素养, 精选试题情境, 加强关键能力考查和重点知识考查. 试题既全面考查数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算等核心素养, 又尽力避免怪题、难题、偏题, 充分体现基础性、综合性、应用性和创新性的考查要求, 突出理性思维, 助力“双减”政策落地, 发挥数学学科在人才选拔中的重要作用.



一、试卷考点与分值预览



二、考点分布与考查趋势分析

考点	2021	2022	2023	变化趋势分析
集合、常用逻辑用语、复数与不等式	1,2	1,2,12,17	1,2	较为稳定
函数与导数	7,8,14,16,22	8,14,22	4,6,11,22	◆2023年 第11题:通过函数的极值情况考查参数的正负
三角函数、解三角形、平面向量	15,18	4,6,9,18	7,13,16,17	较为稳定
数列	12,17	3,17	8,18	◆2023年 第8题:数列作为最后一道单选题,难度增加,考查等比数列前 $n$ 项和的性质
立体几何	4,5,10,19	7,11,20	9,14,20	较为稳定
解析几何	3,11,13,20	3,10,15,16,21	5,10,15,21	◆2023年 第15题:设置开放题考查直线与圆的位置关系
概率与统计	6,9,21	5,13,19	3,12,19	◆2023年 第12题:相互独立事件的多选题,难度较大,背景材料新颖

三、试卷评析

1. 突出主干知识,基础与能力并重,发挥选拔功能

2023年新课标Ⅱ卷,和往年的考查范围相比适当微调,本套试题知识分布和板块覆盖完整,整体控制试题难度,科学引导中学教学.三小板块(集合、复数、平面向量)各考查一道基础题,体现对数学基础知识的认知要求;六大板块难易搭配合理,知识分布均衡,三角、数列、概率作为基础解答大题(17,18,19),同时又搭配16,8,12三道中档压轴选填题目,体现对这些板块的难易要求.

2. 联系教育实际,考查数学能力,避免套路题、刷题

试卷在反套路、反机械刷题上下功夫,突出强调对基础知识和基本概念的深入理解和灵活掌握,注重考查学科知识的综合应用能力,落实中国高考评价体系“四翼”的考查要求.同时,力图促进高中教学与义务教育阶段学习的有效衔接,促进考教衔接,引导学生提高在校学习效率,避免机械、无效地学习.第9题以多选题的形式考查圆锥,四个选项设问逐次递进,前后衔接,各选项分别考查圆锥的不同性质,互相联系;第14题考查台体体积公式,要求熟练掌握重点公式;第15题是一道开放题,答案不唯一,考查直线与圆的位置关系、点到直线的距离公式等的应用;第16题考查三角函数的图像与性质,通过图形特征,分析数据关系,考查数形结合能力的应用.

3. 合理创设情境,彰显教育理念,避免过度文字干扰

本套试题情境设置更为合理,避免复杂情境和累赘的文字阅读对学生产生干扰,不仅考查数学的必备知识和关键能力,而且引导考生树立理想信念、热爱科学,为我国社会主义事业的建设作出贡献.第12题,以信号传输为情境考查二项分布及其应用,试题设计了两重传输方式:单次传输和三次传输,依次研究各种传输方式得到正确信号的概率,考查对新概念、新知识的理解和探究能力;第19题,取材于医学问题,在近几年的防疫检验中,医学检验已经融入学生生活实际,该题要求合理平衡漏诊率和误诊率,制定检测标准,试题情境既有现实意义,又能很好地体现数学学科的应用价值.

#### 4. 新旧教材过渡,稳中求变,落实“四翼”考查要求

今年是旧教材完成向新教材过渡的第一年,本届考生是完全使用的新教材教学,“稳”字贯穿于整套试卷,题型与分值分布情况符合近几年新高考试题分配,命题内容也都在学生平时练习的范围之内,同时也尽量避免过多的新教材增加的知识. “变”在于概率统计题型,再次考查了对新概念的理解和应用,对统计图表的处理分析;导数题量加大,导数的应用技巧考查更为全面.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	D	B	C	C	D	C	AC	AC
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	BCD	ABD	$\sqrt{3}$	28	见解析	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$				

#### 1. A 【命题点】复数的乘法运算

【解析】 $(1+3i)(3-i) = 3-i+9i+3 = 6+8i$ ,在复平面内对应的点的坐标为 $(6,8)$ ,位于第一象限,故选 A.

#### 2. B 【命题点】集合之间的包含关系

【解析】由题意知  $0 \in B$ . 当  $a-2=0$  时,即  $a=2$ ,此时  $A=\{0,-2\}$ ,  $B=\{1,0,2\}$ ,  $A \not\subseteq B$ ,不符合题意. 当  $2a-2=0$  时,即  $a=1$ ,此时  $A=\{0,-1\}$ ,  $B=\{1,-1,0\}$ ,满足  $A \subseteq B$ ,所以  $a=1$ ,故选 B.

#### 3. D 【命题点】分层随机抽样、组合数、分步乘法计数原理

【解析】由题意知初中部和高中部人数之比为  $\frac{400}{200} = \frac{2}{1}$ ,则从初中部和高中部抽取的人数分别为 40,20,所以不同的抽样结果共有  $C_{400}^{40} \cdot C_{200}^{20}$  种,故选 D.

#### 4. B 【命题点】偶函数的定义

【解析】由  $\frac{2x-1}{2x+1} > 0$ ,得  $x < -\frac{1}{2}$  或  $x > \frac{1}{2}$ ,故  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$ . 由  $f(x)$  为偶函数可知  $f(x)=f(-x)$ ,即  $(x+a) \ln \frac{2x-1}{2x+1} = (-x+a) \ln \frac{-2x-1}{-2x+1}$ ,化简得  $(x+a) \ln \frac{2x-1}{2x+1} = (x-a) \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ . 又  $\frac{2x-1}{2x+1} \neq 1$ ,即  $\ln \frac{2x-1}{2x+1} \neq 0$ ,所以  $x+a=x-a$ ,解得  $a=0$ ,故选 B.

一题多解 设  $g(x) = x+a$ ,  $h(x) = \ln \frac{2x-1}{2x+1}$ ,则  $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ . 因为  $h(-x) = \ln \frac{-2x-1}{-2x+1} = \ln \frac{2x+1}{2x-1} = -\ln \frac{2x-1}{2x+1} = -h(x)$ ,所以  $h(x)$  为奇函数. 又  $f(x)$  为偶函数,所以  $g(x)$  为奇函数(提示:奇函数 $\times$ 奇函数=偶函数,奇函数 $\times$ 偶函数=奇函数),所以  $a=0$ ,故选 B.

#### 5. C 【命题点】直线与椭圆的位置关系、三角形面积比

【解析】设直线  $y=x+m$  与  $x$  轴交于点  $M(-m,0)$ ,直线方程与椭圆方程联立得  $\frac{4x^2}{3} + 2mx + m^2 - 1 = 0$ ,  $\Delta = (2m)^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot (m^2-1) > 0$ ,解得  $-2 < m < 2$ . 设  $F_1(-\sqrt{2},0)$ ,  $F_2(\sqrt{2},0)$  到直线  $AB$  的距离分别为  $d_1, d_2$ ,由题意得,  $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d_1$ ,所以  $d_1 = 2d_2$ . 由三角形相似可得,  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{|F_1M|}{|F_2M|} =$

$\frac{|-\sqrt{2}+m|}{|\sqrt{2}+m|} = 2$  (另解:由点到直线的距离公式得  $d_1 = \frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}, d_2 = \frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$ ),解得  $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$  或  $m = -3\sqrt{2}$ . 因为  $-2 < m < 2$ ,所以  $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ ,故选 C.

#### 6. C 【命题点】根据函数单调性求参数取值范围

【解析】 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$ ,由  $f(x)$  在区间  $(1,2)$  单调递增可知,当  $x \in (1,2)$  时,  $f'(x) \geq 0$  恒成立. 当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,不符合题意. 当  $a > 0$  时,设  $h(x) = ae^x - \frac{1}{x}$ ,则  $h'(x) = ae^x + \frac{1}{x^2} > 0$ ,则  $h(x)$  在  $(1,2)$  单调递增,所以只需  $f'(1) = h(1) = ae^1 - 1 \geq 0$ ,解得  $a \geq e^{-1}$ ,故选 C.

一题多解 由题意可知  $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x} \geq 0$  在区间  $(1,2)$  上恒成立,即  $a \geq \left(\frac{1}{xe^x}\right)_{\max}, x \in (1,2)$ . 设  $g(x) = xe^x$ ,则  $g'(x) = (x+1)e^x > 0$  在  $(1,2)$  上恒成立,所以  $g(x)$  在  $(1,2)$  上单调递增,  $e < xe^x < 2e^2$ ,所以  $\frac{1}{e} > \frac{1}{xe^x} > \frac{1}{2e^2}$ ,即  $a \geq e^{-1}$ ,故选 C.

#### 7. D 【命题点】二倍角公式

【解析】因为  $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ,所以  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$ . 又因为  $\alpha$  为锐角,所以  $\frac{\alpha}{2}$  为锐角,则  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ ,故选 D.

#### 8. C 【命题点】等比数列的求和

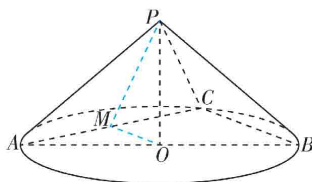
【解析】设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$  (提示:本题中等比数列  $\{a_n\}$  的公比  $q \neq \pm 1$ ). 因为  $S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 21S_2 = 21 \cdot \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$ ,整理得  $1-q^6 = 21(1-q^2)$ ,又  $1-q^6 = (1-q^2)(1+q^2+q^4)$ ,所以  $1+q^2+q^4 = 21$ ,即  $(q^2-4)(q^2+5) = 0$ ,解得  $q^2 = 4$ . 又  $S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q}$ ,  $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = -5$ ,所以  $\frac{S_8}{S_4} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = 1+q^4 = 17$ ,故  $S_8 = -85$ ,故选 C.



**一题多解** 设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ . 根据等比数列前  $n$  项和的性质得  $S_2, S_4-S_2, S_6-S_4, S_8-S_6$  成等比数列, 因为  $S_4=-5, S_6=21S_2$ , 即  $S_2, -5-S_2, 21S_2+5, S_8-21S_2$  成等比数列, 公比为  $q^2$ , 所以  $(-5-S_2)^2 = (21S_2+5)S_2$ , 整理得  $(4S_2-5)(S_2+1)=0$ , 解得  $S_2=\frac{5}{4}$  或  $S_2=-1$ . 当  $S_2=\frac{5}{4}$  时,  $\frac{S_4-S_2}{S_2}=-5<0$ , 不符合题意; 当  $S_2=-1$  时, 即  $-1, -4, -16, S_8+21$  成等比数列, 所以  $(S_8+21) \times (-4) = (-16)^2$ , 解得  $S_8=-85$ , 故选 C.

### 9. AC 【命题点】圆锥的体积、侧面积计算

**【解析】**对于 A, 依题意, 圆锥母线长  $l=PA=PB=2, PO=PA \cdot \cos 60^\circ=1, AO=BO=PA \cdot \sin 60^\circ=\sqrt{3}$ , 所以底面圆的半径  $r=\sqrt{3}$ , 圆锥的体积



为  $\frac{1}{3}\pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 1 = \pi$ , 故 A 正确; 对于 B, 该圆锥的侧面积为  $\pi rl = \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}\pi$ , 故 B 错误; 对于 C, 如图, 取 AC 的中点 M, 连接 PM, OM, 则  $OM \perp AC$ , 又因为  $PA=PC$ , 所以  $PM \perp AC$ , 故  $\angle PMO$  为二面角  $P-AC-O$  的平面角, 即  $\angle PMO=45^\circ$ , 所以  $\tan 45^\circ = \frac{PO}{OM} = 1$ , 即  $OM=1$ , 所以  $AC=2\sqrt{AO^2-OM^2}=2 \times \sqrt{3-1}=2\sqrt{2}$ , 故 C 正确; 对于 D, 由选项 C 可知,  $AC=2\sqrt{2}, PM \perp AC, PM=\sqrt{PA^2-\left(\frac{1}{2}AC\right)^2}=\sqrt{4-2}=\sqrt{2}$ , 所以  $\triangle PAC$  的面积为  $\frac{1}{2}PM \cdot AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 2$ , 故 D 错误. 故选 AC.

### 10. AC 【命题点】抛物线的焦点、准线以及弦长

**【解析】**对于 A, 依题意, 抛物线 C 的焦点为  $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , 直线  $y=-\sqrt{3}(x-1)$  过点  $(1, 0)$ , 所以  $\frac{p}{2}=1$ , 解得  $p=2$ , 故 A 正确. 对于 B, 由 A 可知抛物线  $C: y^2=4x$ , 将直线方程  $y=-\sqrt{3}(x-1)$  与 C 的方程联立、整理可得  $3x^2-10x+3=0$ . 设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 则  $x_1+x_2=\frac{10}{3}$ . 设抛物线 C 的焦点为 F, 由抛物线的定义可知,  $|MF|=x_1+1, |NF|=x_2+1$ , 所以  $|MN|=|MF|+|NF|=x_1+x_2+2=\frac{16}{3}$ , 故 B 错误. 对于 C, 由 B 知  $|MN|=\frac{16}{3}$ , 所以以 MN 为直径的圆的半径为  $\frac{8}{3}$ . 设 MN 的中点为 P, 因为  $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5}{3}$ , 即点 P 的横坐标为  $\frac{5}{3}$ , 所以 P 到 C 的准线的距离为  $\frac{8}{3}$ , 所以以 MN 为直径的圆与 l 相切, 故 C 正确. 对于 D, 由于  $3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)=0$ , 不妨设  $x_1=3$ ,  $x_2=\frac{1}{3}$ , 将  $x_1=3$  代入  $y=-\sqrt{3}(x-1)$ , 解得  $y_1=-2\sqrt{3}$ , 所以

$M(3, -2\sqrt{3}), |MO|=\sqrt{3^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{21}$ , 同理可得  $|NO|=\frac{\sqrt{13}}{3}$ , 又  $|MN|=\frac{16}{3}$ , 所以  $\triangle OMN$  不是等腰三角形, 故 D 错误. 故选 AC.

**一题多解** 由题意知  $\frac{p}{2}=1$ , 故  $p=2$ , 故 A 正确. 设抛物线 C 的焦点为 F, 则  $F(1, 0)$ , 准线方程为  $x=-1$ . 因为直线  $y=-\sqrt{3}(x-1)$  的斜率为  $-\sqrt{3}$ , 所以直线 MN 的倾斜角为  $120^\circ$ , 不妨设 N 位于第一象限, M 位于第四象限, 设  $M_1, N_1$  分别为 M, N 在准线上的射影, 根据抛物线的定义知  $|NF|=|NN_1|$ , 所以  $|NF|\cos 60^\circ+|NN_1|=p=2$ , 解得  $|NF|=\frac{2}{1+\cos 60^\circ}=\frac{4}{3}$ , 同理可得  $|MF|=\frac{2}{1-\cos 60^\circ}=4$ , 所以  $|MN|=|MF|+|NF|=\frac{16}{3}$ , 故 B 错误. 取 MN 的中点 P (图略), 根据梯形的中位线性质知点 P 到准线的距离  $d=\frac{|MM_1|+|NN_1|}{2}=\frac{|MF|+|NF|}{2}=\frac{|MN|}{2}$ , 所以以 MN 为直径的圆与 l 相切, 故 C 正确. 在  $\triangle NOF$  中,  $|NF|=\frac{4}{3}, |OF|=1, \angle NFO=60^\circ$ , 由余弦定理可得  $|ON|^2=|NF|^2+|OF|^2-2|NF| \cdot |OF| \cdot \cos 60^\circ$ , 解得  $|ON|=\frac{\sqrt{13}}{3}$ , 同理可得  $|OM|=\sqrt{21}$ , 又  $|MN|=\frac{16}{3}$ , 所以  $\triangle OMN$  不是等腰三角形, 故 D 错误.

### 11. BCD 【命题点】函数的极值、二次函数零点分析

**【解析】**依题意,  $x>0, f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}=\frac{ax^2-bx-2c}{x^3}$ . 设  $g(x)=ax^2-bx-2c$ , 由题意  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有两个零点  $x_1, x_2$  (提示: 将函数极值问题转化成导函数零点问题, 注意  $g(x)$  的两个零点均需大于 0), 所以  $x_1+x_2=\frac{b}{a}>0, x_1x_2=-\frac{2c}{a}>0$ , 则  $-\frac{2bc}{a^2}>0$ , 所以  $ab>0, ac<0, bc<0$ , 故 A 错误, B 正确, D 正确. 因为二次函数  $g(x)$  有两个正零点, 所以  $\Delta=b^2+8ac>0$ , 故 C 正确. 故选 BCD.

**快解** 同上得  $g(x)=ax^2-bx-2c$  有两个正零点, 则可假设  $g(x)=(x-1)(x-2)$ , 所以  $a=1, b=3, c=-1$ , 所以  $bc<0$ , 故 A 错误.

### 12. ABD

**思路导引** 对于 A 与 B, 根据相互独立事件的概率公式求解;

对于 C, 分两种情况讨论  $\begin{cases} \text{发送 1, 依次收到 1, 1, 1,} \\ \text{发送 1, 恰好收到两次 1, 一次 0;} \end{cases}$   
对于 D, 分别算出采用三次传输方案译码为 0 的概率以及单次传输方案译码为 0 的概率  $\rightarrow$  将两个概率作差  $\rightarrow$  设函数  $f(\alpha) \rightarrow$  根据  $0<\alpha<0.5$  判断  $f(\alpha)$  的符号  $\rightarrow$  结论

### 【命题点】相互独立事件的概率、独立重复试验

**【解析】**对于 A 选项, 采用单次传输方案, 依次发送 1, 0, 1,



依次收到 1,0,1 的概率为  $(1-\beta)(1-\alpha)(1-\beta) = (1-\alpha)(1-\beta)^2$ , 所以 **A 选项正确**.

对于 B 选项, 采用三次传输方案, 发送 1, 依次收到 1,0,1 的概率为  $(1-\beta)\beta(1-\beta) = \beta(1-\beta)^2$ , 所以 **B 选项正确**.

对于 C 选项, 采用三次传输方案, 发送 1, 依次收到 1,1,1 (即译码为 1) 的概率为  $(1-\beta)(1-\beta)(1-\beta) = (1-\beta)^3$ ; 发送 1, 依次收到 1,0,1 (即译码为 1), 0,1,1 (即译码为 1), 1,1,0 (即译码为 1) 的概率为  $3(1-\beta)\beta(1-\beta) = 3(1-\beta)^2\beta$ , 于是译码为 1 的概率为  $(1-\beta)^3 + 3(1-\beta)^2\beta$ , 所以 **C 选项不正确**.

对于 D 选项, 采用三次传输方案, 发送 0, 依次收到 0,0,0 (即译码为 0) 的概率为  $(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha) = (1-\alpha)^3$ ; 发送 0, 依次收到 0,0,1 (即译码为 0), 0,1,0 (即译码为 0), 1,0,0 (即译码为 0) 的概率为  $3(1-\alpha)\alpha(1-\alpha) = 3(1-\alpha)^2\alpha$ , 于是译码为 0 的概率为  $(1-\alpha)^3 + 3(1-\alpha)^2\alpha$ . 采用单次传输方案, 发送 0, 译码为 0 的概率为  $1-\alpha$ . 依题意, 有  $(1-\alpha)^3 + 3(1-\alpha)^2\alpha > 1-\alpha$ ,  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 即  $-2\alpha^2 + \alpha > 0$ ,  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

令函数  $f(\alpha) = -2\alpha^2 + \alpha$ ,  $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ , 则  $f(\alpha) = \alpha(1-2\alpha) > 0$  在  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  上恒成立, 所以 **D 选项正确**. 故选 **ABD**.

### 13. $\sqrt{3}$ 【命题点】平面向量的数量积及模长计算

【解析】 $\begin{cases} |a-b| = \sqrt{3}, \\ |a+b| = |2a-b|, \end{cases}$  两式分别平方, 得

$$\begin{cases} |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = 3, \\ |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 = 4|a|^2 - 4a \cdot b + |b|^2, \end{cases}$$
 解得  $|b| = \sqrt{3}$ .

### 14. 28 【命题点】锥体、台体的体积公式

【解析】设原正四棱锥为  $S-ABCD$ , 截去的正四棱锥为  $S-A_1B_1C_1D_1$ ,  $O_1, O$  分别为正四棱台  $A_1B_1C_1D_1-ABCD$  上、下底面的中心, 如图. 因为  $AB = 4$ ,  $A_1B_1 = 2$ , 所以  $OA = 2\sqrt{2}$ ,  $O_1A_1 = \sqrt{2}$ . 由截面平行于底面得  $\frac{SO_1}{SO} =$

$\frac{O_1A_1}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ , 又  $SO_1 = 3$ , 所以

$SO = 6$ ,  $OO_1 = 3$ , 所以正四棱台  $A_1B_1C_1D_1-ABCD$  上、下底面的边长分别为 2 和 4, 高为 3, 所以  $V_{\text{台}} = \frac{1}{3} \times (4 + 16 +$

$\sqrt{16 \times 4}) \times 3 = 28$  (另解:  $V_{\text{台}} = V_{S-ABCD} - V_{S-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3} \times 16 \times 6 - \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 28$ ).

### 15. 2 或 -2 或 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ (填一个即可)

【命题点】直线与圆的位置关系

【解析】由题知,  $\odot C$  的半径  $r = 2$ , 圆心  $C(1, 0)$ . 设圆心  $C$  到直线  $x - my + 1 = 0$  的距离为  $d$ , 则弦长  $|AB| = 2\sqrt{4-d^2}$ , 所以  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{4-d^2} \cdot d = \frac{8}{5}$ , 解得  $d^2 = \frac{4}{5}$  或  $d^2 = \frac{16}{5}$ , 所以

$d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  或  $d = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ . 由点到直线的距离公式可知, 当  $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

时,  $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 解得  $m = \pm 2$ ; 当  $d = \frac{4\sqrt{5}}{5}$  时,  $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ ,

解得  $m = \pm \frac{1}{2}$ . 综上,  $m = \pm 2$  或  $\pm \frac{1}{2}$ .

### 一题多解 由题知, $\odot C$

的半径  $r = 2$ , 圆心  $C(1, 0)$ ,

圆心  $C$  到直线  $x - my + 1 = 0$  的

距离  $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} < 2$ , 所以  $m \neq 0$ .

直线方程  $x - my + 1 = 0$  可化为

$y = \frac{1}{m}(x+1)$ , 所以直线的斜

率为  $\frac{1}{m}$  且过定点  $(-1, 0)$ . 因为点  $(-1, 0)$  在  $\odot C$  上, 设为  $A$

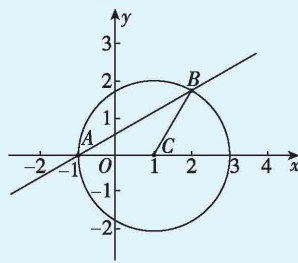
(如图), 所以  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AC||y_B| = \frac{8}{5}$ , 解得  $|y_B| = \frac{8}{5}$ , 所以

点  $B$  的纵坐标为  $\pm \frac{8}{5}$ . 代入  $\odot C$  方程, 得  $(x-1)^2 + \frac{64}{25} = 4$ , 解

得点  $B$  坐标为  $\left(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}\right)$  或  $\left(\frac{11}{5}, -\frac{8}{5}\right)$  或  $\left(-\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$  或

$\left(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}\right)$ . 因为  $A(-1, 0)$ , 所以直线  $AB$  的斜率为  $\pm \frac{1}{2}$  或

$\pm 2$ , 故  $m = \pm 2$  或  $\pm \frac{1}{2}$ .



### 16. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

【思路导引】 $A, B$  两点横、纵坐标关系  $\rightarrow \omega$   
图像与  $x, y$  轴交点  $\rightarrow \varphi$   
 $\rightarrow f(x) \rightarrow f(\pi)$

【命题点】三角函数的图像与性质

【解析】设  $A\left(x_1, \frac{1}{2}\right)$ ,  $B\left(x_2, \frac{1}{2}\right)$ , 由五点作图法可得

$\begin{cases} \omega x_1 + \varphi = \frac{\pi}{6}, & \text{①} \\ \omega x_2 + \varphi = \frac{5\pi}{6}. & \text{②} \end{cases}$  ②-①, 得  $\omega(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{3}$ . 因为  $|AB| = \frac{\pi}{6}$ ,

所以  $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{6}$ , 所以  $\omega = 4$ . 因为函数  $f(x)$  的图像经过点

$\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ , 所以  $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{8\pi}{3} + \varphi\right) = 0$ , 所以  $\frac{8\pi}{3} + \varphi = 2k\pi$ ,

$k \in \mathbb{Z}$ , 解得  $\varphi = -\frac{8\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 由题图可知  $-1 < f(0) < 0$ , 即

$-1 < \sin \varphi < 0$ , 所以取  $k = 1$ , 则  $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$ , 所以  $f(x) =$

$\sin\left(4x - \frac{2\pi}{3}\right)$ , 所以  $f(\pi) = \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

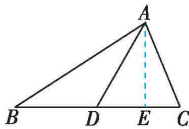
### 17. 【命题点】三角形面积公式、解三角形

【解】(1) 因为  $D$  为  $BC$  的中点,

所以  $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

如图, 过  $A$  作  $AE \perp BC$  于  $E$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ADE$  中,  $\angle ADE = \frac{\pi}{3}$ ,  $AD = 1$ , 所以  $DE = \frac{1}{2}$ ,  $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .  
 ..... 2 分  
 因为  $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  
 所以  $CD = BD = 2$ , 所以  $BE = \frac{5}{2}$ , ..... 4 分  
 所以  $\tan B = \frac{AE}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ . ..... 5 分



(2) 因为  $D$  为  $BC$  的中点, 所以  $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ , ... 6 分  
 所以  $|\vec{AD}|^2 = \frac{1}{4}(c^2 + 2bccos\angle BAC + b^2) = 1$ ,  
 即  $bccos\angle BAC = -2$ . ① ..... 8 分  
 因为  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bccsin\angle BAC = \sqrt{3}$ , 即  $bccsin\angle BAC = 2\sqrt{3}$ . ②  
 ..... 9 分  
 由①②解得  $\tan\angle BAC = -\sqrt{3}$ , 所以  $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ , 所以  $bc = 4$ .  
 又因为  $b^2 + c^2 = 8$ , 所以  $b = c = 2$ . ..... 10 分

**一题多解** (1) 因为  $D$  为  $BC$  的中点,  
 所以  $S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin\angle ADC = 2 \times \frac{1}{2} \times$   
 $1 \cdot DC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ , 解得  $DC = 2$ ,  
 所以  $BD = DC = 2$ ,  $BC = 4$ . ..... 2 分  
 因为  $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$ , 所以  $\angle ADB = \frac{2\pi}{3}$ .  
 在  $\triangle ABD$  中, 由余弦定理得  $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot$   
 $cos\angle ADB = 1 + 4 + 2 = 7$ , 所以  $AB = \sqrt{7}$ . ..... 3 分  
 在  $\triangle ABD$  中, 由正弦定理得  $\frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{AD}{\sin B}$ ,  
 所以  $\sin B = \frac{AD \sin\angle ADB}{AB} = \frac{\sqrt{21}}{14}$ ,  
 所以  $cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$ ,  
 所以  $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ . ..... 5 分  
 (2) 因为  $D$  为  $BC$  的中点, 所以  $BD = \frac{1}{2}a$ .  
 在  $\triangle ABD$  与  $\triangle ABC$  中, 由余弦定理得  $cos B = \frac{c^2 + BD^2 - AD^2}{2c \cdot BD} =$   
 $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ , 即  $\frac{c^2 + \frac{1}{4}a^2 - 1}{ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ , 整理得  $\frac{1}{2}a^2 = b^2 + c^2 - 2 =$   
 $6$ , 解得  $a = 2\sqrt{3}$ . ..... 7 分  
 在  $\triangle ABC$  中, 由余弦定理得  $cos\angle BAC = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$

$\frac{8-12}{2bc} = -\frac{2}{bc}$ ,  
 所以  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bccsin\angle BAC = \frac{1}{2}bc\sqrt{1 - cos^2\angle BAC} =$   
 $\frac{1}{2}bc\sqrt{1 - \left(-\frac{2}{bc}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 - 4} = \sqrt{3}$ , 解得  $bc = 4$ . ..... 9 分  
 由  $\begin{cases} bc = 4, \\ b^2 + c^2 = 8, \end{cases}$  解得  $b = c = 2$ . ..... 10 分

**18. 【命题点】**等差数列的通项公式及前  $n$  项和公式、分组求和  
 (1) 【解】设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ .  
 因为  $b_n = \begin{cases} a_n - 6, & n \text{ 为奇数}, \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$  所以  $b_1 = a_1 - 6$ ,  $b_2 = 2a_2 = 2a_1 + 2d$ ,  
 $b_3 = a_3 - 6 = a_1 + 2d - 6$ . ..... 2 分  
 因为  $S_4 = 32$ ,  $T_3 = 16$ ,  
 所以  $\begin{cases} 4a_1 + 6d = 32, \\ (a_1 - 6) + (2a_1 + 2d) + (a_1 + 2d - 6) = 16, \end{cases}$  ..... 4 分  
 整理得  $\begin{cases} 2a_1 + 3d = 16, \\ a_1 + d = 7, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a_1 = 5, \\ d = 2, \end{cases}$   
 所以  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2n + 3$ . ..... 5 分  
 (2) 【证明】由 (1) 知  $a_n = 2n + 3$ , 所以  $S_n = \frac{n[5 + (2n + 3)]}{2} =$   
 $n^2 + 4n$ ,  $b_n = \begin{cases} 2n - 3, & n \text{ 为奇数}, \\ 4n + 6, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$   
 当  $n$  为奇数时,  $T_n = -1 + 14 + 3 + 22 + 7 + 30 + \cdots + (2n - 7) + (4n +$   
 $2) + 2n - 3$   
 $= [-1 + 3 + \cdots + (2n - 7) + (2n - 3)] + [14 + 22 + \cdots + (4n + 2)]$   
 $= \frac{\frac{n+1}{2}(-1 + 2n - 3)}{2} + \frac{\frac{n-1}{2}(14 + 4n + 2)}{2}$   
 $= \frac{3n^2 + 5n - 10}{2}$ . ..... 7 分  
 当  $n > 5$  时,  $T_n - S_n = \frac{3n^2 + 5n - 10}{2} - (n^2 + 4n) = \frac{n^2 - 3n - 10}{2} =$   
 $\frac{(n-5)(n+2)}{2} > 0$ ,  
 所以  $T_n > S_n$ . ..... 9 分  
 当  $n$  为偶数时,  $T_n = -1 + 14 + 3 + 22 + 7 + 30 + \cdots + (2n - 5) + (4n + 6)$   
 $= [-1 + 3 + \cdots + (2n - 5)] + [14 + 22 + \cdots + (4n + 6)]$   
 $= \frac{\frac{n}{2}(-1 + 2n - 5)}{2} + \frac{\frac{n}{2}(14 + 4n + 6)}{2}$   
 $= \frac{3n^2 + 7n}{2}$ .  
 当  $n > 5$  时,  $T_n - S_n = \frac{3n^2 + 7n}{2} - (n^2 + 4n) = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} > 0$ ,  
 所以  $T_n > S_n$ . ..... 11 分  
 综上所述, 当  $n > 5$  时,  $T_n > S_n$ . ..... 12 分  
**一题多解** (2) 由 (1) 知  $a_n = 2n + 3$ .  
 所以  $S_n = \frac{n[5 + (2n + 3)]}{2} = n^2 + 4n$ , ..... 6 分  
 $b_n = \begin{cases} 2n - 3, & n \text{ 为奇数}, \\ 4n + 6, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$   $b_{2n-1} + b_{2n} = 12n + 1$ . ..... 7 分

当  $n$  为偶数时,  $T_n = 12 \times 1 + 1 + 12 \times 2 + 1 + \cdots + 12 \times \frac{n}{2} + 1$

$$= 12 \times \frac{\left(1 + \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{n}{2}}{2} + \frac{n}{2}$$

$$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n.$$

当  $n > 5$  时,  $T_n - S_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - (n^2 + 4n) = \frac{n(n-1)}{2} > 0$ . ..... 9 分

当  $n$  为奇数时,  $T_n = T_{n+1} - b_{n+1} = \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{7}{2}(n+1) - 4n - 10 =$

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5.$$

当  $n > 5$  时,  $T_n - S_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5 - (n^2 + 4n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 5 =$

$$\frac{1}{2}(n+2)(n-5) > 0. \quad \text{..... 11 分}$$

综上所述, 当  $n > 5$  时,  $T_n > S_n$ . ..... 12 分

### 19. 【命题点】频率分布直方图、函数的解析式及最值

【解】(1) 设  $X$  为患病者指标,  $Y$  为未患病者指标, 由患病者指标的频率分布直方图, 知  $p(c) = P(X \leq c) = (c - 95) \times 0.002 = 0.5\%$ , 解得  $c = 97.5$ .

则  $q(c) = P(Y > c) = (100 - 97.5) \times 0.010 + 5 \times 0.002 = 0.035 = 3.5\%$ . ..... 4 分

(2) 当  $95 \leq c \leq 100$  时,

$p(c) = (c - 95) \times 0.002$ ,  $q(c) = (100 - c) \times 0.010 + 5 \times 0.002$ ,  
所以  $f(c) = p(c) + q(c) = -0.008c + 0.82$ ; ..... 6 分

当  $100 < c \leq 105$  时,

$p(c) = 5 \times 0.002 + (c - 100) \times 0.012$ ,  $q(c) = (105 - c) \times 0.002$ ,  
所以  $f(c) = p(c) + q(c) = 0.01c - 0.98$ . ..... 8 分

综上所述,  $f(c) = \begin{cases} -0.008c + 0.82, & 95 \leq c \leq 100, \\ 0.01c - 0.98, & 100 < c \leq 105. \end{cases}$

由一次函数的单调性知, 函数  $f(c)$  在  $[95, 100]$  上单调递减, 在  $(100, 105]$  上单调递增, ..... 10 分

所以  $f(c)_{\min} = f(100) = -0.008 \times 100 + 0.82 = 0.02$ . ..... 12 分

### 20. 【命题点】线面垂直的判定定理与性质定理、二面角、空间向量的应用

(1) 【证明】如图, 连接  $DE, AE$ .

因为  $DA = DB = DC$ ,  $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$ ,

所以  $\triangle ABD, \triangle ACD$  为全等的正三角形, 所以  $AB = AC$ .

因为  $E$  为  $BC$  的中点, 所以  $AE \perp BC, DE \perp BC$ .

因为  $AE, DE \subset$  平面  $ADE$ , 且  $AE \cap DE = E$ , 所以  $BC \perp$  平面  $ADE$ .

因为  $DA \subset$  平面  $ADE$ , 所以  $BC \perp DA$ . ..... 4 分

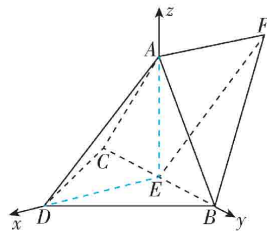
(2) 【解】设  $DA = DB = DC = 2$ , 则由 (1) 知  $AB = AC = 2$ .

因为  $BD \perp CD$ , 所以  $BC = 2\sqrt{2}, DE = \sqrt{2}$ ,

所以  $BC^2 = AC^2 + AB^2$ , 则  $AB \perp AC$ , 所以  $AE = \sqrt{2}$ ,

所以  $DA^2 = AE^2 + DE^2$ , 所以  $AE \perp DE$ .

以  $E$  为坐标原点, 以  $ED, EB, EA$  所在直线分别为  $x, y, z$  轴建立空间直角坐标系, 如图所示,



则  $D(\sqrt{2}, 0, 0), A(0, 0, \sqrt{2}), B(0, \sqrt{2}, 0)$ , 设  $F(a, b, c)$ , 因为  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$ , 所以  $(a, b, c) = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ , 所以  $F(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$ ,  
所以  $\overrightarrow{AB} = (0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), \overrightarrow{BD} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{AF} = (-\sqrt{2}, 0, 0)$ .

设  $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  为平面  $ABD$  的法向量,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}y_1 = 0, \\ \sqrt{2}y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0, \end{cases}$$

取  $y_1 = 1$ , 得  $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1)$ . ..... 9 分

设  $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$  为平面  $ABF$  的法向量,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -\sqrt{2}x_2 = 0, \\ \sqrt{2}y_2 - \sqrt{2}z_2 = 0, \end{cases}$$

取  $y_2 = 1$ , 得  $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 1)$ .

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以 } \sin \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即二面角  $D-AB-F$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ . ..... 12 分

### 21. 【思路导引】

(1) 由焦点坐标求出  $c$   $\xrightarrow{\text{离心率公式}}$  求得

$a \xrightarrow{a^2 + b^2 = c^2}$  求出  $b$   $\rightarrow$  得到双曲线  $C$  的方程

(2) 设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 直线  $MN$  的方程为  $x = my - 4$   
 $\rightarrow$  写出直线  $MA_1, NA_2$  的方程  $\rightarrow$  联立两直线方程得点  $M, N$  坐标间的等量关系  $\rightarrow$  联立直线  $MN$  与双曲线  $C$  的方程, 写出  $y_1 + y_2, y_1 y_2$   $\rightarrow$  结合根与系数的关系化简求出定直线

### 【命题点】双曲线的方程及几何性质、直线与双曲线的位置关系

(1) 【解】因为双曲线  $C$  的左焦点为  $(-2\sqrt{5}, 0)$ , 所以  $c = 2\sqrt{5}$ .

由离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{a} = \sqrt{5}$ , 得  $a = 2$ ,

所以  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 4$ ,

所以  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ . ..... 4 分

(2) 【证明】设  $M(x_1, y_1) (x_1 < 0, y_1 > 0), N(x_2, y_2)$ , 直线  $MN$  的方程为  $x = my - 4$  (提示: 若直线不与  $x$  轴平行或重合, 可设直线方程为  $x = my + t$ ).

(下面求直线  $MA_1, NA_2$  的方程, 联立两直线方程得点坐标间的等量关系)

因为  $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$ ,

所以直线  $MA_1$  的方程为  $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$ , 直线  $NA_2$  的方程为

$$y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2),$$



$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1+2}(x+2), \\ y = \frac{y_2}{x_2-2}(x-2), \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 得 } \frac{y_1}{x_1+2} \cdot \frac{x_2-2}{y_2} = \frac{x-2}{x+2}, \quad \dots 8 \text{ 分}$$

(下面联立直线  $MN$  与双曲线  $C$  的方程, 求出根与系数的关系)

$$\text{联立} \begin{cases} x = my - 4, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1, \end{cases} \quad \text{消去 } x \text{ 整理得 } (4m^2 - 1)y^2 - 32my + 48 = 0,$$

$$\text{则 } 4m^2 - 1 \neq 0, \Delta = 256m^2 + 192 > 0, \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{32m}{4m^2 - 1}, y_1 y_2 =$$

$$\frac{48}{4m^2 - 1} < 0, \text{ 故 } -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}.$$

(下面利用根与系数的关系化简, 求出定直线)

$$\text{所以 } my_1 y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2),$$

$$\text{所以 } \frac{y_1}{x_1+2} \cdot \frac{x_2-2}{y_2} = \frac{my_1 y_2 - 6y_1}{my_1 y_2 - 2y_2} = \frac{\frac{3}{2}y_2 - \frac{9}{2}y_1}{\frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2} = -3,$$

$$\text{所以 } \frac{x-2}{x+2} = -3, \text{ 解得 } x = -1, \dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以点 } P \text{ 在定直线 } x = -1 \text{ 上.} \dots 12 \text{ 分}$$

**方法速记** 求解圆锥曲线中动点在定直线上的问题时, 一般需要根据题中条件, 设出所需直线方程, 联立直线与圆锥曲线方程, 根据根与系数的关系以及题中条件, 求出动点的坐标满足的关系, 从而可确定结果 (一般得到动点横坐标或纵坐标为定值).

$$22. \text{思路导引} \quad (1) \text{构造函数} \begin{cases} f(x) = x - \sin x \quad (0 < x < 1) \\ g(x) = \sin x + x^2 - x \quad (0 < x < 1) \end{cases} \xrightarrow{\text{求导}}$$

研究  $f(x), g(x)$  的单调性、最小值  $\rightarrow \begin{cases} \sin x < x \\ \sin x > x - x^2 \end{cases} \rightarrow$  问题得证

(2) 当  $a = t$  与  $a = -t$  时,  $f(x)$  解析式相同  $\rightarrow$  考虑  $a \geq 0$  且  $0 <$

$$x < 1 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \rightarrow f'(x) > 0, \text{ 不符合题意} \\ a > 0 \rightarrow 0 < x < \min\left\{\frac{1}{a}, 1\right\}, x\left(\frac{2}{1-x^2} - a^2\right) < f'(x) < \end{cases}$$

$$x\left(a^3 x - a^2 + \frac{2}{1-x^2}\right) \rightarrow \text{令 } m(x) = a^3 x - a^2 + \frac{2}{1-x^2}, n(x) = \frac{2}{1-x^2} - a^2 \rightarrow$$

$$n(0) = m(0) \rightarrow \begin{cases} n(0) \geq 0 \rightarrow f'(x) > 0, \text{ 不符合题意} \\ m(0) < 0 \rightarrow f'(x) < 0, \text{ 符合题意} \end{cases}$$

**【命题点】** 导数在不等式证明中的应用, 根据函数的极大值点求参数的取值范围

(1)【证明】(由于所证不等式为两段, 需分段求证, 下面构造函数证  $\sin x < x$ )

$$\text{设 } f(x) = x - \sin x, \text{ 则 } f'(x) = 1 - \cos x \geq 0,$$

所以函数  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增,

所以当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) > f(0) = 0$ , 即  $x - \sin x > 0$  在  $(0, 1)$  上恒成立,

所以  $\sin x < x$  在  $(0, 1)$  上恒成立.  $\dots 2 \text{ 分}$

(下面构造函数证  $\sin x > x - x^2$ )

设  $g(x) = \sin x + x^2 - x$  (关键: 证明不等式  $f(x) > g(x)$  (或  $f(x) < g(x)$ ) 转化为证明  $f(x) - g(x) > 0$  (或  $f(x) - g(x) < 0$ ), 进而构造辅助函数  $h(x) = f(x) - g(x)$ ),

$$\text{则 } g'(x) = \cos x + 2x - 1.$$

$$\text{设 } h(x) = \cos x + 2x - 1, \text{ 则 } h'(x) = -\sin x + 2 > 0,$$

所以函数  $h(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增,

所以当  $x \in (0, 1)$  时,  $h(x) > h(0) = 0$ , 即  $g'(x) > 0$  在  $(0, 1)$  上恒成立,

所以函数  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增,

所以当  $x \in (0, 1)$  时,  $g(x) > g(0) = 0$ , 即  $\sin x + x^2 - x > 0$  在  $(0, 1)$  上恒成立,

所以  $\sin x > x - x^2$  在  $(0, 1)$  上恒成立.

综上所述, 当  $0 < x < 1$  时,  $x - x^2 < \sin x < x$ .  $\dots 5 \text{ 分}$

(2)【解】由  $f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2)$ , 可知函数  $f(x)$  的定义域为  $(-1, 1)$  (提示: 讨论函数单调性时, 注意定义域先行原则), 且函数  $f(x)$  为偶函数.

$$\text{因为 } f'(x) = -a \sin ax + \frac{2x}{1-x^2}, \text{ 所以 } f'(0) = 0. \dots 6 \text{ 分}$$

当  $a = t$  时,  $f(x) = \cos tx - \ln(1 - x^2)$ , 当  $a = -t$  时,  $f(x) = \cos(-tx) - \ln(1 - x^2) = \cos tx - \ln(1 - x^2)$ , 也即  $a$  取互为相反数的两个值时,  $f(x)$  的解析式没有变化, 所以可以断定  $a$  的取值必定是成对 (互为相反数的一对), 只需考虑  $a \geq 0$  的情形即可.  $\dots 7 \text{ 分}$

以下只考虑  $a \geq 0$  和  $0 < x < 1$  的情形.

$$(i) \text{ 当 } a = 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{2x}{1-x^2}, \text{ 当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } f'(x) > 0, \text{ 则 } f(x)$$

单调递增, 不符合极大值的定义.

(ii) 当  $a > 0$  时, 由 (1) 可知, 当  $0 < ax < 1$  且  $0 < x < 1$ , 也即  $0 < x <$

$$\min\left\{\frac{1}{a}, 1\right\} \text{ 时, } ax - a^2 x^2 < \sin ax < ax, \text{ 则 } -a^2 x < -a \sin ax < -a^2 x +$$

$$a^3 x^2, \text{ 则 } -a^2 x + \frac{2x}{1-x^2} < f'(x) < -a^2 x + a^3 x^2 + \frac{2x}{1-x^2}, \text{ 则 } x\left(\frac{2}{1-x^2} -$$

$$a^2\right) < f'(x) < x\left(a^3 x - a^2 + \frac{2}{1-x^2}\right). \dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{记 } m(x) = a^3 x - a^2 + \frac{2}{1-x^2}, n(x) = \frac{2}{1-x^2} - a^2, \text{ 观察可知 } m(x),$$

$$n(x) \text{ 在 } 0 < x < \min\left\{\frac{1}{a}, 1\right\} \text{ 时均单调递增, 且有 } m(0) = 2 - a^2 =$$

$$n(0). \dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n(0) = 2 - a^2 \geq 0, \text{ 即 } 0 < a \leq \sqrt{2} \text{ 时, 若 } 0 < x < \min\left\{\frac{1}{a}, 1\right\},$$

则  $n(x) > n(0) = 2 - a^2 \geq 0$ , 从而  $f'(x) > x \cdot n(x) > 0$ , 不符合极大值的定义.  $\dots 11 \text{ 分}$

当  $m(0) = 2 - a^2 < 0$ , 即  $a > \sqrt{2}$  时, 由于  $m(x)$  单调递增, 所以必然存在正数  $u < \min\left\{\frac{1}{a}, 1\right\}$ , 使得当  $0 < x < u$  时,  $m(x) < 0$ , 从

而  $f'(x) < x \cdot m(x) < 0$ , 符合极大值的定义.

综上所述,  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ .

$\dots 12 \text{ 分}$