

## 1. A 【命题点】集合的并集、补集混合运算

【解析】由题可得  $\complement_U M = \{2, 3, 5\}$ , 所以  $N \cup \complement_U M = \{2, 3, 5\}$ , 故选 A.

## 2. C 【命题点】复数的基本运算

【解析】 $\frac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(1-i)}{5} = 1-i$ , 故选 C.

## 3. B 【命题点】平面向量的数量积及坐标运算

【解析】 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (5, 3)$ ,  $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (1, -1)$ ,  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ ,  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{2}$ ,  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 5 \times 1 - 3 \times 1 = 2$  (另解:  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 10 - 8 = 2$ ), 所以  $\cos \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} - \mathbf{b} \rangle = \frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b})}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}| |\mathbf{a} - \mathbf{b}|} = \frac{2}{\sqrt{34} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$ , 故选 B.

## 4. D 【命题点】列举法与古典概型

【解析】依题意, 用  $A_1, A_2$  表示高一的 2 名学生,  $B_1, B_2$  表示高二的 2 名学生, 则从 4 名学生中随机选 2 名学生的选法有  $(A_1, A_2), (B_1, B_2), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_2, B_2)$ , 共 6 种, 其中 2 名学生来自不同年级的选法有  $(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_2, B_2)$ , 共 4 种, 所以所求概率  $P = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ , 故选 D.

## 5. C 【命题点】等差数列基本量的运算

【解析】因为  $a_2 + a_6 = 10 = 2a_4$ , 所以  $a_4 = 5$ , 又  $a_4 a_8 = 45$ , 所以  $a_8 = 9$ . 令公差为  $d$ , 由  $a_8 - a_4 = 4d = 4$ , 解得  $d = 1$ , 所以  $a_3 = a_4 - d = 4$ , 故  $S_5 = \frac{a_1 + a_5}{2} \times 5 = \frac{2a_3}{2} \times 5 = 20$ , 故选 C.

## 6. B 【命题点】程序框图

【解析】初始值  $n = 3, A = 1, B = 2, k = 1$ , 第一次循环:  $A = 3, B = 5, k = 2$ ; 第二次循环:  $A = 8, B = 13, k = 3$ ; 第三次循环:  $A = 21, B = 34, k = 4$ , 此时不满足循环条件, 退出循环, 输出  $B = 34$ , 故选 B.

## 7. B 【命题点】椭圆焦点三角形问题

【解析】由题意得  $c = \sqrt{5-1} = 2$ , 故  $|F_1 F_2| = 4$ . 因为  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ , 所以  $PF_1 \perp PF_2$ ,  $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| = |F_1 F_2|^2 = 16$  (提示: 在  $\text{Rt} \triangle PF_1 F_2$  中运用勾股定理建立方程), 又  $|PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{5}$ , 所以  $|PF_1| \cdot |PF_2| = 2$ , 故选 B.

## 8. C 【命题点】曲线在某点处的切线方程

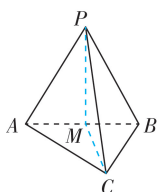
【解析】 $y' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$ ,  $y'|_{x=1} = \frac{e}{4}$ , 所以曲线  $y = \frac{e^x}{x+1}$  在点  $(1, \frac{e}{2})$  处的切线方程为  $y - \frac{e}{2} = \frac{e}{4}(x-1)$  (提示: 利用点斜式求直线方程), 整理得  $y = \frac{e}{4}x + \frac{e}{4}$ , 故选 C.

## 9. D 【命题点】双曲线的几何性质、直线和圆的位置关系

【解析】因为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的离心率  $e = \sqrt{5}$ , 所以由  $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 5$ , 得  $\frac{b}{a} = 2$ , 所以双曲线  $C$  的渐近线方程为  $y = \pm 2x$ . 由题意知渐近线  $y = 2x$  与圆相交, 圆心  $(2, 3)$  到直线  $y = 2x$  的距离  $d = \frac{|2 \times 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 所以  $|AB| = 2\sqrt{1-d^2} = 2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ , 故选 D.

#### 10. A 【命题点】三棱锥体积的计算

【解析】如图, 取  $AB$  的中点  $M$ , 连接  $PM$ ,  $CM$ . 由题意可知,  $\triangle PAB$  与  $\triangle ABC$  均为边长为 2 的等边三角形, 则  $PM = CM = \sqrt{3}$ , 又  $PC = \sqrt{6}$ , 所以  $PM^2 + CM^2 = PC^2$ , 所以  $PM \perp CM$ . 又  $PM \perp AB$ , 且  $CM \cap AB = M$ , 所以  $PM \perp$



平面  $ABC$ . 因为  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$  (提示: 若等边三角形的边长为  $a$ , 则高为  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ , 面积为  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ), 所以三棱锥  $P-ABC$  的体积为  $\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot PM = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1$ , 故选 A.

#### 一题多解

如图, 取  $AB$  的中点  $M$ , 连接  $PM$ ,  $CM$ . 由题意可知,  $\triangle PAB$  与  $\triangle ABC$  均为边长为 2 的等边三角形, 所以  $PM = CM = \sqrt{3}$ ,  $PM \perp AB$ ,  $CM \perp AB$ , 又  $PM \cap CM = M$ , 所以  $AB \perp$  平面  $PCM$ ,  $\triangle PCM$  的面积为  $\frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt{3 - \frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$  (提示: 过点  $M$  作  $PC$  的垂线交  $PC$  于点  $N$ , 在  $\text{Rt}\triangle PMN$  中利用勾股定理求高  $MN$ ), 所以三棱锥  $P-ABC$  的体积为  $\frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 2 = 1$ .

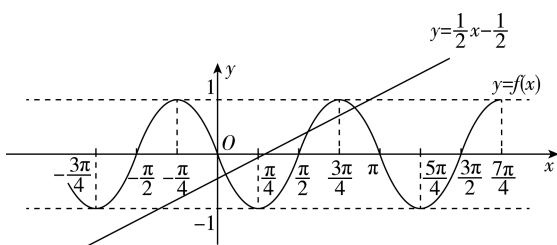
#### 11. A 【命题点】利用函数单调性和图像的对称性比较大小

【解析】由题意得  $f(x) = f(2-x)$ , 则函数  $f(x)$  的图像关于直线  $x = 1$  对称 (提示: 根据  $y = -(x-1)^2$  的图像判断), 且  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减.

因为  $1 > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以  $b = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a$ ,  $c = f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = f\left(2 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$  (关键: 利用对称性将  $a, b, c$  放在函数  $f(x)$  的同一单调区间内进行比较). 因为  $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 所以  $b > c > a$ , 故选 A.

#### 12. C 【命题点】三角函数的图像和性质

【解析】由题意知  $f(x) = \cos \left[ 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6} \right] = \cos \left( 2x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin 2x$ , 画出函数  $f(x)$  的图像和直线  $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ , 如图.



由图像可知,函数  $y=f(x)$  的图像与直线  $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$  有 3 个交点,故选 C.

### 13. $-\frac{1}{2}$ 【命题点】等比数列的前 $n$ 项和公式

【解析】因为  $8S_6=7S_3$ , 显然公比  $q \neq 1$ , 则  $8 \times \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 7 \times \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}$ , 得到  $1+q^3=\frac{7}{8}$ , 解得  $q=-\frac{1}{2}$ .

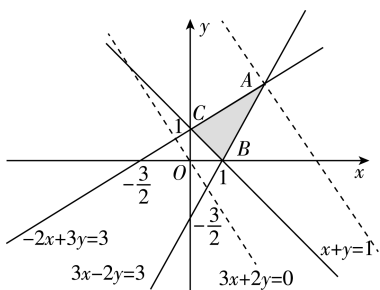
### 14.2 【命题点】根据函数的奇偶性求参数

【解析】 $\because f(x) = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (x-1)^2 + ax + \cos x$ ,  $\therefore f(-x) = (-x-1)^2 - ax + \cos(-x) = (x+1)^2 - ax + \cos x$ .  $\because f(x)$  为偶函数,  $\therefore f(x) = f(-x)$ ,  $\therefore (x-1)^2 + ax + \cos x = (x+1)^2 - ax + \cos x$ , 即  $4x = 2ax$ ,  $\therefore a = 2$ .

### 15.15 【命题点】线性规划求最值

【解析】由约束条件,画出可行域如图中阴影部分所示(含边界),作出直线  $3x+2y=0$  并平移,由图可知,当直线  $y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}$  过点 A 时,在  $y$  轴上的截距取最大值,即目标函数

$z = 3x + 2y$  取最大值. 联立  $\begin{cases} 3x-2y=3, \\ -2x+3y=3, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x=3, \\ y=3, \end{cases}$  即  $A(3, 3)$ ,  $\therefore$  目标函数的最大值  $z_{\max} = 3 \times 3 + 2 \times 3 = 15$ .



### 16. $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$

#### 思路导引

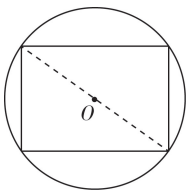
正方体的棱与球有公共点  $\begin{cases} \rightarrow \text{交于两端} \rightarrow \text{外接球} \\ \rightarrow \text{交于中点} \rightarrow \text{棱切球} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{半径的} \\ \text{取值范围} \end{cases}$

### 【命题点】正方体的外接球和棱切球

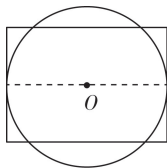
【解析】若正方体的棱与球  $O$  的球面有公共点,则考虑两种临界情况:

(1) 球是正方体的外接球,此时球面与棱的公共点是正方体的顶点,截面如图①所示. 因为正方体的棱长为 4,  $O$  为正方体的中心,所以其外接球的半径为正方体体对角线长度的一半,即  $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$  (提示:正方体外接球的球心为正方体

的中心,半径为正方体体对角线长的一半).



图①



图②

(2)球是正方体的棱切球,即正方体与球相切于各条棱的中点,截面如图②所示.则棱切球的半径为

$$\frac{\sqrt{4^2+4^2}}{2}=2\sqrt{2} \text{ (提示:正方体棱切球的球心为正方体的中心,半径为正方体面对角线长的一半)}.$$

综上,球  $O$  的半径的取值范围是  $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$ .

### 17. 【命题点】正弦定理、余弦定理在解三角形中的应用

【解】(1)由余弦定理  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$  整理可得

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{\cos A}=2bc=2, \text{ 所以 } bc=1. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2)由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  为  $\triangle ABC$  外接圆的半径),可得

$$\frac{a \cos B - b \cos A}{a \cos B + b \cos A} - \frac{b}{c} = \frac{\sin A \cos B - \sin B \cos A}{\sin A \cos B + \sin B \cos A} - \frac{\sin B}{\sin C} = 1. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

又因为  $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ ,

所以  $\sin A \cos B - \sin B \cos A - \sin B = \sin A \cos B + \sin B \cos A$ ,

整理得  $-2 \sin B \cos A = \sin B$ .

因为  $B \in (0, \pi)$ , 所以  $\sin B \neq 0$ , 所以  $\cos A = -\frac{1}{2}$ .  $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

(另解:根据余弦定理,原式可化为

$$\frac{a \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} - b \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{a \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} + b \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}} - \frac{b}{c} = 1, \text{ 整理可得 } \frac{a^2-b^2}{c^2} - \frac{b}{c} = 1, \text{ 即 } a^2-b^2-bc=c^2, \text{ 故 } \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2} )$$

$$\text{则 } \sin A = \sqrt{1-\cos^2 A} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

### 18. 【命题点】线面垂直、面面垂直的证明,点到平面的距离

(1)【证明】因为  $A_1C \perp$  平面  $ABC$ ,  $BC \subset$  平面  $ABC$ ,

所以  $A_1C \perp BC$ .

又  $AC \perp BC$ ,  $A_1C \cap AC = C$ , 所以  $BC \perp$  平面  $ACC_1A_1$ .

因为  $BC \subset$  平面  $BB_1C_1C$ , 所以平面  $ACC_1A_1 \perp$  平面  $BB_1C_1C$ .

$\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2)【解】由(1)可知,  $A_1C \perp BC$ , 又因为  $AB = A_1B$ ,  $AC \perp BC$ ,

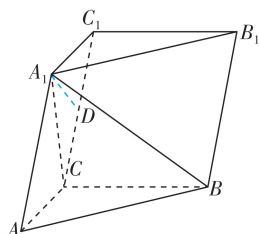
所以  $CA = CA_1$ , 所以  $\triangle AA_1C$  是等腰直角三角形, 所以

$\triangle CA_1C_1$  是等腰直角三角形.  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

如图,取  $CC_1$  的中点为  $D$ ,连接  $A_1D$ ,则  $A_1D \perp CC_1$ ,  
 由(1)可知, $BC \perp$  平面  $ACC_1A_1$ ,而  $A_1D \subset$  平面  $ACC_1A_1$ ,  
 所以  $A_1D \perp BC$ ,又  $BC \cap CC_1 = C$ ,所以  $A_1D \perp$  平面  $BB_1C_1C$ ,  
 所以四棱锥  $A_1-BB_1C_1C$  的高即为  $A_1D$ . ..... 9 分

$$\text{又 } A_1D = \frac{CC_1}{2} = \frac{AA_1}{2} = 1,$$

所以四棱锥  $A_1-BB_1C_1C$  的高为 **1**. ..... 12 分



**19. 【命题点】**样本平均数和中位数的计算,独立性检验

【解】(1) 试验组的样本平均数  $\bar{x} = \frac{1}{20} \times (7.8 + 9.2 + 11.4 + 12.4 + 13.2 + 15.5 + 16.5 + 18.0 + 18.8 + 19.2 + 19.8 + 20.2 + 21.6 + 22.8 + 23.6 + 23.9 + 25.1 + 28.2 + 32.3 + 36.5) = \frac{396}{20} = 19.8$ ,

所以试验组的样本平均数为 **19.8**. ..... 4 分

(2) (i) 将对照组和实验组的数据合并,重新按照从小到大的顺序排列,第 20 个数据为 23.2,第 21 个数据为 23.6,  
 所以 40 只小白鼠体重的增加量的中位数  $m = \frac{23.2 + 23.6}{2} =$

**23.4**. ..... 6 分  
 得到列联表如下:

	$< m$	$\geq m$
对照组	6	14
试验组	14	6

.....8 分

(ii) 根据(i)中列联表可得  $K^2 = \frac{40 \times (6 \times 6 - 14 \times 14)^2}{20 \times 20 \times 20 \times 20} = 6.4 > 3.841$ ,

所以有 **95% 的把握认为** 小白鼠在高浓度臭氧环境中与在正常环境中体重的增加量有差异. .... 12 分

**20. 【命题点】**利用导数研究函数的单调性,不等式恒成立求参数的取值范围

【解】(1) 当  $a = 1$  时,  $f(x) = x - \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $f'(x) = 1 - \frac{\cos^3 x + 2\cos x \sin^2 x}{\cos^4 x} = \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x + 2\cos x + 2)}{\cos^3 x}$ ,

因为  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以  $0 < \cos x < 1$ ,

所以  $f'(x) < 0$  恒成立,

所以  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上 **单调递减**. ..... 5 分

(2) 若  $f(x) + \sin x < 0$ , 则  $\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x - ax > 0$ ,

$$\text{设 } g(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x - ax,$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{-\cos^4 x - \cos^2 x + 2}{\cos^3 x} - a. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

当  $a \leq 0$  时, 因为  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以  $0 < \cos x < 1$ ,

所以  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增,

则  $g(x) > g(0) = 0$ , 所以  $f(x) + \sin x < 0$  成立.  $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

当  $a > 0$  时,  $g'(0) = -a < 0$ , 所以存在  $x_0 > 0$ , 当  $x \in (0, x_0)$  时, 使得  $g'(x) < 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减,  $g(x) < 0$ , 不符合题意.

综上所述,  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 0]$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

**21. 思路导引** (2) 设直线  $MN$  的方程为  $x = my + b$   
 $b \xrightarrow{\text{与抛物线方程联立}} M, N \text{ 坐标间的关系} \xrightarrow{\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = 0} b \text{ 的}$   
 $\text{取值范围} \longrightarrow S_{\triangle MFN} \text{ 的表达式} \xrightarrow{\text{二次函数的性质}} S_{\triangle MFN} \text{ 的最}$   
 $\text{小值}$

**【命题点】** 直线与抛物线的位置关系, 三角形面积的最值问题

**【解】** (1) 联立 
$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

消去  $y$  并整理得  $x^2 + (2 - 8p)x + 1 = 0$ , 由  $(2 - 8p)^2 - 4 > 0$  得  $p > \frac{1}{2}$ ,  $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = 8p - 2, x_1 x_2 = 1$ ,

所以  $|AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \sqrt{(8p - 2)^2 - 4} = 4\sqrt{15}$ , 解得  $p = 2$  (负值舍去).  $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 由题知, 直线  $MN$  的斜率不为 0, 设直线  $MN$  的方程为  $x = my + b$ , 由 (1) 知, 抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ ,

联立 
$$\begin{cases} x = my + b, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$$
 消去  $x$  并整理得  $y^2 - 4my - 4b = 0$ ,

$\Delta = 16m^2 + 16b > 0$ ,  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

设  $M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$ , 则  $y_3 + y_4 = 4m, y_3 y_4 = -4b$ ,

所以  $x_3 + x_4 = 4m^2 + 2b, x_3 x_4 = m^2 y_3 y_4 + mb(y_3 + y_4) + b^2 = b^2$ .

$\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

因为抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F(1, 0)$ ,

所以  $\overrightarrow{FM} = (x_3 - 1, y_3), \overrightarrow{FN} = (x_4 - 1, y_4)$ ,

所以  $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = (x_3 - 1) \cdot (x_4 - 1) + y_3 y_4 = x_3 x_4 - (x_3 + x_4) + y_3 y_4 + 1 = 0$ ,

所以  $b^2 - 4m^2 - 2b - 4b + 1 = 0$ ,

所以  $m^2 = \frac{b^2 - 6b + 1}{4} \geq 0$ , 此时  $\Delta = 4(b - 1)^2$ . 若  $\Delta > 0$ , 则  $b \neq 1$ ,

所以  $b^2 - 6b + 1 \geq 0$ , 解得  $b \leq 3 - 2\sqrt{2}$  或  $b \geq 3 + 2\sqrt{2}$ ,  $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

设点  $F$  到直线  $MN$  的距离为  $d$ , 则  $d = \frac{|1 - b|}{\sqrt{1 + m^2}}$ ,

$$\begin{aligned} \text{又 } |MN| &= \sqrt{1+m^2} \sqrt{(y_3+y_4)^2 - 4y_3y_4} \\ &= \sqrt{1+m^2} \sqrt{16m^2+16b} \\ &= 2\sqrt{1+m^2} \cdot |b-1|, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle MFN} = \frac{1}{2} |MN| d = (b-1)^2,$$

（另解：因为  $|MF| = x_3 + 1$ ,  $|NF| = x_4 + 1$ ,  $MF \perp NF$ , 所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle MFN} &= \frac{1}{2} |MF| \cdot |NF| = \frac{1}{2} (x_3+1)(x_4+1) = \frac{1}{2} (x_3x_4+x_3+x_4+1) \\ &= \frac{1}{2} (4m^2+2b+b^2+1) = (b-1)^2 \end{aligned}$$

所以当  $b = 3 - 2\sqrt{2}$  时,  $\triangle MFN$  的面积取得最小值  $(3-2\sqrt{2}-1)^2 = 12-8\sqrt{2}$ . ..... 12 分

## 22. 【命题点】参数方程、极坐标方程

【解】(1) 由直线  $l$  的参数方程消去参数  $t$  得直线  $l$  的普通方程为  $y-1 = (x-2)\tan \alpha$ , 令  $x=0$ , 则  $y = -2\tan \alpha + 1$ , 则  $B(0, -2\tan \alpha + 1)$ ; 令  $y=0$ , 则  $x = -\frac{1}{\tan \alpha} + 2$ , 则  $A\left(-\frac{1}{\tan \alpha} + 2, 0\right)$ ,

$$\therefore |PA| = \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \alpha} + 1}, |PB| = \sqrt{4\tan^2 \alpha + 4}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } |PA| \cdot |PB| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\tan^2 \alpha} + 1\right)(4\tan^2 \alpha + 4)} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{\tan^2 \alpha} + 4\tan^2 \alpha + 8} = 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{4}{\tan^2 \alpha} + 4\tan^2 \alpha - 8 &= 0, \text{ 即 } \left(\frac{1}{\tan \alpha} - \tan \alpha\right)^2 = 0, \text{ 由于直线 } l \text{ 与} \\ x, y \text{ 轴的正半轴相交, 则 } \tan \alpha < 0, \text{ 故 } \tan \alpha &= -1, \text{ 又 } 0 \leq \alpha < \pi, \\ \therefore \alpha &= \frac{3\pi}{4}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分} \end{aligned}$$

**一题多解** 令  $x=0, t_1 = -\frac{2}{\cos \alpha}$ ; 令  $y=0, t_2 = -\frac{1}{\sin \alpha}$ .

$$\therefore |PA| \cdot |PB| = |t_1 t_2| = \left| \frac{2}{\sin \alpha \cos \alpha} \right| = 4.$$

$$\therefore \sin 2\alpha = \pm 1, \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ (舍)} \text{ 或 } \alpha = \frac{3\pi}{4}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 由(1)知直线  $l$  的直角坐标方程为  $y-1 = -(x-2)$ , 即  $x+y=3$ , ..... 7 分

根据直角坐标与极坐标转化关系  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$  得  $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 3$ ,

故直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho(\cos \theta + \sin \theta) = 3$ . ..... 10 分

## 23. 【命题点】求不等式的解集、已知函数图像与坐标轴围成三角形面积求参数

【解】 $\because$  函数  $f(x) = 2|x-a| - a = \begin{cases} 2x-3a, & x \geq a, \\ a-2x, & x < a, \end{cases} a > 0$ , 作出其大致图像如图所示.

(1) 当  $2x-3a=x$  时,  $x=3a$ ; 当  $a-2x=x$  时,  $x=\frac{a}{3}$ ,  $\therefore f(x) < x$ ,

$\therefore \frac{a}{3} < x < 3a$ , 即不等式  $f(x) < x$  的解集为  $\left\{x \mid \frac{a}{3} < x < 3a\right\}$ .

..... 5 分

(2) 设函数  $f(x)$  的图像与  $x$  轴的两个交点分别为  $A, B$ , 当  $2x - 3a = 0$  时,  $x = \frac{3a}{2}$ ; 当  $a - 2x = 0$  时,  $x = \frac{a}{2}$ , 则函数  $y = f(x)$

的图像与  $x$  轴的交点坐标为  $A\left(\frac{a}{2}, 0\right), B\left(\frac{3a}{2}, 0\right)$ , 则  $|AB| =$

$\frac{3a}{2} - \frac{a}{2} = a$ . 设函数  $y = a - 2x$  和  $y = 2x - 3a$  的图像的交点为

$C$ , 联立  $\begin{cases} y = a - 2x, \\ y = 2x - 3a, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x = a, \\ y = -a, \end{cases}$  即  $C(a, -a)$ , 由图可知曲线

$y = f(x)$  与  $x$  轴所围成的图形为  $\triangle ABC$ , 则  $\triangle ABC$  的面积

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}a \cdot a = 2, \therefore a^2 = 4$ . 又  $a > 0, \therefore a = 2$ . ..... 10 分

