

1. C 【命题点】复数的运算及模的计算

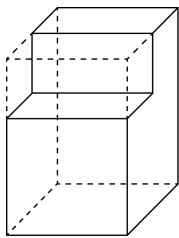
【解析】 $|2+i^2+2i^3|=|2-1-2i|=|1-2i|=\sqrt{1+(-2)^2}=\sqrt{5}$. 故选 C.

2. A 【命题点】集合的补集及并集运算

【解析】因为全集 $U=\{0,1,2,4,6,8\}$, 集合 $N=\{0,1,6\}$, 所以 $\complement_U N=\{2,4,8\}$. 因为 $M=\{0,4,6\}$, 所以 $M\cup\complement_U N=\{0,2,4,6,8\}$. 故选 A.

3. D 【命题点】空间几何体的三视图及表面积的计算

【解析】由三视图可知该零件是由底面是边长为 2 的正方形、高为 3 的长方体截去一个长、宽、高分别为 2, 1, 1 的小长方体后剩余部分, 如图所示, 则该零件的表面积 $S=2\times 2+(2\times 3-1\times 1)\times 2+1\times 2+2\times 3+2\times 2+1\times 2+1\times 2=30$ (另解: $S=2\times(2\times 2+2\times 3+2\times 3)-2\times 1\times 1=30$), 故选 D.



4. C 【命题点】解三角形

【解析】由 $a\cos B-b\cos A=c$ 及正弦定理得 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin C$ (提示: 根据正弦定理转化成角问题), 又因为 $\sin(A+B)=\sin C$, 所以 $\sin A\cos B-\sin B\cos A=\sin A\cos B+\sin B\cos A$, 所以 $\sin B\cos A=0$. 又因为 $\sin B\neq 0$, 所以 $\cos A=0$, 又 $A\in(0,\pi)$, 所以 $A=\frac{\pi}{2}$, 又 $C=\frac{\pi}{5}$, 所以 $B=\frac{3\pi}{10}$. 故选 C.

一题多解 由 $a\cos B-b\cos A=c$ 及余弦定理可得 $a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}-b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$, 整理得 $a^2=b^2+c^2$, 即 $A=\frac{\pi}{2}$. 又 $C=\frac{\pi}{5}$, 所以 $B=\frac{3\pi}{10}$. 故选 C.

5. D 【命题点】函数的奇偶性

【解析】因为函数 $f(x)=\frac{xe^x}{e^{ax}-1}$ 是偶函数, 且定义域为 $\{x|x\neq 0\}$, 所以 $f(x)=f(-x)$, 即 $\frac{xe^x}{e^{ax}-1}=\frac{-xe^{-x}}{e^{-ax}-1}$, 即 $\frac{xe^x}{e^{ax}-1}=\frac{-xe^{-x}\cdot e^{ax}}{1-e^{ax}}=\frac{-xe^{ax-x}}{1-e^{ax}}=\frac{xe^{ax-x}}{e^{ax}-1}$, 所以 $a-1=1$, 即 $a=2$, 故选 D.

一题多解 因为函数 $f(x)$ 是偶函数, 且定义域为 $\{x|x\neq 0\}$, 所以 $f(-1)=f(1)$, 即 $\frac{-e^{-1}}{e^{-a}-1}=\frac{e}{e^a-1}$, 即 $\frac{e^{-a-1}}{e^a-1}=\frac{e}{e^a-1}$, 所以 $a-1=1$, 即 $a=2$. 故选 D.

6. B 【命题点】平面向量的数量积

【解析】解法一: 在正方形 $ABCD$ 中, E 为 AB 的中点, 且 $AB=2$, 所以 $\vec{EC}\cdot\vec{ED}=(\vec{EB}+\vec{BC})\cdot(\vec{EA}+\vec{AD})=(\vec{EB}+\vec{BC})\cdot(\vec{BC}-\vec{EB})=|\vec{BC}|^2-|\vec{EB}|^2=4-1=3$, 故选 B.

解法二: 在正方形 $ABCD$ 中, E 为 AB 的中点, 且 $AB=2$, 所以

$|\vec{EC}|=|\vec{ED}|=\sqrt{5}$, \vec{EC} 与 \vec{ED} 的夹角为 $\angle DEC$, 且 $\cos \angle DEC = \frac{5+5-4}{2 \times 5} = \frac{3}{5}$, 所以 $\vec{EC} \cdot \vec{ED} = \sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \frac{3}{5} = 3$, 故选 B.

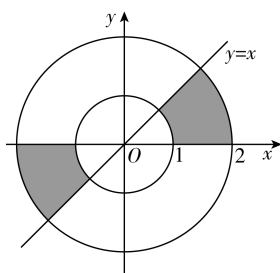
解法三: 以 A 为坐标原点, AB, AD 所在直线分别为 x, y 轴建立平面直角坐标系 (图略), 则 $D(0, 2)$, $E(1, 0)$, $C(2, 2)$, 所以 $\vec{EC} = (1, 2)$, $\vec{ED} = (-1, 2)$, 所以 $\vec{EC} \cdot \vec{ED} = 1 \times (-1) + 2 \times 2 = 3$, 故选 B.

7. C 【命题点】几何概型的概率计算

【解析】 由题意可知区域 $\{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ 表示如图所示的圆环, 其面积 $S_{\Omega} = 4\pi - \pi = 3\pi$. 其中满足直线 OA 的倾斜角不大于 $\frac{\pi}{4}$ 的点 A 所在区域如图中阴影部分所示, 其面积 $S_0 =$

$\frac{1}{4} \times \pi \times 2^2 - \frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 = \frac{3\pi}{4}$. 所以由几何概型的概率计算公式

可得直线 OA 的倾斜角不大于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率 $P = \frac{S_0}{S_{\Omega}} = \frac{\frac{3\pi}{4}}{3\pi} = \frac{1}{4}$, 故选 C.



8. B 【命题点】利用导数研究函数的零点、单调性、极值

【解析】 对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = 3x^2 + a$, 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 + a \geq 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 不可能存在 3 个零

点; 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 3x^2 + a = 0$, 解得 $x = \pm \sqrt{-\frac{a}{3}}$, 所以函

数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\sqrt{-\frac{a}{3}})$, $(\sqrt{-\frac{a}{3}}, +\infty)$ 上单调递增, 在

$(-\sqrt{-\frac{a}{3}}, \sqrt{-\frac{a}{3}})$ 上单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在 $x =$

$-\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 和 $x = \sqrt{-\frac{a}{3}}$ 处分别取得极大值和极小值, 当 $x \rightarrow$

$-\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$ (提示: 注意三次函数的图像特征). 若函数 $f(x)$ 存在 3 个零点, 则必有

$f(-\sqrt{-\frac{a}{3}}) > 0$, 且 $f(\sqrt{-\frac{a}{3}}) < 0$, 解得 $a < -3$, 故选 B.

9. A 【命题点】古典概型、对立事件的概率

【解析】 甲、乙两位参赛同学抽取主题的结果共有 $6 \times 6 = 36$ (种), 抽到相同主题的结果共有 6 种, 所以甲、乙两位参赛

同学抽到相同主题的概率为 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, 则甲、乙两位参赛同学

抽到不同主题的概率为 $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, 故选 A.

10. D 【命题点】正弦型函数的图像与性质

【解析】因为函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 单调递增, 且直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 和直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 为函数 $y = f(x)$ 的图像的两条对称轴, 所以 $\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{T}{2}$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$, 所以 $T = \pi$, 即 $|\omega| = \frac{2\pi}{T} = 2$, 则 $\omega = 2$ 或 -2 . 而 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -1$ (提示: $\frac{\pi}{6}$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点), 即 $\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = -1$ 或 $\sin\left(-2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = -1$, 所以 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 或 $-2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\varphi = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$ 或 $f(x) = \sin\left(-2x - \frac{\pi}{6}\right)$, 所以 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选 D.

11. C 【命题点】直线与圆的位置关系

【解析】将圆的一般方程化为标准方程 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$, 令 $x-y=z$, 则直线 $x-y=z$ 与圆有公共点, 且当直线与圆相切时, z 取得最大或最小值. 设直线 $x-y=z$ 与圆相切, 则有 $\frac{|2-1-z|}{\sqrt{2}} = 3$, 整理得 $|1-z| = 3\sqrt{2}$, 解得 $z = 1+3\sqrt{2}$ 或 $z = 1-3\sqrt{2}$, 所以 $x-y$ 的最大值为 $1+3\sqrt{2}$, 故选 C.

一题多解 将圆的一般方程化为标准方程 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$, 令 $x = 2+3\cos\theta, y = 1+3\sin\theta, \theta$ 为参数, $\theta \in [0, 2\pi)$, 所以 $x-y = 1+3(\cos\theta - \sin\theta) = 1-3\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$, 当且仅当 $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -1$ 时, $x-y$ 取得最大值, 最大值为 $1+3\sqrt{2}$, 故选 C.

12. D 【命题点】直线与双曲线的位置关系、弦中点问题

【解析】依题意可设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 的中点为 (x_0, y_0) , 设直线 AB 的方程为 $y = kx + m$ (提示: 根据选项中点与双曲线的位置关系可知, 若为线段 AB 的中点, 则直线 AB 的斜率存在), 与双曲线方程联立可得 $(9-k^2)x^2 - 2kmx - m^2 - 9 = 0$, 则 $9-k^2 \neq 0, \Delta = 4k^2m^2 + 4(9-k^2)(m^2+9) > 0$, 即 $k \neq \pm 3$,

且 $-k^2 + m^2 + 9 > 0$. 由点 A, B 在双曲线上可得 $\begin{cases} x_1^2 - \frac{y_1^2}{9} = 1, \\ x_2^2 - \frac{y_2^2}{9} = 1, \end{cases}$ 两式

作差可得 $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - \frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{9} = 0$, 整理得

$\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$, 即 $9 \cdot \frac{x_0}{y_0} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ (提示: 弦中点问题常利用点差法).

对于 A 选项, 直线 AB 的斜率为 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 9$, 则直线 AB 的方程

为 $y-1=9(x-1)$, 即 $y=9x-8$, $-k^2+m^2+9=-81+64+9<0$, 不合题意;

对于 B 选项, 直线 AB 的斜率为 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{9}{2}$, 则直线 AB 的方程为 $y-2=-\frac{9}{2}(x+1)$, 即 $y=-\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$, $-k^2+m^2+9=-\frac{81}{4}+\frac{25}{4}+9<0$, 不合题意;

对于 C 选项, 直线 AB 的斜率为 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=3$, 不合题意;

对于 D 选项, 直线 AB 的斜率为 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{9}{4}$, 则直线 AB 的方程为 $y+4=\frac{9}{4}(x+1)$, 即 $y=\frac{9}{4}x-\frac{7}{4}$, $-k^2+m^2+9=-\frac{81}{16}+\frac{49}{16}+9>0$, 符合题意. 故选 D.

13. $\frac{9}{4}$ 【命题点】抛物线的方程及性质

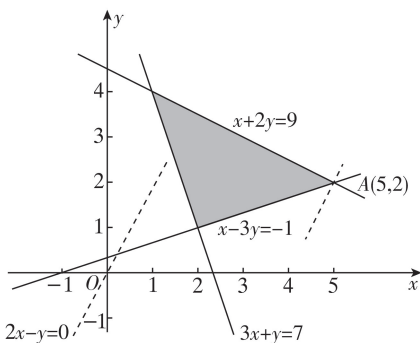
【解析】将点 $A(1, \sqrt{5})$ 的坐标代入抛物线 $C: y^2=2px$, 得 $5=2p$, 所以 $p=\frac{5}{2}$, 所以抛物线 C 的准线方程为 $x=-\frac{p}{2}=-\frac{5}{4}$, 所以点 A 到准线的距离为 $1+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$.

14. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ 【命题点】同角三角函数基本关系

【解析】因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2}$, 所以 $\cos \theta = 2\sin \theta$. 又因为 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, 解得 $\sin^2 \theta = \frac{1}{5}$, 即 $\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

15. 8 【命题点】简单的线性规划问题

【解析】作出约束条件表示的可行域, 如图阴影部分(包含边界)所示, 作出直线 $2x-y=0$ 并平移, 由图知, 当直线 $z=2x-y$ 经过点 $A(5, 2)$ 时, 在 y 轴上的截距最小, 此时目标函数 $z=2x-y$ 取得最大值, 即 $z_{\max}=2 \times 5 - 2 = 8$.



一题多解

由 $\begin{cases} x-3y=-1, \\ x+2y=9 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=5, \\ y=2, \end{cases}$ 此时 $z=8$; 由

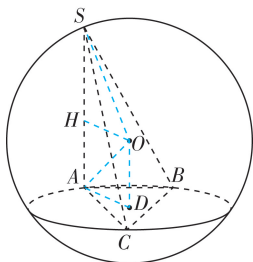
$\begin{cases} x-3y=-1, \\ 3x+y=7 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases}$ 此时 $z=3$; 由 $\begin{cases} x+2y=9, \\ 3x+y=7 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=1, \\ y=4, \end{cases}$ 此时

$z=-2$. 综上所述, 目标函数 $z=2x-y$ 的最大值为 8.

思路导引 取 $\triangle ABC$ 的中心 $D \rightarrow OD \perp$ 平面 $ABC \rightarrow$ 求出 AD 和 OD 的长 \rightarrow 根据 $SA \perp$ 平面 ABC ,构造直角三角形求出 SA 的长

【命题点】三棱锥的外接球

【解析】如图,设三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的球心为 O ,等边三角形 ABC 的中心为 D ,连接 OA, AD, OD ,则 $OD \perp$ 平面 ABC , $OA = 2, AD = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \sqrt{3}$. 在 $\text{Rt} \triangle AOD$ 中, $OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = 1$.



连接 OS ,作 $OH \perp SA$ 于点 H .由 $SA \perp$ 平面 $ABC, OD \perp$ 平面 ABC ,可知 $SA \parallel OD$,所以 S, A, O, D 四点共面.因为 $SA \perp$ 平面 $ABC, AD \subset$ 平面 ABC ,所以 $SA \perp AD$,又 $OH \perp SA$,所以 $OH \parallel AD$,所以四边形 $AHOD$ 为矩形,所以 $AH = OD = 1, OH = AD = \sqrt{3}$.在 $\text{Rt} \triangle SHO$ 中,可得 $SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \sqrt{2^2 - 3} = 1$,所以 $SA = SH + AH = 1 + 1 = 2$.

17. 【命题点】样本平均数与方差

【解】(1) 因为 $z_i = x_i - y_i (i = 1, 2, \dots, 10)$,
所以 $z_1 = 9, z_2 = 6, z_3 = 8, z_4 = -8, z_5 = 15, z_6 = 11, z_7 = 19, z_8 = 18, z_9 = 20, z_{10} = 12, \dots$ 4分

所以 $\bar{z} = \frac{1}{10} \times (9 + 6 + 8 - 8 + 15 + 11 + 19 + 18 + 20 + 12) = 11$,
..... 6分

所以 $s^2 = \frac{1}{10} \times (4 + 25 + 9 + 36 + 1 + 16 + 0 + 64 + 49 + 81 + 1) = 61$.
..... 8分

(2) 因为 $2\sqrt{\frac{s^2}{10}} = 2 \times \sqrt{\frac{61}{10}} = \sqrt{24.4} < 11$,即 $2\sqrt{\frac{s^2}{10}} < \bar{z}$,
所以甲工艺处理后的橡胶产品的伸缩率较乙工艺处理后的橡胶产品的伸缩率有显著提高. 12分

18. 【命题点】等差数列的通项公式和前 n 项和公式

【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,则由题知,
$$\begin{cases} a_1 + d = 11, \\ 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 40, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a_1 = 13, \\ d = -2, \end{cases} \dots 4分$$

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 13 - 2(n-1) = 15 - 2n, n \in \mathbf{N}^*$ 6分

(2) 因为 $a_n = 15 - 2n, n \in \mathbf{N}^*$,所以 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(13 + 15 - 2n)}{2} = 14n - n^2$ 8分

当 $n \leq 7$ 时, $a_n > 0$,所以 $T_n = S_n = 14n - n^2$; 9分

当 $n > 7$ 时, $T_n = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7) - (a_8 + \dots + a_n) = S_7 - (S_n - S_7) = 2S_7 - S_n = n^2 - 14n + 98$ 11分

综上, $T_n = \begin{cases} 14n - n^2, n \leq 7, \\ n^2 - 14n + 98, n > 7. \end{cases}$ 12分

19. 【命题点】证明线面平行、求三棱锥的体积

(1) 【证明】因为 $\frac{OB}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $\text{Rt} \triangle ABO \sim \text{Rt} \triangle CBA$,

所以 $\angle BAO = \angle BCA$ 1分

设 $AO \cap BF = Q$, 因为 $AO \perp BF$, 所以 $\angle BAO = \angle OBQ$, 所以 $\angle BCA = \angle OBQ$, 则 $BF = FC$ 2分

同理可证 $BF = AF$, 所以 $AF = FC$, 即点 F 为 AC 的中点.

..... 3分

又点 E 为 AP 的中点, 所以 $EF \parallel PC$ 4分

因为点 D, O 分别为 BP, BC 的中点, 所以 $DO \parallel PC$,

所以 $EF \parallel DO$ 5分

因为 $EF \not\subset$ 平面 $ADO, DO \subset$ 平面 ADO ,

所以 $EF \parallel$ 平面 ADO 6分

一题多解 设 $\vec{AF} = \lambda \vec{AC} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\vec{BF} \cdot \vec{AO} = (\lambda \vec{AC} - \vec{AB}) \cdot \left(\frac{1}{2} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC} \right) = \frac{1}{2} \lambda \vec{AC}^2 - \frac{1}{2} \vec{AB}^2 + \left(\frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \right) \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 6\lambda - 2 + \left(\frac{1}{2} \lambda - \frac{1}{2} \right) \times 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{2}{2\sqrt{3}} = 6\lambda - 2 + 2\lambda - 2 = 0$, 解

得 $\lambda = \frac{1}{2}$, 故 F 为 AC 的中点. 3分

连接 DE (图略), 则 $OF \parallel AB, OF = \frac{1}{2} AB$. 又 $DE \parallel AB, DE = \frac{1}{2} AB$, 所以 $DE = OF, DE \parallel OF$, 故四边形 $ODEF$ 为平行四边形, 所以 $EF \parallel OD$. 又因为 $OD \subset$ 平面 $ADO, EF \not\subset$ 平面 ADO , 所以 $EF \parallel$ 平面 ADO 6分

(2) 【解】如图, 过点 P 作 $PM \perp FO$, 交 FO 的延长线于点 M , 连接 PF .

(下面证明 $PM \perp$ 平面 ABC)

由(1)知, 点 F, O 分别为 AC ,

BC 的中点, 所以 $OF \parallel AB$,

又 $AB \perp BC$, 所以 $OF \perp BC$.

因为 $PB = PC$, 点 O 为 BC

的中点, 所以 $BC \perp PO$.

因为 $PO \cap OF = O$, 且 $PO,$

$OF \subset$ 平面 PFO , 所以 $BC \perp$

平面 PFO 7分

又 $PM \subset$ 平面 PFO , 所以 $BC \perp PM$.

又 $PM \perp FO, FO \cap BC = O$, 且 $FO, BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PM \perp$ 平面 ABC ,

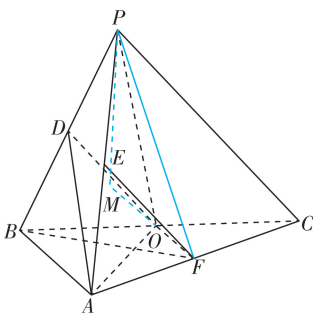
所以 PM 为三棱锥 $P-ABC$ 的高. 9分

因为 $PO = \sqrt{PB^2 - BO^2} = 2, \angle POF = 120^\circ$,

所以 $PM = PO \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$.

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, 11分

所以 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PM = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ 12分



20. 【命题点】导数的几何意义、根据函数单调性求参数的取值范围

【解】(1) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + a\right) \ln(1+x)$, $x > -1$ 且 $x \neq 0$,

$$f'(x) = -\frac{\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{x} + a\right). \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

当 $a = -1$ 时, $f(1) = 0$, $f'(1) = -\ln 2$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 0 = -(x - 1) \ln 2$, 即 $x \ln 2 + y - \ln 2 = 0$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \left[\ln(x+1) - \frac{x(ax+1)}{x+1} \right] \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

令 $g(x) = \ln(x+1) - \frac{x(ax+1)}{x+1}$, 则 $g(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

$$g'(x) = -\frac{x(ax+2a-1)}{(x+1)^2}, \text{ 且 } g(0) = 0.$$

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $f'(x) > 0$, 符合题意. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

当 $a \leq 0$ 时, $g'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $f'(x) < 0$, 不符合题意.

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{a} - 2\right)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a} - 2\right)$ 上单调递增, 故 $g\left(\frac{1}{a} - 2\right) > 0$, 即 $f'\left(\frac{1}{a} - 2\right) < 0$, 不符合题意. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

综上, a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. 【命题点】椭圆的标准方程、直线与椭圆的位置关系及定点问题

$$(1) \text{【解】由题意知} \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \\ b = 2, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 3, \\ b = 2, \\ c = \sqrt{5}, \end{cases}$$

所以 C 的方程为 $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) **【证明】**由题意可知, 直线 PQ 的斜率必存在且不为 0 (提示: 否则与椭圆 C 仅有一个交点 A 或上顶点 $(0, 3)$, 不符合题意), 设直线 PQ 的方程为 $y - 3 = k(x + 2)$, $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1, \\ y - 3 = k(x + 2), \end{cases} \text{得} (4k^2 + 9)x^2 + 8k(2k + 3)x + 16k^2 + 48k =$$

$0, \Delta = -1728k > 0$, 故 $k < 0$.

$$\text{所以} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8k(2k+3)}{4k^2+9}, \\ x_1 x_2 = \frac{16k^2+48k}{4k^2+9}, \end{cases}$$

所以 $y_1+y_2=k(x_1+x_2)+4k+6=\frac{36k+54}{4k^2+9}$ 8 分

又因为直线 $AP:y-0=\frac{y_1-0}{x_1+2}(x+2)$,

直线 $AQ:y-0=\frac{y_2-0}{x_2+2}(x+2)$,

所以 $M\left(0,\frac{2y_1}{x_1+2}\right),N\left(0,\frac{2y_2}{x_2+2}\right)$, 所以线段 MN 的中点坐标为

$\left(0,\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}\right)$ 10 分

$$\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{y_1(x_2+2)+y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{y_1x_2+y_2x_1+2(y_1+y_2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\frac{108}{4k^2+9}$$

$$\frac{2kx_1x_2+(2k+3)(x_1+x_2)+2(y_1+y_2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\frac{\frac{108}{4k^2+9}}{\frac{36}{4k^2+9}}=3,$$

故线段 MN 的中点为定点 $(0,3)$ 12 分

22. 【命题点】极坐标方程与直角坐标方程的互化, 参数方程与普通方程的互化, 直线与圆的位置关系

【解】(1) 由 $\rho=2\sin\theta, \frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$, 得 $\rho^2=2\rho\sin\theta$.

因为 $\rho^2=x^2+y^2, y=\rho\sin\theta$,

所以 $x^2+y^2=2y, 0\leq x\leq 1, 1\leq y\leq 2$,

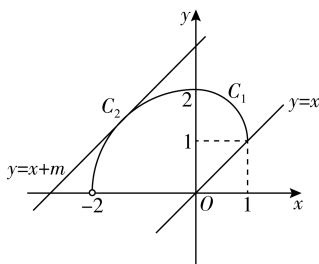
所以曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1, 0\leq x\leq 1, 1\leq y\leq 2$ 4 分

(2) 由 $\begin{cases} x=2\cos\alpha, \\ y=2\sin\alpha, \end{cases} \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, 消去参数 α , 得曲线 C_2 的普通

方程为 $x^2+y^2=4(-2<x<0, 0<y<2)$ 5 分

由(1)知曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2+(y-1)^2=1, 0\leq x\leq 1, 1\leq y\leq 2$,

在同一平面直角坐标系中作出曲线 C_1, C_2 , 如图所示.



由图可知, 当直线 $y=x+m$ 与曲线 C_2 相切时, $m=2\sqrt{2}$; 当直线 $y=x+m$ 过点 $(1,1)$ 时, $m=0$.

若直线 $y=x+m$ 既与 C_1 没有公共点, 也与 C_2 没有公共点,

则 m 的取值范围是 $(-\infty, 0) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$ 10 分

23. 【命题点】绝对值不等式的解法, 平面区域的面积

【解】(1) 当 $x<0$ 时, $f(x)=-2x-x+2\leq 6-x$, 解得 $-2\leq x<0$;

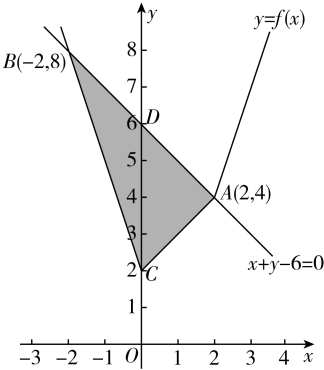
当 $0\leq x\leq 2$ 时, $f(x)=2x-x+2\leq 6-x$, 解得 $0\leq x\leq 2$;

当 $x>2$ 时, $f(x)=2x+x-2\leq 6-x$, 此不等式无解.

综上所述, 原不等式的解集为 $\{x|-2\leq x\leq 2\}$ 5 分

$$(2) \text{ 因为 } f(x)=\begin{cases} -3x+2, & x<0, \\ x+2, & 0\leq x\leq 2, \\ 3x-2, & x>2, \end{cases}$$

由此可作出不等式组 $\begin{cases} f(x) \leq y, \\ x+y-6 \leq 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域, 如图中阴影部分表示的 $\triangle ABC$.



所以该平面区域的面积 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \times |DC| \times |x_A| + \frac{1}{2} \times |DC| \times |x_B| = \frac{1}{2} \times |DC| \times (|x_A| + |x_B|) = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 =$

8. 10 分