

1. B 【命题点】集合的交集运算

【解析】因为 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$,
所以 $A \cap B = \{2, 3\}$, 故选 B.

2. C 【命题点】复数的乘法运算、共轭复数

【解析】因为 $z = 2 - i$, 所以 $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 2^2 + (-1)^2 = 5$, 所以 $z(\bar{z} + i) = z \cdot \bar{z} + zi = 5 + (2 - i)i = 6 + 2i$,
故选 C.

3. B 【命题点】圆锥的侧面展开图、母线长的计算

【解析】设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 因为圆锥的侧面展开图是一个半圆, 所以 $2\pi r = \pi l$ (提示: 圆锥的底面周长等于其侧面展开图的弧长), 即 $l = 2r = 2\sqrt{2}$, 所以圆锥的母线长为 $2\sqrt{2}$, 故选 B.

4. A 【命题点】正弦型函数的单调区间

【解析】由 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 得 $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以函数 $f(x) = 7\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$, 所以 B, C, D 错误, A 正确, 故选 A.

快解

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $-\frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 故 A 正确.

5. C 【命题点】椭圆的定义、利用基本不等式求最值

【解析】由题意可知, $|MF_1| + |MF_2| = 2a = 6$, 所以 $|MF_1| \cdot |MF_2| \leq \left(\frac{|MF_1| + |MF_2|}{2}\right)^2 = 9$ (提示: 也可配方求解, 设 $|MF_1| = m$, 则 $|MF_2| = 6 - m$, $|MF_1| \cdot |MF_2| = m(6 - m) = -(m - 3)^2 + 9 \leq 9$, 当 $m = 3$ 时取等号), 当且仅当 $|MF_1| = |MF_2| = 3$ 时, 等号成立, 所以 $|MF_1| \cdot |MF_2|$ 的最大值为 9, 故选 C.

一题多解

设 $M(x, y)$, 则 $|MF_1| \cdot |MF_2| = \left(3 + \frac{\sqrt{5}}{3}x\right) \cdot \left(3 - \frac{\sqrt{5}}{3}x\right) = 9 - \frac{5}{9}x^2 \leq 9$ (提示: 设椭圆的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, 椭圆上任一点 $P(x_0, y_0)$, 则焦半径公式为 $|PF_1| = a + \frac{c}{a}x_0$, $|PF_2| = a - \frac{c}{a}x_0$), 当 $x = 0$ 时, 取等号, 故所求最大值为 9. 故选 C.

6. C 【命题点】三角恒等变换、二倍角公式

【解析】因为 $\frac{\sin \theta(1 + \sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\sin \theta(\sin \theta + \cos \theta)^2}{\sin \theta + \cos \theta} =$

$\sin \theta(\sin \theta + \cos \theta) = \frac{\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}$ (提示:也可利用 $\sin \theta =$

$-2\cos \theta$ 化为正弦或余弦求解) $= \frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + 1} = \frac{\tan^2 \theta + \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} =$

$\frac{4-2}{4+1} = \frac{2}{5}$, 故选 C.

一题多解

由 $\tan \theta = -2$ 得 $\sin^2 \theta = \frac{4}{5}$, $\sin \theta \cdot \cos \theta = -\frac{2}{5}$. 故 $\frac{\sin \theta(1 + \sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\sin \theta(\sin \theta + \cos \theta)^2}{\sin \theta + \cos \theta} = \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{5}$, 故选 C.

7. D 【命题点】导数的几何意义

【解析】设切点为 (x_0, y_0) , 因为 $y' = e^x$, 所以曲线 $y = e^x$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$. 又因为点 (a, b) 在此切线上, 所以 $b - e^{x_0} = e^{x_0}(a - x_0)$, 整理得 $b = (a - x_0 + 1)e^{x_0}$. 令 $f(x) = (a - x + 1)e^x$, 所以 $f'(x) = (a - x)e^x$, 则当 $x < a$ 时, 函数 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增; 当 $x > a$ 时, 函数 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得最大值 $f(a) = e^a$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$ (提示: 判断极值点两侧的图像趋势). 因为过点 (a, b) 的切线有两条, 即方程 $b = (a - x_0 + 1)e^{x_0}$ 有两个不相等的实数根, 所以 $0 < b < e^a$, 故选 D.

8. B 【命题点】相互独立事件的判断

【解析】由题意可知, 甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”, 记为 $(1, i)$, $i = 1, 2, \dots, 6$; 乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”, 记为 $(j, 2)$, $j = 1, 2, \dots, 6$; 丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”, 记为 (m, n) , $m, n = 1, 2, \dots, 6$ (提示: 注意是“有放回”), 且 $m + n = 8$; 丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”, 记为 (p, q) , $p, q = 1, 2, \dots, 6$, 且 $p + q = 7$. 则 $P(\text{甲}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(\text{乙}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(\text{丙}) = \frac{5}{36}$, $P(\text{丁}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(\text{甲丙}) = 0$, $P(\text{甲丁}) = \frac{1}{36}$, $P(\text{乙丙}) = \frac{1}{36}$, $P(\text{丙丁}) = 0$, 故 $P(\text{甲丁}) = P(\text{甲})P(\text{丁})$ (提示: 若事件 A, B 满足 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则事件 A, B 相互独立), 故选 B.

9. CD 【命题点】样本数据同时加同一个数对平均数、中位数、标准差和极差的影响

【解析】对于选项 A, 因为原样本数据的样本平均数 $\bar{x} =$

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \text{ 新样本数据的样本平均数 } \bar{y} =$$

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} + c = \bar{x} + c, \text{ 又 } c \neq 0, \text{ 所}$$

以两组样本数据的样本平均数不相同, 故 A 错误; 对于选项

B, 设样本数据 x_1, x_2, \cdots, x_n 的中位数为 M , 则样本数据 $y_1,$

y_2, \cdots, y_n 的中位数为 $M + c$, 又 $c \neq 0$, 所以两组样本数据的样

本中位数不相同, 故 B 错误; 对于选项 C, 新样本数据的样本

$$\text{标准差 } s_y = \sqrt{\frac{(y_1 - \bar{y})^2 + (y_2 - \bar{y})^2 + \cdots + (y_n - \bar{y})^2}{n}} =$$

$$\sqrt{\frac{[(x_1 + c) - (\bar{x} + c)]^2 + [(x_2 + c) - (\bar{x} + c)]^2 + \cdots + [(x_n + c) - (\bar{x} + c)]^2}{n}} =$$

$$\sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2}{n}} = s_x, \text{ 故 C 正确; 对}$$

于选项 D, 设样本数据 x_1, x_2, \cdots, x_n 中, x_n 最大, x_1 最小, 因为

$y_i = x_i + c$, 所以样本数据 y_1, y_2, \cdots, y_n 中, y_n 最大, y_1 最小, 极

差 $y_n - y_1 = (x_n + c) - (x_1 + c) = x_n - x_1$, 故 D 正确. 故选 CD.

方法速记 将一组数据中的每个数据都加或减同一个非零常数后, 样本平均数和中位数改变, 方差、标准差和极差不变.

10. AC 【命题点】平面向量的数量积、模的坐标表示及两角和的余弦公式

【解析】对于选项 A, 因为 $\overrightarrow{OP_1} = (\cos \alpha, \sin \alpha), \overrightarrow{OP_2} = (\cos \beta,$

$-\sin \beta)$, 所以 $|\overrightarrow{OP_1}| = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = 1, |\overrightarrow{OP_2}| =$

$\sqrt{\cos^2 \beta + (-\sin \beta)^2} = 1$, 则 $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$, 故 A 正确; 对于

选项 B, 因为 $\overrightarrow{AP_1} = (\cos \alpha - 1, \sin \alpha),$

$\overrightarrow{AP_2} = (\cos \beta - 1, -\sin \beta)$, 所以 $|\overrightarrow{AP_1}| =$

$\sqrt{(\cos \alpha - 1)^2 + \sin^2 \alpha} = \sqrt{2 - 2\cos \alpha}, |\overrightarrow{AP_2}| =$

$\sqrt{(\cos \beta - 1)^2 + (-\sin \beta)^2} = \sqrt{2 - 2\cos \beta}$, 当 $\cos \alpha \neq$

$\cos \beta$ 时, $|\overrightarrow{AP_1}| \neq |\overrightarrow{AP_2}|$, 故 B 错误; 对于选项 C, $\overrightarrow{OA} = (1,$

$0), \overrightarrow{OP_3} = (\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$, 所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} =$

$\cos(\alpha + \beta), \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2} = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha +$

$\beta)$, 所以 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$, 故 C 正确; 对于选项 D, $\overrightarrow{OA} \cdot$

$\overrightarrow{OP_1} = \cos \alpha, \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \cos \beta \cos(\alpha + \beta) - \sin \beta \sin(\alpha +$

$\beta) = \cos[\beta + (\alpha + \beta)] = \cos(\alpha + 2\beta)$, 当 $\beta \neq k\pi$ 且 $\beta \neq$

$k\pi - \alpha (k \in \mathbf{Z})$ 时, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} \neq \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}$, 故 D 错误. 故

选 AC.

快解 如图,由图可

知 $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}| = 1$, 故

A 正确; 当且仅当 $\cos \alpha =$

$\cos \beta$ 时, $|\overrightarrow{AP_1}| = |\overrightarrow{AP_2}|$

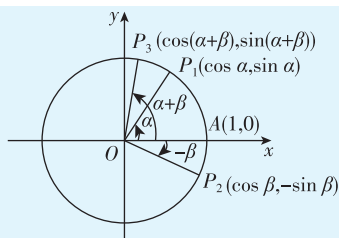
成立, 故 B 错误; 因为

$\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP_3} \rangle = \alpha + \beta$, $\langle \overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2} \rangle = \alpha + \beta$, 且 $|\overrightarrow{OA}| =$

$|\overrightarrow{OP_3}| = |\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$, 故 C 正确; $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP_1} \rangle = \alpha$, $\langle \overrightarrow{OP_2},$

$\overrightarrow{OP_3} \rangle = \alpha + 2\beta$, 因为 $\cos \langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP_1} \rangle$ 与 $\cos \langle \overrightarrow{OP_2}, \overrightarrow{OP_3} \rangle$ 不一定相

等, 故 D 错误. 故选 AC.



11. ACD 【命题点】圆上的点到直线的距离的最值、直线和圆相切求切线长

【解析】 由题意知, 圆 $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$ 的圆心 $C(5, 5)$,

半径 $r = 4$. 又 $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, 则直线 AB 的方程为 $\frac{x}{4} +$

$\frac{y}{2} = 1$, 即 $x + 2y - 4 = 0$, 则圆心 $C(5, 5)$ 到直线 AB 的距

离 $d = \frac{|5 + 2 \times 5 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$. 对于选项 A, 因为点 P 到

直线 AB 的距离的最大值为 $d + r = \frac{11\sqrt{5}}{5} + 4$, 且 $\left(\frac{11\sqrt{5}}{5} + 4\right) -$

$10 = \frac{11\sqrt{5}}{5} - 6 = \frac{11\sqrt{5} - 30}{5} < 0$, 所以点 P 到直线 AB 的距离

小于 10, 故 A 正确. 对于选项 B, 因为点 P 到直线 AB 的距离

的最小值为 $d - r = \frac{11\sqrt{5}}{5} - 4$, 且 $\left(\frac{11\sqrt{5}}{5} - 4\right) - 2 =$

$\frac{11\sqrt{5}}{5} - 6 < 0$, 所以点 P 到直线 AB 的距离小于 2, 故 B 错误.

一题多解

对于选项 A, B: 直线 AB 的方程为 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} =$

1, 即 $x + 2y - 4 = 0$. 设 $P(5 + 4\cos \theta, 5 + 4\sin \theta)$, 则点 P 到直

线 AB 的距离 $d = \frac{|5 + 4\cos \theta + 2(5 + 4\sin \theta) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} =$

$\frac{11 + 4\sqrt{5}\sin(\theta + \varphi)}{\sqrt{5}} = \frac{11\sqrt{5}}{5} + 4\sin(\theta + \varphi)$. 因为 $d_{\max} -$

$10 = \frac{11\sqrt{5}}{5} + 4 - 10 < 0$, $d_{\min} - 2 = \frac{11\sqrt{5}}{5} - 4 - 2 < 0$, 所

以 A 选项正确, B 选项错误.

对于选项 C, 当直线 $PB(P_1B)$ 与圆 C

相切时, $\angle PBA$ 最小, 如图. 因为

$|CB| = \sqrt{(5-0)^2 + (5-2)^2} =$

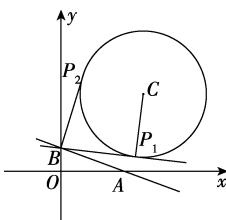
$\sqrt{34}$, $|CP| = r = 4$, 所以 $|PB| =$

$\sqrt{|CB|^2 - |CP|^2} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 4^2} =$

$3\sqrt{2}$, 故 C 正确; 对于选项 D, 当 $\angle PBA$ 最大时, 直线

$PB(P_2B)$ 与圆 C 也相切, 由圆的切线性质知, 此时切线长

$|PB| = 3\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 ACD.



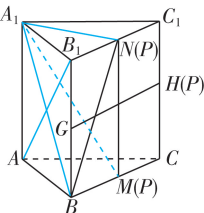
关键点拨 当 $\angle PBA$ 最大、最小时, 直线 PB 与圆 C 相切.

12. BD 【命题点】 立体几何中点的轨迹问题、锥体的体积、线线垂直和线面垂直的判定

【解析】 对于选项 A, 当 $\lambda = 1$ 时, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BB_1}$, $\mu \in [0, 1]$, 所以点 P 在线段 CC_1 上. 当 $\mu = 0$ 时, 点 P 与点 C 重合, 此时 $\triangle AB_1P$ 的周长为 $AB_1 + AC + B_1C = 2\sqrt{2} + 1$; 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, 点 P 为线段 CC_1 的中点, 此时 $AP = B_1P =$

$\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\triangle AB_1P$ 的周长为 $AB_1 + AP + B_1P = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. 所以 $\triangle AB_1P$ 的周长不是定值, 故 **A 错误**. 对于选项 B, 当 $\mu = 1$ 时, $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$, $\lambda \in [0, 1]$, 所以点 P 在线段 B_1C_1 上. 因为 $B_1C_1 \parallel BC$, $B_1C_1 \not\subset$ 平面 A_1BC , $BC \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $B_1C_1 \parallel$ 平面 A_1BC , 即点 P 到平面 A_1BC 的距离为定值. 又 $\triangle A_1BC$ 的面积为定值, 所以三棱锥 $P - A_1BC$ 的体积为定值, 故 **B 正确**. 对于选项 C, 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时,

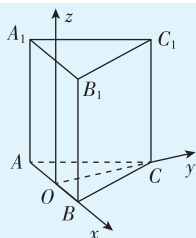
$\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BB_1}$, 设 M, N 分别为 BC, B_1C_1 的中点, 连接 MN , 则点 P 在线段 MN 上. 当 $\mu = 0$ 时, 点 P 与点 M 重合, 如图, 连接 A_1N, A_1M, BN . 因为 $A_1N \perp B_1C_1$, $A_1N \perp B_1B$, 且 $B_1C_1 \cap B_1B = B_1$, 所以 $A_1N \perp$ 平面 B_1C_1CB , 则 $A_1N \perp BC$. 又 $BC \perp MN$, 且 $A_1N \cap MN = N$, 所以 $BC \perp$ 平面 A_1NM , 又 $A_1M \subset$ 平面 A_1NM , 所以 $BC \perp A_1M$, 即 $BP \perp A_1P$. 当 $\mu = 1$ 时, 点 P 与点 N 重合, 因为 $A_1N \perp$ 平面 B_1C_1CB , $BP \subset$ 平面 B_1C_1CB , 则 $A_1N \perp BP$, 即 $A_1P \perp BP$. 所以满足 $A_1P \perp BP$ 的点 P 不唯一, 故 **C 错误**.



对于选项 D, 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$, 设 G, H 分别为 BB_1, CC_1 的中点, 则点 P 在线段 GH 上, 连接 A_1B, AB_1 . 因为 $A_1B \perp AB_1$, 若 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P , 则 $A_1B \perp B_1P$. 由选项 C 知 $A_1N \perp B_1P$, 又 $A_1B \cap A_1N = A_1$, 所以 $B_1P \perp$ 平面 A_1BN , 则 $B_1P \perp BN$, 由正方形的性质知, 当且仅当点 P 与点 H 重合, 即 $\lambda = 1$ 时, $B_1P \perp BN$, 所以满足 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P 的点 P 唯一, 故 **D 正确**. 故选 **BD**.

一题多解 对于选项 C, 如图所示, 建立空间直角坐标系,

则 $B\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $B_1\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$, $A_1\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$. 设 $P(x_0, y_0,$



z_0). 因为 $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BB_1}$,

所以 $\overrightarrow{BP} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, 0\right) + (0, 0, \mu) = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \mu\right)$.

$$\text{又 } \overrightarrow{BP} = \left(x_0 - \frac{1}{2}, y_0, z_0\right), \text{ 所以 } \begin{cases} x_0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}, \\ y_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ z_0 = \mu, \end{cases} \quad \text{则 } \begin{cases} x_0 = \frac{1}{4}, \\ y_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ z_0 = \mu, \end{cases}$$

所以 $P\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \mu\right)$,

所以 $\overrightarrow{A_1P} = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \mu - 1\right), \overrightarrow{BP} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}, \mu\right)$.

$$\text{而 } \overrightarrow{A_1P} \cdot \overrightarrow{BP} = -\frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \mu^2 - \mu = 0,$$

所以 $\mu = 0$ 或 1 , 故 C 错误.

对于选项 D, $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BB_1}$, 如图, 建立空间直角坐标

系, 取 BB_1 的中点为 K . 则 $\frac{1}{2} \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BK}, \overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BK}$, 所以

$\overrightarrow{KP} = \lambda \overrightarrow{BC}$. 所以 $KP \parallel BC$. 取 CC_1 的

中点 L , 所以 $P \in KL$.

又 $B\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right), B_1\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right),$

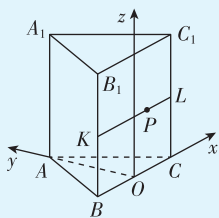
$A\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), A_1\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right), P\left(\lambda -$

$\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, 则 $\overrightarrow{A_1B} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right), \overrightarrow{AP} = \left(\lambda - \frac{1}{2},$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 若 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P , 则 $A_1B \perp AP$, 所以 $\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{AP} =$

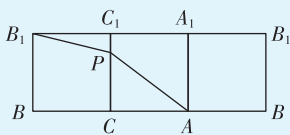
0 , 所以 $\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0$. 解得 $\lambda = 1$. 故仅有一点 P 满足题意, 故 D

正确.



学霸解题 · 技巧 南开大学 姜明宇

在判断 A 项时, 可考虑将侧面沿 BB_1 展开, 如图所示.



易知点 P 为 CC_1 上的动点, 则 $B_1P + PA$ 不为定值, 进而排除 A 选项.

13.1 【命题点】函数的奇偶性

【解析】由题意可知函数 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 则 $f(x) = f(-x)$, 即 $x^3(a \cdot 2^x - 2^{-x}) = (-x)^3(a \cdot 2^{-x} - 2^x)$, 整理得 $x^3(a - 1)(2^{-x} + 2^x) = 0$ 恒成立, 解得 $a = 1$.

一题多解

由题意可知函数 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 则 $f(-1) = -\left(\frac{a}{2} - 2\right) = f(1) = 2a - \frac{1}{2}$, 解得 $a = 1$. 则 $f(x) = x^3(2^x - 2^{-x})$, 是 \mathbf{R} 上的偶函数.

14. $x = -\frac{3}{2}$ 【命题点】抛物线的几何性质

【解析】由题意, 不妨设 $P\left(\frac{p}{2}, p\right), Q(x, 0)$. 因为 $PQ \perp OP$,

所以 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{OP} = \left(x - \frac{p}{2}, -p\right) \cdot \left(\frac{p}{2}, p\right) = \frac{p}{2} \left(x - \frac{p}{2}\right) - p^2 = 0$, 即 $\frac{p}{2}x - \frac{5}{4}p^2 = 0$, 解得 $x = \frac{5}{2}p$. 又 $|FQ| = 6$, 即 $\frac{5}{2}p - \frac{1}{2}p = 6$, 解得 $p = 3$, 所以抛物线 C 的准线方程为 $x = -\frac{3}{2}$.

一题多解

因为 PF 与 x 轴垂直, 所以不妨设 $P\left(\frac{p}{2}, p\right)$.

又因为 $PQ \perp OP, PF \perp OQ$, 所以 $\frac{|FQ|}{|PF|} = \frac{|PF|}{|OF|} = 2$, 即

$\frac{6}{p} = 2$, 解得 $p = 3$, 则 C 的准线方程为 $x = -\frac{3}{2}$.

15.1

思路导引

根据绝对值定义 $\xrightarrow{\text{去绝对值, 写成分段函数形式}}$ 分段求解最小值 $\rightarrow f(x)$ 的最小值.

【命题点】含绝对值函数的最值

【解析】由题意得 $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 - 2\ln x, & x > \frac{1}{2}, \\ 1 - 2x - 2\ln x, & 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$ 当

$x > \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = 2 - \frac{2}{x} = \frac{2x - 2}{x}$, 则当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时,

$f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递减; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = 1$. 当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时,

$f'(x) = -2 - \frac{2}{x} = \frac{-2x - 2}{x}$, 则 $f'(x) < 0$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上恒

成立, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递减, 所以当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$

时, 函数 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\ln 2 = \ln 4 > 1$. 综上所述, 函

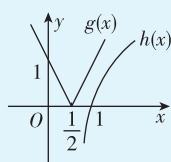
数 $f(x)$ 的最小值为 1.

快解

$f(x) = |2x - 1| - 2\ln x \geq |2x - 1| - 2(x - 1) \geq |2x - 1| - |2x - 2| \geq |(2x - 1) - (2x - 2)| = 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立, 故 $f(x)$ 的最小值为 1.

学霸解题 · 技巧 北京大学 韩茹冰

本题的函数含绝对值和对数, 直接求导找单调区间较难, 可考虑将两部分分离, 设 $g(x) = |2x - 1|$, $h(x) = 2\ln x$, 作出 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的图像如图所示. 易知 $f(x)$



的最小值在 $x > \frac{1}{2}$ 时取得. 令 $h'(x) = \frac{2}{x} = 2$, 解得 $x = 1$, 则

$f(x)_{\min} = g(1) - h(1) = 1$.

思路导引 对折 n 次可以得到不同规格的图形的种数为数列 $\{a_n\}$ $\xrightarrow{\text{根据前几项, 归纳}}$ a_n ; 对折 n 次可以得到不同规格的图形的面积之和为 $\{S_n\}$ $\xrightarrow{\text{根据前几项, 归纳}}$ S_n $\xrightarrow{\text{错位相减法求和}}$ $\sum_{k=1}^n S_k$

【命题点】 数列的通项公式及错位相减法求和

【解析】 记对折 n 次可以得到不同规格图形的种数为数列 $\{a_n\}$, 依题意有 $a_1 = 2, a_2 = 3$, 对折 3 次, 可以得到 $2.5 \text{ dm} \times 12 \text{ dm}, 5 \text{ dm} \times 6 \text{ dm}, 10 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}, 20 \text{ dm} \times 1.5 \text{ dm}$ 四种规格的图形, 即 $a_3 = 4$; 对折 4 次, 可以得到 $1.25 \text{ dm} \times 12 \text{ dm}, 2.5 \text{ dm} \times 6 \text{ dm}, 5 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}, 10 \text{ dm} \times 1.5 \text{ dm}, 20 \text{ dm} \times 0.75 \text{ dm}$ 五种规格的图形, 即 $a_4 = 5$. 于是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n + 1$. 记对折 n 次可以得到不同规格图形的面积之和为 $\{S_n\}$, 依题意有 $S_1 = 2 \times 120 = 240, S_2 = 3 \times 60 = 180, S_3 = 4 \times 30 = 120, S_4 = 5 \times 15 = 75$, 于是数列 $\{S_n\}$ 的通项公式为 $S_n = 120(n + 1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

则 $\sum_{k=1}^n S_k = 120 \left[2 \times 1 + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2^2} + \cdots + n \cdot \frac{1}{2^{n-2}} + (n+1) \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \right]$, 所以 $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k = 120 \left[2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{2^2} + 4 \times \frac{1}{2^3} + \cdots + n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + (n+1) \cdot \frac{1}{2^n} \right]$,

两式作差得,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k &= 120 \left[2 \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + 1 \times \frac{1}{2^3} + \cdots + 1 \times \frac{1}{2^{n-1}} - (n+1) \cdot \frac{1}{2^n} \right] = 120 \left[2 + \frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{2}} - (n+1) \cdot \frac{1}{2^n} \right] \\ &= 120 \left(3 - \frac{n+3}{2^n} \right), \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n S_k = 240 \left(3 - \frac{n+3}{2^n} \right).$$

学霸解题 · 技巧 中国人民大学 杜怡

把折纸看作“长减半”(A) 和“宽减半”(B) 两程序之一. 显然两程序相互独立, 因此折 n 次纸后所得的不同规格的图形分别对应 0 次 A 与 n 次 B, 1 次 A 与 $(n-1)$ 次 B, \cdots , n 次 A 与 0 次 B, 共 $(n+1)$ 类. 故折 n 次纸可得 $(n+1)$ 种规格的图形, 则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为 5.

17. 【命题点】数列的通项公式、数列求和

【解】 (1) $b_1 = a_2 = a_1 + 1 = 2, b_2 = a_4 = a_3 + 1 = a_2 + 2 + 1 = 5$.

$\therefore 2n$ 为偶数, $\therefore a_{2n+1} = a_{2n} + 2, a_{2n+2} = a_{2n+1} + 1$,

$\therefore a_{2n+2} = a_{2n} + 3$, 即 $b_{n+1} = b_n + 3$, 且 $b_1 = 2$, 3 分

$\therefore \{b_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公差的等差数列, $\therefore b_n = 3n - 1$.

..... 5 分

(2) 当 n 为奇数时, $a_n = a_{n+1} - 1, \therefore \{a_n\}$ 的前 20 项和为

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$$

$$= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{19}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$$

$$= [(a_2 - 1) + (a_4 - 1) + \cdots + (a_{20} - 1)] + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{20})$$

$$= 2(a_2 + a_4 + \cdots + a_{20}) - 10. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(由 $b_n = a_{2n}$ 知可将 a_n 中 n 为奇数的情况转化求解)

$$\text{由(1)可知, } a_2 + a_4 + \cdots + a_{20} = b_1 + b_2 + \cdots + b_{10} = 2 \times 10 + \frac{10 \times 9}{2} \times 3 = 155,$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 的前 20 项和为 } 2 \times 155 - 10 = \mathbf{300}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

18. 【命题点】离散型随机变量的分布列与数学期望、方案的选择

【解】(1) 由题知, X 的所有可能取值为 0, 20, 100,

$$\text{则 } P(X=0) = 0.2, P(X=20) = 0.8 \times 0.4 = 0.32, P(X=100) = 0.8 \times 0.6 = 0.48, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

所以 X 的分布列为

X	0	20	100
P	0.2	0.32	0.48

...5 分

(2) 小明应选择先回答 **B 类问题**, 理由如下:

$$\text{由(1)知, } E(X) = 0 \times 0.2 + 20 \times 0.32 + 100 \times 0.48 = 54.4.$$

..... 6 分

若小明先回答 B 类问题, 记 Y 为小明的累计得分, 则 Y 的所有可能取值为 0, 80, 100, 8 分

$$\text{则 } P(Y=0) = 0.4, P(Y=80) = 0.6 \times 0.2 = 0.12, P(Y=100) = 0.6 \times 0.8 = 0.48, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } E(Y) = 0 \times 0.4 + 80 \times 0.12 + 100 \times 0.48 = 57.6 > 54.4,$$

..... 11 分

所以小明应选择先回答 B 类问题. 12 分

易错警示 本题求解的易错之处有两点: 一是忽视两道题都答对的分数是 100 分, 而不是第二道问题回答正确的分数; 二是忘记相互独立事件的概率公式导致求概率出错.

19. 【命题点】利用正弦定理和余弦定理解三角形

(1) 【证明】在 $\triangle ABC$ 中, $BD \sin \angle ABC = a \sin C$.

由正弦定理得 $BD \cdot b = ac$.

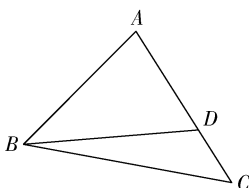
$$\text{又 } b^2 = ac, \text{ 所以 } BD = b. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) 【解】因为 $AD = 2DC, AC = b$,

$$\text{所以 } AD = \frac{2}{3}b, CD = \frac{1}{3}b. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得

$$\cos A = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD} =$$



$$\frac{c^2 + \frac{4}{9}b^2 - b^2}{2c \cdot \frac{2}{3}b} = \frac{9c^2 - 5b^2}{12bc}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} =$

$$\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}. \text{ 所以 } \frac{9c^2 - 5b^2}{12bc} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}, \text{ 整理得 } 6a^2 + 3c^2 - 11b^2 =$$

$$0. \text{ 又 } b^2 = ac, \text{ 所以 } 6a^2 + 3c^2 - 11ac = 0,$$

(在不同的三角形中用余弦定理表示 $\cos A$)

$$\text{解得 } a = \frac{3c}{2} \text{ 或 } a = \frac{c}{3}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又因为 } b^2 = ac > (a-c)^2, \text{ 解得 } \frac{3-\sqrt{5}}{2}c < a < \frac{3+\sqrt{5}}{2}c,$$

(三角形两边之差小于第三边)

$$\text{所以 } a = \frac{3c}{2}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

所以在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$

$$\frac{\frac{9c^2}{4} + c^2}{2 \times \frac{3c}{2} \cdot c} - \frac{1}{2} = \frac{13}{12} - \frac{1}{2} = \frac{7}{12}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

一题多解 (2) 因为 $AD = 2DC, AC = b$,

$$\text{所以 } AD = \frac{2}{3}b, CD = \frac{1}{3}b. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} =$

$$\frac{\frac{4}{9}b^2 + b^2 - c^2}{2 \times \frac{2}{3}b \cdot b} = \frac{13b^2 - 9c^2}{12b^2}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle BDC = \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2BD \cdot CD} =$

$$\frac{b^2 + \frac{1}{9}b^2 - a^2}{2b \cdot \frac{1}{3}b} = \frac{10b^2 - 9a^2}{6b^2}.$$

$$\text{所以 } \frac{13b^2 - 9c^2}{12b^2} = -\frac{10b^2 - 9a^2}{6b^2}, \text{ 整理得 } 6a^2 + 3c^2 - 11b^2 = 0. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又 } b^2 = ac, \text{ 所以 } 6a^2 + 3c^2 - 11ac = 0, \text{ 所以 } a = \frac{3c}{2} \text{ 或 } a = \frac{c}{3}.$$

$$\text{因为 } b^2 = ac > (a-c)^2, \text{ 解得 } \frac{3-\sqrt{5}}{2}c < a < \frac{3+\sqrt{5}}{2}c, \text{ 所以 } a = \frac{3c}{2}.$$

所以在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ABC = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} =$

$$\frac{\frac{9c^2}{4} + c^2}{2 \times \frac{3c}{2} \cdot c} - \frac{1}{2} = \frac{13}{12} - \frac{1}{2} = \frac{7}{12}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

公式

(1)【证明】因为 $AB=AD$, O 为 BD 的中点, 所以 $AO \perp BD$.

..... 1 分

又平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , $AO \subset$ 平面 ABD , 平面 $ABD \cap$ 平面 $BCD=BD$, 所以 $AO \perp$ 平面 BCD 3 分

又 $CD \subset$ 平面 BCD , 所以 $AO \perp CD$ 4 分

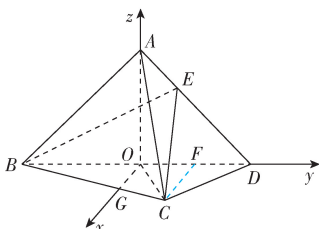
(2)【解】如图, 取 OD 的中点

F , 连接 CF , 则 $CF \perp BD$.

过点 O 作 $OG \parallel FC$ 交 BC

于点 G , 则 $OG \perp BD$.

所以 OG, OD, OA 两两垂直.



以点 O 为坐标原点, 分别以 OG, OD, OA 所在直线为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 如图所示,

(建系方法不唯一, $\angle BCD=90^\circ$, 也可以 C 为原点建系)

则 $O(0,0,0), B(0,-1,0), D(0,1,0), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

设 $A(0,0,a), a>0$, 又 $DE=2EA$, 则 $E\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2a}{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{BE}=\left(0, \frac{4}{3}, \frac{2a}{3}\right), \overrightarrow{BC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$ 6 分

设平面 BCE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BE} = \frac{4}{3}y + \frac{2a}{3}z = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{2}y = 0. \end{cases}$$

令 $x=\sqrt{3}$, 则 $y=-1, z=\frac{2}{a}$, 所以 $\boldsymbol{n}=\left(\sqrt{3}, -1, \frac{2}{a}\right)$.

易知平面 BCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$, 8 分

因为二面角 $E-BC-D$ 的大小为 45° ,

$$\text{所以 } \cos 45^\circ = \frac{|\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}| |\boldsymbol{n}|} = \frac{\frac{2}{a}}{1 \times \sqrt{3+1+\frac{4}{a^2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

(借助二面角的余弦值求线段长度)

又 $a>0$, 得 $a=1$, 即 $OA=1$,

$$\text{所以 } V_{A-BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot OA = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

..... 12 分

► 一题多解 (2) 过点 E 作 $EN \parallel AO$ 交 BD 于点 N ,

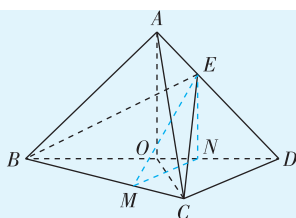
过点 N 作 $NM \parallel CD$ 交 BC 于点 M , 连接 EM .

因为 $EN \parallel AO$, 且由 (1) 知 $AO \perp$ 平面 CBD ,

所以 $EN \perp$ 平面 CBD ,

所以 $EN \perp BC$ 6 分

在 $\triangle BCD$ 中, 因为 $OB = OD = OC = 1$,
 所以 $\angle BCD = 90^\circ$, 即 $DC \perp BC$.
 又 $NM \parallel CD$, 所以 $NM \perp BC$.
 因为 $EN \cap NM = N$, 所以 $BC \perp$
 平面 EMN , 所以 $BC \perp EM$.



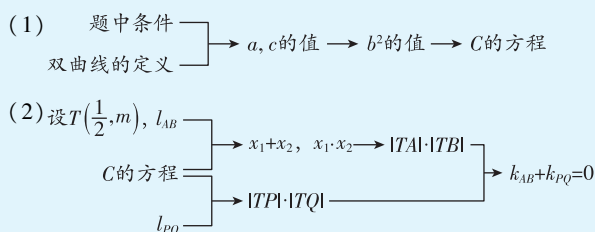
所以二面角 $E-BC-D$ 的平面角是 $\angle EMN$, 即 $\angle EMN = 45^\circ$,
 8 分
 则 $\triangle EMN$ 是等腰直角三角形.

因为 $DE = 2AE$, 所以 $ND = 2ON$, $AO = \frac{3}{2}EN$,

所以 $MN = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3} = EN$, 所以 $AO = 1$,

所以 $V_{A-BCD} = \frac{1}{3}S_{\triangle BCD} \cdot AO = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 12 分

21. 思路导引



【命题点】双曲线的定义与方程、直线与双曲线的位置关系

【解】(1) 由双曲线的定义可知, 点 M 的轨迹 C 为焦点在 x 轴上的双曲线的右支, 且 $2a = 2, c = \sqrt{17}$,
 所以 $a = 1, b^2 = c^2 - a^2 = 17 - 1 = 16$,

所以 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 (x > 0)$ 3 分

(注意点 M 的轨迹为双曲线的一支, 需标注 x 的范围)

(2) 设 $T(\frac{1}{2}, m), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1 \geq 1$ 且 $x_2 \geq 1$, 由题知, 直线 AB 与直线 PQ 的斜率都存在且不相等, 设直线 AB 的方程为 $y = k_1(x - \frac{1}{2}) + m$.

(设直线 AB 的方程为 $y = k_1(x - \frac{1}{2}) + m$, 与双曲线的方程联立, 整理成只含 x 的一元二次方程, 由根与系数的关系可得 $x_1 + x_2, x_1 x_2$)

联立 $\begin{cases} y = k_1(x - \frac{1}{2}) + m, \\ x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 (x > 0), \end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(16 - k_1^2)x^2 + (k_1^2 - 2k_1m)x - \frac{1}{4}k_1^2 + k_1m - m^2 - 16 = 0$ 5 分

又直线 AB 与曲线 C 必有两个不同的交点, 所以 $16 - k_1^2 \neq 0$,

$$\Delta = 16(4m^2 - 4k_1m - 3k_1^2 + 64) > 0, \text{ 所以 } x_1 + x_2 = -\frac{k_1^2 - 2k_1m}{16 - k_1^2},$$

$$x_1x_2 = \frac{-\frac{1}{4}k_1^2 + k_1m - m^2 - 16}{16 - k_1^2}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(根据弦长公式求出 $|TA|$, $|TB|$,同理可得 $|TP|$, $|TQ|$,结合已知条件 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$,整理可得 $k_1 + k_2 = 0$)

所以 $|TA| \cdot |TB|$

$$= \left(\sqrt{1+k_1^2} \left| x_1 - \frac{1}{2} \right| \right) \cdot \left(\sqrt{1+k_1^2} \cdot \left| x_2 - \frac{1}{2} \right| \right)$$

$\left(A, B \text{ 均在直线 } x = \frac{1}{2} \text{ 右侧, 所以可去掉绝对值符号} \right)$

$$= (1+k_1^2) \left(x_1 - \frac{1}{2} \right) \left(x_2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= (1+k_1^2) \left[x_1x_2 - \frac{1}{2}(x_1+x_2) + \frac{1}{4} \right]$$

$$= \frac{(1+k_1^2)(m^2+12)}{k_1^2-16}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

设直线 PQ 的方程为 $y = k_2 \left(x - \frac{1}{2} \right) + m (k_1 \neq k_2)$,

$$\text{同理可得 } |TP| \cdot |TQ| = \frac{(1+k_2^2)(m^2+12)}{k_2^2-16}.$$

因为 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$,

$$\text{即 } \frac{(1+k_1^2)(m^2+12)}{k_1^2-16} = \frac{(1+k_2^2)(m^2+12)}{k_2^2-16},$$

$$\text{所以 } k_2^2 - 16k_1^2 = k_1^2 - 16k_2^2,$$

$$\text{所以 } k_1 = -k_2 \text{ 或 } k_1 = k_2 (\text{舍去}),$$

所以 $k_1 + k_2 = 0$,即直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为0.

$\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

一题多解

(2) 设 $T\left(\frac{1}{2}, m\right)$, 直线 AB 的倾斜角为 θ_1 ,

直线 PQ 的倾斜角为 θ_2 , 且 $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi)$,

$$\text{则直线 } AB \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \cos \theta_1, \\ y = m + t \sin \theta_1 \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}).$$

$\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$\text{与 } x^2 - \frac{y^2}{16} = 1 (x > 0) \text{ 联立, 得}$$

$$(16\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1)t^2 + (16\cos\theta_1 - 2m\sin\theta_1)t - (m^2 + 12) = 0.$$

由题意知 $16\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1 \neq 0$,

$$\text{则 } |TA| |TB| = \frac{-(m^2+12)}{16\cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1},$$

$$\text{同理 } |TP| |TQ| = \frac{-(m^2+12)}{16\cos^2\theta_2 - \sin^2\theta_2}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又 } |TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|,$$

$$\text{所以 } \frac{-(m^2+12)}{16\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_1} = \frac{-(m^2+12)}{16\cos^2\theta_2-\sin^2\theta_2},$$

$$\text{则 } 16\cos^2\theta_1-\sin^2\theta_1 = 16\cos^2\theta_2-\sin^2\theta_2,$$

$$\text{所以 } \cos^2\theta_1 = \cos^2\theta_2.$$

又直线 AB 与 PQ 为不同直线, 则 $\cos\theta_1 = -\cos\theta_2$,

于是 $\theta_1 + \theta_2 = \pi$, 则 $k_{AB} + k_{PQ} = 0$ 12 分

22. 思路导引 (1) 求出 $f'(x) \rightarrow$ 判断 $f(x)$ 的单调性;

$$\left. \begin{array}{l} (2) \text{ 已知条件} \rightarrow \frac{\ln a+1}{a} = \frac{\ln b+1}{b} (a>0, b>0) \\ \text{令 } m = \frac{1}{a}, n = \frac{1}{b} \end{array} \right\} \xrightarrow{f(x) \text{ 的单调性}}$$

$$0 < m < 1 < n < e,$$

$$\text{证明 } 2 < m+n < e \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{证 } m+n > 2 \rightarrow \text{即证 } f(m) < f(2-m) \rightarrow \text{构造} \\ \quad g(x) = f(x) - f(2-x) \rightarrow \text{求导判断} \\ \text{证 } m+n < e \rightarrow \text{即证 } n(1-\ln n) + n < e \rightarrow \text{构造} \\ \quad h(x) = x(1-\ln x) + x \rightarrow \text{求导判断} \end{array} \right.$$

【命题点】利用导数判断函数的单调性与最值、不等式的证明

(1) **【解】** 因为 $f(x) = x(1-\ln x) = x - x\ln x (x>0)$,

所以 $f'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x (x>0)$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递增;

..... 2 分

当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$, 此时函数 $f(x)$ 单调递减.

综上, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

..... 4 分

(2) **【证明】** 因为 $b\ln a - a\ln b = a - b (a>0, b>0)$,

$$\text{所以 } \frac{\ln a}{a} - \frac{\ln b}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} (a>0, b>0),$$

$$\text{所以 } \frac{\ln a+1}{a} = \frac{\ln b+1}{b} (a>0, b>0). \text{ 6 分}$$

(对已知等式进行等价转换, 再利用换元法, 令 $m = \frac{1}{a}, n = \frac{1}{b}$, 构造出函数 $f(x) = x(1-\ln x)$ 的形式, 利用(1)中结论确定 m, n 的取值范围)

$$\text{令 } m = \frac{1}{a}, n = \frac{1}{b} (m>0, n>0), \text{ 则 } m(1-\ln m) = n(1-\ln n).$$

由(1)知, 函数 $f(x) = x(1-\ln x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

且 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0, f(e) = 0$,

不妨令 $a > b > 0$, 则 $0 < m < n$,

由 $f(m) = f(n)$, 可得 $0 < m < 1 < n < e$ 8 分

(将待证问题等价转换为证明 $2 < m + n < e$, 先证明 $2 < m + n$, 利用 m, n 的取值范围将问题转换为证明 $f(m) < f(2 - m)$, 构造新函数 $g(x) = f(x) - f(2 - x)$, $0 < x < 1$, 从而可利用导数判断 $g(x)$ 的单调性与最值, 进而证明 $2 < m + n$ 成立)

要证 $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$, 即证 $2 < m + n < e$.

要证 $2 < m + n$, 即证 $n > 2 - m$, 又 $2 - m > 1$, 即证 $f(n) < f(2 - m)$, 即证 $f(m) < f(2 - m)$.

令 $g(x) = f(x) - f(2 - x) = x(1 - \ln x) - (2 - x)[1 - \ln(2 - x)]$, $0 < x < 1$,

则 $g'(x) = -\ln x - \ln(2 - x) = -[\ln x + \ln(2 - x)] = -\ln[x(2 - x)] = -\ln[-(x - 1)^2 + 1] > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, $x \rightarrow 1$ 时, $g(x) \rightarrow 0$,

所以 $g(x) < 0$, 所以 $2 < m + n$ 成立. 10 分

(再证明 $m + n < e$, 利用 m, n 的取值范围将问题转换为证明 $n(1 - \ln n) + n < e$, 构造新函数 $h(x) = x(1 - \ln x) + x$, $1 < x < e$, 从而可利用导数判断 $h(x)$ 的单调性与最值, 进而证明 $m + n < e$ 成立)

因为 $m(1 - \ln m) = n(1 - \ln n) > m$,

所以要证 $m + n < e$, 只需证 $n(1 - \ln n) + n < e$.

令 $h(x) = x(1 - \ln x) + x$, $1 < x < e$,

则 $h'(x) = 1 - \ln x - 1 + 1 = 1 - \ln x > 0$, $1 < x < e$,

所以 $h(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, $x \rightarrow e$ 时, $h(x) \rightarrow e$, 所以

$h(x) < e$, 所以 $m + n < e$.

所以 $2 < m + n < e$, 即 $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$ 成立. 12 分