

1. B 【命题点】集合的交集运算

【解析】由题意可得 $A \cap B = \{5, 7, 11\}$, 共有 3 个元素. 故选 B.

▶ 易错警示 此题易把 3 当作 $A \cap B$ 中的元素而错选 C.

2. D 【命题点】共轭复数的概念及复数的运算

【解析】由已知得 $\bar{z} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$, 所以 $z = i$. 故选 D.

▶ 一题多解 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $\bar{z} = a - bi$, 代入已知条件, 得 $(a - bi)(1 + i) = 1 - i$, 整理得 $(a + b) + (a - b)i = 1 - i$, 由复数相等可得 $\begin{cases} a + b = 1, \\ a - b = -1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \end{cases}$ 则 $z = i$, 故选 D.

3. C 【命题点】样本数据方差的运算及性质

【解析】由已知得数据 $10x_1, 10x_2, \dots, 10x_n$ 的方差为 $100 \times 0.01 = 1$. 故选 C.

▶ 关键点拨 若一组数据 x_1, x_2, \dots, x_n 的方差为 s^2 , 则数据 $ax_1 + b, ax_2 + b, \dots, ax_n + b$ 的方差为 $a^2 s^2$.

4. C 【命题点】指数、对数的运算

【解析】由题意可得 $I(t^*) = \frac{K}{1 + e^{-0.23(t^* - 53)}} = 0.95K$, 化简得

$$e^{-0.23(t^* - 53)} = \frac{1}{19}, \text{ 即 } 0.23(t^* - 53) = \ln 19, \text{ 所以 } t^* = \frac{\ln 19}{0.23} + 53 \approx$$

$$\frac{3}{0.23} + 53 \approx 66. \text{ 故选 C.}$$

5. B 【命题点】两角和的正弦公式以及辅助角公式

【解析】因为 $\sin \theta + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \theta + \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta =$

$$\frac{3}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \sqrt{3} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = 1, \text{ 所以 } \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选 B.

▶ 一题多解 因为 $\theta = \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{6}$, $\theta + \frac{\pi}{3} = \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{6}$, 所以 $\sin \theta + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \left[\left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\pi}{6} \right] + \sin \left[\left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\pi}{6} \right] = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = 1$, 解得 $\sin \left(\theta + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

6. A 【命题点】平面向量的运算及动点轨迹的判断

【解析】以线段 AB 的中点为坐标原点, 线段 AB 所在直线为 x

轴, 线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立

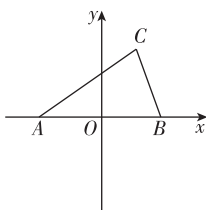
平面直角坐标系, 如图所示. 设 $|AB| =$

$2a(a > 0)$, 则 $A(-a, 0), B(a, 0)$. 设 C

(x, y) , 则 $\overrightarrow{AC} = (x+a, y), \overrightarrow{BC} = (x-a,$

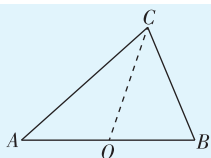
$y)$. 由 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$, 可得 $(x+a) \cdot (x-a) + y^2 = 1$, 即 $x^2 + y^2 = a^2 +$

1 , 因此点 C 的轨迹是以线段 AB 的中点为圆心, $\sqrt{a^2+1}$ 为半径的圆. 故选 A.



一题多解 如图, 取线段 AB 的中

点 O , 连接 OC , 则
$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \end{cases}$$



由 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 1$, 可得 $\overrightarrow{OC}^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2 = 1$, 即 $|\overrightarrow{OC}| =$

$\sqrt{1 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2}$. 又 A, B 是两个定点, 所以 $\sqrt{1 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2}$ 是

一个定值, 这表明点 C 的轨迹是以 O 为圆心,

$\sqrt{1 + \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2}$ 为半径的圆. 故选 A.

7. B 【命题点】直线与抛物线的位置关系, 抛物线的几何性质

【解析】由题意, 不妨设点 D 在第一象限, 则 $D(2, 2\sqrt{p}), E(2, -2\sqrt{p})$, 因此 $\overrightarrow{OD} = (2, 2\sqrt{p}), \overrightarrow{OE} = (2, -2\sqrt{p})$. 由 $OD \perp OE$, 可得 $\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OE} = 4 - 4p = 0$, 解得 $p = 1$, 因此抛物线 C 的焦点坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$. 故选 B.

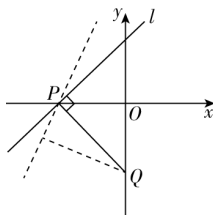
快解 由 $OD \perp OE, DE \perp x$ 轴, 易知 $\triangle ODE$ 为等腰直角三角形. 设 DE 与 x 轴的交点为 P , 则 $|OP| = |PD|$, 即 $2 = 2\sqrt{p}$, 解得 $p = 1$, 因此抛物线 C 的焦点坐标为 $(\frac{1}{2}, 0)$. 故选 B.

8. B 【命题点】点到直线的距离以及基本不等式的应用

【解析】点 $(0, -1)$ 到直线 $kx - y + k = 0$ 的

距离 $d = \frac{|1+k|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{\frac{(1+k)^2}{k^2+1}} =$

$\sqrt{1 + \frac{2k}{k^2+1}}$. 当 $k \leq 0$ 时, $d \leq 1$; 当 $k > 0$



时, $d = \sqrt{1 + \frac{2}{k + \frac{1}{k}}} \leq \sqrt{1 + \frac{2}{2}} = \sqrt{2}$, 当且仅当 $k = \frac{1}{k}$, 即 $k = 1$

时等号成立. 综上, 点 $(0, -1)$ 到直线 $y = k(x+1)$ 距离的最大值为 $\sqrt{2}$. 故选 B.

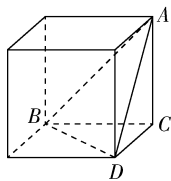
快解 易知直线 $l: y = k(x+1)$ 过定点 $P(-1, 0)$, 设 $Q(0, -1)$, 由图可知, 当 $PQ \perp l$ 时, 点 $Q(0, -1)$ 到直线 $y = k(x+1)$ 的距离最大, 且最大距离为 $|PQ| = \sqrt{2}$. 故选 B.

9. C 【命题点】几何体的三视图及其表面积的计算

【解析】 由三视图可知, 几何体为三棱锥

$A-BCD$. 利用补形法(镶嵌法)将其放入棱

长为 2 的正方体中, 如图. 则该几何体的表



面积为 $3 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{3}$.

故选 C.

10. A 【命题点】对数值比较大小

【解析】 由 $a = \log_3 2 = \log_3 \sqrt[3]{8} < \log_3 \sqrt[3]{9} = \log_3 3^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} = c$, $b = \log_5 3 =$

$\log_5 \sqrt[3]{27} > \log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 5^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} = c$, 所以 $a < c < b$. 故选 A.

关键点拨 解答本题的关键是逆用对数恒等式 $\log_a a^n =$

$n (a > 0, \text{且 } a \neq 1)$, 把 $\frac{2}{3}$ 分别化为以 3 和 5 为底的对数,

结合对数函数的单调性, 分别比较 a 与 c , b 与 c 的大小关系.

11. C

思路导引 已知 $\cos C, AC, BC \xrightarrow{\text{余弦定理}} AB \xrightarrow{\text{余弦定理}}$
 $\cos B \xrightarrow{\sin^2 B + \cos^2 B = 1} \sin B \xrightarrow{\text{作商}} \tan B$.

【命题点】余弦定理以及同角三角函数基本关系的应用

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理可得 $AB^2 = AC^2 + BC^2 -$

$2AC \cdot BC \cos C = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{2}{3} = 9$, 所以 $AB = 3$, 则 $\cos B =$

$\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{1}{9}$. 又因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} =$

$\frac{4\sqrt{5}}{9}$, 所以 $\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = 4\sqrt{5}$. 故选 C.

一题多解 过点 B 作 $BD \perp AC$ 交 AC 于点 D , 则 $DC =$
 $BC \cos C = 2 = \frac{1}{2}AC$, 可得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形, 且 $AB = BC$.

在 $\text{Rt} \triangle BCD$ 中, $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{5}$, 所以 $\tan \frac{B}{2} = \frac{DC}{BD} =$

$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\tan B = \frac{2 \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan^2 \frac{B}{2}} = 4\sqrt{5}$. 故选 C.

12. D 【命题点】函数基本性质的应用

【解析】当 $\sin x < 0$ 时, $f(x) < 0$, 故 A 错误; $f(x)$ 的定义域为

$$\{x \mid x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}\}, f(-x) = \sin(-x) + \frac{1}{\sin(-x)} = -\sin x -$$

$\frac{1}{\sin x} = -f(x)$, 故 $f(x)$ 是奇函数, 其图像关于原点对称, 故 B

错误; 由 $\sin(\pi+x) \neq \sin(\pi-x)$, 得 $f(\pi+x) \neq f(\pi-x)$, 即 $f(x)$ 的图像不关于直线 $x=\pi$ 对称, 故 C 错误; 由

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \text{得 } f\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}-x\right), \text{即 } f(x) \text{ 的}$$

图像关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称(提示: 也可由 $f(\pi-x)=f(x)$ 得出),

故 D 正确. 故选 D.

快解

选项 B, C, D 均涉及函数图像的对称性, 因此可

用特值法求解, 但要注意定义域. 由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, f\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$

-2 , 知 B 错误, 由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$, 知 C 错误, A 错

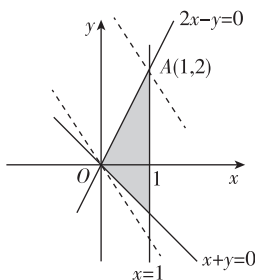
误, 故选 D.

13.7 【命题点】简单的线性规划

问题

【解析】作出不等式组表示的平面区域, 如图中阴影部分(含边界)所示. 由 $z = 3x + 2y$, 得 $y =$

$$-\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}. \text{ 由图可知,}$$



目标函数 $z = 3x + 2y$ 的最大值在点 A 处取得. 由 $\begin{cases} x=1, \\ 2x-y=0, \end{cases}$ 得

$A(1,2)$. 所以 z 的最大值为 $3 \times 1 + 2 \times 2 = 7$.

关键点拨

在线性规划问题中, 要先清楚目标函数 z 的几何意义. 本题中, 通过把目标函数 $z = 3x + 2y$ 变形为 $y =$

$$-\frac{3}{2}x + \frac{z}{2}, \text{ 则 } \frac{z}{2} \text{ 表示直线 } y = -\frac{3}{2}x + \frac{z}{2} \text{ 的纵截距.}$$

14. $\sqrt{3}$ 【命题点】双曲线的渐近线及离心率

【解析】由双曲线的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{2}x$, 可得 $\frac{b}{a} =$

$$\sqrt{2}. \text{ 又 } c^2 = a^2 + b^2, \text{ 所以离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{3}.$$

易错警示

本题易混淆双曲线方程与椭圆方程中 a, b, c 三者之间的关系. 在双曲线方程中, a, b, c 三者之间的关系

$$\text{为 } c^2 = a^2 + b^2, \text{ 由此可得离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

15.1 【命题点】导数的应用

【解析】由 $f(x) = \frac{e^x}{x+a}$, 得 $f'(x) = \frac{e^x(x+a-1)}{(x+a)^2}$, 因此 $f'(1) =$

$$\frac{ea}{(1+a)^2} = \frac{e}{4}, \text{解得 } a=1.$$

易错警示 本题的易错之处有(1)审题不清,错把 $f'(1)$ 当成 $f(1)$; (2)在求导时,要注意 $(x+a)' = 1+0=1$, 而不是 $(x+a)' = 1+1=2$.

16. $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

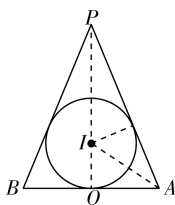
思路导引 圆锥内半径最大的球 $\xrightarrow{\text{作图}}$ 内切球 $\xrightarrow{\text{轴截面}}$ 最大的球

圆锥轴截面 $\xrightarrow{\text{三角形的内切圆}}$ 球半径 $R \xrightarrow{\text{体积公式}} V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

【命题点】圆锥的内切球体积的计算

【解析】圆锥内半径最大的球是其内切球,

根据圆锥与球的对称性,画出圆锥的轴截面,如图所示. 设内切球的半径为 R , 球心 I 是 $\triangle PAB$ 的内心, O 为球与圆锥底面的



切点. 由 $PO = \sqrt{PA^2 - OA^2} = 2\sqrt{2}$, 得 $\triangle PAB$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times$

$2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. 由 $S = 2\sqrt{2} = \frac{C}{2} \cdot R$ (C 为 $\triangle PAB$ 的周长), 得

$R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故内切球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.

一题多解 易知半径最大的球为该圆锥

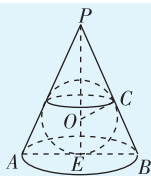
的内切球. 圆锥 PE 及其内切球 O 如图所示,

设内切球的半径为 R , 则 $\sin \angle BPE = \frac{OC}{OP} = \frac{BE}{PB} =$

$\frac{1}{3}$, 所以 $OP = 3OC = 3R$, 所以 $PE = 4R = \sqrt{PB^2 - BE^2} =$

$\sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$, 所以 $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以内切球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 =$

$\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$, 即该圆锥内半径最大的球的体积为 $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$.



方法速记 (1)求解圆柱、圆锥的内切球、外接球问题的

常用方法是作出轴截面,从而达到简化计算的目的;

(2)三角形的面积 S 、周长 C 、内切圆半径 r 三者之间的关系为 $S = \frac{C}{2} \cdot r$, 即三角形的面积等于半周长与内切圆半径

之积.

17. **【命题点】等比数列基本量的计算,等差数列的前 n 项和**

【解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $a_n = a_1 q^{n-1}$.

由已知得 $\begin{cases} a_1 + a_1 q = 4, \\ a_1 q^2 - a_1 = 8. \end{cases}$

解得 $a_1 = 1, q = 3$ 4分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3^{n-1}$ 6 分

(2) 由 (1) 知 $\log_3 a_n = n-1$ 7 分

故 $S_n = \frac{n(n-1)}{2}$ 8 分

由 $S_m + S_{m+1} = S_{m+3}$ 得 $m(m-1) + (m+1)m = (m+3)(m+2)$, 即 $m^2 - 5m - 6 = 0$ 10 分

解得 $m = -1$ (舍去), $m = 6$ 12 分

关键点拨 求解等比数列的题目, 最基本的方法是利用首项和公比根据题中条件列方程组求解.

18. 【命题点】用频率估计概率, 用样本平均数估计总体平均数及独立性检验

【解】(1) 由所给数据, 该市一天的空气质量等级为 1, 2, 3, 4 的概率的估计值如下表:

空气质量等级	1	2	3	4
概率的估计值	0.43	0.27	0.21	0.09

.....4 分

(2) 一天中到该公园锻炼的平均人次的估计值为

$\frac{1}{100}(100 \times 20 + 300 \times 35 + 500 \times 45) = 350$ 8 分

(3) 根据所给数据, 可得 2×2 列联表:

	人次 ≤ 400	人次 > 400
空气质量好	33	37
空气质量不好	22	8

根据列联表得 $K^2 = \frac{100 \times (33 \times 8 - 22 \times 37)^2}{55 \times 45 \times 70 \times 30} \approx 5.820$ 10 分

由于 $5.820 > 3.841$, 故有 **95% 的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关**. 12 分

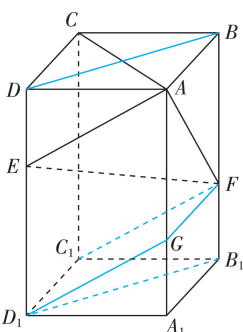
关键点拨 在概率与统计中, 用频率来作为概率的估计值是常用方法, 本题的 3 个小问都是常规题, 考生需注意仔细审题, 读懂题中所给的数据是正确解答本题的关键.

19. 【命题点】异面直线垂直、四点共面的证明

【证明】(1) 如图, 连接 BD, B_1D_1 . 因为 $AB = BC$, 所以四边形 $ABCD$ 为正方形, 故 $AC \perp BD$. 又因为 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 于是 $AC \perp BB_1$ 4 分
又 $BD \cap BB_1 = B$, 所以 $AC \perp$ 平面 BB_1D_1D .

由于 $EF \subset$ 平面 BB_1D_1D , 所以 $EF \perp AC$ 6 分

(2) 如图, 在棱 AA_1 上取点 G , 使得 $AG = 2GA_1$, 连接 GD_1 ,



FC_1, FG .

因为 $D_1E = \frac{2}{3}DD_1, AG = \frac{2}{3}AA_1, DD_1 \parallel AA_1$, 所以 $ED_1 \parallel AG$, 于是四边形 ED_1GA 为平行四边形, 故 $AE \parallel GD_1$ 8 分

因为 $B_1F = \frac{1}{3}BB_1, A_1G = \frac{1}{3}AA_1, BB_1 \parallel AA_1$, 所以 $FG \parallel A_1B_1$, $FG \parallel C_1D_1$, 四边形 FGD_1C_1 为平行四边形, 故 $GD_1 \parallel FC_1$.

..... 10 分

于是 $AE \parallel FC_1$, 所以 A, E, F, C_1 四点共面, 即点 C_1 在平面 AEF 内. 12 分

关键点拨 (1) 证明两条异面直线垂直通常需要先证明线面垂直. 本题给出条件 $AB = BC$ 后, 易得 $BD \perp AC$, 因而只需证明 AC 垂直于平面 BB_1D_1D 即可. (2) 要证明四点共面, 通常利用公理 2 的推论, 结合本题条件, 选择推论“两条平行直线确定一个平面”来证明, 故只需证明 $AE \parallel FC_1$ 即可.

20. 思路导引

(1) 求导 $\rightarrow f(x) = 3x^2 - k \rightarrow \begin{cases} k \leq 0, f(x) \text{ 在 } \mathbf{R} \text{ 上单调递增;} \\ k > 0, f(x) \text{ 在 } \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3k}}{3}\right), \end{cases}$

$\left(\frac{\sqrt{3k}}{3}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-\frac{\sqrt{3k}}{3}, \frac{\sqrt{3k}}{3}\right)$ 上单调递减.

(2) $f(x)$ 有三个零点 $\rightarrow k > 0 \rightarrow f(x)$ 的极值点
零点存在性定理 $\rightarrow k$ 的取值范围.

【命题点】 利用导数研究函数的单调性及函数的零点个数问题

【解】 (1) $f'(x) = 3x^2 - k$.

当 $k = 0$ 时, $f(x) = x^3$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增;

..... 2 分

当 $k < 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 - k > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增.

..... 3 分

(当 $k \leq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 且等号只在 $x = 0$ 时成立)

当 $k > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm \frac{\sqrt{3k}}{3}$. 当 $x \in$

$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3k}}{3}\right)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in \left(-\frac{\sqrt{3k}}{3}, \frac{\sqrt{3k}}{3}\right)$ 时,

$f'(x) < 0$; 当 $x \in \left(\frac{\sqrt{3k}}{3}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$ 5 分

故 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3k}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3k}}{3}, +\infty\right)$ 单调递增, 在

$\left(-\frac{\sqrt{3k}}{3}, \frac{\sqrt{3k}}{3}\right)$ 单调递减. 6 分

(2) 由 (1) 知, 当 $k \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 单调递增, $f(x)$ 不可能有三个零点. 7 分

当 $k > 0$ 时, $x = -\frac{\sqrt{3k}}{3}$ 为 $f(x)$ 的极大值点, $x = \frac{\sqrt{3k}}{3}$ 为 $f(x)$ 的极小值点. 8 分

$$\left(\text{此时若由} \begin{cases} f\left(-\frac{\sqrt{3k}}{3}\right) = \frac{2k\sqrt{3k}}{9} + k^2 > 0, \\ f\left(\frac{\sqrt{3k}}{3}\right) = -\frac{2k\sqrt{3k}}{9} + k^2 < 0 \end{cases} \text{求出的 } 0 < k < \frac{4}{27} \text{ 只} \right.$$

是 $f(x)$ 有三个零点的必要条件, 其充分性还需验证)

此时, $-k-1 < -\frac{\sqrt{3k}}{3} < \frac{\sqrt{3k}}{3} < k+1$ 且 $f(-k-1) < 0, f(k+1) > 0,$
 $f\left(-\frac{\sqrt{3k}}{3}\right) > 0$ 10 分

根据 $f(x)$ 的单调性, 当且仅当 $f\left(\frac{\sqrt{3k}}{3}\right) < 0$, 即 $k^2 - \frac{2k\sqrt{3k}}{9} < 0$
 时, $f(x)$ 有三个零点, 解得 $k < \frac{4}{27}$, 因此 k 的取值范围为

$\left(0, \frac{4}{27}\right)$ 12 分

易错警示 (1) 在 k 的正负未知的情况下, 方程 $3x^2 - k = 0$ 不一定有解, 从而不等式 $3x^2 - k > 0$ (或 < 0) 未必有解, 易因忽略分类讨论而致错; (2) 不等式 $f\left(-\frac{\sqrt{3k}}{3}\right) > 0$ 且 $f\left(\frac{\sqrt{3k}}{3}\right) < 0$ 只能保证 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\sqrt{3k}}{3}, \frac{\sqrt{3k}}{3}\right)$ 有一个零点, 因此还需要根据零点存在性定理寻找另外两个零点, 从而确保充分性.

21. 【命题点】 椭圆的离心率、对称性, 直线与椭圆的位置关系, 两直线的位置关系, 两点间的距离公式、点到直线的距离公式

【解】 (1) 由题设可得 $\frac{\sqrt{25-m^2}}{5} = \frac{\sqrt{15}}{4}$, 得 $m^2 = \frac{25}{16}$, 2 分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{16}} = 1$ 4 分

(2) 设 $P(x_P, y_P), Q(6, y_Q)$, 根据对称性可设 $y_Q > 0$, 由题意知 $y_P > 0$.

(结合椭圆的对称性, 可设 $y_Q > 0$, 这样避免开方时讨论符号)

由已知可得 $B(5, 0)$, 直线 BP 的方程为 $y = -\frac{1}{y_Q}(x-5)$,

$\left(\text{由于 } k_{BQ} = y_Q, \text{ 且 } BP \perp BQ, \text{ 因此 } k_{BP} = -\frac{1}{y_Q}, \text{ 利用点斜式可求直线 } BP \text{ 的方程} \right)$

所以 $|BP| = y_P \sqrt{1+y_Q^2}, |BQ| = \sqrt{1+y_Q^2}$ 6 分

（将点 $P(x_P, y_P)$ 的坐标代入 $y = -\frac{1}{y_Q}(x-5)$, 可知 $x_P = 5 - y_P y_Q$,

结合两点间的距离公式可得 $|BP| = \sqrt{[5 - (5 - y_P y_Q)]^2 + y_P^2} = y_P \sqrt{1 + y_Q^2}$ ）

因为 $|BP| = |BQ|$, 所以 $y_P = 1$. 将 $y_P = 1$ 代入 C 的方程, 解得 $x_P = 3$ 或 -3 . 由直线 BP 的方程得 $y_Q = 2$ 或 8 7 分

所以点 P, Q 的坐标分别为 $P_1(3, 1), Q_1(6, 2); P_2(-3, 1), Q_2(6, 8)$ 8 分

$|P_1 Q_1| = \sqrt{10}$, 直线 $P_1 Q_1$ 的方程为 $y = \frac{1}{3}x$, 点 $A(-5, 0)$ 到直

线 $P_1 Q_1$ 的距离为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$, 故 $\triangle AP_1 Q_1$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times$

$\sqrt{10} = \frac{5}{2}$ 10 分

$|P_2 Q_2| = \sqrt{130}$, 直线 $P_2 Q_2$ 的方程为 $y = \frac{7}{9}x + \frac{10}{3}$, 点 A 到直线

$P_2 Q_2$ 的距离为 $\frac{\sqrt{130}}{26}$, 故 $\triangle AP_2 Q_2$ 的面积为 $\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{130}}{26} \times$

$\sqrt{130} = \frac{5}{2}$.

综上, $\triangle APQ$ 的面积为 $\frac{5}{2}$ 12 分

一题多解 (2) 由对称性, 只需考虑 P, Q 均在 x 轴上方的情形.

如图, 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , 设直线 $x = 6$ 与 x 轴交于点 N , 则由 $BP \perp BQ$, 得 $\angle PBM + \angle QBN = 90^\circ$. 又 $\angle QBN + \angle BQN = 90^\circ$, 所以 $\angle PBM = \angle BQN$ 6 分

又 $|BP| = |BQ|$, 所以 $\text{Rt} \triangle PBM \cong \text{Rt} \triangle BQN$, 所以 $|PM| = |BN| = 1$. 设 $|BM| = |QN| = m (m > 0)$,

则 $P(5-m, 1), Q(6, m), |PQ| = \sqrt{2} |PB| = \sqrt{2(m^2+1)}$,

所以直线 PQ 的方程为 $y - m = \frac{m-1}{m+1}(x-6)$, 即 $(m-1)x - (m+1)y + m^2 - 5m + 6 = 0$ 8 分

点 $A(-5, 0)$ 到直线 PQ 的距离 $d = \frac{|-5(m-1) + m^2 - 5m + 6|}{\sqrt{(m-1)^2 + (m+1)^2}} =$

$\frac{|m^2 - 10m + 11|}{\sqrt{2(m^2+1)}}$,

所以 $S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} |PQ| \cdot d = \frac{|m^2 - 10m + 11|}{2}, (*)$ 10 分

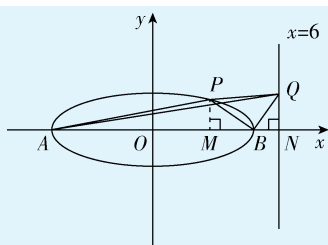
由点 $P(5-m, 1)$ 在椭圆 C

$$\text{上, 得 } \frac{(5-m)^2}{25} + \frac{16}{25} = 1,$$

解得 $m=2$ 或 $m=8$,

分别代入 $(*)$, 可得

$$S_{\triangle APQ} = \frac{5}{2}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



方法速记 在解析几何中求三角形的面积, 常用的方法

有: (1) 面积 $S = \frac{1}{2} \text{底} \times \text{高}$; (2) 若 $\vec{AB} = (x_1, y_1)$, $\vec{AC} = (x_2, y_2)$,

$$\text{则 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|.$$

22. 【命题点】曲线的参数方程, 两点间的距离公式, 直线的极坐标方程

【解】 (1) 因为 $t \neq 1$, 由 $2-t-t^2=0$ 得 $t=-2$, 所以 C 与 y 轴的交点为 $(0, 12)$; 由 $2-3t+t^2=0$ 得 $t=2$, 所以 C 与 x 轴的交点为 $(-4, 0)$. 故 $|AB| = 4\sqrt{10}$. $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 可知, 直线 AB 的直角坐标方程为 $\frac{x}{-4} + \frac{y}{12} = 1$, 将 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ 代入, $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$
得直线 AB 的极坐标方程 $3\rho \cos \theta - \rho \sin \theta + 12 = 0$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

23. 【命题点】基本不等式的应用

【证明】 (1) 由题设可知, a, b, c 均不为零,

$$\text{所以 } ab+bc+ca = \frac{1}{2} [(a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)] = -\frac{1}{2} (a^2+b^2+c^2) < 0. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 不妨设 $\max\{a, b, c\} = a$, 因为 $abc = 1$, $a = -(b+c)$, 所以 $a > 0, b < 0, c < 0$. $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

$$\text{由 } bc \leq \frac{(b+c)^2}{4}, \text{ 可得 } abc \leq \frac{a^3}{4}, \text{ 故 } a \geq \sqrt[3]{4}, \text{ 所以 } \max\{a, b, c\} \geq \sqrt[3]{4}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$