

## 1. A 【命题点】集合的交集运算

【解析】因为集合  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $B = \left[0, \frac{5}{2}\right)$ , 所以  $A \cap B = \{0, 1, 2\}$ , 故选 A.

▶ 一题多解 (排除法) 由  $0 \in A, 2 \in A, 0 \in B, 2 \in B$ , 可排除 B, C, D, 故选 A.

## 2. B 【命题点】统计图和样本的数字特征

【解析】对于 A, 讲座前问卷答题的正确率的中位数为  $\frac{70\% + 75\%}{2} = 72.5\%$ , 大于  $70\%$ , 故 A 错误;

对于 B, 讲座后问卷答题的正确率的平均数为  $89.5\%$ , 大于  $85\%$ , 故 B 正确;

对于 C, 因为标准差越小, 数据越集中, 由题图可知, 讲座前问卷答题的正确率的标准差大于讲座后正确率的标准差, 故 C 错误;

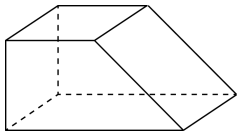
对于 D, 讲座后问卷答题的正确率的极差为  $20\%$ , 小于讲座前正确率的极差  $35\%$ , 故 D 错误. 故选 B.

## 3. D 【命题点】复数的基本运算、共轭复数与复数的模

【解析】 $iz + 3\bar{z} = i(1+i) + 3(1-i) = 2 - 2i$ , 所以  $|iz + 3\bar{z}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ , 故选 D.

## 4. B 【命题点】多面体的三视图和体积

【解析】根据三视图画出几何体如图所示, 可知该多面体可以看成是由一个正方体和一个直三棱柱组合



而成, 所以其体积  $V = 2 \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = 12$ , 故选 B.

## 5. C 【命题点】三角函数图像的平移变换及性质

【解析】将函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$  ( $\omega > 0$ ) 的图像向左平移  $\frac{\pi}{2}$

个单位长度后得到曲线  $C: f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[\omega\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{3}\right] =$

$\sin\left(\omega x + \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ . 由于曲线 C 关于 y 轴对称, 则有  $\frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3} =$

题眼

$k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 即  $\omega = 2k + \frac{1}{3}$  ( $k \in \mathbf{Z}$ ), 又  $\omega > 0$ , 所以当  $k = 0$  时,

$\omega$  取得最小值  $\frac{1}{3}$ , 故选 C.

▶ 一题多解 因为曲线 C 关于 y 轴对称, 所以函数  $f(x)$

的图像关于直线  $x = \frac{\pi}{2}$  对称, 所以  $f(0) = f(\pi)$ , 即  $\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$\sin\left(\omega\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ , 所以  $\omega\pi + \frac{\pi}{3} = 2k_1\pi + \frac{\pi}{3}$  ( $k_1 \in \mathbf{Z}$ ) 或  $\omega\pi + \frac{\pi}{3} =$

$2k_2\pi + \frac{2\pi}{3}$  ( $k_2 \in \mathbf{Z}$ ), 即  $\omega = 2k_1$  ( $k_1 \in \mathbf{Z}$ ) 或  $\omega = 2k_2 +$

$\frac{1}{3}$  ( $k_2 \in \mathbf{Z}$ ). 当  $\omega = 2k_1$  ( $k_1 \in \mathbf{Z}$ ) 时,  $f(x) = \sin\left(2k_1x + \frac{\pi}{3}\right)$

$(k_1 \in \mathbf{Z})$ , 此时,  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k_1\pi + \frac{\pi}{3}\right) (k_1 \in \mathbf{Z})$ , 不满足题意. 当  $\omega = 2k_2 + \frac{1}{3} (k_2 \in \mathbf{Z})$  时,  $f(x) = \sin\left[\left(2k_2 + \frac{1}{3}\right)x + \frac{\pi}{3}\right]$ , 此时  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(k_2\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k_2 \in \mathbf{Z})$ , 符合题意.

又  $\omega > 0$ , 所以当  $k_2 = 0$  时,  $\omega$  取得最小值  $\frac{1}{3}$ , 故选 C.

## 6. C 【命题点】无放回抽样和古典概型

【解析】无放回随机抽取 2 张的抽法有  $(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)$ , 共 30 种, 其中 2 张卡片上的数字之积是 4 的倍数的有  $(1, 4), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 2), (6, 4)$ , 共 12 种, 故所求概率为  $\frac{2}{5}$ . 故选 C.

## 7. A 【命题点】函数图像的判断

【解析】由题可知, 函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(-x) = (3^{-x} - 3^x) \cdot \cos(-x) = -f(x)$ , 即函数  $f(x)$  为奇函数, 所以其图像关于原点中心对称, 排除 B 和 D; 当  $x = 1$  时,  $f(x) > 0$ , 排除 C, 故选 A.

### 快解

因为  $f(1) = \left(3 - \frac{1}{3}\right) \cos 1 > 0$ , 可排除 C 和 D;  
 $f(-1) = \left(\frac{1}{3} - 3\right) \cos(-1) < 0$ , 可排除 B, 故选 A.

### 方法速记

判断函数图像问题的解题策略:

- (1) 首先确定函数的定义域;
- (2) 研究函数的单调性、奇偶性、对称性、周期性等性质;
- (3) 特殊点处的函数值的大小(与 0 比较);
- (4) 极限思想, 当  $x \rightarrow +\infty$  或  $x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x)$  的变化趋势.

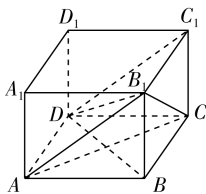
## 8. B 【命题点】函数最值的应用

【解析】依题意,  $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} = \frac{ax-b}{x^2}$ , 则  $f'(1) = a-b=0$ , 所以  $a=b$ . 又  $f(1) = b = -2$ , 所以  $a=b=-2$ , 所以  $f'(2) = \frac{2a-b}{4} = \frac{2 \times (-2) + 2}{4} = -\frac{1}{2}$ , 故选 B.

## 9. D 【命题点】长方体中的线段长度关系及线面角的大小

【解析】如图,  $\angle BDB_1, \angle DB_1A$  分别为  $B_1D$  与平面  $ABCD$  和平面  $AA_1B_1B$  所成的角. 在  $\text{Rt} \triangle B_1BD$  中,  $\angle BDB_1 = 30^\circ$ , 所以  $B_1D = 2B_1B$ ; 在  $\text{Rt} \triangle B_1AD$  中,  $\angle DB_1A = 30^\circ$ , 所以  $B_1D = 2AD$ , 所以  $AD = B_1B$ , 所以  $BD = \sqrt{3}AD$ , 所以  $AB = \sqrt{2}AD$ , 故 A 错误.  $CB_1 = \sqrt{2}B_1B, AC = BD = \sqrt{3}B_1B$ , 所以  $AC \neq CB_1$ , 故 C 错误. 对于 B,  $\angle BAB_1$  即为直线  $AB$  与平面  $AB_1C_1D$  所成的角,  $\tan \angle BAB_1 =$

$\frac{B_1B}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 故 B 错误.



对于 D,  $\angle DB_1C$  即为直线  $B_1D$  与平面  $BB_1C_1C$  所成的角,

$\tan \angle DB_1C = \frac{CD}{B_1C} = 1$ , 又  $0^\circ < \angle DB_1C < 90^\circ$ , 所以  $\angle DB_1C = 45^\circ$ , 即

直线  $B_1D$  与平面  $BB_1C_1C$  所成的角为  $45^\circ$ , 故 D 正确. 故选 D.

#### 10. C 【命题点】圆锥的侧面积和体积公式

【解析】设甲、乙两个圆锥的母线长为  $l$ , 底面半径分别为  $R, r$ , 侧面展开图的圆心角分别为  $\alpha, \beta$ , 所以  $S_{\text{甲}} = \pi Rl, S_{\text{乙}} = \pi rl$ .

又  $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = \frac{\pi Rl}{\pi rl} = 2$ , 所以  $R = 2r$ . 而  $l\alpha = 2\pi R, l\beta = 2\pi r$ , 所以  $\alpha =$

$2\beta$ , 又  $\alpha + \beta = 2\pi$ , 所以  $\beta = \frac{2}{3}\pi, \alpha = \frac{4}{3}\pi$ . 则  $l = \frac{3}{2}R, l = 3r$ , 所

以  $V_{\text{甲}} = \frac{1}{3}\pi R^2 \times \sqrt{l^2 - R^2}, V_{\text{乙}} = \frac{1}{3}\pi r^2 \times \sqrt{l^2 - r^2}$ , 所以  $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} =$

$\frac{4\sqrt{5}r^3}{2\sqrt{2}r^3} = \sqrt{10}$ , 故选 C.

#### 一题多解

由  $\frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2$  及甲、乙两个圆锥母线长相等, 得

侧面展开图的圆心角之比为 2. 设甲、乙两个圆锥的母线长  $l = 3$ , 底面半径分别为  $R_1, R_2$ , 高分别为  $h_1, h_2$ , 又由两个圆锥的侧面展开图恰好拼成周长为  $6\pi$  的圆, 得  $2\pi R_1 = 4\pi, 2\pi R_2 = 2\pi$ , 解得  $R_1 = 2, R_2 = 1$ . 由勾股定理知  $h_1 = \sqrt{l^2 - R_1^2} =$

$\sqrt{5}, h_2 = \sqrt{l^2 - R_2^2} = 2\sqrt{2}$ , 所以  $\frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{\frac{1}{3}\pi R_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi R_2^2 h_2} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{10}$ ,

故选 C.

#### 11. B 【命题点】椭圆的标准方程

【解析】由题可知  $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B(0, b)$ ,

则  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = (-a, -b) \cdot (a, -b) = -a^2 + b^2 = -1$ ,

即  $a^2 - b^2 = 1$ , 所以  $c^2 = 1$ , 即  $c = 1$ . 又离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ ,

所以  $a = 3$ , 即  $a^2 = 9, b^2 = 8$ , 椭圆 C 的方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ ,

故选 B.

#### 快解

因为椭圆的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ , 可排除 C 和 D,

将  $a^2 - b^2 = 1$  代入 A 和 B 中验证即可.

#### 12. A

$$9^m = 10 \rightarrow m = \log_9 10 \rightarrow \left[ \begin{array}{l} \lg 11 \times \lg 9 < \lg 10 \times \lg 10 \rightarrow \\ \frac{\lg 10}{\lg 9} > \frac{\lg 11}{\lg 10} \rightarrow a > 0 \\ \lg 10 \times \lg 8 < \lg 9 \times \lg 9 \rightarrow \\ \frac{\lg 10}{\lg 9} < \frac{\lg 9}{\lg 8} \rightarrow b < 0 \end{array} \right] \rightarrow a > 0 > b$$

【命题点】指数、对数的互化,基本不等式的应用

【解析】因为  $9^m = 10$ , 所以  $m = \log_9 10$ .

又因为  $\lg 11 \times \lg 9 < \left( \frac{\lg 11 + \lg 9}{2} \right)^2 = \left( \frac{\lg 99}{2} \right)^2 < 1 = \lg 10 \times \lg 10$

(提示:利用基本不等式求出两个正实数乘积的取值范围),

所以  $\frac{\lg 10}{\lg 9} > \frac{\lg 11}{\lg 10}$ ,  $\log_9 10 > \log_{10} 11$ .  $a = 10^m - 11 = 10^{\log_9 10} - 11 > 10^{\log_{10} 11} - 11 = 11 - 11 = 0$ , 所以  $a > 0$ .

因为  $\lg 10 \times \lg 8 < \left( \frac{\lg 10 + \lg 8}{2} \right)^2 = \left( \frac{\lg 80}{2} \right)^2 < \left( \frac{\lg 81}{2} \right)^2 = \lg 9 \times \lg 9$ , 所以  $\frac{\lg 10}{\lg 9} < \frac{\lg 9}{\lg 8}$ ,  $\log_9 10 < \log_8 9$ .  $b = 8^m - 9 = 8^{\log_9 10} - 9 < 8^{\log_8 9} - 9 = 9 - 9 = 0$ , 所以  $b < 0$ . 综上,  $a > 0 > b$ , 故选 A.

学霸解题·技巧 北京大学 张充

由  $9^m = 10$ , 可得  $m = \log_9 10 \in (1, 1.5)$ .

根据  $a, b$  的形式构造函数  $f(x) = x^m - x - 1 (x > 1)$ ,  $a = f(10) = 10^m - 11$ ,  $b = f(8) = 8^m - 9$ , 则  $f'(x) = mx^{m-1} - 1$ ,  $f'(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = m^{\frac{1}{1-m}}$ , 由  $m \in (1, 1.5)$  知  $m^{\frac{1}{1-m}} \in (0, 1)$ , 所以  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,  $f(10) > f(9) > f(8)$ .

又因为  $f(9) = 9^{\log_9 10} - 10 = 0$ , 所以  $a > 0 > b$ , 故选 A.

### 13. $-\frac{3}{4}$ 【命题点】平面向量的数量积

【解析】因为  $a \perp b$ , 所以  $a \cdot b = m + 3(m + 1) = 0$ , 即  $4m + 3 = 0$ , 解得  $m = -\frac{3}{4}$ .

### 14. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$ (或写成一般方程式 $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ ) 【命题点】直线方程和圆的方程

【解析】不妨设  $A(3, 0), B(0, 1)$ , 则线段  $AB$  的垂直平分线

方程为  $y - \frac{0+1}{2} = -\frac{1}{k_{AB}} \cdot \left( x - \frac{3+0}{2} \right)$  (提示:利用垂径定理找到

弦的垂直平分线是求出圆的方程的关键), 即  $y = 3x - 4$ . 联立

$\begin{cases} y = 3x - 4, \\ 2x + y - 1 = 0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \end{cases}$  即圆心  $M(1, -1)$ , 圆的半径为

$\sqrt{(3-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{5}$ , 所以  $\odot M$  的方程为  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$ .

**一题多解** 设  $\odot M$  的方程为  $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$  ( $D^2+E^2-4F>0$ ), 又  $M\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$ , 则

$$\begin{cases} 2\left(-\frac{D}{2}\right) + \left(-\frac{E}{2}\right) - 1 = 0, \\ 9+3D+F=0, \\ 1+E+F=0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} D=-2, \\ E=2, \\ F=-3, \end{cases} \text{ 所以 } \odot M \text{ 的方程为 } x^2+y^2-2x+2y-3=0.$$

**15. 2 (答案不唯一) 【命题点】双曲线的几何性质、直线与双曲线的位置关系**

**【解析】** 双曲线  $C$  的渐近线方程为  $y=\pm\frac{b}{a}x$ , 若直线  $y=2x$  与  $C$  无公共点, 则  $\frac{b}{a}\leq 2$ , 即  $b\leq 2a, b^2\leq 4a^2, c^2-a^2\leq 4a^2$ , 所以  $\frac{c^2}{a^2}\leq 5$ , 即  $e=\frac{c}{a}\leq \sqrt{5}$ , 且  $e>1$ , 所以  $e\in(1, \sqrt{5}]$ , 因此  $e$  的取值可以为 2 (答案不唯一).

**16.  $\sqrt{3}-1$**

**思路导引** (思路 1)

设  $BD=t$  ( $t>0$ )  $\xrightarrow{\text{以 } D \text{ 为原点建系}}$  点  $A, B, C$  的坐标  $\rightarrow$

$\frac{AC^2}{AB^2} \xrightarrow{\text{基本不等式}} \frac{AC}{AB}$  最小时,  $BD$  的值

(思路 2)

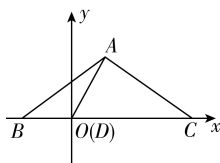
$$\text{设 } BD=x(x>0) \xrightarrow{\text{余弦定理}} \begin{cases} AB^2 = x^2 + 4 + 2x \\ AC^2 = 4x^2 + 4 - 4x \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{4x^2-4x+4}{x^2+2x+4} \rightarrow \text{设 } f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+2x+4} (x>0) \rightarrow f(x) \text{ 的最小值}$$

点  $\rightarrow BD = \sqrt{3}-1$

**【命题点】解三角形**

**【解析】** 令  $BD=t$  ( $t>0$ ), 以  $D$  为坐标原点,  $DC$  所在直线为  $x$  轴, 过点  $D$  垂直于  $BC$  的直线为  $y$  轴, 建立如图所示的平面直角坐标系, 则  $C(2t, 0)$ ,



$$A(1, \sqrt{3}), B(-t, 0), \text{ 所以 } \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{(2t-1)^2+3}{(t+1)^2+3} = 4 - \frac{12}{t+1+\frac{3}{t+1}} \geq 4 -$$

$2\sqrt{3}$  (提示: 变形为基本不等式的形式求最值), 当且仅当  $t+1=\sqrt{3}$ , 即  $t=\sqrt{3}-1$  时取等号, 所以  $BD=\sqrt{3}-1$ .

**一题多解** 设  $BD=x$  ( $x>0$ ), 则  $CD=2x$ .

在  $\triangle ADB$  中, 由余弦定理得  $AB^2=x^2+4+2x$ .

在  $\triangle ADC$  中, 由余弦定理得  $AC^2=4x^2+4-4x$ .

$$\text{所以 } \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{4x^2-4x+4}{x^2+2x+4} (x>0).$$

设  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2x + 4} (x > 0)$ , 则  $f'(x) = \frac{3x^2 + 6x - 6}{(x^2 + 2x + 4)^2}$ ,

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \sqrt{3} - 1$  (负值舍去),

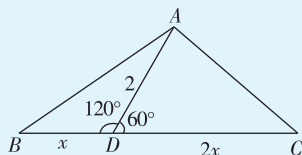
可知  $f(x)$  在  $(0, \sqrt{3} - 1)$  上单

调递减, 在  $(\sqrt{3} - 1, +\infty)$  上单

调递增, 所以  $f(x)$  在  $x = \sqrt{3} - 1$

处取得最小值.

所以当  $\frac{AC}{AB}$  取得最小值时,  $BD = \sqrt{3} - 1$ .



## 17. 【命题点】用样本估计总体、独立性检验

【解】(1) A 和 B 两家公司甲、乙两城之间长途客车准点的频

率分别为  $\frac{240}{260} = \frac{12}{13}$  和  $\frac{210}{240} = \frac{7}{8}$ , 用样本估计总体, 可得 A 和 B

两家公司甲、乙两城之间的长途客车准点的概率的估计值

分别为  $\frac{12}{13}$  和  $\frac{7}{8}$ . ..... 6 分

(2) 由表中数据可得  $K^2 = \frac{500 \times (240 \times 30 - 20 \times 210)^2}{260 \times 240 \times 450 \times 50} = \frac{125}{39} \approx$

3. 205 > 2. 706. .... 10 分

所以有 90% 的把握认为甲、乙两城之间的长途客车是否准

点与客车所属公司有关. .... 12 分

## 18. 【命题点】等差数列的证明、前 n 项和的最值问题

(1) 【证明】由  $\frac{2S_n}{n} + n = 2a_n + 1$ , 得  $2S_n = 2na_n - n(n-1)$ , 所以当

$n \geq 2$  时,  $2S_{n-1} = 2(n-1)a_{n-1} - (n-1)(n-2)$ .

两式相减, 得  $2a_n = 2na_n - 2(n-1)a_{n-1} - 2(n-1)$ , ..... 4 分

即  $2(n-1)a_n - 2(n-1)a_{n-1} = 2(n-1)$ , 所以  $a_n - a_{n-1} =$

$1 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ . .... 5 分

所以  $\{a_n\}$  是等差数列, 公差  $d = 1$ . .... 6 分

(2) 【解】若  $a_4, a_7, a_9$  成等比数列, 则  $a_7^2 = a_4 a_9$ , 则  $(a_1 + 6)^2 =$

$(a_1 + 3)(a_1 + 8)$ , 解得  $a_1 = -12$ . 所以  $a_n = n - 13$ . .... 8 分

当  $1 \leq n \leq 12$  时,  $a_n < 0$ ; 当  $n = 13$  时,  $a_n = 0$ ; 当  $n \geq 14$  时,

$a_n > 0$ . .... 10 分

所以当  $n = 12$  或  $n = 13$  时,  $S_n$  取最小值, 最小值为  $S_{12} =$

$S_{13} = -78$ . .... 12 分

一题多解 (2) 若  $a_4, a_7, a_9$  成等比数列, 则  $a_7^2 = a_4 a_9$ , 则

$(a_1 + 6)^2 = (a_1 + 3)(a_1 + 8)$ , 解得  $a_1 = -12$ . .... 8 分

所以  $a_n = n - 13$ , 所以  $S_n = \frac{(-12 + n - 13) \cdot n}{2} = \frac{1}{2} \left( n - \frac{25}{2} \right)^2 -$

$\frac{625}{8}$ . .... 10 分

又  $n \in \mathbf{N}^*$ , 所以当  $n = 12$  或  $n = 13$  时,  $S_n$  取最小值, 最小值

为  $S_{12} = S_{13} = -78$ . .... 12 分

## 19. 【命题点】空间中线面位置关系的证明、空间几何体的结构特征与体积的计算

(1)【证明】取  $AB$  的中点为  $M$ ,  $BC$  的中点为  $N$ , 连接  $MN$ ,  $ME$ ,  $NF$ , 如图.

因为  $\triangle ABE$  是正三角形, 所以  $ME \perp AB$ . ..... 2 分  
又平面  $ABE \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $ABE \cap$  平面  $ABCD = AB$ ,  
 $ME \subset$  平面  $ABE$ , 所以  $ME \perp$  平面  $ABCD$ .

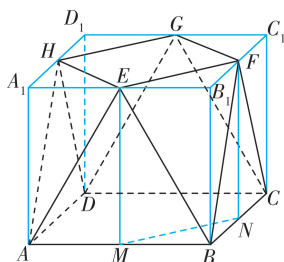
同理,  $FN \perp$  平面  $ABCD$ .

所以  $ME \parallel FN$ . 又  $ME = FN = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}$ ,

所以四边形  $EMNF$  是平行四边形, 从而  $EF \parallel MN$ . ..... 4 分

又  $EF \not\subset$  平面  $ABCD$ ,  $MN \subset$  平面  $ABCD$ ,

所以  $EF \parallel$  平面  $ABCD$ . ..... 6 分



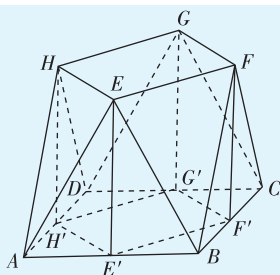
(2)【解】由题意可将该几何体补成长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ , 其中  $AA_1 = 4\sqrt{3}$ , 如图所示.

则该几何体的体积  $V = V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} - 4V_{A-A_1EH} = 8 \times 8 \times 4\sqrt{3} - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 4\sqrt{3} = \frac{640\sqrt{3}}{3}$ .

故该包装盒的容积为  $\frac{640\sqrt{3}}{3} \text{ cm}^3$ . ..... 12 分

►一题多解 (2) 如图, 设

$AB, BC, CD, DA$  的中点分别为  $E', F', G', H'$ , 连接  $EE', FF', GG', HH', E'F', F'G', G'H', H'E'$ , 由题设和(1)可知, 点  $E, F, G, H$  到平面  $ABCD$  的距离都



为  $4\sqrt{3}$ , 且平面  $EFGH \parallel$  平面  $E'F'G'H'$ . 故该包装盒可由底面边长为  $4\sqrt{2}$ , 高为  $4\sqrt{3}$  的正四棱柱  $HEFG-H'E'F'G'$  和四个体积相等的四棱锥  $A-HEE'H', B-EFF'E', C-FGG'F', D-GHH'G'$  组合得到. .... 9 分

正四棱柱  $HEFG-H'E'F'G'$  的体积  $V_0 = 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} = 128\sqrt{3}$ .

四棱锥  $A-HEE'H'$  的体积  $V_1 = \frac{1}{3} \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{64\sqrt{3}}{3}$ .

因此该包装盒的容积为  $V_0 + 4V_1 = \frac{640\sqrt{3}}{3} (\text{cm}^3)$ . ..... 12 分

20. 【命题点】导数的几何意义, 利用导数研究函数的单调性、极值、最值

【解】(1) 解法一: 由题设得  $f'(x) = 3x^2 - 1$ ,  $g'(x) = 2x$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(-1, f(-1))$  处的切线方程为  $y = 2x + 2$ . ..... 2 分  
由  $g'(x) = 2$  得  $x = 1$ , 故点  $(1, g(1))$  在直线  $y = 2x + 2$  上, 所

以  $1+a=4$ , 可知  $a=3$ . ..... 5 分

**解法二:** 当  $x_1=-1$  时,  $f(x_1)=0$ , 所以切点坐标为  $(-1, 0)$ .

由  $f'(x)=3x^2-1$ , 得切线斜率  $k=f'(-1)=2$ ,

所以切线方程为  $y=2(x+1)$ , 即  $y=2x+2$ . ..... 2 分

将  $y=2x+2$  代入  $y=g(x)=x^2+a$ , 得  $x^2-2x+a-2=0$ ,

由直线与曲线相切得  $\Delta_1=(-2)^2-4(a-2)=0$ ,

(注意当直线与抛物线相切时必有一个公共点; 而当直线与抛物线只有一个公共点时不一定相切, 如直线与抛物线的对称轴平行)

解得  $a=3$ . ..... 5 分

(2) **解法一:** 由题设可得曲线  $y=f(x)$  在点  $(x_1, f(x_1))$  处的切线  $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$  与曲线  $y=g(x)$  相切于点  $(x_2,$

$g(x_2))$ , 则  $g'(x_2)=3x_1^2-1$ , 从而  $x_2=\frac{3x_1^2-1}{2}$ . ..... 6 分

由  $g(x_2)=x_2^2+a=(3x_1^2-1)x_2-2x_1^3$  得  $4a=9x_1^4-8x_1^3-6x_1^2+1$ .

..... 7 分

令  $h(x)=9x^4-8x^3-6x^2+1$ , 则  $h'(x)=36x^3-24x^2-12x=12x(3x+1)(x-1)$ ,

令  $h'(x)=0$ , 解得  $x=-\frac{1}{3}$  或  $x=0$  或  $x=1$ .

$h(x), h'(x)$  随  $x$  的变化如表所示.

$x$	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$-\frac{1}{3}$	$\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$h'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$h(x)$	单调递减	极小值	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

由表知, 当  $x=-\frac{1}{3}$  时,  $h(x)$  取得极小值  $h\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{20}{27}$ ;

当  $x=1$  时,  $h(x)$  取得极小值  $h(1)=-4$ .

所以函数  $h(x)$  的值域为  $[-4, +\infty)$ , ..... 10 分

(求函数的最值应注意是在闭区间上研究, 还是在开区间上研究, 若是闭区间上的最值问题只需比较端点值与极值即可, 若是开区间上的最值问题需要注意函数的有界性)

所以由  $4a \in [-4, +\infty)$ , 得  $a \in [-1, +\infty)$ ,

故实数  $a$  的取值范围为  $[-1, +\infty)$ . ..... 12 分

**解法二:** 由  $f'(x)=3x^2-1$ , 知切线斜率  $k=f'(x_1)=3x_1^2-1$ ,

所以切线方程为  $y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$ , 即  $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$ .

将  $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$  代入  $y=g(x)=x^2+a$ , 得  $x^2-(3x_1^2-1)x+a+2x_1^3=0$ .

由直线与曲线相切得  $\Delta_2=(3x_1^2-1)^2-4(a+2x_1^3)=0$ ,



整理得  $4a = 9x_1^4 - 8x_1^3 - 6x_1^2 + 1$ . ..... 7分

以下同解法一.

**解法三:** 设题中切线在曲线  $y = g(x)$  上的切点为  $(x_2, g(x_2))$ . 分别写出用对应切点表示的切线方程表达式:  $y = (3x_1^2 - 1)x - 2x_1^3$  和  $y = 2x_2x - x_2^2 + a$ . 因此,  $3x_1^2 - 1 = 2x_2$ , 且  $-2x_1^3 = -x_2^2 + a$ . 故  $4a = 9x_1^4 - 8x_1^3 - 6x_1^2 + 1$ . ..... 7分

以下同解法一.

**21. 思路导引** (1) 利用抛物线的定义求得  $p$ , 即得  $C$  的方程;

(2) 设出点  $M, N, A, B$  的坐标及直线  $MN: x = my + 1$ , 联立直线  $MN$  与  $C$  的方程  $\rightarrow$  点  $M, N$  纵坐标间的关系  $\rightarrow$

$\left[ \begin{array}{l} \text{当直线 } MN \text{ 的斜率不存在时, } \alpha - \beta = 0 \\ \text{当直线 } MN \text{ 的斜率存在时, 求得 } k_{MN}, k_{AB} \end{array} \right. \rightarrow \text{直线 } MD \text{ 的方}$

程  $\rightarrow$  与抛物线的方程联立  $\xrightarrow[\text{斜率公式}]{\text{根与系数的关系}} k_{AB} = \frac{k_{MN}}{2} \rightarrow$  设

$k_{MN} = 2k_{AB} = 2k > 0 \xrightarrow[\text{基本不等式}]{\text{两角差的正切公式}} \tan(\alpha - \beta) \text{ 的最大值} \rightarrow k_{AB}$

$\rightarrow$  设直线  $AB$  的方程, 与  $C$  的方程联立, 结合根与系数的关系求解

**【命题点】** 抛物线的定义及方程、直线与抛物线的位置关系、抛物线中的最值问题

**【解】** (1) 由题知, 当  $MD \perp x$  轴时,  $x_M = p$ , 从而  $|MF| = x_M + \frac{p}{2} = 3$ , 解得  $p = 2$ , 故  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ . ..... 3分

(2) 设  $M\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), N\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right), A\left(\frac{y_3^2}{4}, y_3\right), B\left(\frac{y_4^2}{4}, y_4\right)$ , 由题意可知, 直线  $MN$  的斜率不为 0, 设直线  $MN: x = my + 1$ .

(当直线的斜率不能为 0 时, 可设直线方程为  $x = ty + c$ , 这样可以避免讨论直线斜率是否存在)

联立  $\begin{cases} x = my + 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$  消去  $x$  并整理得  $y^2 - 4my - 4 = 0, \Delta_1 > 0$ ,

$y_1 y_2 = -4$ . ..... 5分

当直线  $MN$  的斜率不存在时, 易知直线  $AB$  的斜率也不存在, 此时  $\alpha - \beta = 0$ .

当直线  $MN$  的斜率存在时,  $k_{MN} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} = \frac{4}{y_1 + y_2}$ .

同理  $k_{AB} = \frac{y_3 - y_4}{\frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{4}} = \frac{4}{y_3 + y_4}$ . ..... 7分

设直线  $MD: x = \frac{y_1^2 - 2}{4} \cdot y + 2$ , 与抛物线方程联立可得  $y^2 - \frac{y_1^2 - 8}{y_1} \cdot y - 8 = 0, \Delta_2 > 0, y_1 y_3 = -8$ , 所以  $y_3 = 2y_2$ ,

同理可得  $y_4 = 2y_1$ ,

(利用抛物线方程对斜率进行化简,利用根与系数的关系得出坐标间的关系)

$$\text{所以 } k_{AB} = \frac{4}{y_3 + y_4} = \frac{4}{2(y_1 + y_2)} = \frac{k_{MN}}{2}. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

又直线  $MN, AB$  的倾斜角分别为  $\alpha, \beta$ ,

$$\text{所以 } k_{AB} = \tan \beta = \frac{k_{MN}}{2} = \frac{\tan \alpha}{2}.$$

要使  $\alpha - \beta$  最大, 则  $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

设  $k_{MN} = 2k_{AB} = 2k > 0$ ,

$$\text{则 } \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{k}{1 + 2k^2} = \frac{1}{\frac{1}{k} + 2k} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{k} \cdot 2k}} =$$

$\frac{\sqrt{2}}{4}$ , 当且仅当  $\frac{1}{k} = 2k$ , 即  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 等号成立,

所以当  $\alpha - \beta$  最大时,  $k_{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

设直线  $AB$  的方程为  $x = \sqrt{2}y + n$ ,

与抛物线方程联立可得  $y^2 - 4\sqrt{2}y - 4n = 0$ ,

$\Delta = (-4\sqrt{2})^2 + 16n > 0$ , 得  $n > -2$ ,  $y_3y_4 = -4n = 4y_1y_2 = -16$ , 所以  $n = 4$ ,

所以直线  $AB$  的方程为  $x - \sqrt{2}y - 4 = 0$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

### 学霸解题 · 技巧 中南大学 王艺超

(1) 由题意知, 当  $MD \perp x$  轴时, 点  $M$  的坐标为  $(p, y_M)$ , 代入抛物线方程知  $y_M^2 = 2p^2$ .

因为  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ,  $|MF| = 3$ ,

所以  $\sqrt{\left(p - \frac{p}{2}\right)^2 + 2p^2} = 3$ , 解得  $p = 2$ ,

故  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ .  $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

(2) 当直线  $MN$  的斜率不存在时, 易知直线  $AB$  的斜率也不存在, 此时  $\alpha - \beta = 0$ . 当直线  $MN$  的斜率存在时, 令

$$k_{MN} = k_1 = \tan \alpha, k_{AB} = k_2 = \tan \beta, \tan(\alpha - \beta) = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

不妨设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2) (y_1 > 0, y_2 < 0), A(x_3, y_3), B(x_4, y_4) (y_3 < 0, y_4 > 0)$ , 直线  $AB: y = k_2(x - m) (m > 0)$ .

$$\text{由 } \begin{cases} y = k_1(x - 1), \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } k_1^2 x^2 - (2k_1^2 + 4)x + k_1^2 = 0,$$

$\Delta_1 > 0$ , 则  $x_1 x_2 = 1$ .

$$\text{由 } \begin{cases} y = k_2(x - m), \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 得 } k_2^2 x^2 - (2k_2^2 m + 4)x + k_2^2 m^2 = 0, \Delta_2 > 0, \text{ 则}$$

$$x_3 x_4 = m^2.$$

由  $\begin{cases} y = k_{MD}(x-2), \\ y^2 = 4x, \end{cases}$  得  $k_{MD}^2 x^2 - (4k_{MD}^2 + 4)x + 4k_{MD}^2 = 0, \Delta_3 > 0$ , 则

$x_1 x_3 = 4$ . 由  $\begin{cases} y = k_{ND}(x-2), \\ y^2 = 4x, \end{cases}$  得  $k_{ND}^2 x^2 - (4k_{ND}^2 + 4)x + 4k_{ND}^2 = 0$ ,

$\Delta_4 > 0$ , 则  $x_2 x_4 = 4$ . ..... 8 分

所以  $M(x_1, 2\sqrt{x_1}), N\left(\frac{1}{x_1}, -\frac{2}{\sqrt{x_1}}\right), A\left(\frac{4}{x_1}, -\frac{4}{\sqrt{x_1}}\right), B(4x_1,$

$4\sqrt{x_1}), k_1 = \frac{2\sqrt{x_1}}{x_1-1}, k_2 = \frac{\sqrt{x_1}}{x_1-1}$ , 则  $k_1 = 2k_2$ , 要使  $\alpha - \beta$  最大, 则  $k_2 > 0$ ,

所以  $\tan(\alpha - \beta) = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{k_2}{1 + 2k_2^2} = \frac{1}{\frac{1}{k_2} + 2k_2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{k_2} \cdot 2k_2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,

当且仅当  $k_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时取等号, 此时  $\alpha - \beta$  最大.

易得  $x_3 x_4 = 16 = m^2$ , 所以  $m = 4$  (负值舍去), 所以直线 AB 的

方程为  $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-4)$ , 即  $x - \sqrt{2}y - 4 = 0$ . ..... 12 分

## 22. 【命题点】参数方程与普通方程、极坐标方程与直角坐标方程之间的转化

【解】(1) 将曲线  $C_1$  的参数方程  $\begin{cases} x = \frac{2+t}{6}, \\ y = \sqrt{t} \end{cases}$  ( $t$  为参数) 消去参

数  $t$ , 得  $C_1$  的普通方程为  $x = \frac{2+y^2}{6}$ , 即  $y^2 = 6x - 2 (y \geq 0)$ .

..... 3 分

(2) 曲线  $C_2$  的普通方程为  $x = -\frac{2+y^2}{6} (y \leq 0)$ . ..... 4 分

曲线  $C_3$  的极坐标方程为  $2\cos \theta - \sin \theta = 0$ , 即  $2\rho \cos \theta - \rho \sin \theta = 0$ , 将  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$  代入上式,

得曲线  $C_3$  的直角坐标方程为  $2x - y = 0$ . ..... 6 分

联立  $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x = \frac{2+y^2}{6}, \end{cases}$  得  $C_3$  与  $C_1$  交点的直角坐标为  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  和

$(1, 2)$ . ..... 8 分

联立  $\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x = -\frac{2+y^2}{6}, \end{cases}$  得  $C_3$  与  $C_2$  交点的直角坐标为  $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$

和  $(-1, -2)$ . ..... 10 分

## 23. 【命题点】基本不等式、柯西不等式、证明不等式成立

【证明】(1) 解法一: 由  $a^2 + b^2 + 4c^2 = 3$  得  $(a+b+2c)^2 = a^2 + b^2 + 4c^2 + 2(ab+2bc+2ac) \leq 3 + (a^2 + b^2) + [b^2 + (2c)^2] + [a^2 + (2c)^2]$ , 当且仅当  $a=b=2c=1$  时取等号, 所以  $(a+b+2c)^2 \leq 3 + 2(a^2 + b^2 + 4c^2) = 9$ , 又  $a, b, c$  均为正数, 所以  $a+b+2c \leq 3$ . ..... 5 分

解法二: 因为  $a^2 + b^2 + 4c^2 = 3$ , 所以由柯西不等式得  $(1+1+1) \cdot$

$$(a^2+b^2+4c^2)=9\geqslant(a+b+2c)^2,$$

又  $a, b, c$  均为正数,

所以  $a+b+2c\leqslant 3$ . ..... 5 分

**解法三:** 由权方和不等式知  $\frac{(a+b+2c)^2}{(1+1+1)^1}\leqslant\frac{a^2}{1}+\frac{b^2}{1}+\frac{4c^2}{1}=3$ ,

当且仅当  $a=b=2c=1$  时取等号, 又  $a, b, c$  均为正数, 所以  $a+b+2c\leqslant 3$ . ..... 5 分

(2) 根据 (1) 及  $b=2c$  知  $a+4c\leqslant 3$ , 则  $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{c}\right)\geqslant\frac{1}{3}\left(\frac{a+4c}{a}+\frac{a+4c}{c}\right)=\frac{1}{3}\left(1+\frac{4c}{a}+\frac{a}{c}+4\right)\geqslant\frac{1}{3}$$

$$\left(5+2\sqrt{\frac{4c}{a}\cdot\frac{a}{c}}\right)=3, \text{ 当且仅当 } \frac{4c}{a}=\frac{a}{c}, b=2c, \text{ 即 } a=b=$$

$$1, c=\frac{1}{2} \text{ 时取等号. .... 10 分}$$

**一题多解** (2) 因为  $a^2+b^2+4c^2=3, b=2c$ ,

所以  $a^2+8c^2=3$ ,

所以  $a=\sqrt{3-8c^2}, c\in\left(0, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ . ..... 7 分

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{\sqrt{3-8c^2}}+\frac{1}{c}=(3-8c^2)^{-\frac{1}{2}}+c^{-1}, c\in\left(0, \frac{\sqrt{6}}{4}\right).$$

$$\text{令 } f(c)=(3-8c^2)^{-\frac{1}{2}}+c^{-1}, c\in\left(0, \frac{\sqrt{6}}{4}\right),$$

$$\text{则 } f'(c)=-16c\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times(3-8c^2)^{-\frac{3}{2}}-c^{-2}=8c(3-8c^2)^{-\frac{3}{2}}-c^{-2}, c\in\left(0, \frac{\sqrt{6}}{4}\right).$$

$$\text{令 } f'(c)=0, \text{ 得 } \frac{8c}{\sqrt{(3-8c^2)^3}}=\frac{1}{c^2}, \text{ 整理得 } c^2=\frac{1}{4}, \text{ 故 } c=\frac{1}{2},$$

所以  $f(c)$  在  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  上单调递减, 在  $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$  上单调递增,

$$\text{所以 } f(c)\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{3-8\times\frac{1}{4}}}+2=3,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a}+\frac{1}{c}\geqslant 3. .... 10 分$$