

1. A 【命题点】复数的四则运算及几何意义

【解析】因为 $\frac{2-i}{1-3i} = \frac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, 所以在复平面内, 复数 $\frac{2-i}{1-3i}$ 对应的点位于第一象限, 故选 A.

2. B 【命题点】集合的交集和补集运算

【解析】由题可得 $\complement_U B = \{1, 5, 6\}$, 所以 $A \cap (\complement_U B) = \{1, 6\}$. 故选 B.

3. B 【命题点】点到直线的距离及抛物线的焦点坐标

【解析】抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 由题意, 得

$$\frac{\left|\frac{p}{2} + 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}, \text{ 解得 } p = 2. \text{ 故选 B.}$$

4. C 【命题点】解三角形在实际生活中的应用

【解析】由题意可知, $\cos \alpha = \frac{r}{r+36\,000} = \frac{6\,400}{6\,400+36\,000} \approx 0.15$,

所以从同步卫星上可望见的地球的表面积 $S = 2\pi r^2(1 - \cos \alpha) \approx 2\pi r^2(1 - 0.15)$, 此表面积与地球表面积之比约为

$$\frac{2\pi r^2(1-0.15)}{4\pi r^2} = \frac{0.85}{2} = 0.425, \text{ 故选 C.}$$

5. D 【命题点】棱台的体积

【解析】将正四棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 补成棱锥 $P-ABCD$, 作

$PO \perp$ 底面 $ABCD$ 于 O , 交平面 $A_1B_1C_1D_1$ 于 O_1 , 则棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 的体积 $V = V_{P-ABCD} - V_{P-A_1B_1C_1D_1}$. 由题意,

$$\frac{PA_1}{PA} = \frac{PO_1}{PO} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \text{ 易知, } PA = 4, AO = 2\sqrt{2}, \text{ 而 } PO =$$

$$\sqrt{PA^2 - AO^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}, \text{ 所以 } PO_1 = \sqrt{2}, \text{ 则 } V_{P-ABCD} =$$

$$\frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 2\sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}}{3}, V_{P-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3} \times (2 \times 2) \times \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}, \text{ 所}$$

$$\text{以棱台 } A_1B_1C_1D_1-ABCD \text{ 的体积 } V = V_{P-ABCD} - V_{P-A_1B_1C_1D_1} = \frac{32\sqrt{2}}{3} -$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{28\sqrt{2}}{3}, \text{ 故选 D.}$$

6. D 【命题点】正态分布的性质

【解析】对于 A, σ 越小, 代表正态曲线越陡, 故 A 正确; 对于 B, 测量结果服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$, 则正态曲线的对称轴为直线 $x = 10$, 故 B 正确; 对于 C, 结合正态曲线可知 $x = 10.01$ 与 $x = 9.99$ 关于对称轴(直线 $x = 10$)对称, 故 C 正确; 对于 D, 结合正态曲线可知, 区间 $(9.9, 10.2)$ 与 $(10, 10.3)$ 不关于对称轴(直线 $x = 10$)对称, 故 D 错误. 故选 D.

7. C 【命题点】对数式比较大小

【解析】因为 $a = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} = c, b = \log_8 3 > \log_9 3 = \frac{1}{2} = c$, 所以

以 $b > c > a$. 故选 C.

8. B 【命题点】函数的奇偶性、周期性和函数图像的对称性

【解析】因为函数 $f(x+2)$ 为偶函数, 所以其图像关于 y 轴对称, 则函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称; 又函数 $f(2x+1)$ 为奇函数, 所以其图像关于点 $(0,0)$ 对称, 将函数 $y=f(2x+1)$

的图像向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度, 得到函数 $y =$

$f\left(2\left(x-\frac{1}{2}\right)+1\right)=f(2x)$ 的图像且函数 $f(2x)$ 的图像关于点

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 对称, 再将所得函数图像上所有点的横坐标伸长到原来

的 2 倍, 得到函数 $y=f(x)$ 的图像, 且函数 $y=f(x)$ 的图像关于点

$(1,0)$ 对称, 所以函数 $y=f(x)$ 的图像既关于直线 $x=2$ 对称, 又关于

点 $(1,0)$ 对称, 所以 4 为函数 $y=f(x)$ 的一个周期. 又 $f(1)=0$,

所以 $f(-1)=f(-1+4)=f(3)=f(1)=0$, 故选 B.

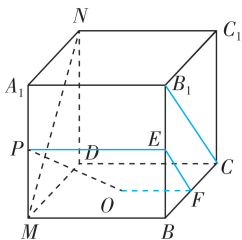
快解 因为函数 $f(2x+1)$ 为奇函数, 所以 $f(2 \times 0 + 1) = f(1) = 0$. 因为 $f(1) = f(-1+2)$, 函数 $f(x+2)$ 为偶函数, 所以 $f(-1+2) = f(1+2) = f(3) = 0$. 因为 $f(3) = f(2 \times 1 + 1)$, 函数 $f(2x+1)$ 为奇函数, 所以 $f(2 \times (-1) + 1) = f(-1) = -f(2 \times 1 + 1) = 0$. 故选 B.

9. AC 【命题点】样本的数字特征

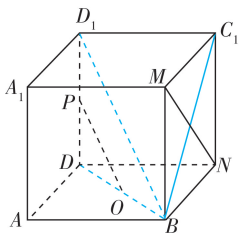
【解析】平均数和中位数反映的是一组数据的平均水平, 标准差和极差则体现了一组数据的离散程度. 故选 AC.

10. BC 【命题点】直线与直线的位置关系

【解析】对于 A, 取 MN 的中点为 O_1 , 连接 OO_1 , 易知 $OO_1 \perp MN$, OO_1 不与 OP 平行, 且 MN, OP 在同一平面内, $\therefore MN$ 与 OP 不垂直, 故 A 错误. 对于 B, 如图①, 取 BB_1 的中点 E , BC 的中点 F , 连接 PE, OF, EF, B_1C , 则 P, O, F, E 四点共面. $\because E, F$ 分别为 BB_1, BC 的中点, $\therefore EF \parallel B_1C$. 易知 $B_1C \perp MN$, $\therefore MN \perp EF$. 又易知 $OF \perp$ 平面 BB_1C_1C , $\therefore OF \perp MN$. 又 $EF \cap OF = F, EF, OF \subset$ 平面 $PEFO$, $\therefore MN \perp$ 平面 $PEFO$, 又 $PO \subset$ 平面 $PEFO$, $\therefore MN \perp PO$, 故 B 正确.



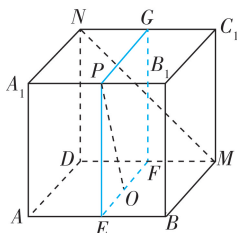
图①



图②

对于 C, 如图②, 连接 BD, BC_1, BD_1 . $\because O$ 为下底面的中心, \therefore 点 O 在 BD 上且为 BD 中点, $\therefore OP \parallel BD_1$.

又 $BC_1 \cap D_1C_1 = C_1, BC_1, D_1C_1 \subset$ 平面 $BC_1D_1, \therefore MN \perp$ 平面 $BC_1D_1, \therefore MN \perp BD_1, \therefore OP \perp MN$, 故 C 正确.



冬③

对于 D,如图③,取 AB, DM, NC_1 的中点分别为 E, F, G ,连接 PE, PG ,

EF, GF , 则点 O 在 EF 上, P, E, F, G 四点共面. 由正方体的性质可知 $PG \perp$ 平面 MC_1ND , 则 $PG \perp MN$, 假设 $MN \perp OP$, 又 $PG \cap OP = P, \therefore MN \perp$ 平面 $PEFG, PG, OP \subset$ 平面 $PEFG$, $\therefore MN \perp GF$. 易知 MN 与 GF 不垂直, 则假设不成立. 故 **D** 错误.

【解析】圆心 $(0,0)$ 到直线 $ax+by-r^2=0$ 的距离 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

若点 A 在圆上, 则 $a^2 + b^2 = r^2$, 则 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{r^2}{|r|} = |r|$, 所以

直线 l 与圆 C 相切,故 A 正确;若点 A 在圆内,则 $a^2+b^2 < r^2$,

则 $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}} > \frac{r^2}{|r|} = |r|$, 所以直线 l 与圆 C 相离, 故 **B** 正

确;若点 A 在圆外,则 $a^2+b^2>r^2$, 则 $d=\frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}<\frac{r^2}{|r|}=|r|$, 所

以直线 l 与圆 C 相交,故 **C** 错误;若点 A 在直线 l 上,则 $a^2+b^2-r^2=0$,即 $a^2+b^2=r^2$,则点 A 也在圆 C 上, $d=|r|$,所以直线 l 与圆 C 相切,故 **D** 正确.

【解析】 $n = a_0 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + \cdots + a_{k-1} \times 2^{k-1} + a_k \times 2^k$, 假设 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k$ 中有 m 个 1 ($m \neq 0$), 则 $w(n) = m$. 又 $2n = a_0 \times 2^1 + a_1 \times 2^2 + \cdots + a_{k-1} \times 2^k + a_k \times 2^{k+1}$, 则 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k$ 中也有 m 个 1, 则 $w(2n) = m$, 故 A 正确; 当 $n = 2$ 时, $2n + 3 = 7, 7 = 1 + 2 + 2^2$, 所以 $w(7) = 3$, 又 $w(2) = 1$, 所以 $w(7) \neq w(2) + 1$, 故 B 错误; $w(8n + 5) = w(8n + 4 + 1) = w(8n + 4) + 1, w(4n + 3) = w(4n + 2 + 1) = w(4n + 2) + 1$, 由 A 知, $w(2n) = w(n)$, 所以 $w(8n + 4) = w(4n + 2)$, 所以 $w(8n + 5) = w(4n + 3)$, 故 C 正确; 因为 $2^n - 1 = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$, 所以 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}, a_k$ 中有 n 个 1, 所以 $w(2^n - 1) = n$, 故 D 正确. 故选 ACD.

学霸解题·技巧 南开大学 姜明宇

$w(n)$ 表示 n 的二进制各位上的数字和, 而选项 A, B, C 中 n 的系数均为 2 的整数次幂, 因此可设 n 的二进制为 X .

A. $2n$ 的二进制为在 X 后面加 0 即 $\overline{X0}$, 各位和不变, $w(2n) = w(n)$, 正确.

B. $2n$ 对应 $\overline{X0}$, 但 $(2n+3)$ 会影响 X 的最后一位, 所以 $w(2n+3) \neq w(2n)+1 = w(n)+1$, 错误.

C. $4n$ 对应 $\overline{X00}$, $(4n+3)$ 对应 $\overline{X11}$, $w(4n+3) = w(4n) + 2$;

$8n$ 对应 $\overline{X000}$, $(8n+5)$ 对应 $\overline{X101}$, $w(8n+5) = w(8n) + 2 = w(4n) + 2$. 所以 $w(8n+5) = w(4n+3)$, 正确.

13. $y = \sqrt{3}x$ $y = -\sqrt{3}x$ 【命题点】双曲线的几何性质

【解析】双曲线 C 的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2$, 所以 $\frac{b}{a} =$

$\sqrt{3}$, 所以双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \sqrt{3}x$, $y = -\sqrt{3}x$.

14. $f(x) = x^2$ (答案不唯一) 【命题点】函数的奇偶性和单调性、导数的应用

【解析】由条件②可知, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 由条件③可知, $f(x)$ 可能为偶函数, 再结合条件①, 可构造函数 $f(x) = x^2$ 等.

15. $-\frac{9}{2}$ 【命题点】平面向量的数量积运算

【解析】由 $a+b+c=0$, 得 $a=-b-c$, 所以 $a^2 = (-b-c)^2 = b^2 +$

$2b \cdot c + c^2$, 所以 $1^2 = 2^2 + 2b \cdot c + 2^2$, 解得 $b \cdot c = -\frac{7}{2}$. 由 $a+b+$

$c=0$, 得 $b=-a-c$, 所以 $b^2 = (-a-c)^2 = a^2 + 2a \cdot c + c^2$, 所以

$2^2 = 1^2 + 2a \cdot c + 2^2$, 解得 $a \cdot c = -\frac{1}{2}$. 同理可得 $a \cdot b = -\frac{1}{2}$. 所

以 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$.

学霸解题 · 技巧 北京大学 李安

技巧一: 由题干 $a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c$, 可想到完全平方公式 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac)$, 易证此公式对向量数量积也

适用. 所以 $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$, 令

$a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = x$, 则 $0 = 1 + 4 + 4 + 2x$, 所以 $x = -\frac{9}{2}$.

技巧二: 对 $a+b+c=0$ 移项, 可得 $a=-(b+c)$,

于是作图,

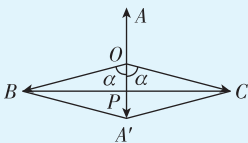
如图, $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$, $\overrightarrow{OC} = c$, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

易知四边形 $OBA'C$ 是菱形,

所以 $OP = \frac{1}{2}$, 所以 $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = -\frac{7}{8}$.

则 $a \cdot b = -\frac{1}{2}$, $b \cdot c = -\frac{7}{2}$, $a \cdot c = -\frac{1}{2}$,

所以 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$.



思路导引

$$\begin{array}{l}
 x < 0 \text{ 时 } -f(x) = 1 - e^x \rightarrow f'(x) \rightarrow \text{过点 } A \text{ 的切线的斜率} \\
 x > 0 \text{ 时 } -f(x) = e^x - 1 \rightarrow f'(x) \rightarrow \text{过点 } B \text{ 的切线的斜率} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \text{过点 } A(x_1, 1 - e^{x_1}) \text{ 的切线方程} \xrightarrow{\text{令 } x=0} \text{点 } M \text{ 的坐标} \rightarrow |AM| \\
 \text{过点 } B(x_2, e^{x_2} - 1) \text{ 的切线方程} \xrightarrow{\text{令 } x=0} \text{点 } N \text{ 的坐标} \rightarrow |BN|
 \end{array} \right\} \rightarrow \\
 \frac{|AM|}{|BN|} = e^{x_1} \rightarrow \frac{|AM|}{|BN|} \text{ 的取值范围}
 \end{array}$$

【命题点】利用导数的几何意义求切线方程及取值范围问题

【解析】画出 $f(x) = |e^x - 1|$ 的图像, 如图所示, 由题意知两条切线的斜率存在且不为零.

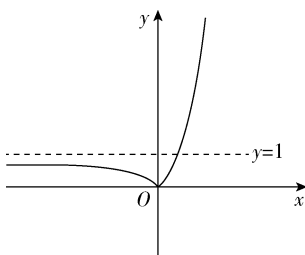
当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) =$

$1 - e^x$, $f'(x) = -e^x$, 过点

$A(x_1, f(x_1))$ 的切线斜率

$k_1 = f'(x_1) = -e^{x_1}$; 当 $x \in (0,$

$+\infty)$ 时, $f(x) = e^x - 1$,



$f'(x) = e^x$, 过点 $B(x_2, f(x_2))$ 的切线斜率 $k_2 = f'(x_2) = e^{x_2}$. 因

为两条切线互相垂直, 所以 $k_1 k_2 = -1$ (提示: 两直线垂直的应

用), 即 $(-e^{x_1})e^{x_2} = -1$, 即 $e^{x_1+x_2} = 1$, 所以 $x_1 + x_2 = 0$. 过点 $A(x_1,$

$1 - e^{x_1})$ 的切线方程为 $y - (1 - e^{x_1}) = -e^{x_1}(x - x_1)$, 令 $x = 0$, 则

$M(0, 1 - e^{x_1} + x_1 e^{x_1})$; 过点 $B(x_2, e^{x_2} - 1)$ 的切线方程为 $y -$

$(e^{x_2} - 1) = e^{x_2}(x - x_2)$, 令 $x = 0$, 则 $N(0, e^{x_2} - 1 - x_2 e^{x_2})$, 则 $|AM| =$

$\sqrt{x_1^2 + x_1^2 e^{2x_1}}$, $|BN| = \sqrt{x_2^2 + x_2^2 e^{2x_2}} = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 e^{-2x_1}}$, 所以 $\frac{|AM|}{|BN|} =$

$\frac{\sqrt{x_1^2 + x_1^2 e^{2x_1}}}{\sqrt{x_1^2 + x_1^2 e^{-2x_1}}} = \sqrt{\frac{1 + e^{2x_1}}{1 + e^{-2x_1}}} = e^{x_1}$. 因为 $x_1 < 0$, 所以 $0 < e^{x_1} < 1$, 所以

$\frac{|AM|}{|BN|}$ 的取值范围为 $(0, 1)$.

一题多解

当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, $f'(x) = e^x$, 所以 $k_{BN} =$

e^{x_2} , 同理可得 $k_{AM} = -e^{x_1}$. 因为两条切线互相垂直, 所以 $e^{x_2} \cdot$

$(-e^{x_1}) = -1$, 所以 $x_1 + x_2 = 0$. 所以 $\frac{|AM|}{|BN|} = \frac{\sqrt{1 + k_{AM}^2} |0 - x_1|}{\sqrt{1 + k_{BN}^2} |x_2 - 0|} =$

$\frac{1}{e^{x_2}}$ (提示: 弦长公式的应用), 因为 $x_2 > 0$, 所以 $0 < \frac{1}{e^{x_2}} < 1$, 即

$\frac{|AM|}{|BN|}$ 的取值范围是 $(0, 1)$.

学霸解题 · 技巧 天津大学 李一曦

本题也可利用 $AM \perp BN$, 将 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 转化为 $\frac{y_A - y_M}{x_B}$, 从而简化

运算.

17. 【命题点】等差数列的通项公式,与前 n 项和有关的不等式的求解

【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d \neq 0)$,

$$\text{则} \begin{cases} a_1 + 2d = 5a_1 + 10d, \\ (a_1 + d)(a_1 + 3d) = 4a_1 + 6d, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a_1 = -4, \\ d = 2, \end{cases} \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

则 $a_n = -4 + (n-1) \times 2 = 2n-6$. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 结合(1)可知, $S_n = -4n + \frac{n(n-1) \times 2}{2} = n^2 - 5n$,

则 $S_n > a_n$ 等价于 $n^2 - 5n > 2n - 6$, $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

解得 $n < 1$ 或 $n > 6$, 又 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $n \geq 7$,

故使 $S_n > a_n$ 成立的 n 的最小值为 7. $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

一题多解

(1) 由 $a_3 = S_5 = \frac{5(a_1 + a_5)}{2} = 5a_3$, 解得 $a_3 = 0$,

则 $S_4 = \frac{4(a_1 + a_4)}{2} = 2(a_2 + a_3) = 2a_2$, 因此 $a_2 a_4 = 2a_2$. 因为数列

$\{a_n\}$ 的公差为 0, 所以 $a_2 \neq 0$, 则 $a_4 = 2$, $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

因此数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $a_4 - a_3 = 2$, 从而 $a_n = 0 + (n-3) \times 2 =$

$2n-6$. $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 因为 $S_1 = a_1$, 所以由 $S_n > a_n$ 得 $n \geq 2$, 且 $S_n - a_n > 0$, 即

$S_{n-1} > 0$, 则 $S_{n-1} = \frac{(a_1 + a_{n-1})(n-1)}{2} > 0$, 则 $a_1 + a_{n-1} = -4 + 2(n-$

$1) - 6 > 0$, 解得 $n > 6$. $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

又 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以使得 $S_n > a_n$ 的 n 的最小值为 7. $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

18. 【命题点】利用正弦定理、余弦定理解三角形

【解】(1) 由正弦定理知 $2c = 3a$, 联立 $c = a + 2$, 解得 $\begin{cases} a = 4, \\ c = 6, \end{cases}$ 则

$b = a + 1 = 5$. $\dots\dots\dots 2 \text{分}$

由余弦定理可知 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{8}$, $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8}$, $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{15\sqrt{7}}{4}$. $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

(2) 因为 $c = a + 2 = b + 1$, 所以 $c > b > a$,

因此若存在正整数 a , 使得 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 则角 C 为钝角,

因此只需满足 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0$, 即 $a^2 + b^2 < c^2$, $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

则 $a^2 + (a+1)^2 < (a+2)^2$,

化简得 $a^2 - 2a - 3 < 0$, 解得 $-1 < a < 3$. $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

因为 a 为正整数, 所以 a 可取 1, 2.

(易错: 本题容易求出正整数 a 的值后忽视检验, 其中不满足三角形三边关系的情况要删去)

当 $a=1$ 时, $\triangle ABC$ 的三边的长度分别为 1, 2, 3, 此时不满足三角形的三边关系, 即该三角形不存在; 10 分

当 $a=2$ 时, $\triangle ABC$ 的三边的长度分别为 2, 3, 4, 满足题意.

因此当 $a=2$ 时, $\triangle ABC$ 为钝角三角形. 12 分

19. 【命题点】空间中平面与平面垂直的判定、二面角余弦值的求解

(1) 【证明】如图, 取 AD 中点 E , 连接 EQ, EC .

因为 $QA=QD=\sqrt{5}$, 所以 $QE \perp AD$.

在正方形 $ABCD$ 中, $AD=2$, 则

$QE=2$, 且 $EC=\sqrt{5}$, 此时 $EQ^2+EC^2=9=QC^2$, 则 $QE \perp EC$ 3 分

又 $EC \cap AD = E$, $EC, AD \subset$

平面 $ABCD$, 所以 $QE \perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $QE \subset$ 平面 QAD ,

所以平面 $QAD \perp$ 平面 $ABCD$ 5 分

(2) 【解】由(1)知 $QE \perp$ 平面 $ABCD$, 因此以点 E 为原点, 建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$, 则 $B(2, -1, 0)$,

$D(0, 1, 0), Q(0, 0, 2)$,

$\overrightarrow{BD}=(-2, 2, 0), \overrightarrow{DQ}=(0, -1, 2)$ 6 分

设平面 BDQ 的法向量 $\mathbf{n}_1=(x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{DQ} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} y = x, \\ y = 2z, \end{cases}$$

取 $z=1$, 得 $x=y=2$, 则 $\mathbf{n}_1=(2, 2, 1)$ 8 分

易知平面 AQD 的一个法向量 $\mathbf{n}_2=(1, 0, 0)$,

$$\text{则} \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{2}{3}, \text{ 10 分}$$

由图可知二面角 $B-QD-A$ 为锐角, 11 分

因此二面角 $B-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$ 12 分

一题多解

(1) 【证明】在 $\triangle QCD$ 中, $QD^2+CD^2=9=QC^2$, 所以 $CD \perp QD$ 2 分

因为底面 $ABCD$ 为正方形, 所以 $CD \perp AD$.

又 $AD \cap QD = D$, $AD, QD \subset$ 平面 QAD , 所以 $CD \perp$ 平面 QAD .

因为 $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $QAD \perp$ 平面 $ABCD$ 5 分

(2) 【解】如图, 取 AD 的中点 E , 连接

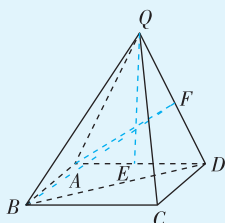
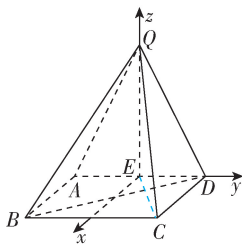
QE . 过点 A 作 $AF \perp QD$ 交 QD 于点 F ,

连接 BF . 在等腰三角形 AQD 中, 因为

$QA=\sqrt{5}, AD=2$, 所以 $QE=2$. 利用等面

$$\text{积法可得} AF = \frac{QE \cdot AD}{QD} = \frac{2 \times 2}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{则} QF = \sqrt{QA^2 - AF^2} = \sqrt{5 - \frac{16}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}. \text{ 8 分}$$



结合(1)易得 $AB \perp$ 平面 QAD , 则 $AB \perp AQ, AB \perp AF$, 因此 $BQ=3$. 在 $\triangle BQD$ 中利用余弦定理可得 $\cos \angle BQD = \frac{BQ^2 + QD^2 - BD^2}{2BQ \cdot QD} = \frac{9+5-8}{2 \times 3 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 又 $\frac{QF}{BQ} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\cos \angle BQD = \frac{QF}{BQ}$, 则 $\angle QFB = \frac{\pi}{2}$, 即 $BF \perp QD$. 因此 $\angle AFB$ 为二面角 $B-QD-A$ 的平面角. 10 分

$BF = \sqrt{BQ^2 - QF^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, 在 $\text{Rt} \triangle AFB$ 中, $\cos \angle AFB = \frac{AF}{BF} = \frac{2}{3}$, 因此二面角 $B-QD-A$ 的余弦值为 $\frac{2}{3}$ 12 分

20. 【命题点】椭圆方程、直线与椭圆的位置关系、椭圆与圆的综合性问题

(1)【解】由题意得 $c = \sqrt{2}, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 可得 $a = \sqrt{3}$,

从而 $b^2 = a^2 - c^2 = 3 - 2 = 1$,

\therefore 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 4 分

(2)【证明】设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 若直线 $MN \perp x$ 轴, 由直线 MN 与曲线 $x^2 + y^2 = 1 (x > 0)$ 相切可知, 直线 MN 的方程为 $x = 1$, 不过点 F , 不合题意, \therefore 直线 MN 的斜率必存在且不为 0.

..... 5 分

(先考虑直线 $MN \perp x$ 轴这一情况, 防止丢解)

设直线 MN 的方程为 $y = kx + m (k \neq 0)$.

由直线 MN 与曲线 $x^2 + y^2 = 1 (x > 0)$ 相切知 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$, 即 $1 +$

$k^2 = m^2$ 6 分

(接下来, 联立直线 MN 与椭圆 C 的方程, 消元, 整理成关于 x 的一元二次方程, 由根与系数的关系可得 $x_1 + x_2, x_1 x_2$, 为计算弦长 $|MN|$ 作准备)

将 $y = kx + m (k \neq 0)$ 与椭圆方程 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 联立, 消去 y , 化简

得 $(1 + 3k^2)x^2 + 6kmx + 3(m^2 - 1) = 0$,

$\Delta = (6km)^2 - 4 \times 3(m^2 - 1)(1 + 3k^2) = -12m^2 + 12 + 36k^2 > 0$,

由根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = \frac{-6km}{1 + 3k^2}, x_1 x_2 = \frac{3(m^2 - 1)}{1 + 3k^2}$.

..... 8 分

$\therefore |MN| = \sqrt{(1 + k^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2]}$

$= \sqrt{(1 + k^2) \left[\left(\frac{-6km}{1 + 3k^2} \right)^2 - \frac{12(m^2 - 1)}{1 + 3k^2} \right]}$

$= \sqrt{\frac{(1 + k^2)(36k^2 + 12 - 12m^2)}{(1 + 3k^2)^2}},$

又 $m^2 = k^2 + 1, \therefore |MN| = \frac{2\sqrt{6}|k|\sqrt{1+k^2}}{1+3k^2} (*)$ 10 分

(接下来,验证 M, N, F 共线与 $|MN| = \sqrt{3}$ 的等价性)

若点 M, N, F 共线, 则 $0 = \sqrt{2}k + m$, 即 $m = -\sqrt{2}k$.

又 $1 + k^2 = m^2, \therefore k^2 = 1$, 代入 $(*)$ 式可得

$$|MN| = \frac{2\sqrt{6} \times 1 \times \sqrt{2}}{1+3} = \sqrt{3}.$$

反之, 若 $|MN| = \sqrt{3}$, 则 $\frac{2\sqrt{6} \cdot |k| \cdot \sqrt{1+k^2}}{1+3k^2} = \sqrt{3}$,

$$\text{即 } 2\sqrt{2}|k| \cdot \sqrt{1+k^2} = 1+3k^2,$$

整理得 $k^2 = 1$, 又 $1 + k^2 = m^2, \therefore m^2 = 2$.

又曲线 $x^2 + y^2 = 1 (x > 0)$ 为右半圆, 则 m 与 k 异号,

$$\therefore k = 1, m = -\sqrt{2} \text{ 或 } k = -1, m = \sqrt{2},$$

即 MN 的方程为 $y = x - \sqrt{2}$ 或 $y = -x + \sqrt{2}$, 经检验, 都经过点 F .

因此, M, N, F 三点共线的充要条件是 $|MN| = \sqrt{3}$ 12 分

关键点拨 将直线与半圆相切、直线与椭圆相交的弦长问题代数化, 再验证 M, N, F 三点共线与 $|MN| = \sqrt{3}$ 的等价性, 容易知道, 在 MN 与半圆相切且弦长为定值时, MN 为确定的直线, 自然可以通过方程验证直线 MN 是否过焦点 F .

21. 思路导引 (1) 期望的定义 $\rightarrow E(X)$;

(2) $E(X)$ 与 1 的关系 \rightarrow 方程的最小正实根 p 的范围;

(3) $E(X)$ 与 1 的关系和 p 的范围 \rightarrow 生物繁殖与最终消亡的实际意义

【命题点】 概率统计与导数的综合应用

(1) **【解】** 由题意知 $E(X) = 0 \times p_0 + 1 \times p_1 + 2 \times p_2 + 3 \times p_3$

$$= 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1$$

$$= 1. \quad \text{..... 3 分}$$

(2) **【证明】** 由题意知 $E(X) = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot$

$$p_3 = p_1 + 2p_2 + 3p_3. \quad \text{..... 4 分}$$

设 $f(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 - x$, 则 $f(p) = 0, f(0) = p_0 > 0$,

$f(1) = p_0 + p_1 + p_2 + p_3 - 1 = 0, f'(x) = p_1 + 2p_2x + 3p_3x^2 - 1$. 方程

$f'(x) = 0$ 的判别式 $\Delta = 4p_2^2 - 4 \times 3p_3 \times (p_1 - 1) > 0$, 不妨设其两

根分别为 α, β , 且 $\alpha < \beta$, 则由根与系数的关系得, $\alpha + \beta < 0, \alpha\beta <$

0 , 则 $\alpha < p$, 且 $\alpha < 0 < \beta$, 且 $f'(1) = p_1 + 2p_2 + 3p_3 - 1 = E(X) - 1$.

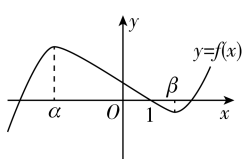
..... 6 分

当 $E(X) \leq 1$ 时, $f'(1) = E(X) - 1 \leq 0$,

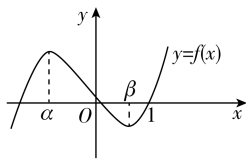
所以 $\alpha < 0 < 1 \leq \beta$, 故 $f(x) = 0$ 的最小正实根为 1, 即 $p = 1$ (如图①). 8 分

当 $E(X) > 1$ 时, $f'(1) = E(X) - 1 > 0$,

所以 $\alpha < 0 < \beta < 1$, 又 $f(1) = 0$, 即存在 $x_0 \in (0, \beta)$ 使得 $f(x_0) = 0$ (如图②), 即 $x_0 = p < 1$ 10 分



图①



图②

(3)【解】由(2)可知,

当 $E(X) \leq 1$ 时, $p = 1$, 即 1 个微生物个体繁殖下一代的个数期望不大于 1, 则该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率为 1, 即该微生物会灭绝. 11 分

当 $E(X) > 1$ 时, $p < 1$, 即 1 个微生物个体繁殖下一代的个数期望大于 1, 则该种微生物经过多代繁殖后临近灭绝的概率小于 1, 即该种微生物可通过多代繁殖而不至于灭绝. 12 分

关键点拨 本题将概率统计与导数综合, 需要将统计问题转化为函数问题, 再利用导数研究函数的性质证明所需结论.

22. **思路导引**
- (1) $f(x) \rightarrow f'(x) \xrightarrow{\text{对 } a \text{ 分类讨论}} f'(x) \text{ 的正负} \rightarrow f(x) \text{ 的单调性};$
 - (2) 结合 $f(x)$ 的单调性 $\rightarrow f(x)$ 的极值 $\rightarrow f(x)$ 极值的正负 $\xrightarrow{\text{零点存在性定理}} f(x)$ 有一个零点

【命题点】利用导数判断函数的单调性, 函数单调性的应用以及零点存在性定理

(1)【解】由题意得 $f'(x) = x(e^x - 2a)$,

当 $a \leq 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 0$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 0$, 1 分
所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \ln 2a$, 2 分

①当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x < \ln 2a$ 或 $x > 0$;

令 $f'(x) < 0$, 得 $\ln 2a < x < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2a)$, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln 2a, 0)$ 上单调递减. 3 分

②当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = x(e^x - 1) \geq 0$ 且等号不恒成立,

所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. 4 分

③当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > \ln 2a$;

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \ln 2a$, 5 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, \ln 2a)$ 上单调递减. 6 分

(2)【证明】选择条件①, 证明如下:

由(1)知当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递

增, 在 $(0, \ln 2a)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大

值 $f(0)$, 在 $x=\ln 2a$ 处取得极小值 $f(\ln 2a)$,

且 $f(0) = -1+b$, $f(\ln 2a) = (2a - a \ln 2a) \ln 2a + b - 2a$.

由于 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}$, $b > 2a$, 所以 $f(0) > 0$, $\ln 2a > 0$, $b - 2a > 0$ 8 分

令 $g(x) = 2x - x \ln 2x$,

则 $g'(x) = 2 - \ln 2x - 1 = 1 - \ln 2x$,

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = \frac{e}{2}$, 当 $\frac{1}{2} < x < \frac{e}{2}$ 时, $g'(x) > 0$,

当 $\frac{e}{2} < x \leq \frac{e^2}{2}$ 时, $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, \frac{e}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{e}{2}, \frac{e^2}{2}]$ 上单调递减,

所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{e}{2}$ 处取得极大值 $g(\frac{e}{2})$ 10 分

由于 $g(\frac{e}{2}) = \frac{e}{2} > 0$, $g(\frac{1}{2}) > 0$, $g(\frac{e^2}{2}) = 0$,

所以 $g(x) \geq 0$ 在 $(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{2}]$ 上恒成立,

所以 $f(\ln 2a) > 0$.

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 所以 $f(x)$ 有一个零点, 得证.

..... 12 分

选择条件②, 证明如下:

由(1)知, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2a)$, $(0, +\infty)$ 上单调

递增, 在 $(\ln 2a, 0)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x=\ln 2a$ 处取得

极大值 $f(\ln 2a)$, 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)$ 8 分

由于 $0 < a < \frac{1}{2}$, $b \leq 2a$, 所以 $f(0) < 0$, $b - 2a \leq 0$, $\ln 2a < 0$,

$-a \ln 2a > 0$, 则 $2a - a \ln 2a > 0$, 所以 $f(\ln 2a) < 0$ 10 分

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 所以 $f(x)$ 有一个零点, 得证.

..... 12 分