

1. B 【命题点】集合的交集运算

【解析】由已知得 $B = \{2, -1\}$, 故 $A \cap B = \{2\}$, 故选 B.

2. B 【命题点】复数的除法运算

【解析】由已知得 $\frac{1+3i}{1-i} = \frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$, 故选 B.

3. C 【命题点】极值点的定义,充分必要条件的判定

【解析】若 $x = x_0$ 是函数 $f(x)$ 的极值点, 则 $f'(x_0) = 0$; 若 $f'(x_0) = 0$, 则 $x = x_0$ 不一定是极值点, 例如 $f(x) = x^3$, 当 $x = 0$ 时, $f'(0) = 0$, 但是在 $x = 0$ 两侧都满足 $f'(x) > 0$, 该点不是极值点. 故 p 是 q 的必要条件, 但不是 q 的充分条件, 故选 C.

4. A 【命题点】平面向量的数量积运算

【解析】由已知得, $\begin{cases} |a+b| = \sqrt{10}, \\ |a-b| = \sqrt{6}, \end{cases}$

$$\therefore \begin{cases} a^2 + b^2 + 2a \cdot b = 10, & \text{①} \\ a^2 + b^2 - 2a \cdot b = 6, & \text{②} \end{cases}$$

①-②得 $a \cdot b = 1$. 故选 A.

5. A 【命题点】等比中项的性质,等差数列的通项及前 n 项和

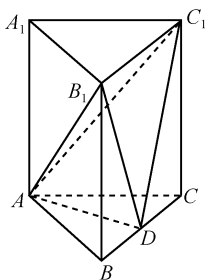
【解析】由已知得 $a_4^2 = a_2 \cdot a_8$ (提示: 等比中项的性质), 又因为 $\{a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 所以 $(a_2 + 2d)^2 = a_2 \cdot (a_2 + 6d)$, 即 $(a_2 + 4)^2 = a_2 \cdot (a_2 + 12)$, 解得 $a_2 = 4$. 所以 $a_n = a_2 + (n-2)d = 2n$, 故 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = n(n+1)$ 或 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n(4 - 2) + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n(n+1)$. 故选 A.

6. C 【命题点】几何体的三视图与体积

【解析】零件的直观图为一个圆柱左端切削掉了一周, 即一个大圆柱左边放一个较细的圆柱. 小圆柱底面半径为 2 cm、高为 4 cm, 大圆柱底面半径为 3 cm、高为 2 cm, 则其体积和为 $\pi \times 2^2 \times 4 + \pi \times 3^2 \times 2 = 34\pi$ (cm³), 而圆柱形毛坯体积为 $\pi \times 3^2 \times 6 = 54\pi$ (cm³), 故切削掉部分的体积为 20π cm³, 从而切削掉部分的体积与原来毛坯体积的比值为 $\frac{20\pi}{54\pi} = \frac{10}{27}$. 故选 C.

7. C 【命题点】正三棱柱的性质,三棱锥的体积

【解析】如图, 根据正三棱柱的性质可知, $AD \perp$ 平面 B_1DC_1 .



在 $\triangle B_1DC_1$ 中, $B_1D=C_1D=2, B_1C_1=2$,

$$\text{所以 } S_{\triangle B_1DC_1} = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \sin 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\text{故 } V_{\text{三棱锥 } A-B_1DC_1} = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1. \text{ 故选 C.}$$

一题多解 如图, $V_{A-B_1DC_1} = V_{ABC-A_1B_1C_1} - V_{B_1-ABD} - V_{C_1-ACD} - V_{A-A_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 - \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABD} \cdot AA_1 - \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ACD} \cdot AA_1 - \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4 \times \sqrt{3} = 1$. 故选 C.

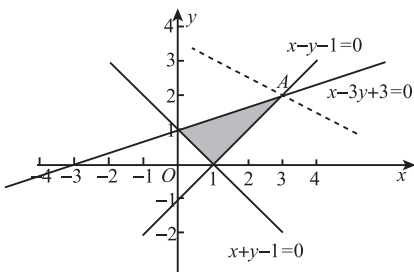
8. D 【命题点】当型循环结构的程序框图

【解析】输入 $x=2, t=2$, 在程序执行过程中, 开始时, $x=2, t=2, M=1, S=3, k=1$, 执行循环体, $k=1 \leq 2$ 成立, 则 $M=2, S=5, k=2$; $k=2 \leq 2$ 成立, 则 $M=2, S=7, k=3$; 此时 $k=3 > 2$, 判断框内条件不成立, 跳出循环, 输出 $S=7$. 故选 D.

9. B 【命题点】线性规划中的最大值问题

【解析】画出可行域如图所示, 将目标函数 $z=x+2y$ 变形为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$, 当直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$ 的纵截距最大时, z 取到最大值, 故平移直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 经过可行域, 当直线 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{z}{2}$

经过点 A 时, z 取到最大值. 解方程组 $\begin{cases} x-y-1=0, \\ x-3y+3=0, \end{cases}$ 得 $A(3, 2)$, 所以 $z_{\max}=3+2 \times 2=7$. 故选 B.



快解 画出可行域, 可知可行域为三角形, 两两联立直线方程求解, 得三个交点坐标 $(1, 0), (3, 2), (0, 1)$, 分别代入 $z=x+2y$, 计算可知 z 的最大值为 7. 故选 B.

10. C 【命题点】直线与抛物线的位置关系, 焦点弦长的计算

【解析】直线的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right)$, 联立抛物线的方程得

$$\begin{cases} y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{3}{4}\right), \\ y^2=3x, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } x^2-\frac{21}{2}x+\frac{9}{16}=0. \text{ 设 } A(x_1, y_1),$$

$$B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1+x_2=\frac{21}{2}, \text{ 所以 } |AB|=x_1+x_2+p=\frac{21}{2}+\frac{3}{2}=12. \text{ 故}$$

选 C.

一题多解

设 $|AF| = 2m, |BF| = 2n, F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$. 由抛物线的定义和直角三角形知识可得, $2m = 2 \times \frac{3}{4} + \sqrt{3}m, 2n = 2 \times \frac{3}{4} - \sqrt{3}n$, 解得 $m = \frac{3}{2}(2 + \sqrt{3}), n = \frac{3}{2}(2 - \sqrt{3}), m + n = 6. |AB| = |AF| + |BF| = 2m + 2n = 12$. 故选 C.

快解

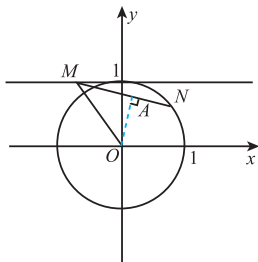
$$|AB| = \frac{2p}{\sin^2 \alpha} = \frac{3}{\sin^2 30^\circ} = 12.$$

11. D 【命题点】由函数的单调性求参数的取值范围

【解析】 $f'(x) = k - \frac{1}{x}$, 由已知得 $f'(x) \geq 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 故 $k \geq \frac{1}{x}$. 因为 $x > 1$, 所以 $0 < \frac{1}{x} < 1$, 故 k 的取值范围是 $[1, +\infty)$. 故选 D.

12. A 【命题点】直线与圆的位置关系, 点到直线的距离公式

【解析】如图(1), 依题意, 直线 MN 与圆 O 有公共点即可, 即圆心 O 到直线 MN 的距离小于等于 1 即可, 过 O 作 $OA \perp MN$, 垂足为 A . 在 $Rt\triangle OMA$ 中, 因为 $\angle OMA = 45^\circ$, 故 $|OA| = |OM| \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} |OM| \leq 1$, 所以 $|OM| \leq \sqrt{2}$, 则 $\sqrt{x_0^2 + 1} \leq \sqrt{2}$, 解得 $-1 \leq x_0 \leq 1$. 故选 A.



图(1)

一题多解

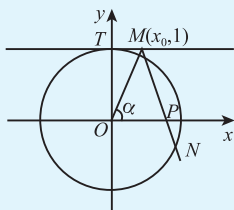
如图(2), 设 MN 与 x 轴交点为 P , $\angle MOP = \alpha$, 则 $\angle MPx = \alpha + 45^\circ$, 所以 $k_{MN} =$

$$\tan(\alpha + 45^\circ) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{1}{x_0}}{1 - \frac{1}{x_0}} =$$

$\frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}$, 利用点斜式建立直线 MN 的方

程可得 $y - 1 = \frac{x_0 + 1}{x_0 - 1}(x - x_0)$, 化简得 $(1 + x_0)x + (1 - x_0)y - (x_0^2 + 1) = 0$,

则点 O 到直线 MN 的距离 $\frac{|x_0^2 + 1|}{\sqrt{2 + 2x_0^2}} \leq 1$, 化简得 $-1 \leq x_0 \leq 1$.



图(2)

快解

当 $x_0 = 0$ 时, $M(0, 1), N(-1, 0)$ 或 $N(1, 0)$. 当 $x_0 \neq 0$ 时, 过点 M 的切线与圆分别相切于 A, B , 则 $\angle OMA = \angle OMB$. 又因为 $\angle OMN = 45^\circ$, 所以 $\angle OMA = \angle OMB \geq 45^\circ$. 因为 $|OA| = 1$, 所以 $|AM| \leq 1$, 故 $0 < x_0 \leq 1$ 或 $-1 \leq x_0 < 0$.

13. $\frac{1}{3}$ 【命题点】古典概型的概率计算

【解析】甲、乙两名运动员各自等可能地从红、白、蓝 3 种颜色的运动服中选择 1 种, 有 9 种不同的结果, 分别为 (红, 红), (红, 白), (红, 蓝), (白, 红), (白, 白), (白, 蓝), (蓝, 红), (蓝, 白), (蓝, 蓝). 他们选择相同颜色运动服有 3 种不同的结果, 即 (红, 红), (白, 白), (蓝, 蓝), 故他们选择相同颜色运动服的概率 $P = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

14. 1 【命题点】两角和与差的正弦公式, 正弦型函数的最大值

【解析】由已知得 $f(x) = \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi - 2 \cos x \sin \varphi = \sin x \cos \varphi - \cos x \sin \varphi = \sin(x - \varphi) \leq 1$, 故函数 $f(x) = \sin(x + \varphi) - 2 \sin \varphi \cos x$ 的最大值为 1.

15. 3 【命题点】函数的奇偶性与图像的对称性

【解析】因为 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = 2$ 对称, 故 $f(3) = f(1) = 3$. 又因为 $y = f(x)$ 是偶函数, 故 $f(-1) = f(1) = 3$.

16. $\frac{1}{2}$ 【命题点】数列递推公式的应用

【解析】由已知得 $a_n = 1 - \frac{1}{a_{n+1}}$, $a_8 = 2$, 所以 $a_7 = 1 - \frac{1}{a_8} = \frac{1}{2}$, $a_6 = 1 - \frac{1}{a_7} = -1$, $a_5 = 1 - \frac{1}{a_6} = 2$, $a_4 = 1 - \frac{1}{a_5} = \frac{1}{2}$, $a_3 = 1 - \frac{1}{a_4} = -1$, $a_2 = 1 - \frac{1}{a_3} = 2$, $a_1 = 1 - \frac{1}{a_2} = \frac{1}{2}$.

一题多解 因为 $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$, 所以 $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{1-a_{n-1}}}} = \frac{1-a_{n-1}}{1-a_{n-1}-1} = \frac{1-a_{n-1}}{-a_{n-1}} = 1 - \frac{1}{a_{n-1}} = 1 - \frac{1}{\frac{1}{1-a_{n-2}}} = 1 - (1 - a_{n-2}) = a_{n-2}$, 所以数列具有周期性, 且周期为 3. 因为 $a_8 = 2$, 所以 $a_8 = a_{3 \times 2 + 2} = a_2 = 2$. 又 $a_2 = \frac{1}{1-a_1}$, 所以 $a_1 = \frac{1}{2}$.

17. 【命题点】余弦定理的应用, 四边形面积的求解

【解】(1) 连接 BD . 由已知及余弦定理得 $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos C = 13 - 12 \cos C$. ① 2 分
 $BD^2 = AB^2 + DA^2 - 2AB \cdot DA \cos A = 5 + 4 \cos C$. ② 4 分
 联立①②解得 $\cos C = \frac{1}{2}$,

故 $C = 60^\circ$, $BD = \sqrt{7}$ 6 分

(2) 四边形 $ABCD$ 的面积 $S = \frac{1}{2} AB \cdot DA \sin A + \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin C = \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \right) \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ 12 分

18. 【命题点】线面平行的判定, 三棱锥的体积及点面距的求解

(1) 【证明】设 BD 与 AC 交于点 O , 连接 EO . 因为四边形 $ABCD$ 为矩形, 所以 O 为 BD 的中点. 又 E 为 PD 的中点, 所以 $EO \parallel PB$. 因为 $EO \subset$ 平面 AEC , $PB \not\subset$ 平面 AEC , 所以 $PB \parallel$

得 $y_1 < 0$, 则 $\begin{cases} 2(-c-x_1) = c, \\ -2y_1 = 2, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}c, \\ y_1 = -1, \end{cases}$ 代入 C 的方程, 得

$$\frac{9c^2}{4a^2} + \frac{1}{b^2} = 1. \quad \textcircled{2} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

将①及 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ 代入②得 $\frac{9(a^2 - 4a)}{4a^2} + \frac{1}{4a} = 1$. 解得 $a = 7$,

$$b^2 = 4a = 28, \text{ 故 } a = 7, b = 2\sqrt{7}.$$

$\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

21. 【命题点】导数的几何意义, 由切线求参数, 利用导数研究函数的单调性

(1) 【解】由题意, 得 $f'(x) = 3x^2 - 6x + a$, $f'(0) = a$. 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 2)$ 处的切线方程为 $y = ax + 2$. 由已知得, $-\frac{2}{a} = -2$, 所以

$$a = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 【证明】由(1)得, $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 2$. 设 $g(x) = f(x) - kx + 2 = x^3 - 3x^2 + (1-k)x + 4$. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

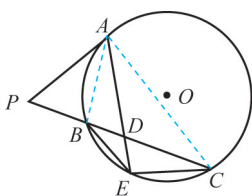
由已知得 $1-k > 0$. 当 $x \leq 0$ 时, $g'(x) = 3x^2 - 6x + 1 - k > 0$, $g(x)$ 单调递增, $g(-1) = k - 1 < 0$, $g(0) = 4 > 0$, 所以 $g(x) = 0$ 在 $(-\infty, 0]$ 上有唯一实根. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

当 $x > 0$ 时, 令 $h(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, 则 $g(x) = h(x) + (1-k)x > h(x)$. $h'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) > h(x) \geq h(2) = 0$. 所以 $g(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有实根. 综上, $g(x) = 0$ 在 \mathbf{R} 上有唯一实根, 即曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = kx - 2$ 只有一个交点.

$\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 【命题点】圆的几何性质

【证明】(1) 连接 AB, AC . 由已知, 得 $PA = PD$, 故 $\angle PAD = \angle PDA$.



因为 $\angle PDA = \angle DAC + \angle DCA$, $\angle PAD = \angle BAD + \angle BAP$, $\angle DCA = \angle PAB$,

所以 $\angle DAC = \angle BAD$, 故 $\widehat{BE} = \widehat{EC}$, 即 $BE = EC$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由切割线定理得 $PA^2 = PB \cdot PC$.

因为 $PA = PD = DC$, 所以 $DC = 2PB$, $BD = PB$.

由相交弦定理得 $AD \cdot DE = BD \cdot DC$,

所以 $AD \cdot DE = 2PB^2$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

23. 【命题点】极坐标方程与直角坐标方程、参数方程与普通方程之间互化, 参数方程的应用

【解】(1) 将 $\rho = 2\cos \theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 两边同乘 ρ , 得 $\rho^2 = 2\rho\cos \theta$.

结合 $x^2 + y^2 = \rho^2$ 和 $x = \rho\cos \theta$ 得 C 的普通方程为 $(x-1)^2 + y^2 =$

1 ($0 \leq y \leq 1$). 由此可得 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\cos t, \\ y=\sin t \end{cases}$ (t 为参数, $0 \leq t \leq \pi$). 5 分

(2) 设 $D(1+\cos t, \sin t)$. 由 (1) 知, 曲线 C 是以 $C'(1, 0)$ 为圆心, 1 为半径的上半圆. 因为曲线 C 在点 D 处的切线与 l 垂直, 所以直线 $C'D$ 与 l 的斜率相同. $\tan t = \sqrt{3}, t = \frac{\pi}{3}$. 故 D 的直

角坐标为 $(1+\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3})$, 即 $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 10 分

24. 【命题点】绝对值三角不等式的应用, 绝对值不等式的解法

(1) 【证明】由 $a > 0$, 得 $f(x) = \left| x + \frac{1}{a} \right| + |x - a| \geq$

$\left| x + \frac{1}{a} - (x - a) \right| = \frac{1}{a} + a \geq 2$, 所以 $f(x) \geq 2$ 5 分

(2) 【解】 $f(3) = \left| 3 + \frac{1}{a} \right| + |3 - a|$.

当 $a > 3$ 时, $f(3) = a + \frac{1}{a}$,

由 $f(3) < 5$ 得 $3 < a < \frac{5 + \sqrt{21}}{2}$.

当 $0 < a \leq 3$ 时, $f(3) = 6 - a + \frac{1}{a}$,

由 $f(3) < 5$ 得 $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < a \leq 3$.

综上, a 的取值范围是 $(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \frac{5 + \sqrt{21}}{2})$ 10 分