

## 1. A 【命题点】集合的交集运算

【解析】因为集合  $M = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ,  $N = \{x | -1 < x < 6\}$ , 所以  $M \cap N = \{2, 4\}$ , 故选 A.

快解  $\rightarrow$  由  $(M \cap N) \subseteq N$  知 B, C, D 都不成立, 故选 A.

## 2. A 【命题点】复数相等的概念

【解析】因为  $(1+2i)a+b=(a+b)+2ai=2i$ , 所以  $\begin{cases} a+b=0, \\ 2a=2, \end{cases}$  解得

$$\begin{cases} a=1, \\ b=-1, \end{cases} \text{ 故选 A.}$$

一题多解  $\rightarrow$  分别将选项 A, B, C, D 中的  $a$  与  $b$  的值代入已知等式, 能使已知等式成立的只有选项 A, 故选 A.

## 3. D 【命题点】向量的模

【解析】因为  $a=(2, 1)$ ,  $b=(-2, 4)$ , 所以  $a-b=(4, -3)$ , 所以  $|a-b|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$ , 故选 D.

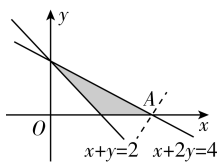
## 4. C 【命题点】茎叶图的实际应用

【解析】对于 A, 甲同学周课外体育运动时长的样本中位数为  $(7.5+7.3) \div 2 = 7.4$ , 故 A 正确; 对于 B,  $(6.3+7.4+7.6+8.1+8.2+8.2+8.5+8.6+8.6+8.6+8.6+9.0+9.2+9.3+9.8+10.1) \div 16 = 8.50625 > 8$ , 所以乙同学周课外体育运动时长的样本平均数大于 8, 故 B 正确; 对于 C, 样本中, 甲同学周课外体育运动时长大于 8 的频率为  $\frac{6}{16} = 0.375$ , 据此可估计概率为 0.375, 故 C 错误; 对于 D, 样本中, 乙同学周课外体育运动时长大于 8 的频率为  $1 - \frac{3}{16} = 0.8125$ , 据此可估计概率为 0.8125, 故 D 正确. 故选 C.

## 5. C 【命题点】简单的线性规划

【解析】由题意, 作出约束条件

$$\begin{cases} x+y \geq 2, \\ x+2y \leq 4, \\ y \geq 0 \end{cases}$$
 表示的可行域如图中阴影



部分所示(含边界). 故当目标函数线  $z=2x-y$  经过点  $A(4, 0)$  时,  $z$  取得最大值, 且  $z_{\max}=8$ , 故选 C.

## 6. B 【命题点】抛物线定义的应用

【解析】依题意可得抛物线的焦点  $F(1, 0)$ ,  $B(3, 0)$ , 所以  $|AF|=|BF|=2$ . 设点  $A$  的横坐标为  $x_A$ , 由抛物线定义可得  $x_A+1=2$ , 所以  $x_A=1$ , 所以  $AF \perp BF$ , 所以  $|AB|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ , 故选 B.

一题多解  $\rightarrow$  同上解法可得点  $A$  的横坐标为 1, 代入抛物线方程可得  $A(1, \pm 2)$ , 则  $|AB|=\sqrt{(1-3)^2+(\pm 2-0)^2}=2\sqrt{2}$ .

## 7. B 【命题点】程序框图

【解析】由题意,输入  $a=1, b=1, n=1$ , 执行程序框图:  $b=3, a=2, n=2$ , 则  $\left| \frac{b^2}{a^2} - 2 \right| = 0.25 > 0.01$ , 执行循环体;  $b=7, a=5, n=3$ , 则  $\left| \frac{b^2}{a^2} - 2 \right| = 0.04 > 0.01$ , 执行循环体;  $b=17, a=12, n=4$ , 则  $\left| \frac{b^2}{a^2} - 2 \right| \approx 0.007 < 0.01$ , 退出循环. 输出的  $n=4$ , 故选 B.

### 8. A 【命题点】根据函数图像判断其解析式

【解析】对于 B, 当  $x=1$  时,  $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} = 0$ , 不符合题意, 故排除选项 B;

对于 D, 当  $x=3$  时,  $y = \frac{2\sin x}{x^2 + 1} > 0$ , 不符合题意, 故排除选项 D;

对于 C, 当  $x \in (0, 1)$  时, 函数  $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$  的导函数  $y' =$

$\frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} > 0$ , 所以函数  $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$  在  $(0, 1)$  上单调递

增, 所以当  $x \in (0, 1)$  时,  $y = \frac{2x}{x^2 + 1} < 1$ . 又  $x \in (0, 1)$  时,  $\cos x < 1$ ,

所以在  $(0, 1)$  上  $y = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1} < 1$ , 不符合题意, 故排除 C 选项.

故选 A.

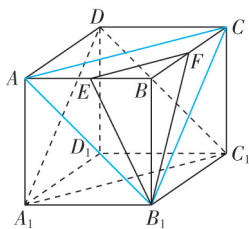
### 9. A 【命题点】空间中面面的位置关系

【解析】对于 A 选项: 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中, 因为  $E, F$  分别为  $AB, BC$  的中点, 易知  $EF \perp BD, EF \perp DD_1$ , 又  $BD \cap DD_1 = D$ , 所以  $EF \perp$  平面  $BDD_1$ , 又因为  $EF \subset$  平面  $B_1EF$ , 所以平面  $B_1EF \perp$  平面  $BDD_1$ , 所以 A 选项正确;

对于 B 选项: 因为平面  $A_1BD \cap$  平面  $BDD_1 = BD$ , 由 A 选项知平面  $B_1EF \perp$  平面  $BDD_1$ , 若平面  $B_1EF \perp$  平面  $A_1BD$ , 则  $BD \perp$  平面  $B_1EF$ , 显然不成立, 所以 B 选项错误;

对于 C 选项: 由题意知直线  $AA_1$  与直线  $B_1E$  必相交, 故平面  $B_1EF$  与平面  $A_1AC$  有公共点, 所以 C 选项错误;

对于 D 选项: 如图, 连接  $AC, AB_1, B_1C$ , 易知平面  $AB_1C \parallel$  平面  $A_1C_1D$ , 又因为平面  $AB_1C$  与平面  $B_1EF$  有公共点  $B_1$ , 故平面  $A_1C_1D$  与平面  $B_1EF$  不平行, 所以 D 选项错误. 故选 A.



### 10. D 【命题点】等比数列基本量的计算

【解析】设等比数列  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 则  $a_1 + a_2 + a_3 = a_2 \left( \frac{1}{q} + \right.$

$1 + q \left. \right) = a_2 \times \frac{1 + q + q^2}{q} = 168$  ①,  $a_2(1 - q^3) = a_2(1 - q)(1 + q + q^2) =$

$42$  ②, 联立 ①② 整理得  $\frac{q}{1 - q} = 4$ , 解得  $q = \frac{1}{2}, a_2 = 48$ . 所以  $a_6 =$

$a_2 q^4 = 48 \times \frac{1}{16} = 3$ , 故选 D.

### 11. D

**思路导引** 求出  $f'(x)$  → 讨论  $f'(x)$  的正负 → 函数  $f(x)$  的单调性 → 函数  $f(x)$  的极值与端点值 → 比较求得最值

**【命题点】** 利用导数求函数的最值

**【解析】** 由题意, 得  $f'(x) = -\sin x + \sin x + (x+1) \cos x = (x+1) \cdot \cos x$ , 当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$  上单调递增, 当  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  单调递减. 所以在区间  $[0, 2\pi]$  上  $f(x)_{\text{极大值}} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 2$ ,  $f(x)_{\text{极小值}} = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi}{2}$ . 又  $f(0) = 2$ ,  $f(2\pi) = 2$  (易错: 求闭区间上函数的最值问题, 在求出函数的极值后, 注意要与端点值比较), 所以函数  $f(x)$  在区间  $[0, 2\pi]$  的最小值与最大值分别为  $-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2$ , 故选 D.

## 12. C

**思路导引** 利用三角形面积公式求出底面  $ABCD$  面积的最大值 → 四棱锥体积表达式  $\xrightarrow{\text{基本不等式}}$  四棱锥体积的最大值 → 根据等号成立条件求出四棱锥体积最大时其高的值

**【命题点】** 四棱锥的体积、球的性质、基本不等式的应用

**【解析】** 设四棱锥为  $O-ABCD$ , 高为  $h$ . 设四边形  $ABCD$  所在小圆半径为  $r$ , 四边形  $ABCD$  对角线的夹角为  $\alpha$ , 则  $S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \leq \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2$ , 当且仅当四边形  $ABCD$  为正方形时等号成立, 即当四棱锥  $O-ABCD$  的高  $h$  一定时, 底面  $ABCD$  面积的最大值为  $2r^2$ . 由球的性质知  $r^2 + h^2 = 1$ , 则  $V_{O-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2r^2 \cdot h = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{r^2 \cdot r^2 \cdot 2h^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(\frac{r^2 + r^2 + 2h^2}{3}\right)^3} = \frac{4\sqrt{3}}{27}$ , 当且仅当  $r^2 = 2h^2$ , 即  $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$  时等号成立 (另解: 则  $V_{O-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2r^2 \cdot h = \frac{2}{3}(1-h^2)h = \frac{2}{3}(h-h^3)$ . 令  $f(h) = \frac{2}{3}(h-h^3)$ , 则  $f'(h) = \frac{2}{3}(1-3h^2)$ , 令  $f'(h) = \frac{2}{3}(1-3h^2) = 0$ , 可得  $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$  (负值舍去), 当  $h \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  时,  $f'(h) > 0$ , 函数  $f(h)$  单调递增, 当  $h \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$  时,  $f'(h) < 0$ , 函数  $f(h)$  单调递减, 所以当  $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$  时,  $f(h)$  取得最大值, 即该四棱锥的体积最大), 故选 C.

## 13.2 【命题点】等差数列的前 $n$ 项和公式

**【解析】** 由  $2S_3 = 3S_2 + 6$ , 得  $2(3a_1 + 3d) = 3(2a_1 + d) + 6$ , 解得  $d = 2$ .

14.  $\frac{3}{10}$  【命题点】古典概型的概率

【解析】设除甲、乙外的3名同学分别为  $a, b, c$ , 则从这5名同学中随机选3名的基本事件有: 甲乙  $a$ , 甲乙  $b$ , 甲乙  $c$ , 甲  $ab$ , 甲  $ac$ , 甲  $bc$ , 乙  $ab$ , 乙  $ac$ , 乙  $bc$ ,  $abc$ , 共10个, 其中甲、乙都入选的基本事件有: 甲乙  $a$ , 甲乙  $b$ , 甲乙  $c$ , 共3个, 所以所求概率  $P = \frac{3}{10}$ .

15.  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$  或  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$  或  $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{65}{9}$  或  $\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{25}$  (以上任一方程或对应的一般方程均可)

【命题点】圆的几何性质和方程

【解析】设点  $A(0,0), B(4,0), C(-1,1), D(4,2)$ , 圆过其中三点, 共有四种情况:

①若圆过  $A, B, C$  三点, 则圆心在直线  $x=2$  上, 设圆心坐标为  $(2, a)$ , 则  $\sqrt{(2-0)^2 + (a-0)^2} = \sqrt{[2-(-1)]^2 + (a-1)^2}$  (关键: 圆内两条弦的垂直平分线的交点为圆心, 圆心到圆上任意一点的距离为半径), 解得  $a=3$ , 圆的半径为  $\sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{13}$ , 所以圆的方程为  $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 13$ ;

②若圆过  $A, B, D$  三点, 则圆心在直线  $x=2$  上, 设圆心坐标为  $(2, b)$ , 则  $\sqrt{(2-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{(2-4)^2 + (b-2)^2}$ , 解得  $b=1$ , 圆的半径为  $\sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$ , 所以圆的方程为  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ ;

③若圆过  $A, C, D$  三点, 由题意得线段  $AC$  的垂直平分线方程为  $y=x+1$ , 线段  $AD$  的垂直平分线方程为  $y=-2x+5$ , 由

$$\begin{cases} y=x+1, \\ y=-2x+5, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{4}{3}, \\ y=\frac{7}{3}, \end{cases} \text{ 则圆心坐标为 } \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \text{ 圆的半径}$$

为  $\sqrt{\left(\frac{4}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{7}{3}-0\right)^2} = \frac{\sqrt{65}}{3}$ , 所以圆的方程为

$$\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 = \frac{65}{9};$$

④若圆过  $B, C, D$  三点, 由题意得线段  $BD$  的垂直平分线方程为  $y=1$ , 线段  $BC$  的垂直平分线方程为  $y=5x-7$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} y=1, \\ y=5x-7, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{8}{5}, \\ y=1, \end{cases} \text{ 则圆心坐标为 } \left(\frac{8}{5}, 1\right), \text{ 圆的半径}$$

为  $\sqrt{\left(\frac{8}{5}-4\right)^2 + (1-0)^2} = \frac{13}{5}$ , 所以圆的方程为  $\left(x - \frac{8}{5}\right)^2 +$

$$(y-1)^2 = \frac{169}{25}.$$

16.  $-\frac{1}{2} \ln 2$

**思路导引** 函数解析式变形 $\rightarrow$ 确定函数定义域的不等式组 $\xrightarrow{\text{奇函数定义域的对称性}}$  $a$ 的值 $\rightarrow$ 由奇函数在 $x=0$ 处有意义求出 $b$ 的值

**【命题点】**根据函数的奇偶性求参数的值

**【解析】** $f(x) = \ln \left| \frac{a+1-ax}{1-x} \right| + b$ , 定义域为不等式组

$\begin{cases} a+1-ax \neq 0, \\ 1-x \neq 0 \end{cases}$  的解集. 因为函数 $f(x)$ 为奇函数, 所以其定义

域关于原点对称, 由 $1-x \neq 0$ , 易知 $x \neq 1$ , 所以函数 $f(x)$ 的定义域中一定不含有 $-1$ , 所以 $x=-1$ 是方程 $a+1-ax=0$ 的根,

即 $a+1-a \cdot (-1) = 0$ , 解得 $a = -\frac{1}{2}$ . 所以 $f(x) =$

$\ln \left| \frac{1+x}{2(1-x)} \right| + b$ , 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup$

$(-1, 1) \cup (1, +\infty)$ . 由函数 $f(x)$ 为奇函数知 $f(0)=0$  (提示: 利用若奇函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有意义, 则 $f(0)=0$ 这一特

性), 所以 $f(0) = \ln \frac{1}{2} + b = 0$ , 解得 $b = \ln 2$ .

**快解** 因为 $f(x) = \ln \left| \frac{a+1}{1-x} \right| + b$ 是奇函数, 所以 $f(0) = \ln |a+1| + b = 0$ ,  $f(2) = \ln |a-1| + b = -f(-2) = -\ln \left| a+\frac{1}{3} \right| - b$ . 故 $\left| (a-1) \left( a+\frac{1}{3} \right) \right| = (a+1)^2$ , 解得 $a = -\frac{1}{2}$ , 从而 $b = \ln 2$ .

**学霸解题·技巧** 北京大学 张充

$f(x)$ 为奇函数, 则 $f(x)+f(-x)=0$ 在定义域内恒成立.

故 $f(x)+f(-x) = \ln \left| a+\frac{1}{1-x} \right| + b + \ln \left| a+\frac{1}{1+x} \right| + b =$

$\ln \left| \frac{a+1-ax}{1-x} \cdot \frac{a+1+ax}{1+x} \right| + 2b = 0. (*)$

要使 $(*)$ 对定义域内任意 $x$ 恒成立, 须 $\ln \left| \frac{a+1-ax}{1-x} \cdot \frac{a+1+ax}{1+x} \right|$

$\frac{a+1+ax}{1+x}$  为一常数,

即 $\frac{a+1-ax}{1-x} \cdot \frac{a+1+ax}{1+x}$ 为一非零常数, 设该常数为 $k$ ,

故 $(a+1-ax)(a+1+ax) = k(1-x)(1+x)$ ,  $k \neq 0$ ,

即 $(a+1)^2 - a^2 x^2 = k - kx^2$ ,

所以 $(a+1)^2 = a^2 = k$ , 解得 $a = -\frac{1}{2}$ ,  $k = \frac{1}{4}$ ,

则 $f(x)+f(-x) = \ln |k| + 2b = \ln \frac{1}{4} + 2b = 0$ ,  $b = \ln 2$ .

17. **【命题点】**利用正弦定理、余弦定理解三角形

(1)【解】因为  $\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A)$ ,  $A=2B$ ,  
 所以  $\sin C \sin B = \sin B \sin(C-A)$ . ..... 2 分  
 又因为  $\sin B \neq 0$ , 所以  $\sin C = \sin(C-A)$ ,  
 所以  $C=C-A$  (无解) 或  $C+C-A=\pi$ , 所以  $2C-A=\pi$ . ..... 4 分  
 又  $A+B+C=\pi$ ,  $A=2B$ , 解得  $C=\frac{5\pi}{8}$ . ..... 6 分

(2)【证明】因为  $\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A)$ ,  
 所以  $\sin C \sin A \cos B - \sin C \cos A \sin B = \sin B \sin C \cos A - \sin B \cos C \sin A$ ,  
 所以由正弦定理, 得  $a \cos B - b \cos A = b \cos A - a \cos C$ ,  
 即  $2b \cos A = a \cos C + a \cos B$ , ..... 8 分  
 由余弦定理, 得  $2bc \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = ab \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + ac \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ , 即  $2(b^2+c^2-a^2) = a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2$ , ..... 10 分  
 整理得  $2a^2 = b^2+c^2$ . ..... 12 分

**一题多解** (2) 因为  $A+B+C=\pi$ ,  
 所以  $\sin(A+B) = \sin C$ ,  $\sin(A+C) = \sin B$ ,  
 又  $\sin C \sin(A-B) = \sin B \sin(C-A)$ ,  
 所以  $\sin(A+B) \sin(A-B) = \sin(C+A) \sin(C-A)$ , ..... 8 分  
 整理得  $\sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B = \sin^2 C \cos^2 A - \cos^2 C \sin^2 A$ .  
 因为  $\sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B = \sin^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 A) \cdot \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B$ , 同理  $\sin^2 C \cos^2 A - \cos^2 C \sin^2 A = \sin^2 C - \sin^2 A$ , 所以  $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 C - \sin^2 A$ . 由正弦定理得  $a^2 - b^2 = c^2 - a^2$ , 即  $2a^2 = b^2 + c^2$ . ..... 12 分

## 18. 【命题点】面面垂直的证明、三棱锥体积的求解

(1)【证明】因为  $AD=CD$ ,  $\angle ADB = \angle BDC$ ,  $BD$  为公共边,  
 所以  $\triangle ADB \cong \triangle CDB$ , 所以  $AB=BC$ . ..... 2 分  
 因为  $E$  为  $AC$  的中点, 所以  $AC \perp BE$ .  
 在  $\triangle ACD$  中,  $AD=CD$ , 所以  $AC \perp DE$ . ..... 4 分  
 因为  $BE \cap DE = E$ ,  $BE, DE \subset$  平面  $BED$ , 所以  $AC \perp$  平面  $BED$ .  
 又因为  $AC \subset$  平面  $ACD$ , 所以平面  $BED \perp$  平面  $ACD$ . ..... 6 分  
 (2)【解】连接  $EF$ , 由 (1) 知,  $AC \perp$  平面  $BED$ , 又  $EF \subset$  平面  $BED$ , 所以  $AC \perp EF$ .

当  $\triangle AFC$  面积最小时,  $EF$  取得最小值.

(将面积最小值问题转化为线段长度最小值问题)

由于点  $F$  是  $BD$  上的动点, 所以当  $EF \perp BD$  时,  $EF$  最小.  
 ..... 7 分  
 因为  $AB=BC$ ,  $\angle ACB = 60^\circ$ , 所以  $\triangle ABC$  为边长为 2 的正三角形, 所以  $BE = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$ .  
 在  $\text{Rt} \triangle ADC$  中,  $AC=2$ , 又  $E$  为  $AC$  的中点, 所以  $DE=1$ .  
 ..... 8 分  
 又  $BD=2$ , 所以  $DE^2 + BE^2 = BD^2$ , 所以  $\angle DEB = 90^\circ$ ,

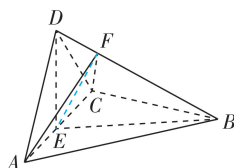
$$\text{所以 } S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

..... 10 分

$$\text{当 } EF \perp BD \text{ 时, } EF = \frac{S_{\triangle BDE}}{\frac{1}{2}BD} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{此时 } S_{\triangle EFB} = \frac{1}{2}EF \cdot BF = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3 - \frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

$$\text{则三棱锥 } F-ABC \text{ 的体积 } V = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{8} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{4}. \text{ ..... 12 分}$$



## 19. 【命题点】样本的数字特征和相关系数、样本估计总体

【解】(1) 由题意可知  $\sum_{i=1}^{10} x_i = 0.6$ ,  $\sum_{i=1}^{10} y_i = 3.9$ ,

所以这 10 棵树的根部横截面积和材积量的平均值分别为

$$\bar{x} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} x_i = 0.06, \bar{y} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} y_i = 0.39,$$

所以估计该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量分别为 **0.06 m<sup>2</sup>** 和 **0.39 m<sup>3</sup>**. ..... 2 分

(2) 由 (1) 知,  $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0.06 \times 0.39 = 0.0234$ ,  $\bar{x}^2 = 0.06^2 = 0.0036$ ,  $\bar{y}^2 = 0.39^2 = 0.1521$ ,

$$\text{则 } r = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i y_i - 10 \bar{x} \bar{y}}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - 10 \bar{x}^2)(\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - 10 \bar{y}^2)}} = \frac{0.2474 - 0.234}{\sqrt{0.002 \times 0.0948}} = \frac{0.0134}{\sqrt{1.896 \times 10^{-4}}} \approx \mathbf{0.97}. \text{ ..... 8 分}$$

(3) 已知树木的材积量与其根部横截面积近似成正比, 所以可设为  $y = kx$  ( $k$  为常数),

由 (1) 知该林区这种树木平均一棵的根部横截面积与平均一棵的材积量的估计值分别为 0.06 和 0.39, 所以  $0.39 = 0.06k$ , 即  $k = \frac{13}{2}$ , 所以  $y = \frac{13}{2}x$ . ..... 10 分

$$\text{又因为 } \sum_{i=1}^n x_i = 186, \text{ 所以 } \sum_{i=1}^n y_i = \frac{13}{2} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{13}{2} \times 186 = 1209,$$

所以该林区这种树木的总材积量的估计值为 **1209 m<sup>3</sup>**.

..... 12 分

## 20. 思路导引

$$(1) a=0 \rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x \rightarrow f'(x) \rightarrow \text{判断}$$

$f'(x)$  的正负  $\rightarrow f(x)$  的单调性  $\rightarrow$  函数  $f(x)$  的最大值;

$$(2) f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1) \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2} \rightarrow \text{对参}$$

数  $a$  分类讨论  $\rightarrow$  根据导数确定函数  $f(x)$  的单调性、极值、最值  $\rightarrow$  确定函数  $f(x)$  恰有一个零点满足的条件  $\rightarrow$  确定参数  $a$  的范围

【命题点】利用导数研究函数的单调性、极值、最值及零点

$$\text{【解】(1) 当 } a=0 \text{ 时, } f(x) = -\frac{1}{x} - \ln x, x>0,$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2}, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x=1.$$

当  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增;

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减.

所以当  $x = 1$  时, 函数  $f(x)$  取得极大值  $f(1) = -1$ ,

即函数  $f(x)$  的最大值为  $-1$ . ..... 3 分

(2) 函数  $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1) \ln x, x > 0$ ,

$$\text{则 } f'(x) = a + \frac{1}{x^2} - \frac{a+1}{x} = \frac{ax^2 - (a+1)x + 1}{x^2} = \frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}.$$

..... 4 分

若  $a = 0$ , 则由 (1) 可知, 函数  $f(x)$  没有零点, 不满足题意.

..... 5 分

$$\text{若 } a \neq 0, f'(x) = \frac{a\left(x - \frac{1}{a}\right)(x-1)}{x^2}, x > 0, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x =$$

$$\frac{1}{a} \text{ 或 } x = 1.$$

① 若  $\frac{1}{a} < 0$ , 即  $a < 0$ , 则当  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以当  $x = 1$  时, 函数  $f(x)$  取得最大值  $f(1) = a - 1$ , 若函数  $f(x)$  恰有一个零点, 则  $f(1) = a - 1 = 0$ , 解得  $a = 1 > 0$ , 不满足题意. .... 7 分

② 若  $\frac{1}{a} = 1$ , 即  $a = 1$ , 则  $f'(x) \geq 0$ , 等号不恒成立, 函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 且  $f(1) = 0$ , 满足题意. .... 8 分

③ 若  $\frac{1}{a} > 1$ , 即  $0 < a < 1$ , 则当  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增; 当  $x \in \left(1, \frac{1}{a}\right)$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  在  $\left(1, \frac{1}{a}\right)$  上单调递减; 当  $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$  上单调递增, 则函数  $f(x)$  的极大值为  $f(1) = a - 1 < 0$ , 极小值为  $f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - a + (a+1) \ln a$ .

由 (1) 可得  $\frac{1}{x} + \ln x \geq 1$ , 即  $\ln \frac{1}{x} \geq 1 - x$ , 则  $\ln x \leq x - 1 < x$ , 所以  $\ln x < x$ , 所以  $\ln \sqrt{x} < \sqrt{x}$ , 即  $\ln x < 2\sqrt{x}$ .

又  $x > 1$  时,  $\frac{1}{x} < 1 < \sqrt{x}$ , 所以当  $x > 1$  时,  $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1) \ln x > ax - \frac{1}{x} - 2(a+1)\sqrt{x} > ax - (2a+3)\sqrt{x}$ , 存在  $x_0 = \left(\frac{3}{a} + 2\right)^2 > \frac{1}{a}$ , 使得  $f(x_0) > 0$ , 满足题意, 所以  $f(x)$  存在唯一零点. .... 9 分

④ 若  $0 < \frac{1}{a} < 1$ , 即  $a > 1$ , 则当  $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{1}{a}\right)$  上单调递增; 当  $x \in \left(\frac{1}{a}, 1\right)$  时,  $f'(x) < 0$ , 函



数  $f(x)$  在  $\left(\frac{1}{a}, 1\right)$  上单调递减; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 则函数  $f(x)$  的极小值为  $f(1) = a - 1 > 0$ , 极大值为  $f\left(\frac{1}{a}\right) = 1 - a + (a+1) \ln a$ . 由 (1) 可得当  $0 < x < 1$  时,  $\frac{1}{x} + \ln x > 1$ , 即  $\ln x > 1 - \frac{1}{x}$ ,  $\ln \sqrt{x} > 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ ,  $\ln x > 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ , 所以当  $0 < x < 1$  时,  $f(x) = ax - \frac{1}{x} - (a+1) \ln x < ax - \frac{1}{x} - 2(a+1) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) < -\frac{1}{x} + \frac{2(a+1)}{\sqrt{x}}$ , 存在  $x'_0 = \frac{1}{4(a+1)^2} \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ , 使  $f(x'_0) < 0$ , 满足题意. 所以  $f(x)$  存在唯一零点.

综上,  $a$  的取值范围是  $(0, +\infty)$ . ..... 12 分

## 21. 【命题点】椭圆的方程与性质、直线与椭圆的位置关系

(1) 【解】由题意, 设椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0)$ ,

将点  $A(0, -2)$ ,  $B\left(\frac{3}{2}, -1\right)$  代入, 得 
$$\begin{cases} \frac{4}{n^2} = 1, \\ \frac{9}{4m^2} + \frac{1}{n^2} = 1, \end{cases}$$

解得  $\begin{cases} n^2 = 4, \\ m^2 = 3, \end{cases}$  所以椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ . ..... 4 分

(2) 【证明】解法一: 由题意得线段  $AB$  的方程为  $y = \frac{2}{3}x - 2 \left(0 \leq x \leq \frac{3}{2}\right)$ ,

设  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ , 则  $T\left(\frac{3}{2}y_1 + 3, y_1\right)$ ,  $H(3y_1 + 6 - x_1, y_1)$ ,  $\overrightarrow{AN} = (x_2, y_2 + 2)$ ,  $\overrightarrow{AH} = (3y_1 + 6 - x_1, y_1 + 2)$ . ..... 6 分

设直线  $AM$  与  $AN$  的方程分别为  $x = t_1(y + 2)$  与  $x = t_2(y + 2)$ ,

由  $\begin{cases} x = t_1(y + 2), \\ \frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{3} = 1, \end{cases}$  得  $(4t_1^2 + 3)y^2 + 16t_1^2y + 16t_1^2 - 12 = 0$ . ..... 6 分

由题设得  $-2y_1 = \frac{16t_1^2 - 12}{4t_1^2 + 3}$ , 故  $M\left(\frac{12t_1}{4t_1^2 + 3}, \frac{6 - 8t_1^2}{4t_1^2 + 3}\right)$ .

同理可得  $N\left(\frac{12t_2}{4t_2^2 + 3}, \frac{6 - 8t_2^2}{4t_2^2 + 3}\right)$ . ..... 8 分

由  $M, N, P$  三点共线得  $\frac{\frac{12t_1}{4t_1^2 + 3} - 1}{\frac{6 - 8t_1^2}{4t_1^2 + 3} + 2} = \frac{\frac{12t_2}{4t_2^2 + 3} - 1}{\frac{6 - 8t_2^2}{4t_2^2 + 3} + 2}$ , 即  $12t_1 - 3 - 4t_1^2 =$

$12t_2 - 3 - 4t_2^2$ . 于是  $(t_1 - t_2)(t_1 + t_2 - 3) = 0$ , 所以  $t_1 + t_2 = 3$ . ..... 10 分

因为  $\frac{3y_1 + 6 - x_1}{y_1 + 2} = 3 - \frac{x_1}{y_1 + 2} = 3 - t_1 = t_2 = \frac{x_2}{y_2 + 2}$ , 所以  $\overrightarrow{AN} \parallel \overrightarrow{AH}$ , 因此

直线  $HN$  过定点  $A$ . ..... 12 分

解法二: 由题意得线段  $AB$  的方程为  $y = \frac{2}{3}x - 2$

$$2\left(0 \leq x \leq \frac{3}{2}\right),$$

当过点  $P(1, -2)$  的直线斜率不存在时, 直线  $MN$  的方程为  $x=1$ ,

(涉及直线的问题时, 首先讨论其斜率是否存在)

代入  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 得  $y = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$ . 因为过  $M$  且平行于  $x$  轴的直

线与线段  $AB$  有交点, 所以  $M\left(1, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right), N\left(1, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ ,

所以过点  $M$  且平行于  $x$  轴的直线方程为  $y = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$ .

..... 6 分

将  $y = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$  代入  $y = \frac{2}{3}x - 2 \left(0 \leq x \leq \frac{3}{2}\right)$ , 得

$$T\left(3-\sqrt{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right),$$

因为  $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$ , 所以  $T$  为线段  $MH$  的中点,

所以  $H\left(5-2\sqrt{6}, -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$ .

则直线  $HN$  的方程为  $y = \left(2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)x - 2$ , 过定点  $(0, -2)$ .

..... 8 分

当过点  $P(1, -2)$  的直线斜率存在时, 设直线  $MN$  的方程为

$$kx - y - (k+2) = 0.$$

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ kx - y - (k+2) = 0, \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 并整理得 } (3k^2+4)x^2 - 6k(2+k)x +$$

$$3k(k+4) = 0,$$

$$\Delta = [-6k(2+k)]^2 - 4(3k^2+4) \cdot 3k(k+4)$$

$$= 96k^2 - 192k > 0, \text{ 即 } k < 0 \text{ 或 } k > 2.$$

设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{6k(2+k)}{3k^2+4}, x_1 x_2 = \frac{3k(k+4)}{3k^2+4},$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = \frac{-8(2+k)}{3k^2+4}, y_1 y_2 = \frac{8(2+2k-k^2)}{3k^2+4},$$

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 = \frac{-24k}{3k^2+4}.$$

因为过  $M$  且平行于  $x$  轴的直线与线段  $AB$  有交点, 所以  $-2 <$

$$y_1 \leq -1.$$

$$\text{由} \begin{cases} y = y_1, \\ y = \frac{2}{3}x - 2, 0 \leq x \leq \frac{3}{2}, \end{cases} \quad \text{得 } T\left(\frac{3y_1}{2} + 3, y_1\right) \quad (-2 < y_1 \leq -1).$$

因为  $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TH}$ , 所以  $T$  为线段  $MH$  的中点,

所以  $H(3y_1 + 6 - x_1, y_1)$ .

当  $3y_1 + 6 - x_1 \neq x_2$  时,

$$\text{直线 } HN \text{ 的方程为 } y - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{3y_1 + 6 - x_1 - x_2}(x - x_2),$$

将  $(0, -2)$  代入上式, 整理得  $2(x_1 + x_2) - 6(y_1 + y_2) + x_1 y_2 + x_2 y_1 -$

$$3y_1y_2-12=0,$$

$$\text{整理得 } 24k+12k^2+96+48k-24k-48-48k+24k^2-36k^2-48=0$$

恒成立.

$$\text{当 } 3y_1+6-x_1=x_2 \text{ 时, } k=-4,$$

$$\text{则 } x_2=0, N(0, 2), x_1=\frac{12}{13}, y_1=-\frac{22}{13}, M\left(\frac{12}{13}, -\frac{22}{13}\right),$$

$$H\left(0, -\frac{22}{13}\right), \text{直线 } HN \text{ 为 } y \text{ 轴, 过点 } (0, -2).$$

综上, 直线  $HN$  过定点  $(0, -2)$ . ..... 12 分

## 22. 【命题点】极坐标方程与直角坐标方程、参数方程与普通方程的互化

$$\text{【解】(1) 因为直线 } l \text{ 的极坐标方程为 } \rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + m = 0,$$

$$\text{即 } \rho\left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right) + m = 0,$$

$$\text{所以 } \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + m = 0, \text{ 即 } \sqrt{3}x + y + 2m = 0. \text{ ..... 3 分}$$

$$(2) \text{ 因为曲线 } C \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos 2t = \sqrt{3}(1 - 2\sin^2 t), \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

( $t$  为参数),

$$\text{所以 } x = \sqrt{3}\left[1 - 2 \times \left(\frac{y}{2}\right)^2\right], \text{ 即 } x = \sqrt{3}\left(1 - \frac{y^2}{2}\right) (-2 \leq y \leq 2).$$

..... 5 分

$$\text{联立曲线 } C \text{ 与直线 } l \text{ 的方程得 } -\frac{y+2m}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{y^2}{2}\right), \text{ 即 } 3y^2 -$$

$$2y - 6 = 4m (-2 \leq y \leq 2). \text{ ..... 8 分}$$

因为直线  $l$  与  $C$  有公共点,

$$\text{所以 } -\frac{19}{3} \leq 4m \leq 10,$$

$$\text{即 } -\frac{19}{12} \leq m \leq \frac{5}{2}, \text{ 即 } m \text{ 的取值范围为 } \left[-\frac{19}{12}, \frac{5}{2}\right]. \text{ ..... 10 分}$$

## 23. 【命题点】基本不等式的应用

$$\text{【证明】(1) 因为 } a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} = 1, \text{ 所以 } a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} + c^{\frac{3}{2}} = 1 \geq$$

$$3\sqrt[3]{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}} = 3(abc)^{\frac{1}{2}}, \text{ 当且仅当 } a=b=c=\frac{1}{\sqrt[3]{9}} \text{ 时等号成立,}$$

$$\text{所以 } abc \leq \frac{1}{9}. \text{ ..... 5 分}$$

$$(2) \text{ 因为 } b+c \geq 2\sqrt{bc}, \text{ 当且仅当 } b=c \text{ 时等号成立,}$$

$$a+c \geq 2\sqrt{ac}, \text{ 当且仅当 } a=c \text{ 时等号成立,}$$

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ 当且仅当 } a=b \text{ 时等号成立, ..... 7 分}$$

$$\text{所以 } \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}} + \frac{b}{2\sqrt{ac}} + \frac{c}{2\sqrt{ab}} =$$

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}}{2\sqrt{abc}} = \frac{1}{2\sqrt{abc}},$$

$$\text{当且仅当 } a=b=c=\frac{1}{\sqrt[3]{9}} \text{ 时等号成立. ..... 10 分}$$