

## 1. C 【命题点】集合的补集运算

【解析】 $\because A \cap B = \{4, 8\}, \therefore \complement_A B = \{0, 2, 6, 10\}$ . 故选 C.

## 2. D 【命题点】共轭复数与复数的模

【解析】由  $z = 4 + 3i$ , 得  $|z| = 5, \bar{z} = 4 - 3i, \therefore \frac{\bar{z}}{|z|} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$ . 故选 D.

## 3. A 【命题点】由向量的夹角公式求夹角

【解析】由已知条件得  $|\vec{BA}| = |\vec{BC}| = 1, \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} =$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \cos \angle ABC = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 又 } 0^\circ \leq \angle ABC \leq 180^\circ,$$

$\therefore \angle ABC = 30^\circ$ . 故选 A.

## 4. D 【命题点】统计图的识别与应用

【解析】由图可知平均最高气温高于  $20^\circ\text{C}$  的月份为七月和八月, 有 2 个, 所以选项 D 不正确. 故选 D.

## 5. C 【命题点】古典概型的概率计算

【解析】由题意得, 输入前两位密码共有  $3 \times 5 = 15$  种结果, 成

功的结果只有一种, 由古典概型概率公式得  $P = \frac{1}{15}$ . 故选 C.

## 6. D 【命题点】同角三角函数的基本关系, 二倍角公式

【解析】由  $\tan \theta = -\frac{1}{3}$ , 得  $\sin \theta = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}$  或

$\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$ , 所以  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{4}{5}$ , 故

选 D.

## 快解

因为  $\tan \theta = -\frac{1}{3}$ , 所以  $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta =$

$$\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{4}{5}.$$

## 7. A 【命题点】由幂函数的单调性比较大小

【解析】 $a = 2^{\frac{4}{3}} = 16^{\frac{1}{3}}, b = 3^{\frac{2}{3}} = 9^{\frac{1}{3}}, c = 25^{\frac{1}{3}}$ , 由幂函数  $y = x^{\frac{1}{3}}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 可得  $b < a < c$ . 故选 A.

## 8. B 【命题点】直到型循环结构的程序框图

【解析】执行程序, 输入  $a = 4, b = 6$ , 则依次得到: ①  $a = 2, b = 4, a = 6, s = 6, n = 1$ ; ②  $a = -2, b = 6, a = 4, s = 10, n = 2$ ; ③  $a = 2, b = 4, a = 6, s = 16, n = 3$ ; ④  $a = -2, b = 6, a = 4, s = 20, n = 4$ , 此时  $s > 16$ , 退出循环体, 输出  $n = 4$ . 故选 B.

## 9. D 【命题点】利用正弦定理求角的正弦值

【解析】解法一: 过点 A 作  $AD \perp BC$ , 垂足为点 D, 设  $BC = a$ , 则

$$AD = \frac{1}{3}a, \text{ 又 } B = \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } BD = \frac{1}{3}a, DC = \frac{2}{3}a, \therefore AC =$$

$$\sqrt{AD^2 + DC^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}a. \text{ 由正弦定理得 } \frac{a}{\sin \angle BAC} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}a}{\sin \frac{\pi}{4}}, \text{ 解得}$$

$$\sin \angle BAC = \frac{3\sqrt{10}}{10}. \text{ 故选 D.}$$

**解法二:**  $\because$  在  $\triangle ABC$  中,  $B = \frac{\pi}{4}$ ,  $BC$  边上的高等于  $\frac{1}{3}BC$ ,

$$\therefore AB = \frac{\sqrt{2}}{3}BC.$$

$$\text{由余弦定理得 } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos B} =$$

$$\sqrt{\frac{2}{9}BC^2 + BC^2 - \frac{2}{3}BC^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}BC.$$

$$\text{又 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{3}BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}BC \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}BC \cdot \sin \angle BAC, \therefore \sin \angle BAC = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ 故选 D.}$$

**解法三:** 过点  $A$  作  $AD \perp BC$  于点  $D$ , 设  $BC = a$ , 由已知得  $AD =$

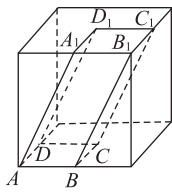
$$\frac{a}{3}, \because B = \frac{\pi}{4}, \therefore AD = BD = \frac{a}{3}, \angle BAD = \frac{\pi}{4}. \therefore DC = \frac{2}{3}a, AC =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{3}a, \therefore \sin \angle DAC = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 则 } \cos \angle DAC = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\therefore \sin \angle BAC = \sin \left( \frac{\pi}{4} + \angle DAC \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left( \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{5}}{5} \right) = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

#### 10. B 【命题点】几何体的三视图和表面积

**【解析】**由三视图可知原几何体为一个斜四棱柱,底面是边长为 3 的正方形,如图所示,该斜四棱柱是棱长为 6 的正方体的一部分,即  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ . 故表面积为



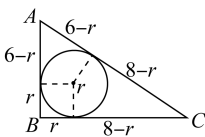
$$(3 \times 3 + 3 \times 6 + 3 \times 3\sqrt{5}) \times 2 = 54 + 18\sqrt{5}. \text{ 故选 B.}$$

#### 11. B 【命题点】球与直三棱柱的相切问题

**【解析】**如图,设  $\triangle ABC$  内切圆的半径

为  $r$ .  $\because AB \perp BC, AB = 6, BC = 8, \therefore AC =$

10. 由三角形内切圆性质,得  $(6-r) +$



$(8-r) = 10$ , 解得  $r = 2$ .  $\because AA_1 = 3 < 2r, \therefore$  在三棱柱中

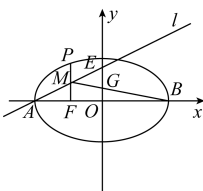
的球的半径为  $\frac{3}{2}$  (提示:此时球与直三棱柱的上下底面相切),

$$\text{此时 } V = \frac{4}{3}\pi \times \left( \frac{3}{2} \right)^3 = \frac{9\pi}{2}. \text{ 故选 B.}$$

#### 12. A 【命题点】椭圆的离心率

**【解析】**如图,设  $OE$  的中点为  $G$ ,  $|FM| = m, \therefore MF \parallel OE, \therefore$

$$\frac{|MF|}{|OE|} = \frac{|AF|}{|AO|}, \text{ 即 } \frac{m}{|OE|} = \frac{a-c}{a}, \therefore |OE| = \frac{ma}{a-c},$$



$$\therefore |OG| = \frac{1}{2}|OE| = \frac{ma}{2(a-c)}. \text{ 又 } OG \parallel$$

$$MF, \therefore \frac{|OG|}{|MF|} = \frac{|OB|}{|BF|}, \text{ 即 } \frac{\frac{ma}{2(a-c)}}{m} = \frac{a}{a+c}, \therefore a = 3c, \text{ 则 } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}. \text{ 故}$$

选 A.

**一题多解** 由题意可得  $F(-c, 0), A(-a, 0), B(a, 0)$ ,

$$\text{将 } x = -c \text{ 代入椭圆方程可得 } y = \pm b \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \pm \frac{b^2}{a},$$

$$\text{可得 } P\left(-c, \pm \frac{b^2}{a}\right).$$

设直线  $AE$  的方程为  $y = k(x + a)$ ,

令  $x = -c$ , 可得  $M(-c, k(a - c))$ , 令  $x = 0$ , 可得  $E(0, ka)$ .

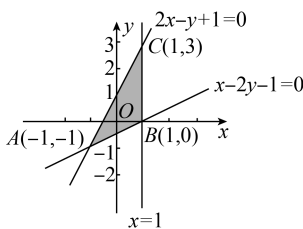
设  $OE$  的中点为  $H$ , 可得  $H\left(0, \frac{ka}{2}\right)$ .

由  $B, H, M$  三点共线, 可得  $k_{BH} = k_{BM}$ , 即  $\frac{\frac{ka}{2}}{-a} = \frac{k(a - c)}{-c - a}$ , 化简可

得  $\frac{a - c}{a + c} = \frac{1}{2}$ , 即  $a = 3c$ , 可得  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ . 故选 A.

### 13. -10 【命题点】线性规划中的最小值问题

**【解析】**由题意画出可行域, 如图所示, 可行域为  $\triangle ABC$  (包含边界). 由  $z = 2x + 3y - 5$  得  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{z + 5}{3}$ , 当直线  $y = -\frac{2}{3}x + \frac{z + 5}{3}$  过点  $A(-1, -1)$  时, 其在  $y$  轴上截距最小, 此时  $z$  也最小, 最小值为  $-10$ .



### 14. $\frac{\pi}{3}$ 【命题点】两角差的正弦公式, 函数图像的平移问题

**【解析】** $y = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ , 所以  $y = 2 \sin x$  的图像至少向右平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度可得到  $y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图像.

**关键点拨** 本题的关键是利用辅助角公式, 将函数化为  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  的形式, 然后利用函数图像平移得到结论.

15.4 【命题点】点到直线的距离公式，

圆的弦长公式

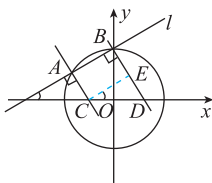
【解析】圆心  $O$  到直线  $l$  的距离  $d =$

$$\frac{6}{\sqrt{1+3}} = 3, \therefore |AB| = 2\sqrt{12-3^2} = 2\sqrt{3}.$$

如图,过点  $C$  作  $CE \perp BD$  于点  $E$ , 则  $|CE| = |AB| = 2\sqrt{3}$ .

易得  $CE \parallel AB$ , 又  $l$  的倾斜角为  $30^\circ$ ,  $\therefore \angle ECD = 30^\circ$ ,

$$\therefore |CD| = \frac{|CE|}{\cos \angle ECD} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = 4.$$



一题多解 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, 0), D(x_4, 0)$ ,

由  $x - \sqrt{3}y + 6 = 0$ , 得  $x = \sqrt{3}y - 6$ , 代入圆的方程, 并整理, 得

$y^2 - 3\sqrt{3}y + 6 = 0$ , 解得  $y_1 = 2\sqrt{3}, y_2 = \sqrt{3}$ ,  $\therefore x_1 = 0, x_2 = -3$ .  $\therefore$  直

线  $AC$  的方程为  $y - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}x$ , 令  $y = 0$  得  $x_3 = 2$ . 直线  $BD$  的

方程为  $y - \sqrt{3} = -\sqrt{3}(x + 3)$ , 令  $y = 0$  得  $x_4 = -2$ . 则  $|CD| =$

$$|x_3 - x_4| = 4.$$

16.  $y = 2x$  【命题点】函数的奇偶性, 导数的几何意义及切线方程

【解析】设  $x > 0$ , 则  $-x < 0$ , 因为  $f(x)$  为偶函数, 则  $f(x) = f(-x) =$

$e^{x-1} + x$ , 所以  $x > 0$  时,  $f'(x) = e^{x-1} + 1$ , 所以  $f'(1) = 2$ , 则曲线  $y =$

$f(x)$  在点  $(1, 2)$  处的切线方程为  $y - 2 = 2(x - 1)$ , 即  $y = 2x$ .

17. 【命题点】数列的递推关系, 等比数列的判定及通项

【解】(1)  $\because a_1 = 1, a_n^2 - (2a_{n+1} - 1)a_n - 2a_{n+1} = 0$ ,

$\therefore$  令  $n = 1$ , 有  $a_1^2 - (2a_2 - 1)a_1 - 2a_2 = 0$ , 即

$$1 - (2a_2 - 1) - 2a_2 = 0, \text{ 得 } a_2 = \frac{1}{2}; \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{同理可得 } a_2^2 - (2a_3 - 1)a_2 - 2a_3 = 0, \text{ 解得 } a_3 = \frac{1}{4}. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 由  $a_n^2 - (2a_{n+1} - 1)a_n - 2a_{n+1} = 0$ , 得  $2a_{n+1}(a_n + 1) = a_n(a_n + 1)$ .

$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ .  $\therefore \{a_n\}$  是首项为 1, 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列,  $\therefore a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

$\therefore \{a_n\}$  的各项都为正数,  $\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ .  $\therefore \{a_n\}$  是首项为 1, 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列,  $\therefore a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

$\therefore \{a_n\}$  是首项为 1, 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列,  $\therefore a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

$\therefore \{a_n\}$  是首项为 1, 公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列,  $\therefore a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ .

18. 【命题点】相关系数, 利用线性回归模型解决实际问题

【解】(1) 由折线图中数据及附注中参考数据, 得

$$\bar{t} = 4, \sqrt{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2} = 2\sqrt{7} \approx 5.292, \sqrt{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} = 0.55,$$

$\therefore \sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^7 t_i y_i - \bar{t} \sum_{i=1}^7 y_i = 40.17 - 4 \times 9.32 = 2.89$ .

$$\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^7 t_i y_i - \bar{t} \sum_{i=1}^7 y_i = 40.17 - 4 \times 9.32 = 2.89.$$

$$\text{所以 } r = \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2}} \approx \frac{2.89}{0.55 \times 5.292} \approx$$

0.99. .... 4分

因为  $y$  与  $t$  的相关系数近似为 0.99, 说明  $y$  与  $t$  的线性相关程度非常高, 从而可以用线性回归模型拟合  $y$  与  $t$  的关系.

..... 6分

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^7 (t_i - \bar{t})^2} = \frac{2.89}{28} \approx 0.103,$$

..... 7分

$$\text{又 } \bar{y} = \frac{1}{7} \sum_{i=1}^7 y_i = \frac{9.32}{7} \approx 1.331,$$

$$\text{所以 } \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{t} \approx 1.331 - 0.103 \times 4 \approx 0.92. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } y \text{ 关于 } t \text{ 的回归方程为 } \hat{y} = 0.10t + 0.92. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{将 2016 年对应的 } t = 9 \text{ 代入回归方程, 得 } \hat{y} = 0.10 \times 9 + 0.92 = 1.82.$$

所以预测 2016 年我国生活垃圾无害化处理量为 1.82 亿吨.

..... 12分

**19. 【命题点】线面平行的判定, 四面体体积的计算**

$$(1) \text{ 【证明】由已知条件, 得 } AM = \frac{2}{3}AD = 2. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

取  $BP$  的中点  $T$ , 连接  $AT, TN$ . .... 2分

因为  $N$  为  $PC$  的中点,

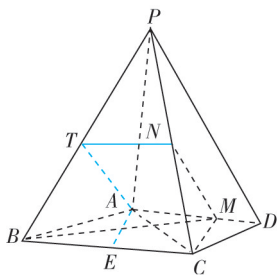
所以  $TN \parallel BC$ ,

$$TN = \frac{1}{2}BC = 2, \text{ 所以 } TN = AM. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又  $AD \parallel BC$ , 所以  $TN \parallel AM$ , 且  $TN = AM$ , 故四边形  $AMNT$  为平行四边形, 所以  $MN \parallel AT$ . .... 4分

因为  $AT \subset$  平面  $PAB$ ,  $MN \not\subset$  平面  $PAB$ ,

所以  $MN \parallel$  平面  $PAB$ . .... 6分



(2) 【解】因为  $PA \perp$  平面  $ABCD$ ,  $N$  为  $PC$  的中点,

$$\text{所以 } N \text{ 到平面 } ABCD \text{ 的距离为 } \frac{1}{2}PA. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

**关键**

取  $BC$  的中点  $E$ , 连接  $AE$ .

$$\text{因为 } AB = AC = 3, \text{ 所以 } AE \perp BC, AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{因为 } AM \parallel BC, \text{ 所以点 } M \text{ 到 } BC \text{ 的距离为 } \sqrt{5}, \text{ 故 } S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} \times$$

$$4 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以四面体 } N-BCM \text{ 的体积 } V_{N-BCM} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}PA \cdot S_{\triangle BCM} =$$

$\frac{4\sqrt{5}}{3}$ . ..... 12 分

**20. 【命题点】**抛物线的方程,点的轨迹方程

(1)【证明】由题意知  $F\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ .

设  $l_1: y = a, l_2: y = b$ , 则  $ab \neq 0$ , 且  $A\left(\frac{a^2}{2}, a\right), B\left(\frac{b^2}{2}, b\right)$ ,

$P\left(-\frac{1}{2}, a\right), Q\left(-\frac{1}{2}, b\right), R\left(-\frac{1}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ .

记过  $A, B$  两点的直线为  $l$ , 则  $l$  的方程为  $2x - (a+b)y + ab = 0$ .

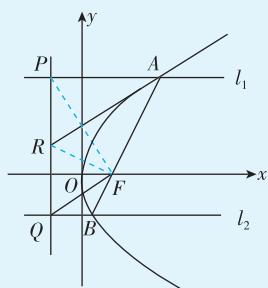
..... 2 分

$\therefore F$  在线段  $AB$  上,  $\therefore 1+ab=0$ . ..... 3 分

$$\therefore k_{AR} = \frac{a - \frac{a+b}{2}}{\frac{a^2}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{a-b}{1+a^2} = \frac{a-b}{a^2-ab} = \frac{1}{a} = \frac{-ab}{a} = -b, k_{FQ} =$$

$$\frac{b-0}{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = -b, \therefore k_{AR} = k_{FQ}, \therefore AR \parallel FQ. \quad \text{..... 6 分}$$

**一题多解** (1) 如图, 连接  $RF, PF$ .



由  $|AP| = |AF|, |BQ| = |BF|$  及  $AP \parallel BQ$ , 得  $\angle AFP + \angle BFQ = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle PFQ = 90^\circ$ . ..... 3 分

$\therefore R$  是  $PQ$  的中点,  $\therefore |RF| = |RP| = |RQ|$ ,

$\therefore \triangle PAR \cong \triangle FAR$ , ..... 4 分

$\therefore \angle PAR = \angle FAR, \angle PRA = \angle FRA$ .

$\therefore \angle BQF + \angle BFQ = 180^\circ - \angle QBF = \angle PAF = 2\angle PAR$ ,

$\therefore \angle BQF = \angle PAR$ , ..... 5 分

$\therefore \angle PQF = \angle PRA, \therefore AR \parallel FQ$ . ..... 6 分

(2)【解】设  $l_{AB}$  与  $x$  轴的交点为  $D(x_1, 0)$ .

$$\text{由(1)可得 } S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} |b-a| |FD| = \frac{1}{2} |b-a| \left| x_1 - \frac{1}{2} \right|,$$

$$S_{\triangle PQF} = \frac{|a-b|}{2}. \quad \text{..... 7 分}$$

$$\text{由题设可得 } |b-a| \left| x_1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{|a-b|}{2}, \therefore x_1 = 1 \text{ 或 } x_1 = 0 \text{ (舍).}$$

..... 9 分

设满足条件的  $AB$  的中点为  $E(x, y)$ .

当  $AB$  与  $x$  轴不垂直时, 由  $k_{AB} = k_{DE}$ , 可得  $\frac{2}{a+b} = \frac{y}{x-1} (x \neq 1)$ .

..... 10 分

而  $\frac{a+b}{2}=y, \therefore y^2=x-1 (x \neq 1)$ . ..... 11 分

当  $AB$  与  $x$  轴垂直时,  $E$  与  $D$  重合, 满足  $y^2=x-1$ .

$\therefore AB$  中点的轨迹方程为  $y^2=x-1$ . ..... 12 分

## 21. 【命题点】利用导数研究函数的单调性、最值

(1) 【解】由题设, 得  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ .

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 1$ .

当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增;

当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减. .... 4 分

(2) 【证明】由(1)知,  $f(x)$  在  $x = 1$  处取得最大值, 最大值为  $f(1) = 0$ . 所以当  $x \neq 1$  时,  $\ln x < x - 1$ .

**突破**

故当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $\ln x < x - 1$ ,  $\ln \frac{1}{x} < \frac{1}{x} - 1$ , 即  $1 < \frac{x-1}{\ln x} < x$ .

..... 8 分

(3) 【证明】由题设  $c > 1$ , 设  $g(x) = 1 + (c-1)x - c^x$ , 则  $g'(x) = c-1 - c^x \ln c$ , .... 9 分

令  $g'(x) = 0$ , 解得  $x_0 = \frac{\ln \frac{c-1}{\ln c}}{\ln c}$ . .... 10 分

当  $x < x_0$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增;

当  $x > x_0$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减. .... 11 分

由(2)知  $1 < \frac{c-1}{\ln c} < c$ , 故  $0 < x_0 < 1$ .

又  $g(0) = g(1) = 0$ , 故当  $x \in (0, 1)$  时,  $g(x) > 0$ .

所以当  $x \in (0, 1)$  时,  $1 + (c-1)x > c^x$ . .... 12 分

## 22. 【命题点】圆的几何性质

(1) 【解】连接  $PB, BC$ , 则  $\angle BFD = \angle PBA + \angle BPD$ ,  $\angle PCD = \angle PCB + \angle BCD$ .

因为  $\widehat{AP} = \widehat{BP}$ , 所以  $\angle PBA = \angle PCB$ .

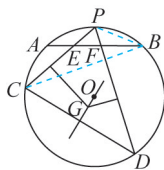
又  $\angle BPD = \angle BCD$ , 所以  $\angle BFD = \angle PCD$ .

又  $\angle PFB + \angle BFD = 180^\circ$ ,  $\angle PFB = 2\angle PCD$ ,

所以  $3\angle PCD = 180^\circ$ , 因此  $\angle PCD = 60^\circ$ .

..... 5 分

(2) 【证明】因为  $\angle PCD = \angle BFD$ , 所以  $\angle EFD + \angle PCD = 180^\circ$ , 由此知  $C, D, F, E$  四点共圆, 其圆心既在  $CE$  的垂直平分线上, 又在  $DF$  的垂直平分线上, 故  $G$  就是过  $C, D, F, E$  四点的圆的圆心, 所以  $G$  在  $CD$  的垂直平分线上. 又  $O$  也在  $CD$  的垂直平分线上, 但  $O$  不在  $CE$  的垂直平分线上, 所以  $O, G$  不重合, 因此  $OG \perp CD$ . .... 10 分



## 23. 【命题点】参数方程与普通方程、极坐标方程与直角坐标方程的互化, 点到直线的距离公式

【解】(1)  $C_1$  的普通方程为  $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ ,

$C_2$  的直角坐标方程为  $x + y - 4 = 0$ . ..... 5 分

(2) 由题意, 可设点  $P$  的直角坐标为  $(\sqrt{3} \cos \alpha, \sin \alpha)$ .

因为  $C_2$  是直线, 所以  $|PQ|$  的最小值即为点  $P$  到  $C_2$  的距离  $d(\alpha)$

$$\text{的最小值}, d(\alpha) = \frac{|\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha - 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \left| \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{3} \right) - 2 \right|,$$

..... 8 分

当且仅当  $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$  时,  $d(\alpha)$  取得最小值, 最小值

为  $\sqrt{2}$ , 此时点  $P$  的直角坐标为  $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . ..... 10 分

**24. 【命题点】绝对值不等式的解法, 绝对值三角不等式的性质**

【解】(1) 当  $a = 2$  时,  $f(x) = |2x - 2| + 2$ .

解不等式  $|2x - 2| + 2 \leq 6$ , 得  $-1 \leq x \leq 3$ .

因此  $f(x) \leq 6$  的解集为  $\{x | -1 \leq x \leq 3\}$ . ..... 5 分

(2) 当  $x \in \mathbf{R}$  时,

$$f(x) + g(x) = |2x - a| + a + |2x - 1| \geq |2x - a + 1 - 2x| + a = |1 - a| + a,$$

当  $x = \frac{1}{2}$  时等号成立, 所以当  $x \in \mathbf{R}$  时,  $f(x) + g(x) \geq 3$  等价

于  $|1 - a| + a \geq 3$ . ①

当  $a \leq 1$  时, ①等价于  $1 - a + a \geq 3$ , 无解.

当  $a > 1$  时, ①等价于  $a - 1 + a \geq 3$ , 解得  $a \geq 2$ .

所以  $a$  的取值范围是  $[2, +\infty)$ . ..... 10 分