

1. C 【命题点】集合的交集运算

【解析】由题意得 $A \cap B = \{2, 3, 5\}$, 故选 C.

2. B 【命题点】复数的乘法运算

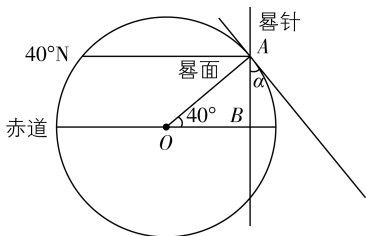
【解析】 $(1+2i)(2+i) = 2+i+4i+2i^2 = 5i$. 故选 B.

3. A 【命题点】平面向量的线性运算

【解析】因为 D 是 AB 的中点, 所以 $\vec{AD} = \vec{DB}$. 所以 $\vec{CB} = \vec{CD} + \vec{DB} = \vec{CD} + \vec{AD} = \vec{CD} + (\vec{CD} - \vec{CA}) = 2\vec{CD} - \vec{CA}$. 故选 A.

4. B 【命题点】传统文化在立体几何中的应用

【解析】画出赤道和纬度的截面图, OA 与地球赤道所在平面所成角为 $\angle AOB$. 因为点 A 处的纬度为北纬 40° , 所以 $\angle AOB = 40^\circ$. 过点 A 且与 OA 垂直的平面在截面图中为过点 A 的切线, 则晷针与点 A 处的水平面所成的角, 即晷针与点 A 处的切线所成的角 α (提示: 正确理解题意作出截面图, 找到晷针与点 A 处的水平面所成角和点 A 处的纬度的关系), 可知 $\alpha = 40^\circ$, 故选 B.

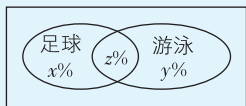


5. C 【命题点】统计数据的比例分布

【解析】该校 60% 的学生喜欢足球, 82% 的学生喜欢游泳, 这两组数据包含既喜欢足球又喜欢游泳的学生, 而 96% 的学生喜欢足球或游泳, 则该校既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例为 $60\% + 82\% - 96\% = 46\%$ (提示: 既喜欢足球又喜欢游泳的学生数 = 喜欢足球的学生数 + 喜欢游泳的学生数 - 喜欢足球或游泳的学生数). 故选 C.

► 一题多解 设共有 $x\%$ 的学生只喜欢足球, 有 $y\%$ 的学生只喜欢游泳, 有 $z\%$ 的学生既喜欢足球又喜欢游泳, 如图所示

$$\text{示, 列方程得} \begin{cases} x+z=60, \\ x+y+z=96, \\ y+z=82, \end{cases} \text{解得 } z=46. \text{ 故选 C.}$$



6. C 【命题点】排列组合在实际问题中的应用

【解析】根据题意, 第一步, 将 3 名大学生分成两组 (一组 1 人, 另一组 2 人), 有 C_3^1 种分法; 第二步, 将这两组大学生分配到 2 个山村, 有 A_2^2 种分法. 根据分步乘法计数原理, 可得

不同的分配方案有 $C_3^1 \cdot A_2^2 = 6$ 种. 故选 C.

7. D 【命题点】根据函数的单调性求参数的取值范围及复合函数的单调性

【解析】由 $x^2 - 4x - 5 > 0$, 得 $x < -1$ 或 $x > 5$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ (提示: 复合函数问题重要前提是考虑定义域问题). 函数 $f(x) = \lg(x^2 - 4x - 5)$ 由函数 $y = \lg u, u = x^2 - 4x - 5, x \in (-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$ 复合而成. 因为函数 $y = \lg u$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $u = x^2 - 4x - 5$ 在 $(-\infty, -1)$ 单调递减, 在 $(5, +\infty)$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(5, +\infty)$. 因为 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 单调递增, 所以 $a \geq 5$, 即 a 的取值范围是 $[5, +\infty)$. 故选 D.

8. D 【命题点】函数的性质与不等式的求解

【解析】奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 且 $f(-2) = 0$. 由 $xf(x-1) \geq 0$, 得
$$\begin{cases} x \leq 0, \\ f(x-1) \leq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x > 0, \\ f(x-1) \geq 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x \leq 0, \\ -2 \leq x-1 \leq 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x > 0, \\ 0 \leq x-1 \leq 2, \end{cases} \text{ 解}$$
 得 $-1 \leq x \leq 0$ 或 $1 \leq x \leq 3$. 故选 D.

关键点拨 利用奇函数图像关于原点对称判断函数的单调性, 分类讨论求解不等式.

9. CD 【命题点】统计图的应用

【解析】由题图可知第 8, 9 天复工指数和复产指数均减小, 故 A 错误; 第 1 天时复工指数小于复产指数, 第 11 天时两指数相等, 故复产指数的增量小于复工指数的增量, 故 B 错误; 由题图可知第 3 天至第 11 天, 复工复产指数都超过 80%, 故 C 正确; 第 9 天至第 11 天, 复产指数的增量大于复工指数的增量, 故 D 正确.

10. ACD 【命题点】曲线方程表示的轨迹

【解析】由曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$, 当 $m > n > 0$ 时, $\frac{1}{n} > \frac{1}{m} > 0$, 曲线 $C: \frac{x^2}{\frac{1}{m}} + \frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1$ 表示焦点在 y 轴上的椭圆, 故 A 正确; 当 $m = n > 0$ 时, 曲线 $C: x^2 + y^2 = \frac{1}{n}$ 表示半径为 $\sqrt{\frac{1}{n}}$ 的圆, 故 B 错误; 当 $mn < 0$ 时, 曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$ 表示双曲线, 令 $mx^2 + ny^2 = 0$, 则其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$, 故 C 正确; 当 $m = 0, n > 0$ 时, 曲线 $C: ny^2 = 1$, 即 $y = \pm \sqrt{\frac{1}{n}}$ 表示两条与 x 轴平行的直线, 故 D 正确. 故选 ACD.

关键点拨 利用参数 m, n 的范围进行分类讨论, 依次研究不同的轨迹方程.

11. BC 【命题点】三角函数的图像、性质及其解析式

【解析】由题图可知,最小正周期 $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \pi$,

得 $\omega = \pm 2$,故 A 错误;

当 $\omega = 2$ 时,将 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 的坐标代入 $y = \sin(2x + \varphi)$, 得 $2 \times \frac{\pi}{6} +$

$\varphi = 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$.

当 $k = 0$ 时, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 则 $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + 2x - \frac{\pi}{3}\right) =$

$-\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$, 故 B 正确;

$y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, 故 C

正确;

$y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + 2x - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) =$

$-\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right)$, 故 D 错误. 故选 BC.

关键点拨 利用三角函数图像的周期性求出参数 ω , 代入特殊点求出参数 φ , 再根据诱导公式判断函数解析式的不同形式.

12. ABD 【命题点】基本不等式的应用

【解析】由 $a > 0, b > 0, a + b = 1$, 得 $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 即 $a^2 +$

$b^2 \geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时取等号, 故 A 正确;

由 $a > 0, b > 0, a + b = 1$, 得 $a - b = 2a - 1 > -1$, 故 $2^{a-b} > \frac{1}{2}$, 故 B 正确;

$\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab) \leq \log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \log_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -2$, 当且

仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 C 错误 (另解: 令 $a = \frac{1}{4}, b =$

$\frac{3}{4}$, 则 $\log_2 \frac{1}{4} + \log_2 \frac{3}{4} < -2$, 故 C 错误);

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = 1 + 2\sqrt{ab} \leq 1 + a + b = 2$, 得 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq$

$\sqrt{2}$, 当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 D 正确. 故选 ABD.

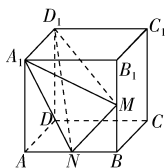
方法速记 灵活利用基本不等式的变形, 掌握 $ab \leq$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2}.$$

13. 1 【命题点】三棱锥的体积

【解析】如图, 因为正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $D_1A_1 \perp$ 平面 AA_1B_1B , 所以 $D_1A_1 \perp$ 平面 A_1MN .

所以 $V_{A_1-D_1MN} = V_{D_1-A_1MN}$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1 MN} \cdot A_1 D_1 \\
&= \frac{1}{3} \left(2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \right) \times 2 \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times 2 = 1.
\end{aligned}$$

14. $\frac{16}{3}$ 【命题点】直线与抛物线的位置关系及弦长

【解析】由 $y^2 = 4x$, 得其焦点 $F(1, 0)$. 又直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$, 所以直线 AB 的方程为 $y = \sqrt{3}(x - 1)$. 联立

$$\begin{cases} y = \sqrt{3}(x - 1), \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 得 } 3x^2 - 10x + 3 = 0, \text{ 设 } A(x_A, y_A), B(x_B, y_B),$$

则 $x_A + x_B = \frac{10}{3}$. 又 $|AF| = x_A + 1$, $|BF| = x_B + 1$ (提示: 利用抛物

线定义表示 $|AF|, |BF|$), 所以 $|AB| = |AF| + |BF| = x_A + x_B +$

$$2 = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}.$$

方法速记 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 焦点的直线与抛物线交于 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ 两点, 则 $|AB| = x_A + x_B + p$.

快解 设斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线倾斜角为 θ , 则 $\theta = \frac{\pi}{3}$, 所以

$$|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \theta} = \frac{4}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{16}{3} \quad \left(\text{提示: 过抛物线 } y^2 = 2px (p > 0) \text{ 焦} \right.$$

点且倾斜角为 θ 的直线与抛物线相交的弦长为 $\frac{2p}{\sin^2 \theta}$, 过抛

物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 焦点且倾斜角为 θ 的直线与抛物线相

交的弦长为 $\frac{2p}{\cos^2 \theta}$).

15. $3n^2 - 2n$ 【命题点】等差数列求和

【解析】数列 $\{2n-1\}$ 表示首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 各项均为正奇数, 而数列 $\{3n-2\}$ 表示首项为 1, 公差为 3 的等差数列, 各项分别为交替出现的正奇数与正偶数, 它们的公共项为数列 $\{3n-2\}$ 中的奇数项, 所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公

差为 6 的等差数列, 其前 n 项和 $S_n = n \times 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 6 =$

$$3n^2 - 2n.$$

易错警示 等差数列的奇数项与偶数项各成等差数列, 需要注意首项与公差的变化.

16. $\frac{5\pi}{2} + 4$ 【命题点】三角形与扇形面积的应用

【解析】连接 OA , 过点 A 作 EF 的垂线, 分别交 BH, DG 于点 M, N , 过点 O 垂直于 CG 的直线与 CG 交于点 P , 则由 $EF = 12, DE = 2, A$ 到直线 DE 和 EF 的距离为 7 可知 $AN = NG = 5$, 则

$\angle MAH = \frac{\pi}{4}$. 又 $OA \perp AG$, 所以 $\triangle AOM$ 为等腰直角三角形,

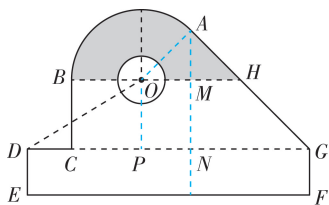
$\angle AOM = \frac{\pi}{4}$, $\angle AOB = \frac{3\pi}{4}$. 令 $AM = OM = MH = PN = x$, 则 $OP =$

$MN = 5 - x$, $DP = 7 - x$, $OA = AH = \sqrt{2}x$, 由 $\tan \angle ODC = \frac{OP}{DP} = \frac{5-x}{7-x} =$

$\frac{3}{5}$, 得 $x = 2$, 则 $OA = 2\sqrt{2}$, 所以 $S_{\triangle OAH} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot AH = 4$, $S_{\text{扇形}OAB} =$

$\frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{4} \times OA^2 = \frac{3\pi}{8} \times 8 = 3\pi$, 圆孔半径为 1, 则 $S_{\text{半圆}O} = \frac{1}{2} \pi \times 1^2 =$

$\frac{\pi}{2}$, 所以 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}OAB} + S_{\triangle OAH} - S_{\text{半圆}O} = 3\pi + 4 - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} + 4$.



关键拨 解题关键在于利用分割法求不规则几何图形的面积, 找出扇环所在圆的半径, 结合三角形求出圆心角, 以便求扇形面积, 通过间接法求解.

17. 【命题点】利用正弦定理、余弦定理解三角形

【解】方案一: 选条件①.

由 $C = \frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3 分

由 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$ 及正弦定理得 $a = \sqrt{3}b$ 5 分

于是 $\frac{3b^2 + b^2 - c^2}{2\sqrt{3}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 由此可得 $b = c$ 8 分

由① $ac = \sqrt{3}$, 解得 $a = \sqrt{3}$, $b = c = 1$ 9 分

因此, 选条件①时问题中的三角形存在, 此时 $c = 1$ 10 分

方案二: 选条件②.

由 $C = \frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3 分

由 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$ 及正弦定理得 $a = \sqrt{3}b$ 5 分

于是 $\frac{3b^2 + b^2 - c^2}{2\sqrt{3}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 由此可得 $b = c$, $B = C = \frac{\pi}{6}$, $A = \frac{2\pi}{3}$.

由② $c \sin A = 3$, 得 $c = b = 2\sqrt{3}$, $a = 6$ 8 分

因此, 选条件②时问题中的三角形存在, 9 分

此时 $c = 2\sqrt{3}$ 10 分

方案三: 选条件③.

由 $C = \frac{\pi}{6}$ 和余弦定理得 $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3 分

由 $\sin A = \sqrt{3} \sin B$ 及正弦定理得 $a = \sqrt{3}b$ 5 分

于是 $\frac{3b^2 + b^2 - c^2}{2\sqrt{3}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 由此可得 $b = c$ 8 分

由③ $c=\sqrt{3}b$,与 $b=c$ 矛盾. 9分

因此,选条件③时问题中的三角形不存在. 10分

18. 【命题点】等比数列的通项公式及前 n 项和公式

【解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 由题设得 $a_1q+a_1q^3=20, a_1q^2=8$,

解得 $q=\frac{1}{2}$ (舍去), $q=2$, 3分

则 $a_1=2$.

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$ 5分

(2) 由(1)可知 $(-1)^{n-1}a_na_{n+1}=(-1)^{n-1}\cdot 2^n\cdot 2^{n+1}=(-1)^{n-1}2^{2n+1}$,

..... 6分

则 $a_1a_2-a_2a_3+\cdots+(-1)^{n-1}a_na_{n+1}$

$=2^3-2^5+2^7-2^9+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot 2^{2n+1}$

$=\frac{2^3[1-(-2^2)^n]}{1-(-2^2)}=\frac{8}{5}-(-1)^n\cdot \frac{2^{2n+3}}{5}$ 12分

19. 【命题点】频率估计概率和独立性检验

【解】(1) 根据抽查数据, 该市 100 天的空气中 PM2.5 浓度不超过 75, 且 SO_2 浓度不超过 150 的天数为 $32+18+6+8=64$,

..... 2分

因此, 该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75, 且 SO_2 浓度不超过 150 的概率的估计值为 $\frac{64}{100}=0.64$ 4分

(2) 根据抽查数据, 可得 2×2 列联表:

SO_2 PM2.5	$[0, 150]$	$(150, 475]$
$[0, 75]$	64	16
$(75, 115]$	10	10

.....7分

(3) 根据(2)的列联表得 $K^2=\frac{100\times(64\times 10-16\times 10)^2}{80\times 20\times 74\times 26}\approx$

7.484. 9分

由于 $7.484>6.635$, 故有 99% 的把握认为该市一天空气中 PM2.5 浓度与 SO_2 浓度有关. 12分

方法速记 K^2 观测值 k 的大小作为检验在多大程度上认为两个分类变量有关系的标准, 若 $k\geq k_0$, 则有 $(1-P(K^2\geq k_0))\times 100\%$ 的把握认为两个分类变量有关系; 否则, 就认为根据样本数据没有充分理由说明两个分类变量有关系.

20. 【命题点】线面垂直的证明及线面角的求解

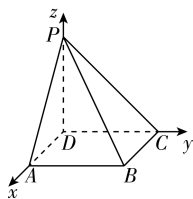
(1) 【证明】因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$, 所以 $PD\perp AD$. 又底面 $ABCD$ 为正方形, 所以 $AD\perp DC$. 因此 $AD\perp$ 平面 PDC 2分

因为 $AD\parallel BC$, $AD\not\subset$ 平面 PBC , 所以 $AD\parallel$ 平面 PBC 3分

由已知得 $l\parallel AD$.

因此 $l\perp$ 平面 PDC 4分

(2)【解】以 D 为坐标原点, DA, DC, DP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$, 则 $D(0, 0, 0), C(0, 1, 0), B(1, 1, 0), P(0, 0, 1)$, 则 $\overrightarrow{PB} = (1, 1, -1), \overrightarrow{DC} = (0, 1, 0)$,



由(1)可设 $Q(a, 0, 1)$, 则 $\overrightarrow{QB} = (1-a, 1, -1)$,

所以 $|\overrightarrow{QB}| = \sqrt{(1-a)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, 6分

解得 $a=1$, 则 $Q(1, 0, 1)$, 则 $\overrightarrow{DQ} = (1, 0, 1)$.

设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$ 是平面 QCD 的法向量, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y = 0, \\ x + z = 0. \end{cases} \text{ 取 } x = 1, \text{ 可得 } \mathbf{n} = (1, 0, -1), \text{ 9分}$$

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{PB} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{2}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 11分}$$

所以 PB 与平面 QCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 12分

21. 【命题点】椭圆方程及直线与椭圆的位置关系的应用

【解】(1) 由题意可知直线 AM 的方程为 $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$,

即 $x - 2y + 4 = 0$.

当 $y = 0$ 时, 解得 $x = -4$, 所以 $a = 4$,

将点 $M(2, 3)$ 的坐标代入椭圆 E 的方程, 可得 $\frac{4}{16} + \frac{9}{b^2} = 1$,

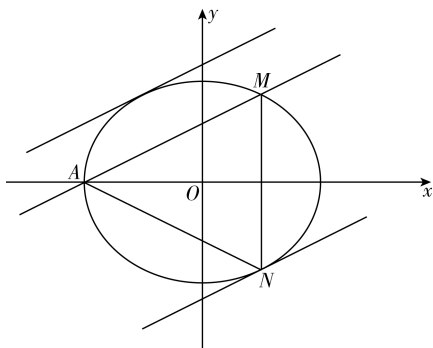
..... 3分

解得 $b^2 = 12$ 4分

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 5分

(2) 设与直线 AM 平行的直线的方程为 $x - 2y = m$ ($m \neq -4$), 如图所示, 当直线与椭圆相切时, 与 AM 距离较远的直线与椭圆的切点为 N , 此时 $\triangle AMN$ 的面积取得最大值.

..... 6分



联立直线方程 $x - 2y = m$ ($m \neq -4$) 与椭圆方程 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$,

可得 $16y^2 + 12my + 3m^2 - 48 = 0$, 7分

所以 $\Delta = 144m^2 - 4 \times 16(3m^2 - 48) = 0$, 即 $m^2 = 64$, 解得 $m = \pm 8$,

..... 8分

所以与 AM 距离比较远的直线方程为 $x-2y-8=0$.

点 N 到直线 AM 的距离即为两平行线之间的距离,

利用平行线之间的距离公式可得 $d = \frac{8+4}{\sqrt{1+4}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$,

..... 10 分

由两点之间的距离公式可得 $|AM| = \sqrt{(2+4)^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$.

..... 11 分

所以 $\triangle AMN$ 的面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times \frac{12\sqrt{5}}{5} = 18$.

..... 12 分

22. 【命题点】导数的几何意义和根据不等式求参数范围

【解】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = ae^{x-1} - \frac{1}{x}$ 1 分

(1) 当 $a = e$ 时, $f(x) = e^x - \ln x + 1$, $f'(1) = e - 1$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - (e + 1) = (e - 1)(x - 1)$, 即 $y = (e - 1)x + 2$ 4 分

直线 $y = (e - 1)x + 2$ 在 x 轴, y 轴上的截距分别为 $\frac{-2}{e-1}, 2$.

..... 5 分

因此所求三角形的面积为 $\frac{2}{e-1}$ 6 分

(2) 当 $0 < a < 1$ 时, $f(1) = a + \ln a < 1$ 7 分

当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^{x-1} - \ln x$, $f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$. 当 $x \in (0, 1)$ 时,

$f'(x) < 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(1) = 1$, 10 分

从而 $f(x) \geq 1$.

当 $a > 1$ 时, $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq e^{x-1} - \ln x \geq 1$ 11 分

综上, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 12 分

(由 $\ln a$ 知 $a > 0$, 当 $a = 1$ 时, 由导函数图像可判断 $f(x) \geq 1$ 恰好成立, 当 $a > 1$ 时, a 越大, $y = ae^{x-1}$ 图像越陡, 可知 $f(x) \geq 1$ 必然成立, 故可知需根据 a 和 1 的大小分类讨论; 当 $0 < a < 1$ 时, $a + \ln a < 1$, 当 $a > 1$ 时, $e^{x-1} - \ln x \geq 1$, 当 $a = 1$ 时, 可根据求导判断函数 $f(x)$ 单调性并得出最值)

> 一题多解 (2) 由 $f(x) \geq 1$ 得 $ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1$,

即 $e^{\ln a + x - 1} - \ln x + \ln a \geq 1$,

即 $e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq \ln x + x = e^{\ln x} + \ln x$ 7 分

令 $g(t) = e^t + t$, 则有 $g(\ln a + x - 1) \geq g(\ln x)$, $g'(t) = e^t + 1 > 0$, 所以 $g(t)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

则 $\ln a + x - 1 \geq \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

即 $\ln a \geq \ln x - x + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

只需 $\ln a \geq (\ln x - x + 1)_{\max}$ 8 分

令 $h(x) = \ln x - x + 1, x > 0$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

令 $h'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$; 令 $h'(x) < 0$, 得 $x > 1$,

则 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

..... 10 分

所以 $h(x) \leq h(1) = 0$, 则 $\ln a \geq 0$, 得 $a \geq 1$.

故 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 12 分