

## 1. C 【命题点】集合的并集运算

【解析】 $\because A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}, B = \{x | 2 < x < 4\},$

$\therefore A \cup B = \{x | 1 \leq x < 4\}.$  故选 C.

## 2. D 【命题点】复数的乘除运算

【解析】由题意得  $\frac{2-i}{1+2i} = \frac{(2-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{-5i}{5} = -i.$  故选 D.

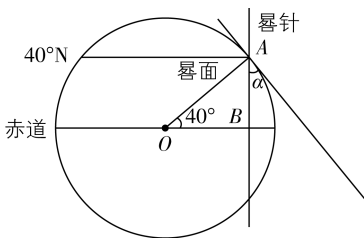
## 3. C 【命题点】排列组合的应用

【解析】从 6 名同学中任选 1 名同学去甲场馆,有  $C_6^1$  种选法,然后从剩下的 5 名同学中任选 2 名同学去乙场馆,有  $C_5^2$  种选法,最后直接安排剩下的 3 名同学去丙场馆,由分步乘法计数原理可知,不同的安排方法共有  $C_6^1 C_5^2 = 60$  种. 故选 C.

**关键点拨** 解题关键是利用分步乘法计数原理依次求出每步的组合数.

## 4. B 【命题点】传统文化在立体几何中的应用

【解析】画出赤道和纬度的截面图,  $OA$  与地球赤道所在平面所成角为  $\angle AOB$ . 因为点  $A$  处的纬度为北纬  $40^\circ$ , 所以  $\angle AOB = 40^\circ$ . 过点  $A$  且与  $OA$  垂直的平面在截面图中为过点  $A$  的切线, 则晷针与点  $A$  处的水平面所成的角, 即晷针与点  $A$  处的切线所成的角  $\alpha$  (提示: 正确理解题意作出截面图, 找到晷针与点  $A$  处的水平面所成角和点  $A$  处的纬度的关系), 可知  $\alpha = 40^\circ$ , 故选 B.

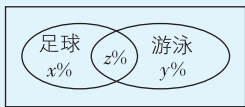


## 5. C 【命题点】统计数据的比例分布

【解析】该校 60% 的学生喜欢足球, 82% 的学生喜欢游泳, 这两组数据包含既喜欢足球又喜欢游泳的学生, 而 96% 的学生喜欢足球或游泳, 则该校既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例为  $60\% + 82\% - 96\% = 46\%$  (提示: 既喜欢足球又喜欢游泳的学生数 = 喜欢足球的学生数 + 喜欢游泳的学生数 - 喜欢足球或游泳的学生数). 故选 C.

**一题多解** 设共有  $x\%$  的学生只喜欢足球, 有  $y\%$  的学生只喜欢游泳, 有  $z\%$  的学生既喜欢足球又喜欢游泳, 如图所

示, 列方程得 
$$\begin{cases} x+z=60, \\ x+y+z=96, \\ y+z=82, \end{cases}$$
 解得  $z=46$ .



46. 故选 C.

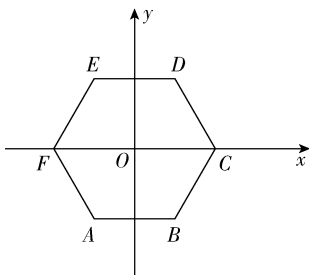
## 6. B 【命题点】函数模型的实际应用

【解析】由  $R_0 = 1 + rT$ ,  $R_0 = 3.28$ ,  $T = 6$ , 得  $r = 0.38$ , 代入  $I(t) = e^{rt}$ , 得  $I(t) = e^{0.38t}$ . 在疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍, 则可令  $2 = e^{0.38t}$ , 两边取对数, 得  $\ln 2 = 0.38t$ , 所以  $t = \frac{\ln 2}{0.38} \approx \frac{0.69}{0.38} \approx 1.8$ , 即在疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为 1.8 天. 故选 B.

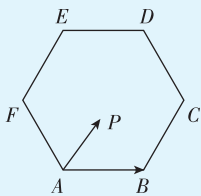
▶ **关键点拨** 在疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍, 可将原  $I(t)$  看作 1, 则现在的  $I(t)$  为 2, 代入公式得到的时间即为在疫情初始阶段, 累计感染病例数增加 1 倍需要的时间.

## 7. A 【命题点】平面向量数量积的取值范围

【解析】如图, 以正六边形的中心为坐标原点  $O$ , 线段  $FC$  所在直线为  $x$  轴, 线段  $FC$  的垂直平分线为  $y$  轴, 建立平面直角坐标系, 则  $F(-2, 0)$ ,  $C(2, 0)$ ,  $A(-1, -\sqrt{3})$ ,  $B(1, -\sqrt{3})$ . 设  $P(x, y)$ ,  $x \in (-2, 2)$ , 则  $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = (x+1, y+\sqrt{3}) \cdot (2, 0) = 2x+2 \in (-2, 6)$ . 故选 A.



▶ **一题多解**  $\vec{AP} \cdot \vec{AB} = |\vec{AP}| \cdot |\vec{AB}| \cos \angle PAB = 2|\vec{AP}| \cdot \cos \angle PAB$ ,  $|\vec{AP}| \cdot \cos \angle PAB$  即为  $\vec{AP}$  在  $\vec{AB}$  方向上的投影, 如图, 当  $P$  与  $C$ ,  $F$  分别重合时,  $\vec{AP}$  在  $\vec{AB}$  方向上的投影最大和最小. 又  $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos 30^\circ = 6$ ,  $\vec{AF} \cdot \vec{AB} = |\vec{AF}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos 120^\circ = -2$ , 且  $P$  在正六边形  $ABCDEF$  内部运动, 则  $\vec{AP} \cdot \vec{AB} \in (-2, 6)$  (易错: 注意临界值不可取), 故选 A.



## 8. D 【命题点】函数的性质与不等式的求解

【解析】奇函数  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  单调递减, 且  $f(2) = 0$ , 则  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  单调递减, 且  $f(-2) = 0$ . 由  $xf(x-1) \geq 0$ , 得  $\begin{cases} x \leq 0, \\ f(x-1) \leq 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x > 0, \\ f(x-1) \geq 0 \end{cases}$ , 即  $\begin{cases} x \leq 0, \\ -2 \leq x-1 \leq 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x > 0, \\ 0 \leq x-1 \leq 2 \end{cases}$ , 解得  $-1 \leq x \leq 0$  或  $1 \leq x \leq 3$ . 故选 D.

▶ **关键点拨** 利用奇函数图像关于原点对称判断函数的单调性, 分类讨论求解不等式.

## 9. ACD 【命题点】曲线方程表示的轨迹

【解析】由曲线  $C: mx^2 + ny^2 = 1$ , 当  $m > n > 0$  时,  $\frac{1}{n} > \frac{1}{m} > 0$ , 曲线

$C: \frac{x^2}{\frac{1}{m}} + \frac{y^2}{\frac{1}{n}} = 1$  表示焦点在  $y$  轴上的椭圆, 故 A 正确; 当  $m = n >$

0 时, 曲线  $C: x^2 + y^2 = \frac{1}{n}$  表示半径为  $\sqrt{\frac{1}{n}}$  的圆, 故 B 错误; 当

$mn < 0$  时, 曲线  $C: mx^2 + ny^2 = 1$  表示双曲线, 令  $mx^2 + ny^2 = 0$ , 则

其渐近线方程为  $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$ , 故 C 正确; 当  $m = 0, n > 0$  时,

曲线  $C: ny^2 = 1$ , 即  $y = \pm \sqrt{\frac{1}{n}}$  表示两条与  $x$  轴平行的直线, 故

D 正确. 故选 ACD.

**关键点拨** 利用参数  $m, n$  的范围进行分类讨论, 依次研究不同的轨迹方程.

#### 10. BC 【命题点】三角函数的图像、性质及其解析式

【解析】由图可知, 最小正周期  $T = \frac{2\pi}{|\omega|} = 2\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \pi$ , 得

$\omega = \pm 2$ , 故 A 错误;

当  $\omega = 2$  时, 将  $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$  的坐标代入  $y = \sin(2x + \varphi)$ , 得  $2 \times \frac{\pi}{6} +$

$\varphi = 2k\pi + \pi, k \in \mathbf{Z}$ , 即  $\varphi = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$ .

当  $k = 0$  时,  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ , 则  $y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + 2x - \frac{\pi}{3}\right) =$

$-\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$ , 故 B 正确;

$y = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ , 故 C

正确;

$y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + 2x - \frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) =$

$-\cos\left(\frac{5\pi}{6} - 2x\right)$ , 故 D 错误. 故选 BC.

**关键点拨** 利用三角函数图像的周期性求出参数  $\omega$ , 代入特殊点求出参数  $\varphi$ , 再根据诱导公式判断函数解析式的不同形式.

#### 11. ABD 【命题点】基本不等式的应用

【解析】由  $a > 0, b > 0, a + b = 1$ , 得  $\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ , 即  $a^2 +$

$b^2 \geq \frac{1}{2}$ , 当且仅当  $a = b = \frac{1}{2}$  时取等号, 故 A 正确;

由  $a > 0, b > 0, a + b = 1$ , 得  $a - b = 2a - 1 > -1$ , 故  $2^{a-b} > \frac{1}{2}$ , 故 B

正确;

$\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab) \leq \log_2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \log_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = -2$ , 当且

仅当  $a=b=\frac{1}{2}$  时, 等号成立, 故 C 错误 (另解: 令  $a=\frac{1}{4}, b=\frac{3}{4}$ , 则  $\log_2 \frac{1}{4} + \log_2 \frac{3}{4} < -2$ , 故 C 错误);

$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = 1 + 2\sqrt{ab} \leq 1 + a + b = 2$ , 得  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$ , 当且仅当  $a=b=\frac{1}{2}$  时, 等号成立, 故 D 正确. 故选 ABD.

**方法速记** 灵活利用基本不等式的变形, 掌握  $ab \leq$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2}{2}.$$

## 12. AC 【命题点】概率统计的新定义问题

**【解析】**  $H(X) = -\sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i$ , 当  $n=1$  时,  $p_1=1$ ,  $H(X) = -p_1 \log_2 p_1 = 0$ , 故 A 正确.

当  $n=2$  时,  $0 < p_i < 1$ ,  $\log_2 p_i < 0$ ,  $p_1 + p_2 = 1$ , 则  $H(X) = -[p_1 \log_2 p_1 + (1-p_1) \log_2 (1-p_1)]$ .

**解法一:** 令  $f(p) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p)$ , 由  $f(p) = f(1-p)$  知  $f(p)$  的图像关于直线  $p=\frac{1}{2}$  对称, 则在  $(0, 1)$  上总能找到两个不同的值, 使得对应的  $H(X)$  相等, 故 B 错误.

**解法二:** 设  $f(p) = -[p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)]$ , 则  $f'(p) = -\left[\log_2 p + p \cdot \frac{1}{p \cdot \ln 2} - \log_2 (1-p) + (1-p) \cdot \frac{-1}{(1-p) \ln 2}\right] = \log_2 \frac{1-p}{p}$ ,

当  $0 < p < \frac{1}{2}$  时,  $f'(p) > 0$ ; 当  $p > \frac{1}{2}$  时,  $f'(p) < 0$ , 故 B 错误.

当  $p_i = \frac{1}{n}$  时,  $H(X) = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_2 \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} \times n \times \log_2 \frac{1}{n} = \log_2 n$ ,

则  $H(X)$  随  $n$  的增大而增大, 故 C 正确.

当  $n=2m$  时,  $Y=1, 2, \dots, m$ ,  $P(Y=j) = p_j + p_{2m+1-j}$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ),  $p_i > 0, p_j > 0$ ,

则  $H(X) = -(p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2 + \dots + p_{2m} \log_2 p_{2m})$ ,

$H(Y) = -[(p_1 + p_{2m}) \log_2 (p_1 + p_{2m}) + (p_2 + p_{2m-1}) \log_2 (p_2 + p_{2m-1}) + \dots + (p_m + p_{m+1}) \log_2 (p_m + p_{m+1})] = -[p_1 \log_2 (p_1 + p_{2m}) + p_2 \log_2 (p_2 + p_{2m-1}) + \dots + p_{2m} \log_2 (p_{2m} + p_1)]$ ,

则  $H(X) - H(Y) = p_1 \log_2 \frac{p_1 + p_{2m}}{p_1} + p_2 \log_2 \frac{p_2 + p_{2m-1}}{p_2} + \dots +$

$p_{2m} \log_2 \frac{p_{2m} + p_1}{p_{2m}} = p_1 \log_2 \left(1 + \frac{p_{2m}}{p_1}\right) + p_2 \log_2 \left(1 + \frac{p_{2m-1}}{p_2}\right) + \dots +$

$p_{2m} \log_2 \left(1 + \frac{p_1}{p_{2m}}\right) > 0$ , 所以  $H(X) > H(Y)$ , 故 D 错误. 故选 AC.

**关键点拨** 解题关键在于把概率新定义的关系式转化为函数式研究, 当  $n=1$  时, 求  $H(X)$  的值; 当  $n=2m$  时, 作差比较  $H(X)$  与  $H(Y)$  的大小.

## 13. $\frac{16}{3}$ 【命题点】直线与抛物线的位置关系及弦长

【解析】由  $y^2=4x$ , 得其焦点  $F(1,0)$ . 又直线  $AB$  的斜率为  $\sqrt{3}$ , 所以直线  $AB$  的方程为  $y=\sqrt{3}(x-1)$ . 联立

$$\begin{cases} y=\sqrt{3}(x-1), \\ y^2=4x, \end{cases} \text{ 得 } 3x^2-10x+3=0, \text{ 设 } A(x_A, y_A), B(x_B, y_B),$$

则  $x_A+x_B=\frac{10}{3}$ . 又  $|AF|=x_A+1, |BF|=x_B+1$  (提示: 利用抛物线

定义表示  $|AF|, |BF|$ ), 所以  $|AB|=|AF|+|BF|=x_A+x_B+$

$$2=\frac{10}{3}+2=\frac{16}{3}.$$

**方法速记** 过抛物线  $y^2=2px(p>0)$  焦点的直线与抛物线交于  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$  两点, 则  $|AB|=x_A+x_B+p$ .

**快解** 设斜率为  $\sqrt{3}$  的直线倾斜角为  $\theta$ , 则  $\theta=\frac{\pi}{3}$ , 所以

$$|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{4}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{16}{3} \quad \left(\text{提示: 过抛物线 } y^2=2px(p>0)\right.$$

焦点且倾斜角为  $\theta$  的直线与抛物线相交的弦长为  $\frac{2p}{\sin^2\theta}$ , 过

抛物线  $x^2=2py(p>0)$  焦点且倾斜角为  $\theta$  的直线与抛物线相交的弦长为  $\frac{2p}{\cos^2\theta}$ ).

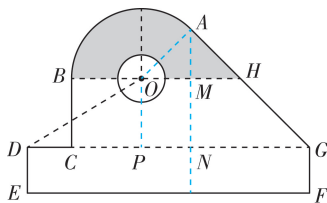
#### 14. $3n^2-2n$ 【命题点】等差数列求和

【解析】数列  $\{2n-1\}$  表示首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 各项均为正奇数, 而数列  $\{3n-2\}$  表示首项为 1, 公差为 3 的等差数列, 各项分别为交替出现的正奇数与正偶数, 它们的公共项为数列  $\{3n-2\}$  中的奇数项, 所以  $\{a_n\}$  是首项为 1, 公差为 6 的等差数列, 其前  $n$  项和  $S_n=n \times 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 6 = 3n^2-2n$ .

**易错警示** 等差数列的奇数项与偶数项各成等差数列, 需要注意首项与公差的变化.

#### 15. $\frac{5\pi}{2}+4$ 【命题点】三角形与扇形面积的应用

【解析】连接  $OA$ , 过点  $A$  作  $EF$  的垂线, 分别交  $BH, DG$  于点  $M, N$ , 过点  $O$  垂直于  $CG$  的直线与  $CG$  交于点



$P$ , 则由  $EF=12, DE=2, A$  到直线  $DE$  和  $EF$  的距离为 7 可知

$AN=NG=5$ , 则  $\angle MAH=\frac{\pi}{4}$ . 又  $OA \perp AG$ , 所以  $\triangle AOM$  为等腰

直角三角形,  $\angle AOM=\frac{\pi}{4}, \angle AOB=\frac{3\pi}{4}$ . 令  $AM=OM=MH=$

$PN=x$ , 则  $OP=MN=5-x, DP=7-x, OA=AH=\sqrt{2}x$ , 由

$\tan \angle ODC = \frac{OP}{DP} = \frac{5-x}{7-x} = \frac{3}{5}$ , 得  $x=2$ , 则  $OA=2\sqrt{2}$ , 所以  $S_{\triangle OAH} =$

$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot AH = 4$ ,  $S_{\text{扇形}OAB} = \frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{4} \times OA^2 = \frac{3\pi}{8} \times 8 = 3\pi$ , 圆孔半

径为 1, 则  $S_{\text{半圆}O} = \frac{1}{2} \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}OAB} + S_{\triangle OAH} -$

$$S_{\text{半圆}O} = 3\pi + 4 - \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} + 4.$$

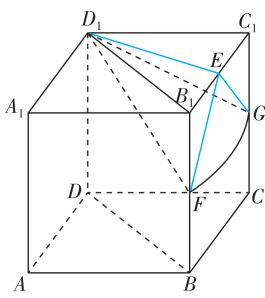
**关键点拨** 解题关键在于利用分割法求不规则几何图形的面积, 找出扇环所在圆的半径, 结合三角形求出圆心角, 以便求扇形面积, 通过间接法求解.

16.  $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

**思路导引** 作图  $\rightarrow$  取  $BB_1, CC_1$  的中点  $F, G \rightarrow D_1F = D_1G = \sqrt{5} \rightarrow \widehat{FG}$  即球与侧面的交线  $\rightarrow \widehat{FG}$  所在圆半径、圆心角  $\xrightarrow{\text{弧长公式}}$  交线长.

**【命题点】直四棱柱的侧面被球截得的弧长**

**【解析】** 如图, 直四棱柱  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  的棱长都为 2,  $\angle BAD = \angle B_1A_1D_1 = 60^\circ$ , 则  $\triangle A_1B_1D_1$  与  $\triangle B_1C_1D_1$  均为边长为 2 的等边三角形. 在侧面  $BCC_1B_1$  内要找到与点  $D_1$  连线的长度为  $\sqrt{5}$  的点的轨



迹, 取  $B_1C_1$  的中点为  $E$ , 连接  $D_1E$ , 得  $D_1E \perp B_1C_1$ , 又  $BB_1 \perp D_1E$ ,  $B_1C_1 \cap BB_1 = B_1$ , 所以  $D_1E \perp$  平面  $BCC_1B_1$ ,  $D_1E = \sqrt{3}$ . 取  $BB_1, CC_1$  的中点分别为  $F, G$ , 连接  $EF, EG$ , 则  $EF = EG = \sqrt{2}$ ,  $D_1F = D_1G = \sqrt{5}$ , 于是以  $D_1$  为球心,  $\sqrt{5}$  为半径的球与侧面  $BCC_1B_1$  的交线为圆弧  $FG$ , 其中弧  $FG$  所在圆的圆心为  $E$ , 半径  $EF = \sqrt{2}$ ,  $\angle FEG = 90^\circ$ , 则所求的交线长即圆弧  $FG$  的长等于

$$\frac{\pi}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}.$$

17. **【命题点】利用正弦定理、余弦定理解三角形**

**【解】** 方案一: 选条件①.

由  $C = \frac{\pi}{6}$  和余弦定理得  $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . ..... 3 分

由  $\sin A = \sqrt{3} \sin B$  及正弦定理得  $a = \sqrt{3}b$ . ..... 5 分

于是  $\frac{3b^2 + b^2 - c^2}{2\sqrt{3}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 由此可得  $b = c$ . ..... 8 分

由①  $ac = \sqrt{3}$ , 解得  $a = \sqrt{3}, b = c = 1$ . ..... 9 分

因此, 选条件①时问题中的三角形存在, 此时  $c = 1$ . ..... 10 分

方案二:选条件②.

由  $C = \frac{\pi}{6}$  和余弦定理得  $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . ..... 3 分

由  $\sin A = \sqrt{3} \sin B$  及正弦定理得  $a = \sqrt{3}b$ . ..... 5 分

于是  $\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 由此可得  $b=c, B=C = \frac{\pi}{6}, A = \frac{2\pi}{3}$ .

由 ②  $c \sin A = 3$ , 所以  $c=b=2\sqrt{3}, a=6$ . ..... 8 分

因此, 选条件②时问题中的三角形存在, 此时  $c=2\sqrt{3}$ .

..... 10 分

方案三:选条件③.

由  $C = \frac{\pi}{6}$  和余弦定理得  $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . ..... 3 分

由  $\sin A = \sqrt{3} \sin B$  及正弦定理得  $a = \sqrt{3}b$ . ..... 5 分

于是  $\frac{3b^2+b^2-c^2}{2\sqrt{3}b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 由此可得  $b=c$ . ..... 8 分

由 ③  $c = \sqrt{3}b$ , 与  $b=c$  矛盾. .... 9 分

因此, 选条件③时问题中的三角形不存在. .... 10 分

## 18. 【命题点】等比数列的通项公式和根据新定义分类求和

【解】(1) 设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ . 由题设得  $a_1q + a_1q^3 = 20, a_1q^2 =$

8, 解得  $q = \frac{1}{2}$  (舍去),  $q = 2$ . ..... 3 分

由题设得  $a_1 = 2$ .

所以  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 2^n$ . ..... 5 分

(2) 由题设及 (1) 知  $b_1 = 0$ , 且当  $2^n \leq m < 2^{n+1}$  时,  $b_m = n$ .

..... 7 分

所以  $S_{100} = b_1 + (b_2 + b_3) + (b_4 + b_5 + b_6 + b_7) + \cdots + (b_{32} + b_{33} + \cdots +$

$b_{63}) + (b_{64} + b_{65} + \cdots + b_{100}) = 0 + 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + 4 \times 2^4 + 5 \times 2^5 +$

$6 \times (100 - 63) = 480$ . ..... 12 分

**易错警示** 求解  $b_m$  的易错之处在于没有理解区间端点  $m$  与  $a_n$  的关系, 其实只需发现  $2^n$  出现在区间右端点处的规律, 即可得到  $2^n$  的个数为  $b_m$  的值, 在 100 以内,  $m$  为正整数,  $b_m$  为  $2^0$  个 0,  $2^1$  个 1,  $2^2$  个 2,  $2^3$  个 3,  $2^4$  个 4,  $2^5$  个 5,  $100 - (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5) = 37$  个 6.

## 19. 【命题点】频率估计概率和独立性检验

【解】(1) 根据抽查数据, 该市 100 天的空气中 PM2.5 浓度

不超过 75, 且  $\text{SO}_2$  浓度不超过 150 的天数为  $32 + 18 + 6 + 8 =$

64, ..... 2 分

因此, 该市一天空气中 PM2.5 浓度不超过 75, 且  $\text{SO}_2$  浓度

不超过 150 的概率的估计值为  $\frac{64}{100} = 0.64$ . ..... 4 分

(2) 根据抽查数据, 可得  $2 \times 2$  列联表:

$\text{SO}_2 \backslash \text{PM}_{2.5}$	$[0, 150]$	$(150, 475]$
$[0, 75]$	64	16
$(75, 115]$	10	10

.....7 分

(3) 根据 (2) 的列联表得  $K^2 = \frac{100 \times (64 \times 10 - 16 \times 10)^2}{80 \times 20 \times 74 \times 26} \approx$

7.484. .... 10 分

由于  $7.484 > 6.635$ , 故有 **99% 的把握认为该市一天空气中  $\text{PM}_{2.5}$  浓度与  $\text{SO}_2$  浓度有关.** .... 12 分

**方法速记**  $K^2$  观测值  $k$  的大小作为检验在多大程度上认为两个分类变量有关系的标准, 若  $k \geq k_0$ , 则有  $(1 - P(K^2 \geq k_0)) \times 100\%$  的把握认为两个分类变量有关系; 否则, 就认为根据样本数据没有充分理由说明两个分类变量有关系.

## 20. 【命题点】线面垂直的判定和线面角正弦值的最值的求解

(1) 【证明】因为  $PD \perp$  底面  $ABCD$ , 所以  $PD \perp AD$ . .... 1 分

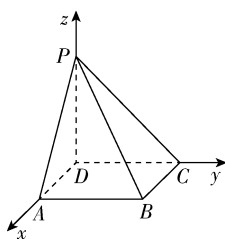
又底面  $ABCD$  为正方形, 所以  $AD \perp DC$ . 因此  $AD \perp$  平面  $PDC$ .

因为  $AD \parallel BC$ ,  $AD \not\subset$  平面  $PBC$ , 所以  $AD \parallel$  平面  $PBC$ . ... 3 分

由已知得  $l \parallel AD$ .

因此  $l \perp$  平面  $PDC$ . .... 4 分

(2) 【解】以  $D$  为坐标原点,  $\overrightarrow{DA}$  的方向为  $x$  轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系  $D-xyz$ . 则  $D(0, 0, 0)$ ,  $C(0, 1, 0)$ ,  $B(1, 1, 0)$ ,  $P(0, 0, 1)$ ,  $\overrightarrow{DC} = (0, 1, 0)$ ,  $\overrightarrow{PB} = (1, 1, -1)$ .



由(1)可设  $Q(a, 0, 1)$ , 则  $\overrightarrow{DQ} = (a, 0, 1)$ . .... 5 分

设  $\mathbf{n} = (x, y, z)$  是平面  $QCD$  的法向量, 则  $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DQ} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \end{cases}$  即

$\begin{cases} ax + z = 0, \\ y = 0. \end{cases}$  可取  $\mathbf{n} = (-1, 0, a)$ . .... 7 分

所以  $\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{PB} \rangle = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{PB}|} = \frac{-1-a}{\sqrt{3} \sqrt{1+a^2}}$ . .... 9 分

设  $PB$  与平面  $QCD$  所成角为  $\theta$ , 则  $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{|a+1|}{\sqrt{1+a^2}} =$

$\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 + \frac{2a}{a^2+1}}$ . 因为  $\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{1 + \frac{2a}{a^2+1}} \leq \frac{\sqrt{6}}{3}$ , 当且仅当  $a = 1$  时等

号成立, 所以  $PB$  与平面  $QCD$  所成角的正弦值的最大值为



$\frac{\sqrt{6}}{3}$ . ..... 12 分

**关键点拨** (1) 中由  $AD \parallel$  平面  $PBC$ , 平面  $PAD \cap$  平面  $PBC = l$ , 可知  $AD \parallel l$ ; (2) 建立空间直角坐标系, 得线面角的正弦值, 并利用基本不等式求最值.

## 21. 【命题点】导数的几何意义和根据不等式求参数范围

**【解】**  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = ae^{x-1} - \frac{1}{x}$ .

(1) 当  $a = e$  时,  $f(x) = e^x - \ln x + 1$ ,  $f'(1) = e - 1$ , 曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y - (e + 1) = (e - 1)(x - 1)$ , 即  $y = (e - 1)x + 2$ . ..... 4 分

直线  $y = (e - 1)x + 2$  在  $x$  轴,  $y$  轴上的截距分别为  $\frac{-2}{e - 1}, 2$ .

因此所求三角形的面积为  $\frac{2}{e - 1}$ . ..... 6 分

(2) 当  $0 < a < 1$  时,  $f(1) = a + \ln a < 1$ . ..... 7 分

当  $a = 1$  时,  $f(x) = e^{x-1} - \ln x$ ,  $f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$ . 当  $x \in (0, 1)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以当  $x = 1$  时,  $f(x)$  取得最小值, 最小值为  $f(1) = 1$ , 从而  $f(x) \geq 1$ . ..... 8 分

当  $a > 1$  时,  $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq e^{x-1} - \ln x \geq 1$ . ..... 11 分

综上,  $a$  的取值范围是  $[1, +\infty)$ . ..... 12 分

(由  $\ln a$  知  $a > 0$ , 当  $a = 1$  时, 由导函数图像可判断  $f(x) \geq 1$  恰好成立, 当  $a > 1$  时,  $a$  越大,  $y = ae^{x-1}$  图像越陡, 可知  $f(x) \geq 1$  必然成立, 故可知需根据  $a$  和 1 的大小分类讨论; 当  $0 < a < 1$  时,  $a + \ln a < 1$ , 当  $a > 1$  时,  $e^{x-1} - \ln x \geq 1$ , 当  $a = 1$  时, 可根据求导判断函数  $f(x)$  单调性并得出最值)

**一题多解** (2) 由  $f(x) \geq 1$  得  $ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1$ ,

即  $e^{\ln a + x - 1} - \ln x + \ln a \geq 1$ ,

即  $e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq \ln x + x = e^{\ln x} + \ln x$ . ..... 8 分

令  $g(t) = e^t + t$ , 则有  $g(\ln a + x - 1) \geq g(\ln x)$ ,  $g'(t) = e^t + 1 > 0$ , 所以  $g(t)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增,

则  $\ln a + x - 1 \geq \ln x$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立,

即  $\ln a \geq \ln x - x + 1$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立,

只需  $\ln a \geq (\ln x - x + 1)_{\max}$ . ..... 10 分

令  $h(x) = \ln x - x + 1$ ,  $x > 0$ , 则  $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1 - x}{x}$ .

令  $h'(x) > 0$ , 得  $0 < x < 1$ ; 令  $h'(x) < 0$ , 得  $x > 1$ ,

则  $h(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

所以  $h(x) \leq h(1) = 0$ , 则  $\ln a \geq 0$ , 得  $a \geq 1$ .

故  $a$  的取值范围是  $[1, +\infty)$ . ..... 12 分

**思路导引** (2) 直线  $MN$  的斜率存在  $\longrightarrow$  设直线方程

与椭圆  $\longrightarrow$  关于  $x$  的一元二次方程  $\xrightarrow{\text{一元二次方程根与系数的关系}}$  方程联立

$x_1+x_2, x_1x_2 \xrightarrow{\text{代入}} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}=0$  的表达式  $\longrightarrow$  直线  $MN$  过定点  $P$

$\xrightarrow[\text{|DQ|为定值}]{AD \perp MN} Q$  为  $AP$  的中点  $\longrightarrow$  定点  $Q$  坐标.

直线  $MN$  的斜率不存在  $\longrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}=0$

**【命题点】** 椭圆的方程和椭圆中的定值问题

**【解】** (1) 由题设得  $\frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$ , 解得  $a^2=6, b^2=3$ .

所以  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ . ..... 4 分

(2) 设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ .

若直线  $MN$  与  $x$  轴不垂直, 设直线  $MN$  的方程为  $y=kx+m$ ,

代入  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$  得  $(1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0$ .

于是  $x_1+x_2 = -\frac{4km}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{2m^2-6}{1+2k^2}$ . ① ..... 6 分

(设直线  $MN$  方程, 与椭圆方程联立, 由一元二次方程根与系数的关系得  $x_1+x_2, x_1x_2$  的关系式)

由  $AM \perp AN$  知  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ , 故  $(x_1-2)(x_2-2) + (y_1-1)(y_2-1) = 0$ , 可得  $(k^2+1)x_1x_2 + (km-k-2)(x_1+x_2) + (m-1)^2 + 4 = 0$ .

将①代入上式可得  $(k^2+1)\frac{2m^2-6}{1+2k^2} - (km-k-2)\frac{4km}{1+2k^2} + (m-1)^2 + 4 = 0$ .

整理得  $(2k+3m+1)(2k+m-1) = 0$ . ..... 8 分

因为  $A(2,1)$  不在直线  $MN$  上, 所以  $2k+m-1 \neq 0$ ,

故  $2k+3m+1=0, k \neq 1$ .

于是  $MN$  的方程为  $y = k\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} (k \neq 1)$ .

所以直线  $MN$  过点  $P\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ . ..... 10 分

(由  $AM \perp AN$  可转化为  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ , 将  $x_1+x_2, x_1x_2$  代入可得直线  $MN$  过定点)

若直线  $MN$  与  $x$  轴垂直, 可得  $N(x_1, -y_1)$ .

由  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$  得  $(x_1-2)(x_1-2) + (y_1-1)(-y_1-1) = 0$ .

又  $\frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{3} = 1$ , 可得  $3x_1^2 - 8x_1 + 4 = 0$ ,

解得  $x_1 = 2$  (舍去),  $x_1 = \frac{2}{3}$ .

此时直线  $MN$  过点  $P\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ .

(不要忽略直线  $MN$  的斜率不存在的情况)

令  $Q$  为  $AP$  的中点, 即  $Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ .

若  $D$  与  $P$  不重合, 则由题设知  $AP$  是  $\text{Rt}\triangle ADP$  的斜边,

$$\text{故 } |DQ| = \frac{1}{2}|AP| = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

若  $D$  与  $P$  重合, 则  $|DQ| = \frac{1}{2}|AP|$ .

综上, 存在点  $Q\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ , 使得  $|DQ|$  为定值. .... 12 分

(由  $AD \perp MN$  可知  $\triangle ADP$  为直角三角形,  $AP$  为斜边, 若使  $|DQ|$  为定值, 则当  $D$  与  $P$  重合或不重合时,  $Q$  均为  $AP$  的中点, 从而可得定点  $Q$  的坐标)