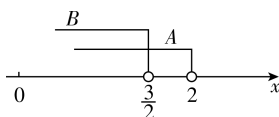


## 1. A 【命题点】集合的基本运算

【解析】由题意知  $A = \{x | x < 2\}$ ,  $B = \left\{x \mid x < \frac{3}{2}\right\}$ . 由图易知

$$A \cap B = \left\{x \mid x < \frac{3}{2}\right\}, A \cup B = \{x | x < 2\}, \text{ 故选 A.}$$



## 2. B 【命题点】样本的数字特征

【解析】标准差、方差是反映数据相对中心位置的离散程度，故选 B.

## 3. C 【命题点】复数的乘法运算

【解析】选项 A 中,  $i(1+i)^2 = i(1+2i+i^2) = i[1+2i+(-1)] = 2i^2 = -2$ ; 选项 B 中,  $i^2(1-i) = -(1-i) = -1+i$ ; 选项 C 中,  $(1+i)^2 = 1+2i+i^2 = 1+2i+(-1) = 2i$ ; 选项 D 中,  $i(1+i) = i+i^2 = -1+i$ . 故选 C.

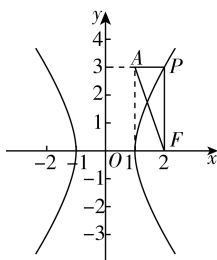
## 4. B 【命题点】几何概型的概率计算

【解析】设正方形的边长为  $2a$ , 则圆的半径为  $a$ . 易知正方形面积为  $4a^2$ , 黑色部分面积为  $\frac{1}{2}\pi a^2$ , 由几何概型概率计算公式知, 取自黑色部分的概率为  $\frac{\frac{1}{2}\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{8}$ . 故选 B.

式知, 取自黑色部分的概率为  $\frac{\frac{1}{2}\pi a^2}{4a^2} = \frac{\pi}{8}$ . 故选 B.

## 5. D 【命题点】双曲线的方程、定义

【解析】由双曲线方程和定义知,  $a^2 = 1$ ,  $b^2 = 3$ ,  $c^2 = a^2 + b^2 = 4$ , 所以  $F(2, 0)$ . 因为  $PF \perp x$  轴, 所以设  $P(2, y)$ , 代入双曲线方程得  $y^2 = 9$ , 即  $y = \pm 3$ . 由双曲线的对称性, 不妨令  $P(2, 3)$ . 如图, 易知  $AP \perp PF$ , 且  $|AP| = 1$ ,  $|PF| = 3$ , 所以



$$S_{\triangle APF} = \frac{1}{2} |PF| \cdot |AP| = \frac{3}{2}, \text{ 故选 D.}$$

## ► 快解

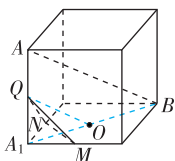
由双曲线通径定义, 易知  $|PF| = \frac{b^2}{a} = 3$ . 如图, 得

$$S_{\triangle APF} = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}.$$

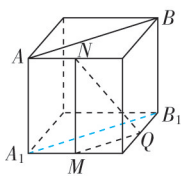
## 6. A 【命题点】线面平行的判断

【解析】由线面平行判定定理知, 平面外一条直线与平面内一条直线平行, 则直线与该平面平行. 选项 A 中, 如图(1), 连接  $A_1B$ , 取  $A_1B$  的中点  $O$ , 连接  $OQ$ . 因为  $O, Q$  分别为  $A_1B$  和  $AA_1$  的中点, 所以  $OQ \parallel AB$ , 所以  $AB$  与平面  $MNQ$  不平行.

选项 B 中, 如图(2), 连接  $A_1B_1$ , 在正方体中,  $AB \parallel A_1B_1$ ,  $MQ \parallel A_1B_1$ , 所以  $AB \parallel MQ$ , 因此  $AB \parallel$  平面  $MNQ$ .



图(1)

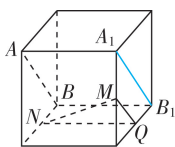


图(2)

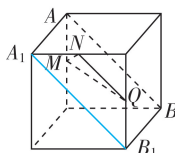
选项 C 中,如图(3),连接  $A_1B_1$ . 在正方体中,知  $AB \parallel A_1B_1$ . 又因为  $M, Q$  分别为所在棱的中点,所以  $MQ \parallel A_1B_1$ ,所以  $AB \parallel MQ$ ,所以  $AB \parallel$  平面  $MNQ$ .

选项 D 中,如图(4),连接  $A_1B_1$ . 在正方体中,知  $AB \parallel A_1B_1$ . 又因为  $N, Q$  分别为所在棱的中点,所以  $NQ \parallel A_1B_1$ ,所以  $AB \parallel NQ$ ,所以  $AB \parallel$  平面  $MNQ$ .

故选 A.



图(3)

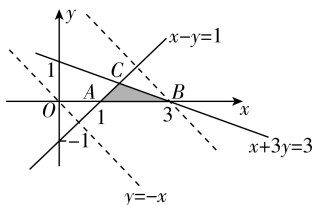


图(4)

**关键点拨** 利用  $M, N, Q$  是所在棱的中点,连接面的对角线,则由三角形中位线可快速构造与平面  $MNQ$  平行的直线.

## 7.D 【命题点】线性规划

**【解析】**根据不等式组,画出可行域,如图中阴影部分所示. 目标函数可化为  $y = -x + z$ ,当目标函数线的纵截距最大时, $z$  值最大. 由图知,目标函数线过点  $B(3,0)$  时,  $z_{\max} = 3 + 0 = 3$ . 故选 D.



**快解** 因为线性目标函数在线性限制条件下的最值一定在可行域边界的端点处取到,因此将端点  $A(1,0), B(3,0), C(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$  分别代入目标函数,得  $z_A = 1 < z_C = 2 < z_B = 3$ , 故选 D.

## 8.C 【命题点】函数图像的判断

**【解析】**因为函数  $y = f(x) = \frac{\sin 2x}{1 - \cos x}$  的定义域  $\{x \mid x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$  关于原点对称,且  $f(-x) = \frac{\sin(-2x)}{1 - \cos(-x)} = \frac{-\sin 2x}{1 - \cos x} = -f(x)$ ,所以函数  $f(x)$  为奇函数,排除 B. 又因为  $f(\pi) =$

$\frac{\sin 2\pi}{1 - \cos \pi} = 0$ ,排除 D. 又因为  $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{1 - \cos \frac{\pi}{6}} > 0$ ,排除 A. 故选 C.

## 9.C 【命题点】复合函数的单调性、图像的对称性

**【解析】**由题知  $f(x) = \ln[x(2-x)]$  ( $0 < x < 2$ ). 令  $t = x(2-x)$ , 则

函数  $t=x(2-x)$  在  $x \in (0,1)$  时单调递增, 在  $x \in (1,2)$  时单调递减. 又  $y=\ln t$  单调递增, 由复合函数单调性判定方法——  
同增异减, 可知  $f(x)$  在  $(0,1)$  上单调递增, 在  $(1,2)$  上单调递减, 因此 **A, B 不正确**. 又因为  $f(x)=\ln[x(2-x)]=\ln\{(2-x) \cdot [2-(2-x)]\}=f(2-x)$ , 所以 **C 正确, D 不正确, 故选 C**.

**快解** 易知  $f(x)=\ln[x(2-x)], x \in (0,2)$ . 令  $t=x(2-x)$ , 函数  $t$  在  $(0,2)$  上不单调, 且图像关于直线  $x=1$  对称. 又  $y=\ln t$  为单调函数, 所以复合函数  $f(x)=\ln[x(2-x)]$  的图像关于直线  $x=1$  对称.

## 10. D 【命题点】直到型循环结构的程序框图

**【解析】** 因为输出的  $n$  要满足  $A=3^n-2^n>1\,000$ , 判断框向下出口为否, 因此应填  $A \leq 1\,000$ . 又因为输出的  $n$  为偶数, 所以处理框中应填  $n=n+2$ . 故选 **D**.

## 11. B 【命题点】两角和的正弦公式、正弦定理的应用

**【解析】** 在  $\triangle ABC$  中, 因为  $B=\pi-(A+C)$  (提示: 三角形的内角和定理的应用), 所以  $\sin B + \sin A \cdot (\sin C - \cos C) = 0 \Leftrightarrow \sin[\pi-(A+C)] + \sin A(\sin C - \cos C) = 0$   
 $\Leftrightarrow \sin(A+C) + \sin A \sin C - \sin A \cos C = 0$   
 $\Leftrightarrow \sin A \cos C + \cos A \sin C + \sin A \sin C - \sin A \cos C = 0$   
 $\Leftrightarrow \sin C(\sin A + \cos A) = 0$ .

在  $\triangle ABC$  中, 因为  $C \in (0, \pi)$ , 所以  $\sin C \neq 0$ , 所以  $\sin A + \cos A = 0$ .

又因为  $A \in (0, \pi)$ , 所以  $A = \frac{3\pi}{4}$ .

又由正弦定理  $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ , 得  $\sin C = \frac{c \sin A}{a} = \frac{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2}$ ,

所以  $C = \frac{5\pi}{6}$  (舍去) 或  $C = \frac{\pi}{6}$ . 故选 **B**.

## 12. A 【命题点】椭圆方程的应用, 两角和的正切公式

**【解析】** 假设长轴在  $x$  轴

上, 如图 (1) 所示. 设

$M(x_0, y_0) (y_0 \neq 0)$ , 则  $k_{MA} \cdot k_{MB} =$

$$k_{MB} = \frac{y_0}{x_0 + \sqrt{3}} \cdot \frac{y_0}{x_0 - \sqrt{3}} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - 3}. \quad ①$$

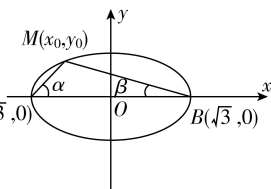


图 (1)

又因为  $\frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{m} = 1$ , 所以  $y_0^2 = m \left(1 - \frac{x_0^2}{3}\right)$ . ②

将②代入①, 得  $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\frac{m}{3}$ .

令  $\angle MAB = \alpha$ ,  $\angle MBA = \beta$ , 则  $\tan \alpha > 0$ ,  $\tan \beta > 0$ ,  $\tan \alpha \cdot \tan \beta =$

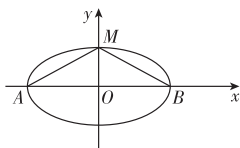
$$k_{MA} \cdot (-k_{MB}) = \frac{m}{3}.$$

因为  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} \geq \frac{2 \sqrt{\tan \alpha \cdot \tan \beta}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{2 \sqrt{3m}}{3 - m}$ ,

当且仅当  $\alpha = \beta$  时, 即点  $M$  在  $y$  轴上时, 上述等式成立.

所以  $M$  为短轴端点时,  $\tan(\alpha + \beta)$  最小, 此时  $\alpha + \beta$  最小, 即  $\angle AMB = \pi - (\alpha + \beta)$  最大.

因此,  $C$  上存在点  $M$  满足  $\angle AMB = 120^\circ$ , 只需  $\angle AMB$  最大值大于等于  $120^\circ$ , 如图(2), 只需  $\tan \angle AMO \geq$



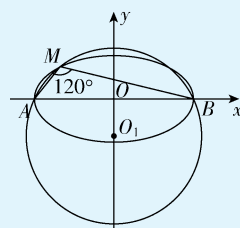
图(2)

$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ , 即  $\frac{OA}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m}} \geq \sqrt{3}$ , 得  $m \leq 1$ , 即  $0 < m \leq 1$ .

同理, 当长轴在  $y$  轴上时可得  $m \geq 9$ , 故选 A.

**一题多解** 如图(3), 假设长轴

在  $x$  轴上, 因为  $C$  上存在点  $M$  满足  $\angle AMB = 120^\circ$ , 则  $M$  为椭圆  $C$  与  $\triangle ABM$  外接圆  $O_1$  的交点, 且圆  $O_1$



图(3)

的直径为  $\frac{AB}{\sin \angle AMB} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$ , 所以圆

$O_1$  为  $x^2 + (y+1)^2 = 4$ .

联立方程  $\begin{cases} \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{m} = 1, \\ x^2 + (y+1)^2 = 4, \end{cases}$  得  $\left(1 - \frac{3}{m}\right)y^2 + 2y = 0$ , 解得  $y_1 = 0$ ,

$y_2 = \frac{2m}{3-m}$ . 由图知  $0 < y_2 \leq \sqrt{m}$ , 即  $0 < \frac{2m}{3-m} \leq \sqrt{m}$ ,

即  $\begin{cases} \frac{2m}{3-m} \leq \sqrt{m}, \\ 0 < m < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m + 2\sqrt{m} - 3 \leq 0, \\ 0 < m < 3, \end{cases}$  解得  $0 < m \leq 1$ .

同理, 当长轴在  $y$  轴上时, 可得  $m \geq 9$ .

**方法速记**

设  $A, B$  为椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的长轴两

端点,  $M$  为椭圆上不同于  $A, B$  的任一点, 则  $k_{MA} \cdot k_{MB} = -\frac{b^2}{a^2}$ .

### 13.7 【命题点】向量垂直的坐标表示

**【解析】**  $\because (a+b) \perp a, \therefore (a+b) \cdot a = 0. \because a = (-1, 2), b = (m, 1), \therefore a+b = (m-1, 3).$

$\therefore (a+b) \cdot a = -(m-1) + 2 \times 3 = 0$ , 解得  $m = 7$ .

**方法速记**

若  $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$ , 则  $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = x_1x_2 + y_1y_2 = 0; a \parallel b \Leftrightarrow x_1y_2 - x_2y_1 = 0$ .

### 14. $y = x + 1$ 【命题点】导数的几何意义及切线方程

**【解析】** 设  $y = f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ , 则  $f'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$ .

因为  $f'(1) = 2 - 1 = 1$ , 所以曲线  $y = x^2 + \frac{1}{x}$  在点  $(1, 2)$  处的切线方程为  $y - 2 = f'(1)(x - 1)$ , 即  $y = x + 1$ .

15.  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$  【命题点】同角三角函数的基本关系, 两角差的余弦公式

【解析】因为  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以  $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$ . 联立方程

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2, \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \end{cases} \text{得} \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \\ \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

$$\text{所以 } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin \alpha \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

一题多解

因为  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以  $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$ .

$$\text{所以 } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \alpha + \cos \alpha) =$$

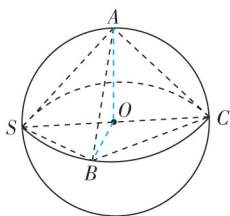
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + 2\sin \alpha \cos \alpha}.$$

又因为  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2}{5}$ , 代入上式得

$$\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{1 + \frac{4}{5}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

16.  $36\pi$  【命题点】三棱锥的外接球, 面面垂直的性质

【解析】如图所示, 设  $SC = 2r$ , 取  $SC$  的中点  $O$ , 连接  $AO, OB$ . 因为  $SA = AC, SB = BC$ , 所以  $OA \perp SC, OB \perp SC$ .



$$\text{所以 } S_{\triangle SBC} = \frac{1}{2} SC \cdot OB = \frac{1}{2} \times 2r \cdot r =$$

$r^2$ . 又因为平面  $SAC \perp$  平面  $SBC$ , 平面  $SAC \cap$  平面  $SBC = SC$ ,  $OA \perp SC$ , 所以  $OA \perp$  平面  $SBC$ .

$$\text{所以 } V_{S-ABC} = V_{A-SBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle SBC} \cdot OA = \frac{1}{3} r^3 = 9. \text{ 解得 } r = 3, \text{ 所以}$$

$$S_{\text{表}} = 4\pi r^2 = 36\pi.$$

17. 【命题点】等差数列的判断, 等比数列的通项公式、前  $n$  项和公式

$$\text{【解】(1) 设 } \{a_n\} \text{ 的公比为 } q, \text{ 由题设可得 } \begin{cases} a_1(1+q) = 2, \\ a_1(1+q+q^2) = -6. \end{cases}$$

$$\text{解得 } q = -2, a_1 = -2. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{故 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = (-2)^n. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由(1)可得 } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = -\frac{2}{3} + (-1)^n \frac{2^{n+1}}{3}. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{由于 } S_{n+2} + S_{n+1} = -\frac{4}{3} + (-1)^n \frac{2^{n+3} - 2^{n+2}}{3} = 2 \left[ -\frac{2}{3} + (-1)^n \frac{2^{n+1}}{3} \right] = 2S_n, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

故  $S_{n+1}, S_n, S_{n+2}$  成等差数列. .... 12 分

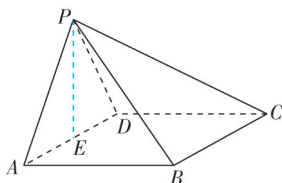
**18. 【命题点】**面面垂直的判定与性质,四棱锥的体积和侧面积

(1)【证明】由已知  $\angle BAP = \angle CDP = 90^\circ$ , 得  $AB \perp AP, CD \perp PD$ . .... 2 分

由于  $AB \parallel CD$ , 故  $AB \perp PD$ , 从而  $AB \perp$  平面  $PAD$ . .... 4 分

又  $AB \subset$  平面  $PAB$ ,

所以平面  $PAB \perp$  平面  $PAD$ .



..... 5 分

(2)【解】在平面  $PAD$  内, 作  $PE \perp AD$ , 垂足为  $E$ .

由(1)知,  $AB \perp$  平面  $PAD$ , 又  $PE \subset$  平面  $PAD$ , 故  $AB \perp PE$ , 可得  $PE \perp$  平面  $ABCD$ . .... 7 分

设  $AB = x$ , 则由已知可得  $AD = \sqrt{2}x, PE = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ . .... 8 分

故四棱锥  $P-ABCD$  的体积

$$V_{P-ABCD} = \frac{1}{3} AB \cdot AD \cdot PE = \frac{1}{3} x^3. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

由题设得  $\frac{1}{3} x^3 = \frac{8}{3}$ , 故  $x = 2$ . .... 10 分

从而  $PA = PD = 2, AD = BC = 2\sqrt{2}, PB = PC = 2\sqrt{2}$ . .... 11 分

可得四棱锥  $P-ABCD$  的侧面积为

$$\frac{1}{2} PA \cdot PD + \frac{1}{2} PA \cdot AB + \frac{1}{2} PD \cdot DC + \frac{1}{2} BC^2 \sin 60^\circ = 6 + 2\sqrt{3}.$$

..... 12 分

**19. 【命题点】**相关系数的应用,均值与标准差的计算

【解】(1) 由样本数据得  $(x_i, i) (i = 1, 2, \dots, 16)$  的相关系数

$$\begin{aligned} \text{为 } r &= \frac{\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})(i - 8.5)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{16} (i - 8.5)^2}} \approx \\ &= \frac{-2.78}{0.212 \times \sqrt{16} \times 18.439} \approx -0.18. \end{aligned}$$

由于  $|r| < 0.25$ , 因此可以认为这一天生产的零件尺寸不随生产过程的进行而系统地变大或变小. .... 4 分

(2)①由于  $\bar{x} = 9.97, s \approx 0.212$ , 由样本数据可以看出抽取的第 13 个零件的尺寸在  $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$  以外, 因此需对当天的生产过程进行检查. .... 7 分

②剔除离群值, 即第 13 个数据, 剩下数据的平均数为  $\frac{1}{15} \times (16 \times 9.97 - 9.22) = 10.02$ . .... 8 分

这条生产线当天生产的零件尺寸的均值的估计值为 10.02.

$$\sum_{i=1}^{16} x_i^2 = 16 \times 0.212^2 + 16 \times 9.97^2 \approx 1\,591.134,$$

剔除第 13 个数据, 剩下数据的样本方差为

$$\frac{1}{15} \times (1\,591.134 - 9.22^2 - 15 \times 10.02^2) \approx 0.008,$$

这条生产线当天生产的零件尺寸的标准差的估计值为

$$\sqrt{0.008} \approx 0.09. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

**20. 【命题点】**直线斜率的计算,直线与抛物线的位置关系,直线的方程

**【解】**(1) 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 \neq x_2, y_1 = \frac{x_1^2}{4}, y_2 = \frac{x_2^2}{4}$ ,

$$x_1 + x_2 = 4,$$

于是直线  $AB$  的斜率  $k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{4} = 1. \dots\dots\dots 5 \text{分}$

(2) 由  $y = \frac{x^2}{4}$ , 得  $y' = \frac{x}{2}. \dots\dots\dots 6 \text{分}$

设  $M(x_3, y_3)$ , 由题设知  $\frac{x_3}{2} = 1$ , 解得  $x_3 = 2$ , 于是  $M(2, 1).$

$\dots\dots\dots 7 \text{分}$

设直线  $AB$  的方程为  $y = x + m$ , 故线段  $AB$  的中点为  $N(2, 2 + m)$ ,  $|MN| = |m + 1|$ ,  $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

将  $y = x + m$  代入  $y = \frac{x^2}{4}$  得  $x^2 - 4x - 4m = 0. \dots\dots\dots 9 \text{分}$

当  $\Delta = 16(m + 1) > 0$ , 即  $m > -1$  时,  $x_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{m + 1}.$

从而  $|AB| = \sqrt{2}|x_1 - x_2| = 4\sqrt{2(m + 1)}. \dots\dots\dots 10 \text{分}$

由题设知  $|AB| = 2|MN|$ , 即  $4\sqrt{2(m + 1)} = 2(m + 1)$ , 解得  $m = 7.$

所以直线  $AB$  的方程为  $y = x + 7. \dots\dots\dots 12 \text{分}$

**21. 【命题点】**利用导数研究函数的单调性、最值及不等式恒成立问题

**【解】**(1) 函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,

$$f'(x) = 2e^{2x} - ae^x - a^2 = (2e^x + a)(e^x - a), \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

①若  $a = 0$ , 则  $f(x) = e^{2x}$ , 故  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增.

$\dots\dots\dots 2 \text{分}$

②若  $a > 0$ , 则由  $f'(x) = 0$  得  $x = \ln a.$

当  $x \in (-\infty, \ln a)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (\ln a, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  上单调递减, 在  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增.  $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

③若  $a < 0$ , 则由  $f'(x) = 0$  得  $x = \ln\left(-\frac{a}{2}\right).$

当  $x \in \left(-\infty, \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in \left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right), +\infty\right)$

时,  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  在  $\left(-\infty, \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$  上单调递减, 在

$\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right), +\infty\right)$  上单调递增.  $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

(2) ①若  $a = 0$ , 则  $f(x) = e^{2x}$ , 所以  $f(x) \geq 0. \dots\dots\dots 7 \text{分}$

②若  $a > 0$ , 则由(1)得, 当  $x = \ln a$  时,  $f(x)$  取得最小值, 最小值为  $f(\ln a) = -a^2 \ln a$ , 从而当且仅当  $-a^2 \ln a \geq 0$ , 即  $a \leq 1$

时,  $f(x) \geq 0$ . ..... 9 分

③若  $a < 0$ , 则由 (1) 得, 当  $x = \ln\left(-\frac{a}{2}\right)$  时,  $f(x)$  取得最小值,  
最小值为  $f\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right) = a^2 \left[\frac{3}{4} - \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right]$ , 从而当且仅当  
 $a^2 \left[\frac{3}{4} - \ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right] \geq 0$ , 即  $a \geq -2e^{\frac{3}{4}}$  时,  $f(x) \geq 0$ . ..... 11 分

综上,  $a$  的取值范围是  $[-2e^{\frac{3}{4}}, 1]$ . ..... 12 分

## 22. 【命题点】参数方程与普通方程的互化, 参数方程的应用

【解】(1) 曲线  $C$  的普通方程为  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ .

当  $a = -1$  时, 直线  $l$  的普通方程为  $x + 4y - 3 = 0$ . ..... 2 分

$$\text{由 } \begin{cases} x + 4y - 3 = 0, \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 3, \\ y = 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{21}{25}, \\ y = \frac{24}{25}. \end{cases}$$

从而  $C$  与  $l$  的交点坐标为  $(3, 0), \left(-\frac{21}{25}, \frac{24}{25}\right)$ . ..... 5 分

(2) 直线  $l$  的普通方程为  $x + 4y - a - 4 = 0$ , 故  $C$  上的点  $(3\cos \theta, \sin \theta)$  到  $l$  的距离为  $d = \frac{|3\cos \theta + 4\sin \theta - a - 4|}{\sqrt{17}}$ . ..... 6 分

当  $a \geq -4$  时,  $d$  的最大值为  $\frac{a+9}{\sqrt{17}}$ . 由题设得  $\frac{a+9}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$ , 所以  $a = 8$ ;

当  $a < -4$  时,  $d$  的最大值为  $\frac{-a+1}{\sqrt{17}}$ . 由题设得  $\frac{-a+1}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$ , 所以  $a = -16$ .

综上,  $a = 8$  或  $a = -16$ . ..... 10 分

## 23. 【命题点】绝对值不等式的求解

【解】(1) 当  $a = 1$  时, 不等式  $f(x) \geq g(x)$  等价于

$$x^2 - x + |x+1| + |x-1| - 4 \leq 0, \quad \text{①}$$

当  $x < -1$  时, ①式化为  $x^2 - 3x - 4 \leq 0$ , 无解;

当  $-1 \leq x \leq 1$  时, ①式化为  $x^2 - x - 2 \leq 0$ , 从而  $-1 \leq x \leq 1$ ;

当  $x > 1$  时, ①式化为  $x^2 + x - 4 \leq 0$ , 从而  $1 < x \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$ .

所以  $f(x) \geq g(x)$  的解集为  $\left\{x \mid -1 \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}\right\}$ .

..... 5 分

(2) 当  $x \in [-1, 1]$  时,  $g(x) = 2$ ,

所以  $f(x) \geq g(x)$  的解集包含  $[-1, 1]$ , 等价于当  $x \in [-1, 1]$  时  $f(x) \geq 2$ .

又  $f(x)$  在  $[-1, 1]$  的最小值必为  $f(-1)$  与  $f(1)$  之一,

所以  $f(-1) \geq 2$  且  $f(1) \geq 2$ , 得  $-1 \leq a \leq 1$ .

所以  $a$  的取值范围为  $[-1, 1]$ . ..... 10 分