

5. B 【命题点】排列组合、分步乘法计数原理

【解析】先将丙和丁捆在一起有 A_2^2 种排列方式(提示:对于元素相邻的排列问题选用“捆绑法”),然后将其与乙、戊排列有 A_3^3 种排列方式,最后将甲插入中间两空中的一个,有 C_2^1 种排列方式,则由分步乘法计数原理得不同的排列方式共有 $A_2^2 A_3^3 C_2^1 = 24$ (种),故选 B.

6. C 【命题点】两角和与差的正弦、余弦公式,同角三角函数的基本关系

【解析】由已知等式,得 $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \alpha - \sin \alpha) \sin \beta$, 整理得 $\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$, 即 $\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 0$, 所以 $\tan(\alpha - \beta) = -1$, 故选 C.

一题多解 (特殊值法) 令 $\beta = 0$, 则由已知等式, 得 $\sin \alpha + \cos \alpha = 0$, 取 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$, 得 $\tan(\alpha - \beta) = \tan(\alpha + \beta) = -1$, 故排除 A, B; 令 $\alpha = 0$, 则由已知等式, 得 $\sin \beta + \cos \beta = 2\sin \beta$, 即 $\sin \beta = \cos \beta$, 取 $\beta = \frac{\pi}{4}$, 则 $\tan(\alpha - \beta) = -1$, $\tan(\alpha + \beta) = 1$, 故排除 D. 故选 C.

7. A 【命题点】正棱台外接球的表面积

【解析】由题意, 得正三棱台上、下底面的外接圆的半径分别为 $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 \sqrt{3} = 3$, $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 \sqrt{3} = 4$. 设该正三棱台上、下底面的外接圆的圆心分别为 O_1, O_2 , 外接球的半径为 R , 球心为 O , 则 $O_1 O_2 = 1$, 球心 O 在直线 $O_1 O_2$ 上. 由于球心位置不能确定, 需分球心在线段 $O_1 O_2$ 上和不在 $O_1 O_2$ 上两种情况讨论. 当球心在线段 $O_1 O_2$ 上时, $R^2 = 3^2 + OO_1^2 = 4^2 + (1 - OO_1)^2$, 解得 $OO_1 = 4 > 1$, 不符合题意; 当球心不在线段 $O_1 O_2$ 上, 即球心在线段 $O_1 O_2$ 的延长线上时, $R^2 = 4^2 + OO_2^2 = 3^2 + (1 + OO_2)^2$, 解得 $OO_2 = 3$, 所以 $R^2 = 25$. 综上, 球 O 的表面积为 $4\pi R^2 = 100\pi$, 故选 A.

8. A

思路导引

```

    graph LR
      A["令 y=1"] -- "f(1)=1" --> B["f(x+1)+f(x-1)=f(x)"]
      B -- "通过变换求得函数的一个周期为6" --> C["f(3), ..., f(6)的值"]
      D["分别令 y=0 与 x=1, y=1 求出 f(0), f(2)"] --> C
      C -- "根据周期性求得结果" --> E["结果"]
  
```

【命题点】抽象函数的周期性

【解析】在 $f(x+y) + f(x-y) = f(x) \cdot f(y)$ 中, 令 $y=1$, 得 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)f(1)$, 所以 $f(x+1) + f(x-1) = f(x)$ ①, 所以 $f(x+2) + f(x) = f(x+1)$ ②. 由①②相加, 整理得 $f(x+2) + f(x-1) = 0$, 所以 $f(x+3) + f(x) = 0$, 即 $f(x+3) = -f(x)$, 所以 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的一个周

期为 6. 在 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$ 中, 令 $y=0$, 得 $f(x)+f(x)=f(x)f(0)$, 所以 $f(0)=2$. 令 $x=1, y=1$, 得 $f(2)+f(0)=f(1)f(1)$, 所以 $f(2)=-1$. 由 $f(x+3)=-f(x)$, 得 $f(3)=-f(0)=-2$, $f(4)=-f(1)=-1, f(5)=-f(2)=1, f(6)=-f(3)=2$, 所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(6)=1-1-2-1+1+2=0$. 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k)=3[f(1)+f(2)+\cdots+f(6)]+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=3\times 0+1-1-2-1=-3$, 故选 A.

9. AD 【命题点】正弦型三角函数的图像与性质

【解析】因为函数 $f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称, 所以

$\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$, 则 $\frac{4\pi}{3}+\varphi=k\pi (k\in\mathbf{Z})$, 结合 $0<\varphi<\pi$, 得

$\varphi=\frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

对于 A, 由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\leq 2x+\frac{2\pi}{3}\leq 2k\pi+\frac{3\pi}{2} (k\in\mathbf{Z})$, 得 $k\pi-\frac{\pi}{12}\leq$

$x\leq k\pi+\frac{5\pi}{12} (k\in\mathbf{Z})$, 当 $k=0$ 时, $-\frac{\pi}{12}\leq x\leq\frac{5\pi}{12}$. 因为 $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)\subseteq$

$\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$ 单调递减, 故 A

正确.

对于 B, 由 $2x+\frac{2\pi}{3}=k\pi+\frac{\pi}{2} (k\in\mathbf{Z})$, 得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12} (k\in\mathbf{Z})$, 当 $k=0$

时, $x=-\frac{\pi}{12}$; 当 $k=1$ 时, $x=\frac{5\pi}{12}$; 当 $k=2$ 时, $x=\frac{11\pi}{12}$, 所以函数 $f(x)$

在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$ 只有一个极值点, 故 B 不正确.

对于 C, 由选项 B 的分析知, 函数 $f(x)$ 图像的对称轴方程为

$x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12} (k\in\mathbf{Z})$, 而方程 $\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}=\frac{7\pi}{6} (k\in\mathbf{Z})$ 无解, 故 C 不

正确.

(另解: 因为 $f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(2\times\frac{7\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin 3\pi=0$, 所以直线

$x=\frac{7\pi}{6}$ 不是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴, 故 C 不正确)

对于 D, $f'(x)=2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$, 若直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$ 为曲线 $y=$

$f(x)$ 的切线, 则由 $2\cos\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=-1$ 得 $2x+\frac{2\pi}{3}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}$

$(k\in\mathbf{Z})$ 或 $2x+\frac{2\pi}{3}=2k\pi+\frac{4\pi}{3} (k\in\mathbf{Z})$, 所以 $x=k\pi (k\in\mathbf{Z})$ 或 $x=$

$k\pi+\frac{\pi}{3} (k\in\mathbf{Z})$. 当 $x=k\pi (k\in\mathbf{Z})$ 时, $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则由 $\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-$

$k\pi (k\in\mathbf{Z})$, 解得 $k=0$; 当 $x=k\pi+\frac{\pi}{3} (k\in\mathbf{Z})$ 时, $f(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 方

程 $-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-k\pi-\frac{\pi}{3} (k\in\mathbf{Z})$ 无解. 综上所述, 直线 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}-x$ 为曲

线 $y=f(x)$ 的切线, 故 D 正确. 故选 AD.

10. ACD 【命题点】抛物线的性质、余弦定理、直线与抛物线的

位置关系

【解析】对于 A, 因为 $|AF| = |AM|$, 且 $M(p, 0)$, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 所以 $x_A = \frac{x_F + x_M}{2} = \frac{3}{4}p$, 代入抛物线方程 $y^2 = 2px (p > 0)$, 解得

$$y_A = \frac{\sqrt{6}}{2}p, \text{ 所以 } A\left(\frac{3}{4}p, \frac{\sqrt{6}}{2}p\right), \text{ 所以 } k_{AB} = k_{AF} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}p - 0}{\frac{3}{4}p - \frac{p}{2}} = 2\sqrt{6},$$

故 A 正确;

对于 B, 由选项 A 的分析, 知直线 AB 的方程为 $y = 2\sqrt{6}\left(x - \frac{p}{2}\right)$, 代入 $y^2 = 2px$, 得 $12x^2 - 13px + 3p^2 = 0$, 解得 $x = \frac{3}{4}p$ 或

$$x = \frac{1}{3}p, \text{ 所以 } x_B = \frac{1}{3}p, \text{ 所以 } y_B = -\frac{\sqrt{6}}{3}p, \text{ 所以 } |OB| =$$

$$\sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}p \neq \frac{p}{2} = |OF|, \text{ 故 B 不正确;}$$

对于 C, 由抛物线的定义及选项 B 的分析, 得 $|AB| = x_A + x_B +$

$p = \frac{25}{12}p > 2p$ (提示: 关于直线 AB 被抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 截得的弦长问题, 要注意直线是否过抛物线的焦点, 若过抛物线的焦点, 可直接使用公式 $|AB| = x_A + x_B + p$), 即 $|AB| > 4|OF|$,

故 C 正确;

对于 D, 因为 $|OA| = \frac{\sqrt{33}}{4}p$, $|AM| = \frac{5}{4}p$, $|OB| = \frac{\sqrt{7}}{3}p$, $|BM| =$

$$\frac{\sqrt{10}}{3}p, \text{ 所以由余弦定理, 得 } \cos \angle OAM =$$

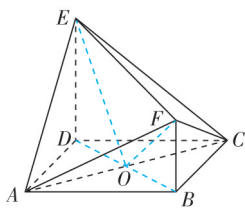
$$\frac{|OA|^2 + |AM|^2 - |OM|^2}{2|OA| \cdot |AM|} = \frac{\frac{33}{16}p^2 + \frac{25}{16}p^2 - p^2}{2 \times \frac{\sqrt{33}}{4}p \times \frac{5}{4}p} = \frac{21}{5\sqrt{33}} > 0,$$

$$\cos \angle OBM = \frac{|OB|^2 + |BM|^2 - |OM|^2}{2|OB| \cdot |BM|} = \frac{\frac{7}{9}p^2 + \frac{10}{9}p^2 - p^2}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{3}p \times \frac{\sqrt{10}}{3}p} = \frac{4}{\sqrt{70}} >$$

0, 所以 $\angle OAM < 90^\circ$, $\angle OBM < 90^\circ$ (易错: 注意角的取值范围), 所以 $\angle OAM + \angle OBM < 180^\circ$, 故 D 正确. 故选 ACD.

11. CD 【命题点】三棱锥的体积、线面垂直的判定和性质

【解析】如图, 连接 BD 交 AC 于 O, 连接 OE, OF. 设 $AB = ED = 2FB = 2$, 则 $AB = BC = CD = AD = 2$. 由 $ED \perp$ 平



面 ABCD, $FB \parallel ED$, 得 $FB \perp$ 平面 ABCD, 所以 $V_1 = V_{E-ACD} =$

$$\frac{1}{3}S_{\triangle ACD} \cdot ED = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AD \cdot CD \cdot ED = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3},$$

$$V_2 = V_{F-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot FB = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot FB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times$$

$$2 \times 1 = \frac{2}{3} \text{ (关键: 求棱锥体积的关键是确定高, 常常结合直线}$$

与平面的位置关系确定). $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $ED \perp AC$. 又 $AC \perp BD$, 且 $ED \cap BD = D$, $ED, BD \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp$ 平面 $BDEF$. 又 $OF \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp OF$. 易知 $BD = 2\sqrt{2}$, $OB = OD = \sqrt{2}$, $OF = \sqrt{OB^2 + FB^2} = \sqrt{3}$, $OE = \sqrt{OD^2 + ED^2} = \sqrt{6}$, $EF = \sqrt{BD^2 + (ED - FB)^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2-1)^2} = 3$, 所以 $EF^2 = OE^2 + OF^2$, 所以 $OF \perp OE$, 而 $OE \cap AC = O$, $OE, AC \subset$ 平面 ACE , 所以 $OF \perp$ 平面 ACE . 又 $AC = AE = CE = 2\sqrt{2}$, 所以 $V_3 = V_{F-ACE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACE} \cdot OF = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} AC^2 \cdot OF = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 \times \sqrt{3} = 2$, 所以有 $V_3 \neq 2V_2$, $V_3 \neq V_1$, $V_3 = V_1 + V_2$, $2V_3 = 3V_1$, 所以选项 A, B 不正确, 选项 C, D 正确, 故选 CD.

12. BC

思路导引 对于 A, B: 由条件, 得 $(x+y)^2 - 3xy = 1$, 将 $xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$ 代入 $\longrightarrow 1 = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{3(x-y)^2}{4} \longrightarrow$ 利用放缩法可求得 $x+y$ 的范围;
对于 C: 由条件, 得 $x^2 + y^2 - 1 = xy \longrightarrow$ 利用基本不等式求解即可;
对于 D: 取特殊值验证即可.

【命题点】不等式的性质、基本不等式

【解析】对于 A, B: 由 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 得 $(x+y)^2 - 3xy = 1$, 而 $xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$, 所以 $(x+y)^2 - 3 \left[\frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4} \right] = 1$, 即 $1 = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{3(x-y)^2}{4} \geq \frac{(x+y)^2}{4}$, 所以 $-2 \leq x+y \leq 2$, 所以 A 不正确, B 正确;

对于 C, D: 由 $x^2 + y^2 - xy = 1$, 得 $x^2 + y^2 - 1 = xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$, 当且仅当 $x = y$ 时等号成立, 所以 $x^2 + y^2 \leq 2$, 所以 C 正确; 当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $x^2 + y^2 < 1$, 所以 D 不正确. 故选 BC.

一题多解 当 $x = 1, y = 0$ 时, x, y 满足 $x^2 + y^2 - xy = 1$.

设 $A(1, 0), P(x, y)$ 为曲线 $C: x^2 + y^2 - xy = 1$ 上的点.

又点 $O(0, 0)$ 不在曲线 C 上, 设 $\angle AOP = \theta, \theta \in [0, 2\pi)$, $r = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$,

则曲线 C 的方程可化为 $(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 - (r \cos \theta) \cdot (r \sin \theta) = 1$, 即 $r^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right) = 1$,

所以 $r^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \sin 2\theta} \in \left[\frac{2}{3}, 2 \right]$, 即 $x^2 + y^2 \in \left[\frac{2}{3}, 2 \right]$.

所以 $r \in \left[\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{2} \right]$, 所以 $x+y=r(\cos \theta+\sin \theta)=\sqrt{2} r \sin \left(\theta+\frac{\pi}{4} \right) \in [-2, 2]$.

所以 A 不正确, B 正确, C 正确, D 不正确, 故选 BC.

方法速记

双配方的应用, 常有两种形式: $xy = \frac{(x+y)^2}{4} -$

$$\frac{(x-y)^2}{4} \text{ 与 } x^2+y^2 = \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x-y)^2}{2}.$$

学霸解题 · 技巧 北京大学 张充

由基本不等式 $x^2+y^2 \geq 2xy$ (当且仅当 $x=y$ 时等号成立), 得 $x^2+y^2-xy=1 \geq xy$, 即 $xy \leq 1$.

$$\text{则 } (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy = 1+3xy \leq 4,$$

所以 $-2 \leq x+y \leq 2$, A 错误, B 正确.

$$x^2+y^2 = 1+xy \leq 2, \text{ C 正确.}$$

当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $x^2+y^2 = 1+xy < 1$, D 错误.

故选 BC.

13. 0.14 【命题点】正态曲线的对称性

【解析】因为 $X \sim N(2, \sigma^2)$, 所以 $P(X > 2) = 0.5$, 所以 $P(X > 2.5) = P(X > 2) - P(2 < X \leq 2.5) = 0.5 - 0.36 = 0.14$.

14. $y = \frac{1}{e}x$ $y = -\frac{1}{e}x$ 【命题点】导数的几何意义

【解析】当 $x > 0$ 时, $y = \ln x$, 设切点为 (x_0, y_0) , $x_0 > 0$, 则由 $y' = \frac{1}{x}$, 得切线斜率 $k = \frac{1}{x_0}$. 又切线的斜率为 $\frac{y_0}{x_0}$, 所以 $\frac{1}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}$, 解

得 $y_0 = 1$, 代入 $y = \ln x$, 得 $x_0 = e$. 所以 $k = \frac{1}{e}$, 所以切线方程为

$y = \frac{1}{e}x$. 同理可求得当 $x < 0$ 时的切线方程为 $y = -\frac{1}{e}x$. 综上,

两条切线方程分别为 $y = \frac{1}{e}x, y = -\frac{1}{e}x$.

关键点拨

利用导数的几何意义求切线方程时, 首先要分清楚是求在曲线上某点处的切线还是过某点的切线, 不明确切点时, 通常要设出切点, 结合方程思想进行求解.

15. $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2} \right]$ 【命题点】直线与圆的位置关系、点到直线的距离公式

【解析】由题意知点 $A(-2, 3)$ 关于直线 $y = a$ 的对称点为 $A'(-2, 2a-3)$ (提示: 点 (x_0, y_0) 关于直线 $y = a$ 的对称点为 $(x_0, 2a-y_0)$), 所以 $k_{A'B} = \frac{3-a}{2}$, 所以直线 $A'B$ 的方程为 $y =$

$\frac{3-a}{2}x + a$, 即 $(3-a)x - 2y + 2a = 0$. 由题意知圆 $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 1$

的圆心为 $(-3, -2)$, 半径为 1, 又直线 $(3-a)x - 2y + 2a = 0$ 与圆

$(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 有公共点, 所以圆心到直线 $A'B$ 的距离

$$d = \frac{|-3(3-a)+2 \times 2+2a|}{\sqrt{(3-a)^2+(-2)^2}} \leq 1 \quad (\text{易错: 公共点个数可能是 1 或 2, 易漏“=”}),$$

整理得 $6a^2-11a+3 \leq 0$, 解得 $\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{2}$, 所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$.

一题多解 因为直线 AB 关于直线 $y=a$ 对称的直线也与直线 AB 关于 y 轴对称, 圆 $(x+3)^2+(y+2)^2=1$ 关于 y 轴对称的圆的方程为 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$, 由题意知该圆与直线 AB 有公共点. 直线 AB 的方程为 $y=\frac{a-3}{2}x+a$, 即 $(a-3)x-2y+2a=0$. 又圆 $(x-3)^2+(y+2)^2=1$ 的圆心为 $(3, -2)$, 半径为 1, 所以圆心到直线 AB 的距离 $d = \frac{|3(a-3)+2 \times 2+2a|}{\sqrt{(a-3)^2+(-2)^2}} \leq 1$, 整理得 $6a^2-11a+3 \leq 0$, 解得 $\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{2}$, 所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$.

16. $x+\sqrt{2}y-2\sqrt{2}=0$

思路导引 设直线 l 的方程为 $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \longrightarrow$ 点 M, N 的坐标 $\xrightarrow{\text{线段 } AB, MN \text{ 中点相同}}$

$$\begin{cases} x_1+x_2=m, \\ y_1+y_2=n \end{cases} \xrightarrow{\substack{M, N, A, B \\ \text{四点共线}}} \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{n}{m} \xrightarrow{\text{点差法}} m, n \text{ 的等量关系}$$

$|MN|=2\sqrt{3}$,
勾股定理 $\longrightarrow m, n$ 的值 \longrightarrow 直线 l 的方程.

【命题点】 直线与椭圆的位置关系、直线的方程

【解析】 设直线 l 的方程为 $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, 则点 $M(m, 0)$, $N(0, n)$ ($m>0, n>0$). 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ($x_1, x_2>0, x_1 \neq x_2$). 由题意知线段 AB 与线段 MN 有相同的中点, 所以

$$\begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{m+0}{2}, \\ \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{0+n}{2}, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x_1+x_2=m, \\ y_1+y_2=n. \end{cases} \quad \text{又因为 } k_{AB}=k_{MN} \quad (\text{提示: 四点共线}),$$

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{0-n}{m-0} = -\frac{n}{m}$. 将点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 的坐标代入椭圆方程, 得

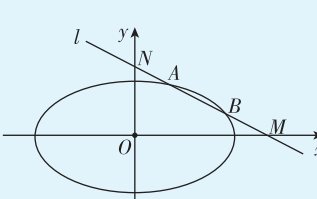
$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \\ \frac{x_2^2}{6} + \frac{y_2^2}{3} = 1, \end{cases} \quad \text{两式相减, 得}$$

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{6} + \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3} = 0, \text{ 整理得 } \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} \cdot \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{1}{2} \quad (\text{方法: 直线与圆锥曲线相交, 涉及弦中点时, 常利用点$$

差法), 则 $\frac{n}{m} \cdot \left(-\frac{n}{m}\right) = -\frac{1}{2}$, 则 $m^2 = 2n^2$ ①. 又 $|MN| = 2\sqrt{3}$, 所以由勾股定理, 得 $m^2 + n^2 = 12$ ②. 联立 ①②, 结合 $m > 0, n > 0$, 解得 $\begin{cases} m = 2\sqrt{2}, \\ n = 2, \end{cases}$ 所以直线 l 的方程为 $\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{y}{2} = 1$, 即 $x + \sqrt{2}y - 2\sqrt{2} = 0$.

一题多解 由已知可设直线 l 的方程为 $y = kx + b$, 其中 $k < 0, b > 0$. 故 $x_M = -\frac{b}{k}, y_N = b$. 联立 $y = kx + b$ 和 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 化简可得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kbx + 2b^2 - 6 = 0$, 故 $x_A + x_B = -\frac{4kb}{1 + 2k^2}$.

由 $|MA| = |NB|$ 可知, $x_M - x_A = x_B$, 故 $x_A + x_B = x_M$, 即 $\frac{4kb}{1 + 2k^2} = -\frac{b}{k}$, 解得 $k = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.



又由 $|MN| = 2\sqrt{3}$ 可得 $x_M^2 + y_N^2 = 12$, 故 $b^2 = \frac{12k^2}{1 + k^2} = 4$, 于是 $b = 2$. 所以 l 的方程为 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2$, 即 $x + \sqrt{2}y - 2\sqrt{2} = 0$.

方法速记 若 AB 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的不垂直于对称轴的弦, P 为 AB 的中点, O 为坐标原点, 则 $k_{OP} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$.

17. 【命题点】等差数列与等比数列的通项公式

(1) 【证明】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则由 $a_2 - b_2 = a_3 - b_3$, 得 $a_3 - a_2 = b_3 - b_2$, 即 $d = b_1q^2 - b_1q = 2b_1$ ①. 2 分

又由 $a_2 - b_2 = b_4 - a_4$, 得 $a_4 + a_2 = b_4 + b_2$, 即 $2a_1 + 4d = b_1q^3 + b_1q = 10b_1$ ②. 4 分

将 ① 代入 ②, 得 $2a_1 + 8b_1 = 10b_1$, 即 $a_1 = b_1$ 5 分

(2) 【解】由 (1) 可得 $a_m = a_1 + (m-1)d = b_1 + (m-1) \cdot 2b_1 = 2mb_1 - b_1$ 6 分

又 $b_k = b_1q^{k-1} = b_1 \cdot 2^{k-1}$, 则由 $b_k = a_m + a_1$, 得 $b_1 \cdot 2^{k-1} = 2mb_1 - b_1 + a_1 = 2mb_1 - b_1 + b_1 = 2mb_1$, 即 $2^{k-1} = 2m$, 所以 $2^{k-2} = m$ 8 分

由 $1 \leq 2^{k-2} \leq 500$, 得 $0 \leq k-2 < 9$, 即 $2 \leq k < 11$. 因为 $k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, 所以集合 $\{k | b_k = a_m + a_1, 1 \leq m \leq 500\}$ 中元素的个数为 9. 10 分

18. 【命题点】正弦、余弦定理, 三角形面积公式

【解】(1) 由题意, 得 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2, S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}b^2, S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. 由 $S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 得 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}c^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

即 $a^2+c^2-b^2=2$ 3 分

则由余弦定理,得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{1}{ac}>0$.

又 $\because \sin B=\frac{1}{3}, \therefore \cos B=\frac{2\sqrt{2}}{3}, \therefore ac=\frac{3\sqrt{2}}{4}$, 5 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2}}{8}$ 6 分

(2)由正弦定理,得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=3b$,

$\therefore \sin A=\frac{a}{3b}, \sin C=\frac{c}{3b}$, 8 分

$\therefore \sin A\sin C=\frac{a}{3b}\cdot\frac{c}{3b}=\frac{ac}{9b^2}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{9b^2}=\frac{\sqrt{2}}{3}$,解得 $b=\frac{1}{2}$.

..... 12 分

19.【命题点】频率分布直方图、平均数、条件概率

【解】(1)估计该地区这种疾病患者的平均年龄为

$0.001\times10\times5+0.002\times10\times15+0.012\times10\times25+0.017\times10\times35+$
 $0.023\times10\times45+0.020\times10\times55+0.017\times10\times65+0.006\times10\times$
 $75+0.002\times10\times85=47.9$ 岁. 4 分

(2)估计该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间 $[20, 70)$ 的概率 $P=0.012\times10+0.017\times10+0.023\times10+0.020\times10+$
 $0.017\times10=0.89$ 8 分

(3)设事件 A :此人患这种疾病,事件 B :此人年龄位于区间 $[40, 50)$,则由题意知 $P(AB)=23\%\times0.1\%=0.023\%$,
 $P(B)=16\%$,

所以若此人年龄位于 $[40, 50)$, 10 分

则此人患这种疾病的概率 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{0.023\%}{16\%}\approx$

0.0014 12 分

20.【命题点】空间中直线与平面的位置关系、二面角、空间向量的应用

(1)【证明】取 AB 的中点 D ,连接 DP, DO, DE .

因为 $PA=PB$,所以 $PD\perp AB$.

因为 PO 为三棱锥 $P-ABC$ 的高,所以 $PO\perp$ 平面 ABC .

因为 $AB\subset$ 平面 ABC ,所以 $PO\perp AB$.

又因为 $PO, PD\subset$ 平面 POD ,且 $PO\cap PD=P$,

所以 $AB\perp$ 平面 POD 2 分

因为 $OD\subset$ 平面 POD ,所以 $AB\perp OD$.

又因为 $AB\perp AC$,所以 $OD\parallel AC$.

因为 $OD\not\subset$ 平面 $PAC, AC\subset$ 平面 PAC ,所以 $OD\parallel$ 平面 PAC .

因为 D, E 分别为 BA, BP 的中点,所以 $DE\parallel PA$.

因为 $DE\not\subset$ 平面 $PAC, PA\subset$ 平面 PAC ,所以 $DE\parallel$ 平面 PAC .

又 $OD, DE\subset$ 平面 $ODE, OD\cap DE=D$,

所以平面 $ODE\parallel$ 平面 PAC 4 分

又 $OE\subset$ 平面 ODE ,所以 $OE\parallel$ 平面 PAC 5 分

联立一条渐近线方程 \rightarrow 求出点 A 的坐标, 同理求出点 B 的坐标

标——→利用中点坐标公式证得点 M 为线段 AB 的中点即可.

选择①③作条件,当直线 AB 的斜率不存在时可推出矛盾

——→当直线 AB 的斜率存在时——→设直线 $AB: y = m(x -$

$2)$ ——→同选①②求出点 A, B 的坐标 $\xrightarrow{\text{中点坐标公式}}$ 点 M 的坐标——→代入点 M 的轨迹方程证 $k = m$ 即可.

选择②③作条件,同选①②求出点 A, B 的坐标 $\xrightarrow{\text{中点坐标公式}}$

求出线段 AB 的中点 $E(x_E, y_E)$ 的坐标 $\xrightarrow{|MA| = |MB|}$ 点 M 在线段 AB 的垂直平分线上——→求出线段 AB 的垂直平分线方程,与点 M 的轨迹方程联立——→证点 M, E 重合即可.

【命题点】双曲线的方程及几何性质、直线与双曲线的位置关系

【解】(1)由题意得 $c = 2$ ①.

\therefore 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x, \therefore \frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ②.

又 $c^2 = a^2 + b^2$ ③,联立①②③解得 $a = 1, b = \sqrt{3}$,

\therefore 双曲线 C 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 4分

(2)设直线 PQ 的方程为 $y = kx + n$,由点 P, Q 的相对位置可知 $k > 0$,且 $k \neq \sqrt{3}$.将直线 PQ 的方程代入 C 的方程得 $(3 - k^2)x^2 - 2knx - n^2 - 3 = 0$,

则 $\Delta = 12(n^2 + 3 - k^2) > 0, x_1 + x_2 = \frac{2kn}{3 - k^2}, x_1x_2 = -\frac{n^2 + 3}{3 - k^2}$. 又 $x_1 > x_2 >$

$0, \therefore k > \sqrt{3}, n < 0$,

则 $x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}}{k^2 - 3} = \frac{2\sqrt{3(n^2 + 3 - k^2)}}{k^2 - 3}$ 6分

设点 M 的坐标为 (x_M, y_M) , 则 $\begin{cases} y_M - y_1 = -\sqrt{3}(x_M - x_1), \\ y_M - y_2 = \sqrt{3}(x_M - x_2). \end{cases}$

两式相减,得 $y_1 - y_2 = 2\sqrt{3}x_M - \sqrt{3}(x_1 + x_2)$.

又 $y_1 - y_2 = (kx_1 + n) - (kx_2 + n) = k(x_1 - x_2)$,

$\therefore 2\sqrt{3}x_M = k(x_1 - x_2) + \sqrt{3}(x_1 + x_2)$,

解得 $x_M = \frac{k\sqrt{n^2 + 3 - k^2} - kn}{k^2 - 3}$.

两式相加,得 $2y_M - (y_1 + y_2) = \sqrt{3}(x_1 - x_2)$.

$\therefore y_1 + y_2 = (kx_1 + n) + (kx_2 + n) = k(x_1 + x_2) + 2n$,

$\therefore 2y_M = k(x_1 + x_2) + \sqrt{3}(x_1 - x_2) + 2n$,

解得 $y_M = \frac{3\sqrt{n^2 + 3 - k^2} - 3n}{k^2 - 3} = \frac{3}{k}x_M$,

因此,点 M 的轨迹方程为 $y = \frac{3}{k}x (x > 0)$,其中 k 为直线 PQ 的斜率. 8分

(求出点 M 的轨迹方程是求解问题的关键)

若选条件①②,则证明③:

由题知直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$, 设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, 不妨取点 A 在第一象限,

$$\text{则} \begin{cases} y_A = k(x_A - 2), \\ y_A = \sqrt{3}x_A, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x_A = \frac{2k}{k - \sqrt{3}}, \\ y_A = \frac{2\sqrt{3}k}{k - \sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$\text{同理可得 } x_B = \frac{2k}{k + \sqrt{3}}, y_B = \frac{-2\sqrt{3}k}{k + \sqrt{3}},$$

$$\text{此时 } x_A + x_B = \frac{4k^2}{k^2 - 3}, y_A + y_B = \frac{12k}{k^2 - 3}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标满足} \begin{cases} y_M = k(x_M - 2), \\ y_M = \frac{3}{k}x_M, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x_M = \frac{2k^2}{k^2 - 3} = \frac{x_A + x_B}{2}, \\ y_M = \frac{6k}{k^2 - 3} = \frac{y_A + y_B}{2}, \end{cases}$$

故 M 为线段 AB 的中点, 即 $|MA| = |MB|$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

若选条件①③,则证明②:

当直线 AB 的斜率不存在时, 点 M 即为点 $F(2, 0)$, 此时 M 不在直线 $y = \frac{3}{k}x$ 上, 不符合题意.

(在设直线方程时, 不要忽略对直线斜率不存在情况的讨论)

当直线 AB 的斜率存在时, 设直线 AB 的方程为 $y=m(x-2)$ ($m \neq 0$, 且 $m \neq \pm\sqrt{3}$), $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, 不妨取点 A 在第一象限,

$$\text{则} \begin{cases} y_A = m(x_A - 2), \\ y_A = \sqrt{3}x_A, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x_A = \frac{2m}{m - \sqrt{3}}, \\ y_A = \frac{2\sqrt{3}m}{m - \sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$\text{同理可得 } x_B = \frac{2m}{m + \sqrt{3}}, y_B = \frac{-2\sqrt{3}m}{m + \sqrt{3}},$$

$$\text{此时 } x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2m^2}{m^2 - 3}, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6m}{m^2 - 3}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由于点 } M \text{ 同时在直线 } y = \frac{3}{k}x \text{ 上, 故 } 6m = \frac{3}{k} \cdot 2m^2,$$

$$\text{解得 } k = m, \text{ 因此 } PQ \parallel AB. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

若选条件②③,则证明①:

由题知直线 AB 的方程为 $y=k(x-2)$,

设 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, 不妨取点 A 在第一象限,

$$\text{则} \begin{cases} y_A = k(x_A - 2), \\ y_A = \sqrt{3}x_A, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x_A = \frac{2k}{k - \sqrt{3}}, \\ y_A = \frac{2\sqrt{3}k}{k - \sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$\text{同理可得 } x_B = \frac{2k}{k + \sqrt{3}}, y_B = \frac{-2\sqrt{3}k}{k + \sqrt{3}},$$

设线段 AB 的中点为 $E(x_E, y_E)$, 则 $x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2k^2}{k^2 - 3}$,

$$y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{6k}{k^2 - 3}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$\therefore |MA| = |MB|$, \therefore 点 M 在线段 AB 的垂直平分线上,

即点 M 在直线 $y - y_E = -\frac{1}{k}(x - x_E)$ 上.

$$\text{将该直线方程与 } y = \frac{3}{k}x \text{ 联立, 解得 } \begin{cases} x_M = \frac{2k^2}{k^2 - 3} = x_E, \\ y_M = \frac{6k}{k^2 - 3} = y_E, \end{cases}$$

即点 M 恰为线段 AB 的中点, 故点 M 在 AB 上. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. > 思路导引 (1) 求出当 $a = 1$ 时的函数解析式与导函数

$f'(x) \rightarrow f'(x)$ 的正负区间 \rightarrow 求得函数的单调性;

(2) 求出导函数 $f'(x) \rightarrow$ 分 $a \geq 1, a \leq 0, 0 < a \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < a < 1$

讨论函数 $f(x)$ 的单调性 \rightarrow 根据 $f(x) < -1$ 求得 a 的取值范围;

(3) 结合 (2) 得 $xe^{\frac{x}{2}} < e^x - 1 \rightarrow$ 令 $t = e^x > 1 \rightarrow \ln t \cdot \sqrt{t} < t - 1$
 $\rightarrow \ln \frac{i+1}{i} \cdot \sqrt{\frac{i+1}{i}} < \frac{1}{i} (i \in \mathbf{N}^*) \rightarrow \ln \frac{i+1}{i} < \frac{1}{\sqrt{i^2 + i}} \rightarrow i$

分别取 $1, 2, \dots, n$ 并求和 \rightarrow 问题得证

【命题点】导数在研究函数的单调性、不等式中的应用

(1) 【解】当 $a = 1$ 时, $f(x) = xe^x - e^x, x \in \mathbf{R}$, 则 $f'(x) = xe^x$,

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

\therefore 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 【解】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}, f'(x) = (1 + ax)e^{ax} - e^x$.

(导函数中含有参数, 要根据参数对导函数取值符号的影响分段讨论)

对于 $x \in (0, +\infty)$, 当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) = (1 + ax)e^{ax} - e^x > e^{ax} - e^x \geq e^x - e^x = 0, \therefore f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) > -1$, 不满足题意.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \leq e^{ax} - e^x \leq 1 - e^x < 0$ 且等号不恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) < -1$, 满足题意.

当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \leq \left(1 + \frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} - e^x = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} - e^{\frac{x}{2}}\right).$

$\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(当导函数的正负不能直接判断时, 可考虑构造新函数, 通过研究新函数的单调性求出)

令 $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - e^{\frac{x}{2}}$, 则 $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore g(x) < g(0) = 0, \therefore f'(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot g(x) < 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$

上单调递减.

$\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) < -1$, 满足题意.

当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $f'(x) = e^{ax} [1 + ax - e^{(1-a)x}]$.

令 $h(x) = 1 + ax - e^{(1-a)x}$,

则 $h'(x) = a + (a-1)e^{(1-a)x}$.

$\therefore h'(x)$ 为减函数, 7 分

又 $h'(0) = 2a - 1 > 0, x \rightarrow +\infty, h'(x) < 0$,

$\therefore \exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $h'(x_0) = 0$,

(当导函数的零点存在, 但不易求出时, 可引入虚拟零点)

\therefore 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增,

$h(x) > h(0) = 0, \therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) = e^{ax} \cdot h(x) > 0$,

$f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增. $\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) > -1$, 不满足题意.

综上, a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 8 分

(3) 【证明】由(2)知当 $a = \frac{1}{2}$, 且 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) < -1$,

即 $xe^{\frac{x}{2}} - e^x < -1, \therefore xe^{\frac{x}{2}} < e^x - 1$.

令 $t = e^x > 1$, 则 $x = \ln t, \therefore \ln t \cdot \sqrt{t} < t - 1$.

令 $t = \frac{i+1}{i} > 1, i \in \mathbf{N}^*$,

则 $\ln \frac{i+1}{i} \sqrt{\frac{i+1}{i}} < \frac{i+1}{i} - 1 = \frac{1}{i}$, 10 分

$\therefore \ln \frac{i+1}{i} < \frac{1}{i} \sqrt{\frac{i}{i+1}} = \sqrt{\frac{1}{i(i+1)}} = \frac{1}{\sqrt{i^2+i}},$

$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i^2+i}} > \sum_{i=1}^n \ln \frac{i+1}{i} = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1).$

..... 12 分

(与正整数有关的不等式通常结合放缩法进行证明)

一题多解 (3) (数学归纳法): ① 当 $n = 1$ 时, 左边 =

$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 右边 = $\ln 2$, 左边 > 右边, 不等式成立. 9 分

② 假设当 $n = k (k \geq 1, k \in \mathbf{N}^*)$ 时不等式成立, 即 $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} +$

$\frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} > \ln(k+1);$

当 $n = k + 1$ 时, 左边 = $\frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k^2+k}} +$

$\frac{1}{\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}} > \ln(k+1) + \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}}$, 只需证明

$\ln(k+1) + \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}} > \ln(k+2)$, 即证

$\frac{1}{\sqrt{(k+1)^2+(k+1)}} > \ln \frac{k+2}{k+1}$ 10 分

由(2)知,当 $a=\frac{1}{2}$,且 $x\in(0,+\infty)$ 时, $f(x)<-1$,即 $xe^{\frac{x}{2}} -$

$$e^x < -1, \therefore xe^{\frac{x}{2}} < e^x - 1.$$

$$\text{令 } \frac{k+1}{k} = e^x > 1, k \in \mathbf{N}^*, \text{ 则 } x = \ln \frac{k+1}{k}, \therefore \ln \frac{k+1}{k} \cdot \sqrt{\frac{k+1}{k}} < \frac{k+1}{k} - 1 = \frac{1}{k},$$

$$\therefore \ln \frac{k+1}{k} < \frac{1}{k} \cdot \sqrt{\frac{k}{k+1}} = \sqrt{\frac{1}{k(k+1)}} = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}},$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{(k+1)^2 + (k+1)}} > \ln \frac{k+2}{k+1}, \text{ 即当 } n=k+1 \text{ 时, 不等式成立.}$$

$$\text{由①②可知,对任意 } n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} >$$

$$\ln(n+1). \quad \cdots \cdots \cdots \quad 12 \text{ 分}$$