

1. A 【命题点】集合的交集运算

【解析】 $\because A = \{0, 2\}, B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \therefore A \cap B = \{0, 2\}$. 故选 A.

2. C 【命题点】复数的运算及复数的模

【解析】 $\because z = \frac{1-i}{1+i} + 2i = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} + 2i = \frac{-2i}{2} + 2i = i, \therefore |z| = 1$.

故选 C.

一题多解

$\because \frac{1-i}{1+i} = \frac{-i^2-i}{1+i} = \frac{-i(1+i)}{1+i} = -i, \therefore z = \frac{1-i}{1+i} + 2i = -i + 2i = i. \therefore |z| = 1$.

3. A 【命题点】以实际生活为背景的统计知识

【解析】设建设前经济收入为 $m(m > 0)$ 元, 则建设后经济收入为 $2m$ 元.

A 选项, $0.37 \times 2m - 0.60m = 0.14m > 0$, 种植收入增多;

B 选项, $\frac{0.05 \times 2m - 0.04m}{0.04m} = 1.5 > 1$, 其他收入增加了一倍以上;

C 选项, $\frac{0.30 \times 2m - 0.30m}{0.30m} = 1$, 养殖收入增加了一倍;

D 选项, 新农村建设后, 养殖收入与第三产业收入的总和占经济收入的比例为 $30\% + 28\% = 58\% > 50\%$.

故选 A.

4. C 【命题点】椭圆的标准方程及离心率

【解析】 $\because \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的一个焦点坐标为 $(2, 0), c^2 = a^2 - b^2$,

$\therefore 4 = a^2 - 4. \therefore a = 2\sqrt{2}. \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

5. B 【命题点】圆柱的轴截面及圆柱的表面积

【解析】由题意知, 圆柱的轴截面是一个面积为 8 的正方形, 则圆柱的高与底面直径均为 $2\sqrt{2}$.

设圆柱的底面半径为 r , 则 $2r = 2\sqrt{2}$, 得 $r = \sqrt{2}$.

所以圆柱的表面积 $S_{\text{圆柱}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi(\sqrt{2})^2 + 2\pi \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4\pi + 8\pi = 12\pi$. 故选 B.

6. D 【命题点】奇函数的定义及导数的几何意义

【解析】 $\because f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + ax$ 是奇函数,

$\therefore f(-x) = -f(x)$ 对 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

$\therefore (-x)^3 + (a-1)x^2 + a(-x) = -x^3 - (a-1)x^2 - ax,$

$\therefore a = 1, \therefore f(x) = x^3 + x,$

$\therefore f'(x) = 3x^2 + 1. \therefore f'(0) = 1.$

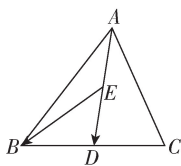
\therefore 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为 $y = x$. 故选 D.

方法速记 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程的方法: 第一步: 求 $f'(x)$; 第二步: 求 $f'(x_0)$; 第三步: 由 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ 得切线方程.

7. A 【命题点】平面向量的线性运算

【解析】 由 E 为 AD 的中点得, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

$$\therefore \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$



由 D 为 BC 的中点得, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

$$\therefore \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}. \text{ 故选 A.}$$

一题多解 $\because \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}), \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}), \therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$
 $\therefore \overrightarrow{EB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}.$

方法速记 在 $\triangle ABC$ 中, 若 D 是 BC 边的中点, 则 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$

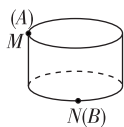
8. B 【命题点】同角三角函数基本关系式, 倍角公式

【解析】 $\because f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x + 2 = \cos^2 x + (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 = \frac{1+\cos 2x}{2} + \cos 2x + 2 = \frac{3}{2}\cos 2x + \frac{5}{2},$

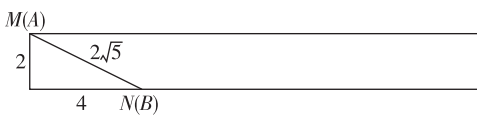
\therefore 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$, 最大值为 $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 4$. 故选 B.

9. B 【命题点】圆柱的三视图、直观图及最短路径

【解析】 由三视图还原成直观图可知, M, N 的位置如图(1)所示(提示: 根据正视图中点 A 的位置在圆柱上标出对应点 M 的位置, 再根据左(侧)视图中点 B 的位置, 在圆柱上标出对应点 N 的位置). 在图(2)所示的圆柱侧面展开图中, $|MN| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, 因此从 M 到 N 的路径中, 线段最短, 最短路径的长度为 $2\sqrt{5}$, 故选 B.



图(1)



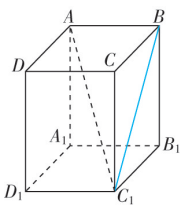
图(2)

10. C 【命题点】直线和平面所成角的作法

【解析】 如图, 连接 BC_1 .

$\because AB \perp$ 平面 BB_1C_1C ,

$\therefore \angle AC_1B$ 即为直线 AC_1 与平面 BB_1C_1C



所成的角.

$\therefore \angle AC_1B = 30^\circ$. 又 $AB = BC = 2$,

在 $\text{Rt}\triangle ABC_1$ 中, $\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC_1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore BC_1 = 2\sqrt{3}$.

$\therefore BC = 2, \therefore CC_1 = 2\sqrt{2}$.

\therefore 长方体的体积 $V = 2 \times 2 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. 故选 C.

方法速记 直线和平面所成角的作法是过直线上一点作平面的垂线, 则直线和直线的射影(直线和平面交点与垂足的连线)所成的角即为直线和平面所成的角.

11. B 【命题点】三角恒等变换及直线方程

【解析】 $\because \cos 2\alpha = \frac{2}{3}$,

$\therefore \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2}{3}$,

$\therefore \tan \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

由题意知直线 AB 的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$,

因此直线 AB 的方程为 $y = \frac{\sqrt{5}}{5}x$ 或 $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x$.

将 $A(1, a), B(2, b)$ 代入 $y = \frac{\sqrt{5}}{5}x$ 得 $a = \frac{\sqrt{5}}{5}, b = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore a - b = -\frac{\sqrt{5}}{5}$;

将 $A(1, a), B(2, b)$ 代入 $y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x$ 得 $a = -\frac{\sqrt{5}}{5}, b = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\therefore a - b = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

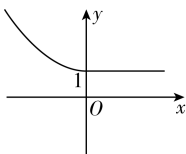
综上所述, $|a - b| = \frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 B.

方法速记 已知 $a \sin^2 \alpha \pm b \cos^2 \alpha$ ($a \neq b \neq 0$) 的关系式求 $\tan \alpha$ 时, 可利用 $\frac{a \sin^2 \alpha \pm b \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{a \tan^2 \alpha \pm b}{\tan^2 \alpha + 1}$ 求解.

12. D 【命题点】分段函数的图像及解不等式

【解析】作出函数 $f(x)$ 的图像如图所示,

要使 $f(x+1) < f(2x)$, 则 $\begin{cases} x+1 \leq 0, \\ 2x \leq 0, \text{ 或} \\ x+1 > 2x \end{cases}$



$\begin{cases} 2x < 0, \\ x+1 > 0, \end{cases}$ 即 $x \leq -1$ 或 $-1 < x < 0$. 因此 $x < 0$. 故选 D.

13. -7 【命题点】已知函数值求参数及指对互化

【解析】 $\because f(x) = \log_2(x^2 + a)$, 且 $f(3) = 1, \therefore \log_2(9 + a) = 1$,

$\therefore 9 + a = 2, \therefore a = -7$.

14.6 【命题点】线性规划

【解析】在平面直角坐标系中画出可行域,如图所示. 由

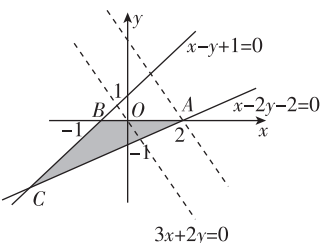
$$z=3x+2y \text{ 知, } y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2},$$

则 z 的几何意义为直线

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{z}{2} \text{ 在 } y \text{ 轴上截距}$$

的 2 倍. 平移直线 $y=-\frac{3}{2}x$ 知, 当直线过点 $A(2,0)$ 时,

$z=3x+2y$ 有最大值 6.



快解 不等式组表示的可行域为 $\triangle ABC$ 内部及边界, 其中 $A(2,0), B(-1,0), C(-4,-3)$. 分别代入 $z=3x+2y$ 得 z 在 $A(2,0)$ 处有最大值, 最大值为 6.

15. $2\sqrt{2}$ 【命题点】直线与圆的位置关系

【解析】圆 $x^2+y^2+2y-3=0$ 的标准方程为 $x^2+(y+1)^2=4$, 因此圆心为 $(0,-1)$, 半径 $r=2$.

则圆心 $(0,-1)$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离 $d=\frac{|1+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

则 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2}$.

16. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 【命题点】正余弦定理的应用及三角形面积公式

【解析】由正弦定理知 $b\sin C+c\sin B=4a\sin B\sin C$ 可化为 $\sin B\sin C+\sin B\sin C=4\sin A\sin B\sin C$.

$$\because \sin B\sin C \neq 0, \therefore \sin A = \frac{1}{2}.$$

$\because b^2+c^2-a^2=8, \therefore 2bccos A=8$, 则 A 为锐角,

$$\therefore \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 则 } bc = \frac{8}{\sqrt{3}},$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times \frac{8}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

17. 【命题点】等比数列的通项公式

【解】(1) 由条件可得 $a_{n+1} = \frac{2(n+1)}{n}a_n$.

将 $n=1$ 代入得, $a_2=4a_1$, 而 $a_1=1$, 所以 $a_2=4$.

将 $n=2$ 代入得, $a_3=3a_2$, 所以 $a_3=12$.

从而 $b_1=1, b_2=2, b_3=4$ 4 分

(2) $\{b_n\}$ 是等比数列.

由条件可得 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{2a_n}{n}$, 即 $b_{n+1}=2b_n$.

又 $b_1=1$, 所以 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列.

..... 8 分

(3) 由(2)可得 $\frac{a_n}{n} = 2^{n-1}$, 所以 $a_n = n \cdot 2^{n-1}$ 12 分

18. 【命题点】面面垂直的判定及三棱锥体积的求解

(1) 【证明】由已知可得, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB \perp AC$.

又 $BA \perp AD$, $AC \cap AD = A$, 所以 $AB \perp$ 平面 ACD 2 分

因为 $AB \subset$ 平面 ABC ,

所以平面 $ACD \perp$ 平面 ABC 4 分

(2) 【解】由已知可得, $DC = CM = AB = 3$, $DA = 3\sqrt{2}$.

又 $BP = DQ = \frac{2}{3}DA$, 所以 $BP = 2\sqrt{2}$ 6 分

作 $QE \perp AC$, 垂足为 E , 则 $QE \parallel \frac{1}{3}DC$ 7 分

因为 $\angle ACM = 90^\circ$, 所以 $\angle ACD = 90^\circ$, 则 $DC \perp AC$ 8 分

又由(1)知平面 $ACD \perp$ 平面 ABC .

因为平面 $ACD \cap$ 平面 $ABC = AC$, $DC \subset$ 平面 ACD ,

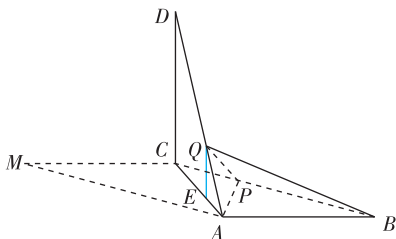
所以 $DC \perp$ 平面 ABC , 所以 $QE \perp$ 平面 ABC , $QE = 1$.

..... 10 分

因此, 三棱锥 $Q-ABP$ 的体积为

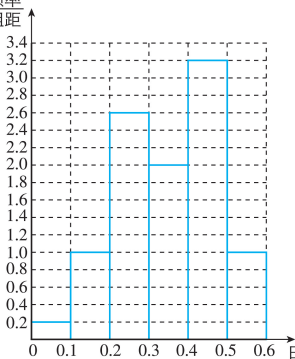
$$V_{Q-ABP} = \frac{1}{3}QE \cdot S_{\triangle ABP} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} \sin 45^\circ = 1.$$

..... 12 分



19. 【命题点】频率分布直方图及平均数的计算

【解】(1) 频率
组距



.....3 分

(2) 根据以上数据, 该家庭使用节水龙头后 50 天的日用水量小于 0.35 m^3 的频率为 $0.2 \times 0.1 + 1 \times 0.1 + 2.6 \times 0.1 + 2 \times 0.05 = 0.48$,

因此该家庭使用节水龙头后日用水量小于 0.35 m^3 的概率的估计值为 **0.48**. 6 分

(3) 该家庭未使用节水龙头 50 天的日用水量的平均数为

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{50} (0.05 \times 1 + 0.15 \times 3 + 0.25 \times 2 + 0.35 \times 4 + 0.45 \times 9 + 0.55 \times 26 + 0.65 \times 5) = 0.48. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

该家庭使用了节水龙头后 50 天的日用水量的平均数为

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{50} (0.05 \times 1 + 0.15 \times 5 + 0.25 \times 13 + 0.35 \times 10 + 0.45 \times 16 + 0.55 \times 5) = 0.35. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

因此, 估计使用节水龙头后, 一年可节省水 $(0.48 - 0.35) \times 365 = 47.45 (\text{m}^3)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. 【命题点】直线与抛物线的位置关系

(1) 【解】当 l 与 x 轴垂直时, l 的方程为 $x=2$, 可得 M 的坐标为 $(2, 2)$ 或 $(2, -2)$.

则由 $B(-2, 0)$ 易求得直线 BM 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 或 $y = -\frac{1}{2}x - 1$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 【证明】当 l 与 x 轴垂直时, AB 为 MN 的垂直平分线, 所以 $\angle ABM = \angle ABN$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

当 l 与 x 轴不垂直时, 设 l 的方程为 $y = k(x - 2) (k \neq 0)$, $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 > 0, x_2 > 0$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x - 2), \\ y^2 = 2x \end{cases} \text{ 得 } ky^2 - 2y - 4k = 0,$$

$$\text{可知 } y_1 + y_2 = \frac{2}{k}, y_1 y_2 = -4. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

则直线 BM, BN 的斜率之和为

$$k_{BM} + k_{BN} = \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2(y_1 + y_2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)}. \quad \textcircled{1}$$

将 $x_1 = \frac{y_1}{k} + 2, x_2 = \frac{y_2}{k} + 2$ 及 $y_1 + y_2, y_1 y_2$ 的表达式代入①式分

$$\text{子, 可得 } x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2(y_1 + y_2) = \frac{2y_1 y_2 + 4k(y_1 + y_2)}{k} = \frac{-8 + 8}{k} = 0.$$

$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

所以 $k_{BM} + k_{BN} = 0$, 可知直线 BM, BN 的倾斜角互补,

 思维点拨

所以 $\angle ABM = \angle ABN$.

综上, $\angle ABM = \angle ABN$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. 【命题点】利用导数研究函数的单调性及不等式恒成立的证明

$$(1) \text{【解】} f(x) \text{ 的定义域为 } (0, +\infty), f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}.$$

$$\text{由题设知, } f'(2) = 0, \text{ 所以 } a = \frac{1}{2e^2}.$$

经检验符合题意. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\text{从而 } f(x) = \frac{1}{2e^2} e^x - \ln x - 1, f'(x) = \frac{1}{2e^2} e^x - \frac{1}{x} = \frac{xe^x - 2e^2}{2e^2 x}.$$

..... 4分

易知当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 2$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$, 单调递增区间为 $(2, +\infty)$.

..... 6分

(2) 【证明】当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq \frac{e^x}{e} - \ln x - 1$ 7分

设 $g(x) = \frac{e^x}{e} - \ln x - 1$, 则 $g'(x) = \frac{e^x}{e} - \frac{1}{x}$ 8分

易知当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$.

所以 $x = 1$ 是 $g(x)$ 的最小值点. 10分

故当 $x > 0$ 时, $g(x) \geq g(1) = 0$.

因此, 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$ 12分

一题多解 (2) 由不等式 $e^x \geq ex$, 得 $\ln x \leq x - 1$ ($x = 1$ 时取等号), 则 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) = ae^x - \ln x - 1 \geq \frac{1}{e} \cdot e^x - \ln x - 1 \geq \frac{e^x}{e} - (x - 1) - 1$. 因为 $\frac{e^x}{e} \geq x$, 所以 $f(x) \geq x - (x - 1) - 1 = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$ 12分

22. 【命题点】圆的极坐标方程及直线与圆的位置关系

【解】(1) 由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 得 C_2 的直角坐标方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 4$ 3分

(2) 由(1)知 C_2 是圆心为 $A(-1, 0)$, 半径为 2 的圆. 4分

由题设知, C_1 是过点 $B(0, 2)$ 且关于 y 轴对称的两条射线, 记 y 轴右边的射线为 l_1 , y 轴左边的射线为 l_2 . 由于点 B 在圆 C_2 的外面, 故 C_1 与 C_2 有且仅有三个公共点等价于 l_1 与 C_2 只有一个公共点且 l_2 与 C_2 有两个公共点, 或 l_2 与 C_2 只有一个公共点且 l_1 与 C_2 有两个公共点. 6分

当 l_1 与 C_2 只有一个公共点时, A 到 l_1 所在直线的距离为 2,

所以 $\frac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$, 故 $k = -\frac{4}{3}$ 或 $k = 0$.

经检验, 当 $k = 0$ 时, l_1 与 C_2 没有公共点; 当 $k = -\frac{4}{3}$ 时, l_1 与

C_2 只有一个公共点, l_2 与 C_2 有两个公共点. 8分

当 l_2 与 C_2 只有一个公共点时, A 与 l_2 所在直线的距离为 2,

所以 $\frac{|k+2|}{\sqrt{k^2+1}} = 2$, 故 $k = 0$ 或 $k = \frac{4}{3}$.

经检验, 当 $k = 0$ 时, l_1 与 C_2 没有公共点; 当 $k = \frac{4}{3}$ 时, l_2 与

C_2 没有公共点.

综上, 所求 C_1 的方程为 $y = -\frac{4}{3}|x| + 2$ 10分

23. 【命题点】绝对值不等式的解法及不等式恒成立问题

【解】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = |x+1| - |x-1|$, 2分

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1, \\ 2x, & -1 < x < 1, \\ 2, & x \geq 1. \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

故不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 $\left\{x \mid x > \frac{1}{2}\right\}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 当 $x \in (0, 1)$ 时 $|x+1| - |ax-1| > x$ 成立等价于当 $x \in (0, 1)$ 时 $|ax-1| < 1$ 成立. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

若 $a \leq 0$, 则当 $x \in (0, 1)$ 时 $|ax-1| \geq 1$, 不符合; $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

若 $a > 0$, 则 $|ax-1| < 1$ 的解为 $0 < x < \frac{2}{a}$, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

所以 $\frac{2}{a} \geq 1$, 故 $0 < a \leq 2$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

综上, a 的取值范围为 $(0, 2]$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$