

1. D 【命题点】集合的交集运算、元素个数

【解析】 $A = \{x | x = 3n + 2, n \in \mathbf{N}\} = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots\}$,
 $\therefore A \cap B = \{8, 14\}$, $\therefore A \cap B$ 中元素的个数为 2. 故选 D.

2. A 【命题点】平面向量运算的坐标表示

【解析】 $\because A(0, 1), B(3, 2), \therefore \overrightarrow{AB} = (3, 1)$. 从而 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = (-4, -3) - (3, 1) = (-7, -4)$, 故选 A.

3. C 【命题点】复数的四则运算、复数相等

【解析】由题意, $z - 1 = \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i) \cdot i}{i \cdot i} = 1 - i$, 从而 $z = 2 - i$, 故选 C.

一题多解 设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 由 $(z - 1)i = 1 + i$ 得 $(a - 1 + bi)i = 1 + i$, 即 $-b + (a - 1)i = 1 + i$, 由复数相等的充要条件知 $-b = 1, a - 1 = 1$, 所以 $b = -1, a = 2$, 故 $z = 2 - i$. 故选 C.

4. C 【命题点】古典概型、勾股数

【解析】基本事件为 $(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 4, 5), (3, 4, 5)$, 共 10 个. 可构成勾股数的基本事件为 $(3, 4, 5)$. 故所求概率为 $\frac{1}{10}$. 故选 C.

5. B 【命题点】椭圆、抛物线的方程、几何性质

【解析】抛物线 $y^2 = 8x$ 的焦点为 $(2, 0)$, 准线方程为 $x = -2$. 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 由题意, $c = 2, \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 可得 $a = 4, b^2 = 16 - 4 = 12$. 故椭圆方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. 把 $x = -2$ 代入椭圆方程, 解得 $y = \pm 3$. 从而 $|AB| = 6$, 故选 B.

方法速记 求椭圆或双曲线的标准方程, 要做到“先定型, 再定量”, 即先根据题目所给条件, 确定其焦点所在位置, 再列出关于参数的方程组, 解之即可.

6. B 【命题点】圆锥的体积

【解析】设米堆所在圆锥的底面半径为 r 尺, 则 $r = \frac{8 \times 4}{2\pi}$, 米堆的体积为 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{8 \times 4}{2\pi}\right)^2 \times 5 = \frac{320}{3\pi}$ (立方尺). 将 $\pi = 3$ 代入, 得体积为 $\frac{320}{9}$ 立方尺. 所以堆放的米约有 $\frac{\frac{320}{9}}{1.62} \approx 22$ (斛), 故选 B.

7. B 【命题点】等差数列的通项、前 n 项和

【解析】设 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 由等差数列的前 n 项和公式, 有 $8a_1 + \frac{8 \times 7}{2} = 4 \left(4a_1 + \frac{4 \times 3}{2}\right)$, 解得 $a_1 = \frac{1}{2}$. 从而 $a_{10} = a_1 + 9 = \frac{1}{2} +$

$9 = \frac{19}{2}$, 故选 B.

8. D 【命题点】函数 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$ 的解析式确定及单调性

【解析】不妨令 $\omega > 0$, 由图像知, $T = 2 \times \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \right) = 2 = \frac{2\pi}{\omega}$,

$\omega = \pi$, 则 $f(x) = \cos(\pi x + \varphi)$. 把 $\left(\frac{1}{4}, 0 \right)$ 代入解析式, 有 $0 =$

$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$, 由图像知 $\frac{\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 取 $k = 0$, 得

$\varphi = \frac{\pi}{4}$, 从而 $f(x) = \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$.

由 $2k\pi < \pi x + \frac{\pi}{4} < \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $2k - \frac{1}{4} < x < 2k + \frac{3}{4} (k \in$

$\mathbf{Z})$. 当 $\omega < 0$ 时, 结论相同. 故选 D.

方法速记 对于 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 或 $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, 应先根据图像确定参数, 确定参数时, 先确定 A (可从图像上观察), 再利用周期确定 ω , 最后由图像上一个确定的点的坐标确定 φ (结合图像的位置或给定的 φ 的范围).

9. C 【命题点】程序框图

【解析】依次执行循环体, 得到 $S = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{4}, n = 1; S = \frac{1}{4},$

$m = \frac{1}{8}, n = 2; S = \frac{1}{8}, m = \frac{1}{16}, n = 3; S = \frac{1}{16}, m = \frac{1}{32}, n = 4; S = \frac{1}{32},$

$m = \frac{1}{64}, n = 5; S = \frac{1}{64}, m = \frac{1}{128}, n = 6; S = \frac{1}{128}, m = \frac{1}{256}, n = 7$. 此时

不符合 $S > t$, 输出 $n = 7$, 故选 C.

10. A 【命题点】分段函数求值

【解析】当 $a \leq 1$ 时, $f(a) = 2^{a-1} - 2 = -3, 2^{a-1} = -1$, 无解. 当 $a > 1$ 时, $f(a) = -\log_2(a+1) = -3, a+1 = 8, a = 7$.

从而 $f(6-a) = f(-1) = 2^{-1-1} - 2 = -\frac{7}{4}$, 故选 A.

11. B 【命题点】三视图还原直观图, 几何体的表面积

【解析】由题中三视图可知, 该几何体是由圆柱的一半和半

球组成, 其表面积为 $(2r)^2 + \pi r \cdot 2r + \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 +$

$\frac{1}{2}\pi r^2 = 4r^2 + 5\pi r^2 = 16 + 20\pi$, 解得 $r = 2$, 故选 B.

12. C 【命题点】两函数图像的对称、求函数值

【解析】设 (x, y) 是 $f(x)$ 图像上任一点, 则 (x, y) 关于直线

$y = -x$ 的对称点 $(-y, -x)$ 在 $y = 2^{x+a}$ 的图像上, 代入有 $-x = 2^{-y+a}$,

即 $y = a - \log_2(-x)$. 由题意, $a - \log_2 2 + a - \log_2 4 = 2a - 3 = 1$, 解得

$a = 2$, 故选 C.

方法速记 设点法是求已知曲线关于某直线对称的曲线的基本方法, 即设 (x, y) 是对称曲线上任一点, 则它关于对称轴的对称点必在原曲线上, 代入即可得到对称曲线的方程 (或解析式).

13.6 【命题点】等比数列的判定及前 n 项和

【解析】由 $a_{n+1} = 2a_n, a_1 = 2 \neq 0$, 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为

关键句

首项, 2 为公比的等比数列. 从而 $S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+1} -$

$2 = 126$, 解得 $n = 6$.

14.1 【命题点】导数的几何意义

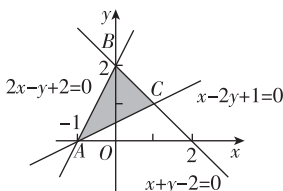
【解析】 $f'(x) = 3ax^2 + 1, f'(1) = 3a + 1$, 又 $f(1) = a + 2$, 由导数的几何意义, 得切线方程为 $y - (a + 2) = (3a + 1) \cdot (x - 1)$. 将 $(2, 7)$ 代入切线方程, 解得 $a = 1$.

方法速记 利用导数知识求曲线 $f(x)$ 的切线有两种类型: 一是求曲线 $f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线, 其斜率为 $f'(x_0)$; 二是求曲线 $f(x)$ 过点 $(x, f(x))$ 的切线, $(x, f(x))$ 可能是切点也可能不是切点, 做法是设出切点为 (x_0, y_0) , 然后利用过两点的直线的斜率计算公式和导数的几何意义列出关于 x_0 的方程(组), 就可进一步写出过点 $(x, f(x))$ 的切线方程.

15.4 【命题点】线性规划

【解析】作出不等式组表示的平面区域如图中阴影部分, 当直线 $y = -3x + z$ 过 C 点时, z 取最大值.

解 $\begin{cases} x + y - 2 = 0, \\ x - 2y + 1 = 0, \end{cases}$ 得 $C(1, 1)$, 从而 z 的最大值为 $3 \times 1 + 1 = 4$.



16.12 $\sqrt{6}$ 【命题点】双曲线的方程、定义

【解析】设双曲线的左焦点为 F' , $|AF| = \sqrt{3^2 + (0 - 6\sqrt{6})^2} = 15$.

$\triangle APF$ 的周长为 $|PA| + |PF| + 15$. 由双曲线定义, 知 $|PF| - |PF'| = 2$, $|PF| = |PF'| + 2$. 从而 $\triangle APF$ 的周长为 $|PA| + |PF| +$

关键句

$15 = |PA| + |PF'| + 17 \geq |AF'| + 17 = 32$, 此时线段 AF' 与双曲线的交点为 P , 直线 AF' 的方程为 $y = 2\sqrt{6}(x + 3)$, 与双曲线方

程联立, 有 $\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{8} = 1, \\ y = 2\sqrt{6}(x + 3), \end{cases}$ 解得 $P(-2, 2\sqrt{6})$ (另一点舍去).

此时, $\triangle APF$ 的周长最小, 其面积为 $S_{\triangle AF'F} - S_{\triangle PF'F} = \frac{1}{2} \times 6 \times$

$6\sqrt{6} - \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{6} = 12\sqrt{6}$.

17. 【命题点】正弦定理、余弦定理解三角形, 三角形的面积

【解】(1) 由题设及正弦定理可得 $b^2 = 2ac$ 2 分

又 $a = b$, 可得 $b = 2c, a = 2c$ 4 分

由余弦定理可得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{4}$ 6分

(2) 由(1)知 $b^2 = 2ac$.

因为 $B = 90^\circ$, 由勾股定理得 $a^2 + c^2 = b^2$ 8分

故 $a^2 + c^2 = 2ac$, 得 $c = a = \sqrt{2}$ 10分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 1. 12分

18. 【命题点】面面垂直的判定, 三棱锥的侧面积、体积

(1) 【证明】因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AC \perp BD$.

因为 $BE \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $AC \perp BE$.

又 $BD \cap BE = B$, 故 $AC \perp$ 平面 BED .

又 $AC \subset$ 平面 AEC , 所以平面 $AEC \perp$ 平面 BED 5分

(2) 【解】设 $AB = x$, 在菱形 $ABCD$ 中, 由 $\angle ABC = 120^\circ$, 可得

$AG = GC = \frac{\sqrt{3}}{2}x$, $GB = GD = \frac{x}{2}$ 6分

因为 $AE \perp EC$, 所以在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, 可得 $EG = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

由 $BE \perp$ 平面 $ABCD$, 知 $\triangle EBG$ 为直角三角形, 可得 $BE = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ 8分

由已知得, 三棱锥 $E-ACD$ 的体积

$$V_{E-ACD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} AC \cdot GD \cdot BE = \frac{\sqrt{6}}{24} x^3 = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

故 $x = 2$ 10分

从而可得 $AE = EC = ED = \sqrt{6}$.

所以 $\triangle EAC$ 的面积为 3, $\triangle EAD$ 的面积与 $\triangle ECD$ 的面积均为 $\sqrt{5}$.

故三棱锥 $E-ACD$ 的侧面积为 $3 + 2\sqrt{5}$ 12分

19. 【命题点】回归方程的建立与预报

【解】(1) 由散点图可以判断, $y = c + d\sqrt{x}$ 适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型. 3分

(2) 令 $w = \sqrt{x}$, 先建立 y 关于 w 的线性回归方程.

$$\text{由于 } \hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^8 (w_i - \bar{w})^2} = \frac{108.8}{1.6} = 68,$$

$$\hat{c} = \bar{y} - \hat{d}\bar{w} = 563 - 68 \times 6.8 = 100.6,$$

所以 y 关于 w 的线性回归方程为 $\hat{y} = 100.6 + 68w$, 因此 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 100.6 + 68\sqrt{x}$ 8分

(3) ①由(2)知, 当 $x = 49$ 时, 年销售量 y 的预报值

$$\hat{y} = 100.6 + 68\sqrt{49} = 576.6,$$

年利润 z 的预报值 $\hat{z} = 576.6 \times 0.2 - 49 = 66.32$.

②根据(2)的结果知, 年利润 z 的预报值

$$\hat{z} = 0.2(100.6 + 68\sqrt{x}) - x = -x + 13.6\sqrt{x} + 20.12.$$

所以当 $\sqrt{x} = \frac{13.6}{2} = 6.8$, 即 $x = 46.24$ 时, \hat{z} 取得最大值.

故年宣传费为 **46.24** 千元时, 年利润的预报值最大.

..... 12 分

方法速记 处理回归分析问题的步骤: (1) 根据题目中的样本点绘制散点图; (2) 根据散点图观察两个变量所适合的回归方程类型, 如果是线性的, 利用公式直接写出回归方程; 如果是非线性的, 先用变换化为线性的, 求出回归方程后, 再进行换元, 这样就得到了两个变量的回归方程; (3) 通过残差分析或计算相关系数 r 来检验回归方程是否合适.

20. 【命题点】直线与圆的位置关系, 平面向量的数量积

【解】(1) 由题设, 可知直线 l 的方程为 $y = kx + 1$.

因为 l 与 C 交于两点, 所以 $\frac{|2k-3+1|}{\sqrt{1+k^2}} < 1$ 2 分

(直线与圆相交, 则圆心到直线的距离小于半径)

解得 $\frac{4-\sqrt{7}}{3} < k < \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ 4 分

所以 k 的取值范围为 $\left(\frac{4-\sqrt{7}}{3}, \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$ 6 分

(2) 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

将 $y = kx + 1$ 代入方程 $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$, 整理得

$$(1+k^2)x^2 - 4(1+k)x + 7 = 0.$$

所以 $x_1 + x_2 = \frac{4(1+k)}{1+k^2}, x_1 x_2 = \frac{7}{1+k^2}$ 8 分

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} &= x_1 x_2 + y_1 y_2 = (1+k^2)x_1 x_2 + k(x_1 + x_2) + 1 = \\ &= \frac{4k(1+k)}{1+k^2} + 8.\end{aligned}$$

由题设可得 $\frac{4k(1+k)}{1+k^2} + 8 = 12$, 解得 $k = 1$, 10 分

所以 l 的方程为 $y = x + 1$.

故圆心 C 在 l 上, 所以 $|MN| = 2$ 12 分

21. 【命题点】导函数, 函数的零点, 导数与函数的单调性、最值

(1) **【解】** $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = 2e^{2x} - \frac{a}{x} (x > 0). \text{ 2 分}$$

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f'(x)$ 没有零点. 3 分

当 $a > 0$ 时, 因为 $y = e^{2x}$ 单调递增, $y = -\frac{a}{x}$ 单调递增, 所以

$f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $f'(a) > 0$, 当 b 满足 $0 < b < \frac{a}{4}$ 且 $b < \frac{1}{4}$ 时, $f'(b) < 0$, 故

当 $a > 0$ 时, $f'(x)$ 存在唯一零点. 6 分

(2) **【证明】**由(1), 可设 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一零点为 x_0 ,

..... 7 分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

故 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

..... 9 分

所以当 $x = x_0$ 时, $f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(x_0)$.

..... 10 分

由于 $2e^{\frac{2x_0}{a}} - \frac{a}{x_0} = 0$,

所以 $f(x_0) = \frac{a}{2x_0} + 2ax_0 + a \ln \frac{2}{a} \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$.

故当 $a > 0$ 时, $f(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$ 12 分

22. 【命题点】圆的切线, 射影定理

(1) 【证明】连接 AE , 由已知得, $AE \perp BC$, $AC \perp AB$.

在 $\text{Rt}\triangle AEC$ 中, 由已知得, $DE = DC$,

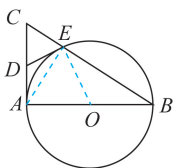
故 $\angle DEC = \angle DCE$.

连接 OE , 则 $\angle OBE = \angle OEB$.

又 $\angle ACB + \angle ABC = 90^\circ$,

所以 $\angle DEC + \angle OEB = 90^\circ$,

故 $\angle OED = 90^\circ$, DE 是 $\odot O$ 的切线. 5 分



(2) 【解】设 $CE = 1$, $AE = x$, 由已知得 $AB = 2\sqrt{3}$,

$BE = \sqrt{12 - x^2}$.

由射影定理可得, $AE^2 = CE \cdot BE$,

所以 $x^2 = \sqrt{12 - x^2}$, 即 $x^4 + x^2 - 12 = 0$.

可得 $x = \sqrt{3}$, 所以 $\angle ACB = 60^\circ$ 10 分

方法速记 在圆中, 连接相关线段构造以直径为斜边的直角三角形是常见的辅助线作法; 在直角三角形中, 要注意射影定理的使用.

23. 【命题点】直角坐标方程与极坐标方程的互化, 极坐标方程的应用

【解】(1) 因为 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, 所以 C_1 的极坐标方程为

$\rho \cos \theta = -2$, C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$.

..... 5 分

(2) 将 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 代入 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 4 = 0$,

得 $\rho^2 - 3\sqrt{2}\rho + 4 = 0$, 解得 $\rho_1 = 2\sqrt{2}$, $\rho_2 = \sqrt{2}$.

故 $\rho_1 - \rho_2 = \sqrt{2}$, 即 $|MN| = \sqrt{2}$.

由于 C_2 的半径为 1, 所以 $\triangle C_2MN$ 的面积为 $\frac{1}{2}$ 10 分

24. 【命题点】解含绝对值的不等式, 含绝对值的函数的图像

【解】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) > 1$ 化为 $|x+1| - 2|x-1| - 1 > 0$.

当 $x \leq -1$ 时, 不等式化为 $x - 4 > 0$, 无解;

当 $-1 < x < 1$ 时, 不等式化为 $3x - 2 > 0$, 解得 $\frac{2}{3} < x < 1$;

当 $x \geq 1$ 时, 不等式化为 $-x+2>0$, 解得 $1 \leq x < 2$.

所以 $f(x)>1$ 的解集为 $\left\{x \mid \frac{2}{3} < x < 2\right\}$ 5 分

$$(2) \text{ 由题设可得, } f(x) = \begin{cases} x-1-2a, & x < -1, \\ 3x+1-2a, & -1 \leq x \leq a, \\ -x+1+2a, & x > a. \end{cases}$$

所以函数 $f(x)$ 的图像与 x 轴围成的三角形的三个顶点分别

为 $A\left(\frac{2a-1}{3}, 0\right), B(2a+1, 0), C(a, a+1)$,

$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{2}{3}(a+1)^2$.

由题设得 $\frac{2}{3}(a+1)^2 > 6$, 故 $a > 2$.

所以 a 的取值范围为 $(2, +\infty)$ 10 分