

1. A 【命题点】集合的并集、补集运算

【解析】 $\because M = \{1, 2\}, N = \{3, 4\}, \therefore M \cup N = \{1, 2, 3, 4\}$. 又 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \therefore \complement_U(M \cup N) = \{5\}$, 故选 A.

2. C 【命题点】复数的运算

【解析】 $\because iz = 4 + 3i, \therefore z = \frac{4+3i}{i} = \frac{(4+3i)i}{i^2} = \frac{4i-3}{-1} = 3-4i$, 故选 C.

▶ 一题多解 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, $\because iz = 4 + 3i, \therefore i(a + bi) = 4 + 3i, \therefore -b + ai = 4 + 3i. \therefore \begin{cases} -b = 4, \\ a = 3, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a = 3, \\ b = -4, \end{cases}$
 $\therefore z = 3 - 4i$, 故选 C.

3. A 【命题点】复合命题的真假判断

【解析】命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, \sin x < 1$ 是特称命题, 当 $x = 0$ 时, $\sin x = 0 < 1$ 成立, $\therefore p$ 为真命题. 命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, e^{|x|} \geq 1$ 是全称命题, $\because |x| \geq 0, \therefore e^{|x|} \geq e^0 = 1, \therefore q$ 为真命题. $\therefore \neg p, \neg q$ 均为假命题. $\therefore p \wedge q$ 为真命题, $\neg p \wedge q$ 为假命题, $p \wedge \neg q$ 为假命题, $\neg(p \vee q)$ 为假命题. 故选 A.

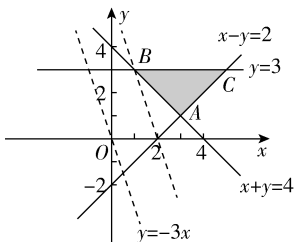
▶ 方法速记 当 p, q 有一个为真命题时, $p \vee q$ 为真命题(一真必真); 当 p, q 均为假命题时, $p \vee q$ 为假命题; 当 p, q 有一个为假命题时, $p \wedge q$ 为假命题(一假必假); 当 p, q 均为真命题时, $p \wedge q$ 为真命题.

4. C 【命题点】辅助角公式、两角和的正弦公式、正弦型函数的性质

【解析】 $f(x) = \sin \frac{x}{3} + \cos \frac{x}{3} = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{x}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{x}{3} \right) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$, \therefore 函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$. $\because x \in \mathbf{R}, \therefore f(x)_{\max} = \sqrt{2}$, 故选 C.

5. C 【命题点】简单的线性规划问题

【解析】由题可得, 约束条件表示的可行域如图阴影部分所示.



由 $\begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=3, \\ y=1, \end{cases} \therefore A(3, 1);$

$$\text{由} \begin{cases} x+y=4, \\ y=3 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=1, \\ y=3, \end{cases} \therefore B(1,3);$$

$$\text{由} \begin{cases} x-y=2, \\ y=3 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=5, \\ y=3, \end{cases} \therefore C(5,3).$$

由 $z=3x+y$ 得 $y=-3x+z$, 当直线 $y=-3x+z$ 经过点 B 时在 y 轴上的截距最小, $\therefore z_{\min}=3 \times 1+3=6$, 故选 C.

快解 此题最优解只能在可行域的顶点处取得, 由题意知可行域的顶点分别为 $A(3,1), B(1,3), C(5,3)$. 当 $x=3, y=1$ 时, $z=3 \times 3+1=10$; 当 $x=1, y=3$ 时, $z=3 \times 1+3=6$; 当 $x=5, y=3$ 时, $z=3 \times 5+3=18$. $\therefore z_{\min}=6$, 故选 C.

方法速记 对于 $z=ax+by (b \neq 0)$ 形式的线性目标函数求最值问题, 一般将目标函数化为 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{z}{b}$, 利用纵截距 $\frac{z}{b}$ 的变化情况反映 z 的大小变化.

6. D 【命题点】诱导公式、二倍角的余弦公式

【解析】 $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选 D.

一题多解

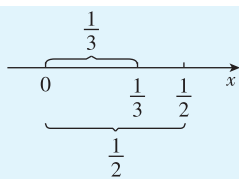
$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\pi}{12} - \cos^2 \frac{5\pi}{12} &= \frac{1+\cos \frac{\pi}{6}}{2} - \frac{1+\cos \frac{5\pi}{6}}{2} = \\ \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} \right) &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{\pi}{6} - \cos \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) \right] = \\ \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \right) &= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

7. B 【命题点】几何概型概率的求法

【解析】 由于区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 的长度是 $\frac{1}{2}$, 而取到的数小于 $\frac{1}{3}$, 则该数在区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 内, 其长度为 $\frac{1}{3}$, 故所求概率 $P = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

故选 B.

快解 如图所示, 取到的数在



区间 $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ 内的概率 $P = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

8. C 【命题点】函数最值的求法及基本不等式的应用

【解析】 A 中, $y=x^2+2x+4=(x+1)^2+3 \geq 3$, 不符合题意.

B 中, $y=|\sin x| + \frac{4}{|\sin x|}$, 令 $t=|\sin x|$, 则 $y=t + \frac{4}{t}, t \in (0, 1]$.

由于 $y=t + \frac{4}{t}$ 在区间 $(0, 1]$ 上单调递减 (提示: 对勾函数的单

调性), 因此 $y \geq 1+4=5$, 最小值是 5, 不符合题意.

C 中, $y=2^x+2^{2-x}$, 令 $m=2^x$, 则 $y=m+\frac{4}{m}$, $m \in (0, +\infty)$, 所以

$y \geq 2\sqrt{m \cdot \frac{4}{m}} = 4$, 当且仅当 $m=2$, 即 $x=1$ 时取等号, 符合题意.

D 中, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $\ln x < 0$, $y = \ln x + \frac{4}{\ln x} < 0$, 不符合题意. 故

选 C.

易错警示

对于 B, 虽然 $|\sin x| \cdot \frac{4}{|\sin x|}$ 是定值, 但是取等号的条件是 $|\sin x| = \frac{4}{|\sin x|}$, 即 $|\sin x| = 2$, 又 $|\sin x| \neq 2$, 此时不满足基本不等式中取等号的条件, 故不符合题意.

9. B 【命题点】函数的奇偶性及图像变换

【解析】 $f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{x+1}$,

对于 A 选项, $f(x-1)-1 = \left[-1 + \frac{2}{(x-1)+1}\right] - 1 = \frac{2}{x} - 2$, $x \neq 0$, 不符合题意;

对于 B 选项, $f(x-1)+1 = \left[-1 + \frac{2}{(x-1)+1}\right] + 1 = \frac{2}{x}$, $x \neq 0$, 为奇函数, 符合题意;

对于 C 选项, $f(x+1)-1 = \left[-1 + \frac{2}{(x+1)+1}\right] - 1 = \frac{2}{x+2} - 2$, $x \neq -2$, 不符合题意;

对于 D 选项, $f(x+1)+1 = \left[-1 + \frac{2}{(x+1)+1}\right] + 1 = \frac{2}{x+2}$, $x \neq -2$, 不符合题意. 故选 B.

快解

$f(x) = \frac{1-x}{1+x} = \frac{-(x+1)+2}{1+x} = -1 + \frac{2}{x+1}$, 因此函数 $f(x)$ 的图像是由 $y = \frac{2}{x}$ 的图像向左平移 1 个单位长度, 再向下平移 1 个单位长度得到的, 其对称中心为 $(-1, -1)$, 结合选项知 $f(x-1)+1$ 图像的对称中心为 $(0, 0)$, 故选 B.

10. D 【命题点】异面直线所成的角及余弦定理的应用

【解析】不妨设正方体的棱长为 1, 连接 C_1P, BC_1 (图略), 由题意可知 $BC_1 \parallel AD_1$, 所以 $\angle PBC_1$ 或其补角是异面直线 PB

与 AD_1 所成的角. 在 $\triangle PBC_1$ 中, $PC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $BC_1 = \sqrt{2}$, $PB =$

$$\sqrt{BB_1^2 + PB_1^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}. \text{ 由余弦定理可得 } \cos \angle PBC_1 =$$

$$\frac{PB^2 + BC_1^2 - PC_1^2}{2PB \cdot BC_1} = \frac{\frac{3}{2} + 2 - \frac{1}{2}}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 又 } \angle PBC_1 \in (0, \pi), \text{ 所以}$$

$\angle PBC_1 = \frac{\pi}{6}$, 即直线 PB 与 AD_1 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, 故选 D.

一题多解 连接 A_1B, BC_1, A_1C_1 (图略), 易证四边形 ABC_1D_1 为平行四边形, 所以 $AD_1 \parallel BC_1$, 所以 $\angle PBC_1$ (或其补角) 为异面直线 PB 与 AD_1 所成的角. 由正方体的性质可知 $\triangle A_1BC_1$ 为正三角形, P 为 A_1C_1 的中点, 所以 $\angle PBC_1 = \frac{1}{2} \angle A_1BC_1 = \frac{\pi}{6}$, 故选 D.

11. A

思路导引 根据椭圆方程 $\xrightarrow{\text{求出点 } B \text{ 坐标}}$ 设出点 P 的坐标 $(x_0, y_0) \xrightarrow[\text{确定纵坐标范围}]{\text{椭圆几何性质}}$ 两点间的距离公式表示 $|PB|$ $\xrightarrow{\text{结合点 } P \text{ 在椭圆上}}$ 消元 $\xrightarrow{\text{转化为二次函数求解}}$ 最值

【命题点】 椭圆的几何性质

【解析】 由 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 知椭圆上顶点 B 坐标为 $(0, 1)$. 设 $P(x_0, y_0)$ ($|y_0| \leq 1$) 是椭圆上任意一点 (易错: 容易忽略 y_0 的取值范围), 则 $|PB| = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 1)^2}$. 又 $\frac{x_0^2}{5} + y_0^2 = 1$, 则 $x_0^2 = 5(1 - y_0^2)$, 则 $|PB| = \sqrt{5 - 5y_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 1} = \sqrt{-4\left(y_0 + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{4}}$. 由 $|y_0| \leq 1$ 知 $y_0 = -\frac{1}{4}$ 时, $|PB|$ 取最大值, 为 $\frac{5}{2}$. 故选 A.

12. D

思路导引 求函数 $f(x)$ 的导数 $\xrightarrow[\text{确定单调性}]{\text{分类讨论}}$ 确定极大值点 $\xrightarrow[\text{a 为极大值点}]{\text{结合已知条件}}$ 判断 a, b 的大小

【命题点】 利用导数研究函数的单调性、极值

【解析】 $\because f(x) = a(x-a)^2(x-b)$, $\therefore f'(x) = 2a(x-a)(x-b) + a(x-a)^2 = a(x-a)[3x - (a+2b)]$.

当 $a > 0$, 且 $a > \frac{a+2b}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{a+2b}{3}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{a+2b}{3}, a\right)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极小值, 不符合题意.

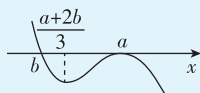
当 $a > 0$, 且 $a < \frac{a+2b}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增, 在 $\left(a, \frac{a+2b}{3}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{a+2b}{3}, +\infty\right)$ 上单调递增, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极大值, 此时 $0 < a < b$, $\therefore a^2 < ab$.

同理, 当 $a < 0$, 且 $a < \frac{a+2b}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 和 $\left(\frac{a+2b}{3}, +\infty\right)$ 上单调递减, 在 $\left(a, \frac{a+2b}{3}\right)$ 上单调递增, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极小值, 不符合题意.

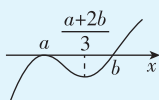
当 $a < 0$, 且 $a > \frac{a+2b}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{a+2b}{3})$ 和 $(a, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(\frac{a+2b}{3}, a)$ 上单调递增, \therefore 函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取极大值, 此时 $0 > a > b$, $\therefore a^2 < ab$. 综上, $a^2 < ab$, 故选 D.

快解

$\because f'(x) = 3a(x-a)\left(x - \frac{a+2b}{3}\right)$, $x=a$ 既是函数 $f(x)$ 的零点又是极大值点. \therefore 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的大致图像如图所示, $\therefore b < a < 0$, 则 $ab > a^2$.

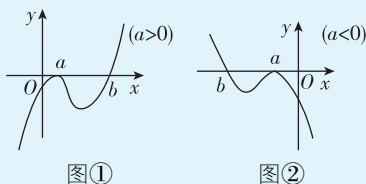


当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的大致图像如图所示, $\therefore 0 < a < b$, 则 $a^2 < ab$.



学霸解题 · 技巧 南开大学 姜明宇

联想到解一元高次不等式的“穿针引线法”. 因为 $x-a$ 的指数为偶数, 故图像在 $x=a$ 时不穿过数轴, 且 $x=a$ 为极大值点, 故可画出 $f(x)$ 的大致图像, 如图所示.



由图易知 $a > b$, $a < b$ 均不恒成立, 但这两种情况均满足 $ab > a^2$, 故选 D.

13. $\frac{8}{5}$ 【命题点】向量共线的坐标运算

【解析】由 $a \parallel b$ 得, $2 \times 4 - 5\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{8}{5}$.

14. $\sqrt{5}$ 【命题点】双曲线的几何性质及点到直线距离公式的应用

【解析】由题意知 $a^2 = 4$, $b^2 = 5$, $\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 9$, 即 $c = 3$,

\therefore 右焦点坐标为 $(3, 0)$. \therefore 点 $(3, 0)$ 到直线 $x + 2y - 8 = 0$ 的距

离 $d = \frac{|3 - 8|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{5}$.

15. $2\sqrt{2}$

思路导引

已知三角形面积及角 B $\xrightarrow{S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B}$ 求
出 ac $\xrightarrow{a^2 + c^2 = 3ac}$ $a^2 + c^2$ $\xrightarrow{\text{余弦定理}}$ b

【命题点】三角形面积公式及余弦定理的应用

【解析】 $\because S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $\therefore \frac{1}{2}ac \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, $\therefore ac = 4$. 又

$a^2 + c^2 = 3ac$, $\therefore a^2 + c^2 = 12$. 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理知 $b^2 =$

$$a^2+c^2-2accos B=12-8\times\frac{1}{2}=8, \text{解得 } b=2\sqrt{2}.$$

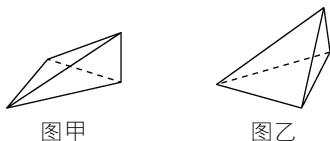
关键点拨 已知条件中含 $B=60^\circ$, 因此利用 $S=\frac{1}{2}ac\sin B$ 求出 ac , 再利用余弦定理即可求得结果.

16. ②⑤(或③④)

思路导引 $\left. \begin{array}{l} \text{俯视图} \\ \text{正视图} \end{array} \right\} \rightarrow \text{直观图} \rightarrow \text{侧视图}$

【命题点】三棱锥的三视图

【解析】若俯视图为④, 则直观图如图甲所示, 侧视图为③;
若俯视图为⑤, 则直观图如图乙所示, 侧视图为②.



17. 【命题点】样本的平均数和方差

【解】(1) 由题意知, $\bar{x} = \frac{1}{10} \times (9.8 + 10.3 + 10.0 + 10.2 + 9.9 + 9.8 + 10.0 + 10.1 + 10.2 + 9.7) = 10$, 1分

$\bar{y} = \frac{1}{10} \times (10.1 + 10.4 + 10.1 + 10.0 + 10.1 + 10.3 + 10.6 + 10.5 + 10.4 + 10.5) = 10.3$, 2分

$s_1^2 = \frac{1}{10} \times [(9.8-10)^2 + (10.3-10)^2 + (10.0-10)^2 + (10.2-10)^2 + (9.9-10)^2 + (9.8-10)^2 + (10.0-10)^2 + (10.1-10)^2 + (10.2-10)^2 + (9.7-10)^2] = 0.036$, 4分

$s_2^2 = \frac{1}{10} \times [(10.1-10.3)^2 + (10.4-10.3)^2 + (10.1-10.3)^2 + (10.0-10.3)^2 + (10.1-10.3)^2 + (10.3-10.3)^2 + (10.6-10.3)^2 + (10.5-10.3)^2 + (10.4-10.3)^2 + (10.5-10.3)^2] = 0.04$ 6分

(2) 由(1)中的数据可得 $\bar{y} - \bar{x} = 0.3$, $2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}} = 2\sqrt{\frac{0.076}{10}} = \sqrt{\frac{0.304}{10}}$, 而 $0.3 > \sqrt{\frac{0.304}{10}}$, 所以新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高. 12分

18. 【命题点】面面垂直的证明、四棱锥的体积计算

(1) **【证明】**因为 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $AM \subset$ 底面 $ABCD$, 所以 $PD \perp AM$. 又因为 $PB \perp AM$, $PD \cap PB = P$, 所以 $AM \perp$ 平面 PBD 4分

又 $AM \subset$ 平面 PAM , 所以平面 $PAM \perp$ 平面 PBD .
..... 6分

(2) **【解】**由(1)知 $AM \perp$ 平面 PBD , 又 $BD \subset$ 平面 PBD , 所以 $AM \perp BD$.

在矩形 $ABCD$ 中, 设 $AD = 2x$ ($x > 0$), 则由 $AM \perp BD$ 可得

$\angle MAB + \angle ABD = 90^\circ$, 而 $\angle ADB + \angle ABD = 90^\circ$, 所以 $\angle ADB = \angle MAB$ 8分

在 $\text{Rt} \triangle ABM$ 和 $\text{Rt} \triangle DAB$ 中, $\tan \angle MAB = \frac{BM}{AB} = \frac{x}{1}$,

$\tan \angle ADB = \frac{AB}{AD} = \frac{1}{2x}$, 所以 $\frac{x}{1} = \frac{1}{2x}$, 即 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $AD = \sqrt{2}$, 所

以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{矩形}ABCD} \cdot PD = \frac{1}{3} \times$

$\sqrt{2} \times 1 \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$ 12分

关键点拨 (1) 通过证明 $PD \perp AM$ 并结合已知条件 $PB \perp AM$, 得出 $AM \perp$ 平面 PBD , 进而得出平面 $PAM \perp$ 平面 PBD .

(2) 通过(1)可得 $AM \perp BD$, 可推出 $\angle ADB = \angle MAB$, 进而计算出 AD 的长度, 从而得出四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.

19. 【命题点】等比数列的通项公式及错位相减法求和

(1) 【解】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$, 则 $a_n = q^{n-1}$.

又因为 $a_1, 3a_2, 9a_3$ 成等差数列, 所以 $2 \times 3a_2 = a_1 + 9a_3$, 即

$6q = 1 + 9q^2$, 解得 $q = \frac{1}{3}$,

所以 $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $b_n = \frac{n}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{n}{3^n}$ 4分

(2) 【证明】由(1)得 $S_n = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3 \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{2} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2 \cdot 3^n}$,

$T_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{n}{3^n}$, ①

$\frac{1}{3} T_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}$, ② 6分

①-②可得 $\frac{2}{3} T_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}{1 - \frac{1}{3}} -$

$\frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{2} - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$,

所以 $T_n = \frac{3}{4} - \frac{3}{4 \cdot 3^n} - \frac{n}{2 \cdot 3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$ 8分

因为 $\frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} - \frac{3}{4 \cdot 3^n} = \frac{2n}{4 \cdot 3^n} > 0$, 所以 $\frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} > \frac{3}{4 \cdot 3^n}$, 所以

$-\frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} < -\frac{3}{4 \cdot 3^n}$, 所以 $\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} < \frac{3}{4} - \frac{3}{4 \cdot 3^n}$, 10分

(或 $\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n}{4 \cdot 3^n} - \frac{3}{4 \cdot 3^n} = \frac{3}{4} - \frac{n}{2 \cdot 3^n} - \frac{3}{4 \cdot 3^n}$, 因为 $\frac{n}{2 \cdot 3^n} > 0$, 所以 $\frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} < \frac{3}{4} - \frac{3}{4 \cdot 3^n}$)

即 $T_n < \frac{3}{4} - \frac{3}{4 \cdot 3^n} = \frac{S_n}{2}$ 12 分

20. 思路导引 (1) 焦点 F 到准线的距离为 2 $\rightarrow p=2 \rightarrow$ 抛物线的方程;

(2) $\left. \begin{array}{l} \text{设出点 } P, Q \text{ 的坐标} \\ \vec{PQ} = 9\vec{QF} \end{array} \right\} \rightarrow \text{用点 } P \text{ 的坐标表示点 } Q \text{ 的坐标}$

标 \rightarrow 斜率公式 $\xrightarrow{\text{基本不等式}}$ 最值

【命题点】 抛物线的方程, 斜率公式以及向量坐标运算的应用及利用基本不等式求最值的方法

【解】 (1) \because 抛物线 C 的焦点 F 到准线的距离为 2, $\therefore p=2$, \therefore 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$ 3 分

(2) 由 (1) 知 $F(1,0)$, 设 $P(x_0, y_0), Q(x, y)$ (易错: 误认为点 Q 在抛物线 C 上), 则 $y_0^2=4x_0$ 4 分

由 $\vec{PQ}=9\vec{QF}$ 知 $(x-x_0, y-y_0)=9(1-x, -y)$, 得 $x=\frac{9+x_0}{10}, y=\frac{y_0}{10}$, 即 $Q\left(\frac{9+x_0}{10}, \frac{y_0}{10}\right)$ 6 分

设直线 OQ 斜率为 k_{OQ} , 则 $k_{OQ} = \frac{y_0}{9+x_0} = \frac{y_0}{9+\frac{y_0^2}{4}} = \frac{4y_0}{36+y_0^2}$ (提示: 需

对 y_0 的范围进行分类讨论),

\therefore 当 $y_0=0$ 时, $k_{OQ}=0$ 8 分

当 $y_0<0$ 时, k_{OQ} 没有最大值.

当 $y_0>0$ 时, $k_{OQ} = \frac{4}{\frac{36}{y_0} + y_0}$.

$\because y_0>0, \frac{36}{y_0} + y_0 \geq 2\sqrt{\frac{36}{y_0} \cdot y_0} = 12$ (当且仅当 $\frac{36}{y_0} = y_0$, 即 $y_0=6$ 时取等号), $\therefore k_{OQ} = \frac{4}{\frac{36}{y_0} + y_0} \leq \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

综上, 直线 OQ 斜率的最大值为 $\frac{1}{3}$ 12 分

21. 思路导引 (1) 求 $f'(x)$ $\xrightarrow{f'(x)=3x^2-2x+a} \begin{cases} \Delta \leq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \rightarrow$ 确定单调性;

(2) 设出切点 $P \xrightarrow{f'(x_0)=3x_0^2-2x_0+a} \text{切线 } l \text{ 的方程} \xrightarrow{\text{求出 } x_0}$ 联立曲线 $y=f(x)$ 与切线方程 \rightarrow 公共点

【命题点】 利用导数研究函数的单调性, 导数的几何意义

【解】 (1) $\because f(x)=x^3-x^2+ax+1$,

$\therefore f'(x)=3x^2-2x+a$.

当 $\Delta=4-12a \leq 0$, 即 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) \geq 0$, 等号不恒成立,

此时 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.

当 $\Delta = 4 - 12a > 0$, 即 $a < \frac{1}{3}$ 时, 由 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-3a}}{3}$,

$x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-3a}}{3}$, 3 分

因此当 $x \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1-3a}}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{1 + \sqrt{1-3a}}{3}, +\infty\right)$ 时, 函数

$f(x)$ 单调递增; 当 $x \in \left(\frac{1 - \sqrt{1-3a}}{3}, \frac{1 + \sqrt{1-3a}}{3}\right)$ 时, 函数

$f(x)$ 单调递减.

综上, 当 $a \geq \frac{1}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;

当 $a < \frac{1}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{1-3a}}{3}\right)$ 和

$\left(\frac{1 + \sqrt{1-3a}}{3}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1 - \sqrt{1-3a}}{3}, \frac{1 + \sqrt{1-3a}}{3}\right)$ 上单调递减. 6 分

(2) 记曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线为 l , 切点为 $P(x_0, x_0^3 - x_0^2 + ax_0 + 1)$.

$$f'(x_0) = 3x_0^2 - 2x_0 + a,$$

\therefore 切线 l 的方程为 $y - (x_0^3 - x_0^2 + ax_0 + 1) = (3x_0^2 - 2x_0 + a) \cdot (x - x_0)$.

..... 8 分

又 l 过坐标原点, 则 $2x_0^3 - x_0^2 - 1 = 0$, 即 $(x_0 - 1)(2x_0^2 + x_0 + 1) = 0$, 解得 $x_0 = 1$,

\therefore 切线 l 的方程为 $y = (1 + a)x$.

令 $x^3 - x^2 + ax + 1 = (1 + a)x$, 则 $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$,

解得 $x = 1$ 或 $x = -1$,

\therefore 曲线 $y = f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y = f(x)$ 的公共点的坐标为 $(1, 1 + a)$ 和 $(-1, -1 - a)$ 12 分

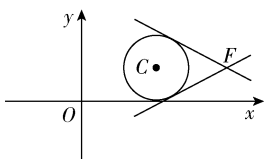
易错警示 本题求解的易错之处是忽视对方程 $3x^2 - 2x + a = 0$ 的判别式符号的分类讨论.

22. 【命题点】圆的参数方程、直线的直角坐标方程与极坐标方程的互化及直线与圆相切

【解】(1) 因为 $\odot C$ 的圆心为 $(2, 1)$, 半径为 1, 所以 $\odot C$ 的一个

参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \cos \alpha, \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数). 5 分

(2) 由图知 $\odot C$ 的切线斜率存在, 设切线方程为 $y = k(x - 4) + 1$, 即 $kx - y - 4k + 1 = 0$.



由直线与圆相切得圆心 $(2, 1)$ 到切线的距离为 1,

则 $\frac{|2k-1-4k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1$, 解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

则切线方程为 $\frac{\sqrt{3}}{3}x-y-\frac{4\sqrt{3}}{3}+1=0$ 和 $-\frac{\sqrt{3}}{3}x-y+\frac{4\sqrt{3}}{3}+1=0$,

..... 8 分

即 $x-\sqrt{3}y-4+\sqrt{3}=0$ 和 $x+\sqrt{3}y-4-\sqrt{3}=0$, 极坐标方程为

$\rho\cos\theta-\sqrt{3}\rho\sin\theta-4+\sqrt{3}=0$ 和 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-4-\sqrt{3}=0$.

..... 10 分

23. 【命题点】绝对值不等式的解法和绝对值三角不等式

【解】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=|x-1|+|x+3|\geqslant 6$,

当 $x\geqslant 1$ 时, $2x+2\geqslant 6$, 解得 $x\geqslant 2$;

当 $-3<x<1$ 时, $4\geqslant 6$, 无解;

当 $x\leqslant -3$ 时, $-(2x+2)\geqslant 6$, 解得 $x\leqslant -4$.

综上, 不等式 $f(x)\geqslant 6$ 的解集为 $(-\infty, -4]\cup[2, +\infty)$.

..... 5 分

(2) 由题有 $|x-a|+|x+3|+a>0$ 恒成立,

而 $|x-a|+|x+3|+a\geqslant |x+3-(x-a)|+a=|3+a|+a$,

当且仅当 $(x-a)(x+3)\leqslant 0$ 时, 等号成立,

故 $|3+a|+a>0$ 8 分

当 $a\geqslant -3$ 时, $2a+3>0$, 解得 $a>-\frac{3}{2}$;

当 $a<-3$ 时, $-3>0$, 无解.

综上, a 的取值范围为 $(-\frac{3}{2}, +\infty)$ 10 分