

## 1. A 【命题点】集合的交集运算

【解析】由  $x^2 \leq 1$  得  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $\therefore B = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$ . 又  $A = \{-1, 0, 1, 2\}$ ,  $\therefore A \cap B = \{-1, 0, 1\}$ . 故选 A.

## 2. D 【命题点】复数的四则运算

【解析】依题知,  $z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i(1-i)}{2} = 1+i$ . 故选 D.

**快解** 将等式  $z(1+i) = 2i$  两边同乘  $(1-i)$ , 得  $2z = 2i(1-i)$ ,  $\therefore z = i - i^2 = 1+i$ , 故选 D.

## 3. D 【命题点】古典概型

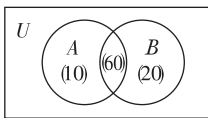
【解析】两位男同学和两位女同学随机排成一列, 因为男同学人数和女同学人数相等, 所以两位女同学相邻与不相邻的排法种数相同, 所以两位女同学相邻与不相邻的概率均是  $\frac{1}{2}$ .

故选 D.

**关键点拨** 四位同学中, 两位女同学和两位男同学是对称数目, 是古典概型的均等性设置条件.

## 4. C 【命题点】样本估计总体, 集合交、并运算所得集合元素的个数

【解析】依题意, 分别设阅读过《西游记》《红楼梦》的学生组成的集合为  $A, B$ . 设随机调查的 100 位学生组成的集合为全集  $U$ , 则  $\text{card}(A \cup B) = 90$ ,  $\text{card}(A \cap B) = 60$ ,  $\text{card}(B) = 80$ , 则  $\text{card}(A) = 70$ , 如图所示. 所以该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为  $\frac{70}{100} = 0.7$ , 故选 C.



## 5. B 【命题点】求三角函数的零点个数

【解析】 $f(x) = 2\sin x - \sin 2x = 2\sin x - 2\sin x \cos x = 2\sin x(1 - \cos x) = 0$ , 得  $\sin x = 0$  或  $\cos x = 1$ .  $\because x \in [0, 2\pi]$ , 由  $\sin x = 0$  可得  $x = 0, \pi$  或  $2\pi$ ; 由  $\cos x = 1$  可得  $x = 0$  或  $2\pi$ .  $\therefore x = 0, \pi$  或  $2\pi$ ,  $\therefore f(x)$  在  $[0, 2\pi]$  上的零点个数为 3. 故选 B.

**关键点拨** 利用二倍角公式找出公因式, 列出方程求解, 找出函数的零点.

6. C 【命题点】等比数列通项公式及前  $n$  项和公式

【解析】设  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 且公比为  $q (q > 0)$ .  $\therefore S_4 = 15$ .

又  $\because \{a_n\}$  各项均为正数, 且  $a_5 = 3a_3 + 4a_1$ ,  $\therefore a_1 q^4 = 3a_1 q^2 + 4a_1$ .  $\because a_1 \neq 0$ ,  $\therefore q^4 - 3q^2 - 4 = 0$ , 解得  $q^2 = 4$ ,  $\therefore q = 2$ .

**解法一:**  $\because S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 15$ ,  $\therefore 15a_1 = 15$ ,  $\therefore a_1 = 1$ .

$\therefore a_3 = a_1 q^2 = 4$ . 故选 C.

**解法二:**  $\because a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15, \therefore \frac{a_3}{q^2} + \frac{a_3}{q} + a_3 + a_3 q = 15,$

$\therefore \frac{a_3}{4} + \frac{a_3}{2} + a_3 + 2a_3 = 15$ , 即  $\frac{15}{4}a_3 = 15, \therefore a_3 = 4$ . 故选 C.

**关键点拨** 解答本题的关键是利用已知等式求出等比数列的公比, 再根据数列的前 4 项和求出  $a_1$ .

## 7. D 【命题点】根据导数的几何意义求参数

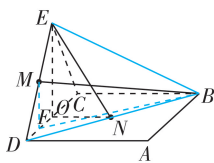
**【解析】** 令  $f(x) = ae^x + x \ln x$ , 则  $f'(x) = ae^x + 1 + \ln x$ .

$\therefore$  曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, ae)$  处的切线方程为  $y = 2x + b$ ,

$$\therefore \begin{cases} f'(1) = 2, \\ ae = 2 + b, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} ae + 1 = 2, \\ ae = 2 + b, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{1}{e}, \\ b = -1, \end{cases} \text{ 故选 D.}$$

## 8. B 【命题点】面面垂直的性质、空间线段长的计算及直线位置关系的判断

**【解析】** 如图, 连接  $BD, BE$ .  $\because N$  为正方形  $ABCD$  的中心,  $\therefore N \in BD$ . 又  $\because M$  是  $ED$  的中点,  $\therefore M \in ED$ .  $\therefore M, N \in$  平面  $BED$ .  $\therefore$  由图知  $BM$  与  $EN$  相交.



**解法一:** 过点  $E$  作  $EO \perp CD$  于点  $O$ , 连接  $ON$ , 过点  $M$  作  $MF \perp CD$  于点  $F$ , 连接  $BF$ ,  $\therefore EO \parallel MF$ .

$\because \triangle ECD$  为正三角形,  $\therefore EO \perp CD$ .  $\because$  平面  $CDE \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $CDE \cap$  平面  $ABCD = CD, EO \subset$  平面  $CDE, \therefore EO \perp$  平面  $ABCD$ .  $\therefore MF \perp$  平面  $ABCD$ .

设正方形  $ABCD$  的边长为 2, 则  $CD = 2, EO = \sqrt{3}, ON = 1$ ,

$$\therefore EN = \sqrt{EO^2 + ON^2} = 2, MF = \frac{1}{2}EO = \frac{\sqrt{3}}{2}, CF = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore BF = \sqrt{BC^2 + CF^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{5}{2},$$

$$\therefore BM = \sqrt{MF^2 + BF^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{7}.$$

$\therefore BM \neq EN$ , 故选 B.

**解法二:** 设  $ED = DC = a$ , 则  $BD = \sqrt{2}a, EB = \sqrt{2}a$ .

在  $\triangle EBD$  中, 由中线定理得  $EN^2 = \frac{1}{4}[2(ED^2 + EB^2) - BD^2] = a^2$ ,

$$\therefore EN = a. \text{ 又 } \because BM = \frac{\sqrt{7}}{2}a, \therefore BM \neq EN. \text{ 故选 B.}$$

**方法速记** 三角形的中线定理: 三角形一条中线两侧所对边的平方和等于底边平方的一半加上这条中线的平方的 2 倍, 即对任意  $\triangle ABC$ , 设  $I$  是线段  $BC$  的中点,  $AI$  为中线, 则有如下关系:  $AB^2 + AC^2 = 2BI^2 + 2AI^2$  或  $AB^2 + AC^2 = \frac{1}{2}BC^2 + 2AI^2$ .

### 9. C 【命题点】框图的循环结构和等比数列求和

【解析】 $\varepsilon = 0.01 = \frac{1}{100}$ . 执行程序, 初始值:  $x = 1, s = 0; s = 1, x =$

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{100}; s = 1 + \frac{1}{2}, x = \frac{1}{2^2} > \frac{1}{100}; \cdots; s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^5}, x = \frac{1}{2^6} >$$

$$\frac{1}{100}; s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^6}, x = \frac{1}{2^7} < \frac{1}{100}, \text{输出 } s.$$

$$\therefore s = \frac{1 \times \left(1 - \frac{1}{2^7}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^6}, \text{故选 C.}$$

### 10. B 【命题点】双曲线中三角形面积的求法

【解析】设点  $P(x_0, y_0)$ , 则  $\frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{5} = 1$  ①. 又由双曲线方程知

$$a^2 = 4, b^2 = 5, \text{则 } c^2 = a^2 + b^2 = 9, \therefore |OP| = |OF| = 3, \therefore x_0^2 + y_0^2 =$$

$$9 \text{ ②. 由 ①② 得 } y_0^2 = \frac{25}{9}, \text{即 } |y_0| = \frac{5}{3}, \therefore S_{\triangle OPF} = \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_0| =$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{2}. \text{ 故选 B.}$$

### 11. A 【命题点】以线性规划为载体判断命题的真假

【解析】作出平面区域  $D$  如图

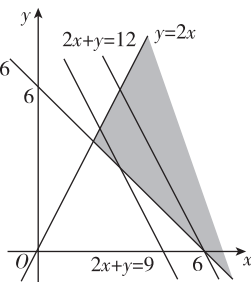
中阴影部分所示. 由图知直

线  $2x + y = 9$  的右侧阴影区域

满足  $2x + y \geq 9$ , 故  $p$  为真命

题; 直线  $2x + y = 12$  的左侧阴影

区域满足  $2x + y \leq 12$ , 右侧阴影



区域不满足  $2x + y \leq 12$ , 故  $q$  为假命题. 则  $\neg p$  为假命题,  $\neg q$  为

真命题, 故  $p \vee q$  为真命题,  $\neg p \vee q$  为假命题,  $p \wedge \neg q$  为真命

题,  $\neg p \wedge \neg q$  为假命题. 所以 ①③ 为真命题, ②④ 为假命题.

故选 A.

**方法速记** 不等式组与命题的结合离不开平面区域的判断, 主要通过图形分析是否满足任意和存在两种情况. 只要有一个值成立就满足存在的情况; 只要有一个反例就能证明任意的情况不成立.

### 12. C 【命题点】利用函数的奇偶性、单调性比较函数值的大小

【解析】 $\because f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的偶函数, 且  $\log_3 \frac{1}{4} = -\log_3 4$ ,

$$\therefore f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right) = f(\log_3 4), \text{且 } \log_3 4 > 1. \text{ 又 } \because y = 2^x \text{ 在 } (-\infty,$$

$$+\infty) \text{ 上单调递增, } \therefore 0 < 2^{-\frac{3}{2}} < 2^{-\frac{2}{3}} < 1.$$

$$\text{又 } \because f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 单调递减, 且 } 0 < 2^{-\frac{3}{2}} < 2^{-\frac{2}{3}} < 1 < \log_3 4,$$

$$\therefore f(2^{-\frac{3}{2}}) > f(2^{-\frac{2}{3}}) > f(\log_3 4) = f\left(\log_3 \frac{1}{4}\right). \text{ 故选 C.}$$

13.  $-\frac{\sqrt{2}}{10}$  【命题点】平面向量的夹角

【解析】 $\cos\langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{2 \times (-8) + 2 \times 6}{\sqrt{2^2 + 2^2} \times \sqrt{(-8)^2 + 6^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$

14. 100 【命题点】等差数列的通项公式和前  $n$  项和公式

【解析】设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则  $\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 5, \\ a_7 = a_1 + 6d = 13, \end{cases}$

解得  $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2. \end{cases} \therefore S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 10 \times 1 + \frac{10 \times 9}{2} \times 2 = 100.$

一题多解  $\because a_7 - a_3 = 4d = 8$ , 则  $d = 2$ ,

$\therefore a_4 = a_3 + d = 7$ ,

$\therefore S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10(a_4 + a_7)}{2} = \frac{10 \times (7 + 13)}{2} = 100.$

15.  $(3, \sqrt{15})$  【命题点】椭圆中焦点三角形的相关性质

【解析】设点  $M(x_0, y_0)$  ( $x_0 > 0, y_0 > 0$ ).  $\because F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$ , 且  $|MF_2| \in (2, 6)$ ,  $\therefore$  若  $\triangle MF_1F_2$  为等腰三角形, 则

$$|F_1M| = |F_1F_2| = 8, \therefore \begin{cases} \frac{x_0^2}{36} + \frac{y_0^2}{20} = 1, \\ (x_0 + 4)^2 + y_0^2 = 64, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_0 = 3, \\ y_0 = \sqrt{15}. \end{cases}$$

$\therefore M$  的坐标为  $(3, \sqrt{15})$ .

一题多解 由上述方法知  $|F_1F_2| = |MF_1| = 8$ .

由  $|MF_1| + |MF_2| = 12$  得  $|MF_2| = 4$ . 在  $\triangle MF_1F_2$  中, 由余弦

定理得  $\cos \angle MF_1F_2 = \frac{7}{8}$ , 则  $\sin \angle MF_1F_2 = \frac{\sqrt{15}}{8}$ ,  $\therefore y_M =$

$|MF_1| \sin \angle MF_1F_2 = \sqrt{15}$ ,  $x_M + 4 = |MF_1| \cos \angle MF_1F_2 = 7$ , 解

得  $x_M = 3$ ,  $\therefore M$  的坐标为  $(3, \sqrt{15})$ .

16. 118.8 【命题点】空间几何体在实际问题中的应用

【解析】依题知  $V_{\text{长方体}ABCD-A_1B_1C_1D_1} = 6 \times 6 \times 4 = 144(\text{cm}^3)$ ,

$V_{\text{四棱锥}O-GHEF} = \frac{1}{3} \times 3 \times (6 \times 4 - 6 \times 2) = 12(\text{cm}^3)$ ,  $\therefore V_{\text{模型}} = 144 -$

$12 = 132(\text{cm}^3)$ .  $\therefore$  制作该模型所需原料的质量为  $0.9V_{\text{模型}} =$

$0.9 \times 132 = 118.8(\text{g})$ .

方法速记 本题的关键是确定挖去的四棱锥的底面面积和高, 因为其底面各顶点是长方体侧面棱的中点, 所以其面积为长方体该侧面面积的一半.

17. 【命题点】频率分布直方图、平均值的估计值

【解】(1) 由已知得  $0.70 = a + 0.20 + 0.15$ , 故  $a = 0.35$ .

$b = 1 - 0.05 - 0.15 - 0.70 = 0.10$ . ..... 6 分

(2) 甲离子残留百分比的平均值的估计值为

$$2 \times 0.15 + 3 \times 0.20 + 4 \times 0.30 + 5 \times 0.20 + 6 \times 0.10 + 7 \times 0.05 = 4.05.$$

乙离子残留百分比的平均值的估计值为  $3 \times 0.05 + 4 \times 0.10 + 5 \times 0.15 + 6 \times 0.35 + 7 \times 0.20 + 8 \times 0.15 = 6.00$ . ..... 12 分

**方法速记** (1) 事件  $C$  的概率  $P(C)$  的估计值即事件  $C$  所含的事件频率之和. (2) 频率分布直方图中平均数: 每个小矩形的面积乘其底边中点横坐标之和; 众数: 最高小矩形的底边中点的横坐标; 中位数: 小矩形面积和为 0.5 时对应的点的横坐标.

## 18. 【命题点】正、余弦定理, 三角形面积的取值范围

**【解】** (1) 由题设及正弦定理得  $\sin A \sin \frac{A+C}{2} = \sin B \sin A$ .

..... 1 分

因为  $\sin A \neq 0$ , 所以  $\sin \frac{A+C}{2} = \sin B$ . ..... 2 分

由  $A+B+C=180^\circ$ , 可得  $\sin \frac{A+C}{2} = \cos \frac{B}{2}$ , ..... 3 分

故  $\cos \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$ . ..... 4 分

因为  $\cos \frac{B}{2} \neq 0$ , 故  $\sin \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ , ..... 5 分

因此  $B = 60^\circ$ . ..... 6 分

(2) 由题设及(1)知  $\triangle ABC$  的面积  $S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$ . ..... 7 分

由正弦定理得  $a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{\sin(120^\circ - C)}{\sin C} = \frac{\sqrt{3}}{2 \tan C} + \frac{1}{2}$ .

..... 9 分

由于  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 故  $0^\circ < A < 90^\circ, 0^\circ < C < 90^\circ$ .

由(1)知  $A+C=120^\circ$ , 所以  $30^\circ < C < 90^\circ$ , ..... 10 分

故  $\frac{1}{2} < a < 2$ , 从而  $\frac{\sqrt{3}}{8} < S_{\triangle ABC} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ . ..... 11 分

因此,  $\triangle ABC$  面积的取值范围是  $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . ..... 12 分

**一题多解** (2) 由  $B = 60^\circ, c = 1$  及余弦定理得  $b =$

$$\sqrt{a^2 + c^2 - 2accos B} = \sqrt{a^2 - a + 1}, \text{ ..... 8 分}$$

$$\text{又 } \triangle ABC \text{ 为锐角三角形, 则 } \begin{cases} \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0, \\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 1 + a^2 - a + 1 > a^2, \\ a^2 + a^2 - a + 1 > 1, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{1}{2} < a < 2, \text{ ..... 10 分}$$

所以  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}a \in \left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , 所以  $\triangle ABC$  面积

的取值范围是  $\left(\frac{\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . ..... 12 分

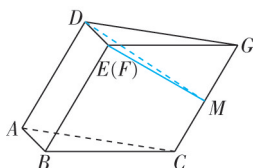
**19. 【命题点】证明四点共面、面面垂直, 四边形面积问题**

(1) **【证明】**由已知得  $AD \parallel BE, CG \parallel BE$ , 所以  $AD \parallel CG$ , 故  $AD, CG$  确定一个平面, 从而  $A, C, G, D$  四点共面. .... 2 分  
 由已知得  $AB \perp BE, AB \perp BC$ , 故  $AB \perp$  平面  $BCGE$ . .... 4 分  
 又因为  $AB \subset$  平面  $ABC$ , 所以平面  $ABC \perp$  平面  $BCGE$ .

..... 6 分

(2) **【解】**取  $CG$  的中点  $M$ , 连接  $EM, DM$ .

因为  $AB \parallel DE, AB \perp$  平面  $BCGE$ ,  
 所以  $DE \perp$  平面  $BCGE$ , 故  $DE \perp CG$ . .... 8 分



由已知, 四边形  $BCGE$  是菱形, 且

$\angle EBC = 60^\circ$  得  $EM \perp CG$ , 故  $CG \perp$  平面  $DEM$ .

因此  $DM \perp CG$ . .... 10 分

在  $\text{Rt}\triangle DEM$  中,  $DE = 1, EM = \sqrt{3}$ , 故  $DM = 2$ .

所以四边形  $ACGD$  的面积为 4. .... 12 分

**▶ 关键点拨** 折叠问题一定要注意在动中寻找不变的边与角及各种位置关系, 从而将证面面垂直问题转化为证线面垂直问题.

**20. 【命题点】利用导数讨论函数单调性、函数最值之差的取值范围问题**

**【解】**(1)  $f'(x) = 6x^2 - 2ax = 2x(3x - a)$ .

令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 0$  或  $x = \frac{a}{3}$ . .... 2 分

若  $a > 0$ , 则当  $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{a}{3}, +\infty\right)$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x \in \left(0, \frac{a}{3}\right)$  时,  $f'(x) < 0$ . 故  $f(x)$  在  $(-\infty, 0), \left(\frac{a}{3}, +\infty\right)$  单调递

增, 在  $\left(0, \frac{a}{3}\right)$  单调递减; .... 4 分

若  $a = 0$ ,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  单调递增; .... 5 分

若  $a < 0$ , 则当  $x \in \left(-\infty, \frac{a}{3}\right) \cup (0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x \in \left(\frac{a}{3}, 0\right)$  时,  $f'(x) < 0$ . 故  $f(x)$  在  $\left(-\infty, \frac{a}{3}\right), (0, +\infty)$  单调递

增, 在  $\left(\frac{a}{3}, 0\right)$  单调递减. .... 6 分

(2) 当  $0 < a < 3$  时, 由 (1) 知,  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{a}{3}\right)$  单调递减, 在  $\left(\frac{a}{3}, 1\right)$  单调递增, 所以  $f(x)$  在  $[0, 1]$  的最小值为  $f\left(\frac{a}{3}\right) = -\frac{a^3}{27} + 2$ , 最大值为  $f(0) = 2$  或  $f(1) = 4 - a$ . 于是

$$m = -\frac{a^3}{27} + 2, M = \begin{cases} 4-a, 0 < a < 2, \\ 2, 2 \leq a < 3. \end{cases}$$

$$\text{所以 } M-m = \begin{cases} 2-a+\frac{a^3}{27}, 0 < a < 2, \\ \frac{a^3}{27}, 2 \leq a < 3. \end{cases} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

当  $0 < a < 2$  时, 可知  $2-a+\frac{a^3}{27}$  单调递减, 所以  $M-m$  的取值范围是  $(\frac{8}{27}, 2)$ .  $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

当  $2 \leq a < 3$  时,  $\frac{a^3}{27}$  单调递增, 所以  $M-m$  的取值范围是  $[\frac{8}{27}, 1)$ .  $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

综上,  $M-m$  的取值范围是  $[\frac{8}{27}, 2)$ .  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

**▶ 关键点拨** (1) 对于含参函数单调性的讨论, 切入点为  $f'(x)=0$  的根的情况. 本题中  $f'(x)=0$  有两根, 需讨论两根大小;

(2) 求函数在定区间上的最值或已知最值求参数的问题均是函数单调性的应用问题.

## 21. 【命题点】抛物中定点问题、求圆的方程

(1) 【证明】设  $D(t, -\frac{1}{2})$ ,  $A(x_1, y_1)$ , 则  $x_1^2 = 2y_1$ .

由于  $y' = x$ , 所以切线  $DA$  的斜率为  $x_1$ , 故  $\frac{y_1 + \frac{1}{2}}{x_1 - t} = x_1$ .

整理得  $2tx_1 - 2y_1 + 1 = 0$ .  $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

设  $B(x_2, y_2)$ , 同理可得  $2tx_2 - 2y_2 + 1 = 0$ .

故直线  $AB$  的方程为  $2tx - 2y + 1 = 0$ .  $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

所以直线  $AB$  过定点  $(0, \frac{1}{2})$ .  $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 【解】由 (1) 得直线  $AB$  的方程为  $y = tx + \frac{1}{2}$ . 由

$$\begin{cases} y = tx + \frac{1}{2}, \\ y = \frac{x^2}{2} \end{cases} \quad \text{可得 } x^2 - 2tx - 1 = 0. \text{ 于是 } x_1 + x_2 = 2t, y_1 + y_2 =$$

$t(x_1 + x_2) + 1 = 2t^2 + 1$ .  $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

设  $M$  为线段  $AB$  的中点, 则  $M(t, t^2 + \frac{1}{2})$ .

由于  $\overrightarrow{EM} \perp \overrightarrow{AB}$ , 而  $\overrightarrow{EM} = (t, t^2 - 2)$ ,  $\overrightarrow{AB}$  与向量  $(1, t)$  平行, 所以  $t + (t^2 - 2)t = 0$ . 解得  $t = 0$  或  $t = \pm 1$ .  $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

当  $t=0$  时,  $|\overrightarrow{EM}|=2$ , 所求圆的方程为  $x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=4$ ;

..... 10 分

当  $t=\pm 1$  时,  $|\overrightarrow{EM}|=\sqrt{2}$ , 所求圆的方程为  $x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=2$ .

..... 12 分

## 22. 【命题点】极坐标方程

【解】(1) 由题设可得, 弧  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$  所在圆的极坐标方程分别为  $\rho=2\cos \theta$ ,  $\rho=2\sin \theta$ ,  $\rho=-2\cos \theta$ . ..... 2 分

所以  $M_1$  的极坐标方程为  $\rho=2\cos \theta\left(0\leq \theta\leq \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $M_2$  的极坐标

标方程为  $\rho=2\sin \theta\left(\frac{\pi}{4}\leq \theta\leq \frac{3\pi}{4}\right)$ ,  $M_3$  的极坐标方程为  $\rho=$

$-2\cos \theta\left(\frac{3\pi}{4}\leq \theta\leq \pi\right)$ . ..... 5 分

(2) 设  $P(\rho, \theta)$ , 由题设及(1)知

若  $0\leq \theta\leq \frac{\pi}{4}$ , 则  $2\cos \theta=\sqrt{3}$ , 解得  $\theta=\frac{\pi}{6}$ ; ..... 7 分

若  $\frac{\pi}{4}\leq \theta\leq \frac{3\pi}{4}$ , 则  $2\sin \theta=\sqrt{3}$ , 解得  $\theta=\frac{\pi}{3}$  或  $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ; ..... 8 分

若  $\frac{3\pi}{4}\leq \theta\leq \pi$ , 则  $-2\cos \theta=\sqrt{3}$ , 解得  $\theta=\frac{5\pi}{6}$ . ..... 9 分

综上,  $P$  的极坐标为  $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{6}\right)$  或  $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}\right)$  或  $\left(\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$  或

$\left(\sqrt{3}, \frac{5\pi}{6}\right)$ . ..... 10 分

**关键点拨** (1) 写弧的极坐标方程时, 注意标明定义域.  
(2)  $|OP|$  即为曲线上的点  $P$  到极点的距离, 实质为点  $P$  的极径.

## 23. 【命题点】基本不等式求最值、求参数取值范围

(1) 【解】由于  $[(x-1)+(y+1)+(z+1)]^2=$

$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+2[(x-1)(y+1)+(y+1)\cdot$

$(z+1)+(z+1)(x-1)]\leq 3[(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2],$

..... 2 分

故由已知得  $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\geq \frac{4}{3}$ , 当且仅当  $x=$

$\frac{5}{3}, y=-\frac{1}{3}, z=-\frac{1}{3}$  时等号成立. ..... 4 分

所以  $(x-1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2$  的最小值为  $\frac{4}{3}$ . ..... 5 分

(2) 【证明】由于  $[(x-2)+(y-1)+(z-a)]^2=$

$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2+2[(x-2)(y-1)+(y-1)\cdot$

$(z-a)+(z-a)(x-2)]\leq 3[(x-2)^2+(y-1)^2+(z-a)^2],$



..... 7 分

故由已知得  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2 \geq \frac{(2+a)^2}{3}$ , 当且仅当

$x = \frac{4-a}{3}, y = \frac{1-a}{3}, z = \frac{2a-2}{3}$  时等号成立. .... 8 分

因此  $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-a)^2$  的最小值为  $\frac{(2+a)^2}{3}$ .

..... 9 分

由题设知  $\frac{(2+a)^2}{3} \geq \frac{1}{3}$ , 解得  $a \leq -3$  或  $a \geq -1$ . .... 10 分