

1. C 【命题点】复数的运算、复数的模

【解析】因为 $z = \frac{3-i}{1+2i} = \frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i$, 所以 $|z| =$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(-\frac{7}{5}\right)^2} = \sqrt{2}, \text{ 故选 C.}$$

▶ 快解

$$|z| = \left| \frac{3-i}{1+2i} \right| = \frac{|3-i|}{|1+2i|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}. \text{ 故选 C.}$$

2. C 【命题点】集合的补集与交集运算

【解析】由题意得 $\complement_U A = \{1, 6, 7\}$, 所以 $B \cap \complement_U A = \{6, 7\}$, 故选 C.

▶ 快解

(特殊值法) 由于 $1 \notin B$, 故排除 A, B, D, 故选 C.

3. B 【命题点】利用对数函数与指数函数的性质比较大小

【解析】因为 $a = \log_2 0.2 < \log_2 1 = 0$, $b = 2^{0.2} > 2^0 = 1$, $0 < c = 0.2^{0.3} < 0.2^0 = 1$, 所以 $a < c < b$, 故选 B.

▶ 关键点拨

求解本题的关键是利用对数函数与指数函数的性质判断出 a, b, c 与 0 或 1 的大小关系.

4. B 【命题点】数学文化、不等式的解法与性质

【解析】如图, 设“某人”头顶至肚脐的长度为 a cm, 肚脐至足底的长度为 b cm, 头顶至咽喉的长度为 c cm, 咽喉至肚脐的

长度为 d cm. 则 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$, $c <$

26, $b > 105$, $c + d = a$.

设“某人”的身高为 h cm, 即 $a + b = h$.

$$\text{由 } \begin{cases} b > 105, \\ a \approx 0.618b, \end{cases} \quad \text{解得 } a > 64.89,$$

$$\text{由 } \begin{cases} c < 26, \\ c \approx 0.618d, \end{cases} \quad \text{解得 } d < 42.07,$$

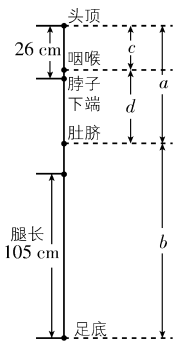
所以 $c + d < 26 + 42.07 = 68.07$, 即 $a < 68.07$.

$$\begin{cases} a < 68.07, \\ a \approx 0.618b, \end{cases} \quad \text{解得 } b < 110.15.$$

整理可得 $64.89 + 105 < a + b < 68.07 + 110.15$,

即 $169.89 < h < 178.22$,

结合选项可知其身高可能是 175 cm, 故选 B.



▶ 一题多解

若以 26 为头顶到咽喉的长度, 则身高为

$$\left(26 + 26 \times \frac{2}{\sqrt{5}-1}\right) \times \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}-1}\right) = 26 \times \left(1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 \approx 178(\text{cm}).$$

若以 105 为肚脐到足底的长度, 则身高为 $105 \times$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = 105 \times \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 170(\text{cm}).$$

结合选项可知其身高可能是 175 cm, 故选 B.

5. D 【命题点】函数图像的识别

【解析】任取 $x \in [-\pi, \pi]$, $\therefore f(-x) = \frac{\sin(-x) + (-x)}{\cos(-x) + (-x)^2} =$

$-\frac{\sin x + x}{\cos x + x^2} = -f(x)$, $\therefore f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上为奇函数, 故排除 A;

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi^2}{4}} = \frac{4 + 2\pi}{\pi^2} > 1$, 故排除 B, C, 故选 D.

一题多解

当 $x = -\pi$ 时, $f(-\pi) = \frac{\sin(-\pi) + (-\pi)}{\cos(-\pi) + (-\pi)^2} =$

$\frac{-\pi}{-1 + \pi^2} < 0$, 故排除 A, C; 当 $x = \pi$ 时, $f(\pi) = \frac{\sin \pi + \pi}{\cos \pi + \pi^2} =$

$\frac{\pi}{-1 + \pi^2} > 0$, 不是趋近于 0, 故排除 B. 故选 D.

方法速记

函数图像的识别可从以下方面入手: (1) 从函数的定义域, 判断图像的左右位置, 从函数的值域, 判断图像的上下位置; (2) 从函数的单调性, 判断图像的变化趋势; (3) 从函数的奇偶性, 判断图像的对称性; (4) 从函数的特殊点, 排除不符合要求的图像.

6. C 【命题点】系统抽样

【解析】由题意, 知抽样间隔为 $\frac{1\ 000}{100} = 10$. 因为 46 号学生被抽

到, 所以被抽到的学生的编号为 $6, 16, \dots, 6 + 10(n-1)$, $n \in \mathbf{N}^*$, 所以代入四个选项知, 只有抽到 616 号学生时, $n = 62$, 为整数, 故选 C.

7. D 【命题点】诱导公式、两角和的正切公式

【解析】 $\tan 255^\circ = \tan(180^\circ + 75^\circ) = \tan 75^\circ = \tan(30^\circ + 45^\circ) =$

$\frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$, 故选 D.

8. B 【命题点】平面向量的数量积运算

【解析】设向量 a 与 b 的夹角为 θ , 则由 $(a-b) \perp b$,

得 $(a-b) \cdot b = a \cdot b - b^2 = |a| |b| \cos \theta - |b|^2 = 2|b|^2 \cos \theta - |b|^2 =$

0, 所以 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 故选 B.

一题多解

如图, 令 $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b$,

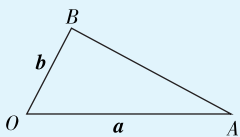
则 $\vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB} = a - b$.

因为 $(a-b) \perp b$,

所以 $\angle OBA = 90^\circ$.

又 $|a| = 2|b|$, 所以 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$,

即 $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{3}$. 故选 B.



9. A 【命题点】程序框图

【解析】由程序框图知,输入 A 的值后经过两次循环,即可退出循环,输出 A ,可将 $\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ 的步骤分解为第一步求 $A_1 =$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, \text{第二步求 } A_2 = \frac{1}{2+A_1} = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \text{则空白框中应填入}$$

$$A = \frac{1}{2+A}. \text{ 故选 A.}$$

快解 直接将 A 选项代入,运行该程序可得 $A =$

$$\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, k=2, \text{满足 } k \leq 2, \text{继续循环}; A = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, k=3 > 2, \text{不}$$

$$\text{满足循环,退出,输出 } A = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \text{满足题意,故选 A.}$$

10. D 【命题点】双曲线的几何性质、诱导公式及同角三角函数基本关系

【解析】因为双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 所以根据

题意得 $-\frac{b}{a} = \tan 130^\circ$, 所以 $\frac{b}{a} = \tan 50^\circ$, 则双曲线的离心率

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + \tan^2 50^\circ} = \sqrt{1 + \frac{\sin^2 50^\circ}{\cos^2 50^\circ}} = \sqrt{\frac{\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ}{\cos^2 50^\circ}} = \frac{1}{|\cos 50^\circ|} = \frac{1}{\cos 50^\circ}, \text{ 故选 D.}$$

易错警示 本题解答易错点: (1) 求双曲线渐近线方程

时易误认为 $y = \pm \frac{a}{b}x$; (2) 利用 a, b, c 之间的关系 $c^2 = a^2 + b^2$

时,与椭圆方程中 a, b, c 的关系 $c^2 = a^2 - b^2$ 混淆.

11. A 【命题点】正弦定理与余弦定理的应用

【解析】由 $a \sin A - b \sin B = 4c \sin C$, 结合正弦定理, 得 $a^2 - b^2 =$

$$4c^2, \text{ 所以 } b^2 + c^2 - a^2 = -3c^2. \text{ 由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$$

$$-\frac{1}{4}, \text{ 即 } \frac{-3c^2}{2bc} = -\frac{1}{4}, \text{ 整理得 } \frac{b}{c} = 6, \text{ 故选 A.}$$

12. B 【命题点】椭圆的定义、标准方程及几何性质

【解析】设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$.

$$\therefore |AF_2| = 2|F_2B|, |AB| = |BF_1|, \therefore |BF_1| = 3|F_2B|.$$

又 $\therefore |BF_1| + |F_2B| = 2a$ (提示: 椭圆定义的应用),

$$\therefore |F_2B| = \frac{a}{2}, \text{ 则 } |AF_2| = a, |AB| = |BF_1| = \frac{3}{2}a, |AF_1| = a.$$

解法一: 在 $\triangle ABF_1$ 中, 由余弦定理, 得 $\cos \angle BAF_1 =$

$$\frac{|AB|^2 + |AF_1|^2 - |BF_1|^2}{2|AB| \cdot |AF_1|} = \frac{\left(\frac{3a}{2}\right)^2 + a^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{3a}{2} \cdot a} = \frac{1}{3}. \because \text{椭圆 } C$$

的焦点为 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0), \therefore c = 1, |F_1F_2| = 2$. 在

$\triangle AF_1F_2$ 中, 由余弦定理, 得 $|F_1F_2|^2 = |AF_1|^2 + |AF_2|^2 -$

$$2|AF_1||AF_2| \cdot \cos \angle BAF_1, \text{ 即 } 4 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \frac{1}{3}, \text{ 解得 } a^2 =$$

$$3, \therefore b^2 = a^2 - c^2 = 2, \therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1,$$

故选 B.

解法二: $\because |AF_1| = |AF_2| = a, \therefore$ 点 A 为椭圆的上、下顶点.

不妨设 $A(0, -b), F_2(1, 0), \therefore \overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}, \therefore B\left(\frac{3}{2}, \frac{b}{2}\right)$, 代

$$\text{入椭圆方程得 } \frac{9}{a^2} + \frac{b^2}{4} = 1, \text{ 解得 } a^2 = 3. \text{ 又 } \because c = 1,$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 2, \therefore \text{椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1. \text{ 故选 B.}$$

13. $y=3x$ 【命题点】导数的几何意义

【解析】 由 $y = 3(x^2 + x)e^x$, 得 $y' = 3(2x+1)e^x + 3(x^2+x)e^x = 3(x^2+3x+1)e^x$, 所以曲线在点 $(0, 0)$ 处的切线的斜率为 3, 所以切线方程为 $y = 3x$.

14. $\frac{5}{8}$ 【命题点】等比数列的通项与前 n 项和

【解析】 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$, 则由 $a_1 = 1, S_3 = \frac{3}{4}$, 得 $1+q+q^2 = \frac{3}{4}$, 即 $(2q+1)^2 = 0$, 则 $q = -\frac{1}{2}$, 所以 $S_4 =$

$$\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{8} \left(\text{另解: } S_4 = S_3 + a_4 = \frac{3}{4} + 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8} \right).$$

15. -4 【命题点】诱导公式、二倍角公式、三角函数的最值

【解析】 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right) - 3\cos x = -\cos 2x - 3\cos x = -2\cos^2 x -$

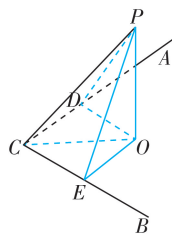
$3\cos x + 1 = -2\left(\cos x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8}$. 因为 $-1 \leq \cos x \leq 1$, 所以当

$\cos x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最小值 $-2 \times \left(1 + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{17}{8} = -4$.

易错警示 解答本题的易错点: (1) 利用诱导公式时, 变角或变名出现错误, 即可能误将 $\sin\left(2x + \frac{3\pi}{2}\right)$ 转化为 $\cos 2x$ 或 $-\sin 2x$; (2) 忽视 $\cos x$ 的取值范围.

16. $\sqrt{2}$ 【命题点】空间直线与平面间的垂直关系、点到平面的距离

【解析】如图,过点 P 作 $PO \perp$ 平面 ABC ,垂足为 O , $PD \perp AC$ 于 D , $PE \perp BC$ 于 E ,连接 OC, OD, OE , 则 $PD = PE = \sqrt{3}$. 由 $PO \perp$ 平面 ABC , 知 $PO \perp AC$. 又因为 $AC \perp PD$, $PO \cap PD = P$, 所以 $AC \perp$ 平面 POD , 所以 $AC \perp OD$, 同



理可得 $BC \perp OE$. 又因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以四边形 $CDOE$ 为矩形. 又因为 $PO = PO, PD = PE$, 所以 $\text{Rt} \triangle POD \cong \text{Rt} \triangle POE$, 所以 $OD = OE$, 所以矩形 $CDOE$ 为正方形. 在 $\text{Rt} \triangle PCD$ 中, $CD = \sqrt{PC^2 - PD^2} = 1$, 则 $OC = \sqrt{2} CD = \sqrt{2}$, 所以在 $\text{Rt} \triangle PCO$ 中, $PO = \sqrt{PC^2 - OC^2} = \sqrt{2}$.

方法速记 已知点 P 为 $\angle ACB$ 所在平面外一点, (1) 若点 P 到 $\angle ACB$ 两边的距离相等, 则点 P 在平面 ACB 上的射影必在 $\angle ACB$ 的平分线上; (2) 若射线 PC 与 $\angle ACB$ 两边 CA, CB 的夹角相等, 则点 P 在平面 ACB 上的射影必在 $\angle ACB$ 的平分线上.

17. 【命题点】由频率估计概率, 独立性检验

【解】(1) 由调查数据, 男顾客中对该商场服务满意的比率为 $\frac{40}{50} = 0.8$, 因此男顾客对该商场服务满意的概率的估计值为

0.8. 3 分

女顾客中对该商场服务满意的比率为 $\frac{30}{50} = 0.6$, 因此女顾客

对该商场服务满意的概率的估计值为 0.6. 6 分

(2) $K^2 = \frac{100 \times (40 \times 20 - 30 \times 10)^2}{50 \times 50 \times 70 \times 30} \approx 4.762$ 8 分

由于 $4.762 > 3.841$, 故有 95% 的把握认为男、女顾客对该商场服务的评价有差异. 12 分

18. 【命题点】等差数列的通项公式与前 n 项和公式

【解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

由 $S_9 = -a_5$ 得 $a_1 + 4d = 0$ 2 分

由 $a_3 = 4$ 得 $a_1 + 2d = 4$.

于是 $a_1 = 8, d = -2$ 4 分

因此 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 10 - 2n$ 6 分

(2) 由 (1) 得 $a_1 = -4d$, 故 $a_n = (n-5)d, S_n = \frac{n(n-9)d}{2}$.

..... 8 分

由 $a_1 > 0$ 知 $d < 0$, 故 $S_n \geq a_n$ 等价于 $n^2 - 11n + 10 \leq 0$, 解得 $1 \leq n \leq 10$ 10 分

所以 n 的取值范围是 $\{n | 1 \leq n \leq 10, n \in \mathbf{N}\}$ 12 分

一题多解 (2) 由 $S_n \geq a_n$ 得 $S_{n-1} \geq 0 (n \geq 2)$, 6分

由(1)得 $a_1 = -4d$, 又 $a_1 > 0$, 所以 $d < 0, a_n = (n-5)d$,

..... 8分

则 $S_{n-1} = \frac{(n-1)[-4d+(n-6)d]}{2} = \frac{(n-1)(n-10)d}{2} \geq 0$, 则

$1 \leq n \leq 10$, 10分

所以 n 的取值范围是 $\{n | 1 \leq n \leq 10, n \in \mathbf{N}\}$ 12分

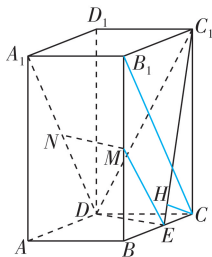
19. 【命题点】线面平行的判定, 线面垂直的判定与性质

(1) 【证明】连接 B_1C, ME . 因为 M, E

分别为 BB_1, BC 的中点, 所以 $ME \parallel$

B_1C , 且 $ME = \frac{1}{2} B_1C$. 又因为 N 为

A_1D 的中点, 所以 $ND = \frac{1}{2} A_1D$.



..... 3分

由题设知 $A_1B_1 \parallel DC$, 可得 $B_1C \parallel A_1D$, 故 $ME \parallel ND$, 因此四边形 $MNDE$ 为平行四边形, 所以 $MN \parallel ED$. 又 $MN \not\subset$ 平面 C_1DE , $ED \subset$ 平面 C_1DE , 所以 $MN \parallel$ 平面 C_1DE 6分

(2) 【解】过 C 作 C_1E 的垂线, 垂足为 H .

由已知可得 $DE \perp BC, DE \perp C_1C$, 所以 $DE \perp$ 平面 C_1CE , 故 $DE \perp CH$.

从而 $CH \perp$ 平面 C_1DE , 故 CH 的长即为 C 到平面 C_1DE 的距离. 10分

由已知可得 $CE = 1, C_1C = 4$, 所以 $C_1E = \sqrt{17}$, 故 $CH = \frac{4\sqrt{17}}{17}$. 从而点 C 到平面 C_1DE 的距离为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ 12分

一题多解 (2) 连接 BD . 因为底面 $ABCD$ 为菱形,

$\angle BAD = 60^\circ$, 所以 $\angle BCD = 60^\circ$, 所以 $\triangle BCD$ 为等边三角形, $BC = 2$, 所以 $DE = \sqrt{3}$.

易知 $C_1E = \sqrt{17}, C_1D = 2\sqrt{5}$,

又 $C_1D^2 = DE^2 + C_1E^2$, 所以 $DE \perp C_1E$ 8分

设点 C 到平面 C_1DE 的距离为 d , 则 $V_{C-C_1DE} = V_{C_1-CDE}$, 即 $\frac{1}{3} \times$

$S_{\triangle C_1DE} \cdot d = \frac{1}{3} \times S_{\triangle CDE} \cdot CC_1$, 10分

则 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{17} \times d = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times 1 \times 4$, 则 $d = \frac{4\sqrt{17}}{17}$, 则

点 C 到平面 C_1DE 的距离为 $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ 12分

20. 【命题点】利用导数研究函数的单调性、零点

(1) 【证明】设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g(x) = \cos x + x \sin x - 1$,

$g'(x) = x \cos x$ 2分

(根据 $\cos x$ 的正负进行分类讨论)

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以

$g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增, 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 单调递减. 4 分

又 $g(0) = 0, g\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0, g(\pi) = -2$, 故 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 存在唯一零点.

所以 $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 存在唯一零点. 6 分

(2) 【解】由题设知 $f(\pi) \geq a\pi, f(\pi) = 0$, 可得 $a \leq 0$.

由(1)知, $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$ 只有一个零点, 设为 x_0 , 且当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, \pi)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 单调递增, 在 (x_0, π) 单调递减. 8 分

又 $f(0) = 0, f(\pi) = 0$, 所以, 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $f(x) \geq 0$.

..... 10 分

又当 $a \leq 0, x \in [0, \pi]$ 时, $ax \leq 0$, 故 $f(x) \geq ax$ 11 分

因此, a 的取值范围是 $(-\infty, 0]$ 12 分

21. 【命题点】直线与圆的位置关系, 抛物线的定义

【解】(1) 因为 $\odot M$ 过点 A, B , 所以圆心 M 在 AB 的垂直平分线上. 由已知 A 在直线 $x+y=0$ 上, 且 A, B 关于坐标原点 O 对称, 所以 M 在直线 $y=x$ 上, 故可设 $M(a, a)$ 2 分

因为 $\odot M$ 与直线 $x+2=0$ 相切, 所以 $\odot M$ 的半径为 $r=|a+2|$.

..... 3 分

由已知得 $|AO|=2$, 又 $\overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{AO}$, 故可得 $2a^2+4=(a+2)^2$, 解得 $a=0$ 或 $a=4$ 5 分

故 $\odot M$ 的半径 $r=2$ 或 $r=6$ 6 分

(2) 存在定点 $P(1, 0)$, 使得 $|MA|-|MP|$ 为定值. 7 分

理由如下:

设 $M(x, y)$, 由已知得 $\odot M$ 的半径为 $r=|x+2|, |AO|=2$.

由于 $\overrightarrow{MO} \perp \overrightarrow{AO}$, 故可得 $x^2+y^2+4=(x+2)^2$, 化简得 M 的轨迹方程为 $y^2=4x$ 9 分

因为曲线 $C: y^2=4x$ 是以点 $P(1, 0)$ 为焦点, 以直线 $x=-1$ 为准线的抛物线, 所以 $|MP|=x+1$ 11 分

因为 $|MA|-|MP|=r-|MP|=x+2-(x+1)=1$, 所以存在满足条件的定点 P 12 分

22. 【命题点】参数方程、极坐标方程与直角坐标方程之间的互化, 参数方程的应用

【解】(1) 因为 $-1 < \frac{1-t^2}{1+t^2} \leq 1$, 且 $x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} = 1$, 所以 C 的直角坐标方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq -1)$.

l 的直角坐标方程为 $2x + \sqrt{3}y + 11 = 0$ 5 分

(2) 由(1)可设 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos \alpha, \\ y = 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数, $-\pi <$

$\alpha < \pi$).

C 上的点到 l 的距离为 $\frac{|2 \cos \alpha + 2 \sqrt{3} \sin \alpha + 11|}{\sqrt{7}} =$

$$\frac{4 \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + 11}{\sqrt{7}}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

当 $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ 时, $4 \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) + 11$ 取得最小值 7, 故 C 上的点

到 l 距离的最小值为 $\sqrt{7}$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

> 快解

利用万能公式 $\sin \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}, \cos \alpha =$

$\frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$ 求 C 的直角坐标方程. 令 $t = \tan \frac{\alpha}{2}$, 则 $x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} =$

$\cos \alpha, y = \frac{4t}{1 + t^2} = 2 \sin \alpha$, 则 C 的直角坐标方程为 $x^2 + \left(\frac{y}{2} \right)^2 =$

$1 (x \neq -1)$, 即 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq -1)$.

23. 【命题点】利用基本不等式证明不等式

【证明】(1) 因为 $a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ac$, 又

$abc = 1$, 故有 $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq a^2 + b^2 + c^2$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 因为 a, b, c 为正数且 $abc = 1$, 故有

$$(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3$$

$$\geq 3 \sqrt[3]{(a+b)^3 (b+c)^3 (c+a)^3}$$

$$= 3(a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\geq 3 \times (2\sqrt{ab}) \times (2\sqrt{bc}) \times (2\sqrt{ac}) = 24.$$

所以 $(a+b)^3 + (b+c)^3 + (c+a)^3 \geq 24$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$