

1. C 【命题点】集合间的运算

【解析】利用数轴表示集合 A, B , 易得 $A \cap B = (-1, 2)$, 故选 C.

2. D 【命题点】复数的乘法运算、共轭复数的概念

【解析】因为 $z = i(2+i) = 2i-1 = -1+2i$, 所以 $\bar{z} = -1-2i$, 故选 D.

3. A 【命题点】平面向量的坐标运算、模长公式

【解析】因为 $a = (2, 3), b = (3, 2)$, 所以 $a-b = (-1, 1)$, 所以 $|a-b| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, 故选 A.

一题多解 $|a-b| = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2-2a \cdot b} = \sqrt{|a|^2+|b|^2-2a \cdot b} = \sqrt{2^2+3^2+3^2+2^2-2 \times (6+6)} = \sqrt{2}$. 故选 A.

方法速记 (1) 若 $a = (x, y)$, 则 $|a| = \sqrt{x^2+y^2}$; (2) 若 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$, 则 $a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2$.

4. B 【命题点】古典概型的概率

【解析】将测量过某项指标的 3 只兔子分别记为 A_1, A_2, A_3 , 剩下的记为 B_1, B_2 , 共有 5 只. 从这 5 只兔子中任取 3 只所包含的基本事件总数 $n = 10$, 基本事件为 $(A_1, A_2, A_3), (A_1, A_2, B_1), (A_1, A_2, B_2), (A_1, A_3, B_1), (A_1, A_3, B_2), (A_2, A_3, B_1), (A_2, A_3, B_2), (A_1, B_1, B_2), (A_2, B_1, B_2), (A_3, B_1, B_2)$. 记 M 为“恰有两只兔子测量过该指标”, 则事件 M 发生所包含的基本事件数 $m = 6$, 即 $(A_1, A_2, B_1), (A_1, A_2, B_2), (A_1, A_3, B_1), (A_1, A_3, B_2), (A_2, A_3, B_1), (A_2, A_3, B_2)$.

所以所求概率 $P = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. 故选 B.

5. A 【命题点】逻辑推理

【解析】若只有一个人预测正确, 则有三种情况: (1) 若甲预测正确, 则乙、丙预测错误, 即①甲的成绩比乙高; ②丙的成绩不是最高的; ③丙的成绩比乙低.

由①②③可得甲、乙、丙成绩由高到低的顺序为甲、乙、丙, A 正确.

(2) 若乙预测正确, 则甲、丙预测错误, 即①乙的成绩比甲高; ②丙的成绩最高; ③丙的成绩比乙低.

由上可知②③相矛盾, 故此情况不成立.

(3) 若丙预测正确, 则甲、乙预测错误, 即①乙的成绩比甲高; ②丙的成绩不是最高的; ③丙的成绩比乙高.

由①③得成绩由高到低的顺序为丙、乙、甲, 与②相矛盾, 此情况不成立. 故选 A.

快解 若 A 正确, 则三人成绩由高到低的顺序为甲、乙、丙, 可验证甲预测正确, 乙、丙均预测错误, 符合题意, 所以 A 正确.

6. D 【命题点】利用函数的奇偶性求解析式

【解析】解法一: 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$, $\therefore f(-x) = e^{-x} - 1$.

$\therefore f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(x) = -f(-x) = -e^{-x} + 1 (x < 0)$. 故选 D.

解法二: 设 (x, y) 是 $x < 0$ 时 $f(x)$ 图像上任意一点.

$\therefore f(x)$ 是奇函数, \therefore 在 $f(x)$ 图像上点 (x, y) 关于原点对称的点为 $(-x, -y)$.

又 $x < 0$, $\therefore -x > 0$.

$\therefore x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, $\therefore -y = e^{-x} - 1$,

$\therefore y = -e^{-x} + 1 (x < 0)$, 即 $f(x) = -e^{-x} + 1 (x < 0)$.

解法三(赋值法): $\therefore f(x)$ 是奇函数, 且 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, $\therefore f(-1) = -f(1) = -(e^1 - 1) = 1 - e$, 即 $f(-1) = -e + 1$, 只有 D 符合.

方法速记 解答此类问题的常用方法: (1) 利用奇、偶函数的定义求解析式; (2) 利用关于原点对称的点的特点结合函数图像求解, 注意自变量的取值范围; (3) 赋值法.

7. B 【命题点】对两平面平行的理解、充要条件的判定

【解析】当平面 α 内有无数条直线和平面 β 平行时, 两平面可以平行, 也可以相交, 故 A 不正确. 当 α, β 平行于同一条直线时, 两平面可以相交也可以平行, 故 C 不正确. 由于垂直于同一平面的两平面可以相交也可以平行, 故 D 不正确. 根据两平面平行的判定定理可知, 当 α 内有两条相交直线与平面 β 平行时, 一定有 $\alpha // \beta$. 反之, 当 $\alpha // \beta$ 时, 一定有 α 内的两条相交直线与平面 β 平行, 故选 B.

易错警示 本题求解的易错之处是误认为由 α 内有无数条直线与平面 β 平行可得 $\alpha // \beta$. 事实上, 选项 A 是 $\alpha // \beta$ 的必要不充分条件, 而 D 中 α, β 垂直于同一个平面是 $\alpha // \beta$ 的必要不充分条件.

8. A 【命题点】三角函数的周期

【解析】由 $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}$ 是 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 的两个相邻的极值点得其最小正周期 $T = 2 \times \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) = \pi$, 即 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 则 $\omega = 2$. 故选 A.

9. D 【命题点】抛物线和椭圆的几何性质

【解析】由 $y^2 = 2px (p > 0)$ 知抛物线的焦点坐标是 $\left(\frac{p}{2}, 0 \right)$, 而

椭圆 $\frac{x^2}{3p} + \frac{y^2}{p} = 1$ 的焦点坐标为 $(\pm \sqrt{2p}, 0)$ (提示: 由抛物线的

焦点可知椭圆焦点必在 x 轴上, 椭圆中 $a^2 = 3p, b^2 = p$), 则

$$\frac{p}{2} = \sqrt{2p}, \text{ 故 } p = 8. \text{ 故选 D.}$$

10. C 【命题点】求曲线的切线方程、导数的几何意义

【解析】 $\because y = 2\sin x + \cos x, \therefore y' = 2\cos x - \sin x.$

\therefore 曲线 $y = 2\sin x + \cos x$ 在点 $(\pi, -1)$ 处的切线的斜率 $k =$

$$y'|_{x=\pi} = 2\cos \pi - \sin \pi = -2.$$

\therefore 切线方程为 $y + 1 = -2(x - \pi)$, 即 $2x + y - 2\pi + 1 = 0$. 故选 C.

11. B 【命题点】二倍角公式、同角三角函数关系

【解析】 $\because 2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1, \therefore 4\sin \alpha \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 + 1,$

$$\therefore 4\sin \alpha \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha. \because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \cos \alpha \neq 0 \text{ 且 } \sin \alpha > 0,$$

$$\therefore 2\sin \alpha = \cos \alpha. \text{ 又 } \because \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \therefore 5\sin^2 \alpha = 1.$$

突破点

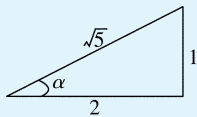
$$\therefore \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ (负值舍去)}. \text{ 故选 B.}$$

快解 $\because 2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1, \therefore 4\sin \alpha \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha.$

$$\text{又 } \because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore 2\sin \alpha = \cos \alpha,$$

$$\therefore \tan \alpha = \frac{1}{2}. \text{ 如图, 构造直角三角形,}$$

$$\text{易知 } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



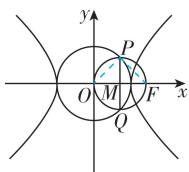
12. A 【命题点】双曲线离心率、圆的几何性质

【解析】解法一: 如图, 连接 OP, PF . 由题

意知 $\triangle OPF$ 为直角三角形, 且 $|OP| = a,$

突破点

$$|PQ| = |OF| = c. \text{ 故 } |PF| = \sqrt{c^2 - a^2} = b.$$



$$\text{由三角形等面积法可知 } ab = \frac{c^2}{2}, \text{ 即 } c^2 =$$

$$2ab. \text{ 又 } b^2 = c^2 - a^2, \text{ 则 } c^4 = 4a^2b^2 = 4a^2(c^2 - a^2), \text{ 即 } c^4 - 4a^2c^2 +$$

$$4a^4 = 0, \text{ 故 } e^4 - 4e^2 + 4 = 0, \text{ 故 } e^2 = 2, \text{ 则 } e = \sqrt{2}. \text{ 故选 A.}$$

解法二: 如图, 由题意及等面积法可知 $c^2 = 2ab$, 又 $c^2 = a^2 +$

$$b^2, \text{ 故 } a^2 + b^2 = 2ab. \text{ 则 } a = b, \text{ 所以 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{2}.$$

解法三: 由 $|PQ| = |OF|$ 且 P, Q 在以 OF 为直径的圆上可知

$$PQ \text{ 为圆的直径. 设 } OF \text{ 的中点为 } M, \text{ 则 } |PM| = |OM| = \frac{c}{2}.$$

因为点 P 在圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 上, 所以 $|OP| = a$, 结合 $\text{Rt} \triangle OPM$

$$\text{知 } a^2 = \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4}, \text{ 故 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}.$$

13. 9 【命题点】线性规划求最值

【解析】将可行域和目标函数线画在同一直角坐标系中,

如图.

目标函数 $z=3x-y$ 可变形为

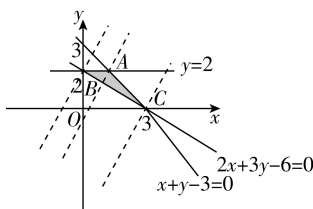
$y=3x-z$, 则直线 $y=3x-z$ 的

易错点

纵截距的最小值为目标函

数的最大值. 由图知当直线 $y=3x-z$ 经过点 $C(3,0)$ 时, 目标

函数取得最大值, $z_{\max}=3 \times 3-0=9$.



一题多解 由图可知三条直线两两相交的交点分别为 $A(1,2), B(0,2), C(3,0)$.

由 $x=1, y=2$ 得 $z=3 \times 1-2=1$;

由 $x=0, y=2$ 得 $z=3 \times 0-2=-2$;

由 $x=3, y=0$ 得 $z=3 \times 3-0=9$.

所以 z 的最大值为 9.

14. 0.98 【命题点】用样本估计总体

【解析】依题意估计经停该站高铁列车所有车次的平均正点

率的估计值为 $\frac{10 \times 0.97 + 20 \times 0.98 + 10 \times 0.99}{40} = 0.98$.

15. $\frac{3\pi}{4}$ 【命题点】正弦定理、特殊角的三角函数值、边角转化

【解析】由已知条件及正弦定理得 $\sin B \sin A + \sin A \cos B = 0$,

即 $\sin A(\sin B + \cos B) = 0$.

又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$, 所以 $\sin B = -\cos B$, 即

$\tan B = -1$. 又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{3\pi}{4}$.

方法速记 在利用正弦定理、余弦定理解三角形时, 如果已知条件中涉及的角不止一个, 一般采用正弦定理. 利用正弦定理变形实现:

(1) 边化角: $a=2R\sin A, b=2R\sin B, c=2R\sin C$;

(2) 角化边: $\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$;

(3) 计算比例: $a:b:c = \sin A:\sin B:\sin C$. (R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径)

16. 26 $\sqrt{2}-1$ 【命题点】空间几何体的结构特征

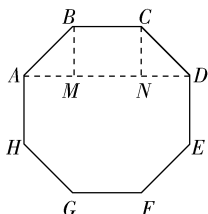
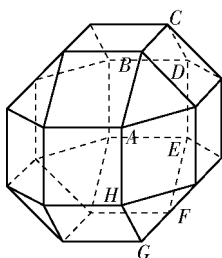
【解析】由“半正多面体”的特征可知上半部分有 9 个面, 中间部分有 8 个面, 下半部分有 9 个面, 共有 $9 \times 2 + 8 = 26$ (个) 面. 如图, 取半正多面体的截面正八边形 $ABCDEFGH$.

则由正方体的棱长为 1 可知 $AD=1$, 由对称性可得 $\angle BAD = 45^\circ$. 设半正多面体的棱长为 x . 过 B, C 分别作

$BM \perp AD$ 于 $M, CN \perp AD$ 于 N , 则 $BM = AM = CN = DN = \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

故由 $AM + MN + ND = \sqrt{2}x + x = 1$ 知 $x = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$.

易错点



17. 【命题点】线面位置关系、四棱锥的体积

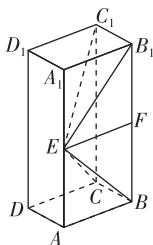
(1)【证明】由已知得 $B_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,
 $BE \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 故 $B_1C_1 \perp BE$.

又 $BE \perp EC_1$, 所以 $BE \perp$ 平面 EB_1C_1 6 分

(2)【解】由(1)知 $\angle BEB_1 = 90^\circ$. 由题设知
 $\text{Rt} \triangle ABE \cong \text{Rt} \triangle A_1B_1E$, 所以 $\angle AEB = \angle A_1EB_1 =$
 45° , 故 $AE = AB = 3, AA_1 = 2AE = 6$.

作 $EF \perp BB_1$, 垂足为 F , 则 $EF \perp$ 平面 BB_1C_1C , 且 $EF =$
 $AB = 3$.

所以, 四棱锥 $E-BB_1C_1C$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times 3 \times 6 \times 3 = 18$ 12 分



18. 【命题点】等比数列的通项公式、数列求和

【解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题设得 $2q^2 = 4q + 16$,

即 $q^2 - 2q - 8 = 0$. 解得 $q = -2$ (舍去) 或 $q = 4$ 4 分

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \times 4^{n-1} = 2^{2n-1}$ 6 分

(2) 由(1)得 $b_n = (2n-1) \log_2 2 = 2n-1$, 因此数列 $\{b_n\}$ 的前 n
 项和为 $1+3+\dots+2n-1 = n^2$ 12 分

方法速记 根据通项公式的特点选用求和方法.

(1) 若通项为 $a_n = An + B$, 则用等差数列前 n 项和公式;

(2) 若通项为 $a_n = Cq^n$, 则用等比数列前 n 项和公式; (3) 若

通项为 $a_n = An + B + Cq^n$, 则用分组求和法; (4) 若通项为 $a_n =$

$(An + B) \cdot Cq^n$, 则用错位相减法; (5) 若通项为 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$

或 $a_n = \frac{1}{2n(2n+1)}$, 则用裂项相消法.

19. 【命题点】用样本估计总体、样本数字特征

【解】(1) 根据产值增长率频数分布表得, 所调查的 100 个企
 业中产值增长率不低于 40% 的企业频率为 $\frac{14+7}{100} = 0.21$. 产值

负增长的企业频率为 $\frac{2}{100} = 0.02$ 4 分

用样本频率分布估计总体分布得这类企业中产值增长率不
 低于 40% 的企业比例为 21%, 产值负增长的企业比例为
 2%. 6 分

(2) $\bar{y} = \frac{1}{100} \times (-0.10 \times 2 + 0.10 \times 24 + 0.30 \times 53 + 0.50 \times 14 +$

$0.70 \times 7) = 0.30$, 8分

$$s^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^5 n_i (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{100} \times [(-0.40)^2 \times 2 + (-0.20)^2 \times 24 + 0^2 \times 53 + 0.20^2 \times 14 + 0.40^2 \times 7] = 0.0296, \text{ 10分}$$

$$s = \sqrt{0.0296} = 0.02 \times \sqrt{74} \approx 0.17. \text{ 11分}$$

所以,这类企业产值增长率的平均数与标准差的估计值分别为 **30%, 17%**. 12分

20. 【命题点】椭圆的离心率、焦点三角形

【解】(1) 连接 PF_1 . 由 $\triangle POF_2$ 为等边三角形可知在 $\triangle F_1PF_2$ 中, $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, $|PF_2| = c$, $|PF_1| = \sqrt{3}c$, 于是 $2a = |PF_1| + |PF_2| = (\sqrt{3} + 1)c$, 故 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{3} - 1$.

..... 5分

(2) 由题意可知, 满足条件的点 $P(x, y)$ 存在当且仅当 $\frac{1}{2}|y| \cdot$

$$2c = 16, \frac{y}{x+c} \cdot \frac{y}{x-c} = -1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ 即}$$

$$c|y| = 16, \quad \text{①}$$

$$x^2 + y^2 = c^2, \quad \text{②}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad \text{③}$$

由②③及 $a^2 = b^2 + c^2$ 得 $y^2 = \frac{b^4}{c^2}$, 又由①知 $y^2 = \frac{16^2}{c^2}$, 故 $b = 4$.

..... 8分

(根据三角形的面积、垂直直线斜率积为 -1 和点在椭圆上列式, 解出 b 后再根据椭圆有界性得到 a 的取值范围)

由②③及 $a^2 = b^2 + c^2$ 得 $x^2 = \frac{a^2}{c^2}(c^2 - b^2)$, 所以 $c^2 \geq b^2$, 从而

$$a^2 = b^2 + c^2 \geq 2b^2 = 32, \text{ 故 } a \geq 4\sqrt{2}. \text{ 10分}$$

当 $b = 4, a \geq 4\sqrt{2}$ 时, 存在满足条件的点 P .

所以 $b = 4, a$ 的取值范围为 $[4\sqrt{2}, +\infty)$ 12分

21. 【命题点】利用导数判断函数的单调性、极值点、零点

【证明】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{x-1}{x} + \ln x - 1 = \ln x - \frac{1}{x}. \text{ 2分}$$

因为 $y = \ln x$ 单调递增, $y = \frac{1}{x} (x > 0)$ 单调递减, 所以 $f'(x)$ 单

调递增. 又 $f'(1) = -1 < 0, f'(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{\ln 4 - 1}{2} > 0$, 故存

在唯一 $x_0 \in (1, 2)$, 使得 $f'(x_0) = 0$ 4分

又当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增.

因此, $f(x)$ 存在唯一的极值点. 6分

(2) 由(1)知 $f(x_0) < f(1) = -2$, 又 $f(e^2) = e^2 - 3 > 0$, 所以

$f(x)=0$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内存在唯一根 $x=a$ 8 分

由 $a > x_0 > 1$ 得 $\frac{1}{a} < 1 < x_0$.

又 $f\left(\frac{1}{a}\right) = \left(\frac{1}{a} - 1\right) \ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a} - 1 = \frac{f(a)}{a} = 0$, 故 $\frac{1}{a}$ 是 $f(x) = 0$

在 $(0, x_0)$ 的唯一根. 11 分

综上所述, $f(x) = 0$ 有且仅有两个实根, 且两个实根互为倒数.

..... 12 分

22. 【命题点】极坐标方程

【解】(1) 因为 $M(\rho_0, \theta_0)$ 在 C 上, 当 $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ 时, $\rho_0 = 4 \sin \frac{\pi}{3} =$

$2\sqrt{3}$.

由已知得 $|OP| = |OA| \cos \frac{\pi}{3} = 2$.

设 $Q(\rho, \theta)$ 为 l 上除 P 的任意一点.

在 $\text{Rt} \triangle OPQ$ 中, $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = |OP| = 2$.

经检验, 点 $P\left(2, \frac{\pi}{3}\right)$ 在曲线 $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$ 上.

所以, l 的极坐标方程为 $\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$ 5 分

(2) 设 $P(\rho, \theta)$, 在 $\text{Rt} \triangle OAP$ 中, $|OP| = |OA| \cos \theta = 4 \cos \theta$,
即 $\rho = 4 \cos \theta$.

因为 P 在线段 OM 上, 且 $AP \perp OM$, 故 θ 的取值范围
是 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

所以, P 点轨迹的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta, \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

..... 10 分

关键点拨 (1) 取直线 l 上除 P 外任意一点 $Q(\rho, \theta)$, 则在 $\text{Rt} \triangle OPQ$ 中, $|OQ| \cos(\theta - \theta_0) = |OP|$, 即得直线 l 的极坐标方程 (注意验证点 P 在直线 l 上).

(2) 当 M 为 $\left(2\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, l 与 OM 垂直时交点 P 与点 M 重合, $\theta = \frac{\pi}{4}$; 当 M 为 $\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, l 与 OM 垂直时交点 P 与点 O 重合, $\theta = \frac{\pi}{2}$. 则 $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$.

23. 【命题点】绝对值不等式、含参不等式恒成立问题

【解】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = |x-1| + |x-2| (x-1)$.

当 $x < 1$ 时, $f(x) = -2(x-1)^2 < 0$; 当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq 0$.

所以, 不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, 1)$ 5 分

(2) 因为 $f(a) = 0$, 所以 $a \geq 1$.

当 $a \geq 1, x \in (-\infty, 1)$ 时, $f(x) = (a-x)x + (2-x)(x-a) = 2(a-x) \cdot (x-1) < 0$.

所以, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 10 分

▶ 关键点拨 (1) 当 $a=1$ 时, 分 $x \geq 1$ 和 $x < 1$ 两种情况去绝对值号, 再解不等式, 求并集.

(2) 由于 $f(a)=0$ 且 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f(x) < 0$, 故 $a \notin (-\infty, 1)$, 即 $a \geq 1$. 可结合 $a \geq 1, x \in (-\infty, 1)$ 将 $f(x)$ 去掉绝对值号, 解不等式得 $a-x > 0$, 即 $a > x, x \in (-\infty, 1)$ 时恒成立, 则 $a \geq 1$.