

1. B 【命题点】集合的交集运算

【解析】因为 $M = \{x | -1 < x < 3\}$, $N = \{x | -2 < x < 1\}$, 所以 $M \cap N = \{x | -1 < x < 1\} = (-1, 1)$, 故选 B.

2. A 【命题点】三角函数值在各象限的符号

【解析】由 $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} > 0$, 可得 $\sin \alpha, \cos \alpha$ 同正或同负, 即可排除 B 和 C. 又由 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, 可知 $\sin 2\alpha > 0$. 故选 A.

3. B 【命题点】复数的运算及模

【解析】根据复数运算法则可得

$$z = \frac{1}{1+i} + i = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} + i = \frac{1-i}{2} + i = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i,$$

由模的定义可得 $|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

4. D 【命题点】双曲线的标准方程、离心率

【解析】由离心率 $e = \frac{c}{a}$ 可得 $e^2 = \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{a^2+3}{a^2} = 2^2$, 解得 $a = 1$. 故选 D.

5. C 【命题点】函数的奇偶性

【解析】(定义法) 由题意可知, $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$. 选项 A 中, 令 $h(x) = f(x)g(x)$, 则 $h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$, 所以函数 $f(x)g(x)$ 是奇函数; 选项 B 中, 令 $h(x) = |f(x)|g(x)$, 则 $h(-x) = |f(-x)|g(-x) = |-f(x)|g(x) = |f(x)|g(x) = h(x)$, 所以 $|f(x)|g(x)$ 是偶函数; 选项 C 中, 令 $h(x) = f(x)|g(x)|$, 则 $h(-x) = f(-x) \cdot |g(-x)| = -f(x)|g(x)| = -h(x)$, 所以 $f(x)|g(x)|$ 是奇函数; 选项 D 中, 令 $h(x) = |f(x)g(x)|$, 则 $h(-x) = |f(-x)g(-x)| = |-f(x)g(x)| = |f(x)g(x)| = h(x)$, 所以 $|f(x)g(x)|$ 是偶函数. 故选 C.

快解 (性质法) 由函数 $f(x), g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $f(x)$ 是奇函数, $g(x)$ 是偶函数, 可得 $|f(x)|$ 和 $|g(x)|$ 均为偶函数, 根据一奇一偶两函数相乘为奇函数和两个偶函数相乘为偶函数的规律可知选 C.

方法速记 在两个函数的公共定义域上, 奇+奇=奇, 奇×奇=偶, 偶+偶=偶, 偶×偶=偶, 奇×偶=奇, |奇|=偶, |偶|=偶.

6. A 【命题点】平面向量的线性运算

【解析】在 $\triangle BEF$ 中, $\vec{EB} = \vec{EF} + \vec{FB} = \vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{AB}$, 同理 $\vec{FC} = \vec{FE} + \frac{1}{2}\vec{AC}$, 则 $\vec{EB} + \vec{FC} = \left(\vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right) + \left(\vec{FE} + \frac{1}{2}\vec{AC}\right) = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \vec{AD}$. 故选 A.

7. A 【命题点】三角函数的周期性

【解析】①中函数是一个偶函数, 其周期与 $y = \cos 2x$ 的周期

相同, $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$; ②中函数 $y = |\cos x|$ 的周期是函数 $y = \cos x$

周期的一半, 即 $T = \pi$; ③ $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$; ④ $T = \frac{\pi}{2}$. 故选 A.

方法速记 三角函数的周期: 对于函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$

或 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 可直接利用公式 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 求得; 对于 $y =$

$A\tan(\omega x + \varphi)$ 可直接利用公式 $T = \frac{\pi}{|\omega|}$ 求得. 此外, 函数 $y =$

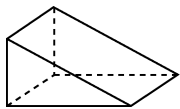
$|\sin x|, y = |\cos x|$ 的周期分别是函数 $y = \sin x, y = \cos x$ 周期的一半, 函数 $y = |\tan x|$ 的周期与 $y = \tan x$ 的周期一样, 函数

$y = \cos |\omega x|$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|}$. 确定含有绝对值的三角函数的

周期时, 可以结合图像进行判断.

8. B 【命题点】几何体的三视图

【解析】 根据画三视图的法则: 长对正, 高平齐, 宽相等, 可得几何体的直观图如图所示. 该几何体是一个倒放的三棱柱. 故选 B.



9. D 【命题点】程序框图

【解析】 根据题意, 当 $n = 1$ 时, $1 \leq 3$ 成立, 进入循环体, 则

$M = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, a = 2, b = \frac{3}{2}, n = 2$; 当 $n = 2$ 时, $2 \leq 3$ 成立, 继续

执行循环体, 则 $M = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}, a = \frac{3}{2}, b = \frac{8}{3}, n = 3$; 当 $n = 3$

时, $3 \leq 3$ 成立, 继续执行循环体, 则 $M = \frac{3}{2} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}, a = \frac{8}{3},$

$b = \frac{15}{8}, n = 4$; $4 \leq 3$ 不成立, 则退出循环体, 输出 $M = \frac{15}{8}$. 故

选 D.

10. A 【命题点】抛物线的定义

【解析】 抛物线的准线方程为 $x = -\frac{1}{4}$, 则有 $|AF| = x_0 + \frac{1}{4}$, 即有

$x_0 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}x_0$, 可解得 $x_0 = 1$. 故选 A.

11. B 【命题点】线性规则

【解析】 根据题中约束条件画出可行域的示意图如图所示, 两直线交点为

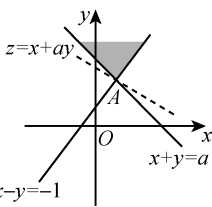
$A\left(\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}\right)$. 当 $a > 0$ 时, 由图可知, 当

过点 A 时直线 $y = -\frac{1}{a}x + \frac{z}{a}$ 在 y 轴上的截距最小, z 有最小值, $z_{\min} = \frac{a-1}{2} + a \times \frac{a+1}{2} = \frac{a^2+2a-1}{2}$, 则

$\frac{a^2+2a-1}{2} = 7$, 解得 $a = 3$ ($a = -5$ 舍去);

当 $a < 0$ 时, 要使 z 最小, 则直线 $y = -\frac{1}{a}x + \frac{z}{a}$ 在 y 轴上的截距

最大, 满足条件的最优解不存在, z 无最小值;



当 $a=0$ 时, $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $z=x+ay$ 的最小值不存在, 不满足题意. 故选 B.

12. C 【命题点】已知零点个数求参数的取值范围

【解析】根据题中函数特征, 当 $a=0$ 时, 函数 $f(x)=-3x^2+1$ 显然有两个零点且一正一负; 当 $a>0$ 时, 求导可得 $f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$, 利用导数的正负与函数单调性的关系可得 $x \in (-\infty, 0)$ 和 $x \in \left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$ 时函数单调递增, $x \in \left(0, \frac{2}{a}\right)$ 时函数单调递减, 显然存在负零点; 当 $a<0$ 时, 求导可得 $f'(x)=3ax^2-6x=3x(ax-2)$, 利用导数的正负与函数单调性的关系可得 $x \in \left(-\infty, \frac{2}{a}\right)$ 和 $x \in (0, +\infty)$ 时函数单调递减, $x \in \left(\frac{2}{a}, 0\right)$ 时函数单调递增, 要使得函数有唯一的零点且为正, 则满足 $f\left(\frac{2}{a}\right)>0$, 即得 $a \times \left(\frac{2}{a}\right)^3 - 3 \times \left(\frac{2}{a}\right)^2 + 1 > 0$, 可解得 $a^2 > 4$, 则 $a > 2$ (舍去) 或 $a < -2$. 故选 C.

13. $\frac{2}{3}$ 【命题点】古典概型

【解析】根据题意, 显然这是一个古典概型概率问题, 其基本事件有(数 1, 数 2, 语), (数 1, 语, 数 2), (数 2, 数 1, 语), (数 2, 语, 数 1), (语, 数 2, 数 1), (语, 数 1, 数 2), 共 6 种, 其中 2 本数学书相邻的有 4 种, 则所求概率 $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

14. A 【命题点】对实际问题的逻辑推理

【解析】由丙说可知三人中每个人都至少去过一个城市. 乙说: 我没去过 C 城市, 则乙可能去过 A 城市或 B 城市. 但甲说: 我去过的城市比乙多, 但没去过 B 城市, 则乙只能是去过 A, B 中的任一个. 再由丙说: 我们三人去过同一城市, 则由此可判断乙去过的城市为 A.

快解 根据题意可将三人可能去过哪些城市的情况列表如下:

	A 城市	B 城市	C 城市
甲	去过	没去	去过
乙	去过	没去	没去
丙	去过	可能	可能

可以得出乙去过的城市为 A.

15. $(-\infty, 8]$ 【命题点】分段函数解不等式

【解析】由于题中所给的是一个分段函数, 则当 $x < 1$ 时, 由 $e^{x-1} \leq 2$, 解得 $x \leq 1 + \ln 2$, 故 $x < 1$; 当 $x \geq 1$ 时, 由 $x^{\frac{1}{3}} \leq 2$, 解得 $x \leq 2^3 = 8$, 故 $1 \leq x \leq 8$. 综合上述两种情况可得 $x \in (-\infty, 8]$.

16. 150 【命题点】利用正弦定理解决实际问题

【解析】根据题意, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\angle CAB = 45^\circ$, $\angle ABC =$

90° , $BC = 100$ m, 易得 $AC = 100\sqrt{2}$ m. 在 $\triangle AMC$ 中, 已知 $\angle MAC = 75^\circ$, $\angle MCA = 60^\circ$, $AC = 100\sqrt{2}$ m, 易得 $\angle AMC = 45^\circ$, 由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin \angle AMC} = \frac{AM}{\sin \angle ACM}$, 即 $AM = \frac{100\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}$ (m). 在 $\triangle AMN$ 中, 已知 $\angle MAN = 60^\circ$, $\angle MNA = 90^\circ$, $AM = 100\sqrt{3}$ m, 易得 $MN = 150$ m.

17. 【命题点】等差数列的通项公式、错位相减法求和

【解】(1) 方程 $x^2 - 5x + 6 = 0$ 的两根为 $x_1 = 2, x_2 = 3$, 由题意得 $a_2 = 2, a_4 = 3$ 2 分

设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_4 - a_2 = 2d$, 故 $d = \frac{1}{2}$, 从而 $a_1 = \frac{3}{2}$ 4 分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{2}n + 1$ 6 分

(2) 设 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和为 S_n , 由 (1) 知 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{n+2}{2^{n+1}}$, 则

$$S_n = \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \cdots + \frac{n+1}{2^n} + \frac{n+2}{2^{n+1}}, \quad \text{..... 8 分}$$

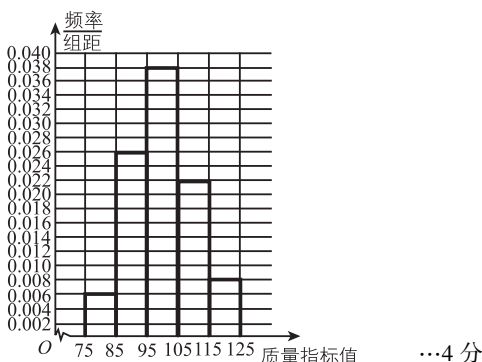
$$\frac{1}{2}S_n = \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \cdots + \frac{n+1}{2^{n+1}} + \frac{n+2}{2^{n+2}}.$$

$$\text{两式相减得 } \frac{1}{2}S_n = \frac{3}{2^2} + \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right) - \frac{n+2}{2^{n+2}} = \frac{3}{4} +$$

$$\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) - \frac{n+2}{2^{n+2}}, \text{ 所以 } S_n = 2 - \frac{n+4}{2^{n+1}}. \quad \text{..... 12 分}$$

18. 【命题点】频率分布直方图

【解】(1) 频率分布直方图如图.



(2) 质量指标值的样本平均数为

$$\bar{x} = 80 \times 0.06 + 90 \times 0.26 + 100 \times 0.38 + 110 \times 0.22 + 120 \times 0.08 = 100.$$

质量指标值的样本方差为

$$s^2 = (-20)^2 \times 0.06 + (-10)^2 \times 0.26 + 0 \times 0.38 + 10^2 \times 0.22 + 20^2 \times 0.08 = 104.$$

所以这种产品质量指标值的平均数的估计值为 **100**, 方差的估计值为 **104**. 8 分

(3) 质量指标值不低于 95 的产品所占比例的估计值为 $0.38 + 0.22 + 0.08 = 0.68$, 由于该估计值小于 0.8, 故 **不能** 认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品 80%”的规定. 12 分

方法速记 频率分布直方图的有关结论:(1)极差=最大值-最小值;(2)组距= $\frac{\text{极差}}{\text{组数}}$;(3)频率= $\frac{\text{频数}}{\text{样本容量}}$;(4)小长方形的面积=组距 $\times \frac{\text{频率}}{\text{组距}}$ =频率;(5)各个小长方形的面积等于相应各组的频率,所以所有长方形的面积之和等于1.

19. 【命题点】线面垂直的性质与判定

(1)【证明】连接 BC_1 , 则 O 为 B_1C 与 BC_1 的交点,

因为侧面 BB_1C_1C 为菱形,

所以 $B_1C \perp BC_1$.

又因为 $AO \perp$ 平面 BB_1C_1C ,

所以 $B_1C \perp AO, B_1C \perp$ 平面 ABO .

因为 $AB \subset$ 平面 ABO , 所以 $B_1C \perp AB$ 3 分

(2)【解】作 $OD \perp BC$, 垂足为 D , 连接 AD , 作 $OH \perp AD$, 垂足为 H .

因为 $BC \perp OA, BC \perp OD, OA \cap OD = O$,

所以 $BC \perp$ 平面 AOD , 故 $OH \perp BC$.

又 $OH \perp AD$, 所以 $OH \perp$ 平面 ABC 5 分

因为 $\angle CBB_1 = 60^\circ$, 所以 $\triangle CBB_1$ 为等边三角形,

又 $BC = 1$, 可得 $OD = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 7 分

由于 $AC \perp AB_1$, 所以 $OA = \frac{1}{2}B_1C = \frac{1}{2}$.

由 $OH \cdot AD = OD \cdot OA$, 且 $AD = \sqrt{OD^2 + OA^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, 得 $OH =$

$\frac{\sqrt{21}}{14}$ 9 分

又 O 为 B_1C 的中点,

所以点 B_1 到平面 ABC 的距离为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

故三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$ 12 分

方法速记 判定线面垂直的常用方法:

- ①定义:如果一条直线和平面内的任何一条直线都垂直,则线面垂直;
- ②如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直,则线面垂直;
- ③如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面,则另一条也垂直于该平面;
- ④如果一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面,则它也垂直于另一个平面;
- ⑤如果两个平面垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面;
- ⑥如果两个相交平面都垂直于另一个平面,那么它们的交线垂直于另一个平面.

20. 【命题点】点的轨迹方程、直线方程、圆的标准方程

【解】(1)将圆 C 的一般方程化标准方程为 $x^2 + (y-4)^2 = 16$,

所以圆心为 $C(0,4)$, 半径为 4.

设 $M(x,y)$, 则 $\overrightarrow{CM}=(x,y-4)$, $\overrightarrow{MP}=(2-x,2-y)$,

由 $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{MP}=0$, 得 $x(2-x)+(y-4)(2-y)=0$,

即 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$.

所以 M 的轨迹方程是 $(x-1)^2+(y-3)^2=2$ 6 分

(2) 由(1)可知 M 的轨迹是以点 $N(1,3)$ 为圆心, $\sqrt{2}$ 为半径的圆.

由于 $|OP|=|OM|$, 故 O 在线段 PM 的垂直平分线上, 又 P 在圆 N 上, 从而 $ON \perp PM$ 8 分

因为 ON 的斜率为 3, 所以直线 l 的斜率为 $-\frac{1}{3}$, 故直线 l 的

方程为 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$ 10 分

又 $|OP|=|OM|=2\sqrt{2}$, 点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{4\sqrt{10}}{5}$,

即 $|PM|=\frac{4\sqrt{10}}{5}$, 所以 $\triangle POM$ 的面积为 $\frac{16}{5}$ 12 分

21. 【命题点】导数的几何意义、不等式成立求参数的取值范围

【解】(1) $f'(x)=\frac{a}{x}+(1-a)x-b$,

由题意可知 $f'(1)=0$, 解得 $b=1$ 2 分

(2) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

由(1)知 $f(x)=a\ln x+\frac{1-a}{2}x^2-x$,

$f'(x)=\frac{a}{x}+(1-a)x-1=\frac{1-a}{x}\left(x-\frac{a}{1-a}\right)(x-1)$ 4 分

①若 $a \leq \frac{1}{2}$, 则 $\frac{a}{1-a} \leq 1$, 故当 $x \in (1,+\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$

在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 要使得“存在 $x_0 \geq 1$, 使得 $f(x_0) < \frac{a}{a-1}$ ”, 应满足 $f(1) < \frac{a}{a-1}$, 即 $\frac{1-a}{2}-1 < \frac{a}{a-1}$, 所以 $-\sqrt{2}-1 < a < \sqrt{2}-1$.

..... 6 分

②若 $\frac{1}{2} < a < 1$, 则 $\frac{a}{1-a} > 1$, 故当 $x \in \left(1, \frac{a}{1-a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$; 当

$x \in \left(\frac{a}{1-a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$. $f(x)$ 在 $\left(1, \frac{a}{1-a}\right)$ 上单调递减,

在 $\left(\frac{a}{1-a}, +\infty\right)$ 上单调递增. 要使得“存在 $x_0 \geq 1$, 使得

$f(x_0) < \frac{a}{a-1}$ ”, 应满足 $f\left(\frac{a}{1-a}\right) < \frac{a}{a-1}$,

而 $f\left(\frac{a}{1-a}\right)=a\ln \frac{a}{1-a}+\frac{a^2}{2(1-a)}+\frac{a}{a-1} > \frac{a}{a-1}$, 所以不合题意.

..... 9 分

③若 $a > 1$, 则 $f(1)=\frac{1-a}{2}-1=\frac{-a-1}{2} < \frac{a}{a-1}$ 11 分

综上, a 的取值范围是 $(-\sqrt{2}-1, \sqrt{2}-1) \cup (1, +\infty)$ 12 分

22. 【命题点】圆内接四边形的性质、与几何证明相关的基础知识

【证明】(1) 由已知可得 A, B, C, D 四点共圆,

所以 $\angle D = \angle CBE$.

由已知得 $\angle CBE = \angle E$, 故 $\angle D = \angle E$ 5 分

(2) 设 BC 的中点为 N , 连接 MN , 则由 $MB = MC$, 得 $MN \perp$

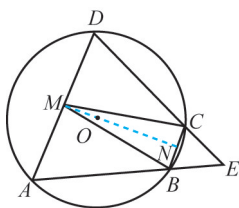
BC , 故点 O 在直线 MN 上.

又 AD 不是圆 O 的直径, M 为 AD 的中点, 所以 $OM \perp AD$, 即 $MN \perp AD$.

所以 $AD \parallel BC$, 故 $\angle A = \angle CBE$.

又 $\angle CBE = \angle E$, 故 $\angle A = \angle E$.

由(1)知, $\angle D = \angle E$, 所以 $\triangle ADE$ 为等边三角形. 10 分



23. 【命题点】直线和椭圆的参数方程、点到直线的距离公式

【解】(1) 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos \theta, \\ y = 3\sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数).

直线 l 的普通方程为 $2x + y - 6 = 0$ 5 分

(2) 由(1)可知, 设曲线 C 上任意一点 $P(2\cos \theta, 3\sin \theta)$, 则

点 P 到直线 l 的距离为 $d = \frac{\sqrt{5}}{5} |4\cos \theta + 3\sin \theta - 6|$.

则 $|PA| = \frac{d}{\sin 30^\circ} = \frac{2\sqrt{5}}{5} |5\sin(\theta + \alpha) - 6|$,

其中 α 为锐角, 且 $\tan \alpha = \frac{4}{3}$.

当 $\sin(\theta + \alpha) = -1$ 时, $|PA|$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{22\sqrt{5}}{5}$;

当 $\sin(\theta + \alpha) = 1$ 时, $|PA|$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

..... 10 分

24. 【命题点】基本不等式的应用

【解】(1) 由 $\sqrt{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}$, 得 $ab \geq 2$, 当且仅当 $a = b =$

$\sqrt{2}$ 时等号成立. 故 $a^3 + b^3 \geq 2\sqrt{a^3 b^3} \geq 4\sqrt{2}$, 当且仅当 $a = b = \sqrt{2}$ 时等号成立. 所以 $a^3 + b^3$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$ 5 分

(2) 由(1)及已知条件知, $2a + 3b \geq 2\sqrt{6}\sqrt{ab} \geq 4\sqrt{3}$.

由于 $4\sqrt{3} > 6$, 所以不存在 a, b , 使得 $2a + 3b = 6$ 10 分