专题9　数列

考点27　数列的概念及其表示法

1. C　【解析】当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=-3$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-6n+2-(n-1)^2+6(n-1)-2=2n-7$.

当 $n=1$ 时，$b_1=|a_1-2|+1=6$，当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=|2n-9|+n$，

则 $b_2=7,b_3=6,b_4=5,b_5=6,b_6=9,b_7=12$，

所以 $T_7=b_1+b_2+\cdots+b_7=51$.

2. C　【解析】$\because S_n=a_{n+1}-2$，$\therefore$ 令 $n=1$ 可得 $a_1=a_2-2$，又 $3a_2=a_1+8$，$\therefore a_1=1,a_2=3$.

$\because S_n=a_{n+1}-2$　①，$\therefore S_{n-1}=a_n-2(n\geqslant 2)$　②，由①−②得 $a_{n+1}=2a_n(n\geqslant 2)$，$\because a_1=1,a_2=3$，$\therefore a_2\neq 2a_1$，$\therefore a_n=\begin{cases}1,n=1,\\3\times 2^{n-2},n\geqslant 2.\end{cases}$

$\therefore S_{2\,022}=a_1+(a_2+a_3+\cdots+a_{2\,022})=1+\dfrac{3\times(1-2^{2\,021})}{1-2}=3\times 2^{2\,021}-2$.

易错警示　本题易忽视公式 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 的适用条件 $n\geqslant 2$ 而导致错误. 利用此公式求得 a_n 后，一定要验证 $n=1$ 时是否满足所求出的 a_n，若不满足，则要用分段形式来表示.

3. A　【解析】因为 $S_n=(-1)^na_n-2^{-n}$，所以当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=-a_1-2^{-1}$，解得 $a_1=-\dfrac{1}{4}$. 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(-1)^na_n-2^{-n}-(-1)^{n-1}a_{n-1}+2^{-n+1}=(-1)^na_n+(-1)^na_{n-1}+\dfrac{1}{2^n}$，所以当 n 为偶数时，$a_{n-1}=-\dfrac{1}{2^n}$，$n\geqslant 2$，故 $a_n=-\dfrac{1}{2^{n+1}}$，n 为正奇数；当 n 为奇数时，$2a_n=-a_{n-1}+\dfrac{1}{2^n}=-\dfrac{1}{2^n}$，即 $a_{n-1}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$，$n\geqslant 2$，故 $a_n=\dfrac{1}{2^n}$，n 为正偶数. 所以 $S_5+S_6=2S_5+a_6=2\left(-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}-\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^4}-\dfrac{1}{2^6}\right)+\dfrac{1}{2^6}=-\dfrac{1}{2^6}=-\dfrac{1}{64}$，故选 A.

4. $\begin{cases}\dfrac{3}{2},n=1,\\\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2},n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*\end{cases}$　【解析】$S_n=2a_{n+1}+1$　①，

$S_{n-1}=2a_n+1,n\geqslant 2$　②，

①−②得 $a_n=2a_{n+1}-2a_n$，$a_{n+1}=\dfrac{3}{2}a_n$，$n\geqslant 2$. 又 $a_1=2a_2+1$，

所以 $a_2=\dfrac{1}{4}\neq\dfrac{3}{2}a_1=\dfrac{9}{4}$，所以 $a_n=\begin{cases}\dfrac{3}{2},n=1,\\\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2},n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$

5. C　【解析】根据递推关系，可得数列的项 $a_1=1,a_2=a_1+2=3$，$a_3=a_2+3=6,a_4=a_3+2=8,a_5=a_4+3=11$，

进而可得数列的前 13 项依次为：1，3，6，8，11，13，16，18，21，23，26，28，31，则 $a_{10}=23,a_{13}=31,S_{10}=1+3+6+8+11+13+16+18+21+23=120$，$S_{13}=S_{10}+26+28+31=205$，故 ABD 正确，C 错误.

6. C 【解析】由题意，$a_8=a_6+2^7$，$a_6=a_4+2^5$，$a_4=a_2+2^3=2+2^3$，所以 $a_8=2+2^3+2^5+2^7=170$. 故选 C.

7. B 【解析】由 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，得 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $a_1=a_3-a_2$，

$a_2=a_4-a_3$，

$a_3=a_5-a_4$，

……

$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$，

将这 n 个式子左右两边分别相加可得前 n 项和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{n+2}-a_2=a_{n+2}-1$，

所以 $S_n+1=a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $a_m=2(a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{174})+1=(a_3+a_3+a_6+a_6+a_9+a_9+\cdots+a_{174}+a_{174})+1=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+\cdots+a_{172}+a_{173}+a_{174}+1=S_{174}+1=a_{176}$，即 $m=176$.

8. 759 【解析】因为 $a_n+a_{n+1}=n^2\cdot\cos\dfrac{n\pi}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_1=1$，

所以当 $n=2$ 时，$a_2+a_3=2^2\cdot\cos\pi=-2^2$，

当 $n=4$ 时，$a_4+a_5=4^2\cdot\cos 2\pi=4^2$，

当 $n=6$ 时，$a_6+a_7=6^2\cdot\cos 3\pi=-6^2$，

……

当 $n=36$ 时，$a_{36}+a_{37}=36^2\cdot\cos 18\pi=36^2$，

当 $n=38$ 时，$a_{38}+a_{39}=38^2\cdot\cos 19\pi=-38^2$，

所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{39}$

$=1+(-2^2+4^2-6^2+8^2-10^2+12^2+\cdots-34^2+36^2)-38^2$

$=1+2(2+4+6+8+10+12+\cdots+34+36)-38^2$

$=1+2\times\dfrac{(2+36)\times 18}{2}-38^2=-759$.

又 $a_n+a_{n+1}=n^2\cdot\cos\dfrac{n\pi}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以当 $n=1$ 时，$a_1+a_2=1^2\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，

当 $n=3$ 时，$a_3+a_4=3^2\cdot\cos\dfrac{3\pi}{2}=0$，

当 $n=5$ 时，$a_5+a_6=5^2\cdot\cos\dfrac{5\pi}{2}=0$，

……

当 $n=37$ 时，$a_{37}+a_{38}=37^2\cdot\cos\dfrac{37\pi}{2}=0$，

当 $n=39$ 时，$a_{39}+a_{40}=39^2\cdot\cos\dfrac{39\pi}{2}=0$，

所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{39}+a_{40}=0$.

所以 $a_{40}=759$.

9. C 【解析】当 $n\leqslant 6$ 时，有 $3-a>0$，即 $a<3$；当 $n>6$ 时，有 $a>1$，又 $a_7>a_6$，所以 $a>10-6a$，解得 $a>\dfrac{10}{7}$. 综上，有 $\dfrac{10}{7}<a<3$，故选 C.

10. A 【解析】当 $a_n<0$ 时，$S_n-S_{n-1}=a_n<0(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $S_n<S_{n-1}$，则“对任意正整数 n，均有 $a_n<0$”是“$\{S_n\}$ 为递减数列”的充分条件；若数列 $\{a_n\}$ 为 $0,-1,-2,-3,-4,\cdots$，显然数列 $\{S_n\}$

是递减数列，但是 $a_1=0$，所以"对任意正整数 n，均有 $a_n<0$"不是"$\{S_n\}$为递减数列"的必要条件，因此"对任意正整数 n，均有 $a_n<0$"是"$\{S_n\}$为递减数列"的充分不必要条件. 故选 A.

11. ACD 【解析】对于 A，由已知得 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+1$，又对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n>0$，则 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}+1>1$，即对任意的 $n\geqslant 2$，都有 $a_n>1$，故 A 正确.

对于 B，由 $a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n$，若$\{a_n\}$为常数列且 $a_n>0$，则 $a_n=2$，满足$a_1>0$，故 B 错误.

对于 C，由$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=a_{n+1}-1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$，当 $1<a_{n+1}<2$ 时，$0<\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<1$，此时$a_1=a_2(a_2-1)\in(0,2)$且 $a_1<a_2$，则数列$\{a_n\}$为递增数列；当 $a_{n+1}>2$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}>1$，此时 $a_1=a_2\cdot(a_2-1)>a_2>2$，则数列$\{a_n\}$为递减数列. 所以当 $0<a_1<2$ 时，数列$\{a_n\}$为递增数列，故 C 正确.

对于 D，由 C 分析知，当 $a_1>2$ 时，$a_{n+1}>2$ 且数列$\{a_n\}$为递减数列，即当 $n\geqslant 2$ 时，$2<a_n<a_1$，故 D 正确.

12. $\left(-\infty,\dfrac{18}{5}\right)$ 【解析】由 $2^n a_n(4-\lambda)>(a_n-1)^2$，得 $2^n(2n-1)(4-\lambda)>(2n-2)^2$，所以 $4-\lambda>\dfrac{(n-1)^2}{2^{n-2}(2n-1)}$.

设 $b_n=\dfrac{(n-1)^2}{(2n-1)\cdot 2^{n-2}}(n\in\mathbf{N}^*)$，

则 $b_{n+1}-b_n=\dfrac{n^2}{(2n+1)\cdot 2^{n-1}}-\dfrac{(n-1)^2}{(2n-1)\cdot 2^{n-2}}=\dfrac{-2n^3+5n^2-2}{(4n^2-1)\cdot 2^{n-1}}$.

设 $f(n)=-2n^3+5n^2-2(n\geqslant 1)$，

则 $f'(n)=-6n^2+10n=-2n(3n-5)$，

令 $f'(n)>0$，解得 $1\leqslant n<\dfrac{5}{3}$，即 $f(n)$ 在$\left[1,\dfrac{5}{3}\right)$上单调递增，

令 $f'(n)<0$，解得 $n>\dfrac{5}{3}$，即 $f(n)$ 在$\left(\dfrac{5}{3},+\infty\right)$上单调递减，

又 $f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(3)=-11$，

所以当 $n\geqslant 3$ 时，$f(n)\leqslant f(3)<0$，即 $b_{n+1}-b_n<0$，

所以 $b_3>b_4>b_5$.

当 $n=1,2$ 时，$f(n)>0$，即 $b_{n+1}-b_n>0$，所以 $b_1<b_2<b_3$.

综上，$b_n\leqslant b_3=\dfrac{2}{5}$，所以 $4-\lambda>\dfrac{2}{5}$，即 $\lambda<\dfrac{18}{5}$，

所以 λ 的取值范围为$\left(-\infty,\dfrac{18}{5}\right)$.

13. C 【解析】∵ 数列$\{a_n\}$的前 n 项积 $T_n=1-\dfrac{2}{15}n$，

当 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{13}{15}$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$T_{n-1}=1-\dfrac{2}{15}(n-1)$，

$$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{1-\frac{2}{15}n}{1-\frac{2}{15}(n-1)}=\frac{2n-15}{2n-17}=1+\frac{2}{2n-17}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*),$$

经检验，$n=1$ 时也满足上式，

$\therefore a_n=1+\dfrac{2}{2n-17}(n\in\mathbf{N}^*)$.

当 $n\leqslant 8$ 时，数列$\{a_n\}$单调递减，且 $a_n<1$，

当 $n\geqslant 9$ 时，数列$\{a_n\}$单调递减，且 $a_n>1$，

$\therefore a_n$ 的最大值为 $a_9=3$，最小值为 $a_8=-1$，

$\therefore a_n$ 的最大值与最小值之和为 2.

14. C 【解析】因为 $b_n=a_na_{n+2}a_{n+4}$，$n\in\mathbf{N}^*$，令 $a_n=100-3n>0$，则 $n<\dfrac{100}{3}$，所以当 $n\leqslant 33$ 时，$a_n>0$，当 $n\geqslant 34$ 时，$a_n<0$，

则 $b_{29}=a_{29}\cdot a_{31}\cdot a_{33}>0$，$b_{30}=a_{30}\cdot a_{32}\cdot a_{34}<0$，$b_{31}=a_{31}\cdot a_{33}\cdot a_{35}<0$，$b_{32}=a_{32}\cdot a_{34}\cdot a_{36}>0$，$b_{33}=a_{33}\cdot a_{35}\cdot a_{37}>0$，$b_{34}=a_{34}\cdot a_{36}\cdot a_{38}<0$，故当 $n\leqslant 29$ 时，$b_n>0$，当 $n\geqslant 34$ 时，$b_n<0$，所以只需要考虑 S_{29}，S_{32}，S_{33}，S_{34} 的大小即可.

$S_{32}-S_{29}=b_{30}+b_{31}+b_{32}=10\times4\times(-2)+7\times1\times(-5)+4\times(-2)\times(-8)=-51<0$，则 $S_{32}<S_{29}$，

$S_{33}-S_{29}=b_{30}+b_{31}+b_{32}+b_{33}=-51+1\times(-5)\times(-11)=4>0$，则 $S_{29}<S_{33}$，

$S_{34}-S_{29}=b_{30}+b_{31}+b_{32}+b_{33}+b_{34}=4+(-2)\times(-8)\times(-14)<0$，则 $S_{34}<S_{29}$，

所以当 $n=33$ 时，S_n 取最大值.

15. C 【解析】当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2^1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

当 $n\geqslant 2$ 时，由已知得 $S_n=2^{2n-1}-\dfrac{1}{2}$，

$S_{n-1}=2^{2(n-1)-1}-\dfrac{1}{2}=2^{2n-3}-\dfrac{1}{2}$，

则 $a_n=S_n-S_{n-1}=2^{2n-1}-\dfrac{1}{2}-2^{2n-3}+\dfrac{1}{2}=3\times2^{2n-3}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

当 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{3}{2}$，满足上式，

所以 $a_n=3\times2^{2n-3}(n\in\mathbf{N}^*)$.

设 $b_n=2^{-n}\cdot\log_2\dfrac{a_n}{3}=2^{-n}\cdot\log_2\dfrac{3\times2^{2n-3}}{3}=\dfrac{2n-3}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$，

设数列$\{b_n\}$中的第 $k(k\geqslant2,k\in\mathbf{N}^*)$项最大，则应满足$\begin{cases}b_k\geqslant b_{k+1},\\ b_k\geqslant b_{k-1},\end{cases}$

即$\begin{cases}\dfrac{2k-3}{2^k}\geqslant\dfrac{2(k+1)-3}{2^{k+1}}=\dfrac{2k-1}{2^{k+1}},\\ \dfrac{2k-3}{2^k}\geqslant\dfrac{2(k-1)-3}{2^{k-1}}=\dfrac{2k-5}{2^{k-1}},\end{cases}$ 整理可得$\begin{cases}2(2k-3)\geqslant2k-1,\\ 2k-3\geqslant2(2k-5),\end{cases}$

解得$\dfrac{5}{2}\leqslant k\leqslant\dfrac{7}{2}$，又 $k\in\mathbf{N}^*$，所以 $k=3$，$b_3=\dfrac{2\times3-3}{2^3}=\dfrac{3}{8}$.

又 $b_1=\dfrac{2\times1-3}{2^1}=-\dfrac{1}{2}<b_3$，

所以数列$\left\{2^{-n}\cdot\log_2\dfrac{a_n}{3}\right\}$中的最大项为 $b_3=\dfrac{3}{8}$.

16. 6 【解析】由已知 $a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=4$，$\cdots$，$a_n-a_{n-1}=2(n-1)$，$n\geqslant2$，

所以 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=12+2+4+\cdots+$

$2(n-1)=12+n(n-1)=n^2-n+12,n\geqslant 2$,

又 $a_1=12$ 也满足上式,所以 $a_n=n^2-n+12(n\in\mathbf{N}^*)$,

$\frac{a_n}{n}=\frac{n^2-n+12}{n}=n+\frac{12}{n}-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

设 $f(x)=x+\frac{12}{x}-1(x>0)$,由对勾函数的性质知 $f(x)$ 在 $(0,2\sqrt{3})$ 上单调递减,在 $(2\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增,

因此数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 在 $n\leqslant 3$ 时是递减数列,在 $n\geqslant 4$ 时是递增数列,

又 $\frac{a_3}{3}=3+\frac{12}{3}-1=6,\frac{a_4}{4}=4+\frac{12}{4}-1=6$,所以 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值是 6.

17. C 【解析】$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n,0\leqslant a_n<\frac{1}{2},\\2a_n-1,\frac{1}{2}\leqslant a_n<1,\end{cases}$ 因为 $a_1=\frac{2}{5}$,所以 $a_2=2a_1=\frac{4}{5},a_3=2a_2-1=\frac{3}{5},a_4=2a_3-1=\frac{1}{5},a_5=2a_4=\frac{2}{5},a_6=2a_5=\frac{4}{5},\cdots$,所以数列 $\{a_n\}$ 具有周期性,周期为 4,所以 $a_{2\,023}=a_{505\times4+3}=a_3=\frac{3}{5}$. 故选 C.

18. A 【解析】$a_2=1-\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2},a_3=1-\frac{1}{a_2}=-1,a_4=1-\frac{1}{a_3}=2,\cdots$,

$\therefore\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列. 又 $a_1a_2a_3=2\times\frac{1}{2}\times(-1)=-1$,且 $2\,021=3\times673+2,\therefore T_{2\,021}=(-1)^{673}\cdot a_{2\,020}\cdot a_{2\,021}=-1\times2\times\frac{1}{2}=-1$. 故选 A.

19. ABC 【解析】对于 A,$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 为 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,…,被 3 除后的余数构成一个新数列 $\{b_n\}$,$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 为 1,1,2,0,2,2,1,0,1,1,2,0,2,2,1,0,…,观察可得数列 $\{b_n\}$ 是以 8 为周期的数列,故 $b_{n+9}-b_{n+1}=0$,故 A 正确;对于 B,$b_1+b_2+\cdots+b_8=9$,故 $S_{n+10}=S_{n+2}+b_{n+3}+b_{n+4}+\cdots+b_{n+10}=S_{n+2}+9$,故 B 正确;对于 C,$b_{2\,022}=b_{8\times252+6}=b_6=2$,故 C 正确;对于 D,$\{b_n\}$ 的前 2 022 项和 $S_{2\,022}=S_{8\times252+6}=252\times9+1+1+2+0+2+2=2\,276$,故 D 错误. 故选 ABC.

20. 4 【解析】$\because a_1=16$ 是偶数,$\therefore a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{16}{2}=8$ 是偶数,$\therefore a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{8}{2}=4$ 是偶数,$\therefore a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{4}{2}=2$ 是偶数,$\therefore a_5=\frac{a_4}{2}=\frac{2}{2}=1$ 是奇数,$\therefore a_6=3a_5+1=3\times1+1=4$ 是偶数,$\therefore a_7=\frac{a_6}{2}=2$ 是偶数,$\therefore a_8=\frac{a_7}{2}=1$ 是奇数,…,$\therefore$ 从第三项开始,数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为周期的数列,$\because 2\,022=2+3\times673+1,\therefore a_{2\,022}=a_3=4$.

考点 28　等差数列及其前 n 项和

1. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$,

即有 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$,因此 $\frac{S_4}{4}-\frac{S_2}{2}=\left(a_1+\frac{3}{2}d\right)-\left(a_1+\frac{1}{2}d\right)=d=2$,

所以数列$\{a_n\}$的公差为 2. 故选 B.

2. A 【解析】令 $m=1$,则 $a_{n+1}=a_1+a_n$,故 $a_{n+1}-a_n=a_1$,$\because a_1$ 为常数,故数列$\{a_n\}$是等差数列,设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,$\therefore a_{n+1}-a_n=a_1=d$.

$\therefore a_{2\,022}=a_1+(2\,022-1)d=2\,022a_1=2\,022$,则 $a_1=1$,故选 A.

3. B 【解析】设每人分到的钱数构成的等差数列为$\{a_n\}$,数列$\{a_n\}$的公差 $d>0$,由题意可得,$a_1+a_2+a_3=a_4+a_5$,$S_5=5$,故 $3a_1+3d=2a_1+7d$,$5a_1+10d=5$,解得 $a_1=\dfrac{2}{3}$,$d=\dfrac{1}{6}$,故任意两人分得的最大差值为 $4d=\dfrac{2}{3}$. 故选 B.

4. 110 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d,由 $a_1+a_2=2a_1+d=6$,$a_2+a_3=2a_1+3d=10$,得 $a_1=d=2$,故 $a_n=2n$,$n\in\mathbf{N}^*$,则数列$\{a_n\}$的前 10 项和 $S_{10}=10a_1+\dfrac{10\times9}{2}d=20+90=110$.

5. A 【解析】若数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,设数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的公差分别为 d_1,d_2,

所以 $a_{n+1}+b_{n+1}-(a_n+b_n)=(a_{n+1}-a_n)+(b_{n+1}-b_n)=d_1+d_2$ 为常数,

所以数列$\{a_n+b_n\}$是等差数列.

若数列$\{a_n+b_n\}$是等差数列,如 $a_n+b_n=2^n+(n-2^n)=n$ 是等差数列,而此时 $a_n=2^n$,$b_n=n-2^n$ 均不是等差数列.

所以"数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列"是"数列$\{a_n+b_n\}$是等差数列"的充分不必要条件. 故选 A.

6. ACD 【解析】对于 A,C,$\because$ 数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$均为公差大于零的等差数列,$\therefore$ 可设 $a_n=p_1n+q_1(p_1>0)$,$b_n=p_2n+q_2(p_2>0)$,其中 p_1,q_1,p_2,q_2 均为常数,$\therefore a_n+b_n=(p_1+p_2)\cdot n+q_1+q_2$,$\therefore a_{n+1}+b_{n+1}-(a_n+b_n)=p_1+p_2>0$,$\therefore$ 数列$\{a_n+b_n\}$是等差数列,且为递增数列,故 A,C 正确;对于 D,$\because a_nb_n=(p_1n+q_1)(p_2n+q_2)=p_1p_2n^2+(p_1q_2+p_2q_1)n+q_1q_2$,$\therefore a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n=p_1p_2(n+1)^2+(p_1q_2+p_2q_1)(n+1)+q_1q_2-[p_1p_2n^2+(p_1q_2+p_2q_1)n+q_1q_2]=p_1p_2(2n+1)+p_1q_2+p_2q_1$,由题可知,$p_1p_2>0$,故 $a_{n+1}b_{n+1}-a_nb_n=p_1p_2(2n+1)+p_1q_2+p_2q_1$ 不可能恒为常数,故数列$\{a_nb_n\}$不可能是等差数列,故 D 正确;对于 B,设 $a_n=n-2$,$b_n=n-3$,则 $a_1b_1=2$,$a_2b_2=0$,$a_3b_3=0$,数列$\{a_nb_n\}$不是递增数列,故 B 错误. 故选 ACD.

7. (1)【证明】由 $c=0$ 和 $\sqrt{S_n}=2a_n$,得 $\sqrt{a_1}=2a_1$,又数列$\{a_n\}$的首项不为零,则 $a_1=\dfrac{1}{4}$.

由 $2a_n=\sqrt{S_n}\geqslant0$,$a_n\neq0$,得 $a_n>0$,由 $S_n=4a_n^2$,$S_{n+1}=4a_{n+1}^2$,得 $4(a_{n+1}^2-a_n^2)=S_{n+1}-S_n=a_{n+1}>0$,所以 $a_{n+1}^2>a_n^2$.

(2)【解】存在常数 c,使得$\{a_n\}$是等差数列. 理由如下:由 $\sqrt{S_n}=2a_n+c$,得 $S_n=(2a_n+c)^2$,有 $S_{n+1}=(2a_{n+1}+c)^2$,两式相减并整理得 $a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n+c)$,假设存在常数 c,使得$\{a_n\}$是等差数列,设公差为 d,则有 $a_1+nd=4d\cdot[2a_1+(2n-1)d+c]$,因此对任意 $n\in\mathbf{N}^*$,$a_1+dn=8a_1d+4cd-4d^2+8d^2n$ 恒成立,

从而$\begin{cases}a_1=8a_1d+4cd-4d^2,\\ d=8d^2,\end{cases}$ 解得 $a_1=d=0$(舍去)或 $c=d=\dfrac{1}{8}$,

由 $\sqrt{a_1}=2a_1+\dfrac{1}{8}$，解得 $a_1=\dfrac{1}{16}$，则 $a_n=\dfrac{2n-1}{16}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以存在常数 c，使得 $\{a_n\}$ 是等差数列，此时 $c=\dfrac{1}{8}$，$a_n=\dfrac{2n-1}{16}$.

8. D 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=13$，$a_9=1$，可得 $d=\dfrac{a_9-a_3}{9-3}=\dfrac{1-13}{6}=-2$，所以 $a_4=a_3+d=11$.

9. D 【解析】$\because$ $a_6+2a_7+a_{10}=(a_6+a_{10})+2a_7=2a_8+2a_7=20$，$\therefore$ $a_7+a_8=10$，由已知得 $a_7>0$，$a_8>0$，$\therefore$ $a_7\cdot a_8\leqslant\left(\dfrac{a_7+a_8}{2}\right)^2=\left(\dfrac{10}{2}\right)^2=25$，当且仅当 $a_7=a_8=5$ 时，等号成立. 此时数列为常数列 $a_n=5$，$\therefore$ $S_{10}=50$. 故选 D.

10. D 【解析】由等差数列的性质可知，S_3，S_6-S_3，S_9-S_6，$S_{12}-S_9$ 成等差数列，且该数列的公差为 $(S_6-S_3)-S_3=-8-16=-24$，

则 $S_9-S_6=(S_6-S_3)-24=-32$，

所以 $S_{12}-S_9=(S_9-S_6)-24=-56$，

因此 $S_{12}=S_3+(S_6-S_3)+(S_9-S_6)+(S_{12}-S_9)=-80$.

11. ①②④ 【解析】对于①，因为 $\{a_n\}$ 是等差数列，$a_5=0$，

所以 $S_9=\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=9a_5=0$，故①正确；

对于②，因为 $a_2>a_1$，所以 $d=a_2-a_1>0$，即 $\{a_n\}$ 是递增数列，

因为 $S_6-S_9=a_{10}$，即 $S_9-S_6=-a_{10}$，所以 $a_9+a_8+a_7=-a_{10}$，即 $a_{10}+a_9+a_8+a_7=0$，则 $a_8+a_9=0$，所以 $a_8<0$ 且 $a_9>0$，故②正确；

对于③，因为 $S_{16}=64$，所以$\dfrac{16(a_1+a_{16})}{2}=64$，则 $a_1+a_{16}=8$，则 $a_8+a_9=8$，又 $a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12}+a_{14}+a_{16}=8a_9$，$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11}+a_{13}+a_{15}=8a_8$，

所以 $8a_9=3\times8a_8$，即 $a_9=3a_8$，故 $4a_8=8$，得 $a_8=2$，$a_9=6$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d=a_9-a_8=4$，故③错误；

对于④，因为 $(n+1)S_n>nS_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，即$\dfrac{S_n}{n}>\dfrac{S_{n+1}}{n+1}$，

即$\dfrac{1}{n}\left[na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d\right]>\dfrac{1}{n+1}\left[(n+1)a_1+\dfrac{n(n+1)}{2}d\right]$，

整理得 $d<0$，

因为 $a_2^2=a_6^2$，所以 $(a_6+a_2)(a_6-a_2)=0$，

又 $a_6-a_2=4d\neq0$，所以 $a_6+a_2=0$，故 $2a_4=0$，即 $a_4=0$，

因为 $d<0$，所以 $\{a_n\}$ 是递减数列，则 $a_3>0$，$a_5<0$，

所以 $S_3>S_2>S_1$，$S_3=S_4>S_5>S_6>\cdots$，

故 S_3 和 S_4 均是 S_n 的最大值，故④正确.

12. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，

则$\begin{cases}a_1-2(a_1+d)=6,\\3a_1+\dfrac{3\times(3-1)}{2}d=-27,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=-12,\\d=3,\end{cases}$ 则 $a_n=3n-15$，

所以 $S_n=\dfrac{n(-12+3n-15)}{2}=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{27}{2}n=\dfrac{3}{2}\left(n-\dfrac{9}{2}\right)^2-\dfrac{243}{8}$，由于 $n\in\mathbf{N}^*$，故当 n 取 4 或 5 时，S_n 取得最小值，故选 A.

方法总结 利用函数性质求等差数列前 n 项和的最值问题的方法

公差不为零的等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 可整理成关于 n 的二次函数 $S_n=An^2+Bn(A\neq0)$，若$-\frac{B}{2A}\in\mathbf{N}^*$，则当 $n=-\frac{B}{2A}$时，S_n 取得最值；若$-\frac{B}{2A}\notin\mathbf{N}^*$，则当 n 为距离$-\frac{B}{2A}$最近的正整数(可能有两个)时，S_n 取得最值. 与二次函数类似，当 $A>0$ 时，S_n 有最小值；当 $A<0$ 时，S_n 有最大值.

13. D 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，故 $\begin{cases}a_4+a_7=2a_1+9d=0,\\a_5+a_8=2a_1+11d=-4,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_1=9,\\d=-2,\end{cases}$ 由于 $d<0$，故$\{a_n\}$是递减数列，故①正确；$S_n=9n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=10n-n^2$，令 $S_n=10n-n^2>0$，解得 $0<n<10$，且 $n\in\mathbf{N}^*$，故使 $S_n>0$ 成立的 n 的最大值是 9，故②正确；$a_n=9+(n-1)\times(-2)=-2n+11$，当 $1\leqslant n\leqslant5$ 时，$a_n>0$，当 $n\geqslant6$ 时，$a_n<0$，故当 $n=5$ 时，S_n 取得最大值，故③正确；$a_6=-2\times6+11=-1$，故④错误. 故选 D.

14. 【解】(1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

由 $a_3=-18$，$S_2=5a_6$，可得$\begin{cases}a_1+2d=-18,\\2a_1+d=5(a_1+5d),\end{cases}$

解得 $a_1=-24$，$d=3$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=3n-27(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 由(1)知 $d=3$，可得数列$\{a_n\}$为递增数列，且 $a_9=3\times9-27=0$，

所以当 $1\leqslant n\leqslant8$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n<0$；当 $n=9$ 时，$a_9=0$；当 $n\geqslant10$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n>0$，所以当 $n=8$ 或 9 时，S_n 取得最小值，即 $S_8=S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=-108$，

所以 $S_n\geqslant-108$，故 S_n 的最小值为-108.

考点 29 等比数列及其前 n 项和

1. C 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

由题意知 $q\neq1$，则由$\frac{S_8}{S_4}=5$ 得$\dfrac{\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}=5$，则 $1+q^4=5$，所以 $q^4=4$，即 $q^2=2$.

因为 $a_2+a_4=a_2(1+q^2)=3a_2=6$，所以 $a_2=2$，

所以 $a_{10}=a_2q^8=2\times2^4=32$.

2. C 【解析】由题意得 $S_1=a_1=5+t$，$S_2=a_1+a_2=15+t$，$S_3=a_1+a_2+a_3=45+t$，即 $a_1=5+t$，$a_2=10$，$a_3=30$. 因为数列$\{a_n\}$是等比数列，所以$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$，即$\frac{10}{5+t}=\frac{30}{10}$，解得 $t=-\frac{5}{3}$，故选 C.

3. C 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 $q(q>0)$，首项为 a_1，因为 $4a_5$，a_3，$2a_4$ 成等差数列，所以 $2a_3=4a_5+2a_4$，即 $2a_1q^2=4a_1q^4+$

$2a_1q^3$，即 $2q^2+q-1=0$，解得 $q=\dfrac{1}{2}$ 或 $q=-1$（舍去），故前 6 项和为

$$\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{63}{32}$$，故选 C.

4. A 【解析】由 $S_2=2a_2-4$，$S_4=2a_4-4$，两式相减得 $a_3+a_4=2a_4-2a_2$，即 $a_4-a_3-2a_2=0$，即 $a_2(q^2-q-2)=0$，因为 $a_2\neq0$，所以 $q^2-q-2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-1$（舍去）. 由 $S_2=2a_2-4$ 得 $a_1+a_2=2a_2-4$，即 $a_1=2a_1-4$，解得 $a_1=4$，则 $a_6=4\times2^5=128$. 故选 A.

5. B 【解析】由题知 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^{n-1}}-3$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-3=2\left(\dfrac{a_n}{2^n}-3\right)$，又因为 $\dfrac{a_1}{2}-3=4\neq0$，所以 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}-3\right\}$ 是等比数列，且首项为 4，公比为 2. 故选 B.

6. AC 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公比分别为 q_1，q_2，且 $q_1\neq0$，$q_2\neq0$，对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n\neq0$，$b_n\neq0$.

对于 A，$\dfrac{a_{n+1}b_{n+1}}{a_nb_n}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=q_1q_2$，即数列 $\{a_nb_n\}$ 是首项为 a_1b_1，公比为 q_1q_2 的等比数列，A 满足条件；

对于 B，不妨取 $a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n+1}$，满足数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是等比数列，

但对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n+b_n=(-1)^n+(-1)^{n+1}=(-1)^n-(-1)^n=0$，

故数列 $\{a_n+b_n\}$ 不是等比数列，B 不满足条件；

对于 C，$\dfrac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{\frac{a_n}{b_n}}=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\dfrac{b_n}{b_{n+1}}=\dfrac{q_1}{q_2}$，故数列 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{a_1}{b_1}$，公比为 $\dfrac{q_1}{q_2}$ 的等比数列，C 满足条件；

对于 D，不妨取 $a_n=(-2)^n$，$b_n=2^n$，满足数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是等比数列，

但当 $n=2k$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时，$a_n-b_n=(-2)^n-2^n=(-2)^{2k}-2^{2k}=4^k-4^k=0$，

故数列 $\{a_n-b_n\}$ 不是等比数列，D 不满足条件.

7. (1)【**证明**】设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公比分别为 p，$q(p\neq q)$，

要证 $\{c_n\}$ 不是等比数列，只需证 $c_2^2\neq c_1c_3$.

$c_2^2-c_1c_3=(a_1p+b_1q)^2-(a_1+b_1)(a_1p^2+b_1q^2)=-a_1b_1(p-q)^2$，

由于 $p\neq q$，且 a_1，b_1 不为零，

因此 $c_2^2\neq c_1c_3$，故数列 $\{c_n\}$ 不是等比数列.

(2)【**解**】假设存在常数 k，使得数列 $\{c_{n+1}+kc_n\}$ 为等比数列，

则有 $(c_{n+1}+kc_n)^2=(c_{n+2}+kc_{n+1})(c_n+kc_{n-1})$，$n\geqslant2$，①

将 $c_n=2^n+3^n$ 代入①式，得 $[2^{n+1}+3^{n+1}+k(2^n+3^n)]^2=[2^{n+2}+3^{n+2}+k(2^{n+1}+3^{n+1})]\cdot[2^n+3^n+k(2^{n-1}+3^{n-1})]$，

即 $[(2+k)2^n+(3+k)3^n]^2=[(2+k)2^{n+1}+(3+k)3^{n+1}]\cdot[(2+k)2^{n-1}+(3+k)3^{n-1}]$，

整理得 $12(2+k)(3+k)=13(2+k)(3+k)$，

解得 $k=-2$ 或 $k=-3$.

经检验，当 $k=-2$ 时，$c_{n+1}+kc_n=2^{n+1}+3^{n+1}+(-2)\cdot(2^n+3^n)=3^n$，

此时数列$\{c_{n+1}+kc_n\}$为等比数列；

当 $k=-3$ 时，$c_{n+1}+kc_n=2^{n+1}+3^{n+1}+(-3)\cdot(2^n+3^n)=-2^n$，

此时数列$\{c_{n+1}+kc_n\}$为等比数列，

所以存在常数 $k=-2$ 或 $k=-3$，使得数列$\{c_{n+1}+kc_n\}$为等比数列.

8.【证明】若选①②作条件证明③.

因为数列$\{a_n\}$，$\{S_n+a_1\}$是等比数列，所以$(S_2+a_1)^2=(S_1+a_1)(S_3+a_1)$，即$(2a_1+a_2)^2=2a_1(2a_1+a_2+a_3)$，

故 $4a_1^2+4a_1a_2+a_2^2=4a_1^2+2a_1a_2+2a_2^2$，所以 $a_2^2=2a_1a_2$.

又因为 $a_2\neq0$，所以 $a_2=2a_1$.

若选①③作条件证明②.

因为 $a_2=2a_1$，$\{a_n\}$是等比数列，所以数列$\{a_n\}$的公比 $q=2$，所以

$S_n=\dfrac{a_1(1-2^n)}{1-2}=a_1(2^n-1)$，即 $S_n+a_1=a_12^n$，因为$\dfrac{S_{n+1}+a_1}{S_n+a_1}=2$，$S_n+a_1\neq0$，所以$\{S_n+a_1\}$是等比数列.

若选②③作条件证明①.

因为数列$\{S_n+a_1\}$是等比数列，且 $a_2=2a_1$，

所以$\dfrac{S_2+a_1}{S_1+a_1}=\dfrac{a_1+a_2+a_1}{a_1+a_1}=\dfrac{4a_1}{2a_1}=2$，

则数列$\{S_n+a_1\}$是以 $2a_1$ 为首项，2 为公比的等比数列，

所以 $S_n+a_1=2a_1\cdot2^{n-1}=a_1\cdot2^n$，$S_n=a_1\cdot2^n-a_1$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=a_1\cdot2^n-a_1-(a_1\cdot2^{n-1}-a_1)=a_1\cdot2^{n-1}(n\geqslant2)$，

当 $n=1$ 时，$a_1=a_1$，也符合上式，

所以数列$\{a_n\}$是以 a_1 为首项，2 为公比的等比数列.

9. B **【解析】**设等比数列$\{a_n\}$的公比是 q，则 $a_9=a_7q^2$，$a_7=a_5q^2$. 因为 $a_7=6>0$，所以 $a_5>0$，$a_9>0$.

由等比数列的性质可得 $a_5a_9=a_7^2=36$，则 $a_5+4a_9\geqslant2\sqrt{4a_5a_9}=24$，当且仅当 $a_5=4a_9=12$ 时，等号成立. 故选 B.

10. A **【解析】**$\because\{a_n\}$为递减的等比数列，$\therefore\begin{cases}a_2a_7=a_3a_6=32,\\a_3+a_6=18,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_3=2,\\a_6=16\end{cases}$（舍）或$\begin{cases}a_3=16,\\a_6=2,\end{cases}$ $\therefore\{a_n\}$的公比为$\sqrt[3]{\dfrac{a_6}{a_3}}=\dfrac{1}{2}$. 故选 A.

11. B **【解析】**由根与系数的关系可得 $a_3a_7=4$，由等比数列性质可得 $a_5^2=a_3a_7=4$，则 $a_5=2$，所以 $a_1a_9=a_2a_8=a_3a_7=a_4a_6=a_5^2=2^2$，则 $a_1a_2a_3\cdot\cdots\cdot a_9=2^9$，故 $\log_2a_1+\log_2a_2+\log_2a_3+\cdots+\log_2a_9=\log_2(a_1a_2a_3\cdot\cdots\cdot a_9)=\log_22^9=9$. 故选 B.

12. A **【解析】**$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}+\dfrac{1}{a_6}+\dfrac{1}{a_7}+\dfrac{1}{a_8}=\dfrac{a_1+a_8}{a_1a_8}+\dfrac{a_2+a_7}{a_2a_7}+\dfrac{a_3+a_6}{a_3a_6}+\dfrac{a_4+a_5}{a_4a_5}$，$\because$在等比数列$\{a_n\}$中，$a_4a_5=-\dfrac{2}{5}$，而 $a_1a_8=a_2a_7=a_3a_6=a_4a_5=-\dfrac{2}{5}$，$\therefore\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\dfrac{1}{a_4}+\dfrac{1}{a_5}+\dfrac{1}{a_6}+\dfrac{1}{a_7}+\dfrac{1}{a_8}=-\dfrac{5}{2}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8)=-\dfrac{5}{2}\times\dfrac{12}{5}=-6$. 故选 A.

13. C **【解析】**设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，由题知 $q=-\dfrac{1}{2}$，

则 $S_{2m}=\dfrac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}=31, S_m=\dfrac{a_1(1-q^m)}{1-q}=32$,

所以$\dfrac{S_{2m}}{S_m}=\dfrac{\dfrac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}}{\dfrac{a_1(1-q^m)}{1-q}}=\dfrac{1-q^{2m}}{1-q^m}=1+q^m=1+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^m=\dfrac{31}{32}$,解得 $m=5$.

一题多解 设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,根据等比数列前 n 项和的性质得 $S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}$ 成等比数列,且公比为 q^m,所以$\dfrac{S_{2m}-S_m}{S_m}=q^m$,即$\dfrac{31-32}{32}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^m$,解得 $m=5$.

14. ACD 【解析】对于 A,由等比数列前 n 项和的性质有$\dfrac{S_9-S_6}{S_6-S_3}=\dfrac{S_6-S_3}{S_3}$,即$\dfrac{S_9-12}{12-4}=\dfrac{12-4}{4}$,解得 $S_9=28$,故 A 错误;

对于 B,$a_n=a_1q^{n-1}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}(n\in \mathbf{N}^*)$,$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}{1-\dfrac{3}{4}}=4-4\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$,$4-3a_n=4-3\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}=4-4\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$,即 $S_n=4-3a_n$,故 B 正确;

对于 C,由 $a_4a_7=a_5a_6=-8$,且 $a_4+a_7=2$,解得 $\begin{cases}a_4=-2,\\a_7=4\end{cases}$或$\begin{cases}a_4=4,\\a_7=-2,\end{cases}$

当$\begin{cases}a_4=-2,\\a_7=4,\end{cases}$即$\begin{cases}a_1q^3=-2,\\a_1q^6=4\end{cases}$时,解得$\begin{cases}a_1=1,\\q=\sqrt[3]{-2},\end{cases}$此时 $a_1+a_{10}=1+(\sqrt[3]{-2})^9=1-8=-7\neq-6$,故 C 错误;

对于 D,由 $a_5=4a_3$,得$\dfrac{a_5}{a_3}=q^2=4$,即 $q=\pm2$,故 $a_n=2^{n-1}$ 或 $a_n=(-2)^{n-1}$,故 D 错误.

考点 30　求数列通项公式的方法

1. D 【解析】已知数列$\{a_n\}$各项均为正数,则 $a_n>0$,$\because S_n=\dfrac{1}{4}(a_n+1)^2$,$\therefore$ 当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{4}(a_n+1)^2-\dfrac{1}{4}(a_{n-1}+1)^2$,

即 $a_n^2-a_{n-1}^2-2(a_n+a_{n-1})=0$,故$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-2)=0$,$\because a_n+a_{n-1}>0$,$\therefore a_n-a_{n-1}=2$,

又 $a_1=\dfrac{1}{4}(a_1+1)^2$,解得 $a_1=1$,$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是等差数列,且首项为 1,公差为 2. $\therefore a_n=1+2(n-1)=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$,经检验,当 $n=1$ 时,$a_1=1$ 满足上式,

$\therefore S_n=\dfrac{1}{4}(2n-1+1)^2=n^2$,$\therefore \dfrac{2S_n+6}{a_n+3}=\dfrac{2n^2+6}{2n-1+3}=\dfrac{n^2+3}{n+1}=n+1+\dfrac{4}{n+1}-2\geqslant2\sqrt{(n+1)\cdot\dfrac{4}{n+1}}-2=2$,当且仅当 $n+1=\dfrac{4}{n+1}$,即 $n=1$ 时取等号,$\therefore \dfrac{2S_n+6}{a_n+3}$的最小值为 2. 故选 D.

2. -2 【解析】因为 $S_n=n^2-4n$，当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1^2-4=-3$，

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=(n-1)^2-4(n-1)$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-4n-(n-1)^2+4(n-1)=2n-5(n\geqslant2)$，

经检验，当 $n=1$ 时，$a_1=-3$ 满足上式，

所以 $a_n=2n-5$，则 $a_3=2\times3-5=1$，

所以 $a_1+a_3=-2$.

3. 31 【解析】已知 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$S_n=2a_n+n-3$，

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1-2$，所以 $a_1=2$，

当 $n\geqslant2$ 时，$S_{n-1}=2a_{n-1}+n-4$，

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}+1$，即 $a_n=2a_{n-1}-1$，

所以 $a_n-1=2(a_{n-1}-1)$，

又 $a_1-1=1$，所以数列$\{a_n-1\}$是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，故 $a_n-1=2^{n-1}$，经检验，$a_1=2$ 满足上式.

则 $b_n=\log_4(a_n-1)=\frac{1}{2}\log_2 2^{n-1}=\frac{1}{2}(n-1)$，

故 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}(n+1-1)-\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}$，$b_1=0$，

所以数列$\{b_n\}$是以 0 为首项，$\frac{1}{2}$为公差的等差数列，

则$\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{125}}{125}=\frac{1}{125}\times\frac{125\times\left[0+\frac{1}{2}\times(125-1)\right]}{2}=31$.

4. B 【解析】由 $a_{n+1}=\frac{2(n+2)}{n+1}a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$ 得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+2)}{n+1}\ (a_n\neq0)$，$\therefore a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=2^n\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot1\right)=(n+1)\cdot2^{n-1}(n\geqslant2)$. 当 $n=1$ 时，$a_1=2$ 也符合上式，故 $a_n=(n+1)\cdot2^{n-1}$.

设 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $S_n=2\times2^0+3\times2^1+4\times2^2+\cdots+n\cdot2^{n-2}+(n+1)\cdot2^{n-1}$，$\therefore 2S_n=2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+n\cdot2^{n-1}+(n+1)\cdot2^n$，

$\therefore -S_n=2-(n+1)\cdot2^n+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=2-(n+1)\cdot2^n+\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=2-(n+1)\cdot2^n+2^n-2=-n\cdot2^n$，$\therefore S_n=n\cdot2^n$，即 $a_1+a_2+\cdots+a_n=n\cdot2^n$，

$\therefore \frac{a_{2\,022}}{a_1+a_2+\cdots+a_{2\,021}}=\frac{2\,023\times2^{2\,021}}{2\,021\times2^{2\,021}}=\frac{2\,023}{2\,021}$. 故选 B.

5. B 【解析】因为 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}+2\ (n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=2$，又 $a_2-a_1=3$，

所以数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以 3 为首项，2 为公差的等差数列，

所以 $a_{n+1}-a_n=3+2(n-1)=2n+1$，

所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(2n-1)+(2n-3)+\cdots+3+1=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2(n\geqslant2)$，

当 $n=1$ 时，$a_1=1$ 也符合上式，故 $a_n=n^2$，则数列$\{b_n\}$的通项公式 $b_n=\left[\frac{n(n+1)}{a_n}\right]=\left[\frac{n(n+1)}{n^2}\right]=\left[1+\frac{1}{n}\right]$，

则数列$\{b_n\}$的前 2 022 项和为 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2\,022}=[1+1]+$

$\left[1+\frac{1}{2}\right)+\left[1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left[1+\frac{1}{2\ 022}\right)=3+2+2+\cdots+2=3+2\times$ $2\ 021=4\ 045$.

6. B 【解析】因为数列$\{a_n\}$是"等比差"数列,

所以$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=d(n\in\mathbf{N}^*)$.

因为 $a_1=a_2=1,a_3=3$,所以 $d=\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_2}{a_1}=2$,

所以有$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=2,\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}=2,\cdots,\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_2}{a_1}=2$,

累加得$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_2}{a_1}=2n$,即$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2n+1$,即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2n-3(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,

因此有$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2n-3,\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=2n-5,\cdots,\frac{a_2}{a_1}=1$,

累乘得$\frac{a_n}{a_1}=(2n-3)\times(2n-5)\times\cdots\times1$,所以 $a_n=1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)$,

所以$\frac{a_{24}}{a_{22}}=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times41\times43\times45}{1\times3\times5\times\cdots\times41}=1\ 935$.

7. $\frac{2n}{n+1}$ 【解析】由题可知,数列$\{a_{n+1}-a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$是以 $a_2-a_1=1$ 为首项,1 为公差的等差数列,

所以 $a_{n+1}-a_n=1+(n-1)\times1=n(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以$(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1=1+2+\cdots+n$.

所以 $a_{n+1}-a_1=\frac{n(n+1)}{2}$.

所以 $a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}+2$.

故 $b_n=\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+2-2}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $S_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

8.【解】(1)因为 a_1,a_2,a_4 成等比数列,所以 $a_2^2=a_1\cdot a_4$,

又等差数列$\{a_n\}$的公差 $d=2$,

所以$(a_1+2)^2=a_1(a_1+6)$,解得 $a_1=2$,

所以数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n\cdot a_1+\frac{n(n-1)}{2}\cdot d=n^2+n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由(1)知 $a_1=2,d=2$,所以 $a_n=2n$,则 $b_n+b_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}=(\sqrt{2})^{2n}=2^n$①,

当 $n=1$ 时,$b_1+b_2=2$,可得 $b_2=1$,

且 $b_{n+1}+b_{n+2}=2^{n+1}$②.

由①②式,得 $b_{n+2}-b_n=2^{n+1}-2^n=2^n$,

所以当 $n\geqslant2$ 时,$b_{2n}=(b_{2n}-b_{2n-2})+(b_{2n-2}-b_{2n-4})+\cdots+(b_4-b_2)+b_2=2^{2n-2}+2^{2n-4}+\cdots+2^2+1=\frac{4(1-4^{n-1})}{1-4}+1=\frac{4^n-1}{3}$,

且 $b_2=1$ 符合上式，所以 $b_{2n}=\dfrac{4^n-1}{3}$.

9. D 【解析】$a_{n+1}=2a_n+3\times5^n$ 的两边同时除以 5^{n+1}，

得 $\dfrac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{a_n}{5^n}+\dfrac{3}{5}$①.

令 $b_n=\dfrac{a_n}{5^n}$，则①式变为 $b_{n+1}=\dfrac{2}{5}b_n+\dfrac{3}{5}$，即 $b_{n+1}-1=\dfrac{2}{5}(b_n-1)$，

所以数列$\{b_n-1\}$是等比数列，其首项为 $b_1-1=\dfrac{a_1}{5}-1=-\dfrac{3}{5}$，公比为 $\dfrac{2}{5}$，所以 $b_n-1=-\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$，即 $b_n=1-\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\dfrac{a_n}{5_n}=1-\dfrac{3}{5}\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^{n-1}=1-\dfrac{3\times2^{n-1}}{5^n}$，

所以 $a_n=5^n-3\times2^{n-1}$.

一题多解 设 $a_{n+1}+k\times5^{n+1}=2(a_n+k\times5^n)$，则 $a_{n+1}=2a_n-3k\times5^n$，与 $a_{n+1}=2a_n+3\times5^n$ 比较可得 $k=-1$，

所以 $a_{n+1}-5^{n+1}=2(a_n-5^n)$，

所以数列$\{a_n-5^n\}$是首项为 $a_1-5=-3$，公比为 2 的等比数列，

所以 $a_n-5^n=-3\times2^{n-1}$，所以 $a_n=5^n-3\times2^{n-1}$.

10. C 【解析】因为 $a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+2}$，所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+2}{2a_n}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a_n}$($a_n\neq0$，$a_{n+1}\neq0$)，即 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}$. 又 $\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$，故数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{1}{2}$，公差为 $\dfrac{1}{2}$ 的等差数列，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{n}{2}$，$a_n=\dfrac{2}{n}$.

所以 $\dfrac{a_n}{n+1}=\dfrac{2}{n(n+1)}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$，

故数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n+1}\right\}$ 的前 10 项和 $S_{10}=2\times\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+2\times\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+2\times\left(\dfrac{1}{10}-\dfrac{1}{11}\right)=\dfrac{20}{11}$. 故选 C.

方法总结 形如 $a_{n+1}=\dfrac{xa_n}{ya_n+z}\left(\dfrac{z}{x}>0,y\neq0\right)$ 的递推公式，可用倒数法求通项公式，步骤如下：

(1)取倒数，得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{ya_n+z}{xa_n}=\dfrac{z}{x}\cdot\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{y}{x}(a_n\neq0,a_{n+1}\neq0)$.

(2)若 $\dfrac{z}{x}=1$，则移项，得 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{y}{x}$，即数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\dfrac{y}{x}$ 的等差数列，利用等差数列的通项公式求得 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的表达式，再取倒数即可求出数列$\{a_n\}$的通项公式；若 $\dfrac{z}{x}\neq1$，则令 $\dfrac{1}{a_{n+1}}+\lambda=\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{1}{a_n}+\lambda\right)$，则 $\lambda=\dfrac{y}{z-x}$，即数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{y}{z-x}\right\}$ 是公比为 $\dfrac{z}{x}$ 的等比数列，利用等比数列的通项公式求得 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 的表达式，再取倒数即可求出数列$\{a_n\}$的通项公式.

11. C 【解析】因为 $a_{n+1}=a_n+2\sqrt{a_n+1}+1$，所以 $a_{n+1}+1=(\sqrt{a_n+1})^2+2\sqrt{a_n+1}+1$，即 $a_{n+1}+1=(\sqrt{a_n+1}+1)^2$，等式两边开方可得 $\sqrt{a_{n+1}+1}=\sqrt{a_n+1}+1$，即 $\sqrt{a_{n+1}+1}-\sqrt{a_n+1}=1$，所以数列$\{\sqrt{a_n+1}\}$是首项为 $\sqrt{a_1+1}=2$，公差为 1 的等差数列，所以 $\sqrt{a_n+1}=2+(n-1)\times1=n+1$，所以 $a_n=n^2+2n(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_{10}=10^2+20=120$. 故选 C.

12. B 【解析】由 $a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$ 可知 $a_{n+2}-4a_{n+1}=a_{n+1}-4a_n$，所以数列$\{a_{n+1}-4a_n\}$是常数列，

又 $a_1=1,a_2=5$，所以 $a_2-4a_1=1$，则数列$\{a_{n+1}-4a_n\}$各项均为 1，

即 $a_{n+1}-4a_n=1$，则 $a_{n+1}+\frac{1}{3}=4\left(a_n+\frac{1}{3}\right)$，且 $a_1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$，

则数列$\left\{a_n+\frac{1}{3}\right\}$是以$\frac{4}{3}$为首项，4 为公比的等比数列，

即 $a_n+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\times4^{n-1}$，则 $a_{n+1}=\frac{1}{3}(4^{n+1}-1)=\frac{1}{3}(2^{2n+2}-1)$.

由 $4\times2^{2n}-3\times2^{2n}=2^{2n}>1$，则$\frac{1}{3}(2^{2n+2}-1)-2^{2n}>0$，得$\frac{1}{3}(2^{2n+2}-1)>2^{2n}$，

由 $6\times2^{2n}-4\times2^{2n}=2^{2n+1}>-1$，则 $3\times2^{2n+1}-2^{2n+2}+1>0$，得 $3\times2^{2n+1}>2^{2n+2}-1$，即 $2^{2n+1}>\frac{1}{3}(2^{2n+2}-1)$，

故 $2^{2n}<a_{n+1}<2^{2n+1}$，则 $\log_2 a_{n+1}\in(2n,2n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

根据题意可知 $b_n=[\log_2 a_{n+1}]=2n$，

所以数列$\{b_n\}$是首项为 2，公差为 2 的等差数列，则 $S_{2\,023}=\frac{2\,023(b_1+b_{2\,023})}{2}=\frac{(2+2\times2\,023)\times2\,023}{2}=2\,024\times2\,023$.

13. $\frac{2}{29}$ 【解析】由 $\log_4 3\cdot a_n-\frac{a_{n+1}}{\log_{\sqrt{3}}2}=\log_2 5\cdot\log_5 3\cdot a_{n+1}a_n$ 可得 $\frac{1}{2}\log_2 3\cdot a_n-\log_2\sqrt{3}\cdot a_{n+1}=\log_2 5\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 5}\cdot a_{n+1}a_n$，

即$\frac{1}{2}\log_2 3\cdot a_n-\frac{1}{2}\log_2 3\cdot a_{n+1}=\log_2 3\cdot a_{n+1}a_n$，$\therefore a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，结合 $a_1=2$ 可知 $a_na_{n+1}\neq0$，$\therefore\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，则$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是公差为 2 的等差数列，且$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$，故$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot2=2n-\frac{3}{2}=\frac{4n-3}{2}$，则 $a_n=\frac{2}{4n-3}(n\in\mathbf{N}^*)$，故 $a_8=\frac{2}{29}$.

方法总结 形如 $a_n-a_{n+1}=f(n)\cdot a_na_{n+1}(a_na_{n+1}\neq0)$ 的递推公式，可通过等式两边同时除以 a_na_{n+1}，构造新数列求通项公式，步骤如下：

(1)等式两边同时除以 $a_na_{n+1}(a_na_{n+1}\neq0)$，得$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=f(n)$.

(2)若 $f(n)$ 是非零常数，则数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是等差数列；若 $f(n)$ 不是常数，则可用累加法求出数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的通项公式，进而求出数列$\{a_n\}$的通项公式.

14. (1)【解】由 $S_{n+1}=S_n+4a_n-3$，得 $S_{n+1}-S_n=4a_n-3$，$\therefore a_{n+1}=4a_n-3$，则 $a_{n+1}-1=4(a_n-1)$. $\because a_1-1=2-1=1$，$\therefore$ 数列$\{a_n-1\}$是以 1 为首项，4 为公比的等比数列，

$\therefore a_n-1=4^{n-1}=2^{2n-2}(n\in\mathbf{N}^*)$. $\because b_n=\log_2(a_n-1)+3$，$\therefore b_n=\log_2 2^{2n-2}+3=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)【证明】$\because c_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{b_n+1}{b_nb_{n+1}}$，

$\therefore c_n=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{2n+2}{(2n+1)(2n+3)}=(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\therefore T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}\right)-\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}\right)+\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}\right)-\cdots+(-1)^{n+1}\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}\right)\right]$.

当 n 为奇数时，$T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2n+3}\right)>\dfrac{1}{6}>\dfrac{2}{21}$；当 n 为偶数时，

$T_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$，此时$\{T_n\}$是递增数列，

$\therefore T_n\geqslant T_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}\right)=\dfrac{2}{21}$.

综上得 $T_n\geqslant\dfrac{2}{21}$.

方法总结 形如 $a_{n+1}=pa_n+q(p\neq1)$ 的递推公式，可用构造法求通项公式，步骤如下：

(1)令 $a_{n+1}+\lambda=p(a_n+\lambda)$，整理得 $a_{n+1}=pa_n+(p-1)\lambda$；

(2)由 $(p-1)\lambda=q$，解得 $\lambda=\dfrac{q}{p-1}$；

(3)由等比数列的定义，知数列$\left\{a_n+\dfrac{q}{p-1}\right\}$是公比为 p 的等比数列.

考点 31　数列求和的方法

1. C 【解析】设公差为 d，由题知 $d\neq0$，则 $a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)d(n\in\mathbf{N}^*)$，则$\dfrac{1}{a_na_{n+1}}=\dfrac{1}{[1+(n-1)d](1+nd)}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{1+(n-1)d}-\dfrac{1}{1+nd}\right)$，所以 $\dfrac{1}{a_1a_2}+\dfrac{1}{a_2a_3}+\cdots+\dfrac{1}{a_8a_9}=\dfrac{1}{d}\left(1-\dfrac{1}{1+d}+\dfrac{1}{1+d}-\dfrac{1}{1+2d}+\cdots+\dfrac{1}{1+7d}-\dfrac{1}{1+8d}\right)=\dfrac{1}{d}\left(1-\dfrac{1}{1+8d}\right)$，

故$\dfrac{1}{d}\left(1-\dfrac{1}{1+8d}\right)=\dfrac{8}{25}$，解得 $d=3$，故 $a_{10}=1+9\times3=28$.

2. A 【解析】$\dfrac{1}{4n^2+4n-3}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)$，则 $T_n=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{2n-3}-\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)=\dfrac{1}{4}\left(1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2n+1}+\dfrac{1}{2n+3}\right)<\dfrac{1}{3}$.

因为对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式 $6T_n<3a^2-a$ 恒成立，

所以 $6\times\dfrac{1}{3}\leqslant3a^2-a$，

解得 $a\leqslant -\frac{2}{3}$或 $a\geqslant 1$，故选 A.

3.【解】(1) 由题意可得，$S_4-2a_2a_3+14=4a_1+6d-2(a_1+d)(a_1+2d)+14=4+6d-2(1+d)(1+2d)+14=0$，

整理得 $d^2=4$，则 $d=\pm 2$，

可得 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$ 或 $a_n=1-2(n-1)=-2n+3$，

故 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$ 或 $a_n=-2n+3(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 因为 $d>1$，由 (1) 可得 $d=2$，$a_n=2n-1$，则 $c_n=\frac{2n+3}{(2n-1)(2n+1)\cdot 2^n}=\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$，

故 $T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\left(1-\frac{1}{3\times 2^1}\right)+\left(\frac{1}{3\times 2^1}-\frac{1}{5\times 2^2}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{n-1}}-\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}\right]=1-\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}$，

所以 $T_n=1-\frac{1}{(2n+1)\cdot 2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

方法总结　常见裂项公式

(1) $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，

$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 是公差 $d\neq 0$ 的等差数列 (不含 0 项)，则 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$；

(3) $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

4. B　【解析】$S_n=\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{n+2}{2^n}$，

$\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{n+2}{2^{n+1}}$，

两式相减可得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+2}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+2}{2^{n+1}}=2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$，所以 $S_n=4-\frac{n+4}{2^n}$.

因为 $\frac{n+4}{2^n}>0$，所以 $4-\frac{n+4}{2^n}<4$，即 $S_n<4$ 恒成立，故 $k\geqslant 4$.

5. $\frac{2\pi}{9}-\frac{(3n+4)\pi}{9\cdot 2^{2n+1}}$　【解析】依题意，$S_1=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^3$，$S_2=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^5$，$S_3=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{1}{8}\right)^2=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^7$，以此类推可知，数列 $\{S_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{8}\pi$，公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列，所以 $S_n=\frac{1}{8}\pi\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$. 令 $T_n=\sum_{i=1}^{n}iS_i$，

则 $T_n=1\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+2\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+n\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}$，

$\frac{1}{4}T_n=1\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+2\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^7+\cdots+n\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}$，

两式相减得$\frac{3}{4}T_n=\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots+\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}-n\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}=\frac{\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}}-n\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}=\frac{\pi}{6}-\frac{(3n+4)\pi}{3\cdot 2^{2n+3}}$，所以$T_n=\frac{2\pi}{9}-\frac{(3n+4)\pi}{9\cdot 2^{2n+1}}$.

6.【解】(1)当$n=1$时，$\frac{S_1}{1}=a_1=1$，所以$\frac{S_n}{n}=1+1\times(n-1)=n$，

所以$S_n=n^2$①. 当$n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=(n-1)^2=n^2-2n+1$②.

由①-②整理得$a_n=2n-1(n\geqslant 2)$.

当$n=1$时，$a_1=1$满足上式，所以数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=2n-1$，$n\in\mathbf{N}^*$.

(2)由题意知$2^m<2n-1<2^{m+1}$，所以$2^{m-1}+\frac{1}{2}<n<2^m+\frac{1}{2}$，

所以$2^{m-1}+1\leqslant n\leqslant 2^m$，故$b_m=2^m-2^{m-1}=2^{m-1}$.

由题可知$d_n=\frac{b_{n+1}-b_n}{n+1}=\frac{2^n-2^{n-1}}{n+1}=\frac{2^{n-1}}{n+1}$，得$\frac{1}{d_n}=\frac{n+1}{2^{n-1}}$，

则$T_n=\frac{2}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{4}{2^2}+\cdots+\frac{n}{2^{n-2}}+\frac{n+1}{2^{n-1}}$③，

$\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}$④，

由③-④得$\frac{1}{2}T_n=2+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{n+1}{2^n}=2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^n}=3-\frac{n+3}{2^n}$，所以$T_n=6-\frac{n+3}{2^{n-1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

7. C 【解析】设$b_n=a_{2n-1}$，$c_n=a_{2n}$，则$b_1=a_1=2$，$c_1=a_2=1$.

由已知可得$a_{2n+1}-a_{2n-1}=2$，即$b_{n+1}-b_n=2$，

所以$\{b_n\}$为以2为首项，2为公差的等差数列，则$b_n=2+2(n-1)=2n(n\in\mathbf{N}^*)$. 又$a_{2n+2}=2a_{2n}$，即$c_{n+1}=2c_n$，所以$\{c_n\}$为以1为首项，2为公比的等比数列，则$c_n=1\times 2^{n-1}=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以$\{a_n\}$的前20项和$S_{20}=(b_1+b_2+\cdots+b_{10})+(c_1+c_2+\cdots+c_{10})=(2+4+\cdots+20)+(1+2+\cdots+2^9)=\frac{10\times(2+20)}{2}+\frac{1\times(1-2^{10})}{1-2}=1\ 133$.

8. ACD 【解析】对于A，记该数列为$\{a_n\}$，由题意知$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=2$，$a_4=3$，$a_5=5$，$a_6=8$，$a_7=13$，$a_8=21$，$a_9=a_7+a_8=13+21=34$，$a_{10}=a_8+a_9=21+34=55$，$a_{11}=a_9+a_{10}=34+55=89$，故A正确；对于B，因为该数列的特点是前两项为1，从第三项起，每一项都等于它前面两项的和，此数列中数字以奇数、奇数、偶数的规律循环出现，每3个数一组，而$2\ 023=3\times 674+1$，故$a_{2\ 023}$为奇数，故B错误；对于C，由题意知$a_{n-1}+a_n=a_{n+1}(n\geqslant 2)$，所以$a_n=a_{n+1}-a_{n-1}(n\geqslant 2)$，

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2\ 023}=a_1+(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{2\ 024}-a_{2\ 022})=a_1+a_{2\ 024}-a_2=a_{2\ 024}$，故C正确；对于D，$a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2\ 024}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2\ 022}+a_{2\ 023})=S_{2\ 023}$，故D正确.

9. (1)【证明】由题意可得 $a_n=2+(n-1)\times 3=3n-1(n\in\mathbf{N}^*)$,

而 $b_1=4, b_{n+1}=3b_n-2n+1$,变形可得 $b_{n+1}-(n+1)=3b_n-3n=3(b_n-n)$, $b_1-1=3$,

故$\{b_n-n\}$是首项为 3,公比为 3 的等比数列,

从而 $b_n-n=3^n$,即 $b_n=3^n+n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)【解】由题意可得 $3k-1=3^m+m(k,m\in\mathbf{N}^*)$,因为 $3k,3^m$ 是 3 的倍数,所以 $m+1$ 也为 3 的倍数,

令 $m+1=3n$,则 $m=3n-1(n\in\mathbf{N}^*)$,

则 $3k-1=3^{3n-1}+3n-1=3(3^{3n-2}+n)-1$,此时满足条件,

即当 $m=2,5,8,\cdots,3n-1$ 时为公共项,

所以 $c_1+c_2+\cdots+c_n=b_2+b_5+\cdots+b_{3n-1}$

$=3^2+3^5+\cdots+3^{3n-1}+(2+5+\cdots+3n-1)$

$=\dfrac{9(27^n-1)}{26}+\dfrac{n(3n+1)}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

10. B 【解析】根据等比数列的性质,由 $a_1\cdot a_{2\,023}=1$ 可得 $a_n\cdot a_{2\,024-n}=1(n\in\mathbf{N}^*)$,

$\because$ 函数 $f(x)=\dfrac{4}{1+x^2}$, $\therefore f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{4}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{4+4x^2}{1+x^2}=4$,

令 $T=f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2\,023})$,则 $T=f(a_{2\,023})+f(a_{2\,022})+\cdots+f(a_1)$,

$\therefore 2T=f(a_1)+f(a_{2\,023})+f(a_2)+f(a_{2\,022})+\cdots+f(a_{2\,023})+f(a_1)=4\times 2\,023$, $\therefore T=4\,046$.

方法总结 若在数列$\{a_n\}$中,与首末项等距的两项之和等于首末两项之和,则求数列$\{a_n\}$的前 n 项和可用倒序相加法,步骤如下:

(1)分别写出"正序和" $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,以及"倒序和" $S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1$;

(2)将"正序和"与"倒序和"对应相加,化简,即得数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$.

11.【解】(1)当 $n=1$ 时, $a_1=2$;

由题知 $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}=n$①,

当 $n\geqslant 2$ 时, $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\dfrac{a_3}{2^3}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=n-1$②,

由①−②得 $\dfrac{a_n}{2^n}=1$, $\therefore a_n=2^n$,

又 $a_1=2$ 满足上式, $\therefore a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) $\because b_n=\dfrac{1}{2^n+2^{50}}$,

$\therefore b_n+b_{100-n}=\dfrac{1}{2^n+2^{50}}+\dfrac{1}{2^{100-n}+2^{50}}=\dfrac{1}{2^n+2^{50}}+\dfrac{2^n}{2^{100}+2^{50}\cdot 2^n}=\dfrac{1}{2^n+2^{50}}+\dfrac{2^n}{(2^n+2^{50})2^{50}}=\dfrac{2^{50}+2^n}{(2^n+2^{50})2^{50}}=\dfrac{1}{2^{50}}$,

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_{99}=\dfrac{1}{2^1+2^{50}}+\dfrac{1}{2^2+2^{50}}+\cdots+\dfrac{1}{2^{99}+2^{50}}$③,

$b_{99}+b_{98}+\cdots+b_1=\dfrac{1}{2^{99}+2^{50}}+\dfrac{1}{2^{98}+2^{50}}+\cdots+\dfrac{1}{2^{1}+2^{50}}$④,

又$\because$ $b_n+b_{100-n}=\dfrac{1}{2^{50}}$,$\therefore$ ③+④得 $2(b_1+b_2+\cdots+b_{99})=\dfrac{99}{2^{50}}$,

$\therefore$ $b_1+b_2+\cdots+b_{99}=\dfrac{99}{2^{51}}$.

考点 32　数列的综合问题

1. D　【解析】设该数列为$\{a_n\}$,由题知 $a_1=3,a_2=7,a_3=13,a_4=23,a_5=39,a_6=63,a_7=97$.

设 $b_1=a_2-a_1=4,b_2=a_3-a_2=6,b_3=a_4-a_3=10$,

$b_4=a_5-a_4=16,b_5=a_6-a_5=24,b_6=a_7-a_6=34$.

设 $c_1=b_2-b_1=2,c_2=b_3-b_2=4,c_3=b_4-b_3=6,c_4=b_5-b_4=8,c_5=b_6-b_5=10$,

所以 $c_{n+1}-c_n=2$,所以$\{c_n\}$是首项为 2,公差为 2 的等差数列,

所以 $c_6=2+5\times2=12$,即 $b_7-b_6=12,b_7=12+b_6=12+34=46$,

所以 $b_7=a_8-a_7=46,a_8=a_7+46=97+46=143$.

2. B　【解析】由题知 $a_{n+1}=\begin{cases}3a_n+1,a_n\text{ 为奇数},\\ \dfrac{a_n}{2},a_n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 由题知 $a_5=1$,若 a_4 为奇数,则 $a_5=3a_4+1=1$,得 $a_4=0$,不合题意,所以 a_4 为偶数,则 $a_4=2a_5=2$;

若 a_3 为奇数,则 $a_4=3a_3+1=2$,得 $a_3=\dfrac{1}{3}$,不合题意,所以 a_3 为偶数,则 $a_3=2a_4=4$;

若 a_2 为奇数,则 $a_3=3a_2+1=4$,得 $a_2=1$,不合题意,所以 a_2 为偶数,则 $a_2=2a_3=8$;

若 a_1 为奇数,则 $a_2=3a_1+1=8$,得 $a_1=\dfrac{7}{3}$,不合题意,所以 a_1 为偶数,则 $a_1=2a_2=16$;

若 a_0 为奇数,则 $a_1=3a_0+1=16$,可得 $a_0=5$;若 a_0 为偶数,则 $a_0=2a_1=32$.

综上,$a_0=5$ 或 $a_0=32$.

3. B　【解析】当 $n=1$ 时,第 1 层的圆球总数为 $a_1=1$,

当 $n=2$ 时,第 2 层的圆球总数为 $a_2=1+2=3$,

当 $n=3$ 时,第 3 层的圆球总数为 $a_3=1+2+3=6,\cdots$,所以第 n 层的圆球总数为 $a_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{(1+n)n}{2}$.

当 $n=5$ 时,$a_5=\dfrac{(1+5)\times5}{2}=15$,当 $n=10$ 时,$a_{10}=\dfrac{(1+10)\times10}{2}=55$,

故 $a_{10}-a_5=40$.

4. ABD　【解析】对于 A,根据题意,爬上第 $n+2$ 个台阶有两种可能,一种是从第 $n+1$ 个台阶爬上来,有 a_{n+1} 种方法;一种是从第 n 个台阶爬上来,有 a_n 种方法,所以 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$(提示:分类加法计数原理).$a_1=1,a_2=2,a_3=3,a_4=5,a_5=8,a_6=13,a_7=21$,故 A 正确;对于 C,$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7=53$,故 C 错误;对于 B,因为 $a_n=a_{n-2}+a_{n-1}(n\geqslant3)$,$a_n=a_{n+1}-a_{n-1}(n\geqslant2)$,$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$,所以 $3a_n=a_n+a_n+a_n=(a_{n-2}+a_{n-1})+(a_{n+1}-a_{n-1})+(a_{n+2}-$

$a_{n+1})=a_{n-2}+a_{n+2}(n\geqslant 3)$，故 B 正确；

对于 D，$a_1^2=1$，$a_2^2=a_2\cdot(a_3-a_1)=a_2\cdot a_3-a_2\cdot a_1$，$a_3^2=a_3\cdot(a_4-a_2)=a_3\cdot a_4-a_3\cdot a_2$，$\cdots$，$a_n^2=a_n\cdot(a_{n+1}-a_{n-1})=a_n\cdot a_{n+1}-a_n\cdot a_{n-1}$，累加可得 $a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=a_n\cdot a_{n+1}-1$，故 D 正确.

5. $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ **【解析】**设左顶点为 $A(-a,0)$，上顶点为 $B(0,b)$，则直线 AB 的方程为 $bx-ay+ab=0$，

以长轴与短轴的四个顶点构成的菱形内切圆经过两个焦点，则原点到直线 AB 的距离 $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=c$，即 $a^2b^2=a^2c^2+b^2c^2$，即 $(a^2-c^2)b^2=a^2c^2$，即 $b^4=(ac)^2$，所以 $b^2=ac$. 又长轴长、短轴长、焦距依次成等比数列，则 $(2b)^2=2a\cdot 2c=4ac$，所以 $b^2=ac$. 综上，$b^2=ac$，即 $a^2-c^2=ac$，两边同除以 a^2 得 $1-e^2=e$，又 $0<e<1$，解得 $e=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

6.【解】(1) 因为 $f(x)=\cos\pi x-\sin\pi x=\sqrt{2}\cos\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，令 $f(x)=0$ 可得 $\sqrt{2}\cos\left(\pi x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0$，即 $\pi x+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\dfrac{1}{4}+k(k\in\mathbf{Z})$. 因为 $\{a_n\}$ 为所有正零点构成的数列，所以 $a_1=\dfrac{1}{4}$，且 $a_n-a_{n-1}=1(n\geqslant 2)$，故 $\{a_n\}$ 为以 $\dfrac{1}{4}$ 为首项，1 为公差的等差数列，即 $a_n=\dfrac{1}{4}+(n-1)=n-\dfrac{3}{4}$，当 $n=1$ 时，$a_1=\dfrac{1}{4}$ 符合上式.

(2) 由 (1) 知 $a_n=n-\dfrac{3}{4}$，所以 $b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\cdot\left(n-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\right)=n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$，所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ ①，

所以 $\dfrac{1}{2}T_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+3\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+\cdots+(n-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n+n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ ②，

①−②可得 $\dfrac{1}{2}T_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n-n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=\dfrac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}=1-(n+2)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$，故 $T_n=2-(n+2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

考点 33 数列不等式

1. C **【解析】**因为当 $n>7$ 时，$a_n=\left(\dfrac{1}{2}-a\right)n+2$，要满足对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_n>a_{n+1}$，则数列 $\{a_n\}$ 要单调递减，所以 $\dfrac{1}{2}-a<0$，解得 $a>\dfrac{1}{2}$.

当 $n\leqslant 7$ 时，$a_n=a^{n-6}$，要满足对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_n>a_{n+1}$，

则数列$\{a_n\}$要单调递减，所以 $0<a<1$，

从而$\frac{1}{2}<a<1$，还需满足 $a^{7-6}>\left(\frac{1}{2}-a\right)\times 8+2$，解得 $a>\frac{2}{3}$，

所以实数 a 的取值范围是$\left(\frac{2}{3},1\right)$.

2. B 【解析】当 n 为偶数时，$(-1)^n na<n+(-1)^{n+1}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，可转化为 $a<1-\frac{1}{n}$对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，令 $a_n=1-\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，而$\{a_n\}$是递增数列，故当 $n=2$ 时，$\left(1-\frac{1}{n}\right)_{\min}=\frac{1}{2}$，故 $a<\frac{1}{2}$；当 n 为奇数时，$(-1)^n na<n+(-1)^{n+1}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，可转化为 $a>-1-\frac{1}{n}$对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，令 $b_n=-1-\frac{1}{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，而$\{b_n\}$是递增数列，当 n 为奇数时，$-1-\frac{1}{n}\in[-2,-1)$，故 $a\geqslant -1$. 综上可得实数 a 的取值范围为$\left[-1,\frac{1}{2}\right)$. 故选 B.

3. D 【解析】令 $n=1$，则 $2S_1a_1=a_1^2+1$，即 $2a_1^2=a_1^2+1$，由 $a_n>0$ 知 $a_1=1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_n(S_n-S_{n-1})=(S_n-S_{n-1})^2+1$，即 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$，

又 $S_1^2=a_1^2=1$，所以$\{S_n^2\}$是首项为 1，公差为 1 的等差数列，则 $S_n^2=1+n-1=n$，故 $S_n=\sqrt{n}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，又 $a_1=1$ 也满足该式，

故 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

对于 A，$a_{2\,022}a_{2\,023}=(\sqrt{2\,022}-\sqrt{2\,021})(\sqrt{2\,023}-\sqrt{2\,022})=\frac{1}{\sqrt{2\,022}+\sqrt{2\,021}}\times\frac{1}{\sqrt{2\,023}+\sqrt{2\,022}}<1$，A 错误；

对于 B，$a_{2\,023}=\sqrt{2\,023}-\sqrt{2\,022}<\sqrt{2\,023}$，B 错误；

对于 C，$S_{2\,023}=\sqrt{2\,023}>\sqrt{2\,022}$，C 错误；

对于 D，当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}<0$，即$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$，故$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_{100}}<1+2(\sqrt{2}-1)+2(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\cdots+2(\sqrt{100}-\sqrt{99})=1+2(-1+10)=19$，D 正确. 故选 D.

4. ABC 【解析】显然 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1=\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，且 $a_1=2$，

所以对于 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$a_n>0$，

又 $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$，所以 $a_{n+1}-1$ 与 a_n-1 同号，且 $a_1-1>0$，则 $a_n>1$.

对于 A，$a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2>0$，即 $a_{n+1}>a_n$，所以$\{a_n\}$为递增数列，A 正确；

对于 B，$a_n\geqslant a_1=2$，则 $a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2\geqslant 1$，

因此 $a_n=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+a_1\geqslant 1+1+\cdots+1+2=n+1$，B 正确；

对于 C，由 $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$，得$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$，

即$\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n}$，

因此 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{99}}=\left(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1}\right)+\left(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{99}-1}-\frac{1}{a_{100}-1}\right)=1-\frac{1}{a_{100}-1}<1$，C 正确；

对于 D，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\frac{1}{a_n}-1\geqslant\frac{3}{2}$，因此 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\cdot 2$（当且仅当 $n=1,2$ 时取等号），所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{99}>\frac{2\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{99}\right]}{1-\frac{3}{2}}=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{99}-4$，D 错误. 故选 ABC.

5. 18 【**解析**】由等比数列$\{a_n\}$的公比 q 满足 $0<q<1$，$a_{1\,016}^2=a_{2\,022}$，可得$(a_1q^{1\,015})^2=a_1q^{2\,021}$，可得 $a_1q^9=1$，则 $a_1>0$，且 $a_1=q^{-9}$.

由$\{a_n\}$为等比数列，得$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{q}$，则$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以$\frac{1}{a_1}$为首项，$\frac{1}{q}$为公比的等比数列，

则原不等式等价为$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}>\frac{\frac{1}{a_1}\left[1-\left(\frac{1}{q}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{q}}=\frac{q^n-1}{a_1q^{n-1}(q-1)}$.

因为 $0<q<1$，所以 $a_1^2q^{n-1}>1$，把 $a_1=q^{-9}$ 代入，整理得 $q^{n-19}>1$，

所以 $n-19<0$，则 $n<19$，由 $n\in\mathbf{N}^*$，得 n 的最大值为 18.

6. 【**证明**】(1) 由 $q_{n+1}=2-\frac{1}{q_n}$知 $q_{n+1}=\frac{2q_n-1}{q_n}$，故$\frac{1}{q_{n+1}-1}=\frac{1}{\frac{2q_n-1}{q_n}-1}=\frac{q_n}{q_n-1}=1+\frac{1}{q_n-1}$，即$\frac{1}{q_{n+1}-1}-\frac{1}{q_n-1}=1$，

所以数列$\left\{\frac{1}{q_n-1}\right\}$为公差为 1 的等差数列，

所以$\frac{1}{q_n-1}=\frac{1}{q_1-1}+(n-1)\times 1=n$，所以 $q_n=\frac{n+1}{n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 由 $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=q_n$，得 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}=q_n^2=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$，则 $a_{2n-1}=\frac{a_{2n-1}}{a_{2n-3}}\cdot\frac{a_{2n-3}}{a_{2n-5}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_1}\cdot a_1=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2\cdot\left(\frac{n-1}{n-2}\right)^2\cdot\cdots\cdot\left(\frac{2}{1}\right)^2\cdot 1=n^2$ $(n\geqslant 2)$，当 $n=1$ 时，$a_1=1$，也符合上式，

所以 $a_{2n-1}=n^2(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $a_{2n}=a_{2n-1}q_n=n(n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$，

$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n}}=\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{2n}}\right)=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)+\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]<$

$$\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]+\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2-\frac{1}{n}+1-\frac{1}{n+1}=3-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1},$$

所以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}}+\frac{1}{a_{2n}}<3-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.