

1. D 【命题点】集合的基本运算

【解析】因为全集 $U=(-3,3)$, $A=(-2,1]$, 所以 $\complement_U A=(-3,-2] \cup (1,3)$, 故选 D.

快解 因为 $1 \in A$, 所以 $1 \notin \complement_U A$, 可排除 A, B; 因为 $0 \in A$, 所以 $0 \notin \complement_U A$, 可排除 C, 故选 D.

2. B 【命题点】复数的四则运算与模

【解析】依题意可得 $z = \frac{3-4i}{i} = \frac{(3-4i)i}{i^2} = -4-3i$, 所以 $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$, 故选 B.

一题多解 依题意可得 $|i \cdot z| = |i| \cdot |z| = |3-4i| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$, 所以 $|z| = 5$. 故选 B.

3. A 【命题点】圆的性质

【解析】依题意可知圆心坐标为 $(a, 0)$, 又直线 $2x+y-1=0$ 是圆的一条对称轴, 所以圆心在该直线上, 即 $2a+0-1=0$, 解得 $a=\frac{1}{2}$, 故选 A.

4. C 【命题点】函数的性质

【解析】依题意可知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 又 $f(-x) = \frac{1}{1+2^{-x}} = \frac{2^x}{1+2^x}$, 所以 $f(-x) + f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^x} = 1$, 故选 C.

5. C 【命题点】二倍角公式、余弦型三角函数的单调性

【解析】由二倍角公式可知 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.

对于 A 选项, 因为 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $2x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right)$, 故函数 $f(x) = \cos 2x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增, 所以 A 选项不正确;

对于 B 选项, 因为 $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right)$, 所以 $2x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$, 故函数 $f(x) = \cos 2x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{12}\right)$ 上不单调, 所以 B 选项不正确;

对于 C 选项, 因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $2x \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, 故函数 $f(x) = \cos 2x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调递减, 所以 C 选项正确;

对于 D 选项, 因为 $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right)$, 所以 $2x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right)$, 故函数 $f(x) = \cos 2x$ 在 $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 上不单调, 所以 D 选项不正确.

故选 C.

一题多解 由二倍角公式可知 $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$. 对于 A 选项, 因为 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$, 所以 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) < f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, 所以 A 选项不正确; 对于 B 选项, 因为 $f(0) = 1, f\left(\frac{\pi}{24}\right) = \cos \frac{\pi}{12} < 1$, 所以 $f(0) > f\left(\frac{\pi}{24}\right)$, 所以 B 选项不正确; 对于 D 选项, 因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi = -1$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 D 选项不正确. 故选 C.

6. C 【命题点】等差数列的性质、充要条件的判定

【解析】由题意知数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$.

充分性: 若 $\{a_n\}$ 为递增数列, 则 $d > 0$, 故 $\{a_n\}$ 从某项开始均为正数;

必要性: 存在正整数 N_0 , 当 $n > N_0$ 时, $a_n > 0$, 若 $d < 0$, 则从某项开始 $a_n < 0$, 矛盾, 故 $d > 0, \{a_n\}$ 为递增数列. 故选 C.

7. D 【命题点】对数运算、图像判断

【解析】对于 A 选项, 当 $T = 220, P = 1\ 026$ 时, $\lg P = \lg 1\ 026 > \lg 10^3 = 3$, 根据题图可知, 二氧化碳处于固态;

对于 B 选项, 当 $T = 270, P = 128$ 时, $\lg P = \lg 128 \in (2, 3)$, 根据题图可知, 二氧化碳处于液态;

对于 C 选项, 当 $T = 300, P = 9\ 987$ 时, $\lg P = \lg 9\ 987 < \lg 10^4 = 4$, 且 $\lg P$ 接近于 4, 根据题图可知, 二氧化碳处于固态;

对于 D 选项, 当 $T = 360, P = 729$ 时, $\lg P = \lg 729 \in (2, 3)$, 根据题图可知, 二氧化碳处于超临界状态. 故选 D.

8. B 【命题点】二项式定理及应用

【解析】依题意, 令 $x = 1$, 可得 $1 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0$, 令 $x = -1$, 可得 $81 = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0$, 以上两式相加可得 $82 = 2(a_4 + a_2 + a_0)$, 所以 $a_0 + a_2 + a_4 = 41$, 故选 B.

快解 二项式 $(2x-1)^4$ 的通项为 $T_{r+1} = C_4^r (2x)^{4-r} \cdot (-1)^r$, 分别令 $r = 4, 2, 0$, 得 $a_0 = 1, a_2 = 24, a_4 = 16$, 所以 $a_0 + a_2 + a_4 = 41$, 故选 B.

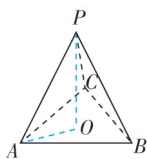
9. B 【命题点】正四面体的结构特征、圆的面积

【解析】设 O 为正三角形 ABC 的中心, 连接 PO ,

AO , 如图. 在正三角形 ABC 中, $AO = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 =$

$2\sqrt{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle PAO$ 中, $PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} =$

$\sqrt{36 - 12} = 2\sqrt{6}$.



当 $PQ = 5$ 时, 根据勾股定理 $OQ = \sqrt{PQ^2 - PO^2} = 1 < \sqrt{3}$, 得 Q 点的轨迹是以 O 为圆心, 1 为半径的圆, 则集合 T 表示的区域

的面积为 π , 故选 B.

10. D

思路导引 建立平面直角坐标系 \rightarrow 点 P 的轨迹为圆 \rightarrow

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 - \frac{25}{4} \rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 \text{ 表示}$$

圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点到点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 的距离的平方 \rightarrow 圆心 $(0, 0)$

到点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 的距离加(减)半径 $\rightarrow \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in [-4, 6]$.

【命题点】平面向量的数量积、圆上一点到定点的距离的范围

【解析】以 C 为坐标原点, CA, CB 所在直线分别为 x, y 轴建立平面直角坐标系, 如图所示, 则 $A(3,$

$0), B(0, 4)$. 设 $P(x, y)$, 则 $x^2 + y^2 = 1$,

$\overrightarrow{PA} = (3-x, -y), \overrightarrow{PB} = (-x, 4-y)$, 所以

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2 - 3x + y^2 - 4y = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 +$$

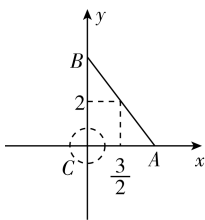
$(y-2)^2 - \frac{25}{4}$. 因为 $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2$ 表示为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点到点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 的距离的平方, 又圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点到点

$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 的距离的最值可由圆心 $(0, 0)$ 到点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 的距离

加(减)半径得到, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in$

$$\left[\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 - \frac{25}{4}, \left(\frac{5}{2}+1\right)^2 - \frac{25}{4}\right], \text{ 即 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in [-4, 6], \text{ 故}$$

选 D.



11. $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ **【命题点】**函数的定义域

【解析】因为 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$, 所以 $\begin{cases} x \neq 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases}$ 解得 $x \in$

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1].$$

12. -3 **【命题点】**双曲线的标准方程及简单几何性质

【解析】依题意得 $m < 0$, 则双曲线的标准方程可化为 $y^2 - \frac{x^2}{-m} =$

1, 此时双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{\sqrt{-m}}x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 解得

$$m = -3.$$

13. 1 $-\sqrt{2}$ **【命题点】**两角差的正弦公式、三角函数的零点

【解析】依题意得 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = A \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 0$, 解得 $A = 1$. 所

瞭眼

以 $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) =$

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{2}.$$

14. 0 (答案不唯一) 1 【命题点】根据分段函数的最值求参数

【解析】若 $a=0$, 则函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ (x-2)^2, & x \geq 0 \end{cases}$ 存在最小值 0,

所以 a 的一个取值可以为 0. 若 $a < 0$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1$ 单调递增, 函数 $f(x)$ 不可能存在最小值. 若 $0 < a \leq 2$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1 \in (-a^2 + 1, +\infty)$; 当 $x \geq a$ 时, $f(x) = (x-2)^2 \in [0, +\infty)$, 若函数 $f(x)$ 存在最小值, 则 $-a^2 + 1 \geq 0$, 解得 $0 < a \leq 1$. 若 $a > 2$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax + 1 \in (-a^2 + 1, +\infty)$; 当 $x \geq a$ 时, $f(x) = (x-2)^2 \in [(a-2)^2, +\infty)$, 若函数 $f(x)$ 存在最小值, 则 $-a^2 + 1 \geq (a-2)^2$, 不等式无解.

综上, $0 \leq a \leq 1$, 所以 a 的最大值为 1.

15. ①③④

思路导引 对于①, 令 $n=1 \rightarrow a_1=3 \rightarrow$ 令 $n=2 \rightarrow a_2^2+3a_2-9=0 \rightarrow a_2 < 3$;

对于②, $S_n = \frac{9}{a_n} \rightarrow S_{n-1} = \frac{9}{a_{n-1}} (n \geq 2) \rightarrow$ 两式作差得 $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}} \rightarrow \frac{9}{a_{n-1}} - \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{9-a_n^2}{9} \rightarrow$ 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列 $a_{n+1} = a_n (n \geq 2) \rightarrow a_1 = 3 \neq a_2 \rightarrow$ 不成立;

对于③, $a_n \cdot S_n = a_{n+1} \cdot S_{n+1} \rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{S_{n+1}}{S_n} > 1 \rightarrow a_n > a_{n+1} > 0$;

对于④, 采用“反证法”, 先假设数列 $\{a_n\}$ 的所有项均大于等于 $\frac{1}{100}$, 再推出与已知矛盾, 从而否定假设

【命题点】数列的通项、数列的单调性

【解析】因为 $a_n \cdot S_n = 9$, 所以 $a_1 \cdot S_1 = 9$, 又 $a_n > 0$, 所以 $a_1 = 3$.

$a_2 \cdot S_2 = a_2(a_1 + a_2) = 9$, 即 $a_2^2 + 3a_2 - 9 = 0$, 解得 $a_2 = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2} = 3 \times \frac{\sqrt{5}-1}{2} < 3$, 所以①正确. 当 $n \geq 2$ 时, 由 $S_n = \frac{9}{a_n}$,

得 $S_{n-1} = \frac{9}{a_{n-1}}$, 两式作差可得 $a_n = \frac{9}{a_n} - \frac{9}{a_{n-1}}$ (提示: 利用公式 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 求解), 即 $a_n = \frac{9(a_{n-1} - a_n)}{a_n a_{n-1}}$, 整理得 $a_n^2 =$

$\frac{9(a_{n-1} - a_n)}{a_{n-1}}$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{9 - a_n^2}{9}$. 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 则当

$n \geq 2$ 时, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{9 - a_{n+1}^2}{9} = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{9 - a_n^2}{9}$, 所以 $a_{n+1} = a_n$. 又 $a_1 = 3 \neq a_2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 不为等比数列, 所以②不正确. 由题知

$a_n \cdot S_n = a_{n+1} \cdot S_{n+1}$, 所以 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{S_{n+1}}{S_n} > 1$, 所以 $a_n > a_{n+1} > 0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, 所以③正确. 若数列 $\{a_n\}$ 的所有项均大于等于 $\frac{1}{100}$, 即 $a_n \geq \frac{1}{100}$, 取 $n > 90\ 000$, 则 $S_n > 900$, 于是 $a_n \cdot$

$S_n > 9$, 与已知矛盾, 所以 $\{a_n\}$ 中存在小于 $\frac{1}{100}$ 的项, 所以④

正确.

16. 【命题点】二倍角公式、余弦定理、三角形面积公式

【解】(1) $\because \sin 2C = \sqrt{3} \sin C, \therefore 2 \sin C \cos C = \sqrt{3} \sin C. \dots 2$ 分

又 $\because C \in (0, \pi), \therefore \sin C \neq 0, \therefore \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}. \dots\dots\dots 4$ 分

$\therefore C = \frac{\pi}{6}. \dots\dots\dots 5$ 分

(2) $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = 6\sqrt{3}, \sin C = \frac{1}{2}, b = 6,$

$\therefore a = 4\sqrt{3}. \dots\dots\dots 8$ 分

由余弦定理知 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 12, \therefore c = 2\sqrt{3}.$

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{3} + 6. \dots\dots\dots 13$ 分

17. 【命题点】线面平行的判定、面面垂直的性质及利用空间向量求线面角的正弦值

(1) 【证明】取 BC 中点 D , 连接 B_1D, DN . 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $A_1B_1 \parallel AB, A_1B_1 = AB$.

因为 M, N, D 分别为 A_1B_1, AC, BC 的中点, 所以 $B_1M \parallel AB, B_1M =$

$\frac{1}{2}AB, DN \parallel AB, DN = \frac{1}{2}AB$, 所以

$B_1M \parallel DN$ 且 $B_1M = DN$,

所以四边形 B_1MND 为平行四边形, 因此 $B_1D \parallel MN. \dots\dots 4$ 分

又 $MN \not\subset$ 平面 $BCC_1B_1, B_1D \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $MN \parallel$ 平面 $BCC_1B_1. \dots\dots\dots 6$ 分

(另解: 取 AB 的中点 H , 连接 MH, HN , 利用 $MH \parallel B_1B, HN \parallel BC$, 证明平面 $MHN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 , 再证明 $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1)

(2) 【解】选条件①:

因为侧面 BCC_1B_1 为正方形, 所以 $BC \perp BB_1$.

又因为平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 且平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = BB_1, BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

又因为 $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $AB \perp BC$.

因为 $B_1D \parallel MN, AB \perp MN$, 所以 $AB \perp B_1D$.

又 $B_1D \cap BC = D$, 所以 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

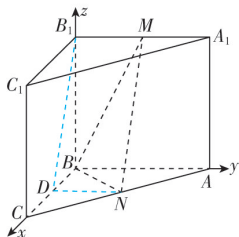
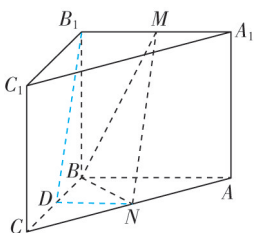
因为 $BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AB \perp BB_1$,

所以在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, BA, BC, BB_1 两两垂直,

故分别以 BC, BA, BB_1 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系. $\dots\dots\dots 8$ 分

因为 $AB = BC = BB_1 = 2$,

所以 $B(0, 0, 0), N(1, 1, 0), M(0,$



1,2), $A(0,2,0)$,

所以 $\overrightarrow{BN}=(1,1,0)$, $\overrightarrow{BM}=(0,1,2)$, $\overrightarrow{AB}=(0,-2,0)$.

..... 10 分

设平面 BMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由 $\begin{cases} \overrightarrow{BN} \cdot \boldsymbol{n}=0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \boldsymbol{n}=0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x+y=0, \\ y+2z=0, \end{cases}$ 令 $x=2$, 得 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.

..... 12 分

设直线 AB 与平面 BMN 所成角为 θ ,

则 $\sin \theta=|\cos \langle \boldsymbol{n}, \overrightarrow{AB} \rangle|=\frac{|\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\boldsymbol{n}| |\overrightarrow{AB}|}=\frac{|4|}{3 \times 2}=\frac{2}{3}$,

所以直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.

..... 14 分

选条件②:

因为侧面 BCC_1B_1 为正方形, 所以 $BC \perp BB_1$.

又因为平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 且平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $ABB_1A_1=BB_1$, $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

又因为 $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $AB \perp BC$.

取 AB 中点 H , 连接 HM, HN .

因为 M, N, H 分别为 A_1B_1, AC , AB 的中点,

所以 $B_1B // MH, BC // HN$.

又 $BC \perp BB_1$, 所以 $HN \perp MH$.

因为 $AB=BC=2$, 所以 $HN=BH=1$.

在 $\triangle MHB$ 和 $\triangle MHN$ 中, $BM=$

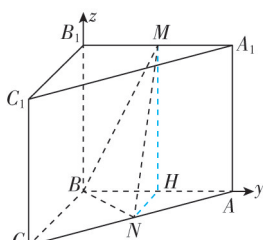
$MN, BH=HN$, 公共边为 MH , 所以 $\triangle MHB \cong \triangle MHN$,

因此 $\angle MHB=\angle MHN=90^\circ$, 即 $MH \perp AB$, 故 $B_1B \perp AB$.

所以在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, BA, BC, BB_1 两两垂直,

故分别以 BC, BA, BB_1 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系. 8 分

后同选①.



18. 【命题点】用频率估计概率、数学期望的计算

【解】(1) 甲比赛成绩达到 9.50 m 以上 (含 9.50 m) 的有 4 次, 用频率估计概率得 $P_{\text{甲}}=\frac{4}{10}=0.4$, 即估计甲在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率为 0.4. 3 分

(2) 用频率估计概率, 得乙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率 $P_{\text{乙}}=\frac{3}{6}=0.5$, 4 分

丙在校运动会铅球比赛中获得优秀奖的概率 $P_{\text{丙}}=\frac{2}{4}=0.5$.

..... 5 分

由题意得 X 的可能取值为 $0, 1, 2, 3$,

则 $P(X=0)=0.6 \times 0.5 \times 0.5=0.15$,

$P(X=1)=0.4 \times 0.5 \times 0.5+0.6 \times 0.5 \times 0.5+0.6 \times 0.5 \times 0.5=0.4$,

$P(X=2)=0.4 \times 0.5 \times 0.5+0.4 \times 0.5 \times 0.5+0.6 \times 0.5 \times 0.5=0.35$,

$P(X=3)=0.4 \times 0.5 \times 0.5=0.1$,

则 $EX=0 \times 0.15+1 \times 0.4+2 \times 0.35+3 \times 0.1=1.4$ 10 分

(3) 丙获得冠军的概率估计值最大. 丙投到过 3 人成绩中的最大值 9.85, 比甲、乙的最大值都要大, 若比赛中发挥出好状态, 丙实力最强. 13 分

19. 【命题点】椭圆的标准方程、直线与椭圆的位置关系

【解】(1) 由题意可知
$$\begin{cases} b=1, \\ 2c=2\sqrt{3}, \\ a^2=b^2+c^2, \end{cases} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

解得
$$\begin{cases} a=2, \\ b=1, \\ c=\sqrt{3}, \end{cases}$$

故椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 4 分

(2) 由题意得直线 BC 的方程为 $y-1=k(x+2) (k \neq 0)$,

设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$,

则 $x_1, x_2 \in (-2, 0) \cup (0, 2), y_1, y_2 \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

联立
$$\begin{cases} y-1=k(x+2), \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases} \text{ 得 } (4k^2+1)x^2+8k(2k+1)x+16k^2+16k=0,$$

由 $\Delta=64k^2(2k+1)^2-4(4k^2+1)(16k^2+16k)>0$, 得 $k<0$, 6 分

所以
$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{8k(2k+1)}{4k^2+1}, \\ x_1x_2=\frac{16k^2+16k}{4k^2+1}, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} y_1+y_2=\frac{4k+2}{4k^2+1}, \\ y_1y_2=\frac{4k+1}{4k^2+1}. \end{cases} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

又因为直线 AB 的方程为 $y-1=\frac{y_1-1}{x_1}x$, 所以令 $y=0$ 得 $x=-\frac{x_1}{y_1-1}$, 即 $M\left(-\frac{x_1}{y_1-1}, 0\right)$, 同理可得 $N\left(-\frac{x_2}{y_2-1}, 0\right)$ 10 分

所以 $|MN|=\left|-\frac{x_2}{y_2-1}+\frac{x_1}{y_1-1}\right|=2$,

即 $|-x_2(y_1-1)+x_1(y_2-1)|=2|(y_1-1)(y_2-1)|$,

即 $|-x_2y_1+x_2+x_1y_2-x_1|=2|y_1y_2-(y_1+y_2)+1|$,

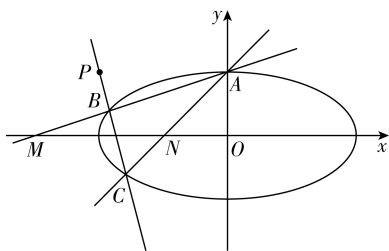
即 $|-x_2(kx_1+2k+1)+x_2+x_1(kx_2+2k+1)-x_1|=2|y_1y_2-(y_1+y_2)+1|$,

即 $|-x_2(kx_1+2k+1)+x_2+x_1(kx_2+2k+1)-x_1|=2|y_1y_2-(y_1+y_2)+1|$,

$$\text{即 } |k(x_1 - x_2)| = |y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1|,$$

$$\text{即 } k^2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = [y_1 y_2 - (y_1 + y_2) + 1]^2,$$

所以 $-4k^3 = k^4$, 所以 $k = 0$ (舍) 或 $k = -4$ 15 分



20. 思路导引 (1) 求出 $f'(x) \rightarrow f'(0) \rightarrow$ 曲线在 $(0, f(0))$

处的切线方程;

$$(2) \text{ 求出 } g'(x) = e^x \left[\ln(x+1) + \frac{2x+1}{(x+1)^2} \right] \xrightarrow{x \geq 0} g'(x) > 0 \rightarrow$$

$g(x)$ 单调递增;

(3) 根据题意设关于 s 的函数 $F(s) = f(s+t) - f(s) - f(t) \rightarrow$ 求出

$$F'(s) \rightarrow \text{转化为 } F'(s) = g(s+t) - g(s) \xrightarrow{\text{结合(2)}} F'(s) > 0 \rightarrow F(s) > 0 \rightarrow f(s+t) > f(s) + f(t).$$

【命题点】导数的几何意义, 利用导数研究函数的单调性

(1) 【解】因为 $f(x) = e^x \ln(x+1), x > -1$,

$$\text{所以 } f'(x) = e^x \ln(x+1) + e^x \cdot \frac{1}{x+1},$$

所以 $f'(0) = 1$, 而 $f(0) = 0$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - 0 = x - 0$,

即 $x - y = 0$ 4 分

$$(2) \text{ 【解】 } g(x) = f'(x) = e^x \ln(x+1) + e^x \cdot \frac{1}{x+1} =$$

$$e^x \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right], x > -1,$$

$$\text{则 } g'(x) = e^x \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right] + e^x \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] =$$

$$e^x \left[\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] = e^x \left[\ln(x+1) + \frac{2x+1}{(x+1)^2} \right], x > -1.$$

因为当 $x \geq 0$ 时, $\ln(x+1) \geq 0, \frac{2x+1}{(x+1)^2} > 0, e^x \geq 1$,

所以 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 10 分

(3) 【证明】设 $F(s) = f(s+t) - f(s) - f(t) = e^{s+t} \ln(1+s+t) - e^s \ln(1+s) - e^t \ln(1+t)$,

$$\text{则 } F'(s) = e^{s+t} \left[\ln(1+s+t) + \frac{1}{1+s+t} \right] - e^s \left[\ln(1+s) + \frac{1}{1+s} \right] = g(s+t) - g(s).$$

(构造新函数 $F(s) = f(s+t) - f(s) - f(t)$, 将待证问题转化为证明 $F(s)$ 的单调性, 结合 s 的范围可证)

由(2)知 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $s > 0, t > 0$,

所以 $g(s+t) > g(s)$, 即 $F'(s) > 0$, 所以 $F(s)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $F(s) > F(0) = f(0+t) - f(0) - f(t) = -f(0) = 0$,

所以对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$, 有 $f(s+t) > f(s) + f(t)$ 15 分

21. 【命题点】数列新定义

(1) 【解】若 $m = 5$, 则对于任意的 $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $a_2 = 1$, $a_1 = 2$, $a_1 + a_2 = 2 + 1 = 3$, $a_3 = 4$, $a_2 + a_3 = 1 + 4 = 5$,

所以 Q 是 5-连续可表数列; 3 分

由于不存在任意连续若干项相加之和为 6,

所以 Q 不是 6-连续可表数列.

(2) 【证明】假设 k 的值为 3, 则 a_1, a_2, a_3 最多能表示 $a_1, a_2, a_3, a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + a_2 + a_3$ 共 6 个数字, 与 Q 是 8-连续可表数列矛盾, 同理 k 的值为 1, 2 也不满足题意, 故 $k \geq 4$.

现构造 $Q: 6, 2, -1, 4$, 可以表示出 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 这 8 个数字, 即存在 $k = 4$ 满足题意.

故 k 的最小值为 4. 8 分

(3) 【证明】先证明 $k \geq 6$.

从 5 个正整数中, 取一个数字只能表示自身, 最多可表示 5 个数字, 取连续两个数字最多能表示 4 个数字, 取连续三个数字最多能表示 3 个数字, 取连续四个数字最多能表示 2 个数字, 取连续五个数字最多能表示 1 个数字, 所以对任意给定的 5 个正整数, 最多可以表示 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ 个正整数, 不能表示 20 个正整数, 同理 k 的值小于 5 也不满足题意, 则 $k \geq 6$.

若 $k = 6$, 最多可以表示 $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ 个正整数,

由于 Q 为 20-连续可表数列, 且 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k < 20$,

所以其中必有一项为负数.

由前面证明可知有 5 个正整数时, 最多可以表示 15 个正整数, 那么加入 1 个负数, 更不可能是 20-连续可表数列,

所以至少要有 6 个正整数和 1 个负整数才能满足题意,

故 $k \geq 7$ 15 分