

## 1. D 【命题点】复数的四则运算

【解析】 $i(2+3i) = 2i+3i^2 = -3+2i$ , 故选 D.

## 2. C 【命题点】集合的交集运算

【解析】因为集合  $A = \{1, 3, 5, 7\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$ , 所以  $A \cap B = \{3, 5\}$ . 故选 C.

## 3. B 【命题点】函数的图像

【解析】 $\because f(-x) = \frac{e^{-x}-e^x}{x^2} = -f(x)$ , 且  $x \neq 0$ ,  $\therefore f(x)$  为奇函数, 故排

除 A; 又令  $x=1$ , 则  $f(1) = \frac{e-1}{1} > 2$ , 故排除 C, D, 故选 B.

## 4. B 【命题点】平面向量的数量积

【解析】 $a \cdot (2a-b) = 2a^2 - a \cdot b = 2|a|^2 - a \cdot b = 2 \times 1 + 1 = 3$ , 故选 B.

## 5. D 【命题点】古典概型

【解析】从 2 名男同学和 3 名女同学中任选 2 人, 共有 10 个基本事件; 从 3 名女同学中任选 2 人, 共有 3 个基本事件. 设选中的 2 人都是女同学的事件为 A, 则  $P(A) = \frac{3}{10} = 0.3$ , 故选 D.

## 6. A 【命题点】双曲线的几何性质

【解析】因为双曲线的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \sqrt{3}$  (提示: 利用  $c^2 = a^2 + b^2$  将  $a, c$  的关系转化为  $a, b$  的关系), 所以  $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ . 所以

双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{2}x$ . 故选 A.

## 7. A 【命题点】利用二倍角公式, 余弦定理解三角形

【解析】 $\because \cos C = 2\cos^2 \frac{C}{2} - 1 = 2 \times \frac{1}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$ ,

$$\cos C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{1 + 25 - AB^2}{2 \times 5} = -\frac{3}{5},$$

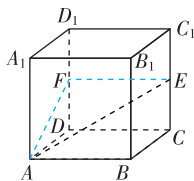
$\therefore AB = 4\sqrt{2}$ , 故选 A.

## 8. B 【命题点】程序框图

【解析】由题意知  $N = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{99}$ ,  $T = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{100}$ , 因此空白框中应填入  $i = i + 2$ . 故选 B.

## 9. C 【命题点】异面直线所成角

【解析】如图所示, 作出正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  及直线  $AE$ , 取  $DD_1$  的中点  $F$ , 连接  $EF, AF$ , 则  $CD \parallel EF$ , 则  $\angle AEF$  为异



面直线  $AE$  与  $CD$  所成的角.  $\because EF \perp$  平面  $ADD_1A_1$ , 且  $AF \subset$  平面  $ADD_1A_1$ ,  $\therefore EF \perp AF$ . 在  $Rt\triangle AEF$  中, 设  $EF = 2$ , 则  $AD = 2$ ,

$$DF=1, \therefore AF=\sqrt{AD^2+DF^2}=\sqrt{5},$$

$$\therefore \tan \angle AEF = \frac{AF}{EF} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 故选 C.}$$

### 10. C 【命题点】三角恒等变换, 正弦(余弦)型三角函数的单调性

【解析】 $f(x) = \cos x - \sin x = -\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ . 令  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq$

$$x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$\therefore f(x)$  的单调递减区间为  $\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$ . 又

$\therefore f(x)$  在  $[0, a]$  上是减函数,  $\therefore a$  的最大值为  $\frac{3\pi}{4}$ , 此时  $k=0$ ,

故选 C.

#### 一题多解

$$f(x) = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \text{ 令 } 2k\pi \leq$$

$$x + \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$\therefore f(x)$  的单调递减区间是  $\left[-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right], k \in \mathbf{Z}$ . 又

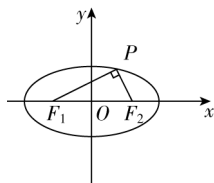
$\therefore f(x)$  在  $[0, a]$  上是减函数,  $\therefore a$  的最大值为  $\frac{3\pi}{4}$ , 此时  $k=0$ , 故

选 C.

### 11. D 【命题点】椭圆的定义、几何性质

【解析】如图所示作出椭圆, 不妨设

$F_1, F_2$  分别是椭圆的左、右焦点, 点  $P$  在第一象限. 因为  $PF_1 \perp PF_2$ , 所以  $\triangle PF_1F_2$  是直角三角形. 在



$\text{Rt} \triangle PF_1F_2$  中,  $\angle PF_2F_1 = 60^\circ, |F_1F_2| = 2c$ , 所以  $|PF_1| = \sqrt{3}c$ ,

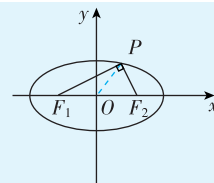
$|PF_2| = c$ . 由椭圆的定义可知  $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ , 即  $\sqrt{3}c + c =$

$2a$ , 则  $\frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1$ , 则  $C$  的离心率为  $\sqrt{3}-1$ . 故选 D.

#### 一题多解

不妨设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0), \text{ 点 } P \text{ 在第一象限,}$$



如图. 在  $\text{Rt} \triangle PF_1F_2$  中,  $\angle PF_2F_1 =$

$60^\circ$ , 连接  $OP$ , 可得  $\triangle OPF_2$  是等边三角形. 由  $|OF_2| = c$  得

$P\left(\frac{1}{2}c, \frac{\sqrt{3}}{2}c\right)$ , 把点  $P$  的坐标代入椭圆方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b >$

$0)$ , 得  $\frac{c^2}{a^2} + \frac{3c^2}{a^2 - c^2} = 4$ . 化简得  $e^2 + \frac{3e^2}{1 - e^2} = 4$ , 解得  $e^2 = 4 \pm 2\sqrt{3}$ . 因为

$0 < e < 1$ , 所以  $e^2 = 4 - 2\sqrt{3}$ . 故  $e = \sqrt{3} - 1$ , 故选 D.

### 12. C 【命题点】函数的奇偶性与周期性

【解析】由  $f(1-x) = f(1+x)$  得  $f(-x) = f(x+2)$ , 又  $f(x)$  为奇

函数, 则  $f(-x) = -f(x)$ , 所以  $f(x) = -f(x+2) = f(x+4)$ , 所以  $f(x)$  是周期为 4 的函数.

**关键**

由  $f(1) = 2$  知  $f(-1) = -2$ , 所以  $f(3) = -2$ ,

又  $f(x)$  为奇函数,  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 所以  $f(0) = 0$ .

又因为  $f(1-x) = f(1+x)$ , 令  $x = 1$ ,

所以  $f(0) = f(2) = 0, f(4) = 0$ ,

所以  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$ ,

$f(49) = f(1) = 2, f(50) = f(2) = 0$ ,

所以  $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(49) + f(50) = 12 \times [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(1) + f(2) = 12 \times 0 + 2 = 2$ . 故选 C.

### 13. $2x - y - 2 = 0$ 【命题点】导数的几何意义

【解析】设  $f(x) = 2 \ln x$ , 则  $f'(x) = \frac{2}{x}$ , 所以  $f'(1) = 2$ , 故切线

方程为  $y = 2(x - 1)$ , 即  $2x - y - 2 = 0$ .

### 14. 9 【命题点】线性规划

【解析】作出可行域如图中阴影部分所示,

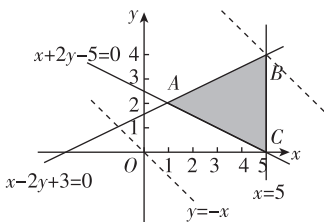
$$\text{联立} \begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ x + 2y - 5 = 0, \end{cases} \text{解得 } A(1, 2), \text{联立} \begin{cases} x = 5, \\ x - 2y + 3 = 0, \end{cases}$$

解得  $B(5, 4)$ .

由  $z = x + y$  得  $y = -x + z$ , 作出直线  $y = -x$ ,

平移直线  $y = -x$ , 易知当直线  $y = -x + z$  经过可行域内的点

$B(5, 4)$  时,  $z$  取得最大值, 且  $z_{\max} = 5 + 4 = 9$ .



**一题多解** 作出不等式组表示的平面区域, 如图中阴影部分所示,  $\triangle ABC$  的顶点坐标分别是  $A(1, 2)$ ,  $B(5, 4)$ ,  $C(5, 0)$ , 代入目标函数  $z = x + y$ , 可得  $z$  的值分别为 3, 9 和 5, 所以  $z = x + y$  的最大值是 9.

**方法速记** 求线性目标函数的最值一般有以下两种方法: (1) 通过平移目标函数所对应的直线, 借助目标函数的几何意义, 从而求出目标函数的最值, 此方法是最原始、最基本的方法, 称为“万能法”; (2) 分别求出可行域边界的顶点坐标 (如三角形的三个顶点坐标, 四边形的四个顶点坐标), 代入目标函数, 通过比较大小得到目标函数的最值, 此方法是最便捷的方法, 称为“简便法”.

### 15. $\frac{3}{2}$ 【命题点】诱导公式、两角差的正切公式

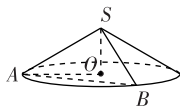
【解析】因为  $\tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}$ , 则  $\tan\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right) = -\frac{1}{5}$ , 即

$\tan \left[ \pi + \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right] = -\frac{1}{5}$ , 即  $\tan \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = -\frac{1}{5}$ . 由两角差的正切公式得  $\tan \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha} = -\frac{1}{5}$ , 解得  $\tan \alpha = \frac{3}{2}$ .

#### 16. $8\pi$ 【命题点】圆锥的体积

【解析】设圆锥的母线长为  $l$ ,  $\because SA \perp SB$ ,

$\therefore$  由  $\triangle SAB$  的面积为 8 可得  $\frac{1}{2}l \cdot l = 8$ ,



解得  $l = 4$ . 设  $O$  为  $S$  在底面的射影, 连接  $OA, OS$ , 则  $OA$  为底面圆的半径,  $SO$  为圆锥的高. 又  $\because \angle SAO = 30^\circ$ ,  $\therefore SO = 2$ ,

$OA = 2\sqrt{3}$ .  $\therefore V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot OA^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \times \pi \times 12 \times 2 = 8\pi$ .

#### 17. 【命题点】等差数列的通项公式、前 $n$ 项和

【解】(1) 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 由  $S_3 = -15$  得  $3a_1 + 3d = -15$ ,

..... 2 分

又  $a_1 = -7$ , 所以  $d = 2$ . .... 4 分

所以  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2n - 9$ . .... 6 分

(2) 由(1)得  $S_n = \frac{n(-7+2n-9)}{2} = n^2 - 8n = (n-4)^2 - 16$ . .... 8 分

所以当  $n = 4$  时,  $S_n$  取得最小值, 最小值为  $-16$ . .... 12 分

#### 18. 【命题点】利用线性回归模型进行预测, 模型拟合效果分析

【解】(1) 利用模型①, 得该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为  $\hat{y} = -30.4 + 13.5 \times 19 = 226.1$  (亿元).

利用模型②, 得该地区 2018 年的环境基础设施投资额的预测值为  $\hat{y} = 99 + 17.5 \times 9 = 256.5$  (亿元). .... 4 分

(2) 利用模型②得到的预测值更可靠.

理由如下:

(i) 从折线图可以看出, 2000 年至 2016 年的数据对应的点没有随机散布在直线  $\hat{y} = -30.4 + 13.5t$  上下, 这说明利用 2000 年至 2016 年的数据建立的线性模型①不能很好地描述环境基础设施投资额的变化趋势. 2010 年相对 2009 年的环境基础设施投资额有明显增加, 2010 年至 2016 年的数据对应的点位于一条直线的附近, 这说明从 2010 年开始环境基础设施投资额的变化规律呈线性增长趋势, 利用 2010 年至 2016 年的数据建立的线性模型  $\hat{y} = 99 + 17.5t$  可以较好地描述 2010 年以后的环境基础设施投资额的变化趋势, 因此利用模型②得到的预测值更可靠. .... 8 分

(ii) 从计算结果看, 相对于 2016 年的环境基础设施投资额 220 亿元, 由模型①得到的预测值 226.1 亿元的增幅明显偏低, 而利用模型②得到的预测值的增幅比较合理, 说明利用模型②得到的预测值更可靠. .... 12 分

(以上给出了 2 种理由, 答出其中任意一种或其他合理理由均可)

#### 19. 【命题点】空间中的线面垂直, 点到平面的距离

(1) 【证明】因为  $AP = CP = AC = 4$ ,  $O$  为  $AC$  的中点,

所以  $OP \perp AC$ , 且  $OP = 2\sqrt{3}$ . ..... 2分

连接  $OB$ , 因为  $AB = BC = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$ , 所以

$\triangle ABC$  为等腰直角三角形, 且  $OB \perp$

$AC$ ,  $OB = \frac{1}{2}AC = 2$ . ..... 4分

由  $OP^2 + OB^2 = PB^2$  知,  $OP \perp OB$ .

由  $OP \perp OB$ ,  $OP \perp AC$ ,  $OB \cap AC = O$ , 知  $PO \perp$  平面  $ABC$ .

..... 6分

(2)【解】作  $CH \perp OM$ , 垂足为  $H$ .

(找过点  $C$  的平面  $POM$  的垂线: 由(1)可知平面  $POM \perp$  平面  $ABC$ , 过点  $C$  作两平面交线  $OM$  的垂线  $CH$ , 则  $CH$  为平面  $POM$  的垂线)

又由(1)可得  $OP \perp CH$ , 且  $OP \cap OM = O$ , 所以  $CH \perp$  平面  $POM$ , 故  $CH$  的长为点  $C$  到平面  $POM$  的距离. .... 8分

由题设可知  $OC = \frac{1}{2}AC = 2$ ,  $CM = \frac{2}{3}BC = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ,  $\angle ACB = 45^\circ$ ,

..... 9分

所以在  $\triangle OCM$  中, 由余弦定理可求得  $OM = \frac{2\sqrt{5}}{3}$ , 则  $CH =$

$\frac{OC \cdot MC \cdot \sin \angle ACB}{OM} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ , ..... 11分

所以点  $C$  到平面  $POM$  的距离为  $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ . ..... 12分

**关键点拨** 由  $\triangle APC$  是等边三角形可得  $OP \perp AC$ , 连接  $OB$ , 根据已知数量关系及勾股定理的逆定理可得  $OP \perp OB$ , 然后由线面垂直的判定定理可证结论成立.

## 20. 【命题点】抛物线的几何性质, 圆的方程

【解】(1) 由题意得  $F(1, 0)$ ,  $l$  的方程为  $y = k(x-1)$  ( $k > 0$ ).

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ .

由  $\begin{cases} y = k(x-1), \\ y^2 = 4x \end{cases}$  得  $k^2x^2 - (2k^2+4)x + k^2 = 0$ ,

$\Delta = 16k^2 + 16 > 0$ , 故  $x_1 + x_2 = \frac{2k^2+4}{k^2}$ , ..... 3分

所以  $|AB| = |AF| + |BF| = (x_1+1) + (x_2+1) = \frac{4k^2+4}{k^2}$ . ..... 4分

由题设知  $\frac{4k^2+4}{k^2} = 8$ , 解得  $k = 1$  或  $k = -1$  (舍), ..... 5分

因此  $l$  的方程为  $y = x - 1$ . ..... 6分

(2) 由(1)得  $AB$  的中点坐标为  $(3, 2)$ , 所以  $AB$  的垂直平分线的方程为  $y - 2 = -(x - 3)$ , 即  $y = -x + 5$ . .... 7分

设所求圆的圆心坐标为  $(x_0, y_0)$ ,

则  $\begin{cases} y_0 = -x_0 + 5, \\ (x_0 + 1)^2 = \frac{(x_0 - y_0 - 1)^2}{2} + 16. \end{cases}$  ..... 8分

解得  $\begin{cases} x_0=3, \\ y_0=2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x_0=11, \\ y_0=-6. \end{cases}$  ..... 10 分

因此所求圆的方程为  $(x-3)^2+(y-2)^2=16$  或  $(x-11)^2+(y+6)^2=144$ . ..... 12 分

## 21. 【命题点】导数与函数的单调性、零点

(1) 【解】当  $a=3$  时,  $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2-3x-3, f'(x)=x^2-6x-3$ .

令  $f'(x)=0$  解得  $x=3-2\sqrt{3}$  或  $x=3+2\sqrt{3}$ . ..... 2 分

当  $x \in (-\infty, 3-2\sqrt{3}) \cup (3+2\sqrt{3}, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ;

当  $x \in (3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$  时,  $f'(x) < 0$ , ..... 4 分

故  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, 3-2\sqrt{3}), (3+2\sqrt{3}, +\infty)$ ,  
单调递减区间为  $(3-2\sqrt{3}, 3+2\sqrt{3})$ . ..... 6 分

(2) 【证明】因为  $x^2+x+1 > 0$ , 所以  $f(x)=0$  等价于  $\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a=0$ . ..... 7 分

设  $g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a$ , 则  $g'(x)=\frac{x^2(x^2+2x+3)}{(x^2+x+1)^2} \geq 0$ , 当且仅当  $x=0$

时  $g'(x)=0$ , 所以  $g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增. .... 9 分

故  $g(x)$  至多有一个零点, 从而  $f(x)$  至多有一个零点.

..... 10 分

又  $f(3a-1)=-6a^2+2a-\frac{1}{3}=-6\left(a-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{6} < 0$ ,

$f(3a+1)=\frac{1}{3} > 0$ , 故  $f(x)$  有一个零点. .... 11 分

综上,  $f(x)$  只有一个零点. .... 12 分

## 22. 【命题点】参数方程与普通方程的互化, 参数方程的应用

【解】(1) 曲线  $C$  的直角坐标方程为  $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$ , ..... 1 分

当  $\cos \alpha \neq 0$  时, 直线  $l$  的直角坐标方程为  $y=\tan \alpha \cdot x+2-\tan \alpha$ , ..... 3 分

当  $\cos \alpha=0$  时, 直线  $l$  的直角坐标方程为  $x=1$ . .... 5 分

(2) 将  $l$  的参数方程代入  $C$  的直角坐标方程, 整理得关于  $t$  的方程  $(1+3\cos^2 \alpha)t^2+4(2\cos \alpha+\sin \alpha)t-8=0$ . ① ..... 6 分

因为曲线  $C$  截直线  $l$  所得线段的中点  $(1, 2)$  在曲线  $C$  内, 所以①有两个解, 分别设为  $t_1, t_2$ , ..... 7 分

则  $t_1+t_2=0$ . .... 8 分

又由①得  $t_1+t_2=-\frac{4(2\cos \alpha+\sin \alpha)}{1+3\cos^2 \alpha}$ , 故  $2\cos \alpha+\sin \alpha=0$ ,

..... 9 分

于是直线  $l$  的斜率  $k=\tan \alpha=-2$ . .... 10 分

23. 【命题点】解含绝对值的不等式,不等式恒成立求参数

【解】(1) 当  $a=1$  时,  $f(x)=\begin{cases} 2x+4, & x\leqslant -1, \\ 2, & -1<x\leqslant 2, \\ -2x+6, & x>2. \end{cases}$

当  $x\leqslant -1$  时, 令  $2x+4\geqslant 0$  得  $x\geqslant -2$ , 则  $-2\leqslant x\leqslant -1$ ;

当  $-1<x\leqslant 2$  时,  $f(x)\geqslant 0$  恒成立;

当  $x>2$  时, 令  $-2x+6\geqslant 0$  得  $x\leqslant 3$ , 则  $2<x\leqslant 3$ .

综上可得  $f(x)\geqslant 0$  的解集为  $\{x|-2\leqslant x\leqslant 3\}$ . ..... 5 分

(2)  $f(x)\leqslant 1$  等价于  $|x+a|+|x-2|\geqslant 4$ ,

而  $|x+a|+|x-2|\geqslant |a+2|$ , 且当  $x=2$  时等号成立,

故  $f(x)\leqslant 1$  等价于  $|a+2|\geqslant 4$ . ..... 8 分

由  $|a+2|\geqslant 4$  可得  $a\leqslant -6$  或  $a\geqslant 2$ .

所以  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -6]\cup[2, +\infty)$ . ..... 10 分