

1. B 【命题点】集合的交集运算

【解析】因为 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{x | 2 \leq x \leq 5\}$, 所以 $A \cap B = \{3, 5\}$. 故选 B.

2. A 【命题点】复数的运算

【解析】因为 $(1+2i)(a+i) = (a-2) + (2a+1)i$ 的实部与虚部相等, 所以 $a-2 = 2a+1$, 解得 $a = -3$. 故选 A.

3. C 【命题点】古典概型

【解析】列出基本事件如下: (红黄, 白紫), (红白, 黄紫), (红紫, 黄白), (白紫, 红黄), (黄紫, 红白), (黄白, 红紫), 共有 6 种, 其中红色和紫色的花不在同一花坛的有 4 种, 所以所求的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. 故选 C.

4. D 【命题点】利用正弦定理、余弦定理解三角形

【解析】由余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$, 得 $5 = b^2 + 4 - \frac{8}{3}b$, 即 $3b^2 - 8b - 3 = 0$, 解得 $b = 3$ 或 $b = -\frac{1}{3}$ (舍去). 故选 D.

一题多解

$\because \cos A = \frac{2}{3}, 0 < A < \pi, \therefore \sin A = \frac{\sqrt{5}}{3}$. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\frac{\sqrt{5}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{\sin C}, \therefore \sin C = \frac{2}{3}$. $\because a > c, \therefore A > C$, $\therefore \cos C = \frac{\sqrt{5}}{3}$. $\therefore \sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \sin C \cdot \cos A = 1, \therefore B = \frac{\pi}{2}, \therefore b = \sqrt{a^2 + c^2} = 3$. 故选 D.

5. B 【命题点】椭圆的标准方程及性质、点到直线的距离公式

【解析】不妨设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 由于直线 l 经过椭圆的一个顶点和一个焦点, 不妨设直线 l 的方程为 $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$. 由椭圆中心到直线 l 的距离为其短轴长的 $\frac{1}{4}$, 可得 $\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}}} = \frac{b}{2}$, 即 $4 = b^2 \left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2} \right), \therefore \frac{a^2}{c^2} = 4, \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$. 故选 B.

快解

由椭圆的对称性, 不妨令直线 l 经过椭圆的上顶点 A 和右焦点 F , 则 $|OA| = b, |OF| = c, |AF| = a, \therefore$ 点 O 到直线 l 的距离为 $\frac{bc}{a}$. 故 $\frac{bc}{a} = \frac{1}{4} \times 2b, \therefore e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$. 故选 B.

方法速记

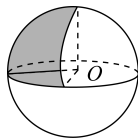
直线 l 过椭圆的一个顶点和一个焦点, 则椭圆中心到 l 的距离 h 可通过等面积法得到, 即 $h = \frac{bc}{a}$.

6. D 【命题点】三角函数图像的性质、平移变换

【解析】函数 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的周期 $T = \pi$, 所以将函数 $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{1}{4}$ 个周期后, 所得图像对应的函数为 $y = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. 故选 D.

7. A 【命题点】几何体的三视图及球的体积、表面积公式

【解析】由该几何体的三视图可知, 这个几何体是把一个球挖掉 $\frac{1}{8}$ 得到的 (直观图如图所示).



设该球的半径为 R , 则 $V = \frac{7}{8} \times \frac{4}{3} \pi R^3 =$

$\frac{28\pi}{3}$, 解得 $R = 2$. 所以它的表面积为 $4\pi \times 2^2 - \frac{1}{8} \times 4\pi \times 2^2 + 3 \times$

$\frac{1}{4} \pi \times 2^2 = 17\pi$. 故选 A.

8. B 【命题点】指、对、幂函数的比较大小

【解析】对于 A 选项, 若 $1 > a > b > 0$, 则 $\log_a c > \log_b c$, 故 A 错; 对于 B 选项, 由对数函数单调性可知当 $0 < c < 1$ 时, $y = \log_c x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $a > b > 0$, 所以 $\log_c a < \log_c b$, 故 B 正确; 对于 C 选项, 由幂函数图像可知 $a^c > b^c$, 故 C 错; 对于 D 选项, 由指数函数单调性可知当 $0 < c < 1$ 时, $y = c^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $a > b > 0$, 所以 $c^a < c^b$, 故 D 错. 故选 B.

快解

取 $a = 4, b = 2, c = \frac{1}{2}$, 则 $\log_4 \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} > -1 = \log_2 \frac{1}{2}$, 排除 A; $4^{\frac{1}{2}} = 2 > 2^{\frac{1}{2}}$, 排除 C; $\left(\frac{1}{2}\right)^4 < \left(\frac{1}{2}\right)^2$, 排除 D. 故选 B.

9. D 【命题点】函数图像的判断

【解析】 $\because f(x) = 2x^2 - e^{|x|}$ 为偶函数, \therefore 图像关于 y 轴对称. $f(2) = 8 - e^2 \approx 0.6$, 排除 A, B 项.

又 $\because f(0) = -1, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \sqrt{e}, f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) = \frac{1}{2} - \sqrt{e} + 1 =$

$\frac{3}{2} - \sqrt{e} = \sqrt{\frac{9}{4}} - \sqrt{e} < 0, \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) < f(0)$, 排除 C 项. 故选 D.

10. C 【命题点】程序框图

【解析】执行程序: 输入 $x = 0, y = 1, n = 1$, 第一次循环, 得 $x = 0,$

$y = 1$, 不满足 $x^2 + y^2 \geq 36$; 第二次循环, 得 $n = 2, x = \frac{1}{2}, y = 2$, 不满足

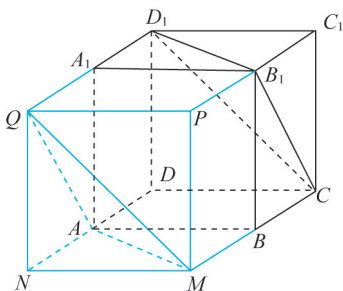
$x^2 + y^2 \geq 36$; 第三次循环, 得 $n = 3, x = \frac{3}{2}, y = 6$, 满足 $x^2 +$

$y^2 \geq 36$, 循环结束, 输出 $x = \frac{3}{2}, y = 6. \therefore \frac{3}{2} \times 4 = 6,$

$\therefore y = 4x$. 故选 C.

11. A 【命题点】异面直线所成角

【解析】在原正方体的前方补一个正方体(如图),故平面 α 为平面 AMQ , $\therefore \alpha \cap$ 平面 $ABCD = m = AM$, $\therefore AM \parallel B_1D_1$, 即 $m \parallel B_1D_1$; 同理 $n \parallel D_1C$, $\therefore m, n$ 所成的角即为 B_1D_1 与 D_1C 所成的角, 即 $\angle CD_1B_1$. $\because B_1C = B_1D_1 = CD_1$, $\therefore \angle CD_1B_1 = 60^\circ$, $\therefore \sin \angle CD_1B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.



12. C 【命题点】已知函数单调性求参数的取值范围

【解析】由题意可得 $f'(x) = -\frac{4}{3}\cos^2 x + a\cos x + \frac{5}{3} \geq 0$ 恒成立, 令 $t = \cos x \in [-1, 1]$, 即 $-\frac{4}{3}t^2 + at + \frac{5}{3} \geq 0$ 在 $t \in [-1, 1]$ 上恒成立, 等价于 $\frac{4}{3}t^2 - at - \frac{5}{3} \leq 0$ 在 $t \in [-1, 1]$ 上恒成立. 令 $g(t) = \frac{4}{3}t^2 - at - \frac{5}{3}$, 则满足 $g(-1) = \frac{4}{3} + a - \frac{5}{3} \leq 0$ 且 $g(1) = \frac{4}{3} - a - \frac{5}{3} \leq 0$, 解得 $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{1}{3}$. 故选 C.

13. $-\frac{2}{3}$ 【命题点】向量垂直的充要条件及数量积的坐标运算

【解析】 $\because a = (x, x+1), b = (1, 2)$, 且 $a \perp b$, $\therefore a \cdot b = x + 2(x+1) = 0$, 解得 $x = -\frac{2}{3}$.

14. $-\frac{4}{3}$ 【命题点】三角恒等变换

【解析】解法一: 由 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$, 知 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{3}{5}$. 因为 θ 为第四象限角, 所以 $-\theta$ 为第一象限角, $\frac{\pi}{4} - \theta$ 为第一象限角或第二象限角. 又因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{3}{5}$, 所以 $\frac{\pi}{4} - \theta$ 为第一象限角. 所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{4}{5}$, $\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \frac{4}{3}$, $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4}{3}$.

解法二: 由 $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \theta + \cos \theta) = \frac{3}{5}$, 得 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{3\sqrt{2}}{5}$, 将此式两边平方并化简得 $2\sin \theta \cos \theta = \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{25}$. 因为 θ 为第四象限角, 所以 $\cos \theta > 0, \sin \theta < 0$, 所以 $\sin \theta - \cos \theta = -\sqrt{(\cos \theta - \sin \theta)^2} = -\sqrt{1 - 2\sin \theta \cos \theta} = -\frac{4\sqrt{2}}{5}$.

$$\text{由} \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{3\sqrt{2}}{5}, \\ \sin \theta - \cos \theta = -\frac{4\sqrt{2}}{5}, \end{cases}$$

$$\text{得} \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{\tan \theta - 1}{\tan \theta + 1} = \tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{4}{3}.$$

$$\text{解法三: 同解法二, 得} \begin{cases} \sin \theta + \cos \theta = \frac{3\sqrt{2}}{5}, \\ \sin \theta - \cos \theta = -\frac{4\sqrt{2}}{5}, \end{cases} \text{解得} \sin \theta =$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{10}, \cos \theta = \frac{7\sqrt{2}}{10}, \text{所以} \tan \theta = -\frac{1}{7}, \tan \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$\frac{\tan \theta - 1}{1 + \tan \theta} = -\frac{4}{3}.$$

15. 4π 【命题点】直线与圆的位置关系, 圆的面积

【解析】圆 C 的方程可化为 $x^2 + (y - a)^2 = a^2 + 2$, \therefore 圆心

$C(0, a)$ 到直线 $y = x + 2a$ 的距离 $d = \frac{|a|}{\sqrt{2}}$. $\therefore |AB| = 2\sqrt{3}$,

$\therefore a^2 + 2 = \left(\frac{|a|}{\sqrt{2}} \right)^2 + (\sqrt{3})^2$, 解得 $a^2 = 2$, \therefore 圆 C 的半径为

$\sqrt{a^2 + 2} = 2$, \therefore 圆 C 的面积 $S = \pi \times 2^2 = 4\pi$.

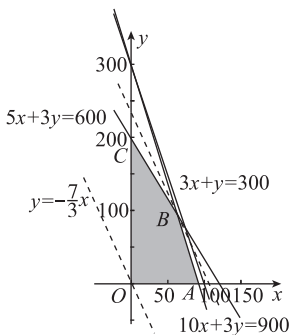
方法速记 直线被圆截得的弦长问题有两种处理方法, 一是利用弦长公式, 即直线 $y = kx + b$ 与圆交于 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 两点, 则 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$; 二是利用垂径定理, 即圆的半径为 r , 弦长为 L , 弦心距为 d 时, $\left(\frac{L}{2} \right)^2 + d^2 = r^2$.

16. 216 000 【命题点】线性规划在实际生活中的应用

【解析】设生产产品 A 的数量为 x 件, 产品 B 的数量为 y 件, 利

$$\text{润为 } z \text{ 元, 则 } z = 2100x + 900y, \text{ 且 } x, y \text{ 满足} \begin{cases} 1.5x + 0.5y \leq 150, \\ x + 0.3y \leq 90, \\ 5x + 3y \leq 600, \\ x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

作出上述不等式组表示的平面区域(区域内应为整数点).



将 $z = 2100x + 900y$ 变形, 得 $y = -\frac{7}{3}x + \frac{z}{900}$, 平移直线 $y =$

$-\frac{7}{3}x$, 当直线 $y = -\frac{7}{3}x + \frac{z}{900}$ 经过点 B 时, z 取得最大值.

$$\text{由} \begin{cases} x+0.3y=90, \\ 5x+3y=600, \end{cases} \text{解得 } B(60, 100),$$

$$\therefore z_{\max} = 2100 \times 60 + 900 \times 100 = 216\,000.$$

\therefore 利润之和的最大值为 216 000 元.

17. 【命题点】等差数列、等比数列的通项公式、前 n 项和公式

【解】(1) 由已知, $a_1 b_2 + b_2 = b_1, b_1 = 1, b_2 = \frac{1}{3}$, 得 $a_1 = 2$.

..... 4 分

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公差为 3 的等差数列, 通项公式

为 $a_n = 3n - 1$ 6 分

(2) 由 (1) 和 $a_n b_{n+1} + b_{n+1} = nb_n$, 得 $b_{n+1} = \frac{b_n}{3}$, 8 分

因此 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列. 10 分

$$\text{记 } \{b_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和为 } S_n, \text{ 则 } S_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n-1}}.$$

..... 12 分

18. 【命题点】线面垂直的判定、性质, 四面体的体积

(1) 【证明】因为 P 在平面 ABC 内的正投影为 D ,

所以 $AB \perp PD$ 1 分

因为 D 在平面 PAB 内的正投影为 E , 所以 $AB \perp DE$ 2 分

又 $PD \cap DE = D$, 所以 $AB \perp$ 平面 PED , 故 $AB \perp PG$ 3 分

又由已知可得 $PA = PB$, 所以 G 是 AB 的中点. 4 分

(2) 【解】如图, 在平面 PAB 内, 过点 E 作 PB 的平行线交 PA 于点 F , F 即为点 E 在平面 PAC 内的正投影. 5 分

理由如下: 由已知可得 $PB \perp PA, PB \perp PC$, 又 $EF \parallel PB$, 所以 $EF \perp PA, EF \perp PC, PA \cap PC = P$, 因此 $EF \perp$ 平面 PAC , 即点 F 为点 E 在平面 PAC 内的正投影. 6 分

连接 CG, DF , 因为 P 在平面 ABC 内的正投影为点 D , 所以 D 是正三角形 ABC 的中心. 7 分

由 (1) 知, G 是 AB 的中点, 所以

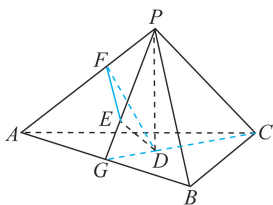
$$D \text{ 在 } CG \text{ 上, 且 } CD = \frac{2}{3}CG.$$

..... 8 分

由题设可得 $PC \perp$ 平面 $PAB, DE \perp$ 平面 PAB ,

所以 $DE \parallel PC$, 因此 $PE = \frac{2}{3}PG, DE = \frac{1}{3}PC$ 9 分

由已知, 正三棱锥的侧面是直角三角形且 $PA = 6$, 可得 $DE = 2, PE = 2\sqrt{2}$ 10 分



因为 $EF \parallel PB$, PG 为等腰直角 $\triangle PAB$ 的角平分线, 所以 $\angle FEP = \angle FPE = 45^\circ$, 所以 $\triangle EFP$ 为等腰直角三角形, 可得 $EF = PF = 2$ 11 分

所以四面体 $PDEF$ 的体积为 $V_{D-EFP} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$.
..... 12 分

19. 【命题点】函数在实际生活中的应用, 频数分布直方图

【解】(1) 当 $x \leq 19$ 时, $y = 3\,800$;

当 $x > 19$ 时, $y = 3\,800 + 500(x - 19) = 500x - 5\,700$.

所以 y 与 x 的函数解析式为

$$y = \begin{cases} 3\,800, & x \leq 19, \\ 500x - 5\,700, & x > 19 \end{cases} \quad (x \in \mathbf{N}). \quad \text{..... 3 分}$$

(2) 由柱状图知, 需更换的零件数不大于 18 的频率为 0.46, 不大于 19 的频率为 0.7, 故 n 的最小值为 19. 6 分

(3) 若每台机器在购机的同时都购买 19 个易损零件, 则这 100 台机器中有 70 台在购买易损零件上的费用为 3 800 元, 20 台的费用为 4 300 元, 10 台的费用为 4 800 元, 因此这 100 台机器在购买易损零件上所需费用的平均数为

$$\frac{1}{100} \times (3\,800 \times 70 + 4\,300 \times 20 + 4\,800 \times 10) = 4\,000. \quad \text{..... 9 分}$$

若每台机器在购机的同时都购买 20 个易损零件, 则这 100 台机器中有 90 台在购买易损零件上的费用为 4 000 元, 10 台的费用为 4 500 元, 因此这 100 台机器在购买易损零件上所需

$$\text{费用的平均数为 } \frac{1}{100} \times (4\,000 \times 90 + 4\,500 \times 10) = 4\,050.$$

比较两个平均数可知, 购买 1 台机器的同时应购买 19 个易损零件. 12 分

20. 【命题点】直线与抛物线的位置关系

【解】(1) 由已知得 $M(0, t)$, $P\left(\frac{t^2}{2p}, t\right)$.

又点 M 关于点 P 的对称点为 N , 故 $N\left(\frac{t^2}{p}, t\right)$, 2 分

ON 的方程为 $y = \frac{p}{t}x$, 代入 $y^2 = 2px$, 整理得 $px^2 - 2t^2x = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2t^2}{p}$, 因此 $H\left(\frac{2t^2}{p}, 2t\right)$ 4 分

所以 N 为 OH 的中点, 即 $\frac{|OH|}{|ON|} = 2$ 6 分

(2) 除 H 以外, 直线 MH 与 C 没有其他公共点. 理由如下:

直线 MH 的方程为 $y - t = \frac{p}{2t}x$, 即 $x = \frac{2t}{p}(y - t)$, 8 分

代入 $y^2 = 2px$, 得 $y^2 - 4ty + 4t^2 = 0$, 解得 $y_1 = y_2 = 2t$, 10 分
即直线 MH 与 C 只有一个公共点.

所以除 H 以外,直线 MH 与 C 没有其他公共点. 12 分

方法速记 判定直线与圆锥曲线的位置关系的一般方法是:直线方程与圆锥曲线方程联立得 $Ax^2+Bx+C=0$ 的形式. 若 $A \neq 0$, 当 $\Delta > 0$ 时,直线与曲线有两个不同的公共点,当 $\Delta = 0$ 时,直线与曲线相切,当 $\Delta < 0$ 时,无公共点;若 $A = 0$, $Bx+C=0$ 有解,则直线与曲线相交于一个点, $Bx+C=0$ 无解,则直线与曲线无公共点.

21. 【命题点】利用导数判断函数单调性、已知零点个数求参数的取值范围

【解】(1) $f'(x) = (x-1)e^x + 2a(x-1) = (x-1)(e^x + 2a)$ 1 分

(i) 设 $a \geq 0$, 则当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 3 分

(ii) 设 $a < 0$, 由 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$ 或 $x = \ln(-2a)$.

① 若 $a = -\frac{e}{2}$, 则 $f'(x) = (x-1)(e^x - e) \geq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

② 若 $a > -\frac{e}{2}$, 则 $\ln(-2a) < 1$, 故当 $x \in (-\infty, \ln(-2a)) \cup (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\ln(-2a), 1)$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-2a))$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln(-2a), 1)$ 上单调递减.

③ 若 $a < -\frac{e}{2}$, 则 $\ln(-2a) > 1$, 故当 $x \in (-\infty, 1) \cup (\ln(-2a), +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (1, \ln(-2a))$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(\ln(-2a), +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, \ln(-2a))$ 上单调递减. 6 分

(2) ① 设 $a > 0$, 则由 (1) 知, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 又 $f(1) = -e$, $f(2) = a > 0$,

取 b 满足 $b < 0$ 且 $b < \ln \frac{a}{2}$, 则 $f(b) > \frac{a}{2}(b-2) + a(b-1)^2 =$

突破点 $a\left(b^2 - \frac{3}{2}b\right) > 0$, 8 分

所以 $f(x)$ 有两个零点. 9 分

② 设 $a = 0$, 则 $f(x) = (x-2)e^x$, 所以 $f(x)$ 只有一个零点.

③ 设 $a < 0$, 若 $a \geq -\frac{e}{2}$, 则由 (1) 知, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

又当 $x \leq 1$ 时, $f(x) < 0$, 故 $f(x)$ 不存在两个零点;

若 $a < -\frac{e}{2}$, 则由 (1) 知, $f(x)$ 在 $(1, \ln(-2a))$ 上单调递减, 在 $(\ln(-2a), +\infty)$ 上单调递增.

又当 $x \leq 1$ 时 $f(x) < 0$, 故 $f(x)$ 不存在两个零点.

综上, a 的取值范围为 $(0, +\infty)$ 12 分

22. 【命题点】直线与圆的位置关系

【证明】(1) 设 E 是 AB 的中点, 连接 OE .

因为 $OA = OB$, $\angle AOB = 120^\circ$, 所以 $OE \perp AB$, $\angle AOE = 60^\circ$.

..... 3 分

在 $Rt\triangle AOE$ 中, $OE = \frac{1}{2}AO$, 即 O 到

直线 AB 的距离等于 $\odot O$ 的半径,

..... 4 分

所以直线 AB 与 $\odot O$ 相切.

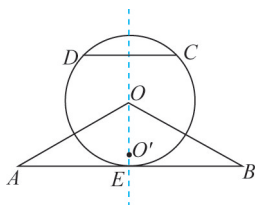
..... 5 分

(2) 因为 $OA = 2OD$, 所以 O 不是 A, B, C, D 四点所在圆的圆心. 设 O' 是 A, B, C, D 四点所在圆的圆心, 作直线 OO' .

由 (1) 得 O 在线段 AB 的垂直平分线上, 7 分

又 O' 在线段 AB 的垂直平分线上, 所以 $OO' \perp AB$ 8 分

同理可证, $OO' \perp CD$. 所以 $AB \parallel CD$ 10 分



23. 【命题点】参数方程与极坐标方程的转化

【解】(1) 消去参数 t 得到 C_1 的普通方程 $x^2 + (y-1)^2 = a^2$.

..... 2 分

故 C_1 是以 $(0, 1)$ 为圆心, a 为半径的圆. 3 分

将 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ 代入 C_1 的普通方程中,

得到 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \sin \theta + 1 - a^2 = 0$ 5 分

(2) 曲线 C_1, C_2 的公共点的极坐标满足方程组

$$\begin{cases} \rho^2 - 2\rho \sin \theta + 1 - a^2 = 0, \\ \rho = 4 \cos \theta. \end{cases} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

若 $\rho \neq 0$, 由方程组得 $16 \cos^2 \theta - 8 \sin \theta \cos \theta + 1 - a^2 = 0$,

..... 8 分

由已知 $\tan \theta = 2$, 可得 $16 \cos^2 \theta - 8 \sin \theta \cos \theta = 0$, 从而 $1 - a^2 = 0$,

解得 $a = -1$ (舍去) 或 $a = 1$.

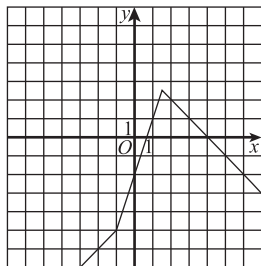
当 $a = 1$ 时, 极点也为 C_1, C_2 的公共点, 在 C_3 上. 所以 $a = 1$.

..... 10 分

24. 【命题点】分段函数的图像、绝对值不等式的求解

$$\text{【解】(1) } f(x) = \begin{cases} x-4, & x \leq -1, \\ 3x-2, & -1 < x \leq \frac{3}{2}, \\ -x+4, & x > \frac{3}{2}, \end{cases} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$y=f(x)$ 的图像如图所示.



.....5 分

(2) 由 $f(x)$ 的表达式及图像知, 当 $f(x)=1$ 时, 可得 $x=1$ 或 $x=3$;

..... 6 分

当 $f(x)=-1$ 时, 可得 $x=\frac{1}{3}$ 或 $x=5$ 7 分

故 $f(x)>1$ 的解集为 $\{x \mid 1<x<3\}$;

$f(x)<-1$ 的解集为 $\left\{x \mid x<\frac{1}{3} \text{ 或 } x>5\right\}$ 9 分

所以 $|f(x)|>1$ 的解集为 $\left\{x \mid x<\frac{1}{3} \text{ 或 } 1<x<3 \text{ 或 } x>5\right\}$.

..... 10 分