

## 1. A 【命题点】集合的并集运算

【解析】 $A \cup B = \{x | -1 < x < 2\} \cup \{x | 0 < x < 3\} = \{x | -1 < x < 3\}$ . 故选 A.

## 2. D 【命题点】由复数相等求参数

【解析】 $\because \frac{2+ai}{1+i} = 3+i, \therefore 2+ai = (3+i)(1+i) = 2+4i,$

$\therefore a = 4$ , 故选 D.

## 3. D 【命题点】柱形图的理解

【解析】由柱形图可知, 2006 年以来我国二氧化硫排放量与年份负相关. 故选 D.

## 4. C 【命题点】向量数量积的坐标运算

【解析】 $\because a = (1, -1), b = (-1, 2), \therefore 2a + b = (1, 0),$

$\therefore (2a + b) \cdot a = 1 \times 1 + 0 \times (-1) = 1$ . 故选 C.

## 5. A 【命题点】等差数列基本量的计算

【解析】 $\because$  数列  $\{a_n\}$  是等差数列,  $\therefore a_1 + a_5 = a_2 + a_4 = 2a_3,$

$\therefore S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 5a_3.$

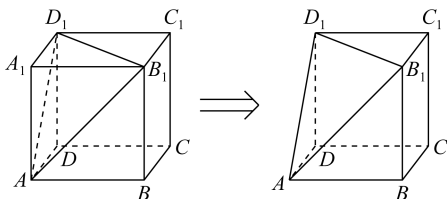
$\because a_1 + a_3 + a_5 = 3, \therefore a_3 = 1, \therefore S_5 = 5$ . 故选 A.

**方法速记** 在等差数列  $\{a_n\}$  中, (1) 若  $m+n=2p$ , 则  $a_m + a_n = 2a_p$ ; (2)  $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$  ( $S_n$  表示  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和).

## 6. D 【命题点】由三视图求几何体的体积

【解析】由几何体的三视图可知, 原几何体为正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  截去三棱锥  $A_1-AB_1D_1$  后所剩几何体(如图所示), 设正方体的棱长为  $a$ , 则正方体的体积为  $a^3$ , 截去的三棱锥的体积为  $\frac{1}{6}a^3$ , 所以剩余部分的体积为  $a^3 - \frac{1}{6}a^3 = \frac{5}{6}a^3$ , 故截去

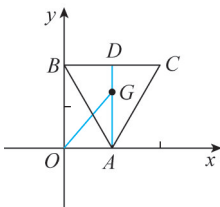
部分体积与剩余部分体积的比值为  $\frac{\frac{1}{6}a^3}{\frac{5}{6}a^3} = \frac{1}{5}$ . 故选 D.



**关键点拨** 本题的关键在于根据正视图、侧视图、俯视图中的对角线, 找出正方体的截面.

## 7. B 【命题点】三角形的外接圆、两点间距离公式

【解析】已知  $A(1, 0), B(0, \sqrt{3}), C(2, \sqrt{3})$ , 所以  $|AB| = |BC| = |AC| = 2$ , 即  $\triangle ABC$  为等边三角形, 所以  $\triangle ABC$  外接圆圆心即为  $\triangle ABC$  的重心. 如图, 取



$BC$  的中点  $D$ , 连接  $AD$ , 则  $AD$  是  $\triangle ABC$  的边  $BC$  上的中线, 在  $AD$  上取点  $G$  使  $|AG| = \frac{2}{3}|AD|$ , 则  $G$  是  $\triangle ABC$  的重心. 所以

$$G\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \text{ 所以 } |OG| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}. \text{ 故选 B.}$$

**一题多解** 易知  $\triangle ABC$  是等边三角形, 所以  $\triangle ABC$  的外接圆圆心即为  $\triangle ABC$  的重心. 由重心坐标公式得,  $\triangle ABC$  的重心  $G\left(\frac{1+0+2}{3}, \frac{0+\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3}\right)$ , 即  $G\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ ,  
故  $|OG| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$ . 故选 B.

## 8. B 【命题点】根据循环结构框图计算输出结果

**【解析】** 输入  $a=14, b=18$ , 由于  $a < b$ , 故  $b=18-14=4$ , 此时  $a=14, b=4$ ; 由于  $a > b$ , 故  $a=14-4=10$ , 此时  $a=10, b=4$ ; 由于  $a > b$ , 故  $a=10-4=6$ , 此时  $a=6, b=4$ ; 由于  $a > b$ , 故  $a=6-4=2$ , 此时  $a=2, b=4$ ; 由于  $a < b$ , 故  $b=4-2=2$ , 此时  $a=2, b=2$ , 退出循环. 故选 B.

## 9. C 【命题点】等比数列基本量的计算

**【解析】** 设数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q (q \neq 0)$ ,  $\therefore a_1 = \frac{1}{4}$ ,

$$\therefore a_3 = \frac{1}{4}q^2, a_5 = \frac{1}{4}q^4, a_4 = \frac{1}{4}q^3. \therefore a_3a_5 = 4(a_4 - 1),$$

$$\therefore \frac{1}{16}q^6 = 4\left(\frac{1}{4}q^3 - 1\right), \therefore q^6 - 16q^3 + 64 = 0, \therefore q^3 = 8, \therefore q = 2, \text{ 故}$$

$$a_2 = a_1q = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}. \text{ 故选 C.}$$

**快解** 由  $a_3a_5 = a_4^2 = 4(a_4 - 1)$ , 得  $a_4 = 2$ ,

所以  $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = 8$ , 所以  $q = 2$ , 故  $a_2 = a_1q = \frac{1}{2}$ . 故选 C.

## 10. C 【命题点】锥体体积、球的表面积

**【解析】** 设球  $O$  的半径为  $R$ ,  $\therefore A, B$  在球  $O$  的球面上且

$$\angle AOB = 90^\circ, \therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}R^2, \therefore V_{O-ABC} = V_{C-AOB} =$$

$$\frac{1}{3}S_{\triangle AOB} \cdot h = \frac{1}{6}R^2h \text{ (其中 } h \text{ 是 } C \text{ 到平面 } AOB \text{ 的距离),}$$

$\therefore$  三棱锥  $O-ABC$  的体积最大, 即  $h$  最大. 又  $C$  在球面上, 故

$$h \text{ 的最大值为 } OC = R, \therefore V_{O-ABC} \text{ 的最大值为 } \frac{1}{6}R^3, \text{ 即 } \frac{1}{6}R^3 =$$

**突破点**

$$36, \therefore R = 6, \text{ 故 } S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 144\pi. \text{ 故选 C.}$$

**归纳总结** (1) 因为三棱锥的任何一个面都是三角形, 所以任何一个面都能作为三棱锥的底面; (2) 涉及多元的最值问题时, 应先确定一个因变量, 防止因变量过多, 使问题难以转化, 如本题  $V_{O-ABC} = \frac{1}{3}h \cdot S_{\triangle ABC}$  (其中  $h$  为点  $O$  到

$$ABC \text{ 平面的距离})$$

平面  $ABC$  的距离) 中, 由于点  $C$  不确定, 导致  $h$  和  $S_{\triangle ABC}$  都不确定, 使问题的求解难度增大, 由于三棱锥  $O-ABC$  中的四个顶点中点  $O, A, B$  确定, 此时可以以  $\triangle OAB$  所在面为底面, 使问题得到转化.

### 11. B 【命题点】函数图像的识别

【解析】当  $x = \frac{\pi}{4}$  时,  $PA + PB = 1 + \sqrt{5}$ ;

当  $x = \frac{\pi}{2}$  时,  $PA + PB = 2\sqrt{2}$ .

$$\therefore (1 + \sqrt{5})^2 = 6 + 2\sqrt{5} > (2\sqrt{2})^2 = 8,$$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , 排除选项 C, D;

当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  时,  $BP = \tan x$ , 则  $BP + AP = \tan x + \sqrt{4 + \tan^2 x}$ ,

此时  $f'(x)$  不是常数, 对应图像应为曲线, 排除选项 A. 故选 B.

### 12. A 【命题点】根据函数的单调性解不等式

【解析】 $f(x) = \ln(1 + |x|) - \frac{1}{1+x^2}$  的定义域为  $\mathbf{R}$  且  $f(x)$  为偶函数, 又  $x > 0$  时,  $y = f(x)$  为增函数, 所以  $f(x) > f(2x-1)$ ,

即  $f(|x|) > f(|2x-1|)$ , 所以  $|x| > |2x-1|$ ,

即  $x^2 > (2x-1)^2$ , 解得  $\frac{1}{3} < x < 1$ . 故选 A.

**方法速记** 解决形如  $f(g(x)) > f(h(x))$  的不等式问题时, 不论函数  $f(x)$  的解析式是已知还是未知, 基本解题思路是研究函数  $f(x)$  的奇偶性、单调性、周期性等性质, 通过已经确定的函数性质去掉函数关系  $f$ , 转化为  $g(x)$  与  $h(x)$  的关系进行处理.

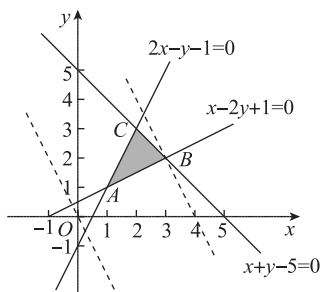
### 13. -2 【命题点】已知函数图像所过点求参数

【解析】 $\because$  函数  $f(x) = ax^3 - 2x$  的图像经过点  $(-1, 4)$ ,

$$\therefore 4 = a \times (-1)^3 - 2 \times (-1), \therefore a = -2.$$

### 14. 8 【命题点】线性规划求最值

【解析】作出不等式组表示的平面区域 (如图中阴影部分所示), 由  $x+y-5=0$ ,  $2x-y-1=0$  及  $x-2y+1=0$ , 得  $A(1, 1)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $C(2, 3)$ . 当目标函数线  $y = -2x + z$  过点  $B$  时,  $z$  取得最大值.  $\therefore z = 2x + y$  的最大值为  $2 \times 3 + 2 = 8$ .



**快解** 由  $x+y-5=0$ ,  $2x-y-1=0$  及  $x-2y+1=0$ , 得  $A(1,1), B(3,2), C(2,3)$ , 将三点的坐标分别代入  $z=2x+y$  得  $z_{\max}=8$ .

15.  $\frac{x^2}{4}-y^2=1$  【命题点】双曲线的标准方程

【解析】因为双曲线过点  $(4, \sqrt{3})$ , 且渐近线方程为  $y=\pm\frac{1}{2}x$ , 故点  $(4, \sqrt{3})$  在直线  $y=\frac{1}{2}x$  的下方. 设该双曲线的标准方程

$$\text{为 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0), \text{ 所以 } \begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1, \\ \frac{b}{a} = \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} a=2, \\ b=1, \end{cases} \text{ 故双曲线的标准方程为 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

**快解** 由双曲线的渐近线方程为  $y=\pm\frac{1}{2}x$ , 设所求双曲线方程为  $y^2 - \frac{1}{4}x^2 = \lambda (\lambda \neq 0)$ . 因为双曲线过点  $(4, \sqrt{3})$ , 所以  $\lambda = (\sqrt{3})^2 - \frac{1}{4} \times 4^2 = -1$ , 故双曲线的标准方程为  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ .

**方法速记** (1) 以  $y=\pm\frac{n}{m}x (m>0, n>0)$  为渐近线的双曲线方程可设为  $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = \lambda (\lambda \neq 0)$ ; (2) 与  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$  有相同渐近线的双曲线方程可设为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \lambda (\lambda \neq 0)$ .

16. 8 【命题点】已知曲线的切线求参数

【解析】由  $y=x+\ln x$  得  $y'=1+\frac{1}{x}$ ,  $\therefore$  曲线在点  $(1,1)$  处的切线的斜率  $k=2$ , 故切线方程为  $y=2x-1$ .

$\therefore$  直线  $y=2x-1$  与曲线  $y=ax^2+(a+2)x+1$  相切,

$$\therefore \begin{cases} y=2x-1, \\ y=ax^2+(a+2)x+1, \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } ax^2+ax+2=0.$$

$\therefore a \neq 0$  且  $\Delta = a^2 - 4 \times 2a = 0$ ,  $\therefore a=8$ .

**一题多解** 同上述方法得曲线  $y=x+\ln x$  在点  $(1,1)$  处的切线方程为  $y=2x-1$ .

$\therefore$  直线  $y=2x-1$  与曲线  $y=ax^2+(a+2)x+1$  相切,

$\therefore$  设切点的坐标为  $(x_0, y_0)$ ,  $\therefore y_0=2x_0-1$ . ①

由  $y'=2ax+(a+2)$ , 得  $2ax_0+(a+2)=2$ . ②

由题意知  $a \neq 0$ , 由②可得  $x_0 = -\frac{1}{2}$ ,

把  $x_0 = -\frac{1}{2}$  代入①, 得  $y_0 = -2$ ,

$\therefore$  点  $(-\frac{1}{2}, -2)$  在曲线  $y=ax^2+(a+2)x+1$  上, 故  $a=8$ .

**方法速记** 解决曲线的切线问题时,应把握两点:(1)切点处的导数即为切线的斜率,且切点既在切线上,也在曲线上;(2)切点未知时,应设出切点,利用导数的几何意义,用切点坐标表示出切线斜率与方程,再根据已知条件列出相应方程(组)求出切点坐标.

**17. 【命题点】利用正弦定理、三角恒等变换解三角形**

**【解】**(1)由正弦定理得

$$\frac{AD}{\sin \angle B} = \frac{BD}{\sin \angle BAD}, \frac{AD}{\sin \angle C} = \frac{DC}{\sin \angle CAD}.$$

因为  $AD$  平分  $\angle BAC$ ,  $BD = 2DC$ , 所以  $\frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} = \frac{DC}{BD} = \frac{1}{2}$ .

..... 6 分

(2)因为  $\angle C = 180^\circ - (\angle BAC + \angle B)$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,

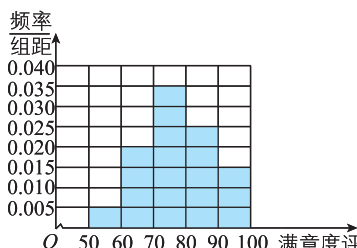
$$\text{所以 } \sin \angle C = \sin(\angle BAC + \angle B) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \angle B + \frac{1}{2} \sin \angle B.$$

由(1)知  $2 \sin \angle B = \sin \angle C$ , 所以  $\tan \angle B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 即  $\angle B = 30^\circ$ .

..... 12 分

**18. 【命题点】频率分布直方图、由频率估计概率**

**【解】**(1)B 地区用户满意度评分的频率分布直方图如图.



..... 3 分

通过两地区用户满意度评分的频率分布直方图可以看出,B 地区用户满意度评分的平均值高于 A 地区用户满意度评分的平均值;B 地区用户满意度评分比较集中,而 A 地区用户满意度评分比较分散. .... 6 分

(2)A 地区用户的满意度等级为不满意的概率大.

记  $C_A$  表示事件:“A 地区用户的满意度等级为不满意”;

$C_B$  表示事件:“B 地区用户的满意度等级为不满意”.

由直方图得  $P(C_A)$  的估计值为  $(0.01 + 0.02 + 0.03) \times 10 = 0.6$ ,

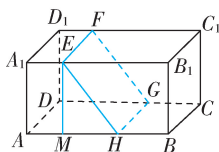
$P(C_B)$  的估计值为  $(0.005 + 0.02) \times 10 = 0.25$ ,

所以 A 地区用户的满意度等级为不满意的概率大.

..... 12 分

**19. 【命题点】立体几何中的截面问题、柱体体积的计算**

**【解】**(1)交线围成的正方形  $EHGF$  如图.



..... 4 分

(2) 作  $EM \perp AB$ , 垂足为  $M$ , 则

$$AM = A_1E = 4, EB_1 = 12, EM = AA_1 = 8.$$

因为  $EHGF$  为正方形,

$$\text{所以 } EH = EF = BC = 10.$$

$$\text{于是 } MH = \sqrt{EH^2 - EM^2} = 6,$$

$$AH = 10, HB = 6. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

因为长方体被平面  $\alpha$  分成两个高为 10 的直棱柱,

$$\text{所以其体积的比值为 } \frac{9}{7} \left( \frac{7}{9} \text{ 也正确} \right). \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

**▶ 关键点拨** (1) 因为截面要求是正方形, 且  $EF = 10$ , 所以可得截面另一边的长也为 10, 由此可以推得截面正方形的另两个顶点一定在  $AB$  和  $DC$  上, 这是解决第(1)问的关键所在; (2) 解决第(2)问的关键是根据第(1)问的截面图, 正确识别出被截得的两个几何体是直四棱柱.

## 20. 【命题点】椭圆的方程和几何性质、直线与椭圆的位置关系

$$(1) \text{【解】由题意得 } \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{4}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1,$$

$$\text{解得 } a^2 = 8, b^2 = 4.$$

$$\text{所以 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{【证明】设直线 } l: y = kx + b \ (k \neq 0, b \neq 0), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_M, y_M).$$

$$\text{将 } y = kx + b \text{ 代入 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1, \text{ 得}$$

$$(2k^2 + 1)x^2 + 4kbx + 2b^2 - 8 = 0. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{故 } x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2kb}{2k^2 + 1}, y_M = k \cdot x_M + b = \frac{b}{2k^2 + 1}. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{于是直线 } OM \text{ 的斜率 } k_{OM} = \frac{y_M}{x_M} = -\frac{1}{2k}, \text{ 即 } k_{OM} \cdot k = -\frac{1}{2}.$$

$$\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以直线  $OM$  的斜率与直线  $l$  的斜率的乘积为定值.

$$\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

**▶ 一题多解** (2) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $\begin{cases} x_1^2 + 2y_1^2 = 8, \\ x_2^2 + 2y_2^2 = 8, \end{cases}$

两式相减, 得  $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + 2(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 0, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

两边同时除以  $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$ , 得  $1 + 2 \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 0$ , 而

$$k_{OM} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}, k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \text{ 所以 } k_{OM} \cdot k_{AB} = -\frac{1}{2}, \text{ 所以直线 } OM$$

的斜率与直线  $l$  的斜率的乘积为定值.  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

**方法速记** (1) 解决有关弦中点的相关问题, 可以采用点差法;

(2) 直线  $l$  与椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  相交于  $A, B$  两点, 且

$M$  为线段  $AB$  的中点时, 有  $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$ ;

(3) 直线  $l$  与双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  相交于  $A, B$  两

点, 且  $M$  为线段  $AB$  的中点时, 有  $k_{AB} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2}$ .

## 21. 【命题点】函数单调性、极值与最值的综合应用

**【解】** (1)  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} - a$ .

若  $a \leq 0$ , 则  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

..... 2 分

若  $a > 0$ , 则当  $x \in (0, \frac{1}{a})$  时,  $f'(x) > 0$ ;

当  $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ . ..... 5 分

所以  $f(x)$  在  $(0, \frac{1}{a})$  上单调递增, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上单调递减.

..... 6 分

(2) 由(1)知, 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上无最大值;

..... 8 分

当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{a}$  处取得最大值,

最大值为  $f(\frac{1}{a}) = \ln \frac{1}{a} + a(1 - \frac{1}{a}) = -\ln a + a - 1$ .

因此  $f(\frac{1}{a}) > 2a - 2$  等价于  $\ln a + a - 1 < 0$ . ..... 10 分

令  $g(a) = \ln a + a - 1$ , 则  $g(a)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $g(1) = 0$ .

于是, 当  $0 < a < 1$  时,  $g(a) < 0$ ; 当  $a > 1$  时,  $g(a) > 0$ .

因此,  $a$  的取值范围是  $(0, 1)$ . ..... 12 分

## 22. 【命题点】等腰三角形, 圆的切线的相关性质

(1) **【证明】** 因为  $\triangle ABC$  是等腰三角形,  $AD \perp BC$ , 所以  $AD$  是  $\angle CAB$  的平分线.

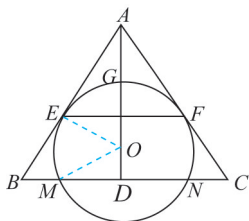
因为  $\odot O$  分别与  $AB, AC$  相切于点  $E, F$ ,

所以  $AE = AF$ , 故  $AD \perp EF$ .

从而  $EF \parallel BC$ . ..... 5 分

(2) **【解】** 由(1)知,  $AE = AF$ ,  $AD \perp EF$ , 故  $AD$  是  $EF$  的垂直平分线. 又  $EF$  为  $\odot O$  的弦, 所以圆心  $O$  在  $AD$  上. 连接  $OE$ ,

OM, 则  $OE \perp AE$ .



由  $AG$  等于  $\odot O$  的半径, 得  $AO = 2OE$ , 所以  $\angle OAE = 30^\circ$ .

因此  $\triangle ABC$  和  $\triangle AEF$  都是等边三角形.

因为  $AE = 2\sqrt{3}$ , 所以  $AO = 4$ ,  $OE = 2$ .

因为  $OM = OE = 2$ ,  $DM = \frac{1}{2}MN = \sqrt{3}$ ,

所以  $OD = 1$ . 于是  $AD = 5$ ,  $AB = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ .

所以四边形  $EBCF$  的面积为

$$\frac{1}{2} \times \left( \frac{10\sqrt{3}}{3} \right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

..... 10 分

## 23. 【命题点】极坐标方程与直角坐标方程的互化、三角函数的最值

【解】(1) 曲线  $C_2$  的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 2y = 0$ , 曲线  $C_3$  的直角坐标方程为  $x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x = 0$ .

$$\text{联立} \begin{cases} x^2 + y^2 - 2y = 0, \\ x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}x = 0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

所以  $C_2$  与  $C_3$  交点的直角坐标为  $(0, 0)$  和  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ .

..... 5 分

(2) 曲线  $C_1$  的极坐标方程为  $\theta = \alpha$  ( $\rho \in \mathbf{R}, \rho \neq 0$ ), 其中  $0 \leq \alpha < \pi$ .

因此  $A$  的极坐标为  $(2\sin \alpha, \alpha)$ ,  $B$  的极坐标为  $(2\sqrt{3}\cos \alpha, \alpha)$ .

$$\text{所以 } |AB| = |2\sin \alpha - 2\sqrt{3}\cos \alpha| = 4 \left| \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{3} \right) \right|.$$

当  $\alpha = \frac{5\pi}{6}$  时,  $|AB|$  取得最大值, 最大值为 4. .... 10 分

## 24. 【命题点】不等式的证明

【证明】(1) 因为  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$ ,

$$(\sqrt{c} + \sqrt{d})^2 = c + d + 2\sqrt{cd},$$

由题设  $a + b = c + d$ ,  $ab > cd$ , 得  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$ .

因此  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ . .... 5 分

(2) ①必要性: 若  $|a - b| < |c - d|$ , 则  $(a - b)^2 < (c - d)^2$ ,



即  $(a+b)^2 - 4ab < (c+d)^2 - 4cd$ .

因为  $a+b=c+d$ , 所以  $ab > cd$ .

由 (1) 得  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ .

②充分性: 若  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$ ,

则  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{c} + \sqrt{d})^2$ , 即  $a+b+2\sqrt{ab} > c+d+2\sqrt{cd}$ .

因为  $a+b=c+d$ , 所以  $ab > cd$ . 于是

$$(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab < (c+d)^2 - 4cd = (c-d)^2.$$

因此  $|a-b| < |c-d|$ .

综上,  $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{d}$  是  $|a-b| < |c-d|$  的充要条件. .... 10 分