

**1. B** 【命题点】集合的交集运算、元素个数

【解析】 $\because$  集合  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ,  $\therefore A \cap B = \{2, 4\}$ , 即  $A \cap B$  中元素的个数为 2. 故选 B.

**2. C** 【命题点】复数的乘法运算及几何意义

【解析】 $z = i(-2+i) = -1-2i$ , 即  $z$  在复平面内对应的点为  $(-1, -2)$ , 位于第三象限. 故选 C.

**3. A** 【命题点】折线图的理解、应用

【解析】根据对折线图的理解, 对于选项 A, 月接待游客量不是逐月增加, 故 A 错误; 对于选项 B, 月接待游客量呈现增长趋势, 则年接待游客量逐年增加, 故 B 正确; 对于选项 C, 从题图中可以看出各年的月接待游客量高峰期大致在 7, 8 月, 故 C 正确; 对于选项 D, 从折线图的走势看, 各年 1 月至 6 月的月接待游客量相对于 7 月至 12 月, 波动性更小, 折线图走势比较平稳, 故 D 正确. 故选 A.

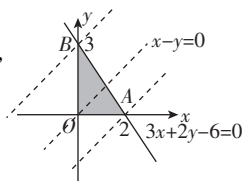
**4. A** 【命题点】同角三角函数的基本关系, 二倍角公式

【解析】 $\because \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{4}{3}$ ,  $\therefore (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha +$

$\cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 - \sin 2\alpha = \frac{16}{9}$ ,  $\therefore \sin 2\alpha = -\frac{7}{9}$ . 故选 A.

**5. B** 【命题点】线性规划

【解析】作出不等式组  $\begin{cases} 3x+2y-6 \leq 0, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0 \end{cases}$



表示的可行域, 如图中阴影部分所

示. 作出直线  $y=x$  并平移, 结合图形可知, 当直线  $z=x-y$  分别经过点  $A(2,0)$ ,  $B(0,3)$  时,  $z$  分别取得最大值、最小值, 因此最大值为 2, 最小值为 -3, 即  $z=x-y$  的取值范围为  $[-3, 2]$ . 故选 B.

**快解** 不等式组表示的可行域为封闭的区域  $OAB$ , 且  $A(2,0)$ ,  $B(0,3)$ ,  $O(0,0)$ , 将这三个点的坐标分别代入  $z=x-y$  中, 可得  $z$  的最大值为 2, 最小值为 -3, 即  $z=x-y$  的取值范围为  $[-3, 2]$ . 故选 B.

**6. A** 【命题点】诱导公式、三角函数的有界性

【解析】由题可知,  $f(x) = \frac{1}{5} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) =$

$\frac{1}{5} \sin\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} - x\right)\right] + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{5} \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) +$

$\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{6}{5} \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$  (另解: 函数解析式也可化为

$f(x) = \frac{6}{5} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ ), 因此  $f(x)$  的最大值为  $\frac{6}{5}$ . 故选 A.

**7. D** 【命题点】函数的图像

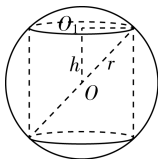
【解析】利用排除法和特值求解. 当  $x=1$  时,  $y=2+\sin 1>2$ , 排除 A, C; 当  $x=\pi$  时,  $y=1+\pi$ , 当  $x=2\pi$  时,  $y=1+2\pi$ , 排除 B. 故选 D.

#### 8. D 【命题点】程序框图

【解析】根据程序框图模拟执行程序, 第一次循环:  $S=0+100=100$ ,  $M=-\frac{100}{10}=-10$ ,  $t=1+1=2$ ; 第二次循环:  $S=100-10=90$ ,  $M=-\frac{10}{10}=1$ ,  $t=2+1=3$ . 此时输出的 90 符合题意, 故终止循环. 故选 D.

#### 9. B 【命题点】球的内接圆柱的体积, 球的性质

【解析】由圆柱的两个底面的圆周在直径为 2 的同一个球的球面上, 知球的直径为 2, 因此球的半径  $r=1$ . 因为圆柱的高  $2h=1$ , 所以圆



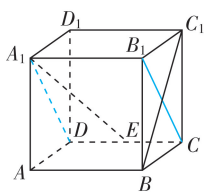
柱的底面半径  $r_1 = \sqrt{r^2 - \left(\frac{2h}{2}\right)^2} =$

$\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 由圆柱体的体积公式得  $V = \pi r_1^2 \cdot 2h =$

$\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times 1 = \frac{3}{4}\pi$ . 故选 B.

#### 10. C 【命题点】空间中的线线垂直

【解析】如图, 连接  $A_1D, B_1C$ , 则  $A_1E \subset$  平面  $A_1DCB_1$ . 在正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中,  $DC \perp BC_1, B_1C \perp BC_1, DC \cap B_1C = C, \therefore BC_1 \perp$  平面  $A_1DCB_1$ , 而  $A_1E \subset$  平面  $A_1DCB_1, \therefore A_1E \perp BC_1$ . 故选 C.



**快解** 由题可知  $A_1E$  在平面  $B_1BCC_1$  上的射影为  $B_1C$ , 根据三垂线定理, 得  $A_1E \perp BC_1$ . 故选 C.

#### 11. A 【命题点】椭圆的几何性质, 直线与圆的位置关系

【解析】椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$  的左、右顶点分别为  $A_1, A_2$ , 则  $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), \therefore$  以线段  $A_1A_2$  为直径的圆的方程为  $x^2 + y^2 = a^2$ .  $\therefore$  该圆与直线  $bx - ay + 2ab = 0$  相切,  $\therefore$  圆心 (原点) 到直线  $bx - ay + 2ab = 0$  的距离  $d = \frac{2ab}{\sqrt{b^2 + a^2}} = a, \therefore a^2 = 3b^2$ .

又  $a^2 = b^2 + c^2$ , 则  $2a^2 = 3c^2, \therefore C$  的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ . 故选 A.

#### 12. C 【命题点】函数的零点、函数的奇偶性

【解析】由函数  $f(x)$  有零点得  $x^2 - 2x + a(e^{x-1} + e^{-x+1}) = 0$  有解, 即  $(x-1)^2 - 1 + a(e^{x-1} + e^{-x+1}) = 0$  有解,

令  $t = x - 1$ , 则上式可化为  $t^2 - 1 + a(e^t + e^{-t}) = 0$ , 即  $a = \frac{1-t^2}{e^t + e^{-t}}$ .

令  $h(t) = \frac{1-t^2}{e^t + e^{-t}}$ , 易得  $h(t)$  为偶函数,

又由  $f(x)$  有唯一零点得函数  $h(t)$  的图像与直线  $y=a$  有唯一交点, 则此交点的横坐标为 0, 所以  $a = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ , 故选 C.

**13.2 【命题点】平面向量数量积的坐标表示, 向量垂直求参数**

【解析】 $\because a \perp b, \therefore a \cdot b = 0$ , 即  $3 \times (-2) + 3m = 0$ , 解得  $m = 2$ .

**14.5 【命题点】双曲线的几何性质**

【解析】由双曲线的标准方程, 可得渐近线方程为  $y = \pm \frac{3}{a}x$ ,  
 $\therefore a = 5$ .

**15.75° 【命题点】正弦定理解三角形**

【解析】由正弦定理, 得  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ , 即  $\frac{\sqrt{6}}{\sin B} = \frac{3}{\sin 60^\circ}$ ,

$\therefore \sin B = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $\therefore B = 45^\circ$  或  $135^\circ$ .  $\because c > b, \therefore C > B$ ,

$\therefore B = 45^\circ, \therefore A = 75^\circ$ .

**16.  $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$  【命题点】分段函数的不等式**

【解析】由题意, 当  $x > \frac{1}{2}$  时,  $f(x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) = 2^x + 2^{x-\frac{1}{2}} > 1$  恒

成立, 即  $x > \frac{1}{2}$  满足题意; 当  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  时,  $f(x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) =$

$2^x + x - \frac{1}{2} + 1 > 1$  恒成立, 即  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  满足题意; 当  $x \leq 0$  时,

$f(x) + f\left(x - \frac{1}{2}\right) = x + 1 + x - \frac{1}{2} + 1 > 1$ , 解得  $x > -\frac{1}{4}$ , 即  $-\frac{1}{4} < x \leq$

0. 综上,  $x$  的取值范围是  $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ .

**17. 【命题点】数列的通项公式, 裂项相消法求和**

【解】(1) 因为  $a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-1)a_n = 2n$ , 故当  $n \geq 2$  时,  $a_1 + 3a_2 + \cdots + (2n-3)a_{n-1} = 2(n-1)$ . ..... 2 分

两式相减得  $(2n-1)a_n = 2$ . 所以  $a_n = \frac{2}{2n-1} (n \geq 2)$ .

..... 4 分

又由题设可得  $a_1 = 2$ , 满足  $a_n = \frac{2}{2n-1}$ ,

从而  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \frac{2}{2n-1}$ . ..... 6 分

(2) 设  $\left\{\frac{a_n}{2n+1}\right\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ .

由(1)知  $\frac{a_n}{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$ . ..... 10 分

则  $S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}$ . ..... 12 分

**18. 【命题点】频率估计概率**

【解】(1) 这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶, 当且仅当最

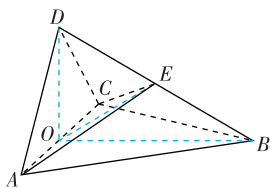
最高气温低于 25, 由表格数据知, 最高气温低于 25 的频率为  $\frac{2+16+36}{90}=0.6$ , 所以估计六月份这种酸奶一天的需求量不超过 300 瓶的概率为 **0.6**. ..... 6 分

(2) 当这种酸奶一天的进货量为 450 瓶时,  
若最高气温不低于 25, 则  $Y=6 \times 450-4 \times 450=900$ ;  
若最高气温位于区间  $[20, 25)$ , 则  $Y=6 \times 300+2 \times (450-300)-4 \times 450=300$ ;  
若最高气温低于 20, 则  $Y=6 \times 200+2 \times (450-200)-4 \times 450=-100$ .  
所以,  $Y$  的所有可能值为 **900, 300, -100**. ..... 9 分  
 $Y$  大于零当且仅当最高气温不低于 20, 由表格数据知, 最高气温不低于 20 的频率为  $\frac{36+25+7+4}{90}=0.8$ , 因此估计  $Y$  大于零的概率为 **0.8**. ..... 12 分

### 19. 【命题点】空间中的线线垂直, 点的位置判断

(1) 【证明】取  $AC$  的中点  $O$ , 连接  $DO, BO$ .  
因为  $AD=CD$ , 所以  $AC \perp DO$ . ..... 2 分  
因为  $\triangle ABC$  是正三角形, 所以  $AC \perp BO$ . ..... 3 分  
又  $DO, BO \subset$  平面  $DOB$ , 所以  $AC \perp$  平面  $DOB$ , ..... 4 分  
又  $BD \subset$  平面  $DOB$ , 故  $AC \perp BD$ . ..... 5 分

(2) 【解】连接  $EO$ . 由 (1) 及题设知  $\angle ADC=90^\circ$ , 所以  $DO=AO$ .  
在  $\text{Rt} \triangle AOB$  中,  $BO^2+AO^2=AB^2$ .  
又  $AB=BD$ ,



所以  $BO^2+DO^2=BO^2+AO^2=AB^2=BD^2$ , 故  $\angle DOB=90^\circ$ .  
由题设知  $\triangle AEC$  为直角三角形, 所以  $EO=\frac{1}{2}AC$ . ..... 8 分  
又  $\triangle ABC$  是正三角形, 且  $AB=BD$ , 所以  $EO=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}BD$ .  
..... 9 分

故  $E$  为  $BD$  的中点, 从而  $E$  到平面  $ABC$  的距离为  $D$  到平面  $ABC$  的距离的  $\frac{1}{2}$ , ..... 10 分  
即四面体  $ABCE$  的体积为四面体  $ABCD$  的体积的  $\frac{1}{2}$ , ..... 11 分  
即四面体  $ABCE$  与四面体  $ACDE$  的体积比为 **1:1**. ..... 12 分

**方法速记** 证明线线垂直, 一般转化为先证明线面垂直, 再利用线面垂直的性质得出结论. 判定线面垂直的方法: (1) 线面垂直的判定定理; (2) 平行线垂直于平面的传递性; (3) 面面垂直的性质; (4) 面面平行的性质.

### 20. 【命题点】抛物线的性质, 过不同三点的圆的弦长

(1) 【解】不能出现  $AC \perp BC$  的情况, 理由如下:  
设  $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ , 则  $x_1, x_2$  满足  $x^2+mx-2=0$ ,

所以  $x_1x_2 = -2$ .

又  $C$  的坐标为  $(0, 1)$ ,

故  $AC$  的斜率与  $BC$  的斜率之积为  $\frac{-1}{x_1} \cdot \frac{-1}{x_2} = -\frac{1}{2}$ ,

所以不能出现  $AC \perp BC$  的情况. .... 4 分

(2)【证明】 $BC$  的中点坐标为  $\left(\frac{x_2}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , 可得  $BC$  的中垂线

方程为  $y - \frac{1}{2} = x_2 \left(x - \frac{x_2}{2}\right)$ . .... 6 分

由(1)可得  $x_1 + x_2 = -m$ , 所以  $AB$  的中垂线方程为  $x = -\frac{m}{2}$ .

$$\text{联立} \begin{cases} x = -\frac{m}{2}, \\ y - \frac{1}{2} = x_2 \left(x - \frac{x_2}{2}\right), \end{cases} \quad \text{又 } x_2^2 + mx_2 - 2 = 0, \text{ 可得 } \begin{cases} x = -\frac{m}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

..... 8 分

所以过  $A, B, C$  三点的圆的圆心  $D$  的坐标为  $\left(-\frac{m}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ , 半

径  $r = |DC| = \frac{\sqrt{m^2 + 9}}{2}$ . .... 10 分

故圆在  $y$  轴上截得的弦长为  $2\sqrt{r^2 - \left(\frac{m}{2}\right)^2} = 3$ , 即过  $A, B, C$

三点的圆在  $y$  轴上截得的弦长为定值. .... 12 分

## 21. 【命题点】导数与函数的单调性、最值

(1)【解】 $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax + 2a + 1 = \frac{(x+1)(2ax+1)}{x}$ . .... 2 分

若  $a \geq 0$ , 则当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. .... 4 分

若  $a < 0$ , 则当  $x \in \left(0, -\frac{1}{2a}\right)$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x \in \left(-\frac{1}{2a}, +\infty\right)$  时,  $f'(x) < 0$ . 故  $f(x)$  在  $\left(0, -\frac{1}{2a}\right)$  上单调递增, 在  $\left(-\frac{1}{2a}, +\infty\right)$  上单调递减. .... 6 分

(2)【证明】由(1)知, 当  $a < 0$  时,  $f(x)$  在  $x = -\frac{1}{2a}$  处取得最大值, 最大值为  $f\left(-\frac{1}{2a}\right) = \ln\left(-\frac{1}{2a}\right) - 1 - \frac{1}{4a}$ . .... 7 分

所以  $f(x) \leq -\frac{3}{4a} - 2$  等价于  $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right) - 1 - \frac{1}{4a} \leq -\frac{3}{4a} - 2$ , 即

$\ln\left(-\frac{1}{2a}\right) + \frac{1}{2a} + 1 \leq 0$ . .... 8 分

设  $g(x) = \ln x - x + 1$ , 则  $g'(x) = \frac{1}{x} - 1$ . .... 9 分

当  $x \in (0, 1)$  时,  $g'(x) > 0$ ; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g'(x) < 0$ . 所以  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减. 故当  $x =$

1 时,  $g(x)$  取得最大值, 最大值为  $g(1) = 0$ . 所以当  $x > 0$  时,  $g(x) \leq 0$ . 从而当  $a < 0$  时,  $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right) + \frac{1}{2a} + 1 \leq 0$ , 即  $f(x) \leq -\frac{3}{4a} - 2$ . ..... 12 分

## 22. 【命题点】参数方程与普通方程的互化, 直线交点的轨迹方程, 极坐标方程的应用

【解】(1) 消去参数  $t$  得  $l_1$  的普通方程为  $y = k(x-2)$ ; 消去参数  $m$  得  $l_2$  的普通方程为  $y = \frac{1}{k}(x+2)$ . ..... 2 分

设  $P(x, y)$ , 由题设得  $\begin{cases} y = k(x-2), \\ y = \frac{1}{k}(x+2). \end{cases}$  消去  $k$  得  $x^2 - y^2 = 4 (y \neq 0)$ .

0) (易错: 易忽略不合题意的特殊点).

所以  $C$  的普通方程为  $x^2 - y^2 = 4 (y \neq 0)$ . ..... 5 分

(2)  $C$  的极坐标方程为  $\rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 4 (0 < \theta < 2\pi, \theta \neq \pi)$ . ..... 6 分

联立  $\begin{cases} \rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 4, \\ \rho (\cos \theta + \sin \theta) - \sqrt{2} = 0 \end{cases}$  得  $\cos \theta - \sin \theta = 2 (\cos \theta + \sin \theta)$ . ..... 7 分

故  $\tan \theta = -\frac{1}{3}$ , 从而  $\cos^2 \theta = \frac{9}{10}$ ,  $\sin^2 \theta = \frac{1}{10}$ . ..... 8 分

代入  $\rho^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 4$  得  $\rho^2 = 5$ , ..... 9 分

所以交点  $M$  的极径为  $\sqrt{5}$ . ..... 10 分

## 23. 【命题点】解含绝对值的不等式, 不等式有解求参数

【解】(1)  $f(x) = \begin{cases} -3, & x < -1, \\ 2x-1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 3, & x > 2. \end{cases}$  ..... 2 分

当  $x < -1$  时,  $f(x) \geq 1$  无解;

当  $-1 \leq x \leq 2$  时, 由  $f(x) \geq 1$  得,  $2x-1 \geq 1$ , 解得  $1 \leq x \leq 2$ ;

当  $x > 2$  时, 由  $f(x) \geq 1$ , 解得  $x > 2$ . ..... 4 分

所以不等式  $f(x) \geq 1$  的解集为  $\{x | x \geq 1\}$ . ..... 5 分

(2) 由  $f(x) \geq x^2 - x + m$  得  $m \leq |x+1| - |x-2| - x^2 + x$ .

而  $|x+1| - |x-2| - x^2 + x \leq |x| + 1 + |x| - 2 - x^2 + |x|$

$$\begin{aligned} &= -\left(|x| - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \\ &\leq \frac{5}{4}, \end{aligned}$$

当且仅当  $x = \frac{3}{2}$  时,  $|x+1| - |x-2| - x^2 + x = \frac{5}{4}$ ,

故  $m$  的取值范围为  $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right]$ . ..... 10 分