专题 14　概率与统计

考点 51　随机事件的概率及古典概型

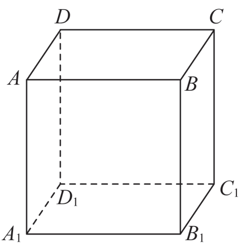
1. C　【解析】因为$[-12,-4)$，$[-4,4)$，$[4,12)$内有 $25+35+20=80$（个），因此误差在$[-12,12)$内的合格率为 80%，结合题意知 $m=12$.

2. A　【解析】由题意可知，投篮命中的频率为$\frac{560}{1\ 000}=0.56$，得到的频率可能大于概率，也可能小于概率，也可能等于概率，故 A 正确，C 错误. 投篮 10 次或 100 次，每一次的结果都是随机的，其结果可能一次没中或者多次投中等，频率、概率只反映事件发生的可能性的大小，不能说明事件是否一定发生，故 B，D 错误.

3. B　【解析】依题意，同时抛掷两枚质地均匀的骰子，样本空间 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$，共 36 个样本点，两枚骰子出现的点数之和为 4 的事件包含的样本点有$(1,3)$，$(2,2)$，$(3,1)$，共 3 个，故两枚骰子出现的点数之和为 4 的概率是$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$.

4. A　【解析】由已知条件得，将 12 个人任意分成 3 组（每组 4 个人），不同的分组方法有$\frac{C_{12}^4C_8^4C_4^4}{A_3^3}$种，3 个种子选手分在同 1 个组的方法有$\frac{C_9^1C_8^4C_4^4}{A_2^2}$种（**易错：**均匀分组问题要除以均分组数的全排列数），故 3 个种子选手恰好被分在同 1 个组的概率为
$$\frac{\frac{C_9^1C_8^4C_4^4}{A_2^2}}{\frac{C_{12}^4C_8^4C_4^4}{A_3^3}}=\frac{3}{55}$$，故选 A.

5. BCD　【解析】对于 A，从 8 个顶点中任取 3 个顶点构成的直角三角形共有 $6C_4^3+12\times2=48$（个），其中等腰直角三角形有 24 个，所以一个 K-三角形在它是直角三角形的条件下，又是等腰直角三角形的概率为$\frac{24}{48}=\frac{1}{2}$，故 A 错误.



对于 B，从 8 个顶点中任取 3 个顶点构成的等腰三角形共有 $C_8^3-12\times2=32$（个），其中的等边三角形有 8 个，所以一个 K-三角形在它是等腰三角形的条件下，又是等边三角形的概率为$\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$，故 B 正确.

对于 C，相互平行的棱对有 $3C_4^2=18$（对），其中距离为$\sqrt{2}$的棱对有 6 对，所以一组棱对中 2 条棱所在直线在互相平行的条件下，它们的距离为$\sqrt{2}$的概率为$\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$，故 C 正确.

对于 D，相互垂直的棱对有 48 对，其中相互异面的棱对有 24 对，所以一组棱对中 2 条棱所在直线在互相垂直的条件下，它们异面的概率为$\frac{1}{2}$，故 D 正确.

6. $\frac{64}{81}$ 【解析】用算筹随机摆出一个不含数字 0 的两位数，个位用纵式，十位用横式，共可以摆出 $9\times9=81$（个）两位数，

其中个位和十位上的算筹都为 1，有 $1\times1=1$（个）；

个位和十位上的算筹都为 2，有 $2\times2=4$（个）；

个位和十位上的算筹都为 3，有 $2\times2=4$（个）；

个位和十位上的算筹都为 4，有 $2\times2=4$（个）；

个位和十位上的算筹都为 5，有 $2\times2=4$（个）.

故共有 $4+4+4+4+1=17$（个）.

所以个位和十位上算筹不一样多的概率为$\frac{81-17}{81}=\frac{64}{81}$.

关键点拨 先求出一共摆出的两位数的个数，再求出个位和十位上的算筹不一样多的两位数.

7. D 【解析】顾客未砸出奖券的概率为$\frac{C_6^2}{C_9^2}=\frac{5}{12}$，故所求概率为 $1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$. 故选 D.

8. D 【解析】从装有 2 个红球和 2 个黑球的袋子内任取 2 个球，可能的结果为 1 红 1 黑、2 红、2 黑.

对于 A，“至少有 1 个红球”包括 1 红 1 黑、2 红，与“都是黑球”是对立事件，不符合题意；

对于 B，“恰好有 1 个红球”与“恰好有 1 个黑球”是同一个事件，不符合题意；

对于 C，“至少有 1 个黑球”包括 1 红 1 黑、2 黑，“至少有 1 个红球”包括 1 红 1 黑、2 红，这两个事件不是互斥事件，不符合题意；

对于 D，“都是红球”与“都是黑球”是互斥事件而不是对立事件，符合题意.

考点 52 条件概率、全概率公式及相互独立事件的概率

1. D 【解析】由题意可得，甲最终获胜有两种情况：一是前两局甲获胜，则获胜的概率为 $0.6\times0.6=0.36$；二是前两局甲胜一局，第三局甲获胜，则获胜的概率为 $C_2^1\times0.6\times0.4\times0.6=0.288$. 而这两种情况是互斥的，所以甲最终获胜的概率为 $0.36+0.288=0.648$，故选 D.

2. C 【解析】由题可知，$P(A)=\frac{A_2^2A_5^5}{A_6^6}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{A_3^3A_4^3}{A_6^6}=\frac{1}{5}$，

$P(C)=\frac{2A_3^3A_3^3}{A_6^6}=\frac{1}{10}$，$P(D)=\frac{\frac{A_6^6}{A_3^3}}{A_6^6}=\frac{1}{A_3^3}=\frac{1}{6}$.

对于 A，$P(AB)=\frac{A_2^2A_3^3A_3^2}{A_6^6}=\frac{1}{10}\neq P(A)P(B)$，故 A 错误；

对于 B，$P(AC)=\frac{2C_5^1A_2^2A_2^2}{A_6^6}=\frac{40}{720}=\frac{1}{18}\neq P(A)P(C)$，故 B 错误；

对于 C，$P(AD)=\frac{C_2^1C_4^1C_5^1}{A_6^6}=\frac{1}{18}=P(A)P(D)$，故 C 正确；

对于 D，$P(BC)=P(C)\neq P(B)P(C)$，故 D 错误.

3. ACD 【解析】设 2 个白球分别为 a_1,a_2，2 个黑球分别为 b_1,b_2，则样本空间 $\Omega=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_1),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_1,b_2),(b_2,a_1),(b_2,a_2),(b_2,b_1)\}$，共 12 个样本点.

事件 $A=\{(a_1,a_2),(a_2,a_1),(b_1,b_2),(b_2,b_1)\}$，共 4 个样本点；

事件 $B=\{(a_1,a_2),(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,a_1),(a_2,b_1),(a_2,b_2)\}$，共 6 个样本点；

事件 $C=\{(a_1,a_2),(a_2,a_1),(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_2,a_1),(b_2,a_2)\}$，共 6 个样本点；

事件 $D=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_2,a_1),(b_2,a_2)\}$，共 8 个样本点.

对于 A，$P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，故 A 正确；

对于 B，因为 $B\cap C\neq\varnothing$，所以事件 B 与 C 不互斥，故 B 错误；

对于 C，因为 $P(A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$，$P(AB)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$，所以 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)$，故事件 A 与 B 相互独立，故 C 正确；

对于 D，因为 $A\cap D=\varnothing$，$A\cup D=\Omega$，所以 A 与 D 互为对立事件，故 D 正确.

4. $\frac{13}{30}$ 【解析】设这位同学在物理、化学、政治科目考试中达 A^+ 的事件分别为 A,B,C.

因为这位同学在物理、化学、政治科目考试中达 A^+ 的概率分别为 $\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}$，所以 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(C)=\frac{4}{5}$，

这三门科目考试成绩的结果互不影响，

则这位同学恰好得 2 个 A^+ 的概率 $P=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{13}{30}$.

5. B 【解析】由题意知，$n(A)=A_5^2=20$，$n(AB)=C_2^1A_4^1=8$，

所以 $P(B|A)=\frac{n(AB)}{n(A)}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$，故选 B.

6. B 【解析】由题意知，事件 AB="三个点数都不同且出现 6 点".

$\because P(A)=\frac{A_6^3}{6^3}=\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$，$P(B)=\frac{6^3-5^3}{6^3}=\frac{91}{216}$，$P(AB)=\frac{C_3^1\cdot A_5^2}{6^3}=\frac{60}{216}=\frac{5}{18}$，$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}}=\frac{1}{2}$，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{91}{216}}=\frac{60}{91}$. 故选 B.

7. BC 【解析】对于 A，四个人每人从中随机抽取一张共有

$C_4^1C_3^1C_2^1$ 种抽法，

其中小王和小张恰好互换了贺卡的抽法有 C_2^1 种，故小王和小张恰好互换了贺卡的概率为$\frac{C_2^1}{C_4^1C_3^1C_2^1}=\frac{1}{12}$，故 A 错误；

对于 B，设小王抽到的是小张写的贺卡为事件 A，则 $P(A)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_4^1C_3^1C_2^1}=\frac{1}{4}$，设小张抽到小王写的贺卡为事件 B，则在小王抽到的是小张写的贺卡的条件下，小张抽到小王写的贺卡的概率

$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$，故 B 正确；

对于 C，恰有一个人抽到自己写的贺卡的抽法有 $C_4^1\times2$ 种，故恰有一个人抽到自己写的贺卡的概率为$\frac{C_4^1\times2}{C_4^1C_3^1C_2^1}=\frac{1}{3}$，故 C 正确；

对于 D，每个人抽到的都不是自己写的贺卡抽法共有 $C_3^1(1+2)$ 种，故每个人抽到的都不是自己写的贺卡的概率为$\frac{C_3^1(1+2)}{C_4^1C_3^1C_2^1}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$，故 D 错误. 故选 BC.

8. $\frac{1}{28}$ 【解析】设事件 A 为在第一轮甲、乙都未中奖，事件 B 为第二轮甲、乙都中奖，则 $P(A)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$，$P(AB)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{45}$，所以 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{45}\times\frac{45}{28}=\frac{1}{28}$.

9.【解】(1) 由题意可知，第一轮队伍 A 和队伍 D 对阵，则获胜队伍需要赢得比赛 3 的胜利，失败队伍需要赢得比赛 4 和比赛 5 的胜利，他们才能在决赛中对阵，所以所求的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

(2) 设 W_i 表示队伍 B 在比赛 i 中胜利，L_i 表示队伍 B 在比赛 i 中失败.

设事件 E：队伍 B 获得亚军，事件 F：队伍 B 所参加的所有比赛中败了两场，则事件 $F=\{L_2L_4,L_2W_4L_5,W_2L_3L_5,W_2L_3W_5L_6,L_2W_4W_5L_6\}$，且这五种情况彼此互斥，进而 $P(F)=P(L_2L_4)+P(L_2W_4L_5)+P(W_2L_3L_5)+P(W_2L_3W_5L_6)+P(L_2W_4W_5L_6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$.

事件 $E\cap F=\{W_2L_3W_5L_6,L_2W_4W_5L_6\}$，

进而 $P(E\cap F)=P(W_2L_3W_5L_6)+P(L_2W_4W_5L_6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

所以所求事件的概率为 $P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{5}$.

10. B 【解析】设事件 A 表示：从甲箱中随机取出 1 个红球放入乙箱中，事件 B 表示：从甲箱中随机取出 1 个白球放入乙箱中，事

件 C 表示:从甲箱中随机取出 1 球放入乙箱中,再从乙箱中随机取出 1 球,是红球,则有 $P(A)=\frac{3}{5}$,$P(C|A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{2}{5}$,$P(C|B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,所以 $P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{30}$. 故选 B.

11. AD 【解析】记第一次取得 $i(i=1,2,3)$ 号球为事件 A_i,则 $P(A_1)=\frac{1}{2}$,$P(A_2)=\frac{1}{4}$,$P(A_3)=\frac{1}{4}$.

对于 A,在第一次抽到 2 号球的条件下,第二次抽到 1 号球的概率 $P_1=\frac{2}{3+1}=\frac{1}{2}$,故 A 正确;

对于 B,第一次抽到 2 号球且第二次抽到 1 号球的概率 $P_2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,故 B 错误;

对于 C,记第二次在第 i 号盒子内抽到 3 号球的事件分别为 B_i $(i=1,2,3)$,且 A_1,A_2,A_3 两两互斥,和为样本空间 Ω,$P(B_1|A_1)=\frac{1}{4}$,$P(B_2|A_2)=\frac{1}{4}$,$P(B_3|A_3)=\frac{1}{6}$,

记第二次抽到 3 号球的事件为 B,则 $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_iB_i)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_i|A_i)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{48}$,故 C 错误;

对于 D,第二次的球取自盒子的编号与第一次取的球的号码相同,由 C 项分析可知,

$$P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{11}{48}}=\frac{6}{11},$$

$$P(A_2|B_2)=\frac{P(A_2)P(B_2|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{11}{48}}=\frac{3}{11},$$

$$P(A_3|B_3)=\frac{P(A_3)P(B_3|A_3)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}}{\frac{11}{48}}=\frac{2}{11},$$ 显然 $P(A_1|B_1)$ 最大,即如果第二次抽到的是 3 号球,则它来自 1 号盒子的概率最大,故 D 正确.

12. 0.3 【解析】设事件 A_1 = "第 1 天去 A 餐厅用餐",事件 B_1 = "第 1 天去 B 餐厅用餐",事件 A_2 = "第 2 天去 A 餐厅用餐",事件 B_2 = "第 2 天去 B 餐厅用餐".

根据题意得 $P(A_1)=P(B_1)=0.5$,$P(B_2|A_1)=1-0.8=0.2$,$P(B_2|B_1)=0.4$,

由全概率公式,得 $P(B_2)=P(A_1)P(B_2|A_1)+P(B_1)P(B_2|B_1)=0.5\times0.2+0.5\times0.4=0.3$,

因此该同学第 2 天去 B 餐厅用餐的概率为 0.3.

13. 5% 【解析】设 A 表示"取到的是一件次品",B_1,B_2,B_3 分别表示取到的产品是由甲、乙、丙车间生产的,显然 B_1,B_2,B_3 是样本空间 Ω 的一个划分,且有 $P(B_1)=0.45$,$P(B_2)=0.35$,

$P(B_3)=0.2$. 由于 $P(A|B_1)=0.02$, $P(A|B_2)=0.03$, 设 $P(A|B_3)=m$, 由全概率公式得

$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)=0.02\times0.45+0.03\times0.35+m\times0.2$. 因为 $P(A)=2.95\%$, 所以 $m=5\%$.

考点 53　离散型随机变量及其分布列、期望与方差

1. C 【解析】$P(|X|=1)=a+c=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

2. C 【解析】因为 $E(Y)=2E(X)+3=\frac{7}{3}$, 所以 $E(X)=-\frac{1}{3}$,

则 $\begin{cases}-1\times\frac{1}{2}+0\cdot a+1\times b=-\frac{1}{3},\\ \frac{1}{2}+a+b=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\ b=\frac{1}{6}.\end{cases}$

3. A 【解析】因为 $E(X_i)=0+p_i\left(\frac{1}{2}+p_i\right)+\left(\frac{1}{2}-p_i\right)(1+p_i)=\frac{1}{2}$,

所以 $E(X_1)=E(X_2)$.

$D(X_i)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+p_ip_i^2+\left(\frac{1}{2}-p_i\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+p_i\right)^2=\frac{9}{32}-\frac{1}{2}\left(p_i-\frac{1}{4}\right)^2$,

因为 $p_1+p_2=\frac{1}{2}$, 所以 $p_2=\frac{1}{2}-p_1$, $D(X_2)=\frac{9}{32}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-p_1\right)-\frac{1}{4}\right]^2=\frac{9}{32}-\frac{1}{2}\left(p_1-\frac{1}{4}\right)^2=D(X_1)$.

4. AB 【解析】随机变量 X 服从两点分布, 由 $P(X=0)=\frac{1}{3}$,

得 $P(X=1)=\frac{2}{3}$, $E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$,

$D(X)=\left(0-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$.

对于 A, $P(X=1)=E(X)$, 故 A 正确;

对于 B, $E(3X+2)=3E(X)+2=3\times\frac{2}{3}+2=4$, 故 B 正确;

对于 C, $D(3X+2)=9D(X)=9\times\frac{2}{9}=2$, 故 C 错误;

对于 D, $D(X)=\frac{2}{9}$, 故 D 错误.

5. 4 【解析】设黑球有 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个,

当 $n=1$ 时, x 可取 1, 2, 则 $P(x=1)=\frac{C_3^1C_1^1}{C_4^2}=\frac{1}{2}$, $P(x=2)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$, 则 $E(x)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\neq\frac{6}{7}$, 故 $n=1$ 与题意矛盾, 所以 $n\geqslant2$.

当 $n\geqslant2$ 时, x 可取 0, 1, 2, 则 $P(x=2)=\frac{C_3^2}{C_{n+3}^2}=\frac{6}{(n+3)(n+2)}$,

$P(x=1)=\frac{C_3^1C_n^1}{C_{n+3}^2}=\frac{6n}{(n+3)(n+2)}$,

$P(x=0)=\frac{C_n^2}{C_{n+3}^2}=\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$, 则 $E(x)=2\times\frac{6}{(n+3)(n+2)}+1\times\frac{6n}{(n+3)(n+2)}+0\times\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}=\frac{6}{7}$,

解得 $n=4$(负值舍去),故口袋中共有黑球 4 个.

6.【解】(1)随机变量 X 的可能取值为 0,10,20,30.

$P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$,$P(X=10)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$,

$P(X=20)=\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$,$P(X=30)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$,

所以 X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{24}$

所以数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{120}+10\times\frac{7}{40}+20\times\frac{21}{40}+30\times\frac{7}{24}=21$.

(2)记"该同学仅答对 1 道题"为事件 M.

由题可知他答对 A 类试题的概率为 $\frac{7}{10}$,所以 $P(M)=\frac{7}{10}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{3}{10}\times C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{19}{90}$,

所以这次竞赛中该同学仅答对 1 道题的概率为 $\frac{19}{90}$.

考点 54　超几何分布、二项分布和正态分布

1. A　【解析】一批产品共 100 件,其中有 3 件不合格品,从中任取 5 件,共有 C_{100}^5 种取法,其中恰有 1 件不合格品的取法有 $C_3^1C_{97}^4$ 种,故恰有 1 件不合格品的概率是 $\frac{C_3^1C_{97}^4}{C_{100}^5}$,故选 A.

2.【解】(1)由题知 $100\times(0.0010\times2+0.0035+a+0.0020)=1$,

解得 $a=0.0025$.

分数在区间[450,550)内的频率为 0.1,在区间[550,650)内的频率为 0.35,在区间[650,750)内的频率为 0.25,设中位数为 x,则 $x\in[650,750)$.

由 $0.1+0.35+(x-650)\times0.0025=0.5$,得 $x=670$.

故频率分布直方图中 a 的值为 0.002 5,估计该校学生分数的中位数为 670 分.

(2)由题意知从分数落在[650,750)内的学生中抽取 5 名学生,从分数落在[850,950]内的学生中抽取 2 名学生,随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2,则 $P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7}$,$P(X=1)=\frac{C_2^1C_5^2}{C_7^3}=\frac{4}{7}$,$P(X=2)=\frac{C_2^2C_5^1}{C_7^3}=\frac{1}{7}$,

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

数学期望 $E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$.

3. $\frac{32}{81}$　【解析】一次掷两枚骰子,两枚骰子点数之和为 4 的情况有 3 种,两枚骰子点数之和为 5 的情况有 4 种,两枚骰子点数之和

为 6 的情况有 5 种，

在一次试验中，出现成功试验的概率 $P=\frac{3+4+5}{36}=\frac{1}{3}$.

设出现成功试验的次数为 X，则 $X\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，

所以进行四次试验，恰好出现一次成功试验的概率 $P(X=1)=C_4^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$.

4.【解】(1) 由题意得 $P(A)=\frac{81+9}{100}=\frac{9}{10}$，

$P(B)=\frac{9}{100}$，则 $P(\overline{B})=\frac{91}{100}$，$P(AB)=\frac{9}{100}$，$P(A\overline{B})=\frac{81}{100}$，

$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{100}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{10}$，$P(\overline{B}|A)=\frac{P(A\overline{B})}{P(A)}=\frac{\frac{81}{100}}{\frac{9}{10}}=\frac{9}{10}$，

$\therefore L=\frac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{9}$.

(2) $\because P(X\leqslant 10)=P(X\geqslant 90)=\frac{1}{10}$，

$\therefore P(10<X<90)=1-2\times\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$，则 $Y\sim B\left(3,\frac{4}{5}\right)$.

Y 可能的取值为 0，1，2，3，

$P(Y=0)=C_3^0\times\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$；$P(Y=1)=C_3^1\times\frac{4}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{12}{125}$；

$P(Y=2)=C_3^2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}=\frac{48}{125}$；$P(Y=3)=C_3^3\times\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{64}{125}$.

$\therefore Y$ 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

$\therefore$ 数学期望 $E(Y)=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$.

5. D 【解析】随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，显然 $P(X<a)+P(X\geqslant a)=1$，而 $P(X<a)=3P(X\geqslant a)$，所以 $P(X\geqslant a)=0.25$. 故选 D.

6.【解】(1) $\bar{x}=\frac{1}{10}\times(38+41+44+51+54+56+58+64+74+80)=56$.

(2) 因为体质测试不合格的学生有 3 名，

所以 X 的可能取值为 0，1，2，3.

因为 $P(X=0)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{24}$，$P(X=1)=\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{21}{40}$，$P(X=2)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{40}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

(3) 因为 $\bar{x}=56$，$s^2=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{10}\times 1\ 690=169$，

所以$\mu=56,\sigma=13$.

因为$P(30\leqslant X\leqslant 82)=P(\mu-2\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+2\sigma)\approx 0.9545$,

所以学生的体质测试成绩恰好落在区间[30,82]的概率约为0.954 5,故$Y\sim B(100,0.9545)$,

所以$E(Y)=100\times 0.9545=95.45$.

7.【解】(1)若乙得6分,则需乙前3个投球点投中,第4个投球点未中,其概率为$p^3\cdot(1-p)$,

故$p^3\cdot(1-p)=\frac{1-p}{8}$,又$0<p<1$,所以$p=\frac{1}{2}$.

(2)设X为甲累计获得的分数,则$X\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$,所以$E(X)=np=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

设Y为乙累计获得的分数,则Y的可能取值为0,2,4,6,8,10,

$P(Y=0)=\frac{1}{2}$,$P(Y=2)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$,

$P(Y=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$,

$P(Y=6)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$,

$P(Y=8)=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{32}$,$P(Y=10)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$,

所以Y的分布列为

Y	0	2	4	6	8	10
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

所以$E(Y)=0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{16}+8\times\frac{1}{32}+10\times\frac{1}{32}=\frac{31}{16}$.

因为$E(X)>E(Y)$,所以甲获胜的可能性大.

考点55 随机抽样与用样本估计总体

1. A 【解析】根据题意,高一年级抽取的人数为$50\times\frac{300}{1\,000}=15$,高二年级抽取的人数为$50\times\frac{200}{1\,000}=10$,高三年级抽取的人数为$50\times\frac{500}{1\,000}=25$. 故选A.

2. A 【解析】根据题意知初中部共抽取$80\times\frac{250}{400}=50$(名)学生,高中部共抽取$80\times\frac{150}{400}=30$(名)学生,则不同的抽样结果共有$C_{250}^{50}\cdot C_{150}^{30}$种.

3. BC 【解析】选项A,若是按照比例分配的分层随机抽样法,则甲班应抽取$13\times\frac{40}{40+50+40}=4$(人),但是用简单随机抽样法抽取甲班人数不一定为4,故A错误;

选项B,用比例分配的分层随机抽样法,丙班应抽取$26\times\frac{40}{40+50+40}=8$(人),故B正确;

选项C,该高中一年级的平均及格率为$\frac{40\times 50\%+50\times 60\%+40\times 70\%}{40+50+40}=$

60%，故 C 正确；

选项 D，甲班及格的有 20 人，乙班及格的有 30 人，丙班及格的有 28 人，从这次该高中一年级数学月考及格的学生中随机抽取 1 人，则该学生来自甲班的概率为$\frac{20}{78}=\frac{10}{39}$，来自乙班的概率为$\frac{30}{78}=\frac{5}{13}$，来自丙班的概率为$\frac{28}{78}=\frac{14}{39}$，所以该学生来自乙班的概率最大，故 D 错误.

4. D 【解析】对于 A，湖南省的营收额约为 2 156 万元，占比 7.00%，所以 2022 年营收总额约为$\frac{2\ 156}{7.00\%}=30\ 800$（万元），故 A 正确；

对于 B，华南地区的营收额占比为 19.34%，河南省的营收额占比为 6.19%，有$\frac{19.34\%}{6.19\%}\approx 3.12$，所以华南地区的营收额比河南省的营收额的 3 倍还多，故 B 正确；

对于 C，华东地区的营收额占比为 35.17%，西南地区的营收额占比为 13.41%，东北地区的营收额占比为 11.60%，湖北省的营收额占比为 7.29%，有 $13.41\%+11.60\%+7.29\%=32.3\%<35.17\%$，故 C 正确；

对于 D，湖南的营收额占比为 7.00%，华中地区的营收额占比为 20.48%，有$\frac{7.00\%}{20.48\%}\approx 34.2\%$，故 D 错误.

5. A 【解析】因为$(0.000\ 10+0.000\ 20+0.000\ 25)\times 1\ 000=0.55>0.5$，所以中位数位于区间$[4\ 000,5\ 000)$内，设中位数为 x，

则$(0.000\ 10+0.000\ 20)\times 1\ 000+(x-4\ 000)\times 0.000\ 25=0.5$，解得 $x=4\ 800$，故①错误；

因为$(0.000\ 15+0.000\ 05)\times 1\ 000=0.2$，所以如果个税起征点调整至 6 000 元，估计有 20% 的当地职工会被征税，故②错误；

因为$(0.000\ 10+0.000\ 20+0.000\ 25+0.000\ 25)\times 1\ 000=0.8$，所以为使 70% 以上的职工不用缴纳个人所得税，起征点应低于 6 000 元，故③错误.

故选 A.

6. D 【解析】对于 A 选项，2018 年国民生产总值增长率最低，为 6.6% 左右，则连续 5 年中我国 GDP 保持 6% 以上的增长，故 A 正确；

对于 B 选项，根据增长率折线图可知，2014—2018 年我国 GDP 增速整体呈现下降趋势，故 B 正确；

对于 C 选项，2018 年 GDP 为 90 万亿左右，为 5 年最高，GDP 增速为 6.6% 左右，为 5 年最低，故 C 正确；

对于 D 选项，由题中数据，知 2014 年 GDP 为 64 万亿左右，2018 年 GDP 为 90 万亿左右，故没有增长一倍以上，故 D 错误. 故选 D.

7. ACD 【解析】由题图知，早睡人群占比与晚睡人群占比都是以早睡与晚睡各自的总人数为基数的，所以早睡人数与晚睡人数不能用各自所占的百分比来判断，故选项 A 错误；

早睡人群睡眠指数主要集中在$[80,90)$，晚睡人群睡眠指数主要

集中在[50,60),故选项 B 正确,选项 D 错误;

早睡人群睡眠指数的极差和晚睡人群睡眠指数的极差的大小无法确定,故选项 C 错误.

8. A 【解析】对于 A,显然这组样本数据的极差大于等于 $5-1=4$,故 A 正确;

对于 B,若 $a=b=0$,则这组数据的平均数为 $\frac{1+2+3+3+4+5}{8}=\frac{9}{4}<4$,故 B 错误;

对于 C,若 $a=b=0$,则这组数据 0,0,1,2,3,3,4,5 的中位数为 $\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}<3$,故 C 错误;

对于 D,若 $a=b=1$,则这组数据 1,1,1,2,3,3,4,5 的众数为 1,故 D 错误.

故选 A.

9. C 【解析】从 2,3,4,5,6,7,8,9 中随机取两个数有 $C_8^2=28$(种)取法,一个数比 m 大,一个数比 m 小的不同结果有 $(m-2)(9-m)$ 种,于是得 $\frac{(m-2)(9-m)}{28}=\frac{5}{14}$,整理得 $m^2-11m+28=0$,解得 $m=4$ 或 $m=7$. 当 $m=4$ 时,数据中的 $x\%$ 分位数是第 3 个数,则 $2<x\%\times 8<3$,解得 $25<x<37.5$,所有选项都不满足;当 $m=7$ 时,数据中的 $x\%$ 分位数是第 6 个数,则 $5<x\%\times 8<6$,解得 $62.5<x<75$,选项 A,B,D 不满足,选项 C 满足.

10. B 【解析】样本数据的平均数 $\bar{x}=a\cdot p_1+b\cdot p_2+c\cdot p_3+d\cdot p_4$,

结合选项可知 $p_1=p_4,p_2=p_3$ 且 $p_1+p_2=p_3+p_4=0.5$,

所以 $\bar{x}=(a+d)\cdot p_1+(b+c)\cdot p_2=(a+d)\cdot(p_1+p_2)=\frac{1}{2}(a+d)=\frac{1}{2}(b+c)$,

样本数据的方差 $s^2=(a-\bar{x})^2\cdot p_1+(b-\bar{x})^2\cdot p_2+(c-\bar{x})^2\cdot p_3+(d-\bar{x})^2\cdot p_4$

$=[(a-\bar{x})^2+(d-\bar{x})^2]\cdot p_1+[(b-\bar{x})^2+(c-\bar{x})^2]\cdot p_2$

$=\left[\left(a-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d\right)^2+\left(d-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d\right)^2\right]\cdot p_1+\left[\left(b-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right)^2+\left(c-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right)^2\right]\cdot p_2$

$=\left[\left(\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}d\right)^2+\left(\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}a\right)^2\right]\cdot p_1+\left[\left(\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c\right)^2+\left(\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}b\right)^2\right]\cdot p_2$

$=\frac{1}{2}(a-d)^2\cdot p_1+\frac{1}{2}(b-c)^2\cdot p_2$

$=\frac{1}{2}(a-d)^2\cdot p_1+\frac{1}{2}(b-c)^2\cdot\left(\frac{1}{2}-p_1\right)$

$=\frac{1}{2}[(a-d)^2-(b-c)^2]\cdot p_1+\frac{1}{4}(b-c)^2$.

因为 $a+d=b+c,a<b<c<d$,则 $-d<-c<-b<-a$,

所以 $a-d<b-c<0$,所以 $|a-d|>|b-c|$,故 $(a-d)^2-(b-c)^2>0$,

所以 p_1 最大时,方差最大,即标准差最大,故 B 正确.

11.【解】(1)依题意可得$\begin{cases}13+6+4+11+p+1+7+q=60,\\ \dfrac{11+q}{60}=\dfrac{4}{15},\end{cases}$

得$\begin{cases}p=13,\\ q=5,\end{cases}$故 p 的值为 13,q 的值为 5.

(2)这次抽检不合格,理由如下:

将每个数据都减去 28. 50 后所得新数据的平均数为$\frac{1}{60}[0.01\times 13+0.02\times 6+0\times 4+(-0.02)\times 11+(-0.01)\times 13+0.04\times 1+0.03\times 7+(-0.03)\times 5]=0$,

所以 $\bar{x}=0+28.50=28.50$,所以 $\bar{x}-s=28.48$,$\bar{x}+s=28.52$.

所以这 60 个零件内径尺寸在$[\bar{x}-s,\bar{x}+s]$内的个数为 $60-1-7-5=47$,

因为$\frac{47}{60}<0.8$,所以这次抽检不合格.

考点 56　成对数据的统计分析

1. B　【解析】由题中散点图可知,删除点 B 后,样本数据的两变量 x,y 负相关,所以 A 错误;

由于点 B 比其他点偏离程度大,故删除点 B 后,成对样本数据的线性相关程度更强,从而样本相关系数 r 的绝对值更接近于 1,所以 B 正确;

同理,决定系数 R^2 越接近于 1,所以新样本的残差平方和变小,所以 C 错误;

解释变量 x 与响应变量 y 相关性增强,所以 D 错误.

故选 B.

2. 0. 99　【解析】由题意,知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$,

$\sum\limits_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2=28$.

所以样本相关系数 $r=\frac{14.00}{\sqrt{28\times 7.08}}=\frac{14.00}{\sqrt{198.24}}\approx\frac{14.00}{14.08}\approx 0.99$.

3. AC　【解析】散点图的特点是单调递增,增长速度越来越慢,且 $y<25$.

对于 A,符合散点图的特点;

对于 B,$y=25+\sqrt{c_1x+c_2}\geqslant 25$,不符合散点图的特点;

对于 C,符合散点图的特点;

对于 D,$y=c_1(x-25)+c_2$ 的增长速度不变,不符合散点图的特点.

4.【解】(1)由题意可得,$\bar{x}=\frac{1+2+4+6+11+13+19}{7}=8$,

$\bar{y}=\frac{1.9+3.2+4.0+4.4+5.2+5.3+5.4}{7}=4.2$,

所以 $\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{7}x_iy_i-7\bar{x}\,\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{7}x_i^2-7\bar{x}^2}=\frac{279.4-7\times 8\times 4.2}{708-7\times 8^2}=0.17$,

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=4.2-0.17\times 8=2.84$,

故 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=0.17x+2.84$.

(2) 因为 $0.75<0.88$，R^2 越大拟合效果越好，

所以选用经验回归方程 $\hat{y}=1.63+0.99\sqrt{x}$ 更好，

$\hat{z}=200\times(1.63+0.99\sqrt{x})-x$

$=-x+198\sqrt{x}+326$

$=-(\sqrt{x}-99)^2+10\ 127$，

当 $\sqrt{x}=99$，即 $x=9\ 801$ 时，利润的预测值最大.

5.【解】 (1) 由题意可知，$r_1=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(u_i-\overline{u})(y_i-\overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(u_i-\overline{u})^2\sum_{i=1}^{10}(y_i-\overline{y})^2}}=\dfrac{21\ 500}{\sqrt{3\ 125\ 000\times200}}=\dfrac{21\ 500}{25\ 000}=0.86$，

$$r_2=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(v_i-\overline{v})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2\sum_{i=1}^{10}(v_i-\overline{v})^2}}=\frac{14}{\sqrt{770\times0.308}}\approx0.91.$$

因为 $|r_1|<|r_2|$，所以从样本相关系数的角度，模型 $y=e^{\lambda x+t}$ 的拟合效果更好.

(2) 因为 $y=e^{\lambda x+t}$，所以 $\ln y=t+\lambda x$，即 $v=t+\lambda x$.

由题中数据可得，$\hat{\lambda}=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})(v_i-\overline{v})}{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\overline{x})^2}=\dfrac{14}{770}=\dfrac{1}{55}\approx0.02$，

则 $\hat{t}=\overline{v}-\hat{\lambda}\overline{x}=4.20-\dfrac{1}{55}\times20\approx3.84$，从而 v 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{v}=0.02x+3.84$，

故 $\ln\hat{y}=0.02x+3.84$，即 $\hat{y}=e^{0.02x+3.84}$.

将年销售额 $\hat{y}=e^4$ 亿元，代入 $\hat{y}=e^{0.02x+3.84}$，即 $e^4=e^{0.02x+3.84}$，解得 $x=8$，故估计当年的年研发资金投入量为 8 亿元.

6. D 【解析】因为 $\chi^2=2.974>2.706$，所以变量 x 与 y 不相互独立，这个结论犯错误的概率不超过 10%.

7.【解】 (1) 男生人数为 $180\times\dfrac{5}{9}=100$，女生人数为 $180\times\dfrac{4}{9}=80$，

2×2 列联表如表所示.

性别	满意度		合计
	满意	不满意	
男生	80	20	100
女生	50	30	80
合计	130	50	180

零假设为 H_0："暑期研学旅行"的满意度与性别无关联.

根据列联表中的数据，经计算得到 $\chi^2=\dfrac{180\times(80\times30-20\times50)^2}{100\times80\times130\times50}\approx6.785>6.635=x_{0.01}$，

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，即认为"暑期研学旅行"的满意度与性别有关联，此推断犯错误的概率不超过 0.01.

(2) 抽取的初中女生人数为 $8\times\dfrac{3}{4}=6$，高中女生人数为 $8\times\dfrac{1}{4}=2$，

则 X 的可能取值为 2,3,4，

$P(X=2)=\dfrac{C_6^2C_2^2}{C_8^4}=\dfrac{15}{70}=\dfrac{3}{14}$，$P(X=3)=\dfrac{C_6^3C_2^1}{C_8^4}=\dfrac{40}{70}=\dfrac{4}{7}$，

$P(X=4)=\dfrac{C_6^4}{C_8^4}=\dfrac{15}{70}=\dfrac{3}{14}$，

所以 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\dfrac{3}{14}$	$\dfrac{4}{7}$	$\dfrac{3}{14}$

数学期望 $E(X)=2\times\dfrac{3}{14}+3\times\dfrac{4}{7}+4\times\dfrac{3}{14}=3.$

考点 57　概率统计与其他知识的综合

1.【解】(1)设比赛再继续进行下去 X 局乙赢得全部奖金，则最后一场必然乙赢.

由题知，当 $X=2$ 时，乙以 5∶1赢，所以 $P(X=2)=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{16}$，

当 $X=3$ 时，乙以 5∶2赢，所以 $P(X=3)=\dfrac{3}{4}\times C_2^1\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{32}$，

当 $X=4$ 时，乙以 5∶3赢，所以 $P(X=4)=\dfrac{3}{4}\times C_3^1\times\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{27}{256}$，

当 $X=5$ 时，乙以 5∶4赢，所以 $P(X=5)=\dfrac{3}{4}\times C_4^1\times\dfrac{3}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3=\dfrac{9}{256}$，

所以乙赢得全部奖金的概率为 $\dfrac{9}{16}+\dfrac{9}{32}+\dfrac{27}{256}+\dfrac{9}{256}=\dfrac{63}{64}$，

所以乙应该得奖金 $256\times\dfrac{63}{64}=252$(元).

(2)设比赛继续进行 Y 场甲获得全部奖金，则最后一场必然甲赢.

由题知，当 $Y=4$ 时，甲以 5∶3赢，所以 $P(Y=4)=(1-p)^4$，

当 $Y=5$ 时，甲以 5∶4赢，所以 $P(Y=5)=(1-p)\times C_4^3\times(1-p)^3p=4(1-p)^4p$，

所以甲获得全部奖金的概率 $f(A)=(1-p)^4+4(1-p)^4p=(4p+1)(1-p)^4$，$p\in\left[\dfrac{2}{3},1\right)$，

所以 $f'(A)=4(1-p)^4-4(4p+1)\cdot(1-p)^3=4(1-p)^3(1-p-4p-1)=-20(1-p)^3p$.

因为 $p\in\left[\dfrac{2}{3},1\right)$，所以 $f'(A)=-20(1-p)^3p<0$，

所以 $f(A)$ 在 $\left[\dfrac{2}{3},1\right)$ 上单调递减，所以 $f(A)_{\max}=f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{11}{3}\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{11}{3^5}\approx0.045<0.05$，故事件 A 是小概率事件.

2.【解】(1)记事件 M_1＝“第一项测试选择了项目 A”，M_2＝“第一项测试选择了项目 B”，M_3＝“第一项测试选择了项目 C”，事件 N＝“第一项测试通过”，事件发生的概率为 P，

由题意知，$N=M_1N\cup M_2N\cup M_3N$，$P(M_1)=P(M_2)=P(M_3)=\frac{1}{3}$，

$P(N|M_1)=\frac{3}{5}$，$P(N|M_2)=\frac{1}{2}$，$P(N|M_3)=\frac{1}{2}$.

又事件 M_1N，M_2N，M_3N 互斥，所以 $P(N)=P(M_1N)+P(M_2N)+P(M_3N)$，即 $P(N)=P(M_1)\cdot P(N|M_1)+P(M_2)\cdot P(N|M_2)+P(M_3)\cdot P(N|M_3)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{8}{15}$，

所以在居民甲第一项测试"通过"的条件下，他第一项测试选择的项目是 A 的概率 $P(M_1|N)=\frac{P(M_1N)}{P(N)}=\frac{P(M_1)P(N|M_1)}{P(N)}=\frac{3}{8}$.

(2)由居民乙获一等奖的概率为$\frac{1}{8}$，可知 $a^2b=\frac{1}{8}$，

则 $P_1=a^2(1-b)+C_2^1a(1-a)b=a^2+2ab-\frac{3}{8}=a^2+\frac{1}{4a}-\frac{3}{8}$.

令 $P_1=f(a)=a^2+\frac{1}{4a}-\frac{3}{8}$，$0<a\leqslant 1$，

$f'(a)=2a-\frac{1}{4a^2}=\frac{8a^3-1}{4a^2}=\frac{(2a-1)(4a^2+2a+1)}{4a^2}$，

当 $0<a<\frac{1}{2}$时，$f'(a)<0$；当$\frac{1}{2}<a\leqslant 1$ 时，$f'(a)>0$. 所以 $f(a)$ 在区间$\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在区间$\left(\frac{1}{2},1\right]$上单调递增，所以 $f(a)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$，所以 P_1 的最小值为$\frac{3}{8}$.

3.【解】(1)每次随机摸出 1 个球，摸到白球的概率为$\frac{a}{10}$，摸到黑球的概率为 $1-\frac{a}{10}$，所以事件 A 发生的概率 $P(A)=C_4^2\cdot\left(\frac{a}{10}\right)^2\cdot\left(1-\frac{a}{10}\right)^2=6\cdot\left[\frac{a}{10}\cdot\left(1-\frac{a}{10}\right)\right]^2$，因为 $\frac{a}{10}\cdot\left(1-\frac{a}{10}\right)\leqslant\left(\frac{\frac{a}{10}+1-\frac{a}{10}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当$\frac{a}{10}=1-\frac{a}{10}$，即 $a=5$ 时等号成立，

所以 $P(A)=6\cdot\left[\frac{a}{10}\cdot\left(1-\frac{a}{10}\right)\right]^2\leqslant 6\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{8}$，

故当 $a_0=5$ 时，事件 A 发生的概率最大，为$\frac{3}{8}$.

(2)由(1)知，每次随机摸出 1 个球，摸到白球的概率为$\frac{1}{2}$，摸到黑球的概率为$\frac{1}{2}$，记甲第 i 次摸到白球为 $a_i(i=1,2,3,\cdots,k)$，

则 $P(X=1)=a_1=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=a_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2}$，

$P(X=3)=a_3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2^3}$，$\cdots$，

则 $P(X=k)=a_k=\frac{1}{2^k}$，

$\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^n}$，

则$\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}$，

两式相减得，$\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}=$

$\frac{\frac{1}{2}\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n}{2^{n+1}}=1-\frac{n+2}{2^{n+1}}$,

所以$\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=2-\frac{n+2}{2^n}$,所以 $E(X)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(2-\frac{n+2}{2^n}\right)=2$.

4.【解】(1)若甲第 2 次抽奖选方案①,两次抽奖累计积分为 ξ,则 ξ 的可能取值为 40,35,10,5.

$P(\xi=40)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,$P(\xi=35)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$,

$P(\xi=10)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$,$P(\xi=5)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,

所以 $E(\xi)=40\times\frac{1}{9}+35\times\frac{2}{9}+10\times\frac{2}{9}+5\times\frac{4}{9}=\frac{50}{3}$.

若甲第 2 次抽奖选方案②,两次抽奖累计积分为 η,则 η 的可能取值为 30,15,10,

$P(\eta=30)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$,

$P(\eta=15)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,

$P(\eta=10)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,

所以 $E(\eta)=30\times\frac{1}{9}+15\times\frac{4}{9}+10\times\frac{4}{9}=\frac{130}{9}$.

因为 $E(\xi)>E(\eta)$,所以应选择方案①.

(2)依题意得 $E(X_{i+1})=\frac{2}{3}E(X_i)+\frac{10}{3}$,

X_1 的可能取值为 10,5,其分布列为

X_1	10	5
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

所以 $E(X_1)=\frac{20}{3}$,则 $E(X_1)-10=-\frac{10}{3}$,由 $E(X_{i+1})=\frac{2}{3}E(X_i)+\frac{10}{3}$,得 $E(X_{i+1})-10=\frac{2}{3}(E(X_i)-10)$,所以$\{E(X_i)-10\}$为等比数列,其中首项为$-\frac{10}{3}$,公比为$\frac{2}{3}$,

即 $E(X_i)-10=-\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$.

所以 $E(X_8)-10=-\frac{10}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^7$,

故 $E(X_8)=-\frac{10}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^7+10\approx9.8$.