

1. A 【命题点】复数的乘法运算

【解析】 $(1+3i)(3-i)=3-i+9i+3=6+8i$, 在复平面内对应的点的坐标为 $(6,8)$, 位于第一象限, 故选 A.

2. B 【命题点】集合之间的包含关系

【解析】由题意知 $0 \in B$. 当 $a-2=0$ 时, 即 $a=2$, 此时 $A=\{0, -2\}$, $B=\{1, 0, 2\}$, $A \not\subseteq B$, 不符合题意. 当 $2a-2=0$ 时, 即 $a=1$, 此时 $A=\{0, -1\}$, $B=\{1, -1, 0\}$, 满足 $A \subseteq B$, 所以 $a=1$, 故选 B.

3. D 【命题点】分层随机抽样、组合数、分步乘法计数原理

【解析】由题意知初中部和高中部人数之比为 $\frac{400}{200} = \frac{2}{1}$, 则从初中部和高中部抽取的人数分别为 40, 20, 所以不同的抽样结果共有 $C_{400}^{40} \cdot C_{200}^{20}$ 种, 故选 D.

4. B 【命题点】偶函数的定义

【解析】由 $\frac{2x-1}{2x+1} > 0$, 得 $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > \frac{1}{2}$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. 由 $f(x)$ 为偶函数可知 $f(x)=f(-x)$, 即 $(x+a) \ln \frac{2x-1}{2x+1} = (-x+a) \ln \frac{-2x-1}{-2x+1}$, 化简得 $(x+a) \ln \frac{2x-1}{2x+1} = (x-a) \ln \frac{2x-1}{2x+1}$. 又 $\frac{2x-1}{2x+1} \neq 1$, 即 $\ln \frac{2x-1}{2x+1} \neq 0$, 所以 $x+a=x-a$, 解得 $a=0$, 故选 B.

一题多解

设 $g(x)=x+a$, $h(x)=\ln \frac{2x-1}{2x+1}$, 则 $f(x)=g(x) \cdot h(x)$. 因为 $h(-x)=\ln \frac{-2x-1}{-2x+1}=\ln \frac{2x+1}{2x-1}=-\ln \frac{2x-1}{2x+1}=-h(x)$, 所以 $h(x)$ 为奇函数. 又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 为奇函数(提示: 奇函数 \times 奇函数 = 偶函数, 奇函数 \times 偶函数 = 奇函数), 所以 $a=0$, 故选 B.

5. C 【命题点】直线与椭圆的位置关系、三角形面积比

【解析】设直线 $y=x+m$ 与 x 轴交于点 $M(-m, 0)$, 直线方程与椭圆方程联立得 $\frac{4x^2}{3} + 2mx + m^2 - 1 = 0$, $\Delta = (2m)^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot (m^2 - 1) > 0$, 解得 $-2 < m < 2$. 设 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$, $F_2(\sqrt{2}, 0)$ 到直线 AB 的距离分别为 d_1, d_2 , 由题意得, $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d_2 = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d_1$, 所以 $d_1 = 2d_2$. 由三角形相似可得, $\frac{d_1}{d_2} = \frac{|F_1M|}{|F_2M|} = \frac{|-\sqrt{2}+m|}{|\sqrt{2}+m|} = 2$ (另解: 由点到直线的距离公式得 $d_1 = \frac{|-\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}, d_2 = \frac{|\sqrt{2}+m|}{\sqrt{2}}$), 解得 $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ 或 $m = -3\sqrt{2}$. 因为 $-2 < m < 2$, 所以 $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$, 故选 C.

6. C 【命题点】根据函数单调性求参数取值范围

【解析】 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$, 由 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 单调递增可知, 当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立. 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 不符合题意. 当 $a > 0$ 时, 设 $h(x) = ae^x - \frac{1}{x}$, 则 $h'(x) = ae^x + \frac{1}{x^2} > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 单调递增, 所以只需 $f'(1) = h(1) = ae^1 - 1 \geq 0$, 解得 $a \geq e^{-1}$, 故选 C.

一题多解

由题意可知 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x} \geq 0$ 在区间 $(1, 2)$ 上恒成立, 即 $a \geq \left(\frac{1}{xe^x} \right)_{\max}$, $x \in (1, 2)$. 设 $g(x) = xe^x$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x > 0$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, $e < xe^x < 2e^2$, 所以 $\frac{1}{e} > \frac{1}{xe^x} > \frac{1}{2e^2}$, 即 $a \geq e^{-1}$, 故选 C.

7. D 【命题点】二倍角公式

【解析】因为 $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, 所以 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$. 又因为 α 为锐角, 所以 $\frac{\alpha}{2}$ 为锐角, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right)^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 故选 D.

8. C 【命题点】等比数列的求和

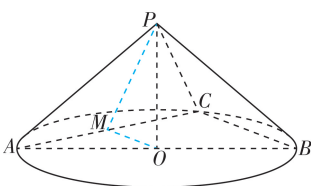
【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q (提示: 本题中等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq \pm 1$). 因为 $S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 21S_2 = 21 \cdot \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$, 整理得 $1-q^6 = 21(1-q^2)$, 又 $1-q^6 = (1-q^2)(1+q^2+q^4)$, 所以 $1+q^2+q^4 = 21$, 即 $(q^2-4)(q^2+5) = 0$, 解得 $q^2 = 4$. 又 $S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q}$, $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = -5$, 所以 $\frac{S_8}{S_4} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = 1+q^4 = 17$, 故 $S_8 = -85$, 故选 C.

一题多解

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 根据等比数列前 n 项和的性质得 $S_2, S_4-S_2, S_6-S_4, S_8-S_6$ 成等比数列, 因为 $S_4 = -5, S_6 = 21S_2$, 即 $S_2, -5-S_2, 21S_2+5, S_8-21S_2$ 成等比数列, 公比为 q^2 , 所以 $(-5-S_2)^2 = (21S_2+5)S_2$, 整理得 $(4S_2-5)(S_2+1) = 0$, 解得 $S_2 = \frac{5}{4}$ 或 $S_2 = -1$. 当 $S_2 = \frac{5}{4}$ 时, $\frac{S_4-S_2}{S_2} = -5 < 0$, 不符合题意; 当 $S_2 = -1$ 时, 即 $-1, -4, -16, S_8+21$ 成等比数列, 所以 $(S_8+21) \times (-4) = (-16)^2$, 解得 $S_8 = -85$, 故选 C.

9. AC 【命题点】圆锥的体积、侧面积计算

【解析】对于 A, 依题意, 圆锥母线长 $l = PA = PB = 2$, $PO = PA \cdot \cos 60^\circ = 1$, $AO = BO = PA \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$, 所以底面



圆的半径 $r=\sqrt{3}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot 1 = \pi$, 故 A 正

确; 对于 B, 该圆锥的侧面积为 $\pi rl = \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3}\pi$, 故 B

错误; 对于 C, 如图, 取 AC 的中点 M , 连接 PM, OM , 则 $OM \perp AC$, 又因为 $PA = PC$, 所以 $PM \perp AC$, 故 $\angle PMO$ 为二面角 $P-AC-O$ 的平面角, 即 $\angle PMO = 45^\circ$, 所以 $\tan 45^\circ = \frac{PO}{OM} = 1$, 即

$OM = 1$, 所以 $AC = 2\sqrt{AO^2 - OM^2} = 2 \times \sqrt{3 - 1} = 2\sqrt{2}$, 故 C 正确;

对于 D, 由选项 C 可知, $AC = 2\sqrt{2}$, $PM \perp AC$, $PM =$

$\sqrt{PA^2 - \left(\frac{1}{2}AC\right)^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$, 所以 $\triangle PAC$ 的面积为 $\frac{1}{2}PM \cdot$

$AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 2$, 故 D 错误. 故选 AC.

10. AC 【命题点】抛物线的焦点、准线以及弦长

【解析】对于 A, 依题意, 抛物线 C 的焦点为 $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 直线

$y = -\sqrt{3}(x-1)$ 过点 $(1, 0)$, 所以 $\frac{p}{2} = 1$, 解得 $p = 2$, 故 A 正确.

对于 B, 由 A 可知抛物线 $C: y^2 = 4x$, 将直线方程 $y = -\sqrt{3}(x-1)$ 与 C 的方程联立、整理可得 $3x^2 - 10x + 3 = 0$. 设 $M(x_1, y_1)$,

$N(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$. 设抛物线 C 的焦点为 F , 由抛物线

的定义可知, $|MF| = x_1 + 1$, $|NF| = x_2 + 1$, 所以 $|MN| = |MF| +$

$|NF| = x_1 + x_2 + 2 = \frac{16}{3}$, 故 B 错误. 对于 C, 由 B 知 $|MN| = \frac{16}{3}$,

所以以 MN 为直径的圆的半径为 $\frac{8}{3}$. 设 MN 的中点为 P , 因

为 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{3}$, 即点 P 的横坐标为 $\frac{5}{3}$, 所以 P 到 C 的准线的

距离为 $\frac{8}{3}$, 所以以 MN 为直径的圆与 l 相切, 故 C 正确. 对

于 D, 由于 $3x^2 - 10x + 3 = (3x-1)(x-3) = 0$, 不妨设 $x_1 = 3$,

$x_2 = \frac{1}{3}$, 将 $x_1 = 3$ 代入 $y = -\sqrt{3}(x-1)$, 解得 $y_1 = -2\sqrt{3}$, 所以

$M(3, -2\sqrt{3})$, $|MO| = \sqrt{3^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{21}$, 同理可得

$|NO| = \frac{\sqrt{13}}{3}$, 又 $|MN| = \frac{16}{3}$, 所以 $\triangle OMN$ 不是等腰三角形,

故 D 错误. 故选 AC.

一题多解

由题意知 $\frac{p}{2} = 1$, 故 $p = 2$, 故 A 正确. 设抛物线 C 的焦点为 F , 则 $F(1, 0)$, 准线方程为 $x = -1$. 因为直线 $y = -\sqrt{3}(x-1)$ 的斜率为 $-\sqrt{3}$, 所以直线 MN 的倾斜角为 120° , 不妨设 N 位于第一象限, M 位于第四象限, 设 M_1, N_1 分别为 M, N 在准线上的射影, 根据抛物线的定义知 $|NF| =$

$|NN_1|$, 所以 $|NF| \cos 60^\circ + |NN_1| = p = 2$, 解得 $|NF| = \frac{2}{1 + \cos 60^\circ} = \frac{4}{3}$, 同理可得 $|MF| = \frac{2}{1 - \cos 60^\circ} = 4$, 所以 $|MN| = |MF| + |NF| = \frac{16}{3}$, 故 B 错误. 取 MN 的中点 P (图略), 根据梯形的中位线性质知点 P 到准线的距离 $d = \frac{|MM_1| + |NN_1|}{2} = \frac{|MF| + |NF|}{2} = \frac{|MN|}{2}$, 所以以 MN 为直径的圆与 l 相切, 故 C 正确. 在 $\triangle NOF$ 中, $|NF| = \frac{4}{3}$, $|OF| = 1$, $\angle NFO = 60^\circ$, 由余弦定理可得 $|ON|^2 = |NF|^2 + |OF|^2 - 2|NF| \cdot |OF| \cdot \cos 60^\circ$, 解得 $|ON| = \frac{\sqrt{13}}{3}$, 同理可得 $|OM| = \sqrt{21}$, 又 $|MN| = \frac{16}{3}$, 所以 $\triangle OMN$ 不是等腰三角形, 故 D 错误.

11. BCD 【命题点】函数的极值、二次函数零点分析

【解析】依题意, $x > 0$, $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}$. 设 $g(x) = ax^2 - bx - 2c$, 由题意 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点 x_1, x_2 (提示: 将函数极值问题转化成导函数零点问题, 注意 $g(x)$ 的两个零点均需大于 0), 所以 $x_1 + x_2 = \frac{b}{a} > 0$, $x_1 x_2 = -\frac{2c}{a} > 0$, 则 $-\frac{2bc}{a^2} > 0$, 所以 $ab > 0, ac < 0, bc < 0$, 故 A 错误, B 正确, D 正确. 因为二次函数 $g(x)$ 有两个正零点, 所以 $\Delta = b^2 + 8ac > 0$, 故 C 正确. 故选 BCD.

快解 同上得 $g(x) = ax^2 - bx - 2c$ 有两个正零点, 则可假设 $g(x) = (x-1)(x-2)$, 所以 $a=1, b=3, c=-1$, 所以 $bc < 0$, 故 A 错误.

12. ABD

思路导引 对于 A 与 B, 根据相互独立事件的概率公式求解;

对于 C, 分两种情况讨论 $\begin{cases} \text{发送 1, 依次收到 1, 1, 1,} \\ \text{发送 1, 恰好收到两次 1, 一次 0;} \end{cases}$
对于 D, 分别算出采用三次传输方案译码为 0 的概率以及单次传输方案译码为 0 的概率 \rightarrow 将两个概率作差 \rightarrow 设函数 $f(\alpha) \rightarrow$ 根据 $0 < \alpha < 0.5$ 判断 $f(\alpha)$ 的符号 \rightarrow 结论

【命题点】相互独立事件的概率、 n 重伯努利试验

【解析】对于 A 选项, 采用单次传输方案, 依次发送 1, 0, 1, 依次收到 1, 0, 1 的概率为 $(1-\beta)(1-\alpha)(1-\beta) = (1-\alpha)(1-\beta)^2$, 所以 A 选项正确.

对于 B 选项, 采用三次传输方案, 发送 1, 依次收到 1, 0, 1 的概率为 $(1-\beta)\beta(1-\beta) = \beta(1-\beta)^2$, 所以 B 选项正确.

对于 C 选项, 采用三次传输方案, 发送 1, 依次收到 1, 1, 1 (即译码为 1) 的概率为 $(1-\beta)(1-\beta)(1-\beta) = (1-\beta)^3$; 发送

1, 依次收到 1, 0, 1 (即译码为 1), 0, 1, 1 (即译码为 1), 1, 1, 0 (即译码为 1) 的概率为 $3(1-\beta)\beta(1-\beta) = 3(1-\beta)^2\beta$, 于是译码为 1 的概率为 $(1-\beta)^3 + 3(1-\beta)^2\beta$, 所以 C 选项不正确. 对于 D 选项, 采用三次传输方案, 发送 0, 依次收到 0, 0, 0 (即译码为 0) 的概率为 $(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha) = (1-\alpha)^3$; 发送 0, 依次收到 0, 0, 1 (即译码为 0), 0, 1, 0 (即译码为 0), 1, 0, 0 (即译码为 0) 的概率为 $3(1-\alpha)\alpha(1-\alpha) = 3(1-\alpha)^2\alpha$, 于是译码为 0 的概率为 $(1-\alpha)^3 + 3(1-\alpha)^2\alpha$. 采用单次传输方案, 发送 0, 译码为 0 的概率为 $1-\alpha$. 依题意, 有 $(1-\alpha)^3 + 3(1-\alpha)^2\alpha > 1-\alpha, \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 即 $-2\alpha^2 + \alpha > 0, \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

令函数 $f(\alpha) = -2\alpha^2 + \alpha, \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 则 $f'(\alpha) = \alpha(1-2\alpha) > 0$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上恒成立, 所以 D 选项正确. 故选 ABD.

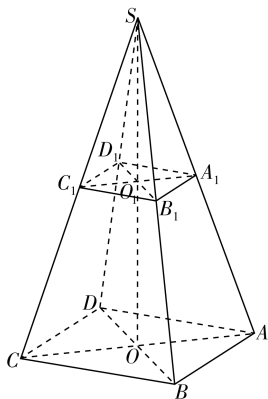
13. $\sqrt{3}$ 【命题点】平面向量的数量积及模长计算

【解析】 $\begin{cases} |a-b| = \sqrt{3}, \\ |a+b| = |2a-b|, \end{cases}$ 两式分别平方, 得

$$\begin{cases} |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = 3, \\ |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 = 4|a|^2 - 4a \cdot b + |b|^2, \end{cases} \quad \text{解得 } |b| = \sqrt{3}.$$

14. 28 【命题点】锥体、台体的体积公式

【解析】设原正四棱锥为 $S-ABCD$, 截去的正四棱锥为 $S-A_1B_1C_1D_1$, O_1, O 分别为正四棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 上、下底面的中心, 如图. 因为 $AB = 4$, $A_1B_1 = 2$, 所以 $OA = 2\sqrt{2}$, $O_1A_1 = \sqrt{2}$. 由截面平行于底面得 $\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 又 $SO_1 = 3$, 所以



$SO = 6, OO_1 = 3$, 所以正四棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 上、下底面的边长分别为 2 和 4, 高为 3, 所以 $V_{\text{台}} = \frac{1}{3} \times (4 + 16 + \sqrt{16 \times 4}) \times 3 = 28$ (另解: $V_{\text{台}} = V_{S-ABCD} - V_{S-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3} \times 16 \times 6 - \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 28$).

15. 2 或 -2 或 $\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$ (填一个即可)

【命题点】直线与圆的位置关系

【解析】由题知, $\odot C$ 的半径 $r = 2$, 圆心 $C(1, 0)$. 设圆心 C 到直线 $x - my + 1 = 0$ 的距离为 d , 则弦长 $|AB| = 2\sqrt{4-d^2}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{4-d^2} \cdot d = \frac{8}{5}$, 解得 $d^2 = \frac{4}{5}$ 或 $d^2 = \frac{16}{5}$, 所以 $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 或 $d = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. 由点到直线的距离公式可知, 当 $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

时, $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 解得 $m = \pm 2$; 当 $d = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 时, $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$,

解得 $m = \pm \frac{1}{2}$. 综上, $m = \pm 2$ 或 $\pm \frac{1}{2}$.

一题多解 由题知, $\odot C$

的半径 $r = 2$, 圆心 $C(1, 0)$,

圆心 C 到直线 $x - my + 1 = 0$ 的

距离 $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} < 2$, 所以 $m \neq 0$.

直线方程 $x - my + 1 = 0$ 可化为

$y = \frac{1}{m}(x+1)$, 所以直线的斜率为 $\frac{1}{m}$ 且过定点 $(-1, 0)$. 因为

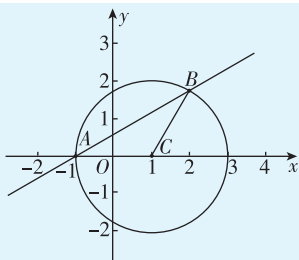
点 $(-1, 0)$ 在 $\odot C$ 上, 设为 A (如图), 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |AC| |y_B| =$

$\frac{8}{5}$, 解得 $|y_B| = \frac{8}{5}$, 所以点 B 的纵坐标为 $\pm \frac{8}{5}$. 代入 $\odot C$ 方

程, 得 $(x-1)^2 + \frac{64}{25} = 4$, 解得点 B 坐标为 $(\frac{11}{5}, \frac{8}{5})$ 或

$(\frac{11}{5}, -\frac{8}{5})$ 或 $(-\frac{1}{5}, \frac{8}{5})$ 或 $(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5})$. 因为 $A(-1, 0)$, 所

以直线 AB 的斜率为 $\pm \frac{1}{2}$ 或 ± 2 , 故 $m = \pm 2$ 或 $\pm \frac{1}{2}$.



16. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

思路导引 A, B 两点横、纵坐标关系 $\rightarrow \omega$
图像与 x, y 轴交点 $\rightarrow \varphi$ $\left. \begin{array}{l} \rightarrow f(x) \rightarrow f(\pi) \end{array} \right\}$

【命题点】 三角函数的图像与性质

【解析】 设 $A(x_1, \frac{1}{2})$, $B(x_2, \frac{1}{2})$, 由五点作图法可得

$$\begin{cases} \omega x_1 + \varphi = \frac{\pi}{6}, & \text{①} \\ \omega x_2 + \varphi = \frac{5\pi}{6}. & \text{②} \end{cases} \quad \text{②} - \text{①}, \text{得 } \omega(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{3}. \text{ 因为 } |AB| = \frac{\pi}{6},$$

所以 $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\omega = 4$. 因为函数 $f(x)$ 的图像经过点

$(\frac{2\pi}{3}, 0)$, 所以 $f(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{8\pi}{3} + \varphi) = 0$, 所以 $\frac{8\pi}{3} + \varphi = 2k\pi$,

$k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = -\frac{8\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. 由题图可知 $-1 < f(0) < 0$, 即

$-1 < \sin \varphi < 0$, 所以取 $k = 1$, 则 $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(x) =$

$\sin(4x - \frac{2\pi}{3})$, 所以 $f(\pi) = \sin(-\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

17. **【命题点】** 三角形面积公式、解三角形

【解】 (1) 因为 D 为 BC 的中点,

所以 $S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

如图, 过 A 作 $AE \perp BC$ 于 E ,

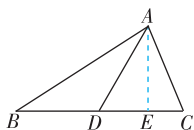
在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $\angle ADE = \frac{\pi}{3}$, $AD = 1$, 所以 $DE = \frac{1}{2}$, $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

..... 2 分

$$\text{因为 } S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以 $CD = BD = 2$, 所以 $BE = \frac{5}{2}$, 4 分

$$\text{所以 } \tan B = \frac{AE}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{5}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$



(2) 因为 D 为 BC 的中点, 所以 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, ... 6 分

$$\text{所以 } |\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{1}{4}(c^2 + 2bccos\angle BAC + b^2) = 1,$$

即 $bccos\angle BAC = -2$. ① 8 分

$$\text{因为 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bcsin\angle BAC = \sqrt{3}, \text{ 即 } bcsin\angle BAC = 2\sqrt{3}. \quad \text{②}$$

..... 9 分

由①②解得 $\tan\angle BAC = -\sqrt{3}$, 所以 $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $bc = 4$.

又因为 $b^2 + c^2 = 8$, 所以 $b = c = 2$ 10 分

一题多解 (1) 因为 D 为 BC 的中点,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin\angle ADC = 2 \times \frac{1}{2} \times$$

$$1 \cdot DC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \text{ 解得 } DC = 2,$$

所以 $BD = DC = 2$, $BC = 4$ 2 分

$$\text{因为 } \angle ADC = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle ADB = \frac{2\pi}{3}.$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得 $AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos\angle ADB = 1 + 4 + 2 = 7$, 所以 $AB = \sqrt{7}$ 3 分

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{AB}{\sin\angle ADB} = \frac{AD}{\sin B},$$

$$\text{所以 } \sin B = \frac{AD \sin\angle ADB}{AB} = \frac{\sqrt{21}}{14},$$

$$\text{所以 } \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{14},$$

$$\text{所以 } \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{3}}{5}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 因为 D 为 BC 的中点, 所以 $BD = \frac{1}{2}a$.

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 与 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos B = \frac{c^2 + BD^2 - AD^2}{2c \cdot BD} =$$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ 即 } \frac{c^2 + \frac{1}{4}a^2 - 1}{ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

整理得 $\frac{1}{2}a^2 = b^2 + c^2 - 2 = 6$, 解得 $a = 2\sqrt{3}$ 7 分

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle BAC = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} =$

$$\frac{8-12}{2bc} = -\frac{2}{bc},$$

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \angle BAC = \frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} =$

$$\frac{1}{2}bc \sqrt{1 - \left(-\frac{2}{bc}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2c^2 - 4} = \sqrt{3}, \text{ 解得 } bc = 4. \text{ 9 分}$$

$$\text{由 } \begin{cases} bc = 4, \\ b^2 + c^2 = 8, \end{cases} \text{ 解得 } b = c = 2. \text{ 10 分}$$

18. 【命题点】等差数列的通项公式及前 n 项和公式、分组求和

(1) 【解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $b_n = \begin{cases} a_n - 6, n \text{ 为奇数}, \\ 2a_n, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 所以 $b_1 = a_1 - 6, b_2 = 2a_2 = 2a_1 + 2d$,

$$b_3 = a_3 - 6 = a_1 + 2d - 6. \text{ 2 分}$$

因为 $S_4 = 32, T_3 = 16$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 4a_1 + 6d = 32, \\ (a_1 - 6) + (2a_1 + 2d) + (a_1 + 2d - 6) = 16, \end{cases} \text{ 4 分}$$

$$\text{整理得 } \begin{cases} 2a_1 + 3d = 16, \\ a_1 + d = 7, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 5, \\ d = 2, \end{cases}$$

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 3$ 5 分

(2) 【证明】由 (1) 知 $a_n = 2n + 3$, 所以 $S_n = \frac{n[5 + (2n + 3)]}{2} =$

$$n^2 + 4n, b_n = \begin{cases} 2n - 3, n \text{ 为奇数}, \\ 4n + 6, n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

当 n 为奇数时, $T_n = -1 + 14 + 3 + 22 + 7 + 30 + \cdots + (2n - 7) + (4n + 2) + 2n - 3$

$$= [-1 + 3 + \cdots + (2n - 7) + (2n - 3)] + [14 + 22 + \cdots + (4n + 2)]$$

$$= \frac{\frac{n+1}{2}(-1 + 2n - 3)}{2} + \frac{\frac{n-1}{2}(14 + 4n + 2)}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + 5n - 10}{2}. \text{ 7 分}$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{3n^2 + 5n - 10}{2} - (n^2 + 4n) = \frac{n^2 - 3n - 10}{2} =$$

$$\frac{(n-5)(n+2)}{2} > 0,$$

所以 $T_n > S_n$ 9 分

当 n 为偶数时, $T_n = -1 + 14 + 3 + 22 + 7 + 30 + \cdots + (2n - 5) + (4n + 6)$

$$= [-1 + 3 + \cdots + (2n - 5)] + [14 + 22 + \cdots + (4n + 6)]$$

$$= \frac{\frac{n}{2}(-1 + 2n - 5)}{2} + \frac{\frac{n}{2}(14 + 4n + 6)}{2}$$

$$= \frac{3n^2 + 7n}{2}.$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{3n^2 + 7n}{2} - (n^2 + 4n) = \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} > 0,$$

所以 $T_n > S_n$ 11 分

综上可知, 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$ 12 分

一题多解 (2) 由 (1) 知 $a_n = 2n + 3$.

$$\text{所以 } S_n = \frac{n[5 + (2n + 3)]}{2} = n^2 + 4n, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$b_n = \begin{cases} 2n - 3, n \text{ 为奇数,} \\ 4n + 6, n \text{ 为偶数,} \end{cases} \quad b_{2n-1} + b_{2n} = 12n + 1. \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n = 12 \times 1 + 1 + 12 \times 2 + 1 + \dots + 12 \times \frac{n}{2} + 1$$

$$= 12 \times \frac{\left(1 + \frac{n}{2}\right) \cdot \frac{n}{2}}{2} + \frac{n}{2}$$

$$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n.$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - (n^2 + 4n) = \frac{n(n-1)}{2} > 0. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n = T_{n+1} - b_{n+1} = \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{7}{2}(n+1) - 4n - 10 =$$

$$\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5.$$

$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n - 5 - (n^2 + 4n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - 5 =$$

$$\frac{1}{2}(n+2)(n-5) > 0. \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

综上可知, 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$ 12 分

19. 【命题点】频率分布直方图、函数的解析式及最值

【解】(1) 设 X 为患病者指标, Y 为未患病者指标, 由患病者指标的频率分布直方图, 知 $p(c) = P(X \leq c) = (c - 95) \times 0.002 = 0.5\%$, 解得 $c = 97.5$.

$$\text{则 } q(c) = P(Y > c) = (100 - 97.5) \times 0.010 + 5 \times 0.002 = 0.035 = 3.5\%. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 当 $95 \leq c \leq 100$ 时,

$$p(c) = (c - 95) \times 0.002, q(c) = (100 - c) \times 0.010 + 5 \times 0.002,$$

$$\text{所以 } f(c) = p(c) + q(c) = -0.008c + 0.82; \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

当 $100 < c \leq 105$ 时,

$$p(c) = 5 \times 0.002 + (c - 100) \times 0.012, q(c) = (105 - c) \times 0.002,$$

$$\text{所以 } f(c) = p(c) + q(c) = 0.01c - 0.98. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{综上所述, } f(c) = \begin{cases} -0.008c + 0.82, & 95 \leq c \leq 100, \\ 0.01c - 0.98, & 100 < c \leq 105. \end{cases}$$

由一次函数的单调性知, 函数 $f(c)$ 在 $[95, 100]$ 上单调递减, 在 $(100, 105]$ 上单调递增, 10 分

$$\text{所以 } f(c)_{\min} = f(100) = -0.008 \times 100 + 0.82 = 0.02. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 【命题点】线面垂直的判定定理与性质定理、二面角、空间向量的应用

(1) **【证明】**如图, 连接 DE, AE .

因为 $DA = DB = DC$, $\angle ADB = \angle ADC = 60^\circ$,

所以 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 为全等的正三角形, 所以 $AB = AC$.

因为 E 为 BC 的中点, 所以 $AE \perp BC, DE \perp BC$.

因为 $AE, DE \subset$ 平面 ADE , 且 $AE \cap DE = E$, 所以 $BC \perp$ 平面 ADE .

因为 $DA \subset$ 平面 ADE , 所以 $BC \perp DA$ 4 分

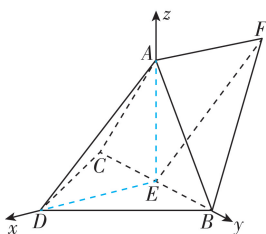
(2) 【解】 设 $DA = DB = DC = 2$, 则由 (1) 知 $AB = AC = 2$.

因为 $BD \perp CD$, 所以 $BC = 2\sqrt{2}, DE = \sqrt{2}$,

所以 $BC^2 = AC^2 + AB^2$, 则 $AB \perp AC$, 所以 $AE = \sqrt{2}$,

所以 $DA^2 = AE^2 + DE^2$, 所以 $AE \perp DE$.

以 E 为坐标原点, 以 ED, EB, EA 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示,



则 $D(\sqrt{2}, 0, 0), A(0, 0, \sqrt{2}), B(0, \sqrt{2}, 0)$, 设 $F(a, b, c)$, 因为

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DA}$, 所以 $(a, b, c) = (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, 所以 $F(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), \overrightarrow{BD} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{AF} = (-\sqrt{2}, 0, 0)$.

设 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 ABD 的法向量,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} \sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}y_1 = 0, \\ \sqrt{2}y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0, \end{cases}$$

取 $y_1 = 1$, 得 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 1)$ 9 分

设 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 ABF 的法向量,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -\sqrt{2}x_2 = 0, \\ \sqrt{2}y_2 - \sqrt{2}z_2 = 0, \end{cases}$$

取 $y_2 = 1$, 得 $\mathbf{n}_2 = (0, 1, 1)$.

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\text{所以 } \sin \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

即二面角 $D-AB-F$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 12 分

21. 思路导引

(1) 由焦点坐标求出 c $\xrightarrow{\text{离心率公式}}$ 求得

$a \xrightarrow{a^2 + b^2 = c^2}$ 求出 b \longrightarrow 得到双曲线 C 的方程

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $x = my - 4$

\longrightarrow 写出直线 MA_1, NA_2 的方程 \longrightarrow 联立两直线方程得点 $M,$

N 坐标间的等量关系 \longrightarrow 联立直线 MN 与双曲线 C 的方程, 写

出 $y_1 + y_2, y_1 y_2 \longrightarrow$ 结合根与系数的关系化简求出定直线

【命题点】双曲线的方程及几何性质、直线与双曲线的位置关系

(1)【解】因为双曲线 C 的左焦点为 $(-2\sqrt{5}, 0)$, 所以 $c = 2\sqrt{5}$.

由离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{a} = \sqrt{5}$, 得 $a = 2$,

所以 $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 4$,

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ 4 分

(2)【证明】设 $M(x_1, y_1)$ ($x_1 < 0, y_1 > 0$), $N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的方程为 $x = my - 4$ (提示: 若直线不与 x 轴平行或重合, 可设直线方程为 $x = my + t$).

(下面求直线 MA_1, NA_2 的方程, 联立两直线方程得点坐标间的等量关系)

因为 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$,

所以直线 MA_1 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$, 直线 NA_2 的方程为

$$y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2),$$

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2), \\ y = \frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2), \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 得 } \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{x_2 - 2}{y_2} = \frac{x - 2}{x + 2}. \quad \dots 8 \text{ 分}$$

(下面联立直线 MN 与双曲线 C 的方程, 求出根与系数的关系)

$$\text{联立} \begin{cases} x = my - 4, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1, \end{cases} \quad \text{消去 } x \text{ 整理得 } (4m^2 - 1)y^2 - 32my + 48 = 0,$$

则 $4m^2 - 1 \neq 0, \Delta = 256m^2 + 192 > 0$, 则 $y_1 + y_2 = \frac{32m}{4m^2 - 1}, y_1 y_2 =$

$$\frac{48}{4m^2 - 1} < 0, \text{ 故 } -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2}.$$

(下面利用根与系数的关系化简, 求出定直线)

$$\text{所以 } my_1 y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2),$$

$$\text{所以 } \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{x_2 - 2}{y_2} = \frac{my_1 y_2 - 6y_1}{my_1 y_2 - 2y_2} = \frac{\frac{3}{2}y_2 - \frac{9}{2}y_1}{\frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2} = -3,$$

所以 $\frac{x - 2}{x + 2} = -3$, 解得 $x = -1$, 10 分

所以点 P 在定直线 $x = -1$ 上. 12 分

方法速记 求解圆锥曲线中动点在定直线上的问题时, 一般需要根据题中条件, 设出所需直线方程, 联立直线与圆锥曲线方程, 根据根与系数的关系以及题中条件, 求出动点的坐标满足的关系, 从而可确定结果 (一般得到动点横坐标或纵坐标为定值).

(1) 构造函数 $\begin{cases} f(x) = x - \sin x (0 < x < 1) \\ g(x) = \sin x + x^2 - x (0 < x < 1) \end{cases} \xrightarrow{\text{求导}}$

研究 $f(x), g(x)$ 的单调性、最小值 $\rightarrow \begin{cases} \sin x < x \\ \sin x > x - x^2 \end{cases} \rightarrow$ 问题得证

(2) 当 $a=t$ 与 $a=-t$ 时, $f(x)$ 解析式相同 \rightarrow 考虑 $a \geq 0$ 且 $0 <$

$x < 1 \rightarrow \begin{cases} a=0 \rightarrow f'(x) > 0, \text{不符合题意} \\ a>0 \rightarrow 0 < x < \min\left\{\frac{1}{a}, 1\right\}, x\left(\frac{2}{1-x^2} - a^2\right) < f'(x) < \end{cases}$

$x\left(a^3x - a^2 + \frac{2}{1-x^2}\right) \rightarrow$ 令 $m(x) = a^3x - a^2 + \frac{2}{1-x^2}, n(x) = \frac{2}{1-x^2} - a^2 \rightarrow$

$n(0) = m(0) \rightarrow \begin{cases} n(0) \geq 0 \rightarrow f'(x) > 0, \text{不符合题意} \\ m(0) < 0 \rightarrow f'(x) < 0, \text{符合题意} \end{cases}$

【命题点】导数在不等式证明中的应用, 根据函数的极大值点求参数的取值范围

(1) **【证明】**(由于所证不等式为两段, 需分段求证, 下面构造函数证 $\sin x < x$)

设 $f(x) = x - \sin x$, 则 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $x - \sin x > 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立,

所以 $\sin x < x$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立. 2分

(下面构造函数证 $\sin x > x - x^2$)

设 $g(x) = \sin x + x^2 - x$ (关键: 证明不等式 $f(x) > g(x)$ (或 $f(x) < g(x)$) 转化为证明 $f(x) - g(x) > 0$ (或 $f(x) - g(x) < 0$), 进而构造辅助函数 $h(x) = f(x) - g(x)$),

则 $g'(x) = \cos x + 2x - 1$.

设 $h(x) = \cos x + 2x - 1$, 则 $h'(x) = -\sin x + 2 > 0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > h(0) = 0$, 即 $g'(x) > 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 即 $\sin x + x^2 - x > 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立,

所以 $\sin x > x - x^2$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立.

综上所述, 当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$ 5分

(2) **【解】**由 $f(x) = \cos ax - \ln(1 - x^2)$, 可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1, 1)$ (提示: 讨论函数单调性时, 注意定义域先行原则), 且函数 $f(x)$ 为偶函数.

因为 $f'(x) = -a \sin ax + \frac{2x}{1-x^2}$, 所以 $f'(0) = 0$ 6分

当 $a=t$ 时, $f(x) = \cos tx - \ln(1 - x^2)$, 当 $a=-t$ 时, $f(x) = \cos(-tx) - \ln(1 - x^2) = \cos tx - \ln(1 - x^2)$, 也即 a 取互为相反数的两个值时, $f(x)$ 的解析式没有变化, 所以可以断定 a 的取值必定是成对(互为相反数的一对), 只需考虑 $a \geq 0$ 的情

形即可. 7 分

以下只考虑 $a \geq 0$ 和 $0 < x < 1$ 的情形.

(i) 当 $a = 0$ 时, $f'(x) = \frac{2x}{1-x^2}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$

单调递增, 不符合极大值的定义.

(ii) 当 $a > 0$ 时, 由 (1) 可知, 当 $0 < ax < 1$ 且 $0 < x < 1$, 也即 $0 < x <$

$\min\left\{\frac{1}{a}, 1\right\}$ 时, $ax - a^2x^2 < \sin ax < ax$, 则 $-a^2x < -a \sin ax < -a^2x +$

a^3x^2 , 则 $-a^2x + \frac{2x}{1-x^2} < f'(x) < -a^2x + a^3x^2 + \frac{2x}{1-x^2}$, 则 $x \left(\frac{2}{1-x^2} -$

$a^2 \right) < f'(x) < x \left(a^3x - a^2 + \frac{2}{1-x^2} \right)$ 9 分

记 $m(x) = a^3x - a^2 + \frac{2}{1-x^2}$, $n(x) = \frac{2}{1-x^2} - a^2$, 观察可知 $m(x)$,

$n(x)$ 在 $0 < x < \min\left\{\frac{1}{a}, 1\right\}$ 时均单调递增, 且有 $m(0) = 2 - a^2 =$

$n(0)$ 10 分

当 $n(0) = 2 - a^2 \geq 0$, 即 $0 < a \leq \sqrt{2}$ 时, 若 $0 < x < \min\left\{\frac{1}{a}, 1\right\}$,

则 $n(x) > n(0) = 2 - a^2 \geq 0$, 从而 $f'(x) > x \cdot n(x) > 0$, 不符合

极大值的定义. 11 分

当 $m(0) = 2 - a^2 < 0$, 即 $a > \sqrt{2}$ 时, 由于 $m(x)$ 单调递增, 所以必

然存在正数 $u < \min\left\{\frac{1}{a}, 1\right\}$, 使得当 $0 < x < u$ 时, $m(x) < 0$, 从

而 $f'(x) < x \cdot m(x) < 0$, 符合极大值的定义.

综上所述, a 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.
..... 12 分