

**1. C** 【命题点】一元二次不等式的解法及集合的交集运算

【解析】由  $x^2 - x - 6 \geq 0$ , 得  $x \leq -2$  或  $x \geq 3$ , 则  $N = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$ .  $\because M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ,  $\therefore M \cap N = \{-2\}$ , 故选 C.

**2. A** 【命题点】复数的四则运算及共轭复数的概念

【解析】 $z = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)^2}{2(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i+i^2}{2(1-i^2)} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i$ , 则  $\bar{z} = \frac{1}{2}i$ ,  $\therefore z - \bar{z} = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i = -i$ , 故选 A.

**3. D** 【命题点】平面向量的坐标运算及垂直

【解析】由于  $a = (1, 1)$ ,  $b = (1, -1)$ , 则  $a + \lambda b = (1, 1) + (\lambda, -\lambda) = (1 + \lambda, 1 - \lambda)$ ,  $a + \mu b = (1, 1) + \mu(1, -1) = (1 + \mu, 1 - \mu)$ . 又  $\because (a + \lambda b) \perp (a + \mu b)$ ,  $\therefore (a + \lambda b) \cdot (a + \mu b) = 0$ , 即  $(1 + \lambda)(1 + \mu) + (1 - \lambda)(1 - \mu) = 0$ , 解得  $\lambda\mu = -1$ , 故选 D.

**4. D** 【命题点】复合函数的单调性

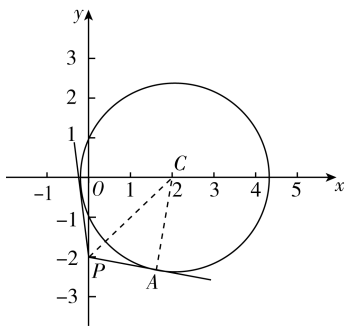
【解析】因为  $y = 2^x$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数, 所以函数  $y = x(x - a) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$  在  $(0, 1)$  上单调递减(提示: 复合函数的单调性遵循“同增异减”原则), 所以  $\frac{a}{2} \geq 1$ , 解得  $a \geq 2$ , 即  $a$  的取值范围是  $[2, +\infty)$ , 故选 D.

**5. A** 【命题点】椭圆的离心率

【解析】由椭圆  $C_1$  的方程知离心率  $e_1 = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$ , 由椭圆  $C_2$  的方程知  $e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 又  $\because e_2 = \sqrt{3}e_1$ , 即  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a}$ , 化简得  $a^2 = 4a^2 - 4$ ,  $\therefore a^2 = \frac{4}{3}$ .  $\because a > 1$ ,  $\therefore a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 故选 A.

**6. B** 【命题点】直线与圆相切、二倍角的正弦公式

【解析】设圆  $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$  为圆  $C$ , 化简得  $(x - 2)^2 + y^2 = 5$ , 圆心为  $C(2, 0)$ , 半径  $r = \sqrt{5}$ . 如图, 设  $\angle CPA = \theta$ , 则  $\alpha = 2\theta$ ,  $\sin \theta = \frac{|CA|}{|CP|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{(2-0)^2 + [0-(-2)]^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ , 易知  $\cos \theta > 0$ , 则  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ , 所以  $\sin \alpha = \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ . 故选 B.

**7. C** 【命题点】等差数列的判断、充分、必要条件的判断

【解析】充分性: 若数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 设其公差为  $d$  (常数), 则  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ ,  $\therefore \frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d$ , 则  $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} =$

$\left(a_1 + \frac{n}{2}d\right) - \left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right) = \frac{d}{2}$  (常数), 故数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  是首项为  $a_1$ , 公差为  $\frac{d}{2}$  的等差数列, 充分性成立;

必要性: 若数列  $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$  为等差数列, 设其公差为  $d'$  (常数), 则

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + (n-1)d', \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } \frac{S_1}{1} = a_1, \therefore S_n = na_1 + n(n-1)d',$$

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = [na_1 + n(n-1)d'] - [(n-1)a_1 + (n-1)(n-2)d'] = a_1 + 2(n-1)d'$ , 当  $n=1$  时,  $a_1$  符合上式, 显然数列  $\{a_n\}$  是首项为  $a_1$ , 公差为  $2d'$  的等差数列, 因此必要性成立. 故甲是乙的充要条件. 故选 C.

## 8. B

### 思路导引

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}, \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6} \rightarrow \sin \alpha \cos \beta$$

的值  $\rightarrow \sin(\alpha + \beta)$  的值  $\xrightarrow{\text{二倍角公式}} \cos(2\alpha + 2\beta)$  的值

【命题点】两角和与差的正弦公式及二倍角的余弦公式

$$\text{【解析】} \because \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}, \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6},$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{3} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \therefore \cos(2\alpha +$$

$$2\beta) = \cos[2(\alpha + \beta)] = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \text{ 故}$$

选 B.

## 9. BD 【命题点】样本的数据特征

【解析】对于选项 A:  $\because x_1, x_6$  不确定,  $\therefore x_1, x_2, \dots, x_6$  的平均数不确定, 如 1, 2, 2, 2, 2, 4 的平均数不等于 2, 2, 2, 2 的平均数, 故 A 错误;

对于选项 B: 不妨设  $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ , 则  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的中位数为  $\frac{x_3 + x_4}{2}$ ,  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  的中位数为  $\frac{x_3 + x_4}{2}$ , 故 B 正确;

对于选项 C:  $\because x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  的波动性不小于  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的波动性,  $\therefore x_2, x_3, x_4, x_5$  的标准差不大于  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  的标准差, 故 C 错误;

对于选项 D: 不妨设  $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ , 则  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6$ ,  $\therefore x_5 - x_2 \leq x_6 - x_1$ , 即  $x_2, x_3, x_4, x_5$  的极差不大于  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$  的极差, 故 D 正确.

故选 BD.

## 10. ACD 【命题点】对数的运算及实际应用

【解析】由  $L_p = 20 \lg \frac{P}{P_0}$ , 对于燃油汽车  $60 \leq 20 \lg \frac{P_1}{P_0} \leq 90$ , 即

$$3 \leq \lg P_1 - \lg P_0 \leq \frac{9}{2}, \therefore \lg(1\,000P_0) = 3 + \lg P_0 \leq \lg P_1 \leq \frac{9}{2} +$$

$$\lg P_0 = \lg \left(10^{\frac{9}{2}} P_0\right), \text{ 即 } 1\,000P_0 \leq P_1 \leq 10^{\frac{9}{2}} P_0; \text{ 同理, 对于混合}$$

$$\text{动力汽车 } 10^{\frac{5}{2}} P_0 \leq P_2 \leq 1\,000P_0; \text{ 对于电动汽车 } 20 \lg \frac{P_3}{P_0} = 40,$$

则  $\lg p_3 - \lg p_0 = 2, \therefore \lg p_3 = 2 + \lg p_0 = \lg(100p_0), \therefore p_3 = 100p_0$ ,  
 选项 C 正确.  $p_1 \geq p_2$ , 选项 A 正确.  $10p_3 = 1\,000p_0$ , 则  $p_2 \leq 10p_3$ , 选项 B 错误.  $10^{\frac{9}{2}}p_0 \leq 100p_2 \leq 10^5p_0$ , 则  $p_1 \leq 100p_2$ , 选项 D 正确. 故选 ACD.

## 11. ABC 【命题点】抽象函数求值、函数的奇偶性、判断函数的极值点

【解析】对于 A, 令  $x=y=0$ , 得  $f(0)=0$ , 故 A 正确;

对于 B, 令  $x=y=1$ , 得  $f(1)=f(1)+f(1)=2f(1)$ , 所以  $f(1)=0$ , 故 B 正确;

对于 C, 令  $x=y=-1$ , 得  $f(1)=f(-1)+f(-1)=2f(-1)=0$ , 所以  $f(-1)=0$ , 所以  $f(-xy)=y^2f(-x)+x^2f(y)=y^2[f(x)+x^2f(-1)]+x^2f(y)=y^2f(x)+x^2f(y)=f(xy)$  在定义域  $\mathbf{R}$  上恒成立, 所以  $f(x)$  是偶函数, 故 C 正确;

对于 D, 函数  $f(x)=0$  为常数函数, 且满足  $f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$ , 而常数函数没有极值点, 故 D 错误. 故选 ABC.

一题多解 选项 A: 令  $x=y=0$ , 则  $f(0)=0 \times f(0) + 0 \times f(0)$ , 则  $f(0)=0$ , 故 A 正确;

选项 B: 令  $x=y=1$ , 则  $f(1)=1 \times f(1) + 1 \times f(1)$ , 则  $f(1)=0$ , 故 B 正确;

选项 C: 令  $x=y=-1$ , 则  $f(1)=(-1)^2 \times f(-1) + (-1)^2 \times f(-1)$ , 则  $f(-1)=0$ , 再令  $y=-1$ , 则  $f(-x)=(-1)^2 f(x) + x^2 f(-1)$ , 即  $f(-x)=f(x)$ , 又  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 所以  $f(x)$  是偶函数, 故 C 正确;

选项 D: 对式子两边同时除以  $x^2 y^2 (x^2 y^2 \neq 0)$ , 得到  $\frac{f(xy)}{x^2 y^2} = \frac{f(x)}{x^2} + \frac{f(y)}{y^2}$ , 故可构造函数  $\frac{f(x)}{x^2} = \ln|x| (x \neq 0)$ ,

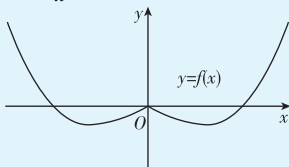
若  $x=0$ , 则由 A 选项知  $f(0)=0$ , 所以  $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x|, & x \neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$

则当  $x > 0$  时,  $f(x) = x^2 \ln x$ ,  $f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1)$ , 令  $f'(x) > 0$ , 则  $x > e^{-\frac{1}{2}}$ , 令  $f'(x) < 0$ , 则  $0 < x < e^{-\frac{1}{2}}$ , 故  $f(x)$  在  $(0, e^{-\frac{1}{2}})$  上单调递减, 在  $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$  上单调

递增, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-2 \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{-2} = 0$ , 又  $f(x)$

是偶函数, 故  $f(x)$  的图像如图所示, 所以  $x=0$  为  $f(x)$  的极大值点, 故 D 错误.

故选 ABC.



## 12. ABD

思路导引 对于 A, 正方体内切球直径大于 0.99 m, 故满足条件;

对于 B, 找出正方体内部最大的正四面体  $\rightarrow$  求出该四面体的棱长  $\rightarrow$  发现大于 1.4 m, 故满足条件;

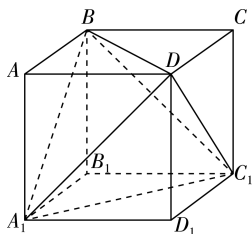
对于 C, 将该圆柱体看成长度为 1.8 m 的线段  $\rightarrow$  该线段与正方体体对角线比较大小  $\rightarrow$  不满足条件;

对于 D, 将该圆柱体看成直径为 1.2 m 的圆  $\rightarrow$  正方体的正六边形截面的内切圆直径大于 1.2 m, 故满足条件.

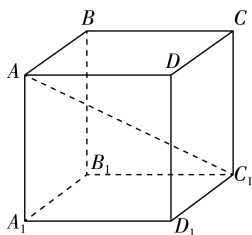
### 【命题点】空间几何体的综合问题

【解析】对于 A 选项, 正方体内切球的直径为 1 m, 故 A 符合题意;

对于 B 选项, 如图, 正方体内部最大的正四面体棱长为  $BA_1 = \sqrt{2}$  m,  $\sqrt{2}$  m  $>$  1.4 m, 故 B 符合题意;

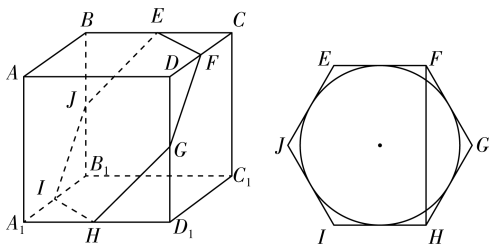


对于 C 选项, 圆柱底面直径为 0.01 m, 可忽略不计, 高为 1.8 m, 圆柱可看作长度为 1.8 m 的线段. 如图, 正方体的体对角线为  $AC_1 = \sqrt{3}$  m  $<$  1.8 m, 故 C 不符合题意;



对于 D 选项, 圆柱高为 0.01 m, 可忽略不计, 底面直径为 1.2 m, 圆柱可看作直径为 1.2 m 的圆. 如图,  $E, F, G, H, I, J$  为各棱的中点, 六边形  $EFGHIJ$  为正六边形, 其边长为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  m,

其内切圆直径  $FH = \sqrt{3} FG = \frac{\sqrt{6}}{2}$  m,  $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{6}{4} > (1.2)^2 = 1.44$ , 故 D 符合题意.



### 13.64 【命题点】组合、分类与分步计数原理

【解析】由题知, 选修 1 门体育类选修课和 1 门艺术类选修课的所有可能结果有  $C_4^1 C_4^1 = 16$  (种); 选修 2 门体育类选修课和 1 门艺术类选修课的所有可能结果有  $C_4^2 C_4^1 = 24$  (种); 选修 1 门体育类选修课和 2 门艺术类选修课的所有可能结果有  $C_4^1 C_4^2 = 24$  (种). 所以不同的选课方案共有  $16 + 24 + 24 = 64$  (种).

### 14. $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ 【命题点】棱台的体积

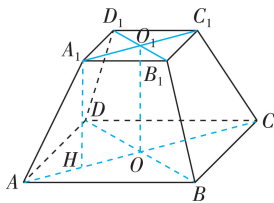
【解析】如图,连接  $AC, BD$  交于点  $O$ , 连接  $A_1C_1, B_1D_1$  交于点  $O_1$ , 连接  $OO_1$ , 过点  $A_1$  作  $A_1H \perp AC$  于点  $H$ , 则  $OO_1$  为正四棱台  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的高. 在等腰梯形  $A_1ACC_1$  中,

$$AC = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2}, A_1C_1 = \sqrt{2}A_1B_1 = \sqrt{2}, \text{ 则 } AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2},$$

$$A_1O_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } AH = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 又 } AA_1 = \sqrt{2}, \text{ 所以 } A_1H =$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 所以 } OO_1 = A_1H = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 所以正四棱台 } ABCD-A_1B_1C_1D_1 \text{ 的}$$

$$\text{体积为 } \frac{1}{3} \times (1^2 + 2^2 + \sqrt{1^2 \times 2^2}) \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{6}.$$



### 15. [2,3) 【命题点】三角函数的零点问题

【解析】令  $f(x) = \cos \omega x - 1 = 0$ , 得  $\cos \omega x = 1$ , 又  $x \in [0, 2\pi]$ , 则  $\omega x \in [0, 2\omega\pi]$ , 所以  $4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$ , 解得  $2 \leq \omega < 3$ , 即  $\omega$  的取值范围是  $[2, 3)$ .

**一题多解** 令  $f(x) = \cos \omega x - 1 = 0 (\omega > 0)$ , 得  $\cos \omega x = 1$ , 即  $\omega x = 2k\pi (\omega > 0), k \in \mathbf{Z}$ , 解得  $x = \frac{2k\pi}{\omega} (\omega > 0), k \in \mathbf{Z}$ . 因为  $f(x)$  在区间  $[0, 2\pi]$  有且仅有 3 个零点, 且  $f(0) = 0$ , 所以  $f(x)$  的 3 个零点对应  $k=0, 1, 2$ , 所以  $f\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) = f\left(\frac{4\pi}{\omega}\right) = 0$  且  $\frac{4\pi}{\omega} \leq 2\pi < \frac{6\pi}{\omega}$ , 解得  $2 \leq \omega < 3$ , 即  $\omega$  的取值范围是  $[2, 3)$ .

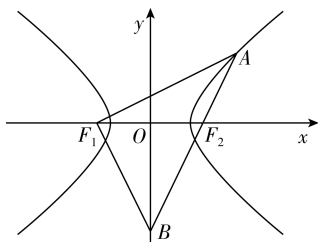
### 16. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

**思路导引** 思路一: 设点  $F_1, F_2, B$  的坐标  $\rightarrow$  根据  $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$  得点  $A$  的坐标  $\rightarrow$  根据  $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$  得  $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B} = 0 \rightarrow$  将点  $A$  的坐标代入  $C$  的方程  $\rightarrow$  得到关于  $a$  和  $c$  的等式  $\rightarrow$  求出离心率

思路二: 根据  $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$  设  $|F_2A| = 2x$ , 则  $|F_2B| = 3x \rightarrow$  根据双曲线的定义及几何性质表示出  $|F_1B|, |AF_1| \rightarrow$  设  $\angle F_1AF_2 = \theta$ , 利用  $\cos \theta = \frac{4}{5}$  求出  $x \rightarrow$  利用余弦定理求得  $a$  与  $c$  的关系  $\rightarrow$  求出离心率

【命题点】求双曲线的离心率

【解析】建立如图所示的坐标系, 依题意可以设  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), B(0, n)$ .



由  $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$ , 得  $A\left(\frac{5}{3}c, -\frac{2}{3}n\right)$ . 又  $\overrightarrow{F_1A} \perp \overrightarrow{F_1B}$ , 且  $\overrightarrow{F_1A} = \left(\frac{8}{3}c, -\frac{2}{3}n\right)$ ,  $\overrightarrow{F_1B} = (c, n)$ , 则  $\overrightarrow{F_1A} \cdot \overrightarrow{F_1B} = \left(\frac{8}{3}c, -\frac{2}{3}n\right) \cdot (c, n) = \frac{8}{3}c^2 - \frac{2}{3}n^2 = 0$ , 所以  $n^2 = 4c^2$ .

又点 A 在双曲线 C 上, 则  $\frac{\frac{25}{9}c^2}{a^2} - \frac{\frac{4}{9}n^2}{b^2} = 1$ , 整理得  $\frac{25c^2}{a^2} - \frac{4n^2}{b^2} = 9$ , 将  $n^2 = 4c^2$ ,  $b^2 = c^2 - a^2$  代入, 得  $\frac{25c^2}{a^2} - \frac{16c^2}{c^2 - a^2} = 9$ , 即  $25e^2 - \frac{16e^2}{e^2 - 1} = 9$ , 解得  $e^2 = \frac{9}{5}$  或  $e^2 = \frac{1}{5}$  (舍去), 故  $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ .

**一题多解** 由  $\overrightarrow{F_2A} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$  得  $\frac{|F_2A|}{|F_2B|} = \frac{2}{3}$ , 设  $|F_2A| = 2x$ , 则  $|F_2B| = 3x$ ,  $|AB| = 5x$ . 由双曲线的对称性可得  $|F_1B| = 3x$ , 由双曲线的定义可得  $|AF_1| = 2x + 2a$ . 设  $\angle F_1AF_2 = \theta$ , 则  $\sin \theta = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$ , 所以  $\cos \theta = \frac{4}{5} = \frac{2x+2a}{5x}$ , 解得  $x = a$ , 所以  $|AF_1| = 4a$ ,  $|AF_2| = 2a$ . 在  $\triangle AF_1F_2$  中, 由余弦定理可得  $\cos \theta = \frac{16a^2 + 4a^2 - 4c^2}{16a^2} = \frac{4}{5}$ , 即  $5c^2 = 9a^2$ , 可得  $e = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ .

## 17. 【命题点】利用正余弦定理解三角形

**【解】** (1) 在  $\triangle ABC$  中,  $A+B=3C$ , 又  $A+B+C=\pi$ ,

(解三角形要注意三角形内角和定理的应用)

所以  $C = \frac{\pi}{4}$ . ..... 2 分

又因为  $2\sin(A-C) = \sin B$ , 即  $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin B$ ,

所以  $\sin B = 2\cos B$ . ..... 3 分

又因为  $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ ,  $B \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ ,

所以  $\sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ,  $\cos B = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,

所以  $\sin A = \sin(B+C) = \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right) = \sin B \cos \frac{\pi}{4} + \cos B \cdot$

$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ . ..... 5 分

(利用两角和的正弦公式)

(2) 在  $\triangle ABC$  中, 记内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,

因为  $AB=c=5, C=\frac{\pi}{4}, \sin B=\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ,

所以由正弦定理  $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ , 可得  $\frac{a}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}=\frac{b}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=$

$\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ , 解得  $a=3\sqrt{5}, b=2\sqrt{10}$ . ..... 7 分

设  $AB$  边上的高为  $h$ ,

由三角形的面积公式可得  $\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}c \cdot h$ ,

即  $\frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 5h$ ,

解得  $h=6$ ,

即  $AB$  边上的高为 6. .... 10 分

### 一题多解

(1) 因为  $A+B=3C, A+B+C=\pi$ , 所以  $C=\frac{\pi}{4}$ .

..... 2 分

因为  $2\sin(A-C)=\sin B$ , 所以  $2\sin\left(A-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-A\right)$ ,

所以  $\sqrt{2}\sin A - \sqrt{2}\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos A + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin A$ ,

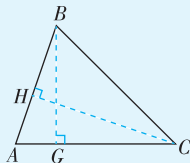
即  $\sin A = 3\cos A$ . .... 3 分

因为  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1, A \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ ,

所以  $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ . .... 5 分

(2) 如图, 过点  $B$  作  $BG \perp AC$  于  $G$ , 过点  $C$  作  $CH \perp AB$  于  $H$ ,

由 (1) 知  $\sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ .



因为  $AB=5$ , 所以  $BG=AB \cdot \sin A = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ ,

所以  $AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ . .... 6 分

因为  $C=\frac{\pi}{4}$ , 所以  $CG=BG=\frac{3\sqrt{10}}{2}$ ,

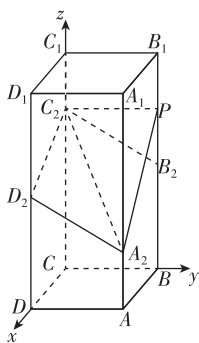
所以  $AC=AG+CG=2\sqrt{10}$ . .... 8 分

所以  $CH = \frac{BG \cdot AC}{AB} = \frac{\frac{3\sqrt{10}}{2} \times 2\sqrt{10}}{5} = 6$ ,

即  $AB$  边上的高为 6. .... 10 分

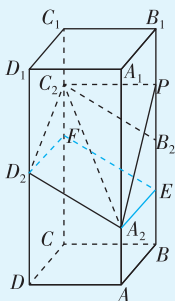
## 18. 【命题点】空间平行关系的证明和利用空间向量解决与二面角有关的问题

(1) 【证明】如图, 以  $CD, CB, CC_1$  所在直线分别为  $x, y, z$  轴, 建立空间直角坐标系.



因为  $AB=2, AA_1=4, AA_2=1, BB_2=DD_2=2, CC_2=3$ ,  
 所以  $A_2(2,2,1), B_2(0,2,2), C_2(0,0,3), D_2(2,0,2)$ , ..... 3分  
 所以  $\overrightarrow{A_2D_2} = \overrightarrow{B_2C_2} = (0, -2, 1)$ , 又  $A_2, D_2, B_2, C_2$  四点不共线,  
 所以  $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ . ..... 5分

**一题多解** 如图, 过点  $A_2$  作  $A_2E \perp BB_1$  于点  $E$ , 过点  $D_2$  作  $D_2F \perp CC_1$  于点  $F$ , 在正四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $AB=2, AA_1=4$ , 点  $A_2, B_2, C_2, D_2$  分别在棱  $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1$  上, 且  $AA_2=1, BB_2=DD_2=2, CC_2=3$ , 所以  $A_2E \parallel D_2F, B_2E \parallel C_2F$ , 所以四边形  $A_2EFD_2, B_2C_2FE$  均为平行四边形, ..... 3分  
 所以  $A_2D_2 \parallel EF, B_2C_2 \parallel EF$ , 所以  $B_2C_2 \parallel A_2D_2$ . ..... 5分



(2) 【解】设  $P(0,2,a) (0 \leq a \leq 4)$ , 由(1)中建系可知  $A_2(2,2,1), C_2(0,0,3), D_2(2,0,2)$ ,

则  $\overrightarrow{A_2C_2} = (-2, -2, 2), \overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1), \overrightarrow{A_2P} = (-2, 0, a-1)$ . 设平面  $A_2C_2D_2$  的法向量为  $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$ , 所以

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_2C_2} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{A_2D_2} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -2x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 0, \\ -2y_1 + z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } y_1 = 1, \text{ 可得 } x_1 = 1,$$

$z_1 = 2$ , 所以  $\mathbf{m} = (1, 1, 2)$ . ..... 8分

设平面  $PA_2C_2$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$ , 所以

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_2C_2} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{A_2P} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} -2x_2 - 2y_2 + 2z_2 = 0, \\ -2x_2 + (a-1)z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{取 } z_2 = 1, \text{ 可得 } x_2 =$$

$$\frac{a-1}{2}, y_2 = \frac{3-a}{2}, \text{ 所以 } \mathbf{n} = \left( \frac{a-1}{2}, \frac{3-a}{2}, 1 \right). \quad \text{..... 10分}$$

因为二面角  $P-A_2C_2-D_2$  为  $150^\circ$ ,

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{\left| \frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{2} + 2 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{\left( \frac{a-1}{2} \right)^2 + \left( \frac{3-a}{2} \right)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 解得 } a = 1 \text{ 或}$$



$a=3$ , 所以点  $P$  为  $B_2B$  的中点或  $B_2B_1$  的中点, 即  $B_2P=1$ .

..... 12 分

**19. 【命题点】**利用导数研究函数的单调性、不等式证明

(1)【解】因为  $f(x)=a(e^x+a)-x$ , 所以  $f'(x)=ae^x-1$ ,

(对  $a$  分类讨论判断导函数的正负)

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$  恒成立, 所以  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减;

..... 2 分

当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = 0$ , 可得  $x = -\ln a$ ,

当  $x$  变化时,  $f(x)$  与  $f'(x)$  变化如下表:

$x$	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

当  $x \in (-\infty, -\ln a)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减,

当  $x \in (-\ln a, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.

综上, 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减; 当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, -\ln a)$  上单调递减, 在  $(-\ln a, +\infty)$  上单调递增.

..... 5 分

(2)【证明】由(1)可知当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, -\ln a)$  上单调递减, 在  $(-\ln a, +\infty)$  上单调递增,

所以  $f(x)_{\min} = f(-\ln a) = a\left(\frac{1}{a} + a\right) + \ln a = a^2 + \ln a + 1$ , ..... 7 分

构造函数  $g(a) = a^2 + \ln a + 1 - 2\ln a - \frac{3}{2} = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$ , ... 8 分

(构造关于  $a$  的函数  $g(a)$ , 只需证明  $g(a)$  的最小值大于 0 即可)

则  $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$ ,

令  $g'(a) = 0$ , 解得  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (负值舍去).

当  $a \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  时,  $g'(a) < 0$ ,  $g(a)$  单调递减, 当  $a \in$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$  时,  $g'(a) > 0$ ,  $g(a)$  单调递增, ..... 10 分

所以  $g(a)_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \ln \sqrt{2} > 0$ ,

所以当  $a > 0$  时,  $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ . ..... 12 分

**20. 【命题点】**等差数列基本量的运算及通项公式、前  $n$  项和公式

【解】(1) 由  $3a_2 = 3a_1 + a_3$ , 得  $3(a_1 + d) = 3a_1 + a_1 + 2d$ ,

整理得  $a_1 = d$ , 所以  $a_n = nd$ ,  $b_n = \frac{n+1}{d}$ . ..... 2 分

由  $S_3 + T_3 = 21$ , 得  $d + 2d + 3d + \frac{2}{d} + \frac{3}{d} + \frac{4}{d} = 21$ ,

整理得  $2d^2 - 7d + 3 = 0$ , 解得  $d = 3$  或  $d = \frac{1}{2}$  (舍), ..... 5 分

故  $a_n = 3n$ . ..... 6 分

(2) 若  $\{b_n\}$  是等差数列, 则  $b_1 + b_3 = 2b_2$ ,

即  $\frac{2}{a_1} + \frac{12}{a_3} = 2 \times \frac{6}{a_2}$ , 所以  $a_2 a_3 + 6a_1 a_2 = 6a_1 a_3$ ,

所以  $(a_1 + d)(a_1 + 2d) + 6a_1(a_1 + d) = 6a_1(a_1 + 2d)$ ,

整理得  $a_1^2 - 3a_1 d + 2d^2 = 0$ , 解得  $a_1 = d$  或  $a_1 = 2d$ . ..... 8 分

① 若  $a_1 = d$ , 则  $a_n = nd, b_n = \frac{n+1}{d}$ ,

由  $S_{99} - T_{99} = 99$ , 得  $50d - \frac{51}{d} = 1$ , 即  $50d^2 - d - 51 = 0$ ,

解得  $d = -1$  (舍) 或  $d = \frac{51}{50}$ ; ..... 10 分

② 若  $a_1 = 2d$ , 则  $a_n = (n+1)d, b_n = \frac{n}{d}$ ,

由  $S_{99} - T_{99} = 99$ , 得  $51d - \frac{50}{d} = 1$ , 即  $51d^2 - d - 50 = 0$ ,

解得  $d = 1$  (舍) 或  $d = -\frac{50}{51}$  (舍).

综上,  $d = \frac{51}{50}$ . ..... 12 分

## 21. 【命题点】离散型随机变量的期望、概率与数列的综合

【解】(1) 第 2 次投篮的人是乙分两种情况:

第 1 次投篮的人是甲且投篮未命中, 其概率为  $0.5 \times (1 - 0.6) = 0.2$ ; ..... 2 分

第 1 次投篮的人是乙且投篮命中, 其概率为  $0.5 \times 0.8 = 0.4$ , 所以第 2 次投篮的人是乙的概率为  $0.2 + 0.4 = 0.6$ . ..... 4 分

(2) 设第  $i$  次投篮的人是甲为事件  $A_i$ ,

则  $P(A_1) = 0.5, P(A_{i+1}) = P(A_i) \times 0.6 + (1 - P(A_i)) \times (1 - 0.8) = \frac{2}{5}P(A_i) + \frac{1}{5}$ ,

所以  $P(A_{i+1}) - \frac{1}{3} = \frac{2}{5} \left[ P(A_i) - \frac{1}{3} \right]$ ,

所以  $\left\{ P(A_i) - \frac{1}{3} \right\}$  是以  $\frac{1}{6}$  为首项,  $\frac{2}{5}$  为公比的等比数列,

..... 6 分

所以  $P(A_i) - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times \left( \frac{2}{5} \right)^{i-1}$ ,

所以  $P(A_i) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left( \frac{2}{5} \right)^{i-1}, i \in \mathbf{N}^*$ . ..... 8 分

(3) 由 (2) 知, 第  $i$  次投篮的人是甲的概率为  $P(A_i) = \frac{1}{3} +$

$\frac{1}{6} \times \left( \frac{2}{5} \right)^{i-1}, i \in \mathbf{N}^*$ ,

第  $i$  次投篮的人是甲记为  $X_i = 1$ , 否则记为  $X_i = 0$ , 则  $X_i$  服从

两点分布, 且  $P(X_i = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \left( \frac{2}{5} \right)^{i-1}$ , ..... 10 分

由题意知  $E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n P(X_i = 1) = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{3} +$

$\frac{1}{6} \times \left( \frac{2}{5} \right)^{i-1} \right] = \frac{6n+5}{18} - \frac{1}{9} \cdot \left( \frac{2}{5} \right)^{n-1}$ . ..... 12 分

22. **思路导引** (2) 设  $A, B, D$  三点在曲线  $W$  上, 设出点  $A,$

$B, D$  的坐标, 直线  $AB$  的方程  $\xrightarrow{\text{矩形的性质}}$  直线  $AD$  的斜率  
 $\rightarrow$  将直线  $AB$  与曲线  $W$  的方程联立  $\xrightarrow{\text{弦长公式}}$   $|AB|$  的表达  
 式  $\xrightarrow{\text{同理}}$   $|AD|$  的表达式  $\rightarrow |AB| + |AD|$  的表达式  
 $\xrightarrow[\text{导数}]{\text{不等式的性质}}$   $|AB| + |AD|$  的取值范围  $\rightarrow$  证得结论

**【命题点】** 曲线与方程、直线与抛物线的位置关系

(1) **【解】** 设点  $P(x, y)$ , 由题意, 得  $|y| = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2}$ ,

化简, 得  $y = x^2 + \frac{1}{4}$ ,

所以  $W$  的方程为  $y = x^2 + \frac{1}{4}$ . ..... 4 分

(2) **【证明】** 设  $A, B, D$  三点在曲线  $W: y = x^2 + \frac{1}{4}$  上, 显然直线  $AB$  的斜率存在且不等于零.

设  $A\left(x_0, x_0^2 + \frac{1}{4}\right), B\left(x_1, x_1^2 + \frac{1}{4}\right), D\left(x_2, x_2^2 + \frac{1}{4}\right)$ , 直线  $AB$  的斜率为  $k$ , 则直线  $AD$  的斜率为  $-\frac{1}{k}$ , 直线  $AB$  的方程为  $y -$

$\left(x_0^2 + \frac{1}{4}\right) = k(x - x_0)$ , 由对称性不妨设  $0 < |k| \leq 1$ . ..... 6 分

由  $\begin{cases} y - \left(x_0^2 + \frac{1}{4}\right) = k(x - x_0), \\ y = x^2 + \frac{1}{4} \end{cases}$  消去  $y$ , 得  $x^2 - kx + kx_0 - x_0^2 = 0$ , 解得

$x = x_0$  或  $x = k - x_0$ ,

所以  $x_1 = k - x_0, |AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_0| = \sqrt{1+k^2} |k - 2x_0|$ .

同理可得  $|AD| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} |x_2 - x_0| = \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} \left| -\frac{1}{k} - 2x_0 \right|$  (**提示: 用  $-\frac{1}{k}$  替换  $k$  可得**) ..... 8 分

所以  $|AB| + |AD| = \sqrt{1+k^2} \left( |k - 2x_0| + \frac{1}{|k|} \left| \frac{1}{k} + 2x_0 \right| \right) \geq \sqrt{1+k^2} \left( |k - 2x_0| + \left| \frac{1}{k} + 2x_0 \right| \right) \geq \sqrt{1+k^2} \left| k + \frac{1}{k} \right| = \sqrt{\frac{(1+k^2)^3}{k^2}}.$

..... 10 分

(不易求得取值范围, 构造函数, 利用导数求取值范围)

令  $t = k^2, f(t) = \frac{(1+t)^3}{t} (0 < t \leq 1)$ ,

则  $f'(t) = \frac{3t(1+t)^2 - (1+t)^3}{t^2} = \frac{(1+t)^2(2t-1)}{t^2}$ ,

所以  $f(t)$  在  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  上单调递减, 在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  上单调递增,

所以  $f(t) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{27}{4}$ .

由于两处取等条件不一致,故  $|AB|+|AD|>\frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 从而矩形

$ABCD$  的周长大于  $3\sqrt{3}$ . ..... 12 分

### 一题多解

(2) 将抛物线  $W$  向下平移  $\frac{1}{4}$  个单位长度得

到抛物线  $W': y=x^2$  (提示: 为了方便计算, 将抛物线平移后进行推理运算), 矩形  $ABCD$  变换为矩形  $A'B'C'D'$ , 则问题等价于矩形  $A'B'C'D'$  的周长大于  $3\sqrt{3}$ .

设  $B'(t_0, t_0^2), A'(t_1, t_1^2), C'(t_2, t_2^2)$  在抛物线  $W'$  上, 根据对称性不妨设  $t_0 \geq 0$ , 则  $k_{A'B'} = t_1 + t_0, k_{B'C'} = t_2 + t_0$ .

因为  $A'B' \perp B'C'$ ,

所以  $(t_1 + t_0)(t_2 + t_0) = -1$ . ..... 6 分

又  $|A'B'| = \sqrt{1 + (t_1 + t_0)^2} |t_1 - t_0|, |B'C'| = \sqrt{1 + (t_2 + t_0)^2} \cdot |t_2 - t_0|$ , 且  $t_0$  介于  $t_1, t_2$  之间,

则  $|A'B'| + |B'C'| = \sqrt{1 + (t_1 + t_0)^2} |t_1 - t_0| + \sqrt{1 + (t_2 + t_0)^2} |t_2 - t_0|$ .

令  $t_2 + t_0 = \tan \theta$ , 则  $t_1 + t_0 = -\frac{1}{\tan \theta}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $t_2 = \tan \theta -$

$t_0, t_1 = -\frac{1}{\tan \theta} - t_0$ , ..... 8 分

则  $|A'B'| + |B'C'| = \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \theta}} \left(2t_0 + \frac{1}{\tan \theta}\right) + \sqrt{1 + \tan^2 \theta} (\tan \theta - 2t_0) =$   
 $2t_0 \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\cos \theta}\right) + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{2t_0(\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}.$

当  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$  时,  $|A'B'| + |B'C'| \geq \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} +$

$\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \geq 2\sqrt{\frac{1}{\sin \theta \cos \theta}} = 2\sqrt{\frac{2}{\sin 2\theta}} \geq 2\sqrt{2} > \frac{3\sqrt{3}}{2}; \dots\dots 10$  分

当  $\theta \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  时, 由于  $t_1 < t_0 < t_2$ , 从而  $-\frac{1}{2\tan \theta} < t_0 < \frac{\tan \theta}{2}$ .

又  $t_0 \geq 0$ , 所以  $0 \leq t_0 < \frac{\tan \theta}{2}$ ,

所以  $|A'B'| + |B'C'| = \frac{2t_0(\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta \cos \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} >$

$\frac{\sin \theta(\cos \theta - \sin \theta)}{\sin \theta \cos^2 \theta} + \frac{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$

$= \sqrt{\frac{2}{\sin^2 \theta \sin^2 \theta \cdot 2\cos^2 \theta}} \geq \sqrt{\frac{2}{\left(\frac{2}{3}\right)^3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

综上, 矩形  $ABCD$  的周长大于  $3\sqrt{3}$ . ..... 12 分