

1. B 【命题点】集合的交集运算与不等式的解法

【解析】因为 $N = \{x | 2x > 7\} = \left\{x \mid x > \frac{7}{2}\right\}$, 且 $M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,

所以 $M \cap N = \{5, 7, 9\}$, 故选 B.

2. C 【命题点】频率分布直方图

【解析】对于 A, 由频率分布直方图, 知该地农户家庭年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 $(0.02 + 0.04) \times 1 = 0.06 = 6\%$, 故 A 正确; 对于 B, 由频率分布直方图, 知该地农户家庭年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 $(0.04 + 0.02 + 0.02 + 0.02) \times 1 = 0.10 = 10\%$, 故 B 正确; 对于 C, 由频率分布直方图可算得年收入的平均值约为 $0.02 \times 3 + 0.04 \times 4 + 0.10 \times 5 + 0.14 \times 6 + 0.20 \times 7 + 0.20 \times 8 + 0.10 \times 9 + 0.10 \times 10 + 0.04 \times 11 + 0.02 \times 12 + 0.02 \times 13 + 0.02 \times 14 = 7.68$ (万元), 所以可估计该地农户家庭年收入的平均值为 7.68 万元, 故 C 不正确; 对于 D, 由频率分布直方图, 知家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间的农户比率估计为 $(0.10 + 0.14 + 0.20 + 0.20) \times 1 = 0.64 = 64\%$, 所以可以估计该地有一半以上的农户, 其家庭年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间, 故 D 正确. 故选 C.

3. B 【命题点】复数的四则运算

【解析】由题意, 得 $z = \frac{3+2i}{(1-i)^2} = \frac{3+2i}{-2i} = \frac{(3+2i) \cdot i}{-2i \cdot i} = -1 + \frac{3}{2}i$, 故

选 B.

4. D 【命题点】函数的单调性

【解析】对于 A, 函数 $f(x) = -x$ 为 \mathbf{R} 上的减函数, 故 A 不正确; 对于 B, 因为 $\frac{2}{3} < 1$, 所以函数 $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 为 \mathbf{R} 上的减函数, 故 B 不正确; 对于 C, 函数 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 C 不正确; 对于 D, 函数 $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 为 \mathbf{R} 上的增函数, 故 D 正确. 故选 D.

5. A 【命题点】双曲线的渐近线、点到直线的距离公式

【解析】双曲线 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 的渐近线方程为 $3x \pm 4y = 0$, 则点

$(3, 0)$ 到渐近线 $3x + 4y = 0$ 的距离为 $\frac{|3 \times 3 + 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5}$, 故选 A.

关键点拨

双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$ (标准方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$), $y = \pm \frac{a}{b}x$ (标准方程为 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$), 或令双曲线的标准方程中的 1 为 0, 求得渐近线的方程.

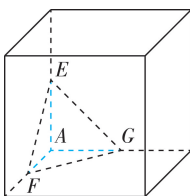
6. C 【解析】函数模型的实际应用及对数运算

【命题点】由题知 $4.9 = 5 + \lg V$, 则 $\lg V = -0.1$, 解得 $V = 10^{-0.1} =$

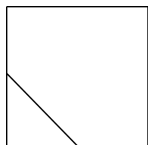
$$\frac{1}{\sqrt[10]{10}} \approx \frac{1}{1.259} \approx 0.8, \text{ 故选 C.}$$

7. D 【命题点】空间几何体的三视图

【解析】由题意及多面体的正视图得, 该空间几何体的直观图如图①, 则其侧视图如图②, 故选 D.



图①



图②

易错警示 本题易忽视题干给出正视图中的虚线, 误认为在正面观察时可以看到截面 EFG 而致错.

8. D 【命题点】由余弦定理解三角形

【解析】结合余弦定理可得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$, 即 $19 = 4 + BC^2 - 4BC \cdot \cos 120^\circ$, 解得 $BC = 3$ 或 $BC = -5$ (舍), 故选 D.

一题多解

由正弦定理可得 $\frac{\sqrt{19}}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, 解得 $\sin C = \frac{\sqrt{57}}{19}$, 则 $\cos C = \frac{4\sqrt{19}}{19}$. 又 $\sin A = \sin(120^\circ + C) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos C - \frac{1}{2} \sin C = \frac{3\sqrt{57}}{38}$, 则 $BC = \frac{2\sqrt{19}}{\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{57}}{38} = 3$, 故选 D.

9. A 【命题点】等比数列的前 n 项和

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则

$$\begin{cases} a_1(1+q) = 4, \\ a_1(1+q+q^2+q^3) = 6, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} a_1(1+q) = 4, \\ q^2 = \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 则 } S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} =$$

$$\frac{a_1(1-q^2)(1+q^2+q^4)}{1-q} = a_1(1+q)(1+q^2+q^4) = 4 \times \frac{7}{4} = 7, \text{ 故选 A.}$$

快解

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 成等比数列, 即 $4, 2, S_6 - 6$ 成等比数列, 则 $4(S_6 - 6) = 4$, 解得 $S_6 = 7$, 故选 A.

10. C 【命题点】古典概型

【解析】先排好 3 个 1, 并将其空位从左到右依次标记为 A, B, C, D , 如图所示. 将 2 个 0 放入 4 个空位中, 事件“2 个 0 不相邻”包含的基本事件分别为 $(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)$, 共 6 个. 事件“2 个 0 相邻”包含的基本事件分别为 $(A, A), (B, B), (C, C), (D, D)$, 共 4 个, 则

基本事件的总数为 10, 因此事件“2 个 0 不相邻”的概率为

$$\frac{6}{10} = 0.6, \text{ 故选 C.}$$

A 1 B 1 C 1 D

11. A 【命题点】同角三角函数基本关系以及二倍角公式

【解析】因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} =$

$\frac{\cos \alpha}{2 - \sin \alpha}$, 化简得 $4\sin \alpha = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, 则 $\sin \alpha = \frac{1}{4}$. 所以

$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 则 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$, 故选 A.

12. C 【命题点】抽象函数的奇偶性和周期性

【解析】由题知 $f(2+x) = f(1+(1+x)) = f(-1-x) = -f(1+x) = -f(-x) = f(x)$, 则函数 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数, 则

$f\left(\frac{5}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$, 故选 C.

▶ 快解

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = f\left(1 + \frac{2}{3}\right) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = -f\left(\frac{2}{3}\right) = -f\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

▶ 方法速记

求抽象函数的周期性一般会用到如下结论:

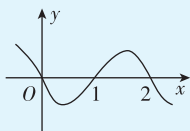
(1) 若函数 $f(x)$ 对任意的 x 满足 $f(x+a) = f(x)$, 则 a 为函数的一个周期; (2) 若函数 $f(x)$ 对任意的 x 满足 $f(x+a) = -f(x+b)$, 则 $2|a-b|$ 为函数的一个周期.

学霸解题 · 技巧 天津大学 李一曦

由 $f(x)$ 为奇函数, 且定义域为 \mathbf{R} , 可知 $f(0) = 0$.

又 $f(1+x) = -f(x)$, $\therefore f(1) = 0$.

可大致画出图像如图所示.



\therefore 函数 $f(x)$ 的周期为 2, $\therefore f\left(\frac{5}{3}\right) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

13. $3\sqrt{2}$ 【命题点】平面向量数量积与模的运算

【解析】由 $|a-b| = 5$ 两边平方, 得 $|a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = 9 - 2 + |b|^2 = 7 + |b|^2 = 25$, 解得 $|b| = 3\sqrt{2}$.

14. 39π 【命题点】圆锥的体积与侧面积

【解析】设圆锥的高为 h , 则由圆锥的体积 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ (r 为底面半径), 得 $30\pi = \frac{1}{3}\pi \times 6^2 \times h$, 解得 $h = \frac{5}{2}$, 所以该圆锥的母

线 $l = \sqrt{h^2 + r^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6^2} = \frac{13}{2}$, 所以该圆锥的侧面积 $S =$

$$\pi r l = \pi \times 6 \times \frac{13}{2} = 39\pi.$$

15. $-\sqrt{3}$

思路导引 根据图像求出周期 $T \rightarrow$ 求得 ω 的值
 点 $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 的坐标代入函数解析式 \rightarrow 求得 φ 的值 \rightarrow 求得
 函数 $f(x)$ 的解析式 \rightarrow 代值求解.

【命题点】余弦型函数的图像与性质

【解析】设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T . 由图像知, $\frac{3}{4}T =$

$$\frac{13\pi}{12} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4}, \text{ 所以 } T = \pi = \frac{2\pi}{|\omega|}, \text{ 解得 } \omega = \pm 2. \text{ 当 } \omega = 2 \text{ 时, 由}$$

$$\text{点 } \left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ 在 } f(x) \text{ 的图像上得 } 2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}),$$

$$\text{解得 } \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \text{ 所以 } f(x) = 2\cos(2x + \varphi) =$$

$$2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right); \text{ 同理, 当 } \omega = -2 \text{ 时, } f(x) = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ 所以}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(2 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

方法速记 已知正弦型(或余弦型)函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ (或 $y = A\cos(\omega x + \varphi) + B$) ($A > 0, \omega > 0$) 的图像求解析式的步骤: (1) $A = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}, B = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2}$; (2) 由函数的周期 T 和 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ 求 ω ; (3) 利用图像中已知特殊点的坐标求 φ .

学霸解题·技巧 北京师范大学 吕彤

找相位, 避开求解析式.

根据题意可知周期 $T = \pi$, 所以 $\frac{\pi}{2}$ 为 $\frac{\pi}{3}$ 后 $\frac{1}{6}$ 个周期. 还原到

$$y = \cos x \text{ 上相当于 } \frac{\pi}{2} + \frac{1}{6} \times 2\pi = \frac{5}{6}\pi,$$

$$\text{所以 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

16. 8

思路导引

由椭圆方程求出 a, b, c $\xrightarrow{\text{题设条件}}$ 四边形 PF_1QF_2 为矩形 $\rightarrow PF_1 \perp PF_2 \xrightarrow{\text{勾股定理}} |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 48$
 $|PF_1| + |PF_2| = 8$ (椭圆的定义) $\rightarrow |PF_1| \cdot |PF_2| = 8 \rightarrow$ 求得结果.

【命题点】椭圆的定义、几何性质

【解析】由椭圆方程知 $a = 4, b = 2, c = 2\sqrt{3}$. 由 P, Q 关于坐标原点对称, F_1, F_2 关于坐标原点对称, 可知

四边形 PF_1QF_2 为平行四边形. 又因为 $|PQ| = |F_1F_2|$, 所以
突破点 四边形 PF_1QF_2 为矩形, 所以 $PF_1 \perp PF_2$. 所以在 $\text{Rt} \triangle F_1PF_2$ 中, 由勾股定理, 得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 4c^2 = 48$ ①.
 又由椭圆定义, 得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 8$ ②. 对②式平方, 得 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 + 2|PF_1||PF_2| = 64$ ③, 将①式代入③式, 得 $48 + 2|PF_1||PF_2| = 64$, 解得 $|PF_1||PF_2| = 8$, 所以四边形 PF_1QF_2 的面积 $S = |PF_1||PF_2| = 8$.

关键点拨 (1) 根据题设条件判断出四边形 PF_1QF_2 为矩形是本题的关键, 在处理椭圆的有关问题时, 注意灵活运用平面几何中的相关性质、常用结论等; (2) 在 $\text{Rt} \triangle F_1PF_2$ 中, 利用勾股定理结合椭圆的定义求得 $|PF_1||PF_2| = 8$.

17. 【命题点】频率及独立性检验

【解】 (1) 由题意可知, 甲机床生产的产品中一级品的频率为 $\frac{150}{200} = \frac{3}{4}$, 2 分

乙机床生产的产品中一级品的频率为 $\frac{120}{200} = \frac{3}{5}$ 4 分

(2) 由 $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 及题中表格数据可得,

$K^2 = \frac{400 \times (150 \times 80 - 120 \times 50)^2}{270 \times 130 \times 200 \times 200} \approx 10.26 > 6.635$, 10 分

所以有 99% 的把握认为甲机床的产品质量与乙机床的产品质量有差异. 12 分

18. 【命题点】等差数列的判断及通项与前 n 项和的关系

【证明】 设数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 的公差为 d (d 为常数).

因为 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, 所以当 $n \geq 2$ 时, $\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = d$.

因为 $a_2 = 3a_1$,

所以 $d = \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} = \sqrt{a_1 + a_2} - \sqrt{a_1} = \sqrt{a_1 + 3a_1} - \sqrt{a_1} = \sqrt{a_1}$ 4 分

于是, 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} - a_n = (S_{n+1} - S_n) - (S_n - S_{n-1})$

$= (\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n})(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}) - (\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})$

$= (\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n})\sqrt{a_1} - (\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})\sqrt{a_1}$

$= [(\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}) - (\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})]\sqrt{a_1}$

$= [(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}) + (\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})]\sqrt{a_1}$

$= 2a_1$ 10 分

又 $2a_1$ 为常数, 且当 $n = 1$ 时, $a_2 - a_1 = 2a_1$ 符合上式,

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列. 12 分

19. 【命题点】三棱锥的体积及空间直线垂直的证明

(1) **【解】** 因为在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $BB_1 \perp A_1B_1$,

又因为 $BF \perp A_1B_1$, 且 $BF \cap BB_1 = B$,

所以 $A_1B_1 \perp$ 侧面 B_1C_1CB 2 分

因为 $A_1B_1 \parallel AB$, 所以 $AB \perp$ 侧面 B_1C_1CB .

又 $BC \subset$ 侧面 B_1C_1CB , 所以 $AB \perp BC$ 3 分

因为 E, F 分别为 AC, CC_1 的中点, 侧面 AA_1B_1B 为正方形,

$AB=BC=2$, 所以 $CF=1$, 且 $S_{\triangle BEC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}AB \cdot$

$BC = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 1$.

所以三棱锥 $F-EBC$ 的体积 $V = \frac{1}{3}S_{\triangle BEC} \cdot CF = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3}$.

..... 6 分

(2) 【证明】取 BC 的中点 M , 连接

EM, B_1M, A_1E , 则 $EM \parallel AB \parallel A_1B_1$, 所

以 A_1, B_1, M, E 四点共面. 在正方形

B_1C_1CB 中, 由 $B_1B = CB, BM = CF$, 且

$\angle MBB_1 = \angle FCB = 90^\circ$, 所以 $\triangle FCB \cong$

$\triangle MBB_1$, 所以 $\angle CBF = \angle MB_1B$,

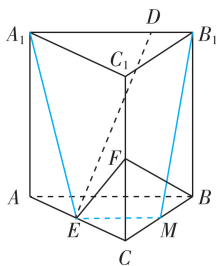
$\angle CFB = \angle B_1MB$, 所以 $\angle CBF + \angle B_1MB = 90^\circ$, 则 $BF \perp B_1M$.

..... 9 分

又因为 $BF \perp A_1B_1$, 且 $A_1B_1 \cap B_1M = B_1$,

所以 $BF \perp$ 平面 A_1EMB_1 .

又因为 $DE \subset$ 平面 A_1EMB_1 , 所以 $BF \perp DE$ 12 分



20. > 思路导引 (1) 求 $f'(x) \rightarrow f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

$f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

(2) $y=f(x)$ 的图像与 x 轴没有公共点 $\rightarrow f(x)_{\min} > 0 \rightarrow 3 +$

$3\ln a > 0 \rightarrow a \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$.

【命题点】利用导数研究函数的单调性及参数取值范围的求解

【解】(1) $f(x) = a^2x^2 + ax - 3\ln x + 1 (x > 0)$,

则 $f'(x) = 2a^2x + a - \frac{3}{x} = \frac{(2ax+3)(ax-1)}{x} (x > 0)$ 2 分

又 $a > 0$, 所以 $2ax+3 > 0$. 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = \frac{1}{a}$,

当 $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

..... 5 分

(2) 由 (1) 知 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{a}\right) = 3 + 3\ln a$.

又 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

所以若 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴没有公共点, 8 分

则 $f(x)_{\min} > 0$,

(由函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴没有公共点, 可知 $f(x)_{\min} > 0$ 或 $f(x)_{\max} < 0$, 结合(1)中 $f(x)$ 的单调性得到 $f(x)_{\min} > 0$ 是解决本题的关键)

即 $3+3\ln a > 0$, 得 $a > \frac{1}{e}$,

所以 a 的取值范围为 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 12 分

21. **思路导引** (1) 设 $y^2 = mx (m > 0) \longrightarrow P(1, \sqrt{m}), Q(1, -\sqrt{m}) \xrightarrow{OP \perp OQ} m = 1$;

(2) 列出直线 A_1A_2 (斜率存在时) 的方程

$\xrightarrow{\text{点到直线的距离公式}}$ 点 A_2 在直线 $(a^2-1)x+2ay+3-a^2=0$

上 $\xrightarrow{\text{同理}}$ 点 A_3 在直线 $(a^2-1)x+2ay+3-a^2=0$ 上 \longrightarrow 直线

A_2A_3 的方程为 $(a^2-1)x+2ay+3-a^2=0$

$\xrightarrow{\text{点到直线的距离公式}}$ 直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切; 直线 A_1A_2 (斜

率不存在) 的方程 $\xrightarrow{\odot M \text{ 与直线相切}}$ 点 A_1, A_2 的坐标

$\xrightarrow{\text{切线长定理}}$ 直线 A_1A_3 的方程 \longrightarrow 点 A_3 的坐标 \longrightarrow 直线 A_2A_3

的方程 $\xrightarrow{\text{点到直线的距离公式}}$ 直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切.

【命题点】 抛物线与圆的方程, 直线与圆的位置关系, 点到直线的距离公式

【解】 (1) 抛物线 C 的焦点在 x 轴上且与直线 $x=1$ 交于 P, Q 两点, 设抛物线 C 的方程为 $y^2 = mx (m > 0)$.

不妨设 $P(1, \sqrt{m}), Q(1, -\sqrt{m})$.

$\because OP \perp OQ, \therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$, 即 $1-m=0, \therefore m=1$,

\therefore 抛物线 C 的方程为 $y^2 = x$ 4 分

又 $\odot M$ 与 l 相切, 且 $M(2, 0), \therefore \odot M$ 的方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

..... 5 分

(2) 相切. 6 分

证明如下: 由题意可知点 A_1, A_2, A_3 均不与 P, Q 重合.

设 $A_1(a^2, a), A_2(x_1, y_1)$, 则有 $y_1^2 = x_1$.

当 $a+y_1 \neq 0$ 时, 直线 A_1A_2 的方程为 $y-a = \frac{y_1-a}{y_1^2-a^2}(x-a^2)$,

即 $y-a = \frac{1}{y_1+a}(x-a^2)$, 即 $x-a^2-(y_1+a)(y-a) = 0$.

\therefore 直线 A_1A_2 与 $\odot M$ 相切,

\therefore 圆心 $M(2, 0)$ 到直线 A_1A_2 的距离为 1,

即 $\frac{|2-a^2+a(y_1+a)|}{\sqrt{1+(y_1+a)^2}} = 1$, 8 分

（点到直线的距离公式：点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax + By + C = 0$ 的距离 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ）

$$\text{即 } (a^2 - 1)y_1^2 + 2ay_1 + 3 - a^2 = 0.$$

$$\text{又 } y_1^2 = x_1, \text{ 代入上式得 } (a^2 - 1)x_1 + 2ay_1 + 3 - a^2 = 0,$$

则点 A_2 在直线 $(a^2 - 1)x + 2ay + 3 - a^2 = 0$ 上.

同理可得当直线 A_1A_3 的斜率存在时, 点 A_3 也在直线 $(a^2 - 1)x + 2ay + 3 - a^2 = 0$ 上,

$$\therefore \text{直线 } A_2A_3 \text{ 的方程为 } (a^2 - 1)x + 2ay + 3 - a^2 = 0,$$

$$\text{则圆心 } M(2, 0) \text{ 到直线 } A_2A_3 \text{ 的距离为 } \frac{|2(a^2 - 1) + 3 - a^2|}{\sqrt{(a^2 - 1)^2 + (2a)^2}} =$$

$$\frac{a^2 + 1}{\sqrt{(a^2 + 1)^2}} = 1, \therefore \text{直线 } A_2A_3 \text{ 与 } \odot M \text{ 相切.} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

当 $a + y_1 = 0$ 时, 直线 A_1A_2 的方程为 $x = x_1$.

\therefore 直线 A_1A_2 与 $\odot M$ 相切, $\therefore x_1 = 3$. 不妨设 $A_1(3, \sqrt{3}), A_2(3, -\sqrt{3})$, 则 $|MA_1| = 2, \angle MA_1A_2 = 30^\circ$. \therefore 直线 A_1A_3 与 $\odot M$ 相切, $\therefore \angle A_2A_1A_3 = 60^\circ$. \therefore 直线 A_1A_3 的方程为 $y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 3)$, 即 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, \therefore 点 $A_3(0, 0)$. 此时直线 A_2A_3 的方程为 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$, 圆心 $M(2, 0)$ 到直线 A_2A_3 的距离为 1, \therefore 直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切.

综上, 直线 A_2A_3 与 $\odot M$ 相切. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 【命题点】极坐标方程与直角坐标方程的互化, 圆的参数方程及两圆的位置关系

【解】(1) 由 $\rho = 2\sqrt{2}\cos\theta$, 得 $\rho^2 = 2\sqrt{2}\rho\cos\theta$,

$$\therefore \rho^2 = x^2 + y^2, \rho\cos\theta = x,$$

$$\therefore x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x = 0, \text{ 即 } (x - \sqrt{2})^2 + y^2 = 2. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

(2) 设 $P(x, y)$.

$\therefore M$ 为 C 上的动点, \therefore 可设 $M(\sqrt{2} + \sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha)$.

$\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$\text{又 } A(1, 0), \therefore \overrightarrow{AP} = (x - 1, y), \overrightarrow{AM} = (\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}\cos\alpha, \sqrt{2}\sin\alpha).$$

$$\text{又 } \therefore \overrightarrow{AP} = \sqrt{2} \overrightarrow{AM}, \therefore \begin{cases} x - 1 = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1 + \sqrt{2}\cos\alpha), \\ y = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}\sin\alpha, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x = 3 - \sqrt{2} + 2\cos\alpha, \\ y = 2\sin\alpha, \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

\therefore 点 P 的轨迹 C_1 的参数方程为

$$\begin{cases} x = 3 - \sqrt{2} + 2\cos\alpha, \\ y = 2\sin\alpha \end{cases} \quad (\alpha \text{ 为参数}).$$

则曲线 C_1 是以 $(3-\sqrt{2}, 0)$ 为圆心, 半径 $r_1=2$ 的圆,

曲线 C 是以 $(\sqrt{2}, 0)$ 为圆心, 半径 $r_2=\sqrt{2}$ 的圆. 9 分

又 $|CC_1|=3-2\sqrt{2}<r_1-r_2=2-\sqrt{2}$,

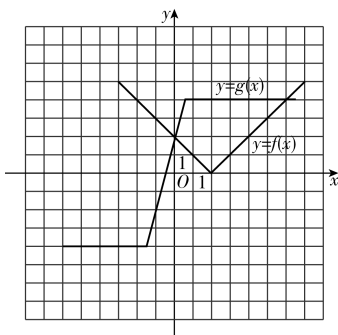
\therefore 圆 C 内含于圆 C_1 , C 与 C_1 无公共点. 10 分

23. 【命题点】含绝对值函数的图像及绝对值不等式的求解

【解】(1) $f(x) = \begin{cases} x-2, & x \geq 2, \\ 2-x, & x < 2, \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} 4, & x > \frac{1}{2}, \\ 4x+2, & -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -4, & x < -\frac{3}{2}, \end{cases}$$

画出函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图像如图所示. 5 分



(2) 由(1)中的图像可知, $y=f(x+a)$ 的图像可由 $y=f(x)$ 的图像向左($a>0$)或向右($a<0$)平移 $|a|$ 个单位长度得到, 且向右平移不符合题意. 7 分

向左平移 $y=f(x)$ 的图像易知当射线 $y=x+a-2(x \geq 2-a)$ 过

$y=g(x)$ 图像上的点 $(\frac{1}{2}, 4)$ 时为临界状态, 此时有 $4 = \frac{1}{2} +$

$a-2$, 解得 $a = \frac{11}{2}$. 因此, 若要满足题意, 则 $a \geq \frac{11}{2}$, 即所求 a

的取值范围为 $[\frac{11}{2}, +\infty)$ 10 分