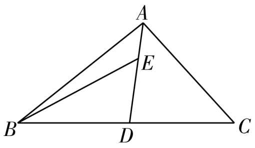
专题 7　平面向量

考点 24　平面向量的线性运算、基本定理及坐标运算

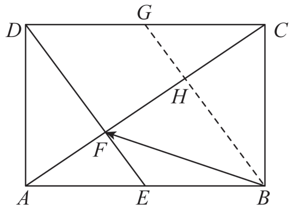


1. A　【解析】因为 $2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，又 AD 为 BC 边上的中线，由平行四边形法则可得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，

所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}=-\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

2. D　【解析】如图，取 CD 边的中点 G，连接 BG，交 AC 于点 H.



$\because BE/\!/DG, BE=DG$，$\therefore$ 四边形 $BEDG$ 为平行四边形，$\therefore BG/\!/DE$.

又$\because E$ 为 AB 边的中点，$\therefore AF=FH$，同理可得 $CH=FH$，

$\therefore \overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$.

$\therefore \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. 故选 D.

3. C　【解析】因为 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 共线，所以存在 $k\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{d}=k\boldsymbol{c}$，

即 $\boldsymbol{a}+(2x-1)\boldsymbol{b}=kx\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$.

因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}kx=1,\\k=2x-1,\end{cases}$ 整理可得 $x(2x-1)=1$，

即 $2x^2-x-1=0$，解得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=1$. 故选 C.

快解　由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，$\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 共线，得 $x(2x-1)-1=0$，解得 $x=-\frac{1}{2}$ 或 $x=1$. 故选 C.

4. A　【解析】对于 A，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，且 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{AB}$，则有 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{BD}$，而 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}$ 有公共点 B，所以 A,B,D 三点共线，故 A 正确；

对于 B，$\overrightarrow{BC}\neq\mathbf{0}$，不存在实数 λ，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，因此 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ 不共线，A,B,C 三点不共线，故 B 不正确；

对于 C，$\overrightarrow{BC}\neq\mathbf{0}$，不存在实数 μ，使得 $\overrightarrow{CD}=\mu\overrightarrow{BC}$，因此 $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD}$ 不共线，B,C,D 三点不共线，故 C 不正确；

对于 D，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=13\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$，不存在实数 t，使得 $\overrightarrow{CD}=t\overrightarrow{AC}$，因此 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CD}$ 不共线，A,C,D 三点不共线，故 D 不正确.

故选 A.

方法总结　**判断三点共线的方法**

①设三点为 A,B,C，利用向量证明：$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}(\lambda\in\mathbf{R})$，则 A,B,C 三点一定共线.

②若 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，且 $\lambda+\mu=1(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则 A,B,C 三点共线.

5. 2 【解析】由题图可得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

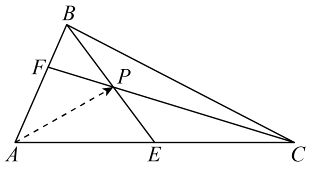
因为向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，所以存在唯一实数 μ，使 $\boldsymbol{c}=\mu(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

即 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mu\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}2=\mu\lambda,\\1=\mu,\end{cases}$ 得 $\lambda=2$.

6. B 【解析】因为在平行四边形 $ABCD$ 中，M 为 BC 的中点，AC 与 MD 相交于点 P，所以 $\dfrac{AD}{CM}=\dfrac{AP}{PC}=2$，所以 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$. 又 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，所以 $x=y=\dfrac{2}{3}$，$x+y=\dfrac{4}{3}$. 故选 B.

7. B 【解析】如图，连接 AP，设 $\overrightarrow{FP}=x\overrightarrow{FC}(0<x<1)$.



因为 E 为 AC 的中点，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，所以 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AF}$，

又 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{AF}+x\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AF}+x(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF})=(1-x)\overrightarrow{AF}+x\overrightarrow{AC}(0<x<1)$，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AE}=\dfrac{3(1-\lambda)}{2}\overrightarrow{AF}+\dfrac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC}$，所以 $\begin{cases}\dfrac{3(1-\lambda)}{2}=1-x,\\\dfrac{\lambda}{2}=x,\end{cases}$

即 $\dfrac{3(1-\lambda)}{2}+\dfrac{\lambda}{2}=\dfrac{3-2\lambda}{2}=1$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

故选 B.

8. -4 【解析】设 MC 交 AB 于点 E（图略），$\because\ \angle ABC=120°$，$AB=BC$，$\therefore\ \angle BCA=\angle BAC=30°$，设 $AB=a$，易知 $AC=\sqrt{3}a$.

$\because\ M$ 为正三角形 ABD 的中心，$\therefore\ \angle DAM=\angle MAB=\angle BAC=30°$，$AM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$，$\therefore\ AB$ 是 $\angle MAC$ 的角平分线，$\therefore\ \dfrac{AM}{AC}=\dfrac{ME}{EC}=\dfrac{1}{3}$（提示：角平分线定理），则 $\overrightarrow{ME}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{MC}=m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}(m,n\in\mathbf{R})$，

$\therefore\ \overrightarrow{MC}=4m\overrightarrow{MA}+4n\overrightarrow{MB}$. 又 E,A,B 三点共线，$\therefore\ m+n=1$.

由题干可知 $x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$，即 $\overrightarrow{MC}=-\dfrac{x}{z}\overrightarrow{MA}-\dfrac{y}{z}\overrightarrow{MB}$，

$\therefore\ 4m=-\dfrac{x}{z}$，$4n=-\dfrac{y}{z}$，$\therefore\ \dfrac{x+y}{z}=-4$.

9. B 【解析】因为 $A(1,0)$，$B(2,1)$，$C(4,3)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(2,2)$，所以 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=-4$，则 A，C，D 错误，B 正确. 故选 B.

10. ACD 【解析】对于 B，C，由题意可知点 $A(2,1)$，点 $B(2+t,1-t)$，故 $\overrightarrow{AB}=(t,-t)$.

因为 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，所以 $t^2+(-t)^2=8$，所以 $t^2=4$，

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}>0$，即 $(t,-t)\cdot(2,1)>0$，化简得 $t>0$，故 $t=2$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(2,-2)$，$B(4,-1)$，故 B 错误，C 正确.

对于 D，因为点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转 $\dfrac{\pi}{3}$ 得到点 P，所以

$\overrightarrow{AP}=\left(2\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{3},2\sin\frac{\pi}{3}-2\cos\frac{\pi}{3}\right)=(1+\sqrt{3},\sqrt{3}-1)$，

则由 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}$ 得，$(1+\sqrt{3},\sqrt{3}-1)+(2,1)=(3+\sqrt{3},\sqrt{3})$，可得点 P 的坐标为 $(3+\sqrt{3},\sqrt{3})$，故 D 正确.

对于 A，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$，则 $|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=2\sqrt{2}$，故 A 正确. 故选 ACD.

11. 2　$\sqrt{2}+\frac{3}{2}$　**【解析】**由 $\overrightarrow{OA}=(-2,4)$，$\overrightarrow{OB}=(-a,2)$，$\overrightarrow{OC}=(b,0)$，可得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-a+2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(b+2,-4)$.

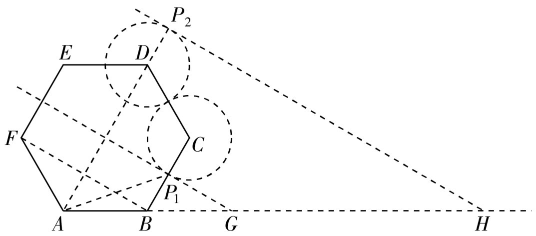
因为 A,B,C 三点共线，

所以 $\overrightarrow{AB}=(-a+2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(b+2,-4)$ 共线，

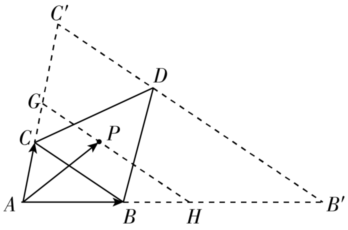
所以 $(-a+2)\times(-4)-(-2)\times(b+2)=0$，即 $2a+b=2$，

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+b)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}+3\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}+3\right)=\sqrt{2}+\frac{3}{2}$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=2-\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{2}-2$ 时取等号，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\sqrt{2}+\frac{3}{2}$.

12. C　**【解析】**连接 BF，过线段 BC 的中点 P_1 作 BF 的平行线，交 AB 的延长线于点 G，分别以 D,C 为圆心，1 为半径作圆，过 AB 延长线上点 H 作平行于 BF 的直线 HP_2，且与圆 D 相切于点 P_2，连接 AP_1，AP_2，如图所示. 设 $\overrightarrow{AP_1}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AF}$，由等和线定理可知 $m+n=\frac{AG}{AB}=\frac{2AB}{AB}=2$，此时 $m+n$ 取最小值，点 P 位于点 P_1 处；同理，设 $\overrightarrow{AP_2}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AF}$，由等和线定理可知 $m+n=\frac{AH}{AB}=5$，此时 $m+n$ 取最大值，点 P 位于点 P_2 处. 综上可知，$m+n\in[2,5]$.



13. C　**【解析】**过点 P 作 $GH//BC$，交 AC,AB 的延长线于 G,H，过点 D 作 $C'B'//GH$，交 AC,AB 的延长线于 C',B'，则 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AG}+y\overrightarrow{AH}$，且 $x+y=1$.



当点 P 位于点 D 处时，G,H 分别位于 C',B'，

$\because$ $\triangle BCD$ 与 $\triangle ABC$ 的面积之比为 2，

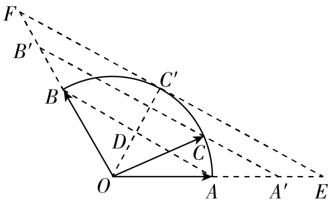
$\therefore$ $AC'=3AC$，$AB'=3AB$，

$\therefore$ $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AG}+y\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AC'}+y\overrightarrow{AB'}=x\cdot3\overrightarrow{AC}+y\cdot3\overrightarrow{AB}=\mu\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AB}$，

$\therefore \mu=3x,\lambda=3y$，即 $\lambda+\mu=3x+3y=3$.

当点 P 位于点 A 处时，显然有 $\lambda+\mu=0$，$\therefore \lambda+\mu$ 的取值范围是 $[0,3]$. 故选 C.

14. C 【解析】连接 AB，过点 C 作 AB 的平行线交 OA，OB 的延长线于 A'，B'，作 AB 的平行线，且与圆弧 AB 相切于点 C'，并与 OA，OB 的延长线交于 E，F. 连接 OC'，交 AB 于点 D.



由等和线定理可知 $\overrightarrow{OC}=t\overrightarrow{OA'}+(1-t)\overrightarrow{OB'}$，

设 $\overrightarrow{OA'}=m\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB'}=m\overrightarrow{OB}$，则 $\overrightarrow{OC}=mt\overrightarrow{OA}+m(1-t)\overrightarrow{OB}$，

又 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，则 $\begin{cases}mt=x,\\ m(1-t)=y,\end{cases}$ 解得 $x+y=m$.

当点 C 位于 C' 时，m 取得最大值，

因为 $OA=OB=OC'=1$，$\angle AOB=120°$，所以 $OD=\dfrac{1}{2}OC'=\dfrac{1}{2}$，故 $m=\dfrac{OC'}{OD}=2$，此为最大值，则 $x+y$ 的最大值是 2.

15. A 【解析】由题设及奔驰定理知 $S_{\triangle BCP}:S_{\triangle CAP}:S_{\triangle ABP}=1:2:3$，$S_{\triangle BCQ}:S_{\triangle CAQ}:S_{\triangle ABQ}=2:3:5$，故 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ABQ}=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{2}$，所以 $PQ/\!/AB$. 又 $S_{\triangle BCP}=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{6}$，$S_{\triangle BCQ}=\dfrac{S_{\triangle ABC}}{5}$，故 $\dfrac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{S_{\triangle BCQ}-S_{\triangle BCP}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{30}$.

16. B 【解析】由 $\overrightarrow{QR}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{QB}$ 可得 $\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PQ})$，

整理可得 $\overrightarrow{PR}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{PA}$.

由 $\overrightarrow{RP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{RC}$ 可得 $\overrightarrow{RP}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PR})$，整理可得 $\overrightarrow{PR}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PC}$，

所以 $-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\dfrac{2}{9}\overrightarrow{PA}$，整理得 $4\overrightarrow{PA}+6\overrightarrow{PB}+9\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

由奔驰定理可得 $S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PAC}:S_{\triangle PAB}=4:6:9$，故 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle PBC}=(4+6+9):4=19:4$.

17. C 【解析】依题意 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}-3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，则 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，充分性成立.

若 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，则 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，

可得 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}-3\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}=\mathbf{0}$，

所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}=\mathbf{0}$，必要性成立. 故选 C.

18. ABD 【解析】对于 A，若 $\lambda+\mu=1$，根据向量共线的推论知 P，B，C 三点共线，即点 P 在直线 BC 上，在 $\triangle ABC$ 中，若 $A=90°$，则 BC 的中点为 $\triangle ABC$ 的外心，故 P 有可能为外心，故 A 错误.

对于 B，在 $\triangle ABC$ 中，若 $B=90°$ 或 $C=90°$，则点 B 或点 C 为 $\triangle ABC$ 的垂心，故 P 有可能为垂心，故 B 错误.

对于C，若 P 为 $\triangle ABC$ 的重心，则必有 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，此时 $\lambda+\mu=\frac{2}{3}$，故C正确.

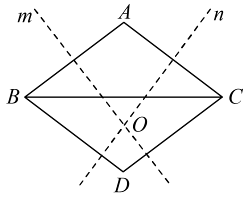
对于D，若 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，结合 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$，则点 P 在一个以 AB，AC 为邻边的平行四边形 $ABDC$ 内(含边界). 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，其外心在 $\triangle ABC$ 内，则 P 的轨迹必过外心.

若 $\triangle ABC$ 为直角三角形，其外心为斜边中点，则 P 的轨迹必过外心.

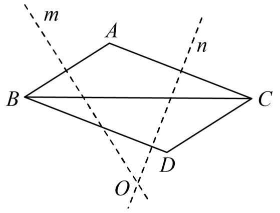
若 $\triangle ABC$ 为钝角三角形且 $A>90°$，其外心在 $\triangle ABC$ 外，即边 BC 的另一侧.

点 P 在平行四边形 $ABDC$ 内(含边界)，m，n 分别为 AB，AC 的垂直平分线. 且 m，n 相交于点 O.

当外心 O 在 $\triangle BCD$ 内(含边界)(如图①)时，则 P 的轨迹必过外心；当外心 O 在 $\triangle BCD$ 外(如图②)时，则 P 的轨迹不过外心.



图①



图②

所以当 $\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$ 时，P 的轨迹不一定过 $\triangle ABC$ 的外心，故D错误.

考点25　平面向量的数量积及其应用

1. A　【解析】$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}^2=3\times4\times1\times\left(-\frac{1}{4}\right)-1-2\times16=-36$. 故选A.

2. A　【解析】因为 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$，

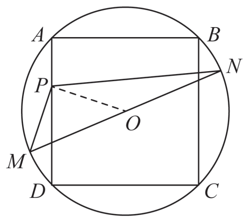
所以 $\overrightarrow{DF}^2=\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)^2=\overrightarrow{AB}^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AD}^2$，

即 $13=16-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+1$，解得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=6$.

又 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DF}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{2}{9}\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{2}\times4^2+\frac{1}{2}\times6-\frac{2}{9}\times3^2=9$，故选A.

3. A　【解析】当弦 MN 的长度最大时，弦 MN 过正方形 $ABCD$ 的外接圆的圆心 O，连接 PO，如图所示.



因为正方形 $ABCD$ 的边长为2，所以圆 O 的半径为 $\sqrt{2}$，

则 $\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OM}$，

所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{PO}^2-\overrightarrow{OM}^2$.

因为点 P 为正方形四条边上的动点，所以 $1\leqslant|\overrightarrow{PO}|\leqslant\sqrt{2}$，

又 $|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{2}$，所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}\in[-1,0]$. 故选 A.

4. A 【解析】连接 AB,CD，设 AB 的中点为 E，CD 的中点为 F，连接 OE,OF，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OF}$.

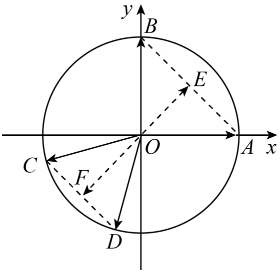
由 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}$，可知 $|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{OD}|\cos\angle COD=\cos\angle COD=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\angle COD=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\triangle OCD$ 为等边三角形，所以 $|\overrightarrow{OF}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

同理可得，$|\overrightarrow{OE}|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})$（关键：将 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$ 转化为以点 O 为起点的向量表示）$=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OD}^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=-4\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}+2$.

如图，当 $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{OF}$ 方向相反时，$-4\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}+2$ 有最大值为 $-4|\overrightarrow{OE}|\cdot|\overrightarrow{OF}|\cos\pi+2=4\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+2=2+\sqrt{6}$，即 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$ 的最大值是 $2+\sqrt{6}$. 故选 A.



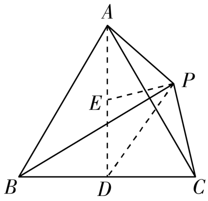
5. 24 【解析】因为 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$，即 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AC}$，

故 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cos 60°=16+8=24$.

6. B 【解析】如图，取 BC 中点 D，连接 AD,PD.

可知 $AD=2\sqrt{3}$，由平行四边形法则知 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$.

在 $\triangle PAD$ 中，取 AD 的中点 E，连接 PE，则 $AE=\sqrt{3}$，由极化恒等式得，$2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=2(\overrightarrow{PE}^2-\overrightarrow{AE}^2)=2(\overrightarrow{PE}^2-3)$，



因为 P 为 $\triangle ABC$ 所在平面的一点，所以当点 P 与点 E 重合时，即 $PE=0$ 时，有最小值，最小值为 -6.

7. A 【解析】由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$ 得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}$，

在平行四边形 $ABOC$ 中，$OB=OC$，故易知平行四边形 $ABOC$ 是菱形，且 $BC=2\sqrt{3}$.

设菱形 $ABOC$ 对角线的交点为 E，

由极化恒等式得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PE}^2-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AO}^2=\overrightarrow{PE}^2-1$，

$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PE}^2-\dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PE}^2-3$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PE}^2-4$，

因为 P 是圆内一点，所以 $0\leqslant|\overrightarrow{PE}|<3$，

所以 $-4\leqslant2\overrightarrow{PE}^2-4<14$，即 $-4\leqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}<14$.

8. 9 【解析】由极化恒等式可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}^2-\dfrac{\overrightarrow{BD}^2}{4}=-7$，则 $|\overrightarrow{BD}|=8$，$\therefore$ 由极化恒等式可得 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}^2-\dfrac{\overrightarrow{BD}^2}{4}=9$.

一题多解 在平面四边形 $ABCD$ 中，O 为 BD 的中点，且 $OA=3$，$OC=5$，$\therefore \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-7$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{AO}^2+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}^2-\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OB}^2=3^2-\overrightarrow{OB}^2=-7$，$\therefore \overrightarrow{OB}^2=16$，$\therefore |\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OD}|=4$，$\therefore \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}^2=-\overrightarrow{BO}^2+\overrightarrow{OC}\cdot[-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})]+\overrightarrow{OC}^2=-4^2+0+5^2=9$.

9. A 【解析】由已知条件得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

又 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot(|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle)=$

$\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\dfrac{|\boldsymbol{a}|^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{a}$，

故选 A.

10. A 【解析】因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $2(m+1)-m=0$，解得 $m=-2$，

所以 $\boldsymbol{a}=(2,-2)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}\cdot$

$|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\dfrac{2\times2-2\times1}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{(2,1)}{\sqrt{5}}=\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{2}{5}\right)$.

11. $\left(-\dfrac{7}{5},\dfrac{14}{5}\right)$ 【解析】由已知可得，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,-2)+(-6,3)=(-5,1)$，$|\boldsymbol{a}|^2=\boldsymbol{a}^2=1^2+(-2)^2=5$，

所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=-5\times1+1\times(-2)=-7$，

所以 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 方向上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\rangle=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|^2}\cdot\boldsymbol{a}=-\dfrac{7}{5}\boldsymbol{a}=\left(-\dfrac{7}{5},\dfrac{14}{5}\right)$.

12. AB 【解析】由题意知，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是三个非零向量，

对于 A，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 两边平方得 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$，即 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2$，

故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，故 A 正确；

对于 B，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$，因为 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，故 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，故 B 正确；

对于 C，由于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，故 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$（关键：移项，逆用运算律，变成数量积为 0，即可判断两个向量是否垂直），则 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直，故 C 错误；

对于 D，由于 $[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=0$，故 $(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 垂直，故 D 错误.

13. 1 【解析】$\because \boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，$\therefore (\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{b}^2=0$，$6+4-\lambda\times10=0$，解得 $\lambda=1$.

14. (4,3)（答案不唯一） 【解析】根据题意，$\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-3,4)$，且 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-3m+4n=0$，即 $m=\dfrac{4}{3}n$，当 $n=3$ 时，$m=4$，则 $\boldsymbol{c}=(4,3)$（答案不唯一）.

15. B 【解析】因为平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，$\boldsymbol{a}=(2,0)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+0^2}=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos60°=2\times1\times\cos60°=1$，所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2}=$

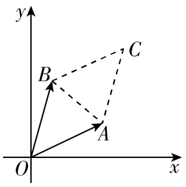
$\sqrt{4+4\times1+4}=2\sqrt{3}$. 故选 B.

16. B 【解析】$\because |a+b-e|=\sqrt{(a+b-e)^2}=\sqrt{|a|^2+|b|^2+2a\cdot b-2e\cdot(a+b)+|e|^2}=2\sqrt{3}$, $||a+b|-|e||\leqslant|a+b-e|\leqslant|a+b|+|e|$, $\therefore 2\sqrt{3}-1\leqslant|a+b|\leqslant2\sqrt{3}+1$.

当 $a+b$ 与 e 同向时, $2\sqrt{3}+1=|a+b|$, 当 $a+b$ 与 e 反向时, $2\sqrt{3}-1=|a+b|$, 又$\because |a+b|^2+|a-b|^2=2(|a|^2+|b|^2)=26$,

$\therefore |a-b|_{\min}=\sqrt{26-|a+b|^2_{\max}}=\sqrt{26-(2\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{13-4\sqrt{3}}$. 故选 B.

17. C 【解析】以 OA, OB 为邻边, 作平行四边形 $OACB$, 如图, 连接 AB, 由题意得 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$, 所以四边形 $OACB$ 为菱形, 且 $\angle AOB\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 由两边之和大于第三边, 可得 $|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|>|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BA}|$, A 正确;



因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\cos\theta>0$, 故 $|\overrightarrow{AB}|^2=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=1+1-2\cos\theta<2$, 所以 $|\overrightarrow{AB}|<\sqrt{2}$, B 正确;

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=\overrightarrow{OA}^2+2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta+\overrightarrow{OB}^2=2+2\cos\theta>2$, 则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|>\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2=\overrightarrow{OA}^2-2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\theta+\overrightarrow{OB}^2=2-2\cos\theta\in(0,2)$, 则 $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|\in(0,\sqrt{2})$, 故 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|>|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$, C 错误;

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OB}^2=0$, 故 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\perp(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$, D 正确. 故选 C.

18. $\sqrt{6}$ 【解析】$|a-b+2c|^2=|a|^2+|b|^2+4|c|^2-2a\cdot b+4a\cdot c-4b\cdot c$, 由 a, b, c 为单位向量, 得 $|a|=|b|=|c|=1$, 由 $a\perp b$, 得 $a\cdot b=0$.

由 $\langle b,c\rangle=\langle c,a\rangle=\frac{3\pi}{4}$, 得 $a\cdot c=|a|\cdot|c|\cdot\cos\langle a,c\rangle=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$b\cdot c=|b|\cdot|c|\cdot\cos\langle b,c\rangle=-\frac{\sqrt{2}}{2}$,

则 $|a-b+2c|^2=1+1+4-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6$, 即 $|a-b+2c|=\sqrt{6}$.

19. $\frac{2}{5}$ 【解析】设向量 $n=\lambda b+(1-\lambda)c$, 则 $|a-\lambda b-(1-\lambda)c|=|a-n|$, 所以 $||a|-|n||\leqslant|a-n|$,

$|n|^2=|\lambda b+(1-\lambda)c|^2=\lambda^2|b|^2+(1-\lambda)^2|c|^2+2\lambda(1-\lambda)b\cdot c=9\lambda^2+16(1-\lambda)^2=25\lambda^2-32\lambda+16(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,

由二次函数性质可得, $\frac{144}{25}\leqslant|n|^2\leqslant16$, 即 $\frac{12}{5}\leqslant|n|\leqslant4$, 所以 $|a-n|\geqslant||a|-|n||\geqslant\left|2-\frac{12}{5}\right|=\frac{2}{5}$, 所以 $|a-\lambda b-(1-\lambda)c|$ 的最小值为 $\frac{2}{5}$.

20. C 【解析】因为 a, b 为单位向量, $|3a-5b|=7$, 所以 $(3a-5b)^2=49$, 即 $9a^2-30a\cdot b+25b^2=49$, 即 $9-30a\cdot b+25=49$, 解得 $a\cdot b=-\frac{1}{2}$. 设 a 与 $a-b$ 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\times\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}}=\dfrac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

又 $\theta\in[0,\pi]$,所以 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$,故选 C.

21. D 【解析】由题知 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{m}+k\boldsymbol{n}=(4,3)+(2k,0)=(4+2k,3)$,

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{t}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{t}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{t}|}=\dfrac{4(4+2k)+9}{5|\boldsymbol{t}|}=\dfrac{25+8k}{5|\boldsymbol{t}|}$,

$\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{t}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{t}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{t}|}=\dfrac{2(4+2k)}{2|\boldsymbol{t}|}=\dfrac{4+2k}{|\boldsymbol{t}|}$.

因为 $\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{t}\rangle=\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{t}\rangle$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{t}\rangle=\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{t}\rangle$,

所以 $\dfrac{25+8k}{5|\boldsymbol{t}|}=\dfrac{4+2k}{|\boldsymbol{t}|}$,解得 $k=\dfrac{5}{2}$.

22. $\dfrac{\pi}{4}$ 【解析】设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 α,

由 $\boldsymbol{a}=(-1,\sqrt{2})$,得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$.

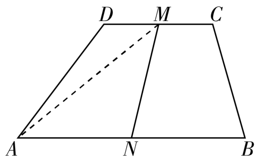
因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$,

所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3$,

即 $3-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\cos\alpha+6=3$,

解得 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,因为 $\alpha\in[0,\pi]$,所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

23. $\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】如图,连接 AM,由已知得 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. $\therefore\ \overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



设 $\angle DAB=\theta$,即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

若 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BC}$,则 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=0$,

$\therefore\left(\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)=-\dfrac{1}{8}\boldsymbol{a}^2+\dfrac{3}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=-\dfrac{1}{8}|\boldsymbol{a}|^2+\dfrac{3}{4}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta-|\boldsymbol{b}|^2=0$,又 $\because\ |\boldsymbol{a}|>0, |\boldsymbol{b}|>0$,

$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{a}|^2+8|\boldsymbol{b}|^2}{6|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{6|\boldsymbol{b}|}+\dfrac{4|\boldsymbol{b}|}{3|\boldsymbol{a}|}\geqslant2\sqrt{\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{6|\boldsymbol{b}|}\cdot\dfrac{4|\boldsymbol{b}|}{3|\boldsymbol{a}|}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$,

当且仅当 $\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{6|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4|\boldsymbol{b}|}{3|\boldsymbol{a}|}$,即 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|$ 时,等号成立.

$\therefore\ \cos\angle DAB$ 的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.