

1. D 【命题点】不等式的解法、集合的交集运算

【解析】 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\} = \{x | 0 \leq x < 16\}$, $N = \{x | 3x \geq 1\} = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{3}\right\}$, 所以 $M \cap N = \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 16\right\}$, 故选 D.

2. D 【命题点】复数的运算、共轭复数

【解析】由 $i(1-z) = 1$, 得 $z = 1 - \frac{1}{i} = 1 + i$, 所以 $z + \bar{z} = 1 + i + 1 - i = 2$, 故选 D.

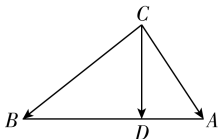
3. B 【命题点】向量的线性运算

【解析】如图, 因为点 D 在边 AB 上,

$BD = 2DA$, 所以 $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} +$

$3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + 3(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}) = -2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{CD} =$

$-2m + 3n$, 故选 B.



4. C 【命题点】棱台的体积计算

【解析】由题意知棱台的两底面面积分别为 $1.4 \times 10^8 \text{ m}^2$ 和 $1.8 \times 10^8 \text{ m}^2$ (提示: $1 \text{ km}^2 = 10^6 \text{ m}^2$), 高为 $157.5 - 148.5 =$

$9(\text{m})$, 所以棱台的体积 $V = \frac{1}{3} \times (1.4 \times 10^8 + 1.8 \times 10^8 +$

$\sqrt{1.4 \times 10^8 \times 1.8 \times 10^8}) \times 9 = 3 \times 10^8 \times (1.4 + 1.8 + 0.6 \times \sqrt{7}) \approx$

$1.437 \times 10^9 \approx 1.4 \times 10^9 (\text{m}^3)$ (提示: 台体的体积 $V =$

$\frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$, S_1, S_2 分别表示台体的上、下底面积, h

表示台体的高), 故选 C.

5. D 【命题点】古典概型概率的计算

【解析】从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 共有

$C_7^2 = 21$ (种) 不同的结果, 这 2 个数互质的情况有 $\{2, 3\}, \{2,$

$5\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5,$

$6\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}$, 共 14 种. 所以这 2 个数互质

的概率 $P = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$. 故选 D.

6. A 【命题点】三角函数的图像与性质

【解析】因为函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 中心对称, 所以

$b = 2$, 且 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 所以 $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\omega =$

$-\frac{1}{6} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbf{Z}$. 又 $\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 则 $2 < \omega < 3$, 解得 $\omega = \frac{5}{2}$. 所以

$f(x) = \sin\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$, 从而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} + 2 = 1$, 故选 A.

7. C 【命题点】利用函数的单调性比较大小

【解析】由题易知 $a > 0, b > 0, c > 0$. $\frac{a}{b} = 0.9e^{0.1} = (1 - 0.1)e^{0.1}$.

令 $f(x) = (1-x)e^x$, 则 $f'(x) = -xe^x$, 所以当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 所以 $0 < f(0.1) < f(0) = 1$, 所以 $a < b$. 因为当 $x > 0$ 时, $1+x < e^x$, 所以 $\ln(1+x) < x$, 即 $\frac{\ln(1+x)}{x} < 1$, 所以 $0 < \frac{c}{b} = -9\ln 0.9 = 9\ln \frac{10}{9} = 9\ln\left(1+\frac{1}{9}\right) < 1$, 从而 $c < b$. $a - c = 0.1e^{0.1} + \ln(1-0.1)$.

令 $g(x) = xe^x + \ln(1-x)$ ($0 < x < 1$), 则 $g'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x^2)e^x - 1}{1-x}$, 再令 $h(x) = (1-x^2)e^x - 1$ ($0 < x < 1$), 则 $h'(x) = (1-2x-x^2)e^x$, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{2} - 1$ (舍负), 当 $x \in (0, \sqrt{2}-1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 所以 $h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 所以 $g(x) > 0$, 所以 $g(0.1) > 0$, 即 $a > c$. 综上, $c < a < b$. 故选 C.

一题多解

令 $a = xe^x$, $b = \frac{x}{1-x}$, $c = -\ln(1-x)$ ($x = 0.1$).

① 令 $y_1 = \ln(xe^x) - \ln \frac{x}{1-x} = x + \ln x - [\ln x - \ln(1-x)] = x + \ln(1-x)$, $x \in (0, 0.1]$, 则 $y_1' = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0$,

所以 $y_1 < 0$, 所以当 $x = 0.1$ 时, 可知 $\ln a - \ln b < 0$, 即 $b > a$.

② 令 $y_2 = xe^x + \ln(1-x)$, $x \in (0, 0.1]$,

$$y_2' = xe^x + e^x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x)e^x - 1}{1-x}.$$

令 $k(x) = (1+x)(1-x)e^x - 1$, $x \in (0, 0.1]$, 所以 $k'(x) = (1-x^2-2x)e^x > 0$, $k(x)$ 单调递增,

所以 $k(x) > 0$, 所以 $y_2' > 0$, 所以 $y_2 > 0$,

所以当 $x = 0.1$ 时, 可知 $a - c > 0$, 即 $a > c$.

综上, $c < a < b$. 故选 C.

关键点拨

比较大小时可以利用作差法或作商法比较, 还要注意数值之间的内在联系, 构造合适的函数, 然后利用函数的单调性比较大小.

8. C

思路导引

外接球的体积 \rightarrow 球的半径 \rightarrow 找到球心 O' 的位置 \rightarrow 根据勾股定理表示出四棱锥的高 h 与 l 之间的关系 \rightarrow 四棱锥体积可以看成关于 h 的函数 \rightarrow 求导 \rightarrow 求出最值

【命题点】四棱锥的外接球

【解析】设外接球的半径为 R , 因为外接球的体积为 36π , 即

$$36\pi = \frac{4}{3}\pi R^3, \text{ 所以 } R = 3. \text{ 如图, 在正四棱锥 } P-ABCD \text{ 中, 过点}$$

P 作 $PO \perp$ 平面 $ABCD$, 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, 所以 O 为

底面 $ABCD$ 对角线的交点. 设 $AB = 2a$, 则 $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}AB = \sqrt{2}a$.

取 PO 上点 O' 使得 $PO' = O'A$, 则 O' 为该四棱锥外接球的球心.

设该四棱锥的高 $PO=h$, 体积为 V , 则 $V=\frac{1}{3} \cdot 4a^2h=\frac{4}{3}a^2h$.

又因为 $(h-3)^2 + 2a^2 = 9$, 所以 $2a^2 = 6h - h^2$. 因为 $l \in [3, 3\sqrt{3}]$,

$$\frac{4}{3}a^2h = \frac{4}{3}\left(3h - \frac{h^2}{2}\right)h = 4h^2 - \frac{2}{3}h^3 \quad \left(\text{另解: 也可利用基本不等}\right)$$

式求解最大值, $V = \frac{4}{3}a^2h = 72 \times \frac{l^2}{36} \times \frac{l^2}{36} \times \left(2 - \frac{l^2}{18}\right) \leq 72 \times$

$$\left[\frac{\frac{l^2}{36} + \frac{l^2}{36} + \left(2 - \frac{l^2}{18} \right)}{3} \right]^3 = \frac{64}{3}, \text{ 当且仅当 } \frac{l^2}{36} = 2 - \frac{l^2}{18}, \text{ 即 } l = 2\sqrt{6} \text{ 时}$$

取等号), 所以 $V' = -2h^2 + 8h$, 令 $V' = 0$, 则 $h = 0$ 或 $h = 4$, 所以

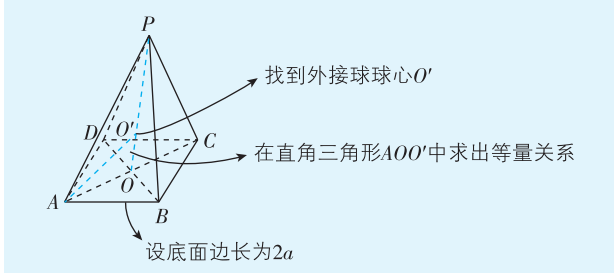
$V=4h^2-\frac{2}{3}h^3$ 在 $\left[\frac{3}{2}, 4\right)$ 上单调递增, 在 $\left[4, \frac{9}{2}\right]$ 上单调递

减. 故当 $h=4$ 时, V 取最大值 $\frac{64}{3}$; 当 $h=\frac{9}{2}$ 时, $V=\frac{81}{4}$; 当 $h=\frac{3}{2}$

时, $V = \frac{27}{4}$. 则 V 的最小值为 $\frac{27}{4}$. 故该正四棱锥体积的取值范

围是 $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$. 故选 C.

▶ 答图注解



9. ABD 【命题点】线线角和线面角的求解

【解析】如图,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$

中,因为 $BC_1 \perp B_1C, BC_1 \perp A_1B_1, B_1C \cap A_1B_1 = B_1$, 所以 $BC_1 \perp$ 平面 A_1B_1CD , 所

以 $BC_1 \perp DA_1, BC_1 \perp CA_1$, 故选项 A, B 均

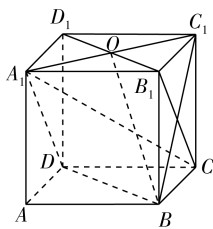
正确;设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$, 因为 $A_1C_1 \perp$ 平

面 BB_1D_1D , 所以直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为

$\angle C_1BO$, 在 $\text{Rt}\triangle C_1BO$ 中, $\sin \angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}$, 故 $\angle C_1BO =$

30° ,故选项 C 错误;直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为

$\angle C_1BC=45^\circ$,故选项 D 正确. 故选 ABD.



10. AC 【命题点】利用导数研究极值、零点及导数的几何意义

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 1$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故当 $x \in$

$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ 时, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in$

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)$ 有两个极值点 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

与 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 A 正确. 又 $f(-2)=-5, f(-1)=1, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)>0$,所以 $f(x)$ 只有一个零点,故 B 错误. 由 $f(x)+f(-x)=2$ 可知,点 $(0,1)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心(另解: $y=x^3-x$ 的图像关于点 $(0,0)$ 对称,将其向上平移一个单位长度可得 $f(x)$ 的图像,故 $f(x)$ 的图像关于点 $(0,1)$ 对称),故 C 正确. 令 $f'(x)=2$,得 $x=\pm 1$,又 $f(1)=1, f(-1)=1$,所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 和 $(-1,1)$ 处的切线方程分别为 $y=2x-1$ 和 $y=2x+3$,故 D 错误. 故选 AC.

11. BCD 【命题点】抛物线及其几何性质

【解析】对于 A,由点 $A(1,1)$ 在抛物线 C 上,得 $2p=1$,解得 $p=\frac{1}{2}$,则 C 的准线为 $y=-\frac{1}{4}$,故 A 错误.

对于 B,由点 A, B 的坐标得直线 AB 的斜率 $k_{AB}=2$,由于 C 的方程为 $y=x^2$,所以 $y'=2x$,令 $y'=2$,则 $x=1$,将 $x=1$ 代入 $y=x^2$,得 $y=1$,所以切点为 $(1,1)$,即为 A 点,所以直线 AB 与 C 相切,故 B 正确.

对于 C,由于直线 PQ 的斜率一定存在,设直线 PQ 的方程为

$y=kx-1$,由 $\begin{cases} y=x^2, \\ y=kx-1, \end{cases}$ 得 $x^2-kx+1=0$,所以 $x_P \cdot x_Q=1$,则

$y_P \cdot y_Q=x_P^2 \cdot x_Q^2=1$,所以 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}=x_P \cdot x_Q+y_P \cdot y_Q=2=|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos \theta < |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}|$ (其中 θ 为 \overrightarrow{OP} 与 \overrightarrow{OQ} 的夹角),

又 $|OA|^2=(1-0)^2+(1-0)^2=2$,所以 $|OA|^2 < |OP| \cdot |OQ|$,故 C 正确.

对于 D,由 C 知 $|BP| \cdot |BQ|=\sqrt{1+k^2}|x_P| \cdot \sqrt{1+k^2}|x_Q|=(1+k^2)|x_P x_Q|=1+k^2$,由 B 选项知 $|k|>2$,所以 $1+k^2>5$. 又 $|BA|^2=(1-0)^2+[1-(-1)]^2=5$,所以 $|BP| \cdot |BQ|>|BA|^2$,故 D 正确. 故选 BCD.

12. BC 【命题点】抽象函数的奇偶性、周期性和图像的对称性

【解析】因为 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$ 为偶函数,所以直线 $x=\frac{3}{2}$ 是 $f(x)$ 图

像的对称轴,点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 为 $g(x)$ 图像的对称中心(提示:若

函数 $h(x)$ 为偶函数,则其图像上在关于 y 轴对称的点处的切线的斜率互为相反数,即其导函数的图像关于原点对称).

因为 $g(2+x)$ 为偶函数,所以直线 $x=2$ 是 $g(x)$ 图像的对称轴,所以 $f(x)$ 图像的对称中心的横坐标为2,纵坐标

为常数,设常数为 C . 所以 $f(x)$ 的周期 $T=4 \times \left(2-\frac{3}{2}\right)=2$ (提示:若函数 $h(x)$ 的图像既关于点 $(a, 0)$ 对称,又关于直线

$x=b$ 对称,则函数 $h(x)$ 是周期为 $4|a-b|$ 的周期函数),

$g(x)$ 的周期也为2. 所以 $f(0)=f(2)=C$,故 A 不正确;

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{3}{2}\right)=0$,故 B 正确;由直线 $x=\frac{3}{2}$ 为 $f(x)$ 图像

的对称轴且 $T=2$,得 $f(4)=f(2)=f(1), f(-1)=f(1)$,故 C

正确;由点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 为 $g(x)$ 图像的对称中心且 $T=2$, 得 $g(-1)=g(1)=-g(2)$, 故 D 不正确. 故选 BC.

学霸解题·技巧 北京大学 张充

对于 A 选项, $f(0)=f\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)=f(2+1)=2f(2)-f(2-1)=2f\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=f(2)$, 无法看出 $f(0)=0$. 也可找出反例 $f(x)=\sin \pi x+1$, 符合题意但 $f(0) \neq 0$, A 错误.

13. -28 【命题点】二项式定理的应用

【解析】 $(x+y)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r x^{8-r} y^r$, 所以

$\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 $x^2 y^6$ 的系数为 $C_8^6+(-1)C_8^5=-28$.

14. $x=-1$ 或 $7x-24y-25=0$ 或 $3x+4y-5=0$ (答对其中之一即可) 【命题点】直线与圆的位置关系

【解析】 圆 $x^2+y^2=1$ 的圆心为 $(0,0)$, 半径为 1; 圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=16$ 的圆心为 $(3,4)$, 半径为 4. 因为 $\sqrt{(0-3)^2+(0-4)^2}=5$, 所以两圆外切, 有 3 条公切线. 当公切线斜率不存在时, 公切线方程为 $x=-1$; 当公切线斜率

存在时, 设公切线方程为 $y=kx+b$, 则
$$\begin{cases} \frac{|b|}{\sqrt{k^2+1}}=1, \\ \frac{|3k-4+b|}{\sqrt{k^2+1}}=4, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$$\begin{cases} k=\frac{7}{24}, \\ b=-\frac{25}{24} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} k=-\frac{3}{4}, \\ b=\frac{5}{4} \end{cases}$$

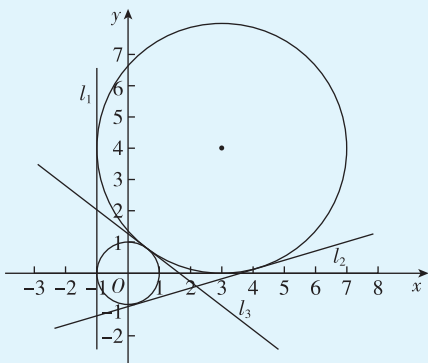
所以公切线方程为 $y=\frac{7}{24}x-\frac{25}{24}$ 或 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{4}$.

综上, 与两圆都相切的直线方程为 $x=-1$ 或 $7x-24y-25=0$ 或 $3x+4y-5=0$.

一题多解 由图可得, 两圆外切, 且均与直线 $l_1: x=-1$

相切. 过两圆圆心的直线 l 的方程为 $y=\frac{4}{3}x$, 可得 l 与 l_1 的

交点为 $P\left(-1, -\frac{4}{3}\right)$.



由切线定理得,两圆另一公切线 l_2 过点 P , 设 $l_2: y + \frac{4}{3} =$

$k(x+1)$, 由点到直线的距离公式可得 $\frac{\left|k - \frac{4}{3}\right|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$, 解得 $k =$

$\frac{7}{24}$, 即 $l_2: 7x - 24y - 25 = 0$.

由于两圆外切, 因此在公切点处存在公切线 l_3 与 l 垂直, 设

$l_3: y = -\frac{3}{4}x + b$, 由点到直线的距离公式可得 $\frac{|b|}{\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 1}} =$

1, 解得 $b = \frac{5}{4}$ 或 $b = -\frac{5}{4}$ (舍), 即 $l_3: 3x + 4y - 5 = 0$.

15. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ 【命题点】导数几何意义的应用

【解析】因为 $y = (x+a)e^x$, 所以 $y' = (x+a+1)e^x$. 设切点为 $(x_0, (x_0+a)e^{x_0})$, 则切线方程为 $y - (x_0+a)e^{x_0} = (x_0+a+1)e^{x_0}(x-x_0)$, 将 $(0,0)$ 代入, 整理得 $x_0^2 + ax_0 - a = 0$, 由题意得 $\Delta = a^2 + 4a > 0$ (提示: 有两条过原点的切线, 则有两个切点, 即方程有两个解), 解得 $a < -4$ 或 $a > 0$, 所以 a 的取值范围是 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.

16. 13

思路导引

离心率 $\rightarrow \left[\begin{array}{l} \triangle AF_1F_2 \text{ 为等边三角形} \rightarrow DE \text{ 垂直平分 } AF_2 \rightarrow \\ |AD| = |DF_2|, |AE| = |EF_2| \\ \text{椭圆方程} \\ \text{直线 } DE \text{ 的方程} \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{l} \text{根与系数的关系} \\ |DE| = 6 \end{array}]{c} \rightarrow$

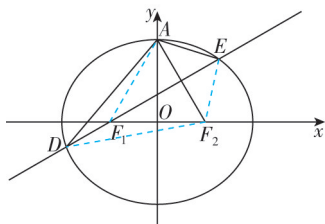
$\triangle ADE$ 的周长 $4a = 13$

【命题点】直线与椭圆的位置关系

【解析】设 F_1 为椭圆 C 的左焦点. 如图, 连接 AF_1, DF_2, EF_2 . 因为椭圆的离心率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $a = 2c$, 所以椭圆 C 的方程为

$\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$, 且 $\triangle AF_1F_2$ 为等边三角形, 则直线 DE 的斜率

$$k = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



由直线 DE 垂直平分线段 AF_2 得, $|AD| = |DF_2|$, $|AE| = |EF_2|$, 则 $\triangle ADE$ 的周长等价于 $|DE| + |DF_2| + |EF_2| = |DF_1| + |DF_2| + |EF_1| + |EF_2| = 4a$ (提示: 椭圆的定义).

设 $D(x_1, y_1)$, $E(x_2, y_2)$, 又直线 DE 的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$,

与椭圆方程联立得 $13x^2 + 8cx - 32c^2 = 0$, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{8c}{13}$,

$x_1x_2 = -\frac{32c^2}{13}$. 由弦长公式 $|DE| = \sqrt{k^2+1} \cdot |x_1-x_2| = \sqrt{k^2+1} \cdot$

$\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$, 得 $|DE| = \sqrt{\frac{1}{3}+1} \cdot \sqrt{\left(-\frac{8c}{13}\right)^2 + \frac{128c^2}{13}} =$

$\frac{48}{13}c=6$, 即 $c=\frac{13}{8}$. 所以 $\triangle ADE$ 的周长为 $4a=8c=13$.

学霸解题·技巧 北京师范大学 朱锐

设 F_1 为椭圆 C 的左焦点. 连接 AF_1, DF_2, EF_2 . 因为椭圆的

离心率为 $\frac{1}{2}$, 所以 $a=2c$, 所以 $\triangle AF_1F_2$ 是等边三角形, 从而

直线 DE 垂直平分线段 AF_2 , 所以 $|AD|=|DF_2|$, $|AE|=$

$|EF_2|$, 所以 $\triangle ADE$ 的周长为 $|AD|+|AE|+|DE|=|DF_2|+$

$|EF_2|+|DE|=4a$ (提示: 椭圆的定义). 易知直线 DE 的倾

斜角 $\theta=\frac{\pi}{6}$, 又 $|DE|=\frac{2ab^2}{a^2-c^2\cos^2\theta}=6$ (提示: 椭圆的焦点弦长

公式), $c=\frac{1}{2}a, b=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, 解得 $a=\frac{13}{4}$. 从而 $\triangle ADE$ 的周长为 13.

17. 【命题点】累乘法求通项、裂项相消法求和

(1) 【解】由题知, 数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数

列, 所以 $\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$,

所以 $S_n=\frac{n+2}{3}a_n$ 1 分

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1}=\frac{n+1}{3}a_{n-1}$,

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{3}a_n-\frac{n+1}{3}a_{n-1}$, 所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$,

所以 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1=\frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{3}{1}$.

$1=\frac{(n+1)n}{2}$ 4 分

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 满足上式, 所以 $a_n=\frac{(n+1)n}{2}$ 5 分

(不要忽略验证 $n=1$ 是否满足)

一题多解

(1) 由上知 $\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_{n-1}}{n-1} (n \geq 2)$,

所以 $\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)n} (n \geq 2)$, 2 分

所以 $\left\{\frac{a_n}{n(n+1)}\right\}$ 为常数列, 又 $\frac{a_1}{1 \times 2}=\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{1}{2}$, 所以 $a_n=\frac{n^2+n}{2}$ 5 分

(2) 【证明】由(1)知, $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{(n+1)n}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, 7 分

所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_n}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$

$$2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2-\frac{2}{n+1}<2. \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

18. 【命题点】正弦定理的应用、三角恒等变换

【解】(1) 因为 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\frac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\frac{\sin B}{\cos B}(\cos B\neq 0)$,

所以 $\cos A\cos B=\sin B+\sin A\sin B$, 即 $\cos(A+B)=\sin B$, 即 $\cos(\pi-C)=-\cos C=\sin B$, $\cdots \cdots 3 \text{ 分}$

所以当 $C=\frac{2\pi}{3}$ 时, $\sin B=-\cos \frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}$.

又 $0<B<\frac{\pi}{3}$, 所以 $B=\frac{\pi}{6}$. $\cdots \cdots 5 \text{ 分}$

(2) 由(1)知, $\sin B=-\cos C$, 所以 $B=C-\frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos B=$

$\sin C\left(\frac{\pi}{2}<C<\pi\right)$. $\cdots \cdots 6 \text{ 分}$

(也可得出 $\sin A=\sin(B+C)=\sin\left(2C-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2C=2\sin^2 C-1$ 进行后续化简求值)

由正弦定理得 $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 C}=\frac{\sin^2 A+\cos^2 C}{\sin^2 C}=\frac{\sin^2(B+C)+\cos^2 C}{\sin^2 C}$

$$=\frac{\sin^2 B\cos^2 C+\cos^2 B\sin^2 C+2\sin B\cos B\sin C\cos C+\cos^2 C}{\sin^2 C}$$

$$=\frac{\cos^4 C+\sin^4 C-2\sin^2 C\cos^2 C+\cos^2 C}{\sin^2 C}$$

$$=\frac{(1-\sin^2 C)^2+\sin^4 C-2\sin^2 C(1-\sin^2 C)+1-\sin^2 C}{\sin^2 C}$$

$$=\frac{4\sin^4 C-5\sin^2 C+2}{\sin^2 C}$$

$$=4\sin^2 C+\frac{2}{\sin^2 C}-5\geqslant 4\sqrt{2}-5, \quad \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

当且仅当 $\sin^4 C=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}<C<\pi\right)$ 时取等号.

故 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2}-5$. $\cdots \cdots 12 \text{ 分}$

一题多解

(1) 因为 $\frac{\cos A}{1+\sin A}=\frac{\cos^2 \frac{A}{2}-\sin^2 \frac{A}{2}}{\left(\sin \frac{A}{2}+\cos \frac{A}{2}\right)^2}=$

$$\frac{\cos \frac{A}{2}-\sin \frac{A}{2}}{\cos \frac{A}{2}+\sin \frac{A}{2}}=\frac{1-\tan \frac{A}{2}}{1+\tan \frac{A}{2}}=\tan \left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right),$$

$$\frac{\sin 2B}{1+\cos 2B}=\frac{2\sin B\cos B}{2\cos^2 B}=\tan B,$$

所以 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}\right)=\tan B$, 所以 $B=\frac{\pi}{4}-\frac{A}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$, 即

$A+2B=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. $\cdots \cdots 3 \text{ 分}$

由 A, B 为 $\triangle ABC$ 的内角, 得 $B = \frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}$,

又 $C = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $A+B = \frac{\pi}{3}$, 解得 $A=B = \frac{\pi}{6}$ 5 分

(2) 由 (1) 可知 $B = \frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}$, 所以 $A = \frac{\pi}{2} - 2B$, $C = \pi - A - B = \frac{\pi}{2} + B$, 6 分

$$\text{所以 } \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 C} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - 2B\right) + \sin^2 B}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} + B\right)} =$$

$$\frac{\cos^2 2B + \sin^2 B}{\cos^2 B} = \frac{(2\cos^2 B - 1)^2 + \sin^2 B}{\cos^2 B}$$

$$= \frac{4\cos^4 B - 4\cos^2 B + 1 + 1 - \cos^2 B}{\cos^2 B} = \frac{4\cos^4 B - 5\cos^2 B + 2}{\cos^2 B}$$

$$= 4\cos^2 B + \frac{2}{\cos^2 B} - 5 \geq 4\sqrt{2} - 5, \text{ 当且仅当 } \cos^2 B = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时等}$$

号成立, 所以 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值为 $4\sqrt{2} - 5$ 12 分

19. 【命题点】三棱柱的体积、点到平面的距离、二面角正弦值的求解

【解】(1) 由题知 $V_{A-A_1BC} = V_{A_1-ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{4}{3}$ 1 分

设 A 到平面 A_1BC 的距离为 h ,

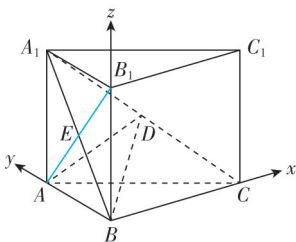
$$\text{则 } V_{A-A_1BC} = \frac{1}{3}S_{\triangle A_1BC} \cdot h = \frac{2\sqrt{2}}{3}h = \frac{4}{3}, \text{ 3 分}$$

解得 $h = \sqrt{2}$,

即 A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$ 4 分

(2) 因为 $AA_1 = AB$, $AA_1 \perp AB$,

所以四边形 ABB_1A_1 是正方形.



连接 AB_1 交 A_1B 于点 E , 则 $AB_1 \perp A_1B$. 因为平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

平面 $A_1BC \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = A_1B$,

所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC .

由 (1) 知, A 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$,

即 $AE = \sqrt{2}$, 所以 $AB_1 = 2\sqrt{2}$, 所以 $AB = AA_1 = 2$.

由 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BC , 得 $AB_1 \perp BC$,

又 $BB_1 \perp BC$, 且 $BB_1 \cap AB_1 = B_1$,

所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $BC \perp AB$.

因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 4, 所以 $BC = 2$ 6 分

以 B 为坐标原点, 分别以 BC, BA, BB_1 所在直线为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$,

则 $B(0,0,0), A(0,2,0), C(2,0,0), A_1(0,2,2), D(1,1,1)$,

所以 $\overrightarrow{BD} = (1, 1, 1), \overrightarrow{BA} = (0, 2, 0), \overrightarrow{BC} = (2, 0, 0)$.

设平面 ABD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{BD} \cdot \mathbf{m} = x + y + z = 0, \\ \overrightarrow{BA} \cdot \mathbf{m} = 2y = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 得 $\mathbf{m} = (1, 0, -1)$ 8 分

设平面 CBD 的法向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{BD} \cdot \mathbf{n} = a + b + c = 0, \\ \overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n} = 2a = 0, \end{cases}$$

令 $b = 1$, 得 $\mathbf{n} = (0, 1, -1)$ 10 分

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{2},$$

所以二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

..... 12 分

(求的是正弦值而非余弦值)

一题多解 (2) 由上可知 AB, BB_1, BC 两两垂直且 $AB = BB_1 = BC = 2$, 过 A 作 $AE \perp BD$ 于 E , 连接 CE .

易得 $AC = 2\sqrt{2}$, 所以 $A_1C = 2\sqrt{3}$.

..... 6 分

因为 D 为 A_1C 的中点, $\triangle A_1AC$ 为直角三角形,

所以 $AD = DC = \sqrt{3}$. 又 $AB = BC = 2$,

所以 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.

所以 $CE \perp BD$. 又 $AE \subset$ 平面 $ABD, CE \subset$ 平面 CBD ,

所以 $\angle AEC$ 为二面角 $A-BD-C$ 的平面角. 8 分

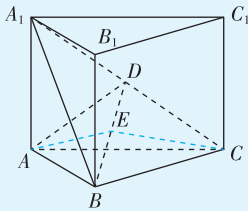
在 $\text{Rt} \triangle A_1BC$ 中, 有 $BD = \frac{1}{2} A_1C = \sqrt{3}$,

易得 $AE = EC = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 10 分

在 $\triangle AEC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle AEC = \frac{AE^2 + EC^2 - AC^2}{2AE \cdot EC} =$

$-\frac{1}{2}$, 所以 $\sin \angle AEC = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

即二面角 $A-BD-C$ 的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 12 分



20. 【命题点】独立性检验、条件概率的计算

(1) 【解】

	不够良好	良好	合计
病例组	40	60	100
对照组	10	90	100
合计	50	150	200

因此 l 的斜率为 **-1**. 6 分

(2) 由题意, 不妨设 AP 的倾斜角 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\angle PAQ$ 为 2α 或 $\pi - 2\alpha$ 7 分

因为 C 的渐近线的斜率为 $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, 由 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$ 得

$$\frac{2\tan \alpha}{1-\tan^2 \alpha} = \pm 2\sqrt{2}, \text{ 解得 } \tan \alpha = \sqrt{2}. \text{ 所以 } k_{AP} = \sqrt{2}, k_{AQ} = -\sqrt{2}.$$

直线 AP 的方程为 $y-1=\sqrt{2}(x-2)$, 代入 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 得

$$3x^2 + (4\sqrt{2}-16)x + 20 - 8\sqrt{2} = 0,$$

$$\text{所以 } |AP| = \frac{4}{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3}). \text{ 9 分}$$

直线 AQ 的方程为 $y-1=-\sqrt{2}(x-2)$, 代入 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 得

$$3x^2 - (4\sqrt{2}+16)x + 20 + 8\sqrt{2} = 0,$$

$$\text{所以 } |AQ| = \frac{4}{3}(\sqrt{6}+\sqrt{3}).$$

又 $\sin \angle PAQ = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以 $\triangle PAQ$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times |AP| \times |AQ| \times$

$$\sin \angle PAQ = \frac{16\sqrt{2}}{9}. \text{ 12 分}$$

解法二: (1) 将 $A(2,1)$ 的坐标代入 C 的方程, 得 $a^2=2$,

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$. 由题意知直线 PQ, AP, AQ 的斜率都

存在, 设直线 AP 的方程为 $y-1=k(x-2)$, 即 $y=kx+1-2k$.

$$\text{由 } \begin{cases} y=kx+1-2k, \\ \frac{x^2}{2}-y^2=1, \end{cases} \text{ 得 } (1-2k^2)x^2 + 4(2k^2-k)x - 4 + 8k - 8k^2 = 0.$$

$$\text{所以 } x_P x_A = \frac{-8k^2 + 8k - 4}{1 - 2k^2},$$

$$\text{又 } x_A = 2, \text{ 所以 } x_P = \frac{4k^2 - 4k + 2}{2k^2 - 1},$$

$$\text{所以 } y_P = kx_P + 1 - 2k = \frac{-2k^2 + 4k - 1}{2k^2 - 1}. \text{ 4 分}$$

$$\text{将 } k \text{ 用 } -k \text{ 替换, 可得 } x_Q = \frac{4k^2 + 4k + 2}{2k^2 - 1},$$

(利用直线 AP, AQ 的斜率之和为 0)

$$y_Q = \frac{-2k^2 - 4k - 1}{2k^2 - 1}, \text{ 所以 } k_{PQ} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = -\frac{8k}{8k} = -1,$$

即 l 的斜率为 **-1**. 6 分

$$(2) \text{ 设 } \angle PAQ = 2\theta, \theta \text{ 为锐角, 所以 } \tan 2\theta = 2\sqrt{2} = \frac{2\tan \theta}{1-\tan^2 \theta},$$

$$\text{解得 } \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 或 } \tan \theta = -\sqrt{2} \text{ (舍去).}$$

由题意知, 直线 AP, AQ 的斜率一正一负, 不妨令 AP 的斜率

$$\text{为正, 则 } AP \text{ 的倾斜角 } \alpha = \frac{\pi}{2} - \theta,$$

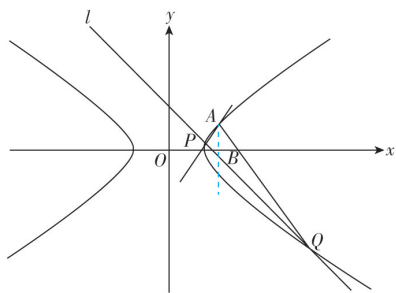
所以 $\tan \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{\tan \theta} = \sqrt{2}$, 8 分

即(1)中 $k = \sqrt{2}$, 代入 P, Q 的坐标可得 $P\left(\frac{10-4\sqrt{2}}{3}, \frac{4\sqrt{2}-5}{3}\right), Q\left(\frac{10+4\sqrt{2}}{3}, \frac{-4\sqrt{2}-5}{3}\right)$,

所以直线 PQ 的方程为 $y = -x + \frac{5}{3}$ 10 分

过 A 作与 y 轴平行的直线交 PQ 于 B , 令 $x = 2$, 得 $y = -\frac{1}{3}$, 即

$y_B = -\frac{1}{3}$, 所以 $S_{\triangle PAQ} = \frac{1}{2} |y_A - y_B| \cdot |x_Q - x_P| = \frac{16\sqrt{2}}{9}$ 12 分



解法三: (1) 将点 A 的坐标代入双曲线方程得 $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2-1} = 1$, 化

简得 $a^4 - 4a^2 + 4 = 0$, 解得 $a^2 = 2$, 故双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 2 分

由题意可知直线 l 的斜率存在, 设 $l: y = kx + m, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 联立直线与双曲线的方程, 消去 y 得 $(2k^2 - 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 + 2 = 0$,

故 $x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 - 1}, x_1 x_2 = \frac{2m^2 + 2}{2k^2 - 1}$,

$k_{AP} + k_{AQ} = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = \frac{kx_1 + m - 1}{x_1 - 2} + \frac{kx_2 + m - 1}{x_2 - 2} = 0$,

化简得 $2kx_1 x_2 + (m - 1 - 2k)(x_1 + x_2) - 4(m - 1) = 0$, 4 分

故 $\frac{2k(2m^2 + 2)}{2k^2 - 1} + (m - 1 - 2k) \cdot \left(-\frac{4km}{2k^2 - 1}\right) - 4(m - 1) = 0$,

即 $(k + 1)(m + 2k - 1) = 0$, 而直线 l 不过点 A , 故 $k = -1$.

..... 6 分

(2) 设直线 AP 的倾斜角为 $\alpha, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. 由 $\tan \angle PAQ =$

$2\sqrt{2}$, 得 $\tan \frac{\angle PAQ}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 由 $2\alpha + \angle PAQ = \pi$, 得 $k_{AP} = \tan \alpha =$

$\sqrt{2}$, 即 $\frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} = \sqrt{2}$ 8 分

由 $\begin{cases} \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} = \sqrt{2}, \\ \frac{x_1^2}{2} - y_1^2 = 1, \end{cases}$ 得 $x_1 = \frac{10 - 4\sqrt{2}}{3}, y_1 = \frac{4\sqrt{2} - 5}{3}$,

代入直线 l 的方程得 $m = \frac{5}{3}$, 故 $x_1 + x_2 = \frac{20}{3}, x_1 x_2 = \frac{68}{9}$.

而 $|AP| = \sqrt{3}|x_1 - 2|$, $|AQ| = \sqrt{3}|x_2 - 2|$,

由 $\tan \angle PAQ = 2\sqrt{2}$, 得 $\sin \angle PAQ = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 11 分

故 $S_{\triangle PAQ} = \frac{1}{2}|AP||AQ|\sin \angle PAQ = \sqrt{2}|x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4| =$

$\frac{16\sqrt{2}}{9}$ 12 分

22. 思路导引

$$(1) \begin{cases} a \leq 0 \rightarrow f(x) \text{ 无最小值} \\ a > 0 \rightarrow f(x)_{\min} = f(\ln a) \\ g(x)_{\min} = g\left(\frac{1}{a}\right) \end{cases} \rightarrow f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right) \text{ 得出关于}$$

a 的等式 \rightarrow 令 $h(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1} \rightarrow$ 求 $h'(x)$, 利用 $h(x)$ 的单

调性确定 $h(a) = 0$ 时 a 的值;

(2) 由 $f(x), g(x)$ 的单调性 \rightarrow 确定 x_1, x_2, x_3 的位置 $\rightarrow f(x_1) = f(x_2) = b, g(x_2) = g(x_3) = b \rightarrow$ 列出关于 x_1, x_2, x_3 的等式 \rightarrow 化简得 $x_1 + x_3 = 2x_2 \rightarrow$ 得证

【命题点】导数与函数的单调性、最值、函数的零点

(1) **【解】** $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = e^x - a, g'(x) = a - \frac{1}{x}.$$

(a 的正负影响函数单调性, 需分类讨论)

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 即 $f(x)$ 没有最小值, 不符合题意. 2 分

②当 $a > 0$ 时, 在 $(-\infty, \ln a)$ 上 $f'(x) < 0$, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 时取得极小值, 即为最小值, 最小值为 $f(\ln a) = a - a \ln a$.

在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上 $g'(x) < 0$, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 时取得极小值, 即为最小值, 最小值为

$$g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a.$$

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值,

所以 $f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$, 即 $a - a \ln a = 1 + \ln a$.

因为 $a > 0$, 所以上式等价于 $\ln a - \frac{a-1}{a+1} = 0$ 4 分

(方程的根与函数零点的转化)

$$\text{令 } h(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1} (x > 0),$$

则 $h'(x) = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $h(1) = 0 = h(a)$ 且 $a > 0$, 所以 $a = 1$ 5 分

(2) 【证明】解法一: 由 (1) 知, $f(x) = e^x - x$, $g(x) = x - \ln x$. $f(x)$ 和 $g(x)$ 在定义域内都是随着 x 的增大先单调递减后单调递增的, 且最小值都为 1. 所以当 $b \leq 1$ 时, 直线 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 最多共有两个不同的交点, 不满足题意. 6 分

当 $b > 1$ 时, 直线 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 分别有两个不同的交点, 故由题设可知, 直线 $y = b$ 过曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的交点.

于是设函数 $G(x) = f(x) - g(x) = e^x + \ln x - 2x$, 则 $G'(x) = e^x + \frac{1}{x} - 2$. 当 $x > 0$ 时, $G'(x) = e^x + \frac{1}{x} - 2 > 1 + x + \frac{1}{x} - 2 > 0$, 所以 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 8 分

又 $G(e^{-2}) = e^{e^{-2}} - 2 - 2e^{-2} < \sqrt{e} - 2 < 0$, $G(1) = e - 2 > 0$, 所以 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有一个零点 x_0 , 且 $x_0 \in (e^{-2}, 1)$. 从而取 $b = e^{x_0} - x_0$, 则 $b = x_0 - \ln x_0$.

由 (1) 知 $b > 1$, 故 x_0 是函数 $f(x) - b$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一零点; 又 $f(\ln x_0) = b$, 故 $\ln x_0$ 是函数 $f(x) - b$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的唯一零点. 10 分

同理可得 x_0 是函数 $g(x) - b$ 在 $(0, 1)$ 上的唯一零点; e^{x_0} 是函数 $g(x) - b$ 在 $(1, +\infty)$ 上的唯一零点. 因此直线 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 从左到右分别为 $(\ln x_0, b)$, (x_0, b) , (e^{x_0}, b) .

因为 $e^{x_0} + \ln x_0 = 2x_0$, 所以这三个交点的横坐标成等差数列. 12 分

解法二: 由 (1) 知, $f(x) = e^x - x$, $g(x) = x - \ln x$. 所以 $f(x) = e^x - x$ 的几何意义是曲线 $y = e^x$ 和 $y = x$ 横坐标相同的点的纵坐标的差, $g(x) = x - \ln x$ 的几何意义是曲线 $y = x$ 和 $y = \ln x$ 横坐标相同的点的纵坐标的差, 观察图像可知这两个纵坐标的差都是随着 x 的增大先减小再增大. 7 分
注意到曲线 $y = e^x$ 和 $y = \ln x$ 关于直线 $y = x$ 对称, 由对称性知, 曲线 $y = \ln x$ 上的点 $(x_0, \ln x_0)$ 关于直线 $y = x$ 的对称点为 $(\ln x_0, x_0)$, 该点在曲线 $y = e^x$ 上; 曲线 $y = e^x$ 上的点 (x_0, e^{x_0}) 关于直线 $y = x$ 的对称点为 (e^{x_0}, x_0) , 该点在曲线 $y = \ln x$ 上. 因此当 $e^{x_0} - x_0 = x_0 - \ln x_0$ 时, $(x_0, \ln x_0)$, $(\ln x_0, x_0)$, (x_0, e^{x_0}) , (e^{x_0}, x_0) 四点构成一个以点 (x_0, x_0) 为中心的正方形.

因此当 $b = e^{x_0} - x_0$ 时, 直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$ 有两个交点 $(\ln x_0, b)$, (x_0, b) ; 直线 $y = b$ 与曲线 $y = g(x)$ 有两个交点 (x_0, b) , (e^{x_0}, b) 9 分

又由 (1) 知, 当 $b > 1$ 时, 直线 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y =$

$g(x)$ 分别有两个不同的交点. 因此直线 $y=b$ 与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点, 从左到右分别为 $(\ln x_0, b), (x_0, b), (e^{x_0}, b)$. 因为 $e^{x_0} + \ln x_0 = 2x_0$, 所以这三个交点的横坐标成等差数列. 12 分

解法三: 由 (1) 知 $f(x) = e^x - x, g(x) = x - \ln x$. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0) = 1 > 0$; $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(1) = 1 > 0$. 所以曲线 $y=f(x), y=g(x)$ 的大致形状如图所示. 6 分
 设直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(x), y=g(x)$ 三个交点的横坐标分别为 $x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3)$, 所以 $x_1 < 0, 0 < x_2 < 1, x_3 > 1$,

(若直线 $y=b$ 与两条曲线共有三个不同的交点, 则直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的交点和曲线 $y=g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上的交点重合)

且 $f(x_1) = f(x_2) = e^{x_1} - x_1 = e^{x_2} - x_2 = b$,
 $g(x_2) = g(x_3) = x_2 - \ln x_2 = x_3 - \ln x_3 = b$.
 所以 $e^{\ln x_2} - \ln x_2 = e^{\ln x_3} - \ln x_3 = b$, 8 分
 即 $f(\ln x_2) = f(\ln x_3) = b$.

又 $\ln x_2 < 0, \ln x_3 > 0$,
 所以 $x_1 = \ln x_2, x_2 = \ln x_3$, ① 10 分

且 $e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2$, 即 $e^{x_2} + \ln x_2 = 2x_2$. ②

由 ①② 得 $x_1 + x_3 = \ln x_2 + e^{x_2} = 2x_2$,
 所以存在直线 $y=b$, 其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列. 12 分

