

1. A 【命题点】集合的并集运算

【解析】已知集合 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, 则由集合的并集运算得 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$. 故选 A.

2. B 【命题点】复数的加法与乘法运算

【解析】由题意, 得 $(1+i)(2+i) = 2+3i+i^2 = 1+3i$. 故选 B.

3. C 【命题点】正弦型函数的性质

【解析】根据正弦型函数的周期公式可得 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$. 故选 C.

4. A 【命题点】平面向量数量积的应用

【解析】将 $|a+b| = |a-b|$ 两边平方, 得 $a^2 + b^2 + 2a \cdot b = a^2 + b^2 - 2a \cdot b$, $\therefore a \cdot b = 0$, 即 $a \perp b$. 故选 A.

快解 设 $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$, 以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $OACB$, 则 $\vec{OC} = a+b$, $\vec{BA} = a-b$. 由 $|a+b| = |a-b|$, 得 $|\vec{OC}| = |\vec{BA}|$, \therefore 四边形 $OACB$ 为矩形, $\therefore a \perp b$.

5. C 【命题点】双曲线离心率的取值范围

【解析】由双曲线的标准方程 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$, 可知离心率 $e = \frac{c}{a} =$

$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a} = \sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$. $\because a > 1, \therefore \frac{1}{a^2} \in (0, 1)$, 故 $e \in (1, \sqrt{2})$. 故选 C.

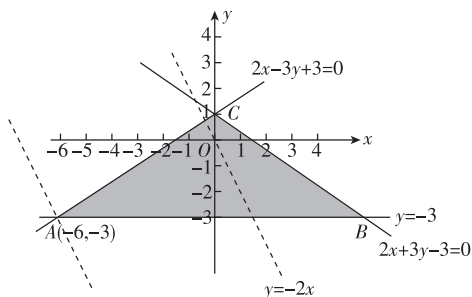
6. B 【命题点】由几何体的三视图求体积

【解析】由题中三视图可得, 该几何体的下方是底面半径为 3, 高为 4 的圆柱, 上方是底面半径为 3, 高为 6 的圆柱的一半. 因此下方圆柱的体积 $V_1 = \pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi$, 上方半个圆柱的体积 $V_2 = \frac{1}{2} \pi \times 3^2 \times 6 = 27\pi$, $\therefore V = 36\pi + 27\pi = 63\pi$. 故选 B.

7. A 【命题点】简单的线性规划问题

【解析】由约束条件画出可行域, 如图中阴影部分所示. 由 $z = 2x + y$ 得直线 $l: y = -2x + z$, 令 $z = 0$, 得直线 $l_0: y = -2x$, 将直线 l_0 平移, 当它经过点 A 时, z 取得最小值. 由 $\begin{cases} 2x-3y+3=0, \\ y=-3, \end{cases}$ 得

$\begin{cases} x=-6, \\ y=-3, \end{cases}$ 即点 $A(-6, -3)$. 则 $z_{\min} = 2 \times (-6) + (-3) = -15$. 故选 A.



一题多解 直线 $2x+3y-3=0$ 与直线 $2x-3y+3=0$ 交于点 $C(0,1)$, 此时 $z=1$; 直线 $y=-3$ 与直线 $2x-3y+3=0$ 交于点 $A(-6,-3)$, 此时 $z=-15$; 直线 $y=-3$ 与直线 $2x+3y-3=0$ 交于点 $B(6,-3)$, 此时 $z=9$. 故 $z_{\min}=-15$. 故选 A.

8. D 【命题点】复合函数的单调区间

【解析】要使函数有意义, 则 $x^2-2x-8>0$, 解得 $x<-2$, 或 $x>4$. 又二次函数 $u=x^2-2x-8$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 由复合函数的单调性规则(提示: 同增异减, 定义域优先)可得

$$\begin{cases} x<-2 \text{ 或 } x>4, \\ x\geq 1, \end{cases} \text{ 得 } x>$$

4, 即函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(4, +\infty)$. 故选 D.

9. D 【命题点】逻辑推理

【解析】因为四人中有 2 人优秀, 2 人良好, 甲知道乙、丙的成绩, 而不知自己的成绩, 所以乙、丙为一优一良, 所以甲、丁也为一优一良. 又乙知道丙的成绩、丁知道甲的成绩, 所以乙、丁可以知道自己的成绩. 故选 D.

10. B 【命题点】当型循环结构的程序框图

【解析】由程序框图可得, 第一次循环: $S=-1, a=1, K=2$; 第二次循环: $S=1, a=-1, K=3$; 第三次循环: $S=-2, a=1, K=4$; 第四次循环: $S=2, a=-1, K=5$; 第五次循环: $S=-3, a=1, K=6$; 第六次循环: $S=3, a=-1, K=7$. 此时 $K>6$, 不满足判断条件, 跳出循环体, 输出 $S=3$. 故选 B.

11. D 【命题点】古典概型的概率计算

【解析】先后有放回地抽取 2 张卡片的情况有 $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5)$, 共 25 种. 其中满足条件的有 $(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4)$, 共 10 种情况. 因此所求的概率 $P=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$. 故选 D.

12. C 【命题点】直线与抛物线的位置关系, 点到直线的距离公式

【解析】由题意可知, 抛物线的焦点坐标为 $F(1,0)$, 准线为 $l: x=-1$. 过焦点的直线方程为 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}y+1$. 将其代入抛物线方程 $y^2=4x$, 得 $3y^2-4\sqrt{3}y-12=0$, 所以 $y=2\sqrt{3}$ 或 $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 又点 M 在 x 轴上方, 所以 $y_M=2\sqrt{3}, x_M=\frac{\sqrt{3}}{3}y_M+1=3$, 即点 M 的坐标为 $(3, 2\sqrt{3})$. 因此点 N 的坐标为 $(-1, 2\sqrt{3})$, 则直线 NF 的方程为 $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$, 所以点 M 到直线 NF 的距离 $d=\frac{|3\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}|}{2}=2\sqrt{3}$. 故选 C.

一题多解

因为直线 MF 的斜率为 $\sqrt{3}$, 所以直线 MF 的倾斜角为 60° , 则 $\angle FMN = 60^\circ$. 由抛物线的定义得 $|MF| = |MN|$, 所以 $\triangle MNF$ 为等边三角形.

过 F 作 $FH \perp MN$, 垂足为 H .

易知 $F(1,0)$, l 的方程为 $x = -1$,

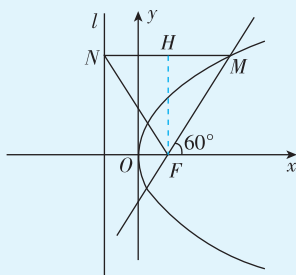
所以 $|NH| = 2$, 所以 $|MF| =$

$|MN| = 2|NH| = 4$, 所以 M 到

直线 NF 的距离 $d = |FH| =$

$$|MF| \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

故选 C.



13. $\sqrt{5}$ 【命题点】辅助角公式的应用, 三角函数的最大值

【解析】 $f(x) = 2\cos x + \sin x = \sqrt{5} \sin(x+\varphi)$ (其中 $\tan \varphi = 2$),

所以当 $\sin(x+\varphi) = 1$ 时, $f(x)$ 有最大值 $\sqrt{5}$.

14. 12 【命题点】函数的奇偶性

【解析】 $\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(2) = -f(-2) = -[2 \times (-2)^3 + (-2)^2] = 12$.

15. 14π 【命题点】长方体的外接球

【解析】设长方体的外接球半径为 R , 则 $2R = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{14}$ (提示: 长方体的体对角线长等于外接球的直径), 所以球 O 的表面积 $S = 4\pi R^2 = \pi(2R)^2 = 14\pi$.

16. $\frac{\pi}{3}$ 【命题点】两角和的正弦公式, 正弦定理

【解析】由 $2b\cos B = a\cos C + c\cos A$ 及正弦定理得 $2\sin B\cos B = \sin A\cos C + \sin C\cos A$, 则 $2\sin B\cos B = \sin(A+C)$, 即 $2\sin B \cdot \cos B = \sin B$. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin B > 0$, $\therefore \cos B = \frac{1}{2}$. 又 $B \in (0, \pi)$, $\therefore B = \frac{\pi}{3}$.

快解

$\because a\cos C + c\cos A = b$, $\therefore 2b\cos B = b$, $\therefore \cos B = \frac{1}{2}$, 又 $B \in (0, \pi)$, $\therefore B = \frac{\pi}{3}$.

17. 【命题点】等差数列和等比数列的综合运算

【解】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则 $a_n = -1 + (n-1)d$, $b_n = q^{n-1}$. 由 $a_2 + b_2 = 2$ 得 $d + q = 3$. ① 2分

(1) 由 $a_3 + b_3 = 5$ 得 $2d + q^2 = 6$. ② 3分

联立①和②解得 $\begin{cases} d=3, \\ q=0 \end{cases}$ (舍去) 或 $\begin{cases} d=1, \\ q=2. \end{cases}$ 5分

因此 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^{n-1}$ 6分

(2) 由 $b_1 = 1$, $T_3 = 21$ 得 $q^2 + q - 20 = 0$.

解得 $q = -5$ 或 $q = 4$ 8分

当 $q = -5$ 时, 由①得 $d = 8$, 则 $S_3 = 21$; 10 分

当 $q = 4$ 时, 由①得 $d = -1$, 则 $S_3 = -6$ 12 分

18. 【命题点】线面平行的判定, 面面垂直的性质, 四棱锥体积的计算

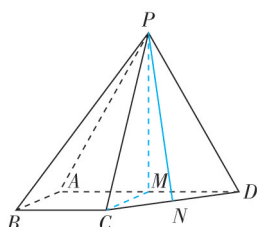
(1) 【证明】在平面 $ABCD$ 内, 因为 $\angle BAD = \angle ABC = 90^\circ$, 所以 $BC \parallel AD$. 又 $BC \not\subset$ 平面 PAD , $AD \subset$ 平面 PAD , 故 $BC \parallel$ 平面 PAD 5 分

(2) 【解】取 AD 的中点 M , 连接 PM ,

CM . 由 $AB = BC = \frac{1}{2}AD$ 及 $BC \parallel AD$,

$\angle ABC = 90^\circ$ 得四边形 $ABCM$ 为正方形,

则 $CM \perp AD$ 7 分



因为侧面 PAD 为等边三角形且垂直于底面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, 所以 $PM \perp AD$, $PM \perp$ 底面 $ABCD$. 因为 $CM \subset$ 底面 $ABCD$, 所以 $PM \perp CM$.
..... 9 分

设 $BC = x$, 则 $CM = x$, $CD = \sqrt{2}x$, $PM = \sqrt{3}x$, $PC = PD = 2x$. 取 CD 的中点 N , 连接 PN , 则 $PN \perp CD$, 所以 $PN = \frac{\sqrt{14}}{2}x$ 10 分

因为 $\triangle PCD$ 的面积为 $2\sqrt{7}$, 所以 $\frac{1}{2} \times \sqrt{2}x \times \frac{\sqrt{14}}{2}x = 2\sqrt{7}$,

解得 $x = -2$ (舍去) 或 $x = 2$.

于是 $AB = BC = 2$, $AD = 4$, $PM = 2\sqrt{3}$.

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{2 \times (2+4)}{2} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.
..... 12 分

19. 【命题点】中位数的应用, 由频率估计概率, 独立性检验

【解】(1) 旧养殖法的箱产量低于 50 kg 的频率为

$(0.012 + 0.014 + 0.024 + 0.034 + 0.040) \times 5 = 0.62$.

因此, 事件 A 的概率估计值为 0.62. 4 分

(2) 根据箱产量的频率分布直方图得列联表如下:

	箱产量 < 50 kg	箱产量 \geq 50 kg
旧养殖法	62	38
新养殖法	34	66

$K^2 = \frac{200 \times (62 \times 66 - 34 \times 38)^2}{100 \times 100 \times 96 \times 104} \approx 15.705$ 6 分

由于 $15.705 > 6.635$, 故有 99% 的把握认为箱产量与养殖方法有关. 8 分

(3) 箱产量的频率分布直方图表明: 新养殖法的箱产量平均值 (或中位数) 在 50 kg 到 55 kg 之间, 旧养殖法的箱产量平均值 (或中位数) 在 45 kg 到 50 kg 之间, 且新养殖法的箱产量分布集中程度较旧养殖法的箱产量分布集中程度高, 因

此,可以认为新养殖法的箱产量较高且稳定,从而**新养殖法**
优于旧养殖法. 12分

20. 【命题点】点的轨迹方程,椭圆方程的应用,直线过定点问题

(1)【解】设 $P(x, y), M(x_0, y_0)$, 则 $N(x_0, 0), \overrightarrow{NP} = (x - x_0, y), \overrightarrow{NM} = (0, y_0)$ 2分

由 $\overrightarrow{NP} = \sqrt{2} \overrightarrow{NM}$ 得 $x_0 = x, y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}y$ 4分

题眼

因为 $M(x_0, y_0)$ 在 C 上, 所以 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = 1$ 5分

因此点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 2$ 6分

(2)【证明】由题意知 $F(-1, 0)$. 设 $Q(-3, t), P(m, n)$, 则

$\overrightarrow{OQ} = (-3, t), \overrightarrow{PF} = (-1 - m, -n), \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PF} = 3 + 3m - tn$,

$\overrightarrow{OP} = (m, n), \overrightarrow{PQ} = (-3 - m, t - n)$ 8分

由 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 1$ 得 $-3m - m^2 + tn - n^2 = 1$,

又由(1)知 $m^2 + n^2 = 2$, 故 $3 + 3m - tn = 0$ 10分

所以 $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{PF} = 0$, 即 $\overrightarrow{OQ} \perp \overrightarrow{PF}$, 又过点 P 存在唯一直线垂直于 OQ , 所以过点 P 且垂直于 OQ 的直线 l 过 C 的左焦点 F .

..... 12分

21. 【命题点】利用导数研究函数的单调性、最值及求参数的范围

【解】(1) $f'(x) = (1 - 2x - x^2)e^x$.

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = -1 - \sqrt{2}$, 或 $x = -1 + \sqrt{2}$ 2分

当 $x \in (-\infty, -1 - \sqrt{2})$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$

时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$ 4分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$, $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ 上单调递增. 5分

(2) $f(x) = (1 + x)(1 - x)e^x$.

①当 $a \geq 1$ 时, 设函数 $h(x) = (1 - x)e^x, h'(x) = -xe^x < 0 (x > 0)$, 因此 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 而 $h(0) = 1$, 故 $h(x) \leq 1$.

所以 $f(x) = (x + 1)h(x) \leq x + 1 \leq ax + 1$ 7分

②当 $0 < a < 1$ 时, 设函数 $g(x) = e^x - x - 1, g'(x) = e^x - 1 > 0 (x > 0)$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 而 $g(0) = 0$, 故 $e^x \geq x + 1$ 8分

当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) > (1 - x)(1 + x)^2, (1 - x)(1 + x)^2 - ax - 1 = x(1 - a - x - x^2)$, 取 $x_0 = \frac{\sqrt{5 - 4a} - 1}{2}$, 则 $x_0 \in (0, 1), (1 - x_0)(1 + x_0)^2 - ax_0 - 1 = 0$, 故 $f(x_0) > ax_0 + 1$, 不合题意. 10分

③当 $a \leq 0$ 时, 取 $x_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, 则 $x_0 \in (0, 1), f(x_0) > (1 - x_0)(1 + x_0)^2 = 1 \geq ax_0 + 1$, 不合题意.

综上, a 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 12分

22. 【命题点】极坐标方程与直角坐标方程的互化, 极径的几何意义

【解】(1) 设 P 的极坐标为 (ρ, θ) ($\rho > 0$), M 的极坐标为 (ρ_1, θ) ($\rho_1 > 0$). 由题设知 $|OP| = \rho$, $|OM| = \rho_1 = \frac{4}{\cos \theta}$ 2 分

由 $|OM| \cdot |OP| = 16$ 得 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4 \cos \theta$ ($\rho > 0$).
..... 3 分

因此 C_2 的直角坐标方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ($x \neq 0$). 5 分

(2) 设点 B 的极坐标为 (ρ_B, α) ($\rho_B > 0$).

由题设知 $|OA| = 2$, $\rho_B = 4 \cos \alpha$, 于是 $\triangle OAB$ 面积 $S = \frac{1}{2} |OA| \cdot$

$$\rho_B \cdot \sin \angle AOB = 4 \cos \alpha \cdot \left| \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{3} \right) \right| = 2 \left| \sin \left(2\alpha - \frac{\pi}{3} \right) - \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \leq 2 + \sqrt{3}. \text{ 当 } \alpha = -\frac{\pi}{12} \text{ 时, } S \text{ 取得最大值 } 2 + \sqrt{3}.$$

..... 8 分

所以 $\triangle OAB$ 面积的最大值为 $2 + \sqrt{3}$ 10 分

23. 【命题点】基本不等式的应用及不等式的证明

【证明】(1) $(a+b)(a^5+b^5) = a^6+ab^5+a^5b+b^6 = (a^3+b^3)^2 - 2a^3b^3 + ab(a^4+b^4) = 4+ab(a^2-b^2)^2 \geq 4$ 5 分

(2) 因为 $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = 2+3ab(a+b) \leq 2+$

$$\frac{3(a+b)^2}{4} \cdot (a+b) = 2 + \frac{3(a+b)^3}{4}, \text{ 8 分}$$

所以 $(a+b)^3 \leq 8$, 因此 $a+b \leq 2$ 10 分