

1. D 【命题点】集合的交集运算

【解析】 $\because x^2 < 9, \therefore -3 < x < 3, \therefore B = \{x \mid -3 < x < 3\}$.

又 $\because A = \{1, 2, 3\}, \therefore A \cap B = \{1, 2\}$. 故选 D.

快解 $A = \{1, 2, 3\}$, 则 $A \cap B$ 必为 A 的子集, 排除 A, B 选项. 对于 C 选项, 3 显然不属于集合 B . 故选 D.

2. C 【命题点】复数的运算、共轭复数

【解析】 $\because z+i=3-i, \therefore z=3-2i, \therefore \bar{z}=3+2i$. 故选 C.

3. A 【命题点】由图像求解三角函数解析式

【解析】由题图中数值可知 $A=2$, 且周期 $T=2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\pi$,

突破点

$\therefore \omega = \frac{2\pi}{T} = 2$. 又 $\because f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2, \therefore 2 \times \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}), \therefore$ 可

取 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$. 故选 A.

方法速记 由三角函数图像确定形如 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + B$ 的参数时, 可由函数的最值确定 A, B , 由函数的周期确定 ω , 由函数的特殊点(最值点或零点)确定 φ . 若用零点确定 φ , 需关注是“上升零点”, 还是“下降零点”, 这是易错的地方.

4. A 【命题点】正方体的外接球

【解析】 \because 正方体的体积为 8, \therefore 正方体的棱长 a 为 2. 又 \because 其外接球半径 R 满足 $(2R)^2 = 3a^2, \therefore 4R^2 = 3a^2 = 12, \therefore$ 其外接球表面积 $S = 4\pi R^2 = 12\pi$. 故选 A.

方法速记 长方体的体对角线是其外接球的直径, 若其长、宽、高分别为 a, b, c , 那么其外接球的半径 R 满足 $(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

5. D 【命题点】抛物线的几何性质

【解析】抛物线 C 的焦点坐标为 $F(1, 0), PF \perp x$ 轴, $\therefore x_P = x_F =$

1. 又 $\because y_P^2 = 4x_P, \therefore y_P^2 = 4. \therefore y_P = \frac{k}{x_P} (k > 0), \therefore y_P = 2,$

$\therefore k = x_P y_P = 2$. 故选 D.

6. A 【命题点】圆的方程、点到直线的距离公式

【解析】圆的标准方程为 $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 4, \therefore$ 圆心坐标为 $(1, 4)$. 又 \because 圆心到直线 $ax+y-1=0$ 的距离为 1, \therefore 由点到直

线的距离公式, 可得 $\frac{|a \times 1 + 4 - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{|a + 3|}{\sqrt{a^2 + 1}} = 1, \therefore a = -\frac{4}{3}$. 故

选 A.

7. C 【命题点】由三视图求几何体的表面积

【解析】由三视图可知几何体为一个圆柱上放着一个同底的圆锥, 如图. 根据题图中数据, 可知圆锥母线长为 4, 圆柱母线长为 4, 它们的底面半径为 2.



$\therefore S_{\text{圆锥侧}} = \pi \times 2 \times 4 = 8\pi, S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi \times 2 \times 4 = 16\pi,$

$S_{\text{圆柱下底}} = 4\pi$. \therefore 该几何体的表面积为 $8\pi + 16\pi + 4\pi = 28\pi$. 故

选 C.

方法速记 圆锥的表面积公式: $S = \pi r^2 + \pi rl$; 圆柱的表面积公式: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rl$; 圆台的表面积公式: $S = \pi r^2 + \pi rl + \pi R^2 + \pi RL$.

8. B 【命题点】几何概型

【解析】此人来到该路口时,正好是红灯,若至少需要等待 15 秒,说明红灯开始时间小于等于 25 秒. 所求概率 $P = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$.

故选 B.

9. C 【命题点】程序框图的应用

【解析】输入 $x=2, n=2$. 初始 $k=0, s=0$.

第一次输入 $a=2, s=s \cdot x+a=0 \times 2+2=2, k=0+1=1 < n$, 进入循环; 第二次输入 $a=2, s=s \cdot x+a=2 \times 2+2=6, k=1+1=2$, 再次进入循环; 第三次输入 $a=5, s=s \cdot x+a=6 \times 2+5=17, k=2+1=3 > n$, 跳出循环, 输出 $s=17$. 故选 C.

10. D 【命题点】函数的定义域和值域

【解析】 $y = 10^{\lg x} = x (x > 0)$, 其定义域为 $(0, +\infty)$, 值域为 $(0, +\infty)$. $y=x$ 与 $y=2^x$ 这两个函数的定义域为 \mathbf{R} , 显然与已知函数不同, 排除 A, C 选项. $y=\lg x$ 的值域为 \mathbf{R} , 排除 B 选项. 经验证 D 选项符合, 故选 D.

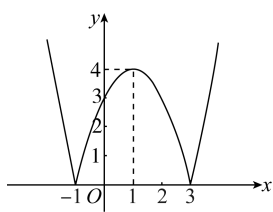
关键点拨 由指数运算性质, 将 $y = 10^{\lg x}$ 转化为 $y=x (x > 0)$, 一定要注意转化前后定义域的一致性.

11. B 【命题点】含 $\sin x$ (型) 的二次式的最值

【解析】 $f(x) = \cos 2x + 6\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos 2x + 6\sin x = 1 - 2\sin^2 x + 6\sin x = -2\left(\sin x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{2}$. $\because \sin x \in [-1, 1]$, \therefore 当 $\sin x = 1$ 时, $f(x)$ 最大, 且最大值为 5. 故选 B.

12. B 【命题点】函数图像的对称性

【解析】函数 $y = |x^2 - 2x - 3|$ 的图像如图所示, 其图像关于直线 $x=1$ 对称. 又 $\because f(x) = f(2-x)$, $\therefore f(x)$ 的图像也关于直线 $x=1$ 对称.



\therefore 它们交点的横坐标关于直线 $x=1$ 对称. 不妨设 x_1 与 x_m 关于直线 $x=1$ 对称, x_2 与 x_{m-1} 关于直线 $x=1$ 对称, \dots , 则有 $x_1 + x_m = 2, x_2 + x_{m-1} = 2, \dots, \therefore \sum_{i=1}^m x_i = m$. 故选 B.

方法速记 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=a$ 对称 $\Leftrightarrow f(a+x) = f(a-x) \Leftrightarrow f(x) = f(2a-x)$, $f(x)$ 的图像关于点 (a, b) 对称 $\Leftrightarrow f(x) + f(2a-x) = 2b$.

13. -6 【命题点】已知向量共线求参数

【解析】 $\because a=(m,4), b=(3,-2)$, 且 $a \parallel b$,

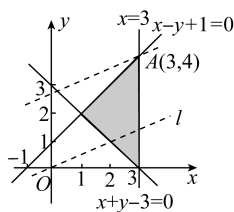
$\therefore m \times (-2) - 4 \times 3 = 0, \therefore m = -6$.

方法速记 向量 $a=(x_1, y_1), b=(x_2, y_2), a \parallel b \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$.

14. -5 【命题点】线性规划求最值

【解析】 x, y 满足约束条件

$$\begin{cases} x-y+1 \geq 0, \\ x+y-3 \geq 0, \\ x-3 \leq 0, \end{cases} \text{ 其可行域如图中阴影部}$$



分所示.

将 $z=x-2y$ 转化为 $y=\frac{x}{2}-\frac{z}{2}$, 纵截距最大时, z 最小. 平

移直线 $l: x-2y=0$, 当经过点 $A(3, 4)$ 时, 纵截距最大, 此时 $z_{\min}=3-2 \times 4=-5$.

快解 因为可行域为封闭的三角形区域, 所以线性目标函数的最值只可能在三角形顶点处取得, 易求得顶点分别为 $(3, 4), (1, 2), (3, 0)$, 依次代入目标函数可求得 $z_{\min}=-5$.

15. $\frac{21}{13}$ 【命题点】三角恒等变换、正弦定理解三角形

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $\because \cos A=\frac{4}{5}, \cos C=\frac{5}{13}, \therefore \sin A=\frac{3}{5}$,

$\sin C=\frac{12}{13}$. $\therefore \sin B=\sin(A+C)=\sin A \cos C+\sin C \cos A=\frac{3}{5} \times$

$\frac{5}{13}+\frac{12}{13} \times \frac{4}{5}=\frac{63}{65}$. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$, 可得 $b=\frac{a \sin B}{\sin A}=1 \times$

$\frac{63}{65} \times \frac{5}{3}=\frac{21}{13}$.

16. 1 和 3 【命题点】逻辑推理

【解析】丙说他的卡片上的数字之和不是 5, 所以丙的卡片上的数字要么是 1 和 2, 要么是 1 和 3. 乙说他与丙的卡片上相同的数字不是 1, 所以卡片 2 和 3 必定在乙手中. 因为甲与乙的卡片上相同的数字不是 2, 所以甲的卡片上的数字只能是 1 和 3.

17. 【命题点】等差数列的通项公式、数列求和

【解】(1) 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

由题意有 $2a_1+5d=4, a_1+5d=3$. 解得 $a_1=1, d=\frac{2}{5}$ 4 分

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{2n+3}{5}$ 6 分

(2) 由 (1) 知, $b_n=\left[\frac{2n+3}{5}\right]$ 7 分

当 $n=1, 2, 3$ 时, $1 \leq \frac{2n+3}{5} < 2, b_n=1$; 8 分

当 $n=4, 5$ 时, $2 \leq \frac{2n+3}{5} < 3, b_n=2$; 9 分

当 $n=6, 7, 8$ 时, $3 \leq \frac{2n+3}{5} < 4, b_n=3$; 10 分

当 $n=9, 10$ 时, $4 < \frac{2n+3}{5} < 5, b_n = 4$ 11 分

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 10 项和为 $1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + 4 \times 2 = 24$.

..... 12 分

18. 【命题点】由样本估计总体, 频率估计概率

【解】(1) 事件 A 发生当且仅当一年内出险次数小于 2. 由所给数据知, 一年内出险次数小于 2 的频率为 $\frac{60+50}{200} = 0.55$,

故 $P(A)$ 的估计值为 **0.55**. 4 分

(2) 事件 B 发生当且仅当一年内出险次数大于 1 且小于 4. 由所给数据知, 一年内出险次数大于 1 且小于 4 的频率为 $\frac{30+30}{200} = 0.3$, 故 $P(B)$ 的估计值为 **0.3**. 8 分

(3) 由所给数据得

| | | | | | | |
|----|---------|------|---------|--------|---------|------|
| 保费 | $0.85a$ | a | $1.25a$ | $1.5a$ | $1.75a$ | $2a$ |
| 频率 | 0.30 | 0.25 | 0.15 | 0.15 | 0.10 | 0.05 |

调查的 200 名续保人的平均保费为 $0.85a \times 0.30 + a \times 0.25 + 1.25a \times 0.15 + 1.5a \times 0.15 + 1.75a \times 0.10 + 2a \times 0.05 = 1.1925a$.

因此, 续保人本年度平均保费的估计值为 **1.1925a**. 12 分

19. 【命题点】线线垂直的证明、锥体体积的计算

(1) **【证明】**由已知得 $AC \perp BD, AD = CD$ 1 分

又由 $AE = CF$ 得 $\frac{AE}{AD} = \frac{CF}{CD}$, 故 $AC \parallel EF$ 2 分

由此得 $EF \perp HD, EF \perp HD'$, 所以 $AC \perp HD'$ 4 分

(2) **【解】**由 $EF \parallel AC$ 得 $\frac{OH}{DO} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{4}$.

由 $AB = 5, AC = 6$ 得 $DO = BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = 4$.

所以 $OH = 1, D'H = DH = 3$ 6 分

于是 $OD'^2 + OH^2 = (2\sqrt{2})^2 + 1^2 = 9 = D'H^2$, 故 $OD' \perp OH$.

由(1)知 $AC \perp HD'$, 又 $AC \perp BD, BD \cap HD' = H$, 所以 $AC \perp$ 平面 BHD' , 于是 $AC \perp OD'$. 又由 $OD' \perp OH, AC \cap OH = O$,

所以 $OD' \perp$ 平面 ABC 8 分

又由 $\frac{EF}{AC} = \frac{DH}{DO}$ 得 $EF = \frac{9}{2}$ 9 分

五边形 $ABCFE$ 的面积 $S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 - \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} \times 3 = \frac{69}{4}$ 10 分

所以五棱锥 $D'-ABCFE$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \times \frac{69}{4} \times 2\sqrt{2} = \frac{23\sqrt{2}}{2}$.

..... 12 分

20. 【命题点】导数的几何意义、不等式恒成立问题

【解】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 当 $a = 4$ 时, $f(x) = (x +$

$1) \ln x - 4(x - 1), f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 3, f'(1) = -2, f(1) = 0$.

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 **$2x + y - 2 = 0$** .

..... 4 分

(2) 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$ 等价于 $\ln x - \frac{a(x-1)}{x+1} > 0$.

..... 5 分

设 $g(x) = \ln x - \frac{a(x-1)}{x+1}$, 6 分

则 $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2a}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2(1-a)x + 1}{x(x+1)^2}$, $g(1) = 0$ 7 分

① 当 $a \leq 2$, $x \in (1, +\infty)$ 时, $x^2 + 2(1-a)x + 1 \geq x^2 - 2x + 1 > 0$, 即 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 因此 $g(x) > 0$;

..... 9 分

② 当 $a > 2$ 时, 令 $g'(x) = 0$ 得

$$x_1 = a - 1 - \sqrt{(a-1)^2 - 1}, x_2 = a - 1 + \sqrt{(a-1)^2 - 1}.$$

由 $x_2 > 1$ 和 $x_1 x_2 = 1$ 得 $x_1 < 1$, 故当 $x \in (1, x_2)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(1, x_2)$ 上单调递减, 因此 $g(x) < 0$, 此时不满足题意.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, 2]$ 12 分

21. 【命题点】直线与椭圆的位置关系、弦长公式

(1) 【解】设 $M(x_1, y_1)$, 则由题意知 $y_1 > 0$. 由已知及椭圆的对称性知, 直线 AM 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$ 1 分

又 $A(-2, 0)$, 因此直线 AM 的方程为 $y = x + 2$ 2 分

将 $x = y - 2$ 代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 得 $7y^2 - 12y = 0$ 3 分

解得 $y = 0$ 或 $y = \frac{12}{7}$, 所以 $y_1 = \frac{12}{7}$ 4 分

因此 $\triangle AMN$ 的面积 $S_{\triangle AMN} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{12}{7} \times \frac{12}{7} = \frac{144}{49}$ 5 分

(2) 【证明】设直线 AM 的方程为 $y = k(x + 2)$ ($k > 0$),

将其代入 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 得 $(3 + 4k^2)x^2 + 16k^2x + 16k^2 - 12 = 0$.

..... 7 分

由 $x_1 \cdot (-2) = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}$ 得 $x_1 = \frac{2(3 - 4k^2)}{3 + 4k^2}$, 8 分

故 $|AM| = |x_1 + 2| \cdot \sqrt{1 + k^2} = \frac{12\sqrt{1 + k^2}}{3 + 4k^2}$ 9 分

由题设, 直线 AN 的方程为 $y = -\frac{1}{k}(x + 2)$,

故同理可得 $|AN| = \frac{12k\sqrt{1 + k^2}}{3k^2 + 4}$.

由 $2|AM| = |AN|$ 得 $\frac{2}{3 + 4k^2} = \frac{k}{3k^2 + 4}$, 即 $4k^3 - 6k^2 + 3k - 8 = 0$.

..... 10 分

设 $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 3t - 8$, 则 k 是 $f(t)$ 的零点, $f'(t) = 12t^2 - 12t + 3 = 3(2t - 1)^2 \geq 0$, 所以 $f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $f(\sqrt{3}) = 15\sqrt{3} - 26 < 0$, $f(2) = 6 > 0$, 因此 $f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的零点, 且零点 k 在 $(\sqrt{3}, 2)$ 内, 所以 $\sqrt{3} < k < 2$ 12 分

22. 【命题点】三角形相似、全等,四点共圆的证明

(1)【证明】因为 $DF \perp EC$, 所以 $\triangle DEF \sim \triangle CDF$, 则有 $\angle GDF = \angle DEF = \angle FCB$, $\frac{DF}{CF} = \frac{DE}{CD} = \frac{DG}{CB}$, 2分

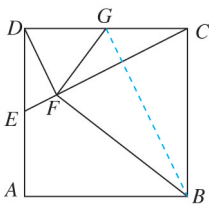
所以 $\triangle DGF \sim \triangle CBF$,

由此可得 $\angle DGF = \angle CBF$.

因此 $\angle CGF + \angle CBF = 180^\circ$,

所以 B, C, G, F 四点共圆. 5分

(2)【解】由 B, C, G, F 四点共圆, $CG \perp CB$ 知 $FG \perp FB$ 6分



连接 GB .

由 G 为 $\text{Rt}\triangle DFC$ 斜边 CD 的中点, 知 $GF = GC$,

故 $\text{Rt}\triangle BCG \cong \text{Rt}\triangle BFG$, 8分

因此, 四边形 $BCGF$ 的面积 S 是 $\triangle GCB$ 面积 $S_{\triangle GCB}$ 的 2 倍,

即 $S = 2S_{\triangle GCB} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$ 10分

23. 【命题点】直角坐标方程与极坐标方程的互化、参数方程的应用

【解】(1) 由 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ 可得圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2 + 12\rho \cos \theta + 11 = 0$ 5分

(2) 在(1)中建立的极坐标系中, 直线 l 的极坐标方程为 $\theta = \alpha (\rho \in \mathbf{R})$.

设 A, B 所对应的极径分别为 ρ_1, ρ_2 , 将 l 的极坐标方程代入 C 的极坐标方程得 $\rho^2 + 12\rho \cos \alpha + 11 = 0$ 6分

于是 $\rho_1 + \rho_2 = -12 \cos \alpha, \rho_1 \rho_2 = 11$ 7分

$|AB| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1 \rho_2} = \sqrt{144 \cos^2 \alpha - 44}$ 8分

由 $|AB| = \sqrt{10}$ 得 $\cos^2 \alpha = \frac{3}{8}, \tan \alpha = \pm \frac{\sqrt{15}}{3}$ 9分

所以 l 的斜率为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ 10分

24. 【命题点】绝对值不等式的求解、不等式的证明

(1)【解】
$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -\frac{1}{2}, \\ 1, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, \\ 2x, & x \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$
 2分

当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, 由 $f(x) < 2$ 得 $-2x < 2$,

解得 $x > -1$, 即 $-1 < x \leq -\frac{1}{2}$;

当 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) < 2$, 即 $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$;

当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, 由 $f(x) < 2$ 得 $2x < 2$,

解得 $x < 1$, 即 $\frac{1}{2} \leq x < 1$.

所以 $f(x) < 2$ 的解集 $M = \{x | -1 < x < 1\}$ 5 分

(2) 【证明】由 (1) 知, 当 $a, b \in M$ 时, $-1 < a < 1, -1 < b < 1$,

..... 7 分

从而 $(a+b)^2 - (1+ab)^2 = a^2 + b^2 - a^2b^2 - 1 = (a^2 - 1)(1 - b^2) < 0$.

..... 9 分

因此 $|a+b| < |1+ab|$ 10 分