

1. B 【命题点】集合的并集运算

【解析】由题易得 $A \cup B = \{x | -1 < x \leq 2\}$. 故选 B.

2. D 【命题点】复数的基本运算

【解析】由题可得 $z = \frac{2}{1-i} = \frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 1+i$. 故选 D.

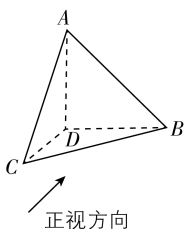
一题多解 令 $z = a+bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $(1-i)z = (1-i) \cdot (a+bi) = (a+b) + (b-a)i = 2$, 则 $\begin{cases} a+b=2, \\ b-a=0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a=1, \\ b=1, \end{cases}$ 所以 $z = 1+i$.

3. A 【命题点】函数的单调性、最值以及充分、必要条件的判断

【解析】若函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 的最大值为 $f(1)$; 而 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一定单调递增, 所以“ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增”是“ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的充分而不必要条件. 故选 A.

4. A 【命题点】三视图和四面体的表面积

【解析】由四面体的三视图还原几何体的直观图, 如图所示, 由题可得 $AD \perp$ 平面 BCD , $BD \perp CD$, $AD = BD = CD = 1$, 所以四面



体 $ABCD$ 的表面积为 $3 \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \times$

$(\sqrt{2})^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

5. B 【命题点】双曲线的方程及几何性质

【解析】因为双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = 2$, 所以 $c = 2a$. 因为 $\underline{c^2 =}$

$a^2 + b^2$ (提示: 此关系式注意与椭圆区分), 所以 $b^2 = 3a^2$. 又双

曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 则 $\frac{(\sqrt{2})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{3})^2}{3a^2} = 1$, 解得

$a^2 = 1$, 则 $b^2 = 3$, 所以双曲线的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$. 故选 B.

6. C 【命题点】等差数列的基本运算

【解析】由于 $\frac{a_k}{b_k} (1 \leq k \leq 5)$ 是常数, 所以 $\frac{a_5}{b_5} = \frac{a_1}{b_1}$, 即 $\frac{96}{b_5} = \frac{288}{192}$,

所以 $b_5 = 64$. 因为 $\{b_n\}$ 是等差数列, 所以 $b_3 = \frac{b_1 + b_5}{2} = 128$. 故

选 C.

一题多解 由题知 $2a_3 = a_1 + a_5$, 所以 $a_3 = 192$,

又因为 $\frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1}{b_1}$, 所以 $b_3 = 128$.

7. D 【命题点】函数的奇偶性、最值

【解析】由题意,得函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} (提示:判断奇偶性先判断函数的定义域是否关于原点对称),因为 $f(-x) = \cos(-x) - \cos(-2x) = \cos x - \cos 2x = f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数.又 $f(x) = \cos x - (2\cos^2 x - 1) = -2\cos^2 x + \cos x + 1 = -2\left(\cos x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$,所以当 $\cos x = \frac{1}{4}$ 时,函数 $f(x)$ 取得最大值,且最大值为 $\frac{9}{8}$. 故选 D.

8. B 【命题点】立体几何在实际生活中的应用

【解析】由题意可知,“积水”部分圆锥的底面半径为 50 mm,所以“积水”的体积为 $\frac{1}{3} \times (\pi \times 50^2) \times 150 = 125\,000\pi$ (mm³),则这 24 h 内降雨量在平面上的积水厚度为 $\frac{125\,000\pi}{\pi \times 100^2} = 12.5$ (mm), $12.5 \in [10, 25)$,因此这 24 h 降雨的等级为“中雨”. 故选 B.

9. C 【命题点】直线与圆的位置关系

【解析】由题意可知,直线 $l: y = kx + m$ 恒过定点 $A(0, m)$,由于 l 截圆的弦长最小值为 2,即当直线 l 与直线 OA 垂直时(O 为坐标原点),弦长取得最小值(提示:要使弦长最小,则圆心到直线的距离最大),于是 $2^2 = \left(\frac{1}{2} \times 2\right)^2 + |OA|^2 = 1 + m^2$,解得 $m = \pm\sqrt{3}$. 故选 C.

10. C 【命题点】数列的单调性与最值

【解析】要求 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 100$ 的 n 的最大值,那么 $a_1 = 3$,且 $\{a_k\} (k=1, 2, \cdots, n-1, n \in \mathbf{N}^*)$ 是公差为 1 的等差数列(提示:递增数列 $\{a_n\}$ 各项均为整数),通项 $a_k = k + 2$,则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = \frac{(n-1)(n+4)}{2}$,令 $\frac{(n-1)(n+4)}{2} \leq 100$,得 $n \leq 12$,当 $n=12$ 时, $a_{n-1} = 13, a_n = 12$,不满足题意. 当 $n=11$ 时, $a_{n-1} = 12, a_n = 25$,满足题意. 综上, n 的最大值为 11. 故选 C.

11. -4 【命题点】利用二项展开式的通项求特定项

【解析】二项式 $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_4^r (x^3)^{4-r} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^r = C_4^r (-1)^r x^{12-4r}$,令 $12-4r=0$,则 $r=3$,所以 $T_4 = C_4^3 (-1)^3 = -4$,所以二项式 $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^4$ 的展开式中的常数项为-4.

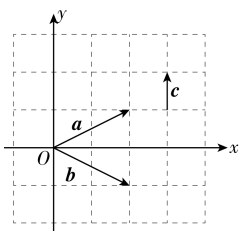
一题多解 $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^4$ 可以看成 4 个因式 $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)$ 的乘积,则在 1 个因式中选出 x^3 , 3 个因式中选出 $-\frac{1}{x}$,即可得到常数项,即 $C_4^1 x^3 \left(-\frac{1}{x}\right)^3 = -4$.

12.5 4√5 【命题点】抛物线的定义及其几何性质

【解析】抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 $F(1, 0)$, 设 $M(x_M, y_M)$, 由抛物线的定义可知 $x_M + 1 = 6$, 所以 $x_M = 5$, 所以 $|y_M| = 2\sqrt{5}$. 因为 $MN \perp x$ 轴, 所以 $N(5, 0)$, 所以 $S_{\triangle MNF} = \frac{1}{2} |FN| \cdot |y_M| = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$.

13.0 3 【命题点】平面向量的数量积的坐标运算

【解析】建立如图所示的平面直角坐标系, 易知 $a = (2, 1)$, $b = (2, -1)$, $c = (0, 1)$, 则 $a+b = (4, 0)$, 所以 $(a+b) \cdot c = 4 \times 0 + 0 \times 1 = 0$; $a \cdot b = 2 \times 2 + 1 \times (-1) = 3$.



14. $\frac{5\pi}{12}$ (答案不唯一) 【命题点】已知三角函数值相等求角

【解析】由题意知 $\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \theta, \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \theta, \end{cases}$ 即

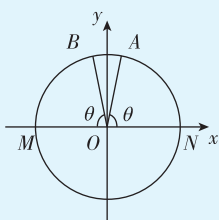
$$\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\pi - \theta), \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = \sin(\pi - \theta), \end{cases} \quad \text{所以 } \theta + \frac{\pi}{6} = \pi - \theta + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得}$$

$$\theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ (写出其中之一即可)}.$$

快解

因为 $A(\cos \theta, \sin \theta)$, $B\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

均在单位圆上, 设单位圆与 x 轴交于 M, N 两点, A 在第一象限, B 在第二象限, 如图, 所以 $\angle AON = \theta$, $\angle AOB = \frac{\pi}{6}$.



因为 A, B 关于 y 轴对称, 则

$\angle BOM = \theta$, 所以 $2\theta + \frac{\pi}{6} = \pi$, 解得 $\theta = \frac{5\pi}{12}$, 所以满足条件的一个 $\theta = \frac{5\pi}{12}$.

15. ①②④

思路导引 $f(x) = 0 \rightarrow |\lg x| = kx + 2 \rightarrow$

$k=0$ 时 $\rightarrow |\lg x| = 2 \rightarrow$ 方程 $|\lg x| = kx + 2$ 有两不等实数根 $\rightarrow f(x)$ 有两个零点.

$k < 0$ 时 $\rightarrow \begin{cases} y = kx + 2 \text{ 与 } y = |\lg x| \text{ 的图像相切时, 两函数图像有一个交点} \rightarrow f(x) \text{ 有一个零点;} \\ \text{两函数图像最多有两个交点.} \end{cases}$

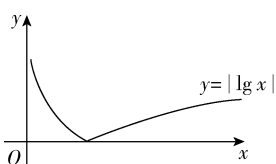
$k > 0$ 时 $\rightarrow y = kx + 2$ 与 $y = |\lg x|$ 的图像有可能有一个、两个或三个交点 $\rightarrow \exists k > 0, f(x)$ 有三个零点.

【命题点】数形结合求函数的零点个数

【解析】令 $f(x) = 0$, 得 $|\lg x| = kx + 2$. 对 ①: 当 $k = 0$ 时,

$|\lg x| = 2$, 即 $\lg x = 2$ 或 $\lg x = -2$, 则 $x = 100$ 或 $x = \frac{1}{100}$, 所以

方程 $|\lg x| = kx + 2$ 有两个不等



实数根, 即 $f(x)$ 有 2 个零点, 故 ① 正确. 对 ② 和 ③: $f(x)$ 的零点个数即为函数 $y = |\lg x|$ 与函数 $y = kx + 2$ 图像的交点个数, 画出函数 $y = |\lg x|$ 的图像, 如图, $y = kx + 2$ 的图像过定点 $(0, 2)$. 当 $k < 0$ 时, 由图像可以看出, 当 $y = kx + 2$ 与函数 $y = |\lg x|$ 的图像相切时, 两函数图像有一个交点, 即 $\exists k < 0$, 使得 $f(x)$ 有 1 个零点, 而两函数图像最多有两个交点, 所以当 $k < 0$ 时, $f(x)$ 不可能有 3 个零点, 故 ② 正确, ③ 错误; 当 $k > 0$ 时, 由图像可以看出, $y = kx + 2$ 与函数 $y = |\lg x|$ 的图像可能有一个、两个或三个交点, 所以 $\exists k > 0$, 使得 $f(x)$ 有 3 个零点, 故 ④ 正确. 正确的序号为 ①②④.

关键点拨 $f(x)$ 的零点个数即为方程 $|\lg x| = kx + 2$ 的根的个数, 也为函数 $y = |\lg x|$ 与函数 $y = kx + 2$ 图像的交点个数.

16. 【命题点】正弦定理、余弦定理在解三角形中的应用

【解】(1) 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 及 $c = 2b \cos B$, 3 分
得 $\sin C = 2 \sin B \cos B$.

因为 $\angle C = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $0 < \angle B < \frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle B = \frac{\pi}{6}$ 5 分

(2) (由 (1) 知 $c = \sqrt{3}b$ 与 $c = \sqrt{2}b$ 矛盾, 所以不能选择条件 ①)

选条件 ②: $\triangle ABC$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{3}$.

由 (1) 知, $\angle A = \pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

所以 $\triangle ABC$ 是顶角为 $\frac{2\pi}{3}$, 底角为 $\frac{\pi}{6}$ 的等腰三角形.

所以 $a = b, c = \sqrt{3}a$.

由题设, $(2 + \sqrt{3})a = 4 + 2\sqrt{3}$, 所以 $a = 2$ 9 分

设 BC 边上中线的长为 d .

由余弦定理得 $d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times a \cos C$,

所以 $d^2 = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$,

故 $d = \sqrt{7}$ 13 分

选条件 ③: $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

由 (1) 知, $\angle A = \pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$,

$$\text{由题设, } |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{5 + \frac{1}{(1-\lambda)^2}}} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{所以 } \lambda = \frac{1}{2}. \text{ 所以 } \frac{A_1 M}{A_1 B_1} = \frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

18. 【命题点】离散型随机变量的分布列和期望

【解】(1)(i)依题意,如果感染新冠病毒的2人在同一组,则该组需要检测11次,其他9个组都只需要检测1次,所以检测总次数为20. 3分

(ii)由(i)知,当感染新冠病毒的2人分在同一组时,检测的总次数是20.

当感染新冠病毒的2人分在不同组时,可以求得检测的总次数是30.

所以随机变量 X 的可能取值为20,30. 5分

因为感染新冠病毒的2人分在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$,

所以感染新冠病毒的2人分在不同组的概率为 $1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$.

所以随机变量 X 的分布列为:

X	20	30
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

故随机变量 X 的数学期望 $EX = 20 \times \frac{1}{11} + 30 \times \frac{10}{11} = \frac{320}{11}$.

..... 9分

(2) $EY > EX$ 10分

理由如下:

若采用“5合1”混采核酸检测,则感染新冠病毒的2人分在

同一组的概率为 $\frac{C_{20}^1 C_{98}^3}{C_{100}^5} = \frac{4}{99}$,此时需要检测25次;感染新冠病

毒的2人分在不同组的概率为 $1 - \frac{4}{99} = \frac{95}{99}$,此时需要检测30

次. 则 Y 的分布列为:

Y	25	30
P	$\frac{4}{99}$	$\frac{95}{99}$

所以 $EY = 25 \times \frac{4}{99} + 30 \times \frac{95}{99} = \frac{2950}{99} > EX$ 13分

19. 【命题点】利用导数的几何意义求切线方程、利用导数求函数的单调区间和最值

【解】(1)当 $a=0$ 时, $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$, $f'(x) = -\frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2}$.

所以 $f(1) = 1$, $f'(1) = -4$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y-1 =$

$-4(x-1)$, 即 $y = -4x + 5$ 5 分

(2) 由 $f(x) = \frac{3-2x}{x^2+a}$ 得 $f'(x) = \frac{-2(x^2+a)-2x(3-2x)}{(x^2+a)^2} = \frac{2(x^2-3x-a)}{(x^2+a)^2}$.

由题意知 $f'(-1) = 0$, 所以 $(-1)^2 - 3 \times (-1) - a = 0$, 故 $a = 4$.

..... 7 分

当 $a = 4$ 时, $f(x) = \frac{3-2x}{x^2+4}$, $f'(x) = \frac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$ 9 分

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	1	\searrow	$-\frac{1}{4}$	\nearrow

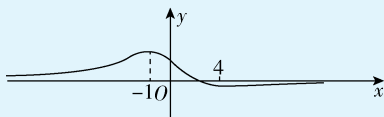
因此, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(4, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, 4)$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上的最大值是 $f(-1) = 1$.

又因为当 $x \in (4, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$, 所以 $f(-1) = 1$ 是 $f(x)$ 的最大值.

同理可知, $f(4) = -\frac{1}{4}$ 是 $f(x)$ 的最小值. 15 分

关键点拨 第(2)问由导数得到 $f(x)$ 的单调区间后, 还要注意当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 画出函数 $f(x)$ 的大致图像如图所示.



20. 思路导引

(1) 椭圆过点 $A \rightarrow$ 短半轴长 b 的值
长轴两端点与短轴两端点围成的四边形面积 $\rightarrow a$ 的值
 \rightarrow 椭圆方程;

(2) 由题意得出直线 BC 的方程 $\xrightarrow{\text{与椭圆方程联立}}$ 关于 x 的一元二次方程 $\xrightarrow{\text{判别式 } \Delta > 0}$ k 的取值范围 \rightarrow 设出点 B, C 的坐标 \rightarrow 直线 AB 方程 \rightarrow 点 M 坐标 $\xrightarrow{\text{同理}}$ 点 N 坐标 \rightarrow
 $|PM| + |PN| \xrightarrow{|PM| + |PN| \leq 15}$ k 的取值范围

【命题点】 椭圆的标准方程、直线与椭圆的位置关系

【解】 (1) 由题设, $b = 2$, $\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 4\sqrt{5}$, 所以 $a = \sqrt{5}$.

..... 3 分

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 5 分

(2) 直线 BC 的方程为 $y = kx - 3$.

由 $\begin{cases} y = kx - 3, \\ 4x^2 + 5y^2 = 20 \end{cases}$ 得 $(5k^2 + 4)x^2 - 30kx + 25 = 0$.

由 $\Delta = (-30k)^2 - 4 \times (5k^2 + 4) \times 25 = 400(k^2 - 1) > 0$, 得 $|k| > 1$.

设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{30k}{5k^2 + 4}, x_1 x_2 = \frac{25}{5k^2 + 4}$.

..... 9 分

直线 AB 的方程为 $y = \frac{y_1 + 2}{x_1} x - 2$.

令 $y = -3$, 得点 M 的横坐标为 $x_M = -\frac{x_1}{y_1 + 2} = -\frac{x_1}{kx_1 - 1}$.

同理可得点 N 的横坐标为 $x_N = -\frac{x_2}{y_2 + 2} = -\frac{x_2}{kx_2 - 1}$.

由题设, $y_1 + 2 > 0, y_2 + 2 > 0, x_1 x_2 > 0$,

所以 $x_M x_N = \frac{x_1 x_2}{(y_1 + 2)(y_2 + 2)} > 0$.

所以 x_M, x_N 同号. 11 分

所以 $|PM| + |PN| = |x_M + x_N|$

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{x_1}{kx_1 - 1} + \frac{x_2}{kx_2 - 1} \right| \\ &= \left| \frac{2kx_1 x_2 - (x_1 + x_2)}{k^2 x_1 x_2 - k(x_1 + x_2) + 1} \right| \\ &= \left| \frac{2k \times \frac{25}{5k^2 + 4} - \frac{30k}{5k^2 + 4}}{k^2 \times \frac{25}{5k^2 + 4} - k \times \frac{30k}{5k^2 + 4} + 1} \right| \\ &= 5|k|. \end{aligned}$$

由题设, $5|k| \leq 15$. 所以 $1 < |k| \leq 3$ 14 分

所以 k 的取值范围是 $[-3, -1) \cup (1, 3]$ 15 分

21. 【命题点】数列新定义问题

【解】(1) 数列 $\{a_n\}$ 不可能为 R_2 数列. 理由如下:

因为 $p = 2, a_1 = 2, a_2 = -2$, 所以 $a_1 + a_2 + p = 2, a_1 + a_2 + p + 1 = 3$.

因为 $a_3 = -2$, 所以 $a_3 \notin \{a_1 + a_2 + p, a_1 + a_2 + p + 1\}$.

所以数列 $\{a_n\}$ 不满足性质③. 3 分

(2) 根据 R_0 数列的定义, 可知 $\{a_n\}$ 满足:

$a_1 \geq 0, a_2 = 0; a_{4n-1} < a_{4n}; a_{m+n} = a_m + a_n$ 或 $a_{m+n} = a_m + a_n + 1$.

由 $a_{n+1} = a_n + a_1$ 或 $a_{n+1} = a_n + a_1 + 1$, 以及 $a_1 \geq 0$, 可知 $a_{n+1} \geq a_n$.

所以 $a_1 = 0$.

由 $a_3 = a_1 + a_2 = 0$ 或 $a_3 = a_1 + a_2 + 1 = 1; a_4 = a_2 + a_2 = 0$ 或 $a_4 = a_2 + a_2 + 1 = 1$,

以及 $a_3 < a_4$, 可知 $a_3 = 0, a_4 = 1$.

由 $a_5 = a_2 + a_3 = 0$ 或 $a_5 = a_2 + a_3 + 1 = 1$,

以及 $a_5 \geq a_4$, 可知 $a_5 = 1$ 7 分

(3) 假设数列 $\{a_n\}$ 是满足“ $S_n \geq S_{10}$ 恒成立”的 R_p 数列.

因为 $a_{n+1} = a_n + a_1 + p$ 或 $a_{n+1} = a_n + a_1 + p + 1$, 且 $a_1 + p \geq 0$,

所以 $a_{n+1} \geq a_n$.

由 $-p \leq a_1 \leq a_2 = -p$, 可知 $a_1 = -p$.

从而 $a_{4n} = a_{4n-1} + a_1 + p = a_{4n-1}$ 或 $a_{4n} = a_{4n-1} + a_1 + p + 1 = a_{4n-1} + 1$.

又因为 $a_{4n-1} < a_{4n}$, 所以 $a_{4n} = a_{4n-1} + 1$.

因为 $a_4 = a_3 + 1$, 且 $a_3 \geq a_2 = -p$, 所以 $a_4 \geq -p + 1$.

又因为 $a_4 \leq a_2 + a_2 + p + 1 = -p + 1$, 所以 $a_4 = -p + 1, a_3 = -p$.

因为 $a_{12} \leq a_6 + a_6 + p + 1$, 且 $a_6 \leq a_3 + a_3 + p + 1 = -p + 1$,

所以 $a_{12} \leq -p + 3$.

因为 $a_{11} = a_{12} - 1$, 所以 $a_{11} \leq -p + 2$.

由 $S_{11} \geq S_{10}$ 可知 $a_{11} \geq 0$, 所以 $p \leq 2$.

由 $a_{10} \geq a_8 = a_7 + 1$ 及 $a_7 \geq a_4 = -p + 1$, 可知 $a_{10} \geq -p + 2$.

由 $S_9 \geq S_{10}$ 可知 $a_{10} \leq 0$, 所以 $p \geq 2$.

综上所述, 若数列 $\{a_n\}$ 是满足“ $S_n \geq S_{10}$ 恒成立”的 R_p 数列, 则 $p = 2$ 13 分

当 $p = 2$ 时, 考虑数列 $\{a_n\}$:

$$a_n = \begin{cases} -2+k, n \in \{4k+1, 4k+2, 4k+3\}, \\ -1+k, n = 4k+4 \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}).$$

下面验证数列 $\{a_n\}$ 满足性质①②③.

由 $a_1 = -2, a_2 = -2$ 可知 $a_1 + p \geq 0, a_2 + p = 0$.

因为 $a_{4n-1} = n-3, a_{4n} = n-2$, 所以 $a_{4n-1} < a_{4n}$.

对于任意正整数 m, n , 存在 $k_1, k_2 \in \mathbf{N}, r_1, r_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$, 使得 $m = 4k_1 + r_1, n = 4k_2 + r_2$.

所以 $a_m = -2 + k_1, a_n = -2 + k_2$.

所以 $a_m + a_n + p = -2 + k_1 + k_2, a_m + a_n + p + 1 = -1 + k_1 + k_2$.

又 $m + n = 4(k_1 + k_2) + r_1 + r_2$,

所以当 $0 \leq r_1 + r_2 < 4$ 时, $a_{m+n} = -2 + k_1 + k_2$;

当 $4 \leq r_1 + r_2 \leq 6$ 时, $a_{m+n} = -1 + k_1 + k_2$.

所以 $a_{m+n} \in \{a_m + a_n + p, a_m + a_n + p + 1\}$.

由通项公式可知, 当 $n \leq 9$ 时, $a_n \leq a_{10} = 0$;

当 $n \geq 11$ 时, $a_n \geq a_{10} = 0$.

所以 $S_n \geq S_{10}$ 恒成立.

综上, 存在 R_p 数列 $\{a_n\}$, 使得 $S_n \geq S_{10}$ 恒成立, 这时 $p = 2$.

..... 15 分