专题 6　解三角形

考点 22　利用正、余弦定理解三角形

1. C　【解析】由 $a=c-2a\cos B$ 及余弦定理得 $a=c-2a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，即 $ac=b^2-a^2$，因为 $c=5$，$3a=2b$，所以 $\frac{10b}{3}=b^2-\frac{4b^2}{9}$，解得 $b=6$ 或 $b=0$（舍），故选 C.

2. B　【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{b-c}{b-a}$，则 $\frac{a+b}{c}=\frac{b-c}{b-a}$，即 $(a+b)(b-a)=c(b-c)$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，故 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$. 由 $A\in(0,\pi)$，得 $A=\frac{\pi}{3}$，故选 B.

3. BC　【解析】对于 A，由题意得 $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=7$，所以 $\sin C=7\cos C>0$. 因为 $\sin^2C+\cos^2C=1$，所以 $\sin C=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{10}$. 因为 $\sin A=\frac{4}{5}=\frac{8}{10}<\frac{7\sqrt{2}}{10}$，所以 $\sin A<\sin C$. 由正弦定理得 $a<c$，所以 $A<C$，所以 $\cos A>0$，所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{3}{5}$，故 A 错误.

对于 B，$\cos B=\cos[\pi-(A+C)]=-\cos(A+C)=-\cos A\cos C+\sin A\sin C=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{4}{5}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$，故 B 正确.

对于 C，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{4\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确.

对于 D，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=7$，故 D 错误.

4. $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$　【解析】设 $AC=x$，$BC=y$ $(x>0,y>0)$，在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$ 中，$\frac{\sqrt{2}}{\sin\angle BAC}=\frac{x}{\sin\angle ADC}$，$\frac{1}{\sin\angle BCD}=\frac{y}{\sin\angle BDC}$，

由 $\sin\angle ADC=\sin\angle BDC$，得 $\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BCD}=\frac{\sqrt{2}y}{x}$.

在 $\triangle BDC$ 中，$\cos\angle BCD=\frac{y^2+2-1}{2\sqrt{2}y}$，

由 $\angle BAC=2\angle BCD$，有 $\sin\angle BAC=2\sin\angle BCD\cos\angle BCD$，

所以 $\frac{\sqrt{2}y}{x}=2\cdot\frac{y^2+2-1}{2\sqrt{2}y}$，整理得 $2y^2=x(y^2+1)$，①

又 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$，即 $\frac{1+2-x^2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1+2-y^2}{2\sqrt{2}}$，整理得 $x^2+y^2=6$，②

联立①②得，$x^3-2x^2-7x+12=0$，即 $(x-3)(x^2+x-4)=0$，解得 $x=3$

或 $x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$，由 $\triangle ADC$ 的三边关系知 $\sqrt{2}-1<x<\sqrt{2}+1$，故 $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$，所以 $AC=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

5. A 【解析】由题知，$b-a=2b\sin^2\frac{C}{2}$，

则 $\frac{b-a}{2b}=\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1-\cos C}{2}$，即 $b-a=b-b\cos C$，故 $a=b\cos C$，

所以 $a=b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理得 $a^2+c^2=b^2$，

所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形，故选 A.

6. B 【解析】由题意，向量 $\boldsymbol{m}=(a,b)$，$\boldsymbol{n}=(\sin B,\sin A)$，$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $b\sin B-a\sin A=0$，可得 $b^2=a^2$，即 $b=a$. 又由 $(2a-c)\cos B=b\cos C$，可得 $2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$，

即 $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$，$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A\neq 0$，$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$.

$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，又$\because b=a$，$\therefore A=B=C=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形. 故选 B.

7. C 【解析】由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{\sin B}$，解得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $a<b$，所以 $A<B$. 又因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$ 或 $B=\frac{3\pi}{4}$，故此三角形有两解. 故选 C.

8. BC 【解析】对于 A，因为 $b=10$，$A=45°$，$C=60°$，所以 $B=75°$，所以 $\triangle ABC$ 只有一解，故 A 错误；

对于 B，因为 $b=\sqrt{15}$，$c=4$，$B=60°$，

所以由正弦定理得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{2\sqrt{5}}{5}<1$，因为 $b<c$，所以 $B<C$，所以 $C>60°$，所以 $\triangle ABC$ 有两解（$60°<C<90°$ 或 $90°<C<120°$），故 B 正确；

对于 C，因为 $a=\sqrt{3}$，$b=2$，$A=45°$，

所以由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

因为 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a<b$，所以 $\triangle ABC$ 有两解（$45°<B<60°$ 或 $120°<B<135°$），故 C 正确；

对于 D，因为 $a=8$，$b=4$，$A=80°$，

所以 $b<a$，$B<80°$，所以 $\triangle ABC$ 只有一解，故 D 错误.

方法总结 已知 $\triangle ABC$ 的两边 a,b 及角 A，解三角形的一般步骤

(1) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得到 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$.

(2) 当 $\sin B>1$ 时，无解；当 $\sin B=1$，且 $a<b$ 时，$B=90°$，有唯一解；当 $\sin B<1$ 时，若 $a\geqslant b$，则有唯一解，若 $a<b$，则有两个解.

9. C 【解析】由 $A=\frac{\pi}{3}$，$a=\sqrt{7}$，$c=3$ 及余弦定理可知，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+9-7}{6b}=\frac{1}{2}$，整理得 $b^2-3b+2=0$，解得 $b=1$ 或 $b=2$.

因为 $\triangle ABC$ 是钝角三角形，比较 a,b,c 三边大小可知，c 为最大边，所以 C 为钝角.

①当 $b=1$ 时，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7+1-9}{2\sqrt{7}}<0$，符合题意，此时 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times1\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$；

②当 $b=2$ 时，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7+4-9}{4\sqrt{7}}>0$，不符合题意.

综上可知，$\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 故选 C.

10. A 【解析】因为 $b=2c$，所以根据正弦定理得 $\sin B=2\sin C$，

因为 $9\sin B-2\sin C=2\sqrt{15}$，

所以 $9\sin B-2\sin C=8\sin B=2\sqrt{15}$，即 $\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

当 B 为钝角时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{4}$，即 $2c^2-c-6=0$，解得 $c=2$（负值舍去），则 $b=2c=4$，$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=9$；

当 A 为钝角时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{9-3c^2}{6c}=\frac{1}{4}$，即 $2c^2+c-6=0$，解得 $c=\frac{3}{2}$（负值舍去），$b=2c=3=a$，此时与 A 为钝角时，$b<a$ 矛盾，故不成立.

综上，$\triangle ABC$ 的周长为 9. 故选 A.

11. 【解】(1) 若选①，由 $\tan A=3$ 得 $\sin A=3\cos A>0$，$\therefore A$ 是锐角. 又 $\sin^2A+\cos^2A=1$，

解得 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

$\therefore \sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

若选②，由 $b^2+c^2-a^2=2c$，可得 $2bc\cos A=2c$，解得 $b\cos A=1$.

又 $b=\sqrt{10}$，解得 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，$\therefore \sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，下面同选①.

若选③，由 $3b=\sqrt{5}c$，可得 $c=3\sqrt{2}$，由正弦定理可得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2)若选①或②,由(1)得 $\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,由正弦定理得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4$,

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times4\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6$.

若选③,由余弦定理可得 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$,即 $a^2+18-10=2a\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$,解得 $a=2$ 或 $a=4$,

当 $a=2$ 时,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$,

当 $a=4$ 时,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6$.

12.【解】(1)因为 $c\sin\frac{A+C}{2}=b\sin C$,

所以 $\sin C\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B}{2}\right)=\sin B\sin C$,

因为 $C\in(0,\pi)$,$\sin C\neq0$,

所以 $\cos\frac{B}{2}=\sin B$,即 $\cos\frac{B}{2}=2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}$.

因为$\frac{B}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\cos\frac{B}{2}\neq0$,所以 $\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$,解得 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)因为 $B=\frac{\pi}{3}$,$b=\sqrt{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b\cdot BD=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又由 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$,可得$\frac{\sqrt{3}}{4}ac=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $ac=2$.

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{\pi}{3}$,可得 $3=a^2+c^2-ac$,即 $(a+c)^2=3+3ac$,即$(a+c)^2=3+6=9$,所以 $a+c=3$,

所以$\triangle ABC$ 的周长为 $3+\sqrt{3}$.

13. C **【解析】**设$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc$,即 $4=b^2+c^2-bc$,所以 $4=b^2+c^2-bc\geqslant bc$,当且仅当 $b=c=2$ 时,等号成立.

因为 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,所以 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=$

突破点

$\frac{1}{4}\left(c^2+b^2+2cb\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}(b^2+c^2+bc)=\frac{1}{4}(4+bc+bc)\leqslant\frac{1}{4}(4+8)=3$,所以$|\overrightarrow{AD}|\leqslant\sqrt{3}$,故选 C.

14. $\frac{3}{4}$ **【解析】**在$\triangle ABC$ 中,由射影定理 $a=b\cos C+c\cos B$ 及 $a=-3b\cos C$ 得,$c\cos B=-4b\cos C$,由正弦定理得 $\sin C\cos B=-4\sin B\cos C$,于是得 $\tan C=-4\tan B$.

由 $a=-3b\cos C>0$ 得 $\cos C<0$,即 C 是钝角,则 $\tan B>0$,

$\tan A=-\tan(B+C)=-\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\dfrac{3\tan B}{1+4\tan^2 B}=\dfrac{3}{\dfrac{1}{\tan B}+4\tan B}\leqslant\dfrac{3}{4}$,

当且仅当$\dfrac{1}{\tan B}=4\tan B$,即 $\tan B=\dfrac{1}{2}$时等号成立,

所以 $\tan A$ 的最大值为$\dfrac{3}{4}$.

15.【解】(1)若选①:由正弦定理得 $3\sin B=\sin C+3\sin A\cos C$,

$\because \sin B=\sin(A+C)$,$\therefore 3\sin(A+C)=\sin C+3\sin A\cos C$,

即 $3\sin A\cos C+3\cos A\sin C=\sin C+3\sin A\cos C$,故 $3\cos A\sin C=\sin C$,又$\because C\in(0,\pi)$,$\sin C>0$,$\therefore \cos A=\dfrac{1}{3}$.

若选②:$\because 2\sqrt{2}S=a^2-(b-c)^2$,即$(b-c)^2-a^2+2\sqrt{2}S=0$,

$\therefore b^2+c^2-a^2-2bc+\sqrt{2}bc\sin A=0$,$\therefore 2bc\cos A-2bc+\sqrt{2}bc\sin A=0$,

$\therefore \sin A=\sqrt{2}-\sqrt{2}\cos A$,又 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$,$A\in(0,\pi)$,

解得 $\cos A=\dfrac{1}{3}$或 $\cos A=1$(舍),$\therefore \cos A=\dfrac{1}{3}$.

若选③:$\because a\cos A+a\cos(B-C)=4\sqrt{2}b\cos A\sin C$,

又$\because \cos A=-\cos(B+C)$,

$\therefore -a\cos(B+C)+a\cos(B-C)=4\sqrt{2}b\cos A\sin C$,

$\therefore 2a\sin B\sin C=4\sqrt{2}b\cos A\sin C$,

$\therefore$ 由正弦定理得 $2\sin A\sin B\sin C=4\sqrt{2}\sin B\cos A\sin C$,

又$\because B,C\in(0,\pi)$,$\sin B\neq0$,$\sin C\neq0$,$\therefore \sin A=2\sqrt{2}\cos A>0$,

又 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$,$\therefore \cos A=\dfrac{1}{3}$.

(2)在锐角三角形 ABC 中,$\cos A=\dfrac{1}{3}$,

则 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{\sin(A+C)}{\sin C}=\dfrac{\sin A\cos C+\cos A\sin C}{\sin C}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3\tan C}+\dfrac{1}{3}$,

$\because \triangle ABC$ 是锐角三角形,

$\therefore \begin{cases}0<B<\dfrac{\pi}{2},\\ 0<C<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 即$\begin{cases}A+C>\dfrac{\pi}{2},\\ 0<C<\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$ 即$\dfrac{\pi}{2}>C>\dfrac{\pi}{2}-A>0$,

$\therefore \tan C>\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)}=\dfrac{\cos A}{\sin A}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$,$\therefore 0<\dfrac{1}{\tan C}<2\sqrt{2}$,$\therefore \dfrac{b}{c}\in\left(\dfrac{1}{3},3\right)$,设 $t=\dfrac{b}{c}\in\left(\dfrac{1}{3},3\right)$,

则$\dfrac{b^2+c^2}{2bc}=\dfrac{b}{2c}+\dfrac{c}{2b}=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2t}$.

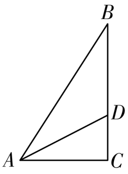
设 $y=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2t}$,$t\in\left(\dfrac{1}{3},3\right)$,则 $y=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{2t}\geqslant2\sqrt{\dfrac{1}{2}t\cdot\dfrac{1}{2t}}=1$,

当且仅当$\frac{1}{2}t=\frac{1}{2t}$,即 $t=1$ 时等号成立,

由对勾函数图象知,函数 $y=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2t}$在$\left(\frac{1}{3},1\right)$上单调递减,在$(1,3)$上单调递增,当 $t=\frac{1}{3}$时,$y=\frac{5}{3}$,当 $t=3$ 时,$y=\frac{5}{3}$,

$\therefore 1\leqslant y<\frac{5}{3}$,即$\frac{b^2+c^2}{2bc}$的取值范围为$\left[1,\frac{5}{3}\right)$.

16. D 【解析】如图所示,在$\triangle ABC$ 中,由 $BD=2CD$,



得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

由 $AD=BD$,得$|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BD}|=\frac{2}{3}a$,

所以 $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2$,即$\frac{4}{9}a^2=\frac{1}{9}c^2+\frac{4}{9}b^2+\frac{2}{9}bc$,

化简得 $4a^2=c^2+4b^2+2bc$. ①

在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $b^2+c^2-bc=a^2$,②

由①②解得 $c=2b$. 由 $BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$,得 $a=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,

将其代入②式,得$\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2=b^2+c^2-bc=3b^2$,解得 $b^2=\frac{9}{16}$,

故$\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{2}b^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{9}{16}=\frac{9\sqrt{3}}{32}$.

17. A 【解析】设 $AC=x$,$BC=2y(x>0,y>0)$,由 AD 为 BC 边上的中线得 $CD=BD=y$.

在$\triangle ACD$ 中,由余弦定理得 $x^2=\frac{7}{4}+y^2-2\times\frac{\sqrt{7}}{2}y\cdot\cos\angle ADC$.

在$\triangle ABD$ 中,由余弦定理得 $4=\frac{7}{4}+y^2-2\times\frac{\sqrt{7}}{2}y\cdot\cos\angle ADB$.

因为 $\cos\angle ADC=-\cos\angle ADB$,所以 $x^2+4=\frac{7}{2}+2y^2$,即 $2y^2=x^2+\frac{1}{2}$. 在$\triangle ABC$ 中,由余弦定理得$(2y)^2=x^2+4-2\times2x\cdot\cos\frac{\pi}{3}$.

则有 $x^2+2x-3=0$,解得 $x=1$ 或 $x=-3$(舍),即 $AC=1$. 故选 A.

18. 【解】(1)由 $b=2$ 及 $2\cos A=3-a\cos B$,得 $b\cos A=3-a\cos B$,即 $b\cos A+a\cos B=3$,

由余弦定理得 $b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=3$,解得 $c=3$.

(2)若选①:记$\angle BAC=2\theta$,$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 E,则有 $AE=\frac{6}{5}$,$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle ACE}$,

即$\frac{1}{2}bc\sin 2\theta=\frac{1}{2}b\cdot AE\sin\theta+\frac{1}{2}c\cdot AE\sin\theta$,

即 $6\sin 2\theta=\frac{12}{5}\sin\theta+\frac{18}{5}\sin\theta$,即 $\sin 2\theta=\sin\theta$,

$\therefore 2\sin\theta\cos\theta=\sin\theta$,$\because \theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\therefore \sin\theta\neq0$,从而 $\cos\theta=\frac{1}{2}$,

即 $\theta=\frac{\pi}{3}$,$\therefore \angle BAC=\frac{2\pi}{3}$.

若选②:由于 D 为 BC 中点,$\therefore \overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,即 $4\overrightarrow{AD}^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

$\because |\overrightarrow{AD}|=\frac{\sqrt{7}}{2}$, $|\overrightarrow{AB}|=3$, $|\overrightarrow{AC}|=2$, $\therefore \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-3$,

即 $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle BAC=-3$, $\therefore \cos\angle BAC=-\frac{1}{2}$,

又$\because \angle BAC\in(0,\pi)$, $\therefore \angle BAC=\frac{2\pi}{3}$.

若选③:$\because AH$ 为 BC 边上的高,在 $\mathrm{Rt}\triangle BAH$ 中,$BH^2=AB^2-AH^2=9-\frac{9\times57}{19\times19}=\frac{144}{19}$, $\therefore BH=\frac{12\sqrt{19}}{19}$.

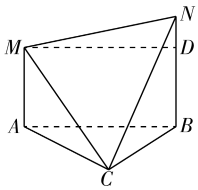
在 $\mathrm{Rt}\triangle CAH$ 中,$CH^2=AC^2-AH^2=4-\frac{9\times57}{19\times19}=\frac{49}{19}$, $\therefore CH=\frac{7\sqrt{19}}{19}$.

$\therefore BC=BH+CH=\sqrt{19}$,由余弦定理得 $\cos\angle BAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{9+4-19}{2\times3\times2}=-\frac{1}{2}$,

又$\because \angle BAC\in(0,\pi)$, $\therefore \angle BAC=\frac{2\pi}{3}$.

考点 23　解三角形的实际应用

1. D 【解析】由题意,过点 M 作 $MD\perp BN$ 于点 D,如图所示,则 $MD=AB$.



在$\triangle ACM$ 中,$AM=15$, $\angle ACM=30°$,

$\therefore AC=\sqrt{3}AM=15\sqrt{3}$.

在$\triangle BCN$ 中,$BN=21$, $\angle BCN=60°$,

$\therefore BC=\frac{BN}{\sqrt{3}}=7\sqrt{3}$. 由 $BD=AM=15$,得 $DN=BN-BD=6$.

在$\triangle ACB$ 中,$\angle ACB=120°$,由余弦定理得,

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB}=\sqrt{(15\sqrt{3})^2+(7\sqrt{3})^2-2\times15\sqrt{3}\times7\sqrt{3}\cos\angle120°}=\sqrt{1\ 137}$,

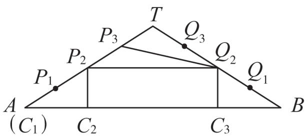
$\therefore DM=AB=\sqrt{1\ 137}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DMN$ 中,$\angle MDN=90°$,由勾股定理得,

$MN=\sqrt{DM^2+DN^2}=\sqrt{(\sqrt{1\ 137})^2+6^2}=\sqrt{1\ 173}$.

故选 D.

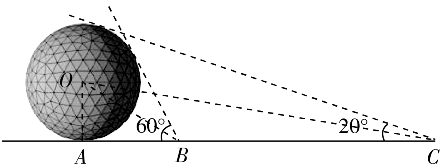
2. A 【解析】作出示意图,如图所示,其中点 C_1 与点 A 重合,$P_2C_2\perp AB$, $Q_2C_3\perp AB$, $P_2Q_2/\!/C_2C_3$ 且 $P_2Q_2=C_2C_3=2\sqrt{3}L$, $\angle P_3P_2Q_2=\angle C_2AP_2$, $AC_2=\sqrt{3}L$.



因为该建筑关于房梁所在铅垂面(垂直于水平面的面)对称,P_1,P_2,P_3 是 AT 的四等分点,Q_1,Q_2,Q_3 是 BT 的四等分点,所以 $AP_2=BQ_2=2L$, $P_2P_3=L$. 又 $\cos\angle C_2AP_2=\frac{AC_2}{AP_2}=\frac{\sqrt{3}L}{2L}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,所以 $\angle P_3P_2Q_2=\angle C_2AP_2=\frac{\pi}{6}$. 在$\triangle P_3P_2Q_2$ 中,由余弦定理得 $P_3Q_2^2=$

$P_3P_2^2+P_2Q_2^2-2\cdot P_3P_2\cdot P_2Q_2\cos\angle P_3P_2Q_2=L^2+(2\sqrt{3}L)^2-2\cdot L\cdot 2\sqrt{3}L\cdot\cos\dfrac{\pi}{6}=7L^2$,所以 $P_3Q_2=\sqrt{7}L$.

3. B 【解析】设该球体建筑物的半径为 R,球心为 O,连接 OB,OC,易知 $\angle OBA=30°$,$\angle OCA=10°$,故 $AB=\sqrt{3}R$,$AC=\dfrac{R}{\tan 10°}$,$BC=\dfrac{R}{\tan 10°}-\sqrt{3}R=100$,$R\approx\dfrac{25}{0.985}$,$2R\approx 50.76$. 故选 B.

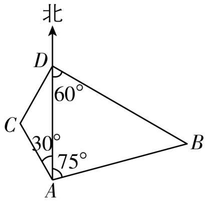


4. B 【解析】由题知 $\angle CBD=30°$,在 $\triangle BCD$ 中,由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{BC}{\sin\angle BDC}$. 因为 $\sin\angle BDC=\sin 105°=\sin(60°+45°)=\sin 60°\cos 45°+\cos 60°\sin 45°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

所以 $BC=\dfrac{CD\sin\angle BDC}{\sin\angle CBD}=\dfrac{100\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\dfrac{1}{2}}=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})$,

$AB=BC\tan\angle ACB=50(\sqrt{6}+\sqrt{2})\times\tan 28°\approx 101$(米).

5. AC 【解析】在 $\triangle ABD$ 中,由已知得 $\angle ADB=60°$,$\angle DAB=75°$,$AB=12\sqrt{6}$,则 $\angle B=45°$,由正弦定理得 $AD=\dfrac{AB\sin\angle B}{\sin\angle ADB}=\dfrac{12\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=24$,

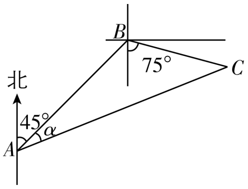


所以 A 处与 D 处之间的距离为 24 n mile,故 A 正确;

在 $\triangle ADC$ 中,由余弦定理得 $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos 30°$,

且 $AC=8\sqrt{3}$,$AD=24$,解得 $CD=8\sqrt{3}$,所以灯塔 C 与 D 处之间的距离为 $8\sqrt{3}$ n mile,故 B 错误;因为 $AC=CD=8\sqrt{3}$,所以 $\angle CDA=\angle CAD=30°$,灯塔 C 在 D 处的西偏南 60°,故 C 正确;灯塔 B 在 D 处的南偏东 60°,即 D 处在灯塔 B 的北偏西 60°,故 D 错误.

6. 2 $\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$ 【解析】设红方侦查艇经过 x 小时后在 C 处追上蓝方的小艇,则 $AC=14x$,$BC=10x$,$\angle ABC=120°$.



在 $\triangle ABC$ 中,根据余弦定理得 $(14x)^2=12^2+(10x)^2-240x\cdot\cos 120°$,

解得 $x=2$ 或 $x=-\dfrac{3}{4}$(舍去),

故 $AC=28$,$BC=20$.

根据正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin\alpha}=\dfrac{AC}{\sin 120°}$,解得 $\sin\alpha=\dfrac{20\sin 120°}{28}=\dfrac{5\sqrt{3}}{14}$.