

数 学

本试卷满分 150 分,考试时间 120 分钟.

第一部分 (选择题 共 40 分)

一、选择题(本大题共 10 小题,每小题 4 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $M = \{x | x+2 \geq 0\}$, $N = \{x | x-1 < 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

- A. $\{x | -2 \leq x < 1\}$ B. $\{x | -2 < x \leq 1\}$
C. $\{x | x \geq -2\}$ D. $\{x | x < 1\}$

2. 在复平面内,复数 z 对应的点的坐标是 $(-1, \sqrt{3})$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z} =$ ()

- A. $1 + \sqrt{3}i$ B. $1 - \sqrt{3}i$
C. $-1 + \sqrt{3}i$ D. $-1 - \sqrt{3}i$

3. 已知向量 a, b 满足 $a+b = (2, 3)$, $a-b = (-2, 1)$, 则 $|a|^2 - |b|^2 =$ ()

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

4. 下列函数中在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增的是 ()

- A. $f(x) = -\ln x$ B. $f(x) = \frac{1}{2^x}$
C. $f(x) = -\frac{1}{x}$ D. $f(x) = 3^{1x-11}$

5. $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式中, x 的系数是 ()

- A. -40 B. 40 C. -80 D. 80

6. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 点 M 在 C 上, 若 M 到直线 $x = -3$ 的距离为 5, 则 $|MF| =$ ()

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

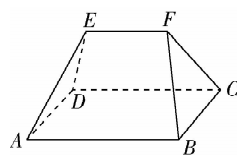
7. 在 $\triangle ABC$ 中, $(a+c)(\sin A - \sin C) = b(\sin A - \sin B)$, 则 $\angle C =$ ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

8. 若 $xy \neq 0$, “ $x+y=0$ ” 是 “ $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -2$ ” 的 ()

- A. 充分而不必要条件
B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件
D. 既不充分也不必要条件

9. 刍甍是我国传统建筑造型之一,蕴含着丰富的数学元素. 安装灯带可以勾勒出建筑轮廓,展现造型之美. 如图,某屋顶可视为五面体 $ABCDEF$, 四边形 $ABFE$ 和 $CDEF$ 是全等的等腰梯形, $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 是全等的等腰三角形. 若 $AB = 25$ m, $BC = AD = 10$ m, 且等腰梯形所在的面、等腰三角形所在的面与底面夹角的正切值均为 $\frac{\sqrt{14}}{5}$. 为这个模型的轮廓安装灯带(不计损耗), 则所需灯带的长度为 ()



- A. 102 m B. 112 m
C. 117 m D. 125 m

10. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6$, 下列说法正确的是 ()

- A. 若 $a_1 = 3$, 则 $\{a_n\}$ 是递减数列, $\exists M \in \mathbf{R}$, 使得 $n > m$ 时, $a_n > M$
B. 若 $a_1 = 5$, 则 $\{a_n\}$ 是递增数列, $\exists M \leq 6$, 使得 $n > m$ 时, $a_n < M$
C. 若 $a_1 = 7$, 则 $\{a_n\}$ 是递减数列, $\exists M > 6$, 使得 $n > m$ 时, $a_n > M$
D. 若 $a_1 = 9$, 则 $\{a_n\}$ 是递增数列, $\exists M \in \mathbf{R}$, 使得 $n > m$ 时, $a_n < M$

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题(本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.把答案填在题中的横线上)

11. 已知函数 $f(x) = 4^x + \log_2 x$, 则 $f\left(\frac{1}{2}\right) =$ _____.

12. 已知双曲线 C 的焦点为 $(-2, 0)$ 和 $(2, 0)$, 离心率为 $\sqrt{2}$, 则 C 的方程为 _____.

13. 已知命题 p : 若 α, β 为第一象限角, 且 $\alpha > \beta$, 则 $\tan \alpha > \tan \beta$. 能说明命题 p 为假命题的一组 α, β 的值可以是 $\alpha =$ _____; $\beta =$ _____.

14. 我国度量衡的发展有着悠久的历史,战国时期就出现了类似于砝码的用来测量物体质量的“环权”. 已知 9 枚环权的质量(单位: 铢)从小到大构成项数为 9 的数列 $\{a_n\}$, 该数列的前 3 项成等差数列, 后 7 项成等比数列, 且 $a_1 = 1, a_5 = 12, a_9 = 192$, 则 $a_7 =$ _____, 数列 $\{a_n\}$ 的所有项的和为 _____.

15. 设 $a > 0$, 函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < -a, \\ \sqrt{a^2-x^2}, & -a \leq x \leq a, \\ -\sqrt{x}-1, & x > a. \end{cases}$ 给出下列四

个结论:

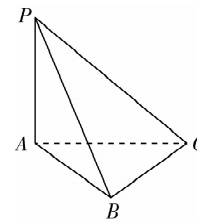
- ① $f(x)$ 在区间 $(a-1, +\infty)$ 上单调递减;
② 当 $a \geq 1$ 时, $f(x)$ 存在最大值;
③ 设 $M(x_1, f(x_1)) (x_1 \leq a), N(x_2, f(x_2)) (x_2 > a)$, 则 $|MN| > 1$;
④ 设 $P(x_3, f(x_3)) (x_3 < -a), Q(x_4, f(x_4)) (x_4 \geq -a)$, 若 $|PQ|$ 存在最小值, 则 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

其中所有正确结论的序号是 _____.

三、解答题(本大题共 6 小题,共 85 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (13 分) 如图,四面体 $P-ABC$ 中, $PA = AB = BC = 1$, $PC = \sqrt{3}, PA \perp$ 平面 ABC .

- (1) 求证: $BC \perp$ 平面 PAB ;
(2) 求二面角 $A-PC-B$ 的大小.



17. (14 分) 已知函数 $f(x) = \sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$.

(1) 若 $f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 求 φ 的值;

(2) 若 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 且 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$,

再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择一个作为已知, 求 ω, φ 的值.

条件①: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$;

条件②: $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -1$;

条件③: $f(x)$ 在 $\left[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减.

注: 如果选择的条件不符合要求, 第(2)问得 0 分; 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (13 分) 为了研究某种农产品价格变化的规律, 收集到了该农产品连续 40 天的价格变化数据, 如表所示. 在描述价格变化时, 用“+”表示“上涨”, 即当天价格比前一天价格高; 用“-”表示“下跌”, 即当天价格比前一天价格低; 用“0”表示“不变”, 即当天价格与前一天价格相同.

时段	价格变化																			
第 1 天到 第 20 天	-	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	-	-	+	-	+	0	0	+
第 21 天 到第 40 天	0	+	+	0	-	-	-	+	+	0	+	0	+	-	-	-	+	0	-	+

用频率估计概率.

- (1) 试估计该农产品“上涨”的概率;
- (2) 假设该农产品每天的价格变化是相互独立的, 在未来的日子里任取 4 天, 试估计该农产品价格在这 4 天中 2 天“上涨”、1 天“下跌”、1 天“不变”的概率;
- (3) 假设该农产品每天的价格变化只受到前一天价格的影响, 判断第 41 天该农产品价格“上涨”“下跌”和“不变”的概率估计值哪个最大. (结论不要求证明)

19. (15 分) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 设椭圆 E 的上、下顶点分别为 A, C , 左、右顶点分别为 B, D , $|AC| = 4$.

- (1) 求椭圆 E 的方程;
- (2) 点 P 在椭圆 E 的第一象限上运动, 直线 PD 与直线 BC 交于点 M , 直线 AP 与直线 $y = -2$ 交于点 N . 求证: $MN \parallel CD$.

20. (15 分) 设函数 $f(x) = x - x^3 \mathrm{e}^{ax+b}$, 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 的切线方程为 $y = -x + 1$.

- (1) 求 a, b 的值;
- (2) 设 $g(x) = f'(x)$, 求 $g(x)$ 的单调区间;
- (3) 求 $f(x)$ 极值点的个数.

21. (15 分) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个 m 项有穷数列, 且 $\forall a_i, b_i \in \{1, 2, \cdots, m\}, i \in \{1, 2, \cdots, m\}$. 记 A_n, B_n 分别为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和, 且令 $A_0 = B_0 = 0$. 另记 $r_k = \max\{i \mid B_i \leq A_k, k \in \{0, 1, \cdots, m\}\}$.

(1) 若 $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 3; b_1 = 1, b_2 = 2, b_3 = 3$, 求 r_0, r_1, r_2, r_3 的值;

(2) 若 $a_1 \geq b_1$, 且 $2r_i \leq r_{i-1} + r_{i+1}$, 求 r_n ;

(3) 证明: 存在 $0 \leq p < q \leq m, 0 \leq r < s \leq m$, 使得 $A_p + B_s = A_q + B_r$.

1 2023 年普通高等学校招生全国统一考试(北京卷)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
答案	A	D	B	C	D	D	B	C	C	B	1	$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$	$\frac{13\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$	48 384	②③

1. A 【命题点】集合的交集运算

【解析】由题意得 $M=\{x|x\geq -2\}$, $N=\{x|x<1\}$, 所以 $M\cap N=\{x|-2\leq x<1\}$. 故选 A.

2. D 【命题点】复数的几何意义, 共轭复数的概念

【解析】根据复数的几何意义得 $z=-1+\sqrt{3}i$, 所以 $\bar{z}=-1-\sqrt{3}i$, 故选 D.

3. B 【命题点】平面向量数量积的运算律, 数量积的坐标运算

【解析】因为 $a+b=(2,3)$, $a-b=(-2,1)$, 所以 $|a|^2-|b|^2=(a+b)\cdot(a-b)=2\times(-2)+3\times1=-1$. 故选 B.

4. C 【命题点】基本初等函数的单调性, 复合函数单调性的判断法则

【解析】对于 A, 因为 $y=\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)=-\ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 A 错误; 对于 B, $f(x)=\frac{1}{2^x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 B 错误; 对于 C, $f(x)=-\frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 C 正确; 对于 D, 因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3^{\left|\frac{1}{2}-1\right|}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$, $f(1)=3^{|1-1|}=3^0=1$, 所以 $f(x)=3^{|x-1|}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不单调递增, D 错误. 故选 C.

5. D 【命题点】二项展开式的计算

【解析】 $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=(-1)^r2^{5-r}C_5^rx^{5-2r}$, 令 $5-2r=1$ 得 $r=2$, 所以 x 的系数为 $(-1)^22^{5-2}C_5^2=80$, 故选 D.

6. D 【命题点】抛物线的定义

【解析】因为抛物线的焦点 $F(2,0)$, 准线方程为 $x=-2$, 点 M 在 C 上, 所以 M 到准线 $x=-2$ 的距离为 $|MF|$, 又 M 到直线 $x=-3$ 的距离为 5, 所以 $|MF|+1=5$, 故 $|MF|=4$, 故选 D.

7. B 【命题点】正弦定理、余弦定理综合应用

【解析】因为 $(a+c)(\sin A-\sin C)=b(\sin A-\sin B)$, 所以由正弦定理得 $(a+c)(a-c)=b(a-b)$, 即 $a^2-c^2=ab-b^2$, 故 $a^2+b^2-c^2=ab$, 故 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}$. 因为 $0<C<\pi$, 所以 $C=\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

8. C 【命题点】充分必要条件的判断

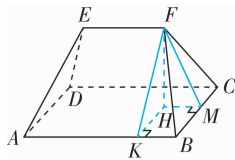
【解析】充分性: 当 $x+y=0$ 时, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=-2$;
必要性: $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}=\frac{(x+y)^2}{xy}-2=-2$, 即 $\frac{(x+y)^2}{xy}=0$, 又 $xy\neq 0$, 所以 $(x+y)^2=0$, 即 $x+y=0$, 所以“ $x+y=0$ ”是“ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$ ”的充分必要条件, 故选 C.

一题多解

充分性: 当 $x+y=0$ 时, $x=-y$, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-1+(-1)=-2$; 必要性: 当 $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$ 时, x, y 异号, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\leq -2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=-2$, 当且仅当 $\frac{x}{y}=-1$, 即 $x+y=0$ 时, 等号成立. 所以“ $x+y=0$ ”是“ $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-2$ ”的充分必要条件, 故选 C.

9. C 【命题点】平面与平面的夹角、五面体的棱长

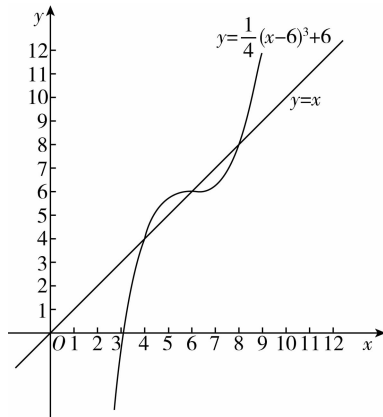
【解析】设点 F 在底面 $ABCD$ 上的射影为 H , 如图所示, 过点 H 作 $HK\perp AB$ 于 K , $HM\perp BC$ 于 M , 连接 FK, FM ,



则 $\angle FKH$ 为平面 $ABFE$ 与底面 $ABCD$ 的夹角, $\angle FMH$ 为平面 BCF 与底面 $ABCD$ 的夹角, 所以 $\frac{\sqrt{14}}{5}=\frac{FH}{KH}=\frac{FH}{HM}$. 因为 $FH\perp$ 底面 $ABCD$, $BC\subset$ 底面 $ABCD$, 所以 $FH\perp BC$. 又 $FH\cap HM=H$, 所以 $BC\perp$ 平面 FHM . 因为 $FM\subset$ 平面 FHM , 所以 $FM\perp BC$. 由题知 $FB=FC$, 所以 M 为 BC 的中点. 由题知四边形 $BMHK$ 为矩形, 又 $BC=10$, 所以 $BM=5$, 所以 $KH=5$, 所以 $FH=\sqrt{14}$. $HM=5$. 因为 $AB=25$, 所以 $EF=15$. 在 $\triangle FHM$ 中, $FM=\sqrt{14+5^2}=\sqrt{39}$, 因为 $\triangle BCF$ 为等腰三角形, 所以 $FB=\sqrt{39+5^2}=8$, 因此轮廓安装灯带所需长度为 $15+2\times(8+8+25+10)=117(\text{m})$. 故选 C.

10. B 【命题点】数列单调性与最值的判断

【解析】在平面直角坐标系中, 画出 $y=x$ 和 $y=\frac{1}{4}(x-6)^3+6$ 的图像, 如图所示.



若 $a_1=3$, 由图可知, $\{a_n\}$ 是递减数列, 当 $n\rightarrow+\infty$ 时, $a_n\rightarrow$

$-\infty$,故 A 错误. 若 $a_1=5$,取 $M=6$,由图可知, $\{a_n\}$ 是递增数列,当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $a_n \rightarrow 6$, 故 B 正确. 若 $a_1=7$,由图可知, $\{a_n\}$ 是递减数列,当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $a_n \rightarrow 6$,此时不存在 $M>6$,使得 $n>m$ 时, $a_n>M$,故 C 错误. 若 $a_1=9$,由图可知, $\{a_n\}$ 是递增数列,当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $a_n \rightarrow +\infty$,此时不存在 $M \in \mathbf{R}$,使得 $n>m$ 时, $a_n<M$,故 D 错误. 故选 B.

11.1 【命题点】指数、对数运算

【解析】 $f\left(\frac{1}{2}\right)=4^{\frac{1}{2}}+\log_2 \frac{1}{2}=2-1=1$.

12. $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$ 【命题点】双曲线的方程、焦距、离心率

【解析】依题意双曲线 C 的焦点在 x 轴上,且半焦距 $c=2$,由双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$,得 $\frac{c}{a}=\sqrt{2}$,解得 $a=\sqrt{2}$,则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{2}$,所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$.

13. $\frac{13\pi}{6}$ $\frac{\pi}{4}$ (答案不唯一) 【命题点】假命题的定义

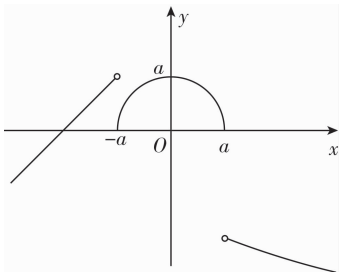
【解析】取 $\alpha=\frac{13\pi}{6}, \beta=\frac{\pi}{4}$,满足 α, β 为第一象限角, $\alpha>\beta$, $\tan \alpha<\tan \beta$,所以“若 α, β 为第一象限角,且 $\alpha>\beta$,则 $\tan \alpha>\tan \beta$ ”为假命题,符合题意.

14. 48 384 【命题点】等差中项、等比中项、等比数列求和公式

【解析】依题意,后 7 项成等比数列,设后 7 项的公比为 q ,则 $q^4=\frac{a_9}{a_5}=\frac{192}{12}=16$. 因为 $\{a_n\}$ 为正项数列,所以 $q=2$,所以 $a_7=\sqrt{a_5 \cdot a_9}=48$. 又因为 $a_3=\frac{a_5}{q^2}=\frac{12}{4}=3, a_2=\frac{a_1+a_3}{2}=2$,所以数列 $\{a_n\}$ 的所有项的和为 $a_1+a_2+\cdots+a_9=1+2+\frac{3 \times(1-2^7)}{1-2}=384$.

15. ②③ 【命题点】分段函数单调性、最值、函数两点间距离.

【解析】 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 可以变形为 $x^2+y^2=a^2$,由于 $y \geq 0$,其图象为圆在 x 轴及其上方的部分,故函数 $f(x)$ 的大致图像如图所示.



对于①,由图像可知,函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -a)$ 上单调递增,在 $[-a, 0]$ 上单调递增,在 $(0, a)$ 上单调递减,在 $(a, +\infty)$ 上单调递减,故①错误.
 对于②,由图像可知,当 $x \in (-\infty, -a)$ 时, $f(x)<-a+2$;
 当 $x \in [-a, a]$ 时, $f(x) \leq a$; 当 $x \in (a, +\infty)$ 时, $f(x)<-\sqrt{a}-1$,又当 $a \geq 1$ 时, $-a+2 \leq a$,所以 $f(x)$ 存在最大值为 $f(0)=a$,故②正确.

对于③,由图可知,当 $x_1 \leq a, x_2>a$,且 $|MN|$ 最小时, $x_1=a$, $|MN|_{\min}>\sqrt{a}+1>1$,故③正确.

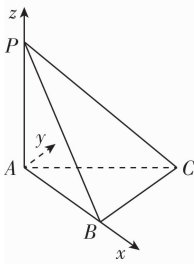
对于④, $y=\sqrt{a^2-x^2}$,令 $y'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}=1$,解得 $x=-\frac{a}{\sqrt{2}}$,此时 $y=\frac{a}{\sqrt{2}}$,若 $|PQ|$ 存在最小值,则有 $2-a>\frac{a}{\sqrt{2}}$,解得 $0<a<4-2\sqrt{2}$,故④错误.

16. 【命题点】线面垂直的证明、二面角的计算

(1)【证明】因为 $PA \perp$ 平面 $ABC, BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $PA \perp BC$.

同理 $PA \perp AB$,所以 $\triangle PAB$ 为直角三角形, 2 分
 所以 $PB=\sqrt{PA^2+AB^2}=\sqrt{2}$. 又因为 $BC=1, PC=\sqrt{3}$, 所以 $PB^2+BC^2=PC^2$,所以 $\triangle PBC$ 为直角三角形, $PB \perp BC$. 又因为 $PA \perp BC$,且 $PA \cap PB=P, PA, PB \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp$ 平面 PAB 5 分

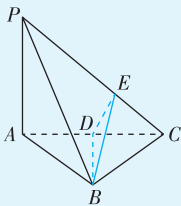
(2)【解】以 A 为原点, AB 所在直线为 x 轴,过 A 且与 BC 平行的直线为 y 轴, AP 所在直线为 z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $A(0,0,0), P(0,0,1), C(1,1,0), B(1,0,0)$, 所以 $\overrightarrow{AP}=(0,0,1), \overrightarrow{AC}=(1,1,0), \overrightarrow{BC}=(0,1,0), \overrightarrow{PC}=(1,1,-1)$.



设平面 PAC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1, y_1, z_1)$, 则 $\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AP}=0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{AC}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} z_1=0, \\ x_1+y_1=0, \end{cases}$ 令 $x_1=1$,则 $y_1=-1$,所以 $\boldsymbol{m}=(1,-1,0)$ 8 分
 设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2, y_2, z_2)$, 则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{BC}=0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PC}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_2=0, \\ x_2+y_2-z_2=0, \end{cases}$ 令 $x_2=1$,则 $z_2=1$,所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$.
 所以 $\cos \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle=\frac{\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}| |\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ 11 分
 由图可知二面角 $A-PC-B$ 为锐二面角,所以二面角 $A-PC-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$ 13 分

> 一题多解

(2)由(1)可知 $BC \perp BA$,取 AC 的中点 P , D ,连接 BD ,如图所示. 因为 $AB=BC=1$, 所以 $BD=\frac{\sqrt{2}}{2}$,且 $BD \perp AC$ 7 分
 因为 $PA \perp$ 平面 $ABC, BD \subset$ 平面 ABC ,



所以 $PA \perp BD$. 又 $PA \cap AC = A$, 所以 $BD \perp$ 平面 PAC .
 又 $PC \subset$ 平面 PAC , 所以 $BD \perp PC$.
 过 D 作 $DE \perp PC$ 于点 E , 连接 BE . 因为 $BD \perp PC, DE \perp PC$,
 $BD, DE \subset$ 平面 $BDE, DE \cap BE = E$, 所以 $PC \perp$ 平面 BDE .
 又 $BE \subset$ 平面 BDE , 所以 $PC \perp BE$,
 所以 $\angle DEB$ 为二面角 $A-PC-B$ 的平面角. 10 分
 因为 $\triangle CDE \sim \triangle CPA$, 所以 $\frac{DE}{PA} = \frac{DC}{PC}$, 解得 $DE = \frac{\sqrt{6}}{6}$,
 所以 $\tan \angle DEB = \frac{BD}{DE} = \sqrt{3}$, 所以 $\angle DEB = \frac{\pi}{3}$,
 所以二面角 $A-PC-B$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$ 13 分

17. 【命题点】正弦型函数解析式中 ω, φ 的计算

【解】(1) $f(x) = \sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi = \sin(\omega x + \varphi)$.
 2 分
 若 $f(0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4 分
 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ 6 分
 (2) 选择条件①: 因为 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增,
 $f(\frac{2\pi}{3}) = 1$ 与 $f(\frac{\pi}{3}) = 1$ 矛盾, 所以不符合题意, 故不选条件①.
 选择条件②: 因为 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ 在 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递增,
 $f(-\frac{\pi}{3}) = -1, f(\frac{2\pi}{3}) = 1$, 所以 $\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$,
 所以 $\omega = 1$, 所以 $f(x) = \sin(x + \varphi)$. 又因为 $f(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} + \varphi) = 1$, 所以 $\frac{2\pi}{3} + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 14 分
 选择条件③: 由题意, $f(x)$ 在 $[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}]$ 上单调递减, 在
 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$ 单调递增, 所以 $-\frac{\pi}{3}$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 且 $\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3}) = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$, 所以 $\omega = 1$, 所以 $f(x) = \sin(x + \varphi)$.
 又因为 $f(\frac{2\pi}{3}) = \sin(\frac{2\pi}{3} + \varphi) = 1$, 且 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$.
 14 分

18. 【命题点】用频率估计概率、相互独立事件的概率

【解】(1) 根据表格数据可以看出, 40 天里有 16 个“+”, 也就说有 16 天是上涨的, 所以可估计该农产品价格上涨的概率为 $\frac{16}{40} = 0.4$ 4 分
 (2) 在这 40 天里, 有 16 天上涨, 14 天下跌, 10 天不变, 所以可估计该农产品价格上涨、下跌、不变的概率分别是 0.4, 0.35, 0.25, 7 分
 于是未来任取 4 天, 2 天上涨, 1 天下跌, 1 天不变的概率是

$C_4^2 \times 0.4^2 \times C_2^1 \times 0.35 \times 0.25 = 0.168$ 10 分
 (3) 由于第 40 天处于上涨状态, 从前 39 天的 15 天上涨进行分析, 上涨后第二天仍上涨的有 4 天, 不变的有 9 天, 下跌的有 2 天, 因此估计第 41 天不变的概率最大. 13 分

19. 【命题点】椭圆的标准方程、直线与直线的位置关系

(1) 【解】由题设, 得 $\begin{cases} 2b = 4, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 3, \\ b = 2, \\ c = \sqrt{5}, \end{cases}$
 所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 5 分
 (2) 【证明】设 $P(x_0, y_0)$, 其中 $x_0 > 0, y_0 > 0$, 且满足 $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1$.
 由(1)知, $A(0, 2), B(-3, 0), C(0, -2), D(3, 0)$,
 所以直线 BC 的方程为 $y = -\frac{2}{3}x - 2$, 直线 PD 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 - 3}(x - 3)$ 8 分
 由 $\begin{cases} y = \frac{y_0}{x_0 - 3}(x - 3), \\ y = -\frac{2}{3}x - 2, \end{cases}$ 解得点 M 的横坐标 $x_M = \frac{-6x_0 + 9y_0 + 18}{2x_0 + 3y_0 - 6}$.
 直线 AP 的斜率为 $\frac{y_0 - 2}{x_0}$, 所以直线 AP 的方程为 $y = \frac{y_0 - 2}{x_0}x + 2$.
 因为直线 AP 与直线 $y = -2$ 交于点 N , 所以点 N 的横坐标 $x_N = \frac{-4x_0}{y_0 - 2}$.
 所以直线 MN 的斜率 $k_{MN} = \frac{-\frac{2}{3}x_M - 2 - (-2)}{x_M - x_N} = \frac{-\frac{2}{3}x_M}{x_M - x_N}$.
 又因为直线 CD 的斜率 $k_{CD} = \frac{2}{3}$,
 所以 $k_{MN} - k_{CD} = \frac{-\frac{2}{3}x_M}{x_M - x_N} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{-2x_M + x_N}{x_M - x_N}$ 10 分
 因为 $-2x_M + x_N = \frac{12x_0 - 18y_0 - 36}{2x_0 + 3y_0 - 6} + \frac{4x_0}{2 - y_0}$
 $= \frac{(12x_0 - 18y_0 - 36)(2 - y_0) + 4x_0(2x_0 + 3y_0 - 6)}{(2x_0 + 3y_0 - 6)(2 - y_0)}$
 $= \frac{12x_0(2 - y_0) + 18(y_0 + 2)(y_0 - 2) + 8x_0^2 + 12x_0(y_0 - 2)}{(2x_0 + 3y_0 - 6)(2 - y_0)}$
 $= \frac{8x_0^2 + 18y_0^2 - 72}{(2x_0 + 3y_0 - 6)(2 - y_0)}$ 12 分

因为 $\frac{x_0^2}{9} + \frac{y_0^2}{4} = 1$, 即 $4x_0^2 + 9y_0^2 = 36$,
 所以 $-2x_M + x_N = 0$, 即 $k_{MN} - k_{CD} = 0$.
 显然, 直线 CD 与 MN 不重合, 所以 $MN \parallel CD$ 15 分

20. 【解】(1) 因为 $f(x) = x - x^3 e^{ax+b}$,

所以 $f'(x) = 1 - (3x^2 + ax^3) e^{ax+b}$.
 由题意, 得 $\begin{cases} f(1) = 0, \\ f'(1) = -1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 1 - e^{a+b} = 0, \\ 1 - (3 + a)e^{a+b} = -1. \end{cases}$

解得 $a=-1, b=1$ 4 分

(2) 由 (1) 知 $f(x)=x-x^3e^{-x+1}$,
 $g(x)=f'(x)=1-(3x^2-x^3)e^{-x+1}$.
 $g'(x)=-x(x^2-6x+6)e^{-x+1}$,
 令 $g'(x)=0$, 解得 $x=0$ 或 $x=3\pm\sqrt{3}$ 7 分
 $g'(x)$ 与 $g(x)$ 随 x 的变化情况如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3-\sqrt{3})$	$3-\sqrt{3}$	$(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$	$3+\sqrt{3}$	$(3+\sqrt{3}, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$	↗		↘		↗		↘

所以 $g(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, 0)$ 和 $(3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3})$,
 单调递减区间是 $(0, 3-\sqrt{3})$ 和 $(3+\sqrt{3}, +\infty)$ 9 分

(3) 由 (2) 知, 当 $x\in(-\infty, 0)$ 时, $f'(x)$ 单调递增,
 当 $x<-1$ 时, $f'(x)<f'(-1)=1-4e^2<0, f'(0)=1>0$,
 所以 $\exists x_1\in(-\infty, 0)$, 使得 $f'(x_1)=0$,
 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1, 0)$ 上单调递增,
 故 x_1 是 $f(x)$ 的一个极小值点. 11 分
 当 $x\in(0, 3-\sqrt{3})$ 时, $f'(x)$ 单调递减,
 又 $f'(3-\sqrt{3})<f'(1)=-1<0$,
 所以 $\exists x_2\in(0, 3-\sqrt{3})$, 使得 $f'(x_2)=0$,
 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_2)$ 上单调递增, 在 $(x_2, 3-\sqrt{3})$ 上单调递减,
 故 x_2 是 $f(x)$ 的一个极大值点. 13 分
 当 $x\in(3-\sqrt{3}, 3)$ 时, $f'(x)$ 单调递增, 又 $f'(3)=1>0$,
 所以 $\exists x_3\in(3-\sqrt{3}, 3)$, 使得 $f'(x_3)=0$,
 所以 $f(x)$ 在 $(3-\sqrt{3}, x_3)$ 上单调递减, 在 $(x_3, 3)$ 上单调递增,
 故 x_3 是 $f(x)$ 的一个极小值点.
 又当 $x>3$ 时, $f'(x)>0$, 所以 $f(x)$ 在 $(3, +\infty)$ 单调递增, 无极值点.
 综上可知, $f(x)$ 共有 3 个极值点. 15 分

21. 【命题点】数列的新定义问题

(1) 【解】由题意 $A_0=0, A_1=2, A_2=3, A_3=6, B_0=0, B_1=1, B_2=3, B_3=6$, 1 分
 则 $r_0=\max\{i|B_i\leqslant 0\}$, $\therefore r_0=0$; 2 分
 $r_1=\max\{i|B_i\leqslant 2\}$, 即 $r_1=\max\{0, 1\}=1$; 3 分
 $r_2=\max\{i|B_i\leqslant 3\}$, 即 $r_2=\max\{0, 1, 2\}=2$; 4 分
 $r_3=\max\{i|B_i\leqslant 6\}$, 即 $r_3=\max\{0, 1, 2, 3\}=3$ 5 分
 (2) 【解】显然 $r_m\leqslant m$, 因为 $a_1\geqslant b_1$, 所以 $r_0=0, r_1\geqslant 1$.
 因为 $2r_i\leqslant r_{i-1}+r_{i+1}$, 所以 $r_{i+1}-r_i\geqslant r_i-r_{i-1}$, 因此 $r_{i+1}-r_i\geqslant r_i-r_{i-1}\geqslant\cdots\geqslant r_1-r_0=r_1\geqslant 1$.
 若存在正整数 j 使得 $r_{j+1}-r_j>1$, 则 $r_m\geqslant r_{m-1}+1\geqslant\cdots\geqslant r_{j+1}+(m-j-1)>r_j+(m-j)\geqslant\cdots\geqslant r_0+m=m$, 这与 $r_m\leqslant m$ 矛盾.
 8 分
 因此, $r_1=1$, 且对任意正整数 i 均有 $r_{i+1}-r_i=1$,
 所以 $\{r_n\}$ 是首项、公差均为 1 的等差数列, 故 $r_n=n$.
 11 分
 (3) 【证明】设 $A_m\geqslant B_m$. 记 $S_k=A_k-B_{r_k}(1\leqslant k\leqslant m)$, 则 $S_k\geqslant 0$.
 则一定有 $S_k\leqslant m-1$.
 若 $S_k>m-1$, 则由 r_k 的定义可知 $A_k-B_{r_{k+1}}<0$,
 则 $b_{r_{k+1}}=B_{r_{k+1}}-B_{r_k}=S_k-(A_k-B_{r_{k+1}})>m$,
 与 $b_{r_{k+1}}\in\{1, 2, \cdots, m\}$ 矛盾. 12 分
 若存在 k 使得 $S_k=0$, 则取 $r=p=0, q=k, s=r_k$ 即满足题目要求.
 若这样的 k 不存在, 则 $S_k\in\{1, 2, \cdots, m-1\}$, 因此一定存在 $1\leqslant u<v\leqslant m$ 使得 $S_u=S_v$, 且由 r_k 的定义可知 $r_u<r_v$.
 从而 $A_u-B_{r_u}=A_v-B_{r_v}$, 即 $A_u+B_{r_v}=A_v+B_{r_u}$, 得证.
 若 $A_m\leqslant B_m$, 则可定义 $t_k=\max\{i|A_i\leqslant B_k, k\in\{0, 1, \cdots, m\}\}$,
 并记 $T_k=B_k-A_{t_k}(1\leqslant k\leqslant m)$, 同上述过程可得结论成立.
 15 分