

1. D 【命题点】绝对值不等式的解法、集合的交集运算

【解析】因为 $A = \{x \mid |x| < 3, x \in \mathbf{Z}\} = \{x \mid -3 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid |x| > 1, x \in \mathbf{Z}\} = \{x \mid x > 1 \text{ 或 } x < -1, x \in \mathbf{Z}\}$, 所以 $A \cap B = \{-2, 2\}$, 故选 D.

2. A 【命题点】复数的运算

【解析】因为 $(1-i)^4 = [(1-i)^2]^2 = (1-2i+i^2)^2 = (-2i)^2 = -4$, 故选 A.

方法速记

复数中的常用结论: ① $(1 \pm i)^2 = \pm 2i$; ② $\frac{1+i}{1-i} = i$; ③ $\frac{1-i}{1+i} = -i$; ④ $i^{4n} = 1, i^{4n+1} = i, i^{4n+2} = -1, i^{4n+3} = -i (n \in \mathbf{N})$.

3. C 【命题点】归纳推理

【解析】由题意知 a_i, a_j, a_k 构成原位大三和弦时, $j = k - 3, i = j - 4$, 所以 a_i, a_j, a_k 为原位大三和弦的有 $i = 1, j = 5, k = 8; i = 2, j = 6, k = 9; i = 3, j = 7, k = 10; i = 4, j = 8, k = 11; i = 5, j = 9, k = 12$, 共 5 个. 又 a_i, a_j, a_k 构成原位小三和弦时, $j = k - 4, i = j - 3$, 所以 a_i, a_j, a_k 为原位小三和弦的有 $i = 1, j = 4, k = 8; i = 2, j = 5, k = 9; i = 3, j = 6, k = 10; i = 4, j = 7, k = 11; i = 5, j = 8, k = 12$, 共 5 个. 所以用这 12 个键可以构成的原位大三和弦与原位小三和弦的个数之和为 10, 故选 C.

关键点拨

根据原位大三和弦与原位小三和弦满足的条件一一列出用这 12 个键可以构成的原位大三和弦与原位小三和弦是解答本题的关键.

4. B 【命题点】概率的理解和应用

【解析】由题意知预计第二天新订单除去超市配货 1 200 份, 若没有志愿者帮忙, 则订单会积压超过 $500 + (1\ 600 - 1\ 200) = 900$ 份的概率为 0.05, 因此要使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于 0.95, 所以至少需要志愿者 $\frac{900}{50} = 18$ 名, 故选 B.

易错警示

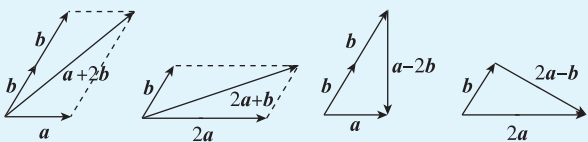
要使第二天完成积压订单及当日订单的配货的概率不小于 0.95, 则至少需志愿者完成在没有志愿者帮忙下会积压的订单总数的配货.

5. D 【命题点】向量的数量积

【解析】由题意得 $a \cdot b = |a| |b| \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $b^2 = |b|^2 = 1$. 对于 A, $(a+2b) \cdot b = a \cdot b + 2b^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \neq 0$, 故 A 错; 对于 B, $(2a+b) \cdot b = 2a \cdot b + b^2 = 1 + 1 = 2 \neq 0$, 故 B 错; 对于 C, $(a-2b) \cdot b = a \cdot b - 2b^2 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2} \neq 0$, 故 C 错; 对于 D, $(2a-b) \cdot b =$

$2a \cdot b - b^2 = 1 - 1 = 0$, 所以 $(2a-b) \perp b$, 故 D 正确. 故选 D.

一题多解 根据已知条件, 作出向量 b 与 A, B, C, D 四个选项对应的向量的位置关系, 如图所示, 由图易知, 只有选项 D 满足, 故选 D.



6. B 【命题点】等比数列的通项公式与前 n 项和公式

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则由

$$\begin{cases} a_5 - a_3 = a_1 q^4 - a_1 q^2 = 12, \\ a_6 - a_4 = a_1 q^5 - a_1 q^3 = 24, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} a_1 = 1, \\ q = 2. \end{cases} \quad \text{所以 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 2^n - 1,$$

$a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$, 所以 $\frac{S_n}{a_n} = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 - 2^{1-n}$, 故选 B.

方法速记 a_1, n, q 称为等比数列 $\{a_n\}$ 的三个基本量, a_n 和 S_n 都可以用这三个基本量来表示, 五个量 a_1, n, q, a_n, S_n 中可知三求二, 一般是利用通项公式和前 n 项和公式求解, 这种方法是解决数列问题的基本方法, 即所谓“通法”.

7. C 【命题点】程序框图

【解析】初始值 $k=0, a=0$, 进行循环, $a=1, k=1$, 不符合循环终止的条件; $a=3, k=2$, 不符合循环终止的条件; $a=7, k=3$, 不符合循环终止的条件; $a=15 > 10, k=4$, 退出循环, 输出 $k=4$, 故选 C.

8. B 【命题点】圆的方程、性质以及点到直线的距离公式

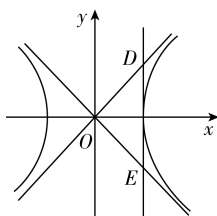
【解析】由题知过点 $(2, 1)$ 的圆与两坐标轴都相切, 故可设圆心坐标为 $(a, a) (a > 0)$, 且圆的半径 $r=a$, 所以圆的标准方程为 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$, 将点 $(2, 1)$ 的坐标代入圆的方程,

得 $(2-a)^2 + (1-a)^2 = a^2$, 得 $a^2 - 6a + 5 = 0$, 解得 $a=1$ 或 $a=5$, 所以圆心坐标为 $(1, 1)$ 或 $(5, 5)$. 点 $(1, 1)$ 到直线 $2x - y - 3 = 0$ 的距离为 $\frac{|2 \times 1 - 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 点 $(5, 5)$ 到直线 $2x - y - 3 = 0$ 的距离为 $\frac{|2 \times 5 - 5 - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故选 B.

9. B 【命题点】双曲线的几何性质以及最值的求解

【解析】双曲线 C 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 不妨设 $D(a, b)$, 则 $E(a, -b)$,

则 $S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} \cdot |DE| \cdot a = ab = 8$. 又



$c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab = 16$, 当且仅当 $a=b=2\sqrt{2}$ 时, 等号成立, 所以 $c \geq 4$, 焦距 $2c \geq 8$, 则双曲线 C 的焦距的最小值为 8, 故选 B.

关键点拨 (1) 写出双曲线的渐近线方程, 联立直线 $x=a$ 求得点 D, E 的坐标; (2) 根据 $\triangle ODE$ 的面积求得 $ab=8$; (3) 由 $c^2=a^2+b^2$ 结合不等式求解.

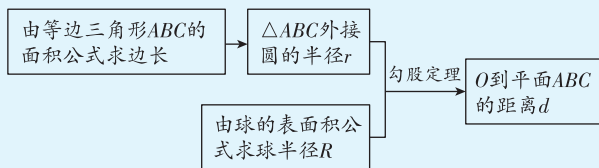
10. A 【命题点】函数的奇偶性与单调性

【解析】由题意, 知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 因为 $f(-x) = (-x)^3 - \frac{1}{(-x)^3} = -x^3 + \frac{1}{x^3} = -\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right) = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数. 又易知 $y=x^3$ 和 $y=-\frac{1}{x^3}$ 在 $(0, +\infty)$ 都单调递增, 所以函数 $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 故选 A.

方法速记 (1) 求出函数 $f(x)$ 的定义域, 通过求 $f(-x)$ 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性; (2) 根据“ $f(x) = g(x) + h(x)$ ”型函数的单调性判断出 $f(x)$ 的单调性.

11. C

思路导引



【命题点】球的表面积、球心到截面的距离

【解析】设等边三角形 ABC 的边长为 a , 因为其面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$,

所以 $\frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{9\sqrt{3}}{4}$, 解得 $a=3$, 则外接圆半径 $r = \frac{2}{3} \cdot$

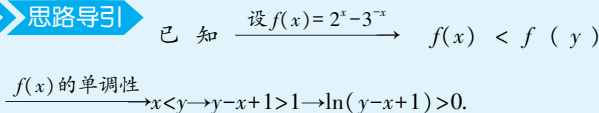
$\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a = \sqrt{3}$. 设球 O 的半径为 R , 因为球 O 的表面积为

16π , 所以 $4\pi R^2 = 16\pi$, 得 $R^2 = 4$. 所以 O 到平面 ABC 的距离

$d = \sqrt{R^2 - r^2} = 1$, 故选 C.

12. A

思路导引



【命题点】函数的单调性以及对数值正负的判断

【解析】由 $2^x - 2^y < 3^{-x} - 3^{-y}$, 可得 $2^x - 3^{-x} < 2^y - 3^{-y}$ (提示: 相同结构, 构造函数). 设 $f(x) = 2^x - 3^{-x}$, 则 $f(x) < f(y)$. 易知 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为增函数, 所以 $x < y$, 则 $y - x + 1 > 1$, 所以 $\ln(y - x + 1) > 0$, 故 A 正确, B 错误. 而当 $x=1, y=2$ 时, $\ln|x-y| = 0$, 故 C, D 错误. 故选 A.

关键点拨 本题解题关键是构造函数 $f(x) = 2^x - 3^{-x}$, 并判断其单调性, 因为 $y = 2^x$ 在 \mathbf{R} 上为增函数, $y = 3^{-x}$ 在 \mathbf{R} 上为减函数, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为增函数.

13. $\frac{1}{9}$ 【命题点】二倍角公式

【解析】 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - 2 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

方法速记 $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$.

14. 25 【命题点】等差数列的通项公式与前 n 项和公式

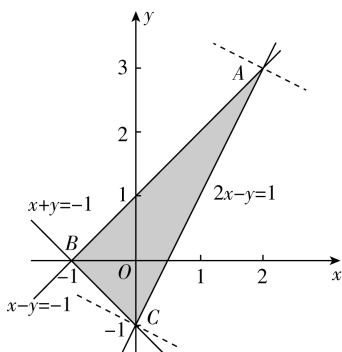
【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_2 + a_6 = a_1 + d + a_1 + 5d = -4 + 6d = 2$, 解得 $d = 1$, 所以 $S_{10} = 10 \times (-2) + \frac{10 \times 9}{2} \times 1 = 25$.

关键点拨 (1) 根据等差数列的通项公式与已知条件建立方程求得公差 d ; (2) 利用等差数列的前 n 项和公式求和.

15. 8 【命题点】线性规划

【解析】 作出不等式组表示的平面区域, 如图中阴影部分所示, 平移直线 $x + 2y = 0$, 可知当直线 $z = x + 2y$ 经过点 A 时, z 取得最

大值. 联立 $\begin{cases} x - y = -1, \\ 2x - y = 1, \end{cases}$ 可得 $A(2, 3)$, 则 $z_{\max} = 2 + 2 \times 3 = 8$.



一题多解 作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分所示, 可知目标函数的最值在顶点处取得, 联立

$\begin{cases} x - y = -1, \\ 2x - y = 1, \end{cases}$ 可得 $A(2, 3)$, 此时 $z = 8$;

联立 $\begin{cases} x + y = -1, \\ x - y = -1, \end{cases}$ 可得 $B(-1, 0)$, 此时 $z = -1$;

联立 $\begin{cases} x + y = -1, \\ 2x - y = 1, \end{cases}$ 可得 $C(0, -1)$, 此时 $z = -2$.

故 z 的最大值为 8.

16. ①③④ 【命题点】空间点、线、面的位置关系, 命题真假的判断

【解析】 对于 p_1 : 三条直线 l_1, l_2, l_3 两两相交, 设直线 $l_1 \cap l_2 = A$, $l_2 \cap l_3 = B$, $l_1 \cap l_3 = C$, 则由 $l_1 \cap l_2 = A$, 知 l_1, l_2 共面, 设此平面为 α , 则由 $B \in l_2, l_2 \subset \alpha$, 知 $B \in \alpha$. 由 $C \in l_1, l_1 \subset \alpha$, 知 $C \in$

α , 因为 $B \in l_3, C \in l_3$, 所以 $l_3 \subset \alpha$, 所以 l_1, l_2, l_3 共面, 故 p_1 为真命题. 对于 p_2 : 若三点不共线, 则过三点有且仅有一个平面; 若三点共线, 则过这三点有无数个平面, 故 p_2 为假命题. 对于 p_3 : 若空间两条直线不相交, 则这两条直线平行或异面, 故 p_3 为假命题. 对于 p_4 : 若 $m \perp \alpha$, 则 m 垂直于 α 内的所有直线, 因为 $l \subset \alpha$, 所以 $m \perp l$, 故 p_4 为真命题. 综上可知, $p_1 \wedge p_4$ 为真命题, $p_1 \wedge p_2$ 为假命题, $\neg p_2 \vee p_3$ 为真命题, $\neg p_3 \vee \neg p_4$ 为真命题, 故真命题的序号为①③④.

17. 【命题点】诱导公式、同角三角函数的基本关系、正弦定理

(1) 【解】由已知得 $\sin^2 A + \cos A = \frac{5}{4}$, 即 $\cos^2 A - \cos A + \frac{1}{4} = 0$.
..... 2 分

所以 $\left(\cos A - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$, $\cos A = \frac{1}{2}$ 4 分

由于 $0 < A < \pi$, 故 $A = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 【证明】由正弦定理及已知条件可得 $\sin B - \sin C = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin A$ 8 分

由(1)知 $B + C = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\sin B - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\pi}{3}$.
..... 10 分

即 $\frac{1}{2} \sin B - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos B = \frac{1}{2}$, $\sin\left(B - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ 11 分

由于 $0 < B < \frac{2\pi}{3}$, 故 $B = \frac{\pi}{2}$. 从而 $\triangle ABC$ 是直角三角形.
..... 12 分

方法速记 依据已知条件中的边角关系判断三角形的形状时, 主要有两种方法: (1) 利用正、余弦定理把已知条件转化为边边关系, 通过因式分解、配方等得出边的相应关系, 从而判断三角形的形状; (2) 利用正、余弦定理把已知条件转化为内角的三角函数间的关系, 通过三角恒等变换, 得出内角间的关系, 从而判断出三角形的形状, 此时要注意三角形内角和定理的应用.

18. 【命题点】样本估计总体、回归分析思想及抽样方法

【解】(1) 由已知得样本平均数 $\bar{y} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} y_i = 60$, 从而该地区这种野生动物数量的估计值为 $60 \times 200 = 12\ 000$ 4 分

(2) 样本 $(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, 20)$ 的相关系数

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{20} (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{20} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{800}{\sqrt{80 \times 9\ 000}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \approx$$

0.94. 8分

(3) **分层抽样**:根据植物覆盖面积的大小对地块分层,再对200个地块进行分层抽样. 10分

理由如下:由(2)知各样区的这种野生动物数量与植物覆盖面积有很强的正相关.由于各地块间植物覆盖面积差异很大,从而各地块间这种野生动物数量差异也很大,采用分层抽样的方法较好地保持了样本结构与总体结构的一致性,提高了样本的代表性,从而可以获得该地区这种野生动物数量更准确的估计. 12分

易错警示 (3)在步骤和理由说明上容易失分,首先要说明采用的抽样方法以及步骤,再进一步陈述理由,理由要充分、全面.

19. 【命题点】椭圆和抛物线的方程及几何性质

【解】(1)由已知可设 C_2 的方程为 $y^2 = 4cx$, 其中 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

不妨设点 A, C 在第一象限,由题设得点 A, B 的纵坐标分别为 $\frac{b^2}{a}, -\frac{b^2}{a}$; 点 C, D 的纵坐标分别为 $2c, -2c$,

故 $|AB| = \frac{2b^2}{a}, |CD| = 4c$ 2分

由 $|CD| = \frac{4}{3}|AB|$ 得 $4c = \frac{8b^2}{3a}$,

即 $3 \times \frac{c}{a} = 2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)^2$.

解得 $\frac{c}{a} = -2$ (舍去), $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

所以 C_1 的离心率为 $\frac{1}{2}$ 5分

(2)由(1)知 $a = 2c, b = \sqrt{3}c$, 故 $C_1: \frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$ 6分

所以 C_1 的四个顶点坐标分别为 $(2c, 0), (-2c, 0), (0, \sqrt{3}c), (0, -\sqrt{3}c)$, C_2 的准线为 $x = -c$ 9分

由已知得 $3c + c + c + c = 12$, 即 $c = 2$ 11分

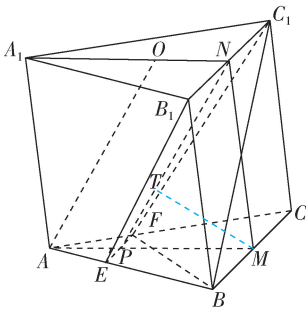
所以 C_1 的标准方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, C_2 的标准方程为 $y^2 = 8x$.

..... 12分

关键点拨 (1)结合椭圆和抛物线的对称性运用代入法求出点 A, B, C, D 的纵坐标,根据 $|CD|$ 和 $|AB|$ 的关系,再结合椭圆离心率的公式进行求解;(2)由(1)可得椭圆的标准方程,确定椭圆的四个顶点坐标和抛物线的准线方程即可求解.

20. 【命题点】空间中的线线平行、面面垂直的证明及四棱锥的体积

(1)【证明】因为 M, N 分别为 BC, B_1C_1 的中点, 所以 $MN \parallel CC_1$ 1 分
又由已知得 $AA_1 \parallel CC_1$, 故 $AA_1 \parallel MN$ 2 分
因为 $\triangle A_1B_1C_1$ 是正三角形, 所以 $B_1C_1 \perp A_1N$ 3 分
又 $B_1C_1 \perp MN, A_1N \cap MN = N$, 故 $B_1C_1 \perp$ 平面 A_1AMN .
..... 5 分
所以平面 $A_1AMN \perp$ 平面 EB_1C_1F 6 分
(2)【解】 $AO \parallel$ 平面 $EB_1C_1F, AO \subset$ 平面 A_1AMN , 平面 $A_1AMN \cap$ 平面 $EB_1C_1F = PN$, 故 $AO \parallel PN$.
又 $AP \parallel ON$, 故四边形 $APNO$ 是平行四边形, 8 分
所以 $PN = AO = 6, AP = ON = \frac{1}{3}AM = \sqrt{3}, PM = \frac{2}{3}AM = 2\sqrt{3}$,
 $EF = \frac{1}{3}BC = 2$ 9 分
因为 $BC \parallel$ 平面 EB_1C_1F , 所以四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的顶点 B 到底面 EB_1C_1F 的距离等于点 M 到底面 EB_1C_1F 的距离.
作 $MT \perp PN$, 垂足为 T , 则由 (1) 知, $MT \perp$ 平面 EB_1C_1F ,
故 $MT = PM \sin \angle MPN = 3$ 11 分
底面 EB_1C_1F 的面积为 $\frac{1}{2} \times (B_1C_1 + EF) \times PN = \frac{1}{2} \times (6 + 2) \times 6 = 24$.
所以四棱锥 $B-EB_1C_1F$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times 24 \times 3 = 24$ 12 分



▶【关键点拨】(2) 根据已知条件求得 $S_{\text{四边形}EB_1C_1F}$ 和点 M 到底面 EB_1C_1F 的距离, 再由锥体体积公式即可求得 $V_{B-EB_1C_1F}$.

21. ▶【思路导引】(1) 设 $h(x) = f(x) - 2x - c \longrightarrow$ 求导研究 $h(x)$ 的单调性 $\longrightarrow h(x)_{\max} \xrightarrow{h(x)_{\max} \leq 0} c$ 的取值范围;
(2) $g(x)$ 与 $g'(x)$ 的关系式 $\xrightarrow{\text{取 } c = -1} h(x)$ 的关系式
 $\xrightarrow{h(1) = 0 \text{ 及 (1) 中结论}} 1 - x + \ln x < 0 \xrightarrow{\frac{a}{x} \text{ 替换 } x} g'(x) < 0 \longrightarrow g(x) \text{ 单调递减}.$

【命题点】由不等式恒成立求参数的范围及利用导数研究函数的单调性

【解】设 $h(x) = f(x) - 2x - c$, 则 $h(x) = 2\ln x - 2x + 1 - c$,

其定义域为 $(0, +\infty)$, $h'(x) = \frac{2}{x} - 2$ 1 分

(1) 当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$. 所以 $h(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递减. 从而当 $x = 1$ 时, $h(x)$ 取得最大值, 最大值为 $h(1) = -1 - c$ 3 分

故当且仅当 $-1 - c \leq 0$, 即 $c \geq -1$ 时, $f(x) \leq 2x + c$ 4 分

所以 c 的取值范围为 $[-1, +\infty)$ 6 分

(构造新函数 $h(x)$, 将不等式 $f(x) \leq 2x + c$ 转化为求 $h(x)_{\max} \leq 0$, 判断函数 $h(x)$ 的单调性和最值, 从而得 c 的取值范围)

(2) $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{2(\ln x - \ln a)}{x - a}$, $x \in (0, a) \cup (a, +\infty)$ 7 分

$g'(x) = \frac{2\left(\frac{x-a}{x} + \ln a - \ln x\right)}{(x-a)^2} = \frac{2\left(1 - \frac{a}{x} + \ln \frac{a}{x}\right)}{(x-a)^2}$ 8 分

取 $c = -1$ 得 $h(x) = 2\ln x - 2x + 2$, $h(1) = 0$, 则由 (1) 知, 当 $x \neq 1$ 时, $h(x) < 0$, 即 $1 - x + \ln x < 0$. 故当 $x \in (0, a) \cup (a, +\infty)$ 时,

$1 - \frac{a}{x} + \ln \frac{a}{x} < 0$, 从而 $g'(x) < 0$ 11 分

所以 $g(x)$ 在区间 $(0, a)$, $(a, +\infty)$ 单调递减. 12 分

一题多解

(2) $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{2(\ln x - \ln a)}{x - a}$, $x \in$

$(0, a) \cup (a, +\infty)$, $g'(x) = \frac{2(x - a - x \ln x + x \ln a)}{x(x - a)^2}$ 8 分

设 $m(x) = 2(x - a - x \ln x + x \ln a)$, 则 $m'(x) = 2(\ln a - \ln x)$, 当 $x > a$ 时, $\ln x > \ln a$, 所以 $m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减, 则有 $m(x) < 0$, 即 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减;

当 $0 < x < a$ 时, $\ln x < \ln a$, 所以 $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增, 则有 $m(x) < 0$, 即 $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减. 11 分

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0, a)$, $(a, +\infty)$ 单调递减. 12 分

22. 【命题点】参数方程与普通方程的互化以及圆的极坐标方程的求解

【解】(1) C_1 的普通方程为 $x + y = 4$ ($0 \leq x \leq 4$). 2 分

易错点

由 C_2 的参数方程得 $x^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$, $y^2 = t^2 + \frac{1}{t^2} - 2$,

所以 $x^2 - y^2 = 4$ 4 分

故 C_2 的普通方程为 $x^2 - y^2 = 4$ 5 分

(2) 由 $\begin{cases} x + y = 4, \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{5}{2}, \\ y = \frac{3}{2}, \end{cases}$

所以 P 的直角坐标为 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 6 分

设所求圆的圆心的直角坐标为 $(x_0, 0)$,

由题意得 $x_0^2 = \left(x_0 - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$, 解得 $x_0 = \frac{17}{10}$ 8 分

因此, 所求圆的极坐标方程为 $\rho = \frac{17}{5} \cos \theta$ 10 分

关键点拨 (1) 由 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 得 C_1 的普通方程, 将 C_2 两式分别平方作差可得 C_2 的普通方程; (2) 两方程联立求得点 P 的坐标, 进而求得所求圆的直角坐标方程为 $\left(x - \frac{17}{10}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{17}{10}\right)^2$, 即 $x^2 + y^2 = \frac{17}{5}x$, 根据 $\rho^2 = x^2 + y^2, x = \rho \cos \theta$, 可得所求圆的极坐标方程.

23. 【命题点】绝对值不等式的性质、解法

【解】 (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = \begin{cases} 7-2x, & x \leq 3, \\ 1, & 3 < x \leq 4, \\ 2x-7, & x > 4. \end{cases}$ 2 分

因此, 不等式 $f(x) \geq 4$ 的解集为 $\left\{x \mid x \leq \frac{3}{2} \text{ 或 } x \geq \frac{11}{2}\right\}$.

..... 5 分

(2) 因为 $f(x) = |x-a^2| + |x-2a+1| \geq |a^2-2a+1| = (a-1)^2$,
故当 $(a-1)^2 \geq 4$, 6 分

即 $|a-1| \geq 2$ 时, $f(x) \geq 4$ 7 分

所以当 $a \geq 3$ 或 $a \leq -1$ 时, $f(x) \geq 4$ 8 分

当 $-1 < a < 3$ 时, $f(a^2) = |a^2-2a+1| = (a-1)^2 < 4$ 9 分

所以 a 的取值范围是 $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ 10 分

关键点拨 (1) 分别在 $x \leq 3, 3 < x \leq 4$ 和 $x > 4$ 三种情况下求不等式的解集; (2) 利用绝对值不等式可得 $f(x) \geq (a-1)^2$, 由此构造不等式求解, 并验证当 $-1 < a < 3$ 时, 存在 x 使得 $f(x) < 4$ 成立, 不满足题意, 从而得 a 的取值范围.