

1. C 【命题点】集合的交集运算

【解析】 $\because A = \{x | x-1 \geq 0\} = \{x | x \geq 1\}, B = \{0, 1, 2\},$

$\therefore A \cap B = \{1, 2\}$. 故选 C.

2. D 【命题点】复数的乘法运算

【解析】 $(1+i)(2-i) = 2-i+2i-i^2 = 2+i+1 = 3+i$. 故选 D.

3. A 【命题点】三视图的判断

【解析】根据题意,题图中的小长方体能够完全放进带卯眼的木构件的卯眼中,由于咬合时小长方体在外面是看不到的,所以应画成虚线. 故选 A.

4. B 【命题点】二倍角公式的应用

【解析】 $\because \sin \alpha = \frac{1}{3}, \therefore \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 -$

$\frac{2}{9} = \frac{7}{9}$. 故选 B.

5. B 【命题点】互斥事件的概率

【解析】设事件 A 为只用现金支付,事件 B 为不用现金支付,事件 C 为既用现金支付也用非现金支付,则 A, B, C 刚好组成全事件,且 A, B, C 为互斥事件,则 $P(B) = 1 - P(A) - P(C) = 1 - 0.15 - 0.45 = 0.4$. 故选 B.

6. C 【命题点】三角函数的周期

【解析】 $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{1}{2} \sin 2x, \therefore f(x)$ 的最小正

周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$. 故选 C.

7. B 【命题点】函数图像的对称性

【解析】设点 (x, y) 是函数 $y = \ln x$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称的图像上任一点,则点 $(2-x, y)$ 在函数 $y = \ln x$ 的图像上,

\therefore 函数 $y = \ln(2-x)$ 的图像与 $y = \ln x$ 的图像关于直线 $x = 1$ 对称. 故选 B.

8. A 【命题点】直线与圆、点到直线的距离

【解析】设点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离为 d , 则 $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot$

$|AB| \cdot d$. 由题可得, $A(-2, 0), B(0, -2), \therefore |AB| = 2\sqrt{2}$.

\therefore 圆心 $(2, 0)$ 到直线 $x+y+2=0$ 的距离为 $\frac{|2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2\sqrt{2}$,

$\therefore d$ 的最大值为 $2\sqrt{2} + r = 3\sqrt{2}$, 最小值为 $2\sqrt{2} - r = \sqrt{2}$,

$\therefore S_{\triangle ABP}$ 的最大值为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$, 最小值为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times$

$\sqrt{2} = 2, \therefore \triangle ABP$ 面积的取值范围是 $[2, 6]$. 故选 A.

一题多解 \because 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴、 y 轴交于 A, B

两点, $\therefore A(-2, 0), B(0, -2), \therefore |AB| = 2\sqrt{2}$. \because 点 P 在圆 $(x-2)^2 + y^2 = 2$ 上, \therefore 可设 $P(2+\sqrt{2}\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta), \theta \in [0, 2\pi)$, \therefore 点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离 $d =$

$$\frac{|2+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta+2|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+4\right|}{\sqrt{2}}.$$

$\because \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \in [-1, 1], \therefore d \in [\sqrt{2}, 3\sqrt{2}]$.

$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2}|AB|d \in [2, 6]$. 故选 A.

9. D 【命题点】函数图像的识别

【解析】当 $x=0$ 时, $y=2$, 排除 A, B; 由题得 $y' = -4x^3 + 2x =$

$-2x(2x^2-1)$, 令 $y'=0$, 解得 $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $x=0$,

当 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时, $y' > 0$, 函数 y 单调递增, 排除 C, 故选 D.

10. D 【命题点】双曲线的几何性质, 点到直线的距离

【解析】由题意得 $\frac{c}{a} = \sqrt{2}$, $\therefore \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 2$,

$\therefore \frac{b^2}{a^2} = 1$, \therefore 渐近线方程为 $y = \pm x$,

则点 $(4, 0)$ 到 C 的渐近线的距离 $d = \frac{|\pm 4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

故选 D.

11. C 【命题点】利用余弦定理解三角形

【解析】由余弦定理得 $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$,

$\therefore a^2+b^2-c^2 = 2ab\cos C$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4} = \frac{2ab\cos C}{4}$,

$\therefore \tan C = 1$. 又 $0 < C < \pi$, $\therefore C = \frac{\pi}{4}$. 故选 C.

12. B 【命题点】三棱锥及其外接球

【解析】设 $\triangle ABC$ 的边长为 a , 则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$, 解

得 $a=6$. 球心在 $\triangle ABC$ 上的投影位于 $\triangle ABC$ 的中心处,

设 $\triangle ABC$ 的中心为点 E , 由正三角形的性质得 $AE = BE =$

$CE = 2\sqrt{3}$. 设球心到 $\triangle ABC$ 的距离为 d , \therefore 根据几何关系可

得 $R^2 - (2\sqrt{3})^2 = d^2$, 解得 $d=2$,

\therefore 点 D 到 $\triangle ABC$ 所在平面距离的最大值为 $d+R=2+4=6$

(提示: 底面积不变, 要使体积最大, 则高最大),

\therefore 三棱锥 $D-ABC$ 体积的最大值为 $V_{D-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \times 6 =$

$18\sqrt{3}$. 故选 B.

13. $\frac{1}{2}$ 【命题点】向量的坐标运算、向量平行

【解析】 $2\mathbf{a}+\mathbf{b}=2(1,2)+(2,-2)=(4,2)$, 又 $\because \mathbf{c}\parallel(2\mathbf{a}+\mathbf{b})$,
 $\therefore 4\times\lambda-2\times1=0, \therefore \lambda=\frac{1}{2}$.

方法速记 向量平行的判定: 已知 $\mathbf{a}=(x_1, y_1), \mathbf{b}=(x_2, y_2)$, 若 $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$, 则 $x_1y_2-x_2y_1=0$.

14. 分层抽样 【命题点】抽样方法的选择

【解析】因为客户数量较大, 且不同年龄段客户对服务评价有较大的差异, 所以应采用分层抽样.

15.3 【命题点】线性规划求最值

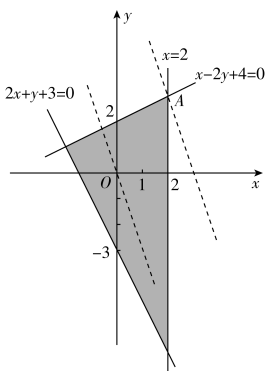
【解析】画出不等式组表示的平面区域, 如图中阴影部分所示,

将目标函数 $z=x+\frac{1}{3}y$ 变形可得

$y=-3x+3z$, 平移直线 $y=-3x$, 由图可得 z 在点 A 处取得最大值.

$$\text{由} \begin{cases} x-2y+4=0, \\ x=2 \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=2, \\ y=3, \end{cases}$$

所以 $A(2,3)$, 所以 $z_{\max}=2+\frac{1}{3}\times3=3$.



16.-2 【命题点】奇函数的性质

【解析】设 $g(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x), x\in\mathbf{R}$,

则 $g(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$,

$\therefore g(x)+g(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=\ln(1+x^2-x^2)=0, \therefore g(x)$ 是奇函数.

$\therefore f(x)=g(x)+1, f(-x)=g(-x)+1$.

$\therefore f(a)=4, \therefore g(a)=f(a)-1=3$,

$\therefore g(-a)=-g(a)=-3, \therefore f(-a)=g(-a)+1=-2$.

方法速记 奇函数的性质: (1) 定义域关于原点对称;
 (2) $f(-x)=-f(x)$;
 (3) 当 0 属于定义域时, 有 $f(0)=0$.

17. 【命题点】等比数列的通项公式及前 n 项和公式

【解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题设得 $a_n=q^{n-1}$ 2 分
 由已知得 $q^4=4q^2$, 解得 $q=0$ (舍去), $q=-2$ 或 $q=2$ 4 分
 故 $a_n=(-2)^{n-1}$ 或 $a_n=2^{n-1}$ 6 分

(2) 若 $a_n=(-2)^{n-1}$, 则 $S_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$ 8 分

由 $S_m=63$ 得 $(-2)^m=-188$, 此方程没有正整数解. 10 分

若 $a_n=2^{n-1}$, 则 $S_n=2^n-1$. 由 $S_m=63$ 得 $2^m=64$, 解得 $m=6$.

综上, $m=6$ 12 分

18. 【命题点】茎叶图、独立性检验

【解】(1) 第二种生产方式的效率更高.

理由如下(任写一种即可):

(i) 由茎叶图可知: 用第一种生产方式的工人中, 有 75% 的工人完成生产任务所需时间至少 80 分钟, 用第二种生产方式的工人中, 有 75% 的工人完成生产任务所需时间至多 79 分钟. 因此第二种生产方式的效率更高.

(ii) 由茎叶图可知: 用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 85.5 分钟, 用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间的中位数为 73.5 分钟. 因此第二种生产方式的效率更高.

(iii) 由茎叶图可知: 用第一种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间高于 80 分钟; 用第二种生产方式的工人完成生产任务平均所需时间低于 80 分钟. 因此第二种生产方式的效率更高.

(iv) 由茎叶图可知: 用第一种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 8 上的最多, 关于茎 8 大致呈对称分布; 用第二种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布在茎 7 上的最多, 关于茎 7 大致呈对称分布. 又因为用两种生产方式的工人完成生产任务所需时间分布的区间相同, 故可以认为用第二种生产方式完成生产任务所需的时间比用第一种生产方式完成生产任务所需的时间更少. 因此第二种生产方式的效率更高. 4 分

(2) 由茎叶图可知中位数 $m = \frac{79+81}{2} = 80$.

列联表如下:

	超过 m	不超过 m
第一种生产方式	15	5
第二种生产方式	5	15

.....8 分

(3) 由于 $K^2 = \frac{40 \times (15 \times 15 - 5 \times 5)^2}{20 \times 20 \times 20 \times 20} = 10 > 6.635$, 所以有 99% 的把握认为两种生产方式的效率有差异. 12 分

19. 【命题点】面面垂直的证明、线面平行的判定

(1) 【证明】由题设知, 平面 $CMD \perp$ 平面 $ABCD$, 交线为 CD . 因为 $BC \perp CD, BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BC \perp$ 平面 CMD , 又因为 $DM \subset$ 平面 CMD , 故 $BC \perp DM$ 2 分
因为 M 为 \widehat{CD} 上异于 C, D 的点, 且 DC 为直径, 所以 $DM \perp CM$.

又 $BC \cap CM = C$, 所以 $DM \perp$ 平面 BMC 4 分

而 $DM \subset$ 平面 AMD , 故平面 $AMD \perp$ 平面 BMC 6 分

(2)【解】当 P 为 AM 的中点时, $MC \parallel$ 平面 PBD 7 分

理由如下: 连接 AC, BD 交于点 O .

因为 $ABCD$ 为矩形, 所以 O 为 AC 中点. 8 分

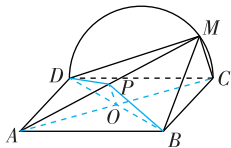
连接 OP , 因为 P 为 AM 中点,

所以 $MC \parallel OP$ 10 分

因为 $MC \not\subset$ 平面 PBD ,

$OP \subset$ 平面 PBD ,

所以 $MC \parallel$ 平面 PBD 12 分



20. 【命题点】直线与椭圆的位置关系、等差数列的证明

【证明】(1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1$,

两式相减, 并由 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = k$ 得 $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{-3(x_1 + x_2)}{4(y_1 + y_2)}$, 2 分

(弦的中点问题常用点差法)

由题设知 $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1, \frac{y_1 + y_2}{2} = m$, 于是 $k = -\frac{3}{4m}$ 3 分

由于点 A, B 均在椭圆上, 点 M 为 AB 中点, 则点 M 必在椭圆

内, 即 $\frac{1^2}{4} + \frac{m^2}{3} < 1$, 解得 $0 < m < \frac{3}{2}$, 故 $k < -\frac{1}{2}$ 6 分

(2) 由题意得 $F(1, 0)$. 设 $P(x_3, y_3)$, 则

$(x_3 - 1, y_3) + (x_1 - 1, y_1) + (x_2 - 1, y_2) = (0, 0)$ 7 分

由(1)及题设得 $x_3 = 3 - (x_1 + x_2) = 1, y_3 = -(y_1 + y_2) = -2m < 0$.

..... 8 分

又点 P 在 C 上, 将 $P(1, -2m)$ 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 中,

解得 $m = \frac{3}{4}$, 从而 $P\left(1, -\frac{3}{2}\right), |\overrightarrow{FP}| = \frac{3}{2}$ 9 分

于是 $|\overrightarrow{FA}| = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1 - 1)^2 + 3\left(1 - \frac{x_1^2}{4}\right)} = 2 - \frac{x_1}{2}$.

同理 $|\overrightarrow{FB}| = 2 - \frac{x_2}{2}$ 10 分

所以 $|\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}| = 4 - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = 3$ 11 分

故 $2|\overrightarrow{FP}| = |\overrightarrow{FA}| + |\overrightarrow{FB}|$ 12 分

(从等差中项的角度判定等差数列)

一题多解 (1) 设直线 $AB: y = kx + t, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 当 $k = 0$ 时, 显然不满足题意; 1 分

当 $k \neq 0$ 时, 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = kx + t, \end{cases}$ 得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8ktx + 4t^2 - 12 = 0$, 所以 $\Delta = 48(4k^2 + 3 - t^2) > 0$, 即 $4k^2 + 3 - t^2 > 0, x_1 + x_2 =$

$-\frac{8kt}{3 + 4k^2}$ 3 分

因为 $\frac{x_1+x_2}{2}=1$, 所以 $3+4k^2=-4kt$ 4 分

又 $m=k+t=k-\frac{4k^2+3}{4k}=-\frac{3}{4k}>0$, 所以 $k<0$ 5 分

因为 $4k^2+3-\left(-\frac{4k^2+3}{4k}\right)^2>0$, 所以 $k^2>\frac{1}{4}$, 解得 $k<-\frac{1}{2}$.

..... 6 分

(2) 由椭圆 C 的方程可得 $F(1,0)$, 因为线段 AB 的中点为 $M(1,m)$, 所以 $x_1+x_2=2$ 8 分

由 $\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}=\mathbf{0}$, 知点 F 为 $\triangle PAB$ 的重心, 由三角形重心坐标公式可得 $x_p=\frac{x_1+x_2+1}{3}=1$, 9 分

由椭圆 C 的方程可知, 离心率 $e=\frac{1}{2}$,

由椭圆的焦半径公式得 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=(a-ex_1)+(a-ex_2)=2a-e(x_1+x_2)=3$, $|\overrightarrow{FP}|=a-ex_p=\frac{3}{2}$ 11 分

所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|=2|\overrightarrow{FP}|$ 12 分

方法速记 在平面直角坐标系中, 若点 $M(x,y)$ 与定点

$F(c,0)$ (或 $F'(-c,0)$) 的距离和它到定直线 $l:x=\frac{a^2}{c}$ (或

$l':x=-\frac{a^2}{c}$) 的距离的比是常数 $\frac{c}{a}$ ($0<c<a$), 则点 M 的轨迹

是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$). 式子表示为 $\frac{|MF|}{\frac{a^2}{c}-x}=e$, 所以

$|MF|=a-ex$; 同理, $|MF'|=a+ex$, 此两式为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

($a>b>0$) 的焦半径公式.

21. 【命题点】导数的几何意义、不等式恒成立问题

(1) 【解】 $f'(x)=\frac{-ax^2+(2a-1)x+2}{e^x}$, $f'(0)=2$. 因此曲线 $y=$

$f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程是 $2x-y-1=0$ 4 分

(2) 【证明】当 $a\geq 1$ 时, $f(x)+e=(ax^2+x-1+e^{x+1})e^{-x}\geq (x^2+x-1+e^{x+1})e^{-x}$ 6 分

令 $g(x)=x^2+x-1+e^{x+1}$, 则 $g'(x)=2x+1+e^{x+1}$ 8 分

当 $x<-1$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x>-1$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增. 10 分

所以 $g(x)\geq g(-1)=0$. 因此 $f(x)+e\geq 0$ 12 分

一题多解 (2) 函数 $y=f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x)=$

$$-\frac{(x-2)(ax+1)}{e^x}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当 $a \geq 1$ 时, 令 $f'(x)=0$, 得 $x=2$ 或 $x=-\frac{1}{a}$, 其中 $-\frac{1}{a} < 2$.
 8 分

则函数 $y=f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -\frac{1}{a})$, $(2, +\infty)$,
 单调递增区间为 $(-\frac{1}{a}, 2)$ 10 分

又 $f(-\frac{1}{a}) = -e^{\frac{1}{a}} < 0$, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, 故
 $f(x)_{\min} = f(-\frac{1}{a}) = -e^{\frac{1}{a}} \geq -e$, 故当 $a \geq 1$ 时, $f(x) + e \geq 0$.
 12 分

22. 【命题点】参数方程的应用

【解】(1) $\odot O$ 的直角坐标方程为 $x^2+y^2=1$.

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, l 与 $\odot O$ 交于两点. 2 分

当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ 时, 记 $\tan \alpha = k$, 则 l 的方程为 $y=kx-\sqrt{2}$, 当且仅当

$$\left| \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+k^2}} \right| < 1 \text{ 时, } l \text{ 与 } \odot O \text{ 交于两点, 解得 } k < -1 \text{ 或 } k > 1, \text{ 即}$$

$$\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 或 } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right).$$

综上, α 的取值范围是 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right)$ 5 分

$$(2) \text{ 设 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = -\sqrt{2} + t \sin \alpha \end{cases} \left(t \text{ 为参数, } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4} \right).$$

..... 6 分

点 A, B, P 对应的参数分别为 t_A, t_B, t_P , 则 $t_P = \frac{t_A+t_B}{2}$, 且 t_A, t_B

满足 $t^2 - 2\sqrt{2}t \sin \alpha + 1 = 0$ 7 分

于是 $t_A+t_B = 2\sqrt{2} \sin \alpha$, $t_P = \sqrt{2} \sin \alpha$. 又点 P 的坐标 (x, y) 满足

$$\begin{cases} x = t_P \cos \alpha, \\ y = -\sqrt{2} + t_P \sin \alpha, \end{cases} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

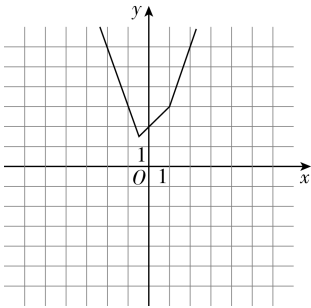
所以点 P 的轨迹的参数方程是

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2\alpha, \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2\alpha \end{cases} \left(\alpha \text{ 为参数, } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{3\pi}{4} \right). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 【命题点】含绝对值的函数的图像,不等式恒成立问题

【解】(1) $f(x)=\begin{cases}-3x,x<-\frac{1}{2},\\x+2,-\frac{1}{2}\leq x<1,\\3x,x\geq 1.\end{cases}$

$y=f(x)$ 的图像如图所示.



..... 5 分

(2)由(1)知, $y=f(x)$ 的图像与 y 轴交点的纵坐标为 2,各部分所在直线斜率的最大值为 3,故当且仅当 $a\geq 3$ 且 $b\geq 2$ 时, $f(x)\leq ax+b$ 在 $[0,+\infty)$ 成立,因此 $a+b$ 的最小值为 5.

..... 10 分