

1. A 【命题点】集合的交集、补集运算

【解析】由题意知  $\complement_U B = \{-2, 0, 1\}$ , 则  $A \cap (\complement_U B) = \{0, 1\}$ , 故选 A.

2. A 【命题点】充分、必要条件的判断

【解析】由题意知“ $x$  为整数”可推出“ $2x+1$  为整数”, 故充分性成立; 反之不成立, 如, 当  $x = \frac{1}{2}$  时,  $2x+1$  为整数,  $x$  不是整数 (提示: 特殊值法), 故必要性不成立. 所以“ $x$  为整数”是“ $2x+1$  为整数”的充分不必要条件, 故选 A.

3. A 【命题点】函数图像的识别

【解析】因为函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 且  $f(-x) = \frac{|x^2-1|}{-x} = -f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  为奇函数, 图像关于原点对称, 所以排除 C, D; 当  $x < 0$  时,  $f(x) < 0$ , 所以排除 B, 故选 A.

**快解** 当  $x < 0$  时,  $f(x) < 0$ ; 当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$ , 观察四个选项, 可知只有 A 满足题意, 故选 A.

**方法速记** 解答函数图像识别问题的步骤: ①判断函数的奇偶性; ②代入特殊值排除.

4. B 【命题点】频率分布直方图的应用

【解析】依题意, 全球年平均气温在区间  $[14.35, 14.75]$  内的频率是  $0.2 \times 0.5 + 0.2 \times 0.65 = 0.23$ , 故全球年平均气温在区间  $[14.35, 14.75]$  内的有  $100 \times 0.23 = 23$  年. 故选 B.

5. D 【命题点】利用指数、对数函数的单调性比较大小

【解析】由题意知,  $a = 2^{0.7} > 2^0 = 1$ ,  $b = \left(\frac{1}{3}\right)^{0.7} = 3^{-0.7} < 3^0 = 1$ , 又  $b > 0$ , 所以  $0 < b < 1$ ,  $c = \log_2 \frac{1}{3} < 0$ , 所以  $c < b < a$ . 故选 D.

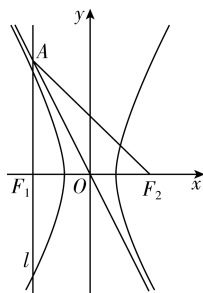
**方法速记** 解答指数、对数式比较大小问题的方法: ①同底数的指数或对数式可以利用指数或对数函数的单调性比较大小; ②不同底的指数、对数式, 先看是否能化成同底, 如不能, 则可借助于中间值 0, 1 等比较大小.

6. C 【命题点】对数的化简运算

【解析】原式  $= (2\log_2 3 + \log_2 3)(\log_3 2 + \log_3 2)$   
 $= \left(2 \times \frac{1}{2} \log_2 3 + \frac{1}{3} \log_2 3\right) \left(\log_3 2 + \frac{1}{2} \log_3 2\right)$   
 $= \frac{4}{3} \log_2 3 \times \frac{3}{2} \log_3 2$   
 $= 2$ . 故选 C.

## 7. D 【命题点】双曲线的标准方程和几何性质、抛物线的定义

【解析】由题可知, 抛物线  $y^2 = 4\sqrt{5}x$  的准线  $l$  的方程为  $x = -\sqrt{5}$ , 双曲线左焦点坐标  $F_1(-c, 0)$ . 又准线  $l$  过双曲线的焦点  $F_1$ , 所以  $c = \sqrt{5}$  ①. 不妨取双曲线的一条渐近线方程为  $y = -\frac{b}{a}x$ , 则



$A\left(-c, \frac{bc}{a}\right)$ . 又因为  $\angle F_1 F_2 A = \frac{\pi}{4}$ , 所以  $|AF_1| = |F_1 F_2|$ , 即  $\frac{bc}{a} = 2c$ ,

**题眼**

可得  $\frac{b}{a} = 2$  ②. 由 ①② 结合  $a^2 + b^2 = c^2$ , 可得  $a^2 = 1, b^2 = 4$ , 所以

双曲线的标准方程为  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ , 故选 D.

## 8. C 【命题点】空间几何体体积的计算

【解析】由题图可得两直三棱柱  $BCE-ADF, ABM-DCN$  重叠后的图形如图所示, 在  $\triangle BCE$  中, 由  $BE = CE = 3, \angle BEC = 120^\circ$ , 可得  $BC = 3\sqrt{3}$ , 所以正方形  $ABCD$  的边长为  $3\sqrt{3}$ . 又因为三棱柱  $BCE-ADF$  是直三棱柱, 所以  $V_{BCE-ADF} = S_{\triangle BCE} \cdot AB = \frac{1}{2} \times$

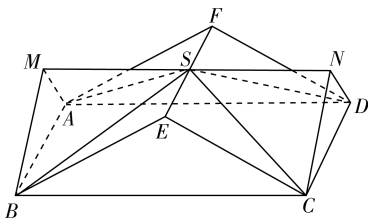
$3 \times 3 \times \sin 120^\circ \times 3\sqrt{3} = \frac{81}{4}$ . 由对称性可知,  $S$  为棱  $MN$  的中点,

所以  $V_{S-ABM} = V_{S-DCN} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABM} \cdot SM = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 120^\circ \times$

$\frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{8}$ . 所以该几何体的体积  $V = V_{BCE-ADF} + V_{S-ABM} + V_{S-DCN} = \frac{81}{4} +$

**题眼**

$\frac{27}{8} + \frac{27}{8} = 27$ , 故选 C.



**一题多解** 在  $\triangle BCE$  中, 由  $BE = CE = 3, \angle BEC = 120^\circ$ , 可得  $BC = 3\sqrt{3}$ , 所以正方形  $ABCD$  的边长为  $3\sqrt{3}$ . 又因为三棱柱  $BCE-ADF$  是直三棱柱, 所以  $V_{BCE-ADF} = S_{\triangle BCE} \cdot AB = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 120^\circ \times 3\sqrt{3} = \frac{81}{4}$ . 又四棱锥  $S-ABCD$  的高为

$3 \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$ , 所以  $V_{S-ABCD} = \frac{1}{3} S_{\text{正方形} ABCD} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{3} \times$

$(3\sqrt{3})^2 \times \frac{3}{2} = \frac{27}{2}$ , 所以该几何体的体积  $V = 2V_{BCE-ADF} -$

$V_{S-ABCD} = \frac{81}{4} \times 2 - \frac{27}{2} = 27$ , 故选 C.

## 9. A 【命题点】三角函数的图像与性质、三角函数图像的平移变换

【解析】①函数  $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$  的最小正周期是  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ , 所以

结论错误; ②令  $z = 2x$ , 当  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  时,  $z \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

而函数  $y = \frac{1}{2} \sin z$  在  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  上单调递增, 所以结论正确;

③当  $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$  时,  $2x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ ,  $\sin 2x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right]$ ,

$\frac{1}{2} \sin 2x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right]$ , 从而  $f(x)$  的取值范围为  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right]$ ,

所以结论错误; ④函数  $g(x) = \frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$  的图像向左平

移  $\frac{\pi}{8}$  个单位长度得到函数  $y = \frac{1}{2} \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{8}\right) + \frac{\pi}{4}\right] =$

$\frac{1}{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos 2x$  的图像, 所以结论错误. 综上所述,

正确结论的个数为 1. 故选 A.

#### 10. 1-5i 【命题点】复数的四则运算

【解析】 $\frac{11-3i}{1+2i} = \frac{(11-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5-25i}{5} = 1-5i$ .

#### 11. 15 【命题点】二项式定理

【解析】由题意可得, 展开式的通项为  $T_{k+1} =$

$C_5^k (\sqrt{x})^{5-k} \left(\frac{3}{x^2}\right)^k = C_5^k \cdot 3^k x^{\frac{5-5k}{2}} (k=0, 1, \dots, 5)$ , 令  $\frac{5-5k}{2} = 0$ ,

可得  $k=1$ , 所以展开式中的常数项是  $T_2 = C_5^1 \times 3 = 15$ .

#### 12. 2 【命题点】直线被圆所截得的弦长问题

【解析】由题知圆心  $(1, 1)$  到直线的距离为  $\frac{|m|}{\sqrt{2}}$ , 所以

$\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \left(\frac{|m|}{\sqrt{2}}\right)^2 = 3$ , 又  $m > 0$ , 解得  $m=2$ .

#### 13. $\frac{1}{221} \quad \frac{1}{17}$ 【命题点】相互独立事件的概率及条件概率的计算

【解析】设第一次抽到 A 的事件为 M, 第二次抽到 A 的事件

为 N, 则抽两次都是 A 的概率为  $P(MN) = \frac{4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{13 \times 17} =$

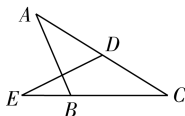
$\frac{1}{221}$ . 在第一次抽到 A 的条件下, 第二次也抽到 A 的概率是

$P(N|M) = \frac{P(MN)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{221}}{\frac{4}{52}} = \frac{1}{17}$ .

#### 14. $-\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b \quad \frac{\pi}{6}$ 【命题点】平面向量的线性运算、向量数量积的应用

【解析】如图, 由题意可得  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD} =$

$\frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}a + \frac{3}{2}b$ .



若  $AB \perp DE$ , 则  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ , 所以  $(b-a) \cdot \left(\frac{3}{2}b - \frac{1}{2}a\right) = 0$ , 所

以  $\frac{3}{2}b^2 - 2a \cdot b + \frac{1}{2}a^2 = 0$ , 即  $a \cdot b = \frac{1}{4}|a|^2 + \frac{3}{4}|b|^2$ ,

$$\text{所以 } \cos \angle ACB = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{\frac{1}{4}|a|^2 + \frac{3}{4}|b|^2}{|a| \cdot |b|} \geq \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}|a| \cdot |b|}{|a| \cdot |b|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(当且仅当  $|a| = \sqrt{3}|b|$  时等号成立), 又  $\angle ACB \in (0, \pi)$ , 所以

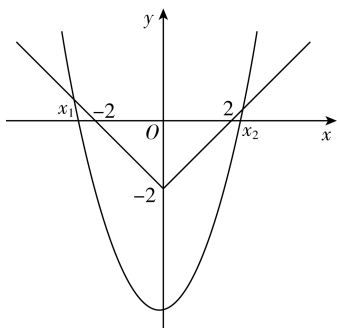
$\angle ACB \leq \frac{\pi}{6}$ , 即  $\angle ACB$  的最大值为  $\frac{\pi}{6}$ .

## 15. $[10, +\infty)$

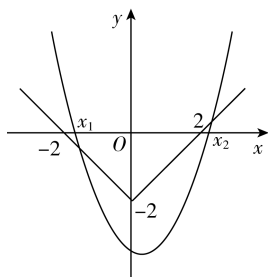
**思路导引**  $y = |x| - 2$  的图像与  $x$  轴有 2 个交点  $\rightarrow g(x) = x^2 - ax + 3a - 5$  至少有 1 个零点  $\rightarrow a \leq 2$  或  $a \geq 10$   $\rightarrow$  对  $a$  分类讨论, 结合图像求出实数  $a$  的取值范围

**【命题点】函数的零点问题**

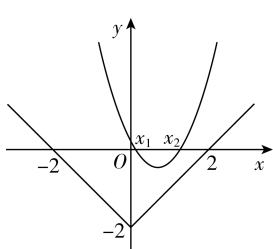
**【解析】** 函数  $y = |x| - 2$  的图像与  $x$  轴有 2 个交点  $(-2, 0)$  和  $(2, 0)$ , 所以函数  $g(x) = x^2 - ax + 3a - 5$  的图像与  $x$  轴至少有一个交点, 从而  $\Delta = a^2 - 12a + 20 \geq 0$ , 解得  $a \leq 2$  或  $a \geq 10$ . 函数  $g(x)$  的图像的对称轴为直线  $x = \frac{a}{2}$ . 设方程  $g(x) = 0$  的两根分别为  $x_1, x_2 (x_1 \leq x_2)$ , 当  $a < \frac{1}{5}$  时,  $g(-2) = 5a - 1 < 0$ ,  $g(2) = a - 1 < 0$ , 所以  $-2$  和  $2$  不是函数  $f(x)$  的零点, 函数  $f(x)$  只有 2 个零点 (如图①), 不符合题意; 当  $\frac{1}{5} \leq a < 1$  时,  $g(-2) = 5a - 1 \geq 0$ ,  $g(2) = a - 1 < 0$ , 则  $2$  不是函数  $f(x)$  的零点, 函数  $f(x)$  只有 2 个零点 (如图②), 不符合题意; 当  $1 \leq a \leq 2$  时,  $g(-2) > 0$ ,  $g(2) \geq 0$ , 则  $-2 < x_1 \leq x_2 \leq 2$ , 函数  $f(x)$  只有 2 个零点 (如图③), 不符合题意; 当  $a \geq 10$  时, 函数  $g(x)$  图像的对称轴方程满足  $x = \frac{a}{2} \geq 5$ , 且  $g(2) > 0$ , 所以  $2 < x_1 \leq x_2$ , 函数  $f(x)$  至少有 3 个零点, 符合题意 (如图④). 综上所述, 实数  $a$  的取值范围是  $[10, +\infty)$ .



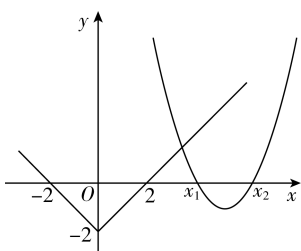
图①



图②



图③



图④

**16. 【命题点】**正弦定理、余弦定理的应用,二倍角公式及三角恒等变换

**【解】**(1) 由余弦定理得  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{4}$ , 将  $b = 2c, a = \sqrt{6}$  代入上式得  $c^2 = 1$ , 所以  $c = 1$ . ..... 4 分

(2) 由  $\cos A = -\frac{1}{4}, A \in (0, \pi)$ , 得  $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

由正弦定理, 得  $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{15}}{4}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$ . ..... 8 分

(3) 由  $\cos A < 0$ , 得  $A \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 所以  $B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 从而

$\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{\sqrt{6}}{4}$ , 所以  $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = -\frac{\sqrt{15}}{8}$ ,

$\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1 = -\frac{7}{8}$ , ..... 12 分

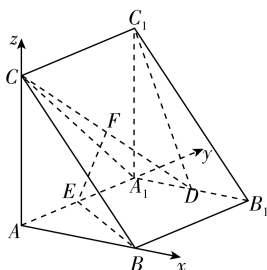
所以  $\sin (2A - B) = \sin 2A \cos B - \cos 2A \sin B = -\frac{\sqrt{15}}{8} \times \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{7}{8} \times$

$\frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{8}$ . ..... 14 分

**易错警示** 利用平方关系求值时, 注意根据角的终边所在象限确定符号.

**17. 【命题点】**线面平行、线面角、二面角

依题意, 以  $A$  为原点, 分别以  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}$  的方向为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴的正方向建立空间直角坐标系 (如图), 可得  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(2, 0, 0), C(0, 0, 2), A_1(0, 2, 0), B_1(2, 2, 0), C_1(0, 2, 2)$ ,



$D(1, 2, 0), E(0, 1, 0), F\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ . ..... 4 分

(1) **【证明】**依题意,  $\overrightarrow{EF} = \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$ , 平面  $ABC$  的法向量

$\overrightarrow{AA_1} = (0, 2, 0)$ , 有  $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{2} \times 0 + 0 \times 2 + 1 \times 0 = 0$ , 故  $\overrightarrow{EF} \perp$

$\overrightarrow{AA_1}$ . 又因为  $EF \not\subset$  平面  $ABC$ , 所以  $EF \parallel$  平面  $ABC$ . ..... 6 分

(2) **【解】**依题意,  $\overrightarrow{CD} = (1, 2, -2), \overrightarrow{CC_1} = (0, 2, 0)$ ,

设  $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$  为平面  $CC_1D$  的法向量, 则  $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0, \end{cases}$  即

$$\begin{cases} x+2y-2z=0, \\ 2y=0, \end{cases} \quad \text{不妨设 } z=1, \text{ 可得 } \mathbf{n}_1 = (2, 0, 1). \text{ 又 } \overrightarrow{BE} = (-2,$$

$$1, 0), \text{ 因此 } \cos \langle \overrightarrow{BE}, \mathbf{n}_1 \rangle = \frac{\overrightarrow{BE} \cdot \mathbf{n}_1}{|\overrightarrow{BE}| |\mathbf{n}_1|} = \frac{-4}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = -\frac{4}{5}.$$

所以直线  $BE$  与平面  $CC_1D$  所成角的正弦值为  $\frac{4}{5}$ . ..... 10 分

(3) 【解】依题意,  $\overrightarrow{CD} = (1, 2, -2), \overrightarrow{A_1D} = (1, 0, 0),$

设  $\mathbf{n}_2 = (a, b, c)$  为平面  $A_1CD$  的法向量, 则  $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0, \end{cases}$  即

$$\begin{cases} a+2b-2c=0, \\ a=0, \end{cases} \quad \text{不妨设 } c=1, \text{ 可得 } \mathbf{n}_2 = (0, 1, 1).$$

$$\text{因为 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

所以平面  $A_1CD$  与平面  $CC_1D$  夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ . ... 15 分

#### 18. 【命题点】等差数列、等比数列的基本量运算及数列求和

(1) 【解】设数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q (q \neq$

$$0). \text{ 由题意可得 } \begin{cases} 1+d-q=1, \\ 1+2d-q^2=1, \end{cases} \quad \text{解得 } d=q=2,$$

所以  $a_n = 2n-1, b_n = 2^{n-1}$ . ..... 4 分

$$(2) 【证明】由(1)知,  $S_n = \frac{(1+2n-1) \cdot n}{2} = n^2,$$$

$$\text{所以 } (S_{n+1} + a_{n+1})b_n = [(n+1)^2 + 2n+1] \cdot 2^{n-1} = (n^2 + 4n + 2) \cdot 2^{n-1},$$

$$S_{n+1}b_{n+1} - S_nb_n = (n+1)^2 \cdot 2^n - n^2 \cdot 2^{n-1} = [2(n+1)^2 - n^2] \cdot 2^{n-1} =$$

$$(n^2 + 4n + 2) \cdot 2^{n-1},$$

$$\text{所以 } (S_{n+1} + a_{n+1})b_n = S_{n+1}b_{n+1} - S_nb_n. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

(3) 【解】(先用并项求和法)

$$\text{令 } c_n = [a_{n+1} - (-1)^n a_n] b_n,$$

$$\text{则 } c_n = [(2n+1) - (-1)^n (2n-1)] \cdot 2^{n-1},$$

$$\text{所以 } c_{2n-1} + c_{2n} = [(4n-1) + (4n-3)] \cdot 2^{2n-2} + [(4n+1) - (4n-1)] \cdot 2^{2n-1} = n \cdot 2^{2n+1},$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] b_k = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots + c_{2n-1} + c_{2n} = 1 \times 2^3 + 2 \times 2^5 + \dots + n \cdot 2^{2n+1}. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

(再用错位相减法求和)

$$\text{记 } T_n = 1 \times 2^3 + 2 \times 2^5 + \dots + n \cdot 2^{2n+1},$$

则  $4T_n = 1 \times 2^5 + 2 \times 2^7 + \dots + n \cdot 2^{2n+3}$ , 两式相减得

$$-3T_n = 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2n+1} - n \cdot 2^{2n+3} = \left(\frac{1}{3} - n\right) \cdot 2^{2n+3} - \frac{8}{3},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{(3n-1) \cdot 2^{2n+3} + 8}{9},$$

$$\text{即 } \sum_{k=1}^{2n} [a_{k+1} - (-1)^k a_k] b_k = \frac{(3n-1) \cdot 2^{2n+3} + 8}{9}. \dots\dots\dots 15 \text{ 分}$$

## 19. 【命题点】椭圆的标准方程和几何性质

【解】(1) 由题意,  $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 可得  $a^2 = 3b^2$ , 所以离心率

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由题意, 椭圆方程化为  $x^2 + 3y^2 = 3b^2$ . 设  $M(m, n)$  ( $mn \neq 0$ ), 则  $m^2 + 3n^2 = 3b^2$ . ①  $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

过椭圆上点  $(m, n)$  的切线方程为  $mx + 3ny = 3b^2$ , 所以  $N\left(0, \frac{b^2}{n}\right)$ .  $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

因为  $|OM| = |ON|$ , 所以  $m^2 + n^2 = \frac{b^4}{n^2}$ . ②  $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

因为  $S_{\triangle MON} = \sqrt{3}$ , 所以  $\frac{1}{2} \times \left| \frac{b^2}{n} \right| \times |m| = \sqrt{3}$ . ③  $\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

$$\text{联立①②③, 解得 } \begin{cases} m^2 = 3, \\ n^2 = 1, \\ b^2 = 2, \end{cases} \text{ 所以椭圆的标准方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

$\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

### 一题多解

(1) 记椭圆的半焦距为  $c$ . 依题意, 有  $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ , 得  $b^2 = \frac{1}{3}a^2$ , 进而  $c^2 = a^2 - b^2 = \frac{2}{3}a^2$ , 可得离心率为  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

$\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 由(1)知  $a^2 = 3b^2$ , 故椭圆方程可写为  $\frac{x^2}{3b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $b > 0$ ). 设

$$\text{直线 } l \text{ 的方程为 } y = kx + t \ (k \neq 0), \text{ 联立 } \begin{cases} y = kx + t, \\ \frac{x^2}{3b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 整理}$$

得  $(3k^2 + 1)x^2 + 6ktx + 3t^2 - 3b^2 = 0$ .  $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

因为直线  $l$  与椭圆有唯一公共点  $M$ ,

$$\text{所以 } (6kt)^2 - 4(3k^2 + 1) \cdot (3t^2 - 3b^2) = 0,$$

$$\text{整理得 } 3k^2b^2 + b^2 - t^2 = 0. \quad \text{①}$$

故点  $M$  的横坐标  $x_M = -\frac{6kt}{2(3k^2 + 1)} = -\frac{3kt}{3k^2 + 1}$ , 进而得点  $M$  的

$$\text{坐标为 } \left( -\frac{3kt}{3k^2 + 1}, \frac{t}{3k^2 + 1} \right).$$

$$\text{由 } |OM| = |ON| \text{ 及 } N(0, t) \text{ 得 } \left( -\frac{3kt}{3k^2 + 1} \right)^2 + \left( \frac{t}{3k^2 + 1} \right)^2 = t^2,$$

由①知  $t \neq 0$ , 解得  $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

由已知及  $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} |x_M| |ON|$ , 得  $\frac{1}{2} \cdot \frac{|3kt|}{3k^2 + 1} \cdot |t| = \sqrt{3}$ , 可

得  $t^2 = 4$ , 再由①, 得  $b^2 = 2$ .

所以, 椭圆的方程为  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ .  $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

20. 【命题点】函数与导数的综合应用

(1) 【解】由题意,  $f'(x) = e^x - a \cos x$ , 则  $f'(0) = 1 - a$ , 又  $f(0) = 1$ , 所以曲线  $f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $(1-a)x - y + 1 = 0$ . ..... 4分

(2) (i) 【解】依题意, 存在实数  $x_0 > 0$ , 使得  $e^{x_0} = b\sqrt{x_0}$ , 即函数  $h(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}} - b$  存在零点  $x_0$ . 由  $h'(x) = \frac{e^x}{x\sqrt{x}} \left(x - \frac{1}{2}\right)$ , 当  $x$  变化时,  $h'(x)$ ,  $h(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

依题意, 应有  $0 = h(x_0) \geq h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2e} - b$ , 即  $b \geq \sqrt{2e}$ . 当  $b \geq \sqrt{2e}$  时, 有  $h\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0$ ,  $h\left(\frac{1}{b^2}\right) = be^{\frac{1}{b^2}} - b > 0$ , 且  $\frac{1}{b^2} \leq \frac{1}{2e} < \frac{1}{2}$ , 故  $h(x)$  在区间  $\left(\frac{1}{b^2}, \frac{1}{2}\right]$  内存在零点, 符合题意.

所以  $b$  的取值范围为  $[\sqrt{2e}, +\infty)$ . ..... 10分

(ii) 【证明】依题意, 存在实数  $t > 0$ , 使得  $e^t - a \sin t - b\sqrt{t} = 0$ , 即  $a \sin t + b\sqrt{t} = e^t$ .

设向量  $m = (a, b)$ ,  $n = (\sin t, \sqrt{t})$ , 由  $m \cdot n = |m| |n| \cos \langle m, n \rangle \leq |m| |n|$ , 得  $(a^2 + b^2)(\sin^2 t + t) \geq (a \sin t + b\sqrt{t})^2 = e^{2t}$ ,

因此  $a^2 + b^2 \geq \frac{e^{2t}}{\sin^2 t + t}$ . 记  $p(x) = x - \sin x$ , 有  $p'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ , 则  $p(x)$  是增函数, 故当  $0 < x < \pi$  时,  $p(x) > p(0)$ , 即  $0 < \sin x < x$ , 进而有  $0 < \sin^2 x < x^2$ . 又当  $x \geq \pi$  时, 有  $0 \leq \sin^2 x \leq 1 < x^2$ , 所以对  $x > 0$ , 恒有  $0 \leq \sin^2 x < x^2$ . 因此,  $a^2 + b^2 \geq \frac{e^{2t}}{\sin^2 t + t} > \frac{e^{2t}}{t^2 + t}$ .

记函数  $u(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + x}$ ,  $x > 0$ , 则  $u'(x) = \frac{e^{2x}(2x^2 - 1)}{(x^2 + x)^2}$ . 令  $u'(x) =$

$0$ , 解得  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 或  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  (舍去).

当  $x$  变化时,  $u'(x)$ ,  $u(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
$u'(x)$	-	0	+
$u(x)$	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

故  $u(x)$  的最小值为  $u\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2(\sqrt{2} - 1)e^{\sqrt{2}}$ . 下面只需证明



$2(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}} > e$ , 即  $(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}-1} > \frac{1}{2}$ . 记函数  $v(x) = e^x - x - 1$ .

当  $x > 0$  时, 有  $v'(x) = e^x - 1 > 0$ , 则  $v(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 进而  $v(x) \geq v(0) = 0$ , 即  $e^x \geq x + 1$ . 所以,  $(\sqrt{2}-1)e^{\sqrt{2}-1} \geq (\sqrt{2}-1) \times \sqrt{2} = 2 - \sqrt{2} > \frac{1}{2}$ .

命题得证. .... 16 分

### 一题多解

(ii) 由上述解法得  $a^2 + b^2 \geq \frac{e^{2t}}{\sin^2 t + t}$ .

记  $r(x) = x - \sin^2 x$ , 有  $r'(x) = 1 - \sin 2x \geq 0$ , 则  $r(x)$  是增函数, 故当  $x > 0$  时,  $r(x) > r(0) = 0$ , 即  $x > \sin^2 x \geq 0$ .

因此,  $a^2 + b^2 \geq \frac{e^{2t}}{\sin^2 t + t} > \frac{e^{2t}}{2t}$ .

记  $s(x) = \frac{e^x}{x}$ ,  $x > 0$ , 则  $s'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$ , 当  $x$  变化时,  $s'(x)$ ,

$s(x)$  的变化情况如下表:

$x$	$(0, 1)$	$1$	$(1, +\infty)$
$s'(x)$	$-$	$0$	$+$
$s(x)$		极小值	

故  $s(x)$  的最小值为  $s(1) = e$ . 所以,  $a^2 + b^2 > \frac{e^{2t}}{2t} \geq e$ . ... 16 分