

1. A 【命题点】集合的补集和并集运算

【解析】因为 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, 所以 $\complement_U B = \{3, 5\}$, 所以 $A \cup \complement_U B = \{1, 3, 5\}$, 故选 A.

2. B 【命题点】充分、必要条件的判断

【解析】依题意可知, 若 $a^2 = b^2$, 则 $a = b$ 或 $a = -b$. 当 $a = b$ 时, $a^2 + b^2 = 2ab$; 当 $a = -b$ 时, $a^2 + b^2 \neq 2ab$. 若 $a^2 + b^2 = 2ab$, 即 $(a-b)^2 = 0$, 则 $a = b$, 所以 $a^2 = b^2$. 所以“ $a^2 = b^2$ ”是“ $a^2 + b^2 = 2ab$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

3. D 【命题点】利用指数函数的单调性比较大小

【解析】依题意, 函数 $y = 1.01^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 因为 $0 < 0.5 < 0.6$, 所以 $1 < 1.01^{0.5} < 1.01^{0.6}$, 即 $a < b$. 又 $c = 0.6^{0.5} = \sqrt{\frac{6}{10}} = \frac{\sqrt{15}}{5} < 1$, 所以 $c < a < b$. 故选 D.

4. D 【命题点】函数的奇偶性, 由函数的图像判断解析式

【解析】由题图知函数 $f(x)$ 是偶函数, 且 $f(2) < 0$. 各选项函数性质分析如下:

选项	奇偶性	特殊点函数值	正误
A	$f(-x) = \frac{5(e^{-x} - e^x)}{x^2 + 2} = -f(x)$, 奇函数		×
B	$f(-x) = \frac{-5\sin x}{x^2 + 1} = -f(x)$, 奇函数		×
C	$f(-x) = \frac{5(e^{-x} + e^x)}{x^2 + 2} = f(x)$, 偶函数	$f(2) = \frac{5(e^2 + e^{-2})}{6} > 0$	×
D	$f(-x) = \frac{5\cos x}{x^2 + 1} = f(x)$, 偶函数	$f(2) = \frac{5\cos 2}{2^2 + 1} < 0$	✓

故选 D.

5. C 【命题点】数列的前 n 项和与通项的关系, 等比数列的判断及其通项

【解析】由题意知, 当 $n = 1$ 时, $a_2 = 2S_1 + 2 = 6$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n+1} = 2S_n + 2$, 则 $a_n = 2S_{n-1} + 2$, 两式相减得 $a_{n+1} = 3a_n$. 又 $a_2 = 3a_1$, $a_1 = 2$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 3 为公比的等比数列, 所以 $a_4 = 54$, 故选 C.

6. B 【命题点】三角函数的图像与性质

【解析】各选项分析如下:

选项	解析式	对称轴 方程	周期	正误
A	$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	$x = 2k+1,$ $k \in \mathbf{Z}$	4	×
B	$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$	$x = 2k,$ $k \in \mathbf{Z}$	4	✓
C	$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$	$x = 4k+2,$ $k \in \mathbf{Z}$	8	×
D	$f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$	$x = 4k,$ $k \in \mathbf{Z}$	8	×

故选 B.

7. C 【命题点】散点图、样本的线性相关及相关系数

【解析】由题中散点图可知这些散点大致落在一条从左下角到右上角的直线附近,表明随花萼长度的增加,相应的花瓣长度呈增加的趋势,由成对样本数据的分布规律可知两者呈线性相关关系,且为正相关,故 A, B 错误, C 正确. 同时样本具有随机性,样本相关系数会随着样本成对数据的变化而变化,故 D 错误. 故选 C.

8. B 【命题点】三棱锥的体积比

【解析】设 $\triangle PMN$, $\triangle PBC$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 则 $\frac{S_1}{S_2} =$

关键⑤

$$\frac{\frac{1}{2}PM \cdot PN \cdot \sin \angle MPN}{\frac{1}{2}PC \cdot PB \cdot \sin \angle CPB} = \frac{2}{9}. \text{ 设点 } A \text{ 到平面 } PBC \text{ 的距离为}$$

$$d, \text{ 所以 } \frac{V_{P-AMN}}{V_{P-ABC}} = \frac{V_{A-PMN}}{V_{A-PBC}} = \frac{\frac{1}{3}S_1 \cdot d}{\frac{1}{3}S_2 \cdot d} = \frac{2}{9}, \text{ 故选 B.}$$

9. D 【命题点】双曲线的方程和几何性质

【解析】由题意知点 P 在渐近线 $y = \frac{b}{a}x$ 上, O 为坐标原点, 则

$$\tan \angle POF_2 = \frac{b}{a}, \sin \angle POF_2 = \frac{b}{c}, \text{ 所以 } |PF_2| = |OF_2| \cdot$$

$\sin \angle POF_2 = b, |PO| = a$, 所以 $b = 2$ (另解: 双曲线的焦点到渐近

线的距离为虚半轴长, 则 $|PF_2| = b = 2$), 点 $P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right)$.

$$\text{由题知点 } F_1(-c, 0), \text{ 所以 } k_{PF_1} = \frac{\frac{ab}{c} - 0}{\frac{a^2}{c} - (-c)} = \frac{ab}{a^2 + c^2} = \frac{2a}{2a^2 + 4} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 解得 } a = \sqrt{2}, \text{ 则双曲线的方程为 } \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1. \text{ 故选 D.}$$

快解 易知 $b = 2$, 排除 B, C 选项; 若 $a = \sqrt{2}$, 则 $c = \sqrt{6}$,

$$F_1(-\sqrt{6}, 0), P\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \text{ 此时满足 } k_{PF_1} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 故选 D.}$$

10. 4+i 【命题点】复数的基本运算

【解析】 $\frac{5+14i}{2+3i} = \frac{(5+14i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{52+13i}{13} = 4+i.$

11.60 【命题点】二项展开式特定项的系数

【解析】由二项式定理得 $\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^6$ 展开式的通项 $T_{k+1} = C_6^k (2x^3)^{6-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_6^k 2^{6-k} x^{18-4k}$, 令 $18-4k=2$, 解得 $k=4$, 所以 x^2 项的系数为 $C_6^4 2^2 = 60$.

12.6 【命题点】圆的切线, 抛物线的弦长计算

【解析】设圆心为 C , 直线与圆 C 相切于点 B , 根据对称性, 不妨设点 B 位于第三象限, $\sin \angle COB = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (提示: 圆的切线的性质的应用), 则直线 AO 的斜率为 $\sqrt{3}$, 所以直线 AO 的方程为 $y = \sqrt{3}x$. 设点 $A(a, \sqrt{3}a)$, $a > 0$, 则 $a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 8^2$, 解得 $a=4$, 所以 $A(4, 4\sqrt{3})$, 代入抛物线方程得 $(4\sqrt{3})^2 = 2p \cdot 4$, 解得 $p=6$.

一题多解 设直线方程为 $y=kx$, 与圆的方程联立可得, $(k^2+1)x^2+4x+1=0$, 因为直线与圆相切, 所以 $\Delta=16-4(k^2+1)=0$, 解得 $k^2=3$. 直线 $y=kx$ 与抛物线 $y^2=2px$ ($p>0$) 联立可得 $k^2x^2=2px$, 解得 $x=\frac{2p}{k^2}$, 所以 $|OA| = \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{2p}{k^2} = \sqrt{1+3} \cdot \frac{2p}{3} = 8$, 解得 $p=6$.

13. $\frac{1}{20}$ $\frac{3}{5}$ 【命题点】相互独立事件的概率计算

【解析】由题意知从三个箱子中取到黑球的概率分别为 $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 因为从三个箱子中取球相互独立, 所以取得的球均为黑球的概率为 $\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$. 三个箱子中小球的数量占总数的比例分别为 $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{15}$, $\frac{2}{5}$, 所以白球占比为 $\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \frac{4}{15} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{5}$, 则从中取得一个白球的概率为 $\frac{3}{5}$.

14. $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b$ $\frac{13}{24}$ 【命题点】平面向量的线性运算与数量积的最值

【解析】由题意, $\vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$. $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BF} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$, 所以 $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = \left(\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{12}a \cdot b + \frac{1}{6}b^2 = \frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{24}|a||b| + \frac{1}{6}b^2$. 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理

可得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle BAC = AB^2 + AC^2 - AB \cdot AC$, 即 $1 = a^2 + b^2 - |a||b| \geq 2|a||b| - |a||b| = |a||b|$ (提示: 基本不等式的应用), 当且仅当 $|a| = |b| = 1$ 时取等号, 所以 $|a||b| \leq 1$, 所以 $\vec{AE} \cdot \vec{AF} = \frac{1}{6}a^2 + \frac{5}{24}|a||b| + \frac{1}{6}b^2 = \frac{1}{6}(1 + |a||b|) + \frac{5}{24}|a||b| \leq \frac{1}{6} \times (1+1) + \frac{5}{24} = \frac{13}{24}$, 所以 $\vec{AE} \cdot \vec{AF}$ 的最大值为 $\frac{13}{24}$.

15. $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

思路导引

令 $x^2 - ax + 1 = 0$ $\xrightarrow{\text{判别式的正负}}$ 判断 $x^2 - ax + 1$ 的正负分类讨论去绝对值, 化简 $f(x)$ 的解析式 $\xrightarrow{f(x) \text{ 有且仅有两个零点}}$ a 的取值范围

【命题点】根据函数的零点个数求参数的取值范围

【解析】令 $x^2 - ax + 1 = 0$, 则 $\Delta_1 = a^2 - 4$,

当 $-2 \leq a \leq 2$ 时, $\Delta_1 \leq 0$, $x^2 - ax + 1 \geq 0$ 恒成立, 此时 $f(x) = (a-1)x^2 + (a-2)x - 1$.

当 $a \neq 1$ 时, 令 $f(x) = (a-1)x^2 + (a-2)x - 1 = 0$, 则 $\Delta_2 = (a-2)^2 + 4(a-1) = a^2$, 当 $a \neq 0$ 时, $\Delta_2 > 0$, $f(x)$ 有且仅有两个零点;

当 $a = 1$ 时, $f(x) = -x - 1$, $f(x)$ 有且仅有一个零点, 不符合题意,

所以 $-2 \leq a < 0$ 或 $0 < a < 1$ 或 $1 < a \leq 2$.

当 $a < -2$ 或 $a > 2$ 时, $\Delta_1 > 0$, 方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 有两个不等实根, 设为 $x_1, x_2, x_1 < x_2$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} [(a+1)x-1](x-1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ [(a-1)x-1](x+1), & x < x_1 \text{ 或 } x > x_2. \end{cases}$$

设 $g(x) = [(a+1)x-1](x-1)$, 令 $g(x) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = \frac{1}{a+1}$; 设 $h(x) = [(a-1)x-1](x+1)$, 令 $h(x) = 0$, 解得 $x = -1$

或 $x = \frac{1}{a-1}$.

当 $a < -2$ 时, $x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < -1$, $\frac{1}{a+1} < x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} < \frac{1}{a-1}$,

所以 $f(x)$ 有且仅有两个零点, 符合题意.

当 $a > 2$ 时, 因为 $x_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} > 1$, 且 $\frac{1}{a+1} < x_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < \frac{1}{a-1}$,

所以 $f(x)$ 有且仅有两个零点, 符合题意.

综上所述, a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

16. **【命题点】**正弦定理和余弦定理在解三角形中的应用、三角恒等变换

【解】(1) 由正弦定理可得 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 即 $\sin B = \frac{b \sin A}{a} =$

$$\frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{39}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13}. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由余弦定理可得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 即 $-\frac{1}{2} = \frac{4 + c^2 - 39}{2 \times 2c}$, 解得 $c = 5$ 或 $c = -7$ (舍). $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

(3) 由 (1) 知, $\sin B = \frac{\sqrt{13}}{13}$ 且 B 为锐角, 所以 $\cos B = \frac{2\sqrt{39}}{13}$, 所以 $\sin(B - C) = \sin[B - (60^\circ - B)] = \sin(2B - 60^\circ) = \frac{1}{2} \sin 2B - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2B = \sin B \cos B - \frac{\sqrt{3}}{2} (\cos^2 B - \sin^2 B) = \frac{\sqrt{13}}{13} \times \frac{2\sqrt{39}}{13} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\left(\frac{2\sqrt{39}}{13} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}}{13} \right)^2 \right] = -\frac{7\sqrt{3}}{26}. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

17. 【命题点】线面平行的判定、平面与平面的夹角、点到平面的距离的计算

(1) **【证明】**如图, 连接 MN .

在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 因为 $A_1C_1 = 1, AC = 2$, 所以 $AC = 2A_1C_1$ 且 $AC \parallel A_1C_1$.

又因为 M, N 分别为 BC, AB 的中点,

所以 $AC = 2MN$ 且 $AC \parallel MN$.

所以 $MN \parallel A_1C_1$ 且 $MN = A_1C_1$,

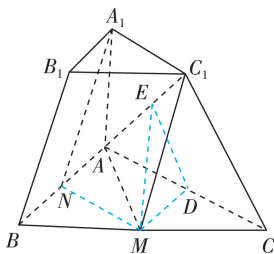
所以四边形 MNA_1C_1 为平行四

边形, 所以 $A_1N \parallel C_1M$.

又因为 $A_1N \not\subset$ 平面 AMC_1 ,

$C_1M \subset$ 平面 AMC_1 ,

所以 $A_1N \parallel$ 平面 AMC_1 . $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$



(2) **【解】**取 AC 的中点为 D , 过 D 作 $DE \perp AC_1$, 垂足为 E , 连接 EM, MD , 如图.

因为 $AA_1 \perp$ 平面 $ABC, MD \subset$ 平面 ABC , 所以 $AA_1 \perp MD$. 由 M

为 BC 的中点可知 $MD \parallel AB$ 且 $MD = \frac{1}{2}AB$, 因为 $AB \perp AC$, 所

以 $AC \perp MD$. 又因为 $AA_1 \cap AC = A$, 所以 $MD \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

因为 $AC_1 \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $MD \perp AC_1$.

又 $MD \cap DE = D$, 所以 $AC_1 \perp$ 平面 MDE .

因为 $ME \subset$ 平面 MDE , 所以 $AC_1 \perp ME$, 所以 $\angle MED$ 即为平面 C_1MA 与平面 ACC_1A_1 夹角的平面角 (关键: 根据线面关系找出所求面面夹角的平面角). $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

在 $\triangle MDE$ 中, 因为 $MD = \frac{1}{2}AB = 1$, 由 $S_{\triangle ADC_1} = \frac{1}{2} \times AD \times AA_1 =$

$\frac{1}{2} \times AC_1 \times ED$ 可得 $ED = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 因为 $ED \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所

以 $MD \perp ED$, 所以 $ME = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 + 1^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, 所以

$$\cos \angle MED = \frac{ED}{EM} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{3\sqrt{5}}{5}} = \frac{2}{3}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(3)【解】设点 C 到平面 AMC_1 的距离为 h , 由等体积法得

$$V_{C-AMC_1} = V_{C_1-CMA}, \text{ 即 } \frac{1}{3} \times S_{\triangle AMC_1} \times h = \frac{1}{3} \times S_{\triangle CMA} \times 2, \quad \dots\dots 13 \text{ 分}$$

$$\text{即 } h = \frac{2S_{\triangle CMA}}{S_{\triangle AMC_1}} = \frac{2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 1}{\frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{3}. \quad \dots\dots 15 \text{ 分}$$

18. 【命题点】 椭圆的标准方程、离心率及直线与椭圆的位置关系

【解】(1) 由题意可知 $\begin{cases} a+c=3, \\ a-c=1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ c=1, \end{cases}$

所以 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$,

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

$\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 设 $P(x_0, y_0)$, $x_0 \in (-2, 0) \cup (0, 2)$. 由(1)及题意可知 $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$, $F(1, 0)$, 所以直线 A_2P 的方程为 $y - 0 =$

$$\frac{y_0}{x_0 - 2}(x - 2), \text{ 令 } x = 0, \text{ 则 } y = \frac{-2y_0}{x_0 - 2}, \text{ 即 } Q\left(0, \frac{-2y_0}{x_0 - 2}\right). \quad \dots 10 \text{ 分}$$

(根据点 P 的坐标求出点 Q 的坐标是解题的关键)

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle A_1PQ} &= |S_{\triangle A_1A_2Q} - S_{\triangle A_1A_2P}| = \left| \frac{1}{2} \times 4 \times \left| \frac{-2y_0}{x_0 - 2} \right| - \frac{1}{2} \times 4 \times |y_0| \right| \\ &= \left| \left| \frac{4y_0}{x_0 - 2} \right| - 2|y_0| \right|, S_{\triangle A_2FP} = \frac{1}{2} \times 1 \times |y_0| = \frac{1}{2}|y_0|. \end{aligned}$$

$$\text{由题意可得 } \left| \left| \frac{4y_0}{x_0 - 2} \right| - 2|y_0| \right| = 2 \times \frac{1}{2}|y_0|, \text{ 所以 } |x_0 - 2| = 4$$

$$(\text{舍}) \text{ 或 } |x_0 - 2| = \frac{4}{3}, \text{ 所以 } x_0 = \frac{10}{3} (\text{舍}) \text{ 或 } x_0 = \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } P\left(\frac{2}{3}, \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) (\text{提示: 容易忽视多解的情形}),$$

$\dots\dots 13 \text{ 分}$

$$\text{所以直线 } A_2P \text{ 的方程为 } \sqrt{3}x \pm \sqrt{2}y - 2\sqrt{3} = 0. \quad \dots\dots 15 \text{ 分}$$

一题多解 作 $FF' \perp PA_2$ 于点 F' , 作 $A_1A'_1 \perp PA_2$ 于点 A'_1 (图略), 易知 $|A_1A'_1| = 4|FF'|$.

$$\text{因为 } S_{\triangle A_1PQ} = 2S_{\triangle A_2FP}, \text{ 所以 } |PQ| = \frac{1}{2}|PA_2|. \quad \dots\dots 10 \text{ 分}$$

① 当 P 在 y 轴左侧时, 只有 Q 为 PA_2 的中点时满足条件, 又 P 不在顶点, 故不存在点 P 满足题意. $\dots\dots 12 \text{ 分}$

② 当 P 在 y 轴右侧时, P 为 A_2Q 的靠近 Q 的三等分点.

$$\text{又 } x_Q = 0, x_{A_2} = 2, \text{ 所以 } x_P = \frac{2}{3}, \text{ 所以 } y_P = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}, \quad \dots\dots 14 \text{ 分}$$

$$\text{所以直线 } A_2P \text{ 的方程为 } \sqrt{3}x \pm \sqrt{2}y - 2\sqrt{3} = 0. \quad \dots\dots 15 \text{ 分}$$

19. 【命题点】 等差数列与等比数列的通项公式及求和

(1)【解】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} a_2 + a_5 = 2a_1 + 5d = 16, \\ a_5 - a_3 = 2d = 4, \end{cases}$ 所以

$$\begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 2, \end{cases} \text{ 所以 } a_n = 2n + 1.$$

$$\sum_{i=2^{n-1}}^{2^n-1} a_i = \frac{(a_{2^{n-1}} + a_{2^n-1})(2^n - 1 - 2^{n-1} + 1)}{2} = 3 \cdot 4^{n-1}. \quad \dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2)(i)【证明】当 $k \geq 2$ 时, 在不等式 $b_k < a_n$ 中, 令 $n = 2^{k-1}$ 得 $b_k < a_{2^{k-1}} = 2^k + 1$; 同理在不等式 $a_n < b_{k+1}$ 中, 令 $n = 2^k - 1$ 得 $a_{2^k-1} = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1 < b_{k+1}$, 则 $2^k - 1 < b_k < 2^k + 1$.

$\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

(ii)【解】由(i)得当 $k \geq 2$ 时, $2^k - 1 < b_k < 2^k + 1$,

$$\text{则 } 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k < \frac{b_k}{2^k} < 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k,$$

令 $k \rightarrow +\infty$ 可得 $\frac{b_k}{2^k} = 1$, 所以 $b_k = 2^k$, 即 $b_n = 2^n$,

所以 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $2^{n+1} - 2$. $\dots\dots\dots 15 \text{ 分}$

20. 【命题点】函数与导数的综合应用

(1)【解】 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln(x+1) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{x+1}$, 所以 $f'(2) =$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \ln 3. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2)【证明】当 $x > 0$ 时, 欲证明 $f(x) > 1$, 只需证明 $\ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} > 0$. 设 $u(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$, 则 $u'(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $\forall x > 0, u(x) > u(0) = 0$, 即当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$. $\dots\dots 8 \text{ 分}$

(3)【证明】设 $g(n) = \ln(n!) - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n + n$, 则由 $f\left(\frac{1}{n}\right) > 1$ 可得 $g(n) - g(n+1) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 > 0$, 即 $g(n)$ 单调递减, 所以 $\forall n \in \mathbf{N}^*, g(n) \leq g(1) = 1$.

需要用到不等式 $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) \ln(1+x) - 1 < \frac{x^2}{12}, x > 0$.

设 $h(x) = \ln(x+1) - \frac{(x^2+12)x}{6(x+2)}$, 则只需证明当 $x > 0$ 时, $h(x) < 0$ 即可.

$$h'(x) = -\frac{x^3(x+4)}{3(x+1)(x+2)^2} < 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以当 $x > 0$ 时, $h(x) < h(0) = 0$. $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 < \frac{1}{12n^2} < \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right),$$

$$g(1) - g(2) = \frac{3}{2} \ln 2 - 1,$$

$$g(2) - g(3) = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) - 1 < \frac{1}{12} \left(1 - \frac{1}{2}\right),$$

$\dots\dots$

$$g(n-1) - g(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) - 1 < \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right), \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

以上各式相加可得

$$g(1)-g(n)<\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)<\frac{3}{2}\ln 2-1+\frac{1}{12}<\frac{1}{6}.$$

又因为 $g(1)=1$, 所以 $g(n)>\frac{5}{6}$ 15 分

当 $n=1$ 时, $\frac{5}{6}<g(1)\leq 1$ 成立,

综上得证. 16 分