

1. D 【命题点】集合的交集运算及一元二次不等式的解法

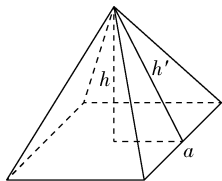
【解析】由不等式 $x^2 - 3x - 4 < 0$, 解得 $-1 < x < 4$, 则 $A = \{x | -1 < x < 4\}$. 又 $B = \{-4, 1, 3, 5\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 3\}$, 故选 D.

2. C 【命题点】复数的概念及模的运算

【解析】因为 $z = 1 + 2i + i^3 = 1 + 2i - i = 1 + i$, 所以 $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, 故选 C.

3. C 【命题点】数学文化和正四棱锥的几何性质

【解析】设正四棱锥的底面边长为 a , 高为 h , 侧面三角形底边上的高为 h' , 则以 h 为边长的正方形的面积为 h^2 , 四棱锥一个侧面三角形的面积为 $\frac{1}{2}ah'$.

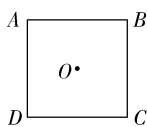


由题意得 $h^2 = \frac{1}{2}ah'$, 且 $h^2 = h'^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, 可得 $h'^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ah'$, 化简整理得 $4\left(\frac{h'}{a}\right)^2 - 2 \cdot \frac{h'}{a} - 1 = 0$, 解得 $\frac{h'}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ 或 $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ (舍). 所以侧面三角形底边上的高与底面正方形边长的比值为 $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$, 故选 C.

关键点拨 根据以正四棱锥的高为边长的正方形面积等于该四棱锥一个侧面三角形的面积得到一个关系式, 并根据正四棱锥的高、侧面三角形底边上的高及底面正方形边长的一半围成的是直角三角形, 从而利用勾股定理得到另一个关系式, 由两个关系式可得结果.

4. A 【命题点】古典概型的概率计算

【解析】在 A, B, C, D, O 中任取 3 点, 有 $ABC, ABD, ABO, ACD, ACO, ADO, BCD, BCO, BDO, CDO$ 共 10 种选取方法. 如图, 当取到的 3 点为 AOC 或 BOD



时, 3 点共线, 故取到的 3 点共线的概率 $P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$, 故选 A.

关键点拨 从 5 个点中任取 3 点时要注意不重不漏.

5. D 【命题点】实际问题拟合函数的选择问题

【解析】根据题中散点图可知, 图中的散点大致分布在某一条“对数型”函数曲线的周围, 而 A 选项是“直线型”的拟合函数, B 选项是“抛物线型”的拟合函数, C 选项是“指数型”的拟合函数, 只有 D 选项的拟合程度更符合. 故选 D.

6. B 【命题点】直线与圆的位置关系及圆的几何性质

【解析】根据圆的几何性质,要使过点 $(1,2)$ 的直线被该圆所截得的弦的长度的值最小,则弦所在的直线与过圆心和该点的直线垂直.圆的标准方程为 $(x-3)^2+y^2=9$,圆心为 $(3,0)$,半径 $r=3$,此时圆心到直线的距离 $d=\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{2}$.根据垂径定理可得截得的弦长的最小值为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=2$,故选 B.

一题多解 由题知圆的标准方程为 $(x-3)^2+y^2=9$,圆心为 $(3,0)$,半径 $r=3$.当过点 $(1,2)$ 的直线的斜率不存在时,直线方程为 $x=1$,圆心到直线的距离为2,此时直线被该圆截得的弦的长度为 $2\sqrt{3^2-2^2}=2\sqrt{5}$.当过点 $(1,2)$ 的直线的斜率存在时,设该直线方程为 $y=k(x-1)+2$,即 $kx-y+2-k=0$.若 $k=0$,则 $y=2$,圆心到直线的距离为2,此时直线被该圆截得的弦的长度为 $2\sqrt{5}$.若 $k\neq 0$,则圆心到直线的距离 $d=\frac{|3k+2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{\frac{k^2+2k+1}{k^2+1}}=2\sqrt{1+\frac{2k}{k^2+1}}=2\sqrt{1+\frac{2}{k+\frac{1}{k}}}$,若 $k>0$,则 $k+\frac{1}{k}\geq 2$,当且仅当 $k=1$ 时等号成立,则 $d\leq 2\sqrt{2}$,弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}\geq 2\sqrt{9-8}=2$;若 $k<0$,则 $k+\frac{1}{k}\leq -2$,当且仅当 $k=-1$ 时等号成立,则 $0\leq d<2$,弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}\in(2\sqrt{5},6]$.故截得的弦的长度的最小值为2,故选 B.

7.C 【命题点】三角函数的图像与性质

【解析】由图像可得 $f\left(-\frac{4\pi}{9}\right)=\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}\right)=0$,所以

$$-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}, \text{ 则 } \omega=-\frac{9}{4}k-\frac{3}{4}, k\in\mathbf{Z}. \text{ 设函数}$$

$f(x)$ 的最小正周期为 T ,则 $T<2\pi<2T$,即 $\frac{2\pi}{|\omega|}<2\pi<\frac{4\pi}{|\omega|}$,所以

$1<|\omega|<2$ (提示:通过函数图像确定 $f(x)$ 最小正周期的取值范围,进而确定 ω 的取值范围).又 $\omega=-\frac{9}{4}k-\frac{3}{4}, k\in\mathbf{Z}$,则

$k=-1, \omega=\frac{3}{2}$,经验证可知,当 $\omega=\frac{3}{2}$ 时与题图相符.所以

$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$,故选 C.

快解 因为函数 $f(x)$ 的图像过点 $\left(-\frac{4\pi}{9}, 0\right)$,此点是曲线

与 x 轴负半轴的交点中离原点最近的交点,所以 $-\frac{4\pi}{9}\omega+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$,解得 $\omega=\frac{3}{2}$.故最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$,故选 C.

8. B 【命题点】对数的运算和指数、对数的互化公式

【解析】因为 $a \log_3 4 = \log_3 4^a = 2$, 所以 $4^a = 3^2 = 9$, 所以 $4^{-a} = \frac{1}{4^a} = \frac{1}{9}$, 故选 B.

9. C 【命题点】程序框图

【解析】输入 $n=1, S=0$, 则 $S=1, n=3 \rightarrow S=4, n=5 \rightarrow S=9, n=7 \rightarrow S=16, n=9 \rightarrow S=25, n=11 \rightarrow S=36, n=13 \rightarrow S=49, n=15 \rightarrow S=64, n=17 \rightarrow S=81, n=19 \rightarrow S=100, n=21 \rightarrow S=121 > 100$, 退出循环, 输出 $n=21$, 故选 C.

10. D 【命题点】等比数列的通项公式

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 因为 $a_1 + a_2 + a_3 = 1, a_2 + a_3 + a_4 = 2$, 所以 $q(a_1 + a_2 + a_3) = 2$ (提示: 注意整体思想的应用, 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 公比为 q , 则 $a_2 + a_3 + a_4 = q(a_1 + a_2 + a_3)$), $a_6 + a_7 + a_8 = q^5(a_1 + a_2 + a_3)$, 解得 $q=2$. 所以 $a_6 + a_7 + a_8 = q^5(a_1 + a_2 + a_3) = 2^5 = 32$, 故选 D.

11. B

思路导引

双曲线 C 的方程 $\rightarrow |F_1 F_2| = 4 \xrightarrow{|OP|=2}$

$$PF_1 \perp PF_2 \rightarrow |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 16 \xrightarrow{||PF_1| - |PF_2|| = 2} |PF_1| \cdot |PF_2| = 6 \rightarrow S_{\triangle PF_1 F_2}.$$

【命题点】双曲线的定义和几何性质

【解析】由双曲线的方程知 $a=1, b=\sqrt{3}, c=2$, 不妨设 $F_1(-2, 0), F_2(2, 0)$.

因为 $|OP|=2$, 所以点 P 在以线段 $F_1 F_2$ 为直径的圆上, 故 $PF_1 \perp PF_2$, 则 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (2c)^2 = 16$.

由双曲线的定义知 $||PF_1| - |PF_2|| = 2a = 2$, 所以 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1| |PF_2| = 4$, 所以 $|PF_1| |PF_2| = 6$.

所以 $\triangle PF_1 F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| = 3$, 故选 B.

一题多解

设 $P(x, y)$, 因为 $|OP|=2$, 所以 $x^2 + y^2 = 4$, 与双曲线方程联立得 $4y^2 - 9 = 0$, 解得 $|y| = \frac{3}{2}$. 由双曲线方程知

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2, \text{ 所以 } |F_1 F_2| = 4, S_{\triangle PF_1 F_2} = \frac{1}{2} |F_1 F_2| \cdot$$

$$|y| = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{2} = 3, \text{ 故选 B.}$$

快解

在 $\triangle PF_1 F_2$ 中, $|OP|=2, |OF_1|=|OF_2|=2$, 故 $PF_1 \perp PF_2$. 由双曲线焦点三角形的面积公式有 $S_{\triangle PF_1 F_2} =$

$$\frac{b^2}{\tan \frac{\angle F_1 P F_2}{2}} = b^2 = 3, \text{ 故选 B.}$$

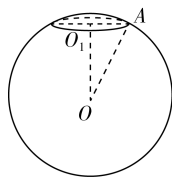
12. A

思路导引 $\odot O_1$ 的面积为 $4\pi \rightarrow \odot O_1$ 的半径 $r=2 \rightarrow$

等边三角形 ABC 的边长为 $2\sqrt{3} \rightarrow OO_1 = 2\sqrt{3} \xrightarrow{\text{勾股定理}} \text{球 } O$
 的半径 $R=4 \rightarrow \text{球 } O$ 的表面积.

【命题点】三角形的外接圆及球的表面积

【解析】 设等边三角形 ABC 的边长为 a , $\odot O_1$ 的半径为 r , 球 O 的半径为 R , 则由 $\odot O_1$ 的面积为 $\pi r^2 = 4\pi$, 可得 $r=2$. 又 $\odot O_1$ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 则 $r = O_1A = \frac{2}{3} \times$



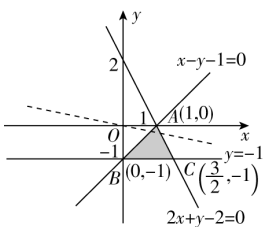
$\frac{\sqrt{3}}{2}a = 2$, 解得 $a = 2\sqrt{3}$. 则 $R^2 = OA^2 = r^2 + OO_1^2 = 4 + 12 = 16$, 所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2 = 64\pi$, 故选 A.

一题多解 设 $\odot O_1$ 的半径为 r , $\odot O_1$ 的面积为 $\pi r^2 = 4\pi$, 可得 $r=2$, 由正弦定理知 $\frac{AB}{\sin C} = 2r$, 则 $OO_1 = AB = 2r \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$. 所以球 O 的半径 $R = \sqrt{r^2 + OO_1^2} = 4$, 所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2 = 64\pi$, 故选 A.

13.1 【命题点】线性规划

【解析】 作出约束条件所表示的可行域, 如图中阴影部分所示. 目

标函数 $z = x + 7y$ 可化为 $y = -\frac{1}{7}x + \frac{z}{7}$, 平移直线 $y = -\frac{1}{7}x$ 可知, 当该



直线经过点 $A(1,0)$ 时, 在 y 轴上的截距最大, 此时 $z = 1 + 7 \times 0 = 1$.

快解 由约束条件作出可行域, 可知可行域为封闭型, 目标函数 $z = x + 7y$ 的最值在顶点处取得. $A(1,0)$, 此时 $z = 1$; $B(0,-1)$, 此时 $z = -7$; $C(\frac{3}{2}, -1)$, 此时 $z = -\frac{11}{2}$, 故 z 的最大值为 1.

14.5 【命题点】平面向量的坐标运算及数量积

【解析】 由 $a \perp b$, 可得 $a \cdot b = 1 \times (m+1) + (-1) \times (2m-4) = 0$, 解得 $m=5$.

15. $2x-y=0$ 【命题点】导数的几何意义及切线方程的求法

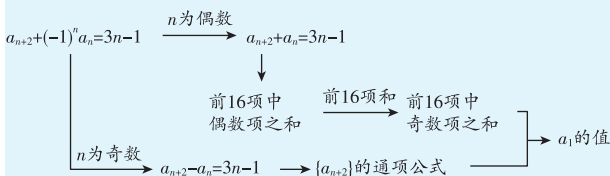
【解析】 设切点为 (x_0, y_0) , 对 $y = \ln x + x + 1$ 求导得 $y' = \frac{1}{x} + 1$, 则

曲线的切线的斜率为 $\frac{1}{x_0} + 1 = 2$, 解得 $x_0 = 1$. 所以 $y_0 = \ln 1 + 1 + 1 =$

2, 则切点为 $(1, 2)$, 切线方程为 $y - 2 = 2(x - 1)$, 即 $2x - y = 0$.

16. 7

思路导引



【命题点】数列求和及数列递推公式

【解析】当 n 为偶数时, $a_{n+2} + a_n = 3n - 1$, 所以 $(a_2 + a_4) + (a_6 + a_8) + (a_{10} + a_{12}) + (a_{14} + a_{16}) = 5 + 17 + 29 + 41 = 92$. 因为前 16 项和为 540, 所以 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13} + a_{15} = 448$.

当 n 为奇数时, $a_{n+2} - a_n = 3n - 1$, 由累加法得 $a_{n+2} - a_1 = 3(1+3+5+\cdots+n) - \frac{1+n}{2} = \frac{3}{4}n^2 + n + \frac{1}{4}$, 所以 $a_{n+2} = \frac{3}{4}n^2 + n + \frac{1}{4} + a_1$.

所以 $a_1 + \left(\frac{3}{4} \times 1^2 + 1 + \frac{1}{4} + a_1\right) + \left(\frac{3}{4} \times 3^2 + 3 + \frac{1}{4} + a_1\right) + \cdots + \left(\frac{3}{4} \times 13^2 + 13 + \frac{1}{4} + a_1\right) = 8a_1 + \frac{3}{4} \times (1^2 + 3^2 + \cdots + 13^2) + (1+3+\cdots+13) + \frac{1}{4} \times 7 = 448$, 解得 $a_1 = 7$.

关键点拨

(1) 当 n 为偶数时, 可得前 16 项中的偶数项和, 从而得到前 16 项中的奇数项和; (2) 当 n 为奇数时, 利用累加法得到 $\{a_{n+2}\}$ 的通项公式, 再利用前 16 项中奇数项的和求出 a_1 的值.

17. 【命题点】频数分布表、由频率估计概率及样本的数字特征

【解】(1) 由试加工产品等级的频数分布表知,

甲分厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率的估计值为 $\frac{40}{100} = 0.4$; 2 分

乙分厂加工出来的一件产品为 A 级品的概率的估计值为 $\frac{28}{100} = 0.28$ 4 分

(2) 由数据知甲分厂加工出来的 100 件产品利润的频数分布表为

利润	65	25	-5	-75
频数	40	20	20	20

因此甲分厂加工出来的 100 件产品的平均利润为

$\frac{65 \times 40 + 25 \times 20 - 5 \times 20 - 75 \times 20}{100} = 15$ 6 分

由数据知乙分厂加工出来的 100 件产品利润的频数分布表为

利润	70	30	0	-70
频数	28	17	34	21

因此乙分厂加工出来的 100 件产品的平均利润为

$\frac{70 \times 28 + 30 \times 17 + 0 \times 34 - 70 \times 21}{100} = 10$ 10 分

比较甲、乙两分厂加工的产品的平均利润, 应选甲分厂承接

加工业务. 12分

关键点拨 (2) 对于 A 级品、B 级品、C 级品、D 级品, 甲分厂每个级别每件产品的利润分别为 65, 25, -5, -75, 乙分厂每个级别每件产品的利润分别为 70, 30, 0, -70, 计算甲、乙分厂试加工产品的平均利润, 选择利润较大的分厂承接加工业务.

18. 【命题点】余弦定理、三角形的面积公式以及三角恒等变换

【解】 (1) 由题设及余弦定理得 $28 = 3c^2 + c^2 - 2 \times \sqrt{3} c^2 \times \cos 150^\circ$.

解得 $c = -2$ (舍去), 3分

$c = 2$, 从而 $a = 2\sqrt{3}$ 4分

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 \times \sin 150^\circ = \sqrt{3}$ 6分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, $A = 180^\circ - B - C = 30^\circ - C$, 所以 $\sin A + \sqrt{3} \sin C = \sin(30^\circ - C) + \sqrt{3} \sin C = \sin(30^\circ + C)$ 8分

故 $\sin(30^\circ + C) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 而 $0^\circ < C < 30^\circ$, 所以 $30^\circ + C = 45^\circ$, 故 $C =$

15° (提示: 求角 C 时要注意角 C 的范围). 12分

19. 【命题点】面面垂直的证明、圆锥侧面积以及三棱锥体积的求法

(1) **【证明】** 由题设可知, $PA = PB = PC$.

由于 $\triangle ABC$ 是正三角形, 故可得

$\triangle PAC \cong \triangle PAB, \triangle PAC \cong \triangle PBC$.

又 $\angle APC = 90^\circ$, 故 $\angle APB = 90^\circ$,

$\angle BPC = 90^\circ$ 3分

从而 $PB \perp PA, PB \perp PC$, 故 $PB \perp$ 平面 PAC , 所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAC 6分

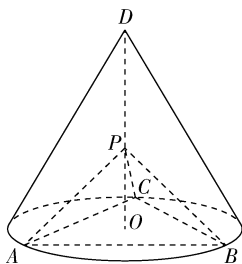
(2) **【解】** 设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l . 由题设可得 $rl = \sqrt{3}, l^2 - r^2 = 2$.

解得 $r = 1, l = \sqrt{3}$. 从而 $AB = \sqrt{3}$ 8分

由(1)可得 $PA^2 + PB^2 = AB^2$, 故 $PA = PB = PC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 10分

所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times PA \times PB \times PC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{6}}{8}$ 12分



20. 【思路导引】 (1) $a = 1 \rightarrow f'(x) \xrightarrow{f'(x) \text{ 的正负}} f(x) \text{ 的单调性};$

(2) $f(x) \rightarrow f'(x) \rightarrow$

$$\begin{cases} a \leq 0 \text{ 时, } f'(x) > 0 \rightarrow f(x) \text{ 在 } (-\infty, +\infty) \text{ 单调递增, 不符合题意;} \\ a > 0 \xrightarrow{f'(x)=0} x = \ln a \rightarrow f(x) \text{ 的单调性} \rightarrow f(x) \text{ 的最小值} \rightarrow f(\ln a) < 0 \rightarrow a \text{ 的取值范围.} \end{cases}$$

【命题点】利用导数研究函数的单调性及根据函数零点个数求参数取值范围

【解】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^x - x - 2$, 则 $f'(x) = e^x - 1$.

..... 2 分

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

..... 4 分

(2) $f'(x) = e^x - a$.

(下面分 $a \leq 0, a > 0$ 两种情况讨论 $f(x)$ 的单调性, 得到 $f(x)$ 的最值, 从而判断零点个数)

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, 故 $f(x)$ 至多存在 1 个零点, 不合题意. 6 分

当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x = \ln a$. 当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 单调递增, 故当 $x = \ln a$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(\ln a) = -a(1 + \ln a)$.

(根据 $a, \frac{1}{e}$ 的大小分类讨论 $f(\ln a)$ 的正负)

(i) 若 $0 < a \leq \frac{1}{e}$, 则 $f(\ln a) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 至多存在 1 个零点, 不合题意. 8 分

(ii) 若 $a > \frac{1}{e}$, 则 $f(\ln a) < 0$.

由于 $f(-2) = e^{-2} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 存在唯一零点.

由(1)知, 当 $x > 2$ 时, $e^x - x - 2 > 0$, 所以当 $x > 4$ 且 $x > 2\ln(2a)$

时, $f(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} - a(x+2) > e^{\ln(2a)} \cdot \left(\frac{x}{2} + 2\right) - a(x+2) = 2a >$

0. 故 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 存在唯一零点. 从而 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有两个零点. 11 分

综上, a 的取值范围是 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 12 分

21. 【命题点】直线与椭圆的位置关系以及直线过定点问题

(1) **【解】**由题设得 $A(-a, 0), B(a, 0), G(0, 1)$.

则 $\overrightarrow{AG} = (a, 1), \overrightarrow{GB} = (a, -1)$.

由 $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$ 得 $a^2 - 1 = 8$, 2 分

即 $a = 3$.

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 4 分

(2)【证明】设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2), P(6, t)$.

若 $t \neq 0$, 设直线 CD 的方程为 $x = my + n$, 由题意可知 $-3 < n <$

3. 5 分

(因为 C, D 是椭圆上不与 A, B 重合的两点, 所以直线 $x = my + n$ 中的 $n \in (-3, 3)$, 这个范围不要漏写)

由于直线 PA 的方程为 $y = \frac{t}{9}(x+3)$, 所以 $y_1 = \frac{t}{9}(x_1+3)$.

..... 6 分

直线 PB 的方程为 $y = \frac{t}{3}(x-3)$, 所以 $y_2 = \frac{t}{3}(x_2-3)$.

..... 7 分

可得 $3y_1(x_2-3) = y_2(x_1+3)$.

由于 $\frac{x_2^2}{9} + y_2^2 = 1$, 故 $y_2^2 = -\frac{(x_2+3)(x_2-3)}{9}$,

可得 $27y_1y_2 = -(x_1+3)(x_2+3)$,

即 $(27+m^2)y_1y_2 + m(n+3)(y_1+y_2) + (n+3)^2 = 0$. ① 8 分

将 $x = my + n$ 代入 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ 得 $(m^2+9)y^2 + 2mny + n^2 - 9 = 0$.

所以 $y_1 + y_2 = -\frac{2mn}{m^2+9}, y_1y_2 = \frac{n^2-9}{m^2+9}$ 9 分

代入①式得 $(27+m^2)(n^2-9) - 2m(n+3)mn + (n+3)^2 \cdot (m^2+9) = 0$. 解得 $n = -3$ (舍去), $n = \frac{3}{2}$ 10 分

故直线 CD 的方程为 $x = my + \frac{3}{2}$, 即直线 CD 过定点 $(\frac{3}{2}, 0)$.

..... 11 分

若 $t = 0$, 则直线 CD 的方程为 $y = 0$, 过点 $(\frac{3}{2}, 0)$.

综上, 直线 CD 过定点 $(\frac{3}{2}, 0)$ 12 分

►一题多解 (2) 设 $P(6, t)$, 由 (1) 知 $A(-3, 0), B(3, 0)$.

直线 $PA: y = \frac{t}{9}(x+3)$, 5 分

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{t}{9}(x+3), \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \end{cases}$$

得 $(t^2+9)x^2 + 6t^2x + 9t^2 - 81 = 0$,

则 $x_A + x_C = \frac{-6t^2}{t^2+9}$. 又 $x_A = -3$,

所以 $x_C = \frac{-6t^2}{t^2+9} + 3 = \frac{-3t^2+27}{t^2+9}$, 7 分

把 x_C 代入直线 PA 的方程得 $y_C = \frac{6t}{t^2+9}$,

所以 $C(\frac{-3t^2+27}{t^2+9}, \frac{6t}{t^2+9})$ 8 分

$$\text{直线 } PB: y = \frac{t}{3}(x-3), \text{ 联立 } \begin{cases} y = \frac{t}{3}(x-3), \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1, \end{cases}$$

$$\text{得 } (t^2+1)x^2 - 6t^2x + 9t^2 - 9 = 0,$$

$$\text{则 } x_B + x_D = 3 + x_D = \frac{6t^2}{t^2+1}, \text{ 所以 } x_D = \frac{3t^2-3}{t^2+1}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

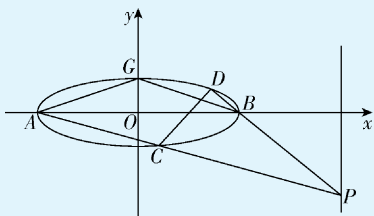
$$\text{把 } x_D \text{ 代入直线 } PB \text{ 的方程得 } y_D = \frac{-2t}{t^2+1},$$

$$\text{所以 } D\left(\frac{3t^2-3}{t^2+1}, \frac{-2t}{t^2+1}\right). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以直线 } CD: \left(\frac{6t}{t^2+9} - \frac{2t}{t^2+1}\right)\left(x - \frac{3t^2-3}{t^2+1}\right) = \left(\frac{-3t^2+27}{t^2+9} - \frac{3t^2-3}{t^2+1}\right).$$

$$\left(y - \frac{-2t}{t^2+1}\right), \text{ 整理得 } 3yt^2 + (4x-6)t - 9y = 0, \text{ 所以 } \begin{cases} 4x-6=0, \\ 3y=0, \end{cases} \text{ 得}$$

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = 0, \end{cases} \text{ 则直线 } CD \text{ 恒过定点 } \left(\frac{3}{2}, 0\right). \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



22. 【命题点】参数方程与普通方程的互化、极坐标方程与直角坐标方程的互化

$$\text{【解】(1) 当 } k=1 \text{ 时, } C_1: \begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \text{ 消去参数 } t \text{ 得 } x^2 + y^2 = 1,$$

$$\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{故曲线 } C_1 \text{ 是圆心为坐标原点, 半径为 } 1 \text{ 的圆. } \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 当 } k=4 \text{ 时, } C_1: \begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t, \end{cases} \text{ 消去参数 } t \text{ 得 } C_1 \text{ 的直角坐标}$$

$$\text{方程为 } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$C_2 \text{ 的直角坐标方程为 } 4x - 16y + 3 = 0. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \\ 4x - 16y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{1}{4}, \\ y = \frac{1}{4}. \end{cases} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{故 } C_1 \text{ 与 } C_2 \text{ 的公共点的直角坐标为 } \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right). \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

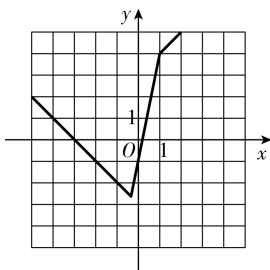
▶ 关键点拨 (2) 求 C_1 的直角坐标方程注意消参时 $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ 的应用, 根据 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 将 C_2 的极坐标方程化为直角坐标方程, 再将曲线的交点问题转化为对应方程构成的方程组解的问题.

23. 【命题点】含绝对值的函数的图像及绝对值不等式的求解

【解】(1) 由题设知

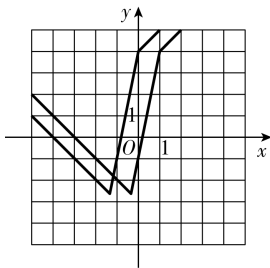
$$f(x) = \begin{cases} -x-3, & x \leq -\frac{1}{3}, \\ 5x-1, & -\frac{1}{3} < x \leq 1, \\ x+3, & x > 1. \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$y=f(x)$ 的图像如图所示.



$\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 函数 $y=f(x)$ 的图像向左平移 1 个单位长度后得到函数 $y=f(x+1)$ 的图像.



$\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$y=f(x)$ 的图像与 $y=f(x+1)$ 的图像的交点坐标为

$\left(-\frac{7}{6}, -\frac{11}{6}\right).$ $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

由图像可知当且仅当 $x < -\frac{7}{6}$ 时, $y=f(x)$ 的图像在 $y=f(x+1)$ 的图像上方. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

故不等式 $f(x) > f(x+1)$ 的解集为 $\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right).$ $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

▶ 一题多解 (2) 因为 $f(x) = |3x+1| - 2|x-1|$, 所以 $f(x+1) = |3(x+1)+1| - 2|(x+1)-1| = |3x+4| - 2|x|$, 不等式 $f(x) > f(x+1)$ 等价于 $|3x+1| + 2|x| > |3x+4| + 2|x-1|$. 当 $x < -\frac{4}{3}$ 时, $-(3x+1) - 2x > -(3x+4) - 2(x-1)$, 即 $-5x-1 > -5x-2$, 此时解集为 $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$; $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

当 $-\frac{4}{3} \leq x < -\frac{1}{3}$ 时, $-(3x+1)-2x > 3x+4-2(x-1)$,

即 $-5x-1 > x+6$, 此时解集为 $\left[-\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}\right)$; 7 分

当 $-\frac{1}{3} \leq x < 0$ 时, $3x+1-2x > 3x+4-2(x-1)$, 即 $x+1 > x+6$, 此时解集为 \emptyset ; 8 分

当 $0 \leq x < 1$ 时, $3x+1+2x > 3x+4-2(x-1)$, 即 $5x+1 > x+6$, 解得

$x > \frac{5}{4}$, 此时解集为 \emptyset ; 9 分

当 $x \geq 1$ 时, $3x+1+2x > 3x+4+2(x-1)$, 即 $5x+1 > 5x+2$, 此时解集为 \emptyset .

综上所述, 不等式 $f(x) > f(x+1)$ 的解集为 $\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right)$.

..... 10 分