专题 11　直线与圆

考点 42　直线与方程、圆的方程

1. D　【解析】由题意可知直线 $y=2x$ 的倾斜角为 $\alpha+45°$，故 $\tan(\alpha+45°)=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}=2$，$\therefore \tan\alpha=\dfrac{1}{3}$，

$\therefore \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$.

2. C　【解析】当三条直线交于一点时，可将平面分为六个部分，

联立 $l_1:x-2y+2=0$ 与 $l_2:x-2=0$，解得 $\begin{cases}x=2,\\y=2,\end{cases}$

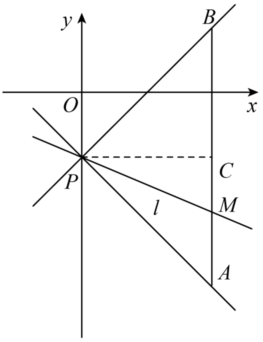
将 $\begin{cases}x=2,\\y=2\end{cases}$ 代入 $l_3:x+ky=0$ 得 $2k+2=0$，解得 $k=-1$；

当 $l_3:x+ky=0$ 与 $l_1:x-2y+2=0$ 平行时，可将平面分为六个部分，此时 $k=-2$；

当 $l_3:x+ky=0$ 与 $l_2:x-2=0$ 平行时，可将平面分为六个部分，此时 $k=0$.

综上，满足条件的 k 的值共有 3 个.

3. D　【解析】过点 P 作 $PC\perp AB$，垂足为点 C，如图所示.



设直线 l 交线段 AB 于点 M，直线 l 的斜率为 k. 直线 PA 的斜率 $k_{PA}=\dfrac{-1+3}{0-2}=-1$，直线 PB 的斜率 $k_{PB}=\dfrac{1+1}{2-0}=1$，

当点 M 在从点 A 运动到点 C（不包括点 C）时，直线 l 的倾斜角逐渐增大，此时 $-1=k_{PA}\leqslant k<0$；

当点 M 在从点 C 运动到点 B 时，直线 l 的倾斜角逐渐增大，此时 $0\leqslant k\leqslant k_{PB}=1$.

综上所述，直线 l 的斜率的取值范围是 $[-1,1]$. 故选 D.

4. B　【解析】设所求直线 l 的方程为 $x-2y+4+\lambda(x+y-2)=0$，即 $(1+\lambda)x+(\lambda-2)y+4-2\lambda=0$.

因为直线 l 与 $l_3:3x-4y+5=0$ 垂直，

所以 $3(1+\lambda)-4(\lambda-2)=0$，解得 $\lambda=11$，

所以直线 l 的方程为 $12x+9y-18=0$，即 $4x+3y-6=0$.

5. AC　【解析】直线 l_2 的方程可化为 $3x-4y-\dfrac{3}{2}=0$，故直线 l_1，l_2 平行，且直线 l_1 与直线 l_2 之间的距离 $d=\dfrac{\left|1-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{1}{2}$. 直

线 l_1 的斜率 $k=\frac{3}{4}$，设直线 l_1 的倾斜角为 $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$，所以 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$. 因为 $|MN|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 或 $\frac{3\pi}{4}+\alpha$.

当直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 时，设其斜率为 k_1，则 $k_1=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{1+\frac{3}{4}}{1-1\times\frac{3}{4}}=7$，所以直线 l 的方程为 $y=7x+2$，即 $7x-y+2=0$.

当直线 l 的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}+\alpha$ 时，设其斜率为 k_2，则 $k_2=\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\tan\frac{3\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{3\pi}{4}\tan\alpha}=\frac{-1+\frac{3}{4}}{1-(-1)\times\frac{3}{4}}=-\frac{1}{7}$，所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{7}x+2$，即 $x+7y-14=0$.

综上，直线 l 的方程为 $7x-y+2=0$ 或 $x+7y-14=0$. 故选 AC.

6. $y=\frac{3}{2}x$ 或 $x+y-5=0$ 【解析】当直线过原点时（易错点），设其方程为 $y=kx$，因为直线过点 $P(2,3)$，所以 $3=2k$，解得 $k=\frac{3}{2}$，故直线方程为 $y=\frac{3}{2}x$.

当直线不过原点时，设其方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1(a\neq0)$ (提示：已知直线在 x 轴和 y 轴上的截距为 $a,b,a\neq0,b\neq0$，则直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$)，因为直线过点 $P(2,3)$，所以 $\frac{2}{a}+\frac{3}{a}=1$，解得 $a=5$，即直线方程为 $x+y-5=0$. 综上，直线方程为 $y=\frac{3}{2}x$ 或 $x+y-5=0$.

易错警示 **忽视对截距为 0 时情况的讨论而致错**

直线在两坐标轴上的截距相等，应分为直线过原点（即截距都为 0）与直线不过原点（即截距都不为 0）两种情况讨论，分别求出直线方程，过原点的情况最容易被忽略.

7. $3x-2y-5=0$ 【解析】由题意可知，角 A 的平分线所在直线方程为 $y=x$，所以点 B 关于直线 $y=x$ 的对称点 B' 在直线 AC 上，设 $B'(a,b)$，即 $\begin{cases}\frac{b-1}{a+1}=-1,\\ \frac{b+1}{2}=\frac{a-1}{2},\end{cases}$ 解得 $a=1,b=-1$，所以 $B'(1,-1)$，直线 $B'C$ 即为边 AC 所在的直线，其方程为 $y-2=\frac{2+1}{3-1}(x-3)$，整理得 $3x-2y-5=0$.

8. A 【解析】若直线 $(m-2)x+(m+1)y+3=0$ 与直线 $(2m+2)x-$

$my+2=0$ 垂直，

则 $(m-2)(2m+2)-m(m+1)=0$，解得 $m=-1$ 或 $m=4$.

所以由 $m=4$ 能够推出两直线垂直，故充分性成立；

由两直线垂直得到 $m=-1$ 或 $m=4$，故必要性不成立.

故"$m=4$"是直线"$(m-2)x+(m+1)y+3=0$ 与直线 $(2m+2)x-my+2=0$ 垂直"的充分不必要条件. 故选 A.

方法总结 **判断两直线垂直的一般方法**

①$l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$ 与 $l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$ 垂直的充要条件为 $a_1a_2+b_1b_2=0$；

②$l_1:y=k_1x+b_1$ 与 $l_2:y=k_2x+b_2$ 垂直的充要条件为 $k_1 \cdot k_2=-1$.

特别注意对斜率不存在情况的判断.

9. C 【解析】对于①，若 $l_1//l_2$，则 $\begin{cases}-\dfrac{1}{a+1}=-\dfrac{1}{2},\\1-a\neq 0,\end{cases}$ 该方程组无解，①错误；

对于②，若 $l_1\perp l_2$，则 $-\dfrac{1}{1+a}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$，解得 $a=-\dfrac{3}{2}$，②正确；

对于③，当 $a=1$ 时，直线 l_1 的方程为 $x+2y=0$，即 $y=-\dfrac{1}{2}x$，此时，l_1,l_2 重合，③错误；

对于④，直线 l_1 的方程为 $x+(a+1)y+a-1=0$，

若 $\exists a\in\mathbf{R}$，使得原点到 l_1 的距离为 2，则 $\dfrac{|a-1|}{\sqrt{1+(a+1)^2}}=2$，整理可得 $3a^2+10a+7=0$，

方程根的判别式 $\Delta=100-4\times3\times7=16>0$，方程 $3a^2+10a+7=0$ 有解，④正确.

10. 1 【解析】依题意得 $a+b-2=0$，即 $2=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，得 $ab\leqslant 1$，当且仅当 $a=b=1$ 时，等号成立，故 ab 的最大值为 1.

11. A 【解析】因为 $l_1//l_2$，所以 $m+4=0$，解得 $m=-4$，经检验符合题意，所以 $l_2:x-2y+\sqrt{5}-1=0$，所以 l_1 与 l_2 之间的距离 $d=\dfrac{|-1-\sqrt{5}+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1$，故选 A.

12. C 【解析】设 $C(x,y)$，依题意，$|CM|=|CN|$，则 $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y-0)^2}$，整理得 $x-y-1=0$，则圆心 C 在直线 $x-y-1=0$ 上，点 $P(2,-1)$ 到直线 $x-y-1=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2+1-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

所以点 $P(2,-1)$ 到圆心 C 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$. 故选 C.

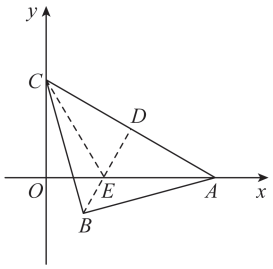
13. B 【解析】由题意得，$F(x,y)$ 的几何意义为点 $E(x,y)$ 到点 $A(2\sqrt{3},0)$，$B(\sqrt{3}-1,1-\sqrt{3})$，$C(0,2)$ 的距离之和（**提示：**数形结合思想的应用）.

因为 $|AB|=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=2\sqrt{2}$，

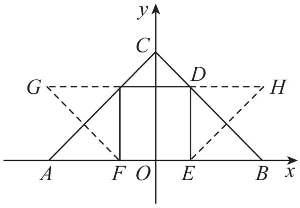
$|CB|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(-\sqrt{3}-1)^2}=2\sqrt{2}$，

$|AC|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4$，所以 $|AB|^2+|CB|^2=|AC|^2$，故

$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，取线段 AC 的中点 D，连接 BD，与 AO 交于点 E，连接 CE，如图所示，故 $|BD|=\frac{1}{2}|AC|=2$，$|AE|=|CE|$. 因为 $\frac{|CO|}{|AO|}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\angle CAO=30°$，故 $\angle AEC=120°$，则 $\angle BEC=\angle AEB=120°$（关键：确定 E 为费马点），故点 E 到三角形三个顶点距离之和最小，此时 $F(x,y)$ 取得最小值. 因为 $|AE|=\frac{|AD|}{\cos 30°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $|AE|=|CE|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$|DE|=|AE|\sin 30°=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$|BE|=|BD|-|DE|=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故 $F(x,y)$ 的最小值为 $|AE|+|CE|+|BE|=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}+2-\frac{2\sqrt{3}}{3}=2+2\sqrt{3}$. 故选 B.



14. C 【解析】分别作出点 F,E 关于 AC,BC 的对称点 G,H，连接 GH，交 BC 于 D，如图，则点 D 即为所求. 由题可知，直线 AC 的方程为 $y=x+3$，$F(-1,0)$，设 $G(x,y)$，则 $\begin{cases}\frac{y}{2}=\frac{x-1}{2}+3,\\ \frac{y}{x+1}=-1,\end{cases}$ 解得 $x=-3$，$y=2$，即 $G(-3,2)$，同理可得 $H(3,2)$，所以直线 GH 的方程为 $y=2$，由题可知，直线 BC 的方程为 $y=-x+3$，由 $\begin{cases}y=-x+3,\\ y=2,\end{cases}$ 得 $D(1,2)$，故选 C.



15. C 【解析】由题可知，直线 AB 的斜率 $k_{AB}=2+a$，点 $B(0,a)$ 在直线 $y=a$ 上，则直线 AB 关于直线 $y=a$ 的对称直线 l 的斜率为 $-2-a$，且过点 B，其方程为 $y=-(2+a)x+a$，即 $2x+y+a(x-1)=0$，则直线 l 恒过点 $P(1,-2)$. 由 $(1-3)^2+(-2)^2<18$ 得点 P 在圆 C 内，圆 C：$(x-3)^2+y^2=18$ 的圆心 $C(3,0)$，半径 $r=3\sqrt{2}$，当且仅当 $CP\perp l$ 时，圆心 C 到直线 l 的距离最大，$|MN|$ 取最小值. 此时直线 CP 的斜率 $k_{CP}=1$，由 $-(a+2)\times 1=-1$，得 $a=-1$，所以直线 l 的方程为 $x+y+1=0$，则圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{|3+1|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，$|MN|=2\sqrt{r^2-8}=2\sqrt{10}$，故选 C.

16. -2 【解析】由题意,圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$ 的圆心为 $(1,1)$,$\because (x-1)^2+(y-1)^2=2$ 关于直线 $y=kx+3$ 对称,$\therefore (1,1)$ 在直线 $y=kx+3$ 上,即 $1=k+3$,$\therefore k=-2$.

17. 4 【解析】由于 $M(x_1,y_1)$,$P(x_2,y_2)$ 是圆 O 上的两个动点,

点 M,M_1 关于原点对称,点 M,M_2 关于 x 轴对称,

可得 $M_1(-x_1,-y_1)$,$M_2(x_1,-y_1)$,

且 $x_1^2+y_1^2=4$,$x_2^2+y_2^2=4$. 直线 PM_1 的方程为 $\dfrac{y+y_1}{y_2+y_1}=\dfrac{x+x_1}{x_2+x_1}$,

令 $x=0$,得 $y=m=\dfrac{x_1y_2-x_2y_1}{x_2+x_1}$,直线 PM_2 的方程为 $\dfrac{y+y_1}{y_2+y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$,

令 $x=0$,得 $y=n=\dfrac{-x_1y_2-x_2y_1}{x_2-x_1}$,

所以 $m\cdot n=\dfrac{x_2^2y_1^2-x_1^2y_2^2}{x_2^2-x_1^2}=\dfrac{x_2^2(4-x_1^2)-x_1^2(4-x_2^2)}{x_2^2-x_1^2}=4$.

18. $(x-3)^2+(y+1)^2=16$ 【解析】由题意设圆的方程为 $x^2+y^2-4x-6+\lambda(x^2+y^2-4y-6)=0(\lambda\neq-1)$,

整理得 $x^2+y^2-\dfrac{4}{1+\lambda}x-\dfrac{4\lambda}{1+\lambda}y-6=0$,圆心坐标为 $\left(\dfrac{2}{1+\lambda},\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$,

所以 $\dfrac{2}{1+\lambda}-\dfrac{2\lambda}{1+\lambda}-4=0$,解得 $\lambda=-\dfrac{1}{3}$,

所以圆的方程为 $x^2+y^2-6x+2y-6=0$,即 $(x-3)^2+(y+1)^2=16$.

19. $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ $\left(\text{或}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}\text{或}\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{25}{8}\text{或}(x-1)^2+y^2=5\right)$

【解析】圆过点 $(-1,1)$,$(1,-1)$,$(3,1)$ 时,设圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0(D^2+E^2-4F>0)$,

则 $\begin{cases}2-D+E+F=0,\\2+D-E+F=0,\\10+3D+E+F=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}D=-2,\\E=-2,\\F=-2,\end{cases}$

圆的方程是 $x^2+y^2-2x-2y-2=0$,即 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$.

同理可得,圆过点 $(1,-1)$,$(2,2)$,$(3,1)$ 时,

圆的方程是 $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$;

圆过点 $(-1,1)$,$(1,-1)$,$(2,2)$ 时,

圆的方程是 $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{25}{8}$;

圆过点 $(-1,1)$,$(2,2)$,$(3,1)$ 时,圆的方程是 $(x-1)^2+y^2=5$.

20. $(x-3)^2+(y-1)^2=25$ 【解析】设圆 C 的圆心为 $C(a,7-2a)$,半径为 $r(r>0)$,则圆的标准方程为 $(x-a)^2+(y-7+2a)^2=r^2$. 因为圆 C 经过两点 $A(0,5)$,$B(3,6)$,所以 $|CA|=|CB|=r$,即 $\sqrt{a^2+(7-2a-5)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(7-2a-6)^2}$,解得 $a=3$,所以圆心 $C(3,1)$,$r=|CA|=\sqrt{3^2+(1-5)^2}=5$,所以圆 C 的方程为 $(x-3)^2+(y-1)^2=25$.

21. A 【解析】圆 $C:(x-2)^2+y^2=1$ 的圆心为 $C(2,0)$,半径 $r=1$,圆心 C 到直线 $x-y=0$ 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$,则 $|PQ|_{\min}=\sqrt{2}-1$,故选 A.

22. ABC 【解析】对于 A，直线 l 的方程可化为 $(2x+y-7)m+x+y-4=0$，令 $\begin{cases}2x+y-7=0,\\x+y-4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3,\\y=1,\end{cases}$

所以直线 l 恒过定点 $P(3,1)$，故 A 正确；

对于 B，因为 $(3-1)^2+(1-2)^2=5<25$，即点 $P(3,1)$ 在圆 C 内，

当直线 l 过圆心 C 时，直线被圆截得的弦长最长，因为圆心为 $C(1,2)$，所以 $2m+1+2(m+1)-7m-4=0$，解得 $m=-\dfrac{1}{3}$，故 B 正确；

对于 C，当直线 $l\perp CP$ 时，直线被圆截得的弦长最短，直线 CP 的斜率 $k_{CP}=\dfrac{1-2}{3-1}=-\dfrac{1}{2}$，直线 l 的斜率 $k=-\dfrac{2m+1}{m+1}(m\neq-1)$，

由 $-\dfrac{2m+1}{m+1}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$，解得 $m=-\dfrac{3}{4}$，故 C 正确；

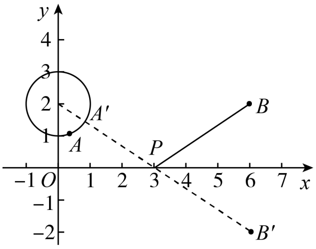
对于 D，由 C 选项的分析可知，此时直线 l 的方程是 $2x-y-5=0$，

圆心 $C(1,2)$ 到直线 $2x-y-5=0$ 的距离 $d=\dfrac{|2-2-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，

所以最短弦长为 $2\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=4\sqrt{5}$，

故 D 错误.

23. $2\sqrt{13}-1$ 【解析】根据题意画出圆 $x^2+(y-2)^2=1$，以及点 $B(6,2)$，如图，作 B 关于 x 轴的对称点 B'，连接圆心 $(0,2)$ 与 B'，设圆心与 B' 连线与圆的交点为 A'，$|A'B'|$ 即为 $|PA|+|PB|$ 的最小值，$|A'B'|$ 为点 $(0,2)$ 到点 $B'(6,-2)$ 的距离减去圆的半径，即 $|PA|+|PB|$ 的最小值为 $\sqrt{(6-0)^2+(-2-2)^2}-1=2\sqrt{13}-1$.



考点 43　直线与圆、圆与圆的位置关系

1. B 【解析】圆 C 的标准方程为 $(x-1)^2+(y+2)^2=6$，圆心 $C(1,-2)$，直线 l：$kx-y-k-2=0$ 可化为 $y+2=k(x-1)$，则直线 l 过定点 $(1,-2)$（提示：化直线的一般式方程为点斜式方程，求出直线所过的定点，从而根据定点与圆的位置关系判断直线与圆的位置关系），因此直线 l 经过圆心 C，所以直线 l 与圆 C 相交. 故选 B.

2. ACD 【解析】对于 A，由 l：$mx-y-m+3=0$，即 $m(x-1)+3-y=0$，

得 $\begin{cases}x-1=0,\\3-y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$ 所以直线 l 过定点 $M(1,3)$，故 A 正确；

对于 B，因为 $(1-2)^2+(3-4)^2<3$，故点 $M(1,3)$ 在圆 C 内，所以直线 l 与圆 C 一定相交，故 B 错误；

对于 C，当直线 l 过圆心 C 时，满足题意，此时 $2m-4-m+3=0$，解得 $m=1$，故 C 正确.

对于 D，由圆的标准方程可得圆心为 $C(2,4)$，半径 $r=\sqrt{3}$，直线 l 过的定点为 $M(1,3)$，

当 $l\perp CM$ 时，直线 l 截圆 C 所得弦长最短，易得 $|CM|=\sqrt{2}$，

则最短弦长为 $2\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=2$，故 D 正确.

3. B 【解析】由题意可知$|PA|^2=4|PO|^2$，$\therefore (x-3)^2+y^2=4(x^2+y^2)$，整理得$(x+1)^2+y^2=4$，$\therefore$ 点 P 的轨迹是以$(-1,0)$为圆心，2 为半径的圆. 圆$(x-2)^2+y^2=1$ 的圆心坐标为$(2,0)$，半径为 1，可得两圆的圆心距为 3，半径和为 3，则动点 P 的轨迹与圆$(x-2)^2+y^2=1$ 外切，故选 B.

4. C 【解析】联立两个圆的方程$\begin{cases}x^2+y^2-4y-6=0,\\x^2+y^2-6x+8y=0,\end{cases}$两式相减可得公共弦方程为 $x-2y-1=0$（关键：两圆的一般方程相减即可得到公共弦所在直线的方程），圆 O_1：$x^2+(y-2)^2=10$ 的圆心为 $O_1(0,2)$，半径 $r=\sqrt{10}$，圆心 $O_1(0,2)$到公共弦的距离 $d_1=\frac{|0-4-1|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$，公共弦长 $d=2\sqrt{r^2-d_1^2}=2\sqrt{10-5}=2\sqrt{5}$，故选 C.

5. ACD 【解析】对于 A，将 $x^2+y^2-6x-8y=0$ 变形为$(x-3)^2+(y-4)^2=25$，圆心为 $M(3,4)$，半径 $r=5$，A 正确；

对于 B，因为 $2^2+2^2-6\times2-8\times2<0$，所以点 P 在圆内，故过点 P 的直线不可能与圆相切，B 错误；

对于 C，圆 M 上的点到点 P 距离的最大值为圆心 $M(3,4)$到 $P(2,2)$的距离加上半径，

即$|PM|+r=\sqrt{(3-2)^2+(4-2)^2}+5=5+\sqrt{5}$，C 正确；

对于 D，两圆的位置关系为内切，且点 P 在圆 M 的内部，则圆 P 的半径为 $r-|PM|=5-\sqrt{5}$ 或 $r+|PM|=5+\sqrt{5}$，D 正确.

6. D 【解析】直线$(m+1)x+(n+1)y-2=0$ 与圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 相切，圆$(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的圆心为$(1,1)$，半径 $r=1$，则圆心到直线的距离 $d=\frac{|m+n|}{\sqrt{(m+1)^2+(n+1)^2}}=1$，整理得 $mn=m+n+1$. 因为 $mn\leqslant\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$（当且仅当 $m=n$ 时，等号成立），所以$\left(\frac{m+n}{2}\right)^2\geqslant m+n+1$，整理得$(m+n)^2-4(m+n)-4\geqslant0$，解得 $m+n\leqslant 2-2\sqrt{2}$ 或 $m+n\geqslant2+2\sqrt{2}$，所以 $m+n$ 的取值范围是$(-\infty,2-2\sqrt{2}]\cup[2+2\sqrt{2},+\infty)$，故选 D.

7. B 【解析】不妨设两圆为圆 C_1 和 C_2，圆 C_1：$(x-a)^2+y^2=r_1^2$，圆 C_2：$(x-b)^2+y^2=r_2^2$，其中 $r_1>0$，$r_2>0$，$-3<a<b$. 由于两圆的公切线方程为 $x-2\sqrt{2}y+3=0$，则 $r_1=\frac{|a+3|}{\sqrt{1+(-2\sqrt{2})^2}}=\frac{a+3}{3}$，$r_2=\frac{|b+3|}{\sqrt{1+(-2\sqrt{2})^2}}=\frac{b+3}{3}$. 由两圆外切，得$|C_1C_2|=b-a=r_1+r_2=\frac{a+3}{3}+\frac{b+3}{3}$（提示：若两圆外切，则圆心距等于两圆半径之和），化简得 $b=2a+3$，则$\frac{r_2}{r_1}=\frac{b+3}{a+3}=2$，故选 B.

8. BD 【解析】由题知，圆 C 的圆心为$(3,0)$，半径 $r=2$.

对于 A，因为圆心$(3,0)$到直线 l：$x-y+5=0$ 的距离 $d=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$，所以$|MC|_{\min}=4\sqrt{2}$，故$|MA|_{\min}=\sqrt{|MC|_{\min}^2-r^2}=2\sqrt{7}$，故 A 错误；

对于 B，假设存在点 M，使得$\angle AMB$ 为 $60°$，则$\angle AMC=30°$，故在

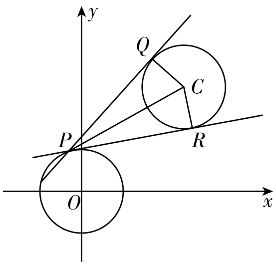
Rt$\triangle AMC$ 中，$|MC|=2r=4$，由 A 选项知 $|MC|_{\min}=4\sqrt{2}>4$，故矛盾，即不存在点 M，使得 $\angle AMB$ 为 $60°$，故 B 正确；

对于 C，由于 $MC\perp AB$，故四边形 $MACB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|MC|\cdot|AB|=2S_{\triangle MAC}=|MA|\cdot r=2|MA|$，

所以 $|MC|\cdot|AB|=4|MA|$，故当 $|MC|\cdot|AB|$ 最小时，$|MA|$ 最小，由 A 选项知 $|MA|_{\min}=2\sqrt{7}$，此时 $MC\perp l$，$l/\!/AB$，即直线 AB 的斜率为 1，由于直线 $x-2y-1=0$ 的斜率为 $\frac{1}{2}$，故 C 错误；

对于 D，不妨取 $P(1,0)$，$Q(5,0)$，设 $M(x,x+5)$，则 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=(1-x,-x-5)\cdot(5-x,-x-5)=(5-x)(1-x)+(x+5)^2=2x^2+4x+30=2(x+1)^2+28\geqslant28$，当且仅当 $x=-1$ 时等号成立，故 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$ 的最小值为 28，故 D 正确. 故选 BD.

9. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ 【解析】如图，由题意可得



$|PQ|=|PR|$，$\angle CPQ=\angle CPR=\frac{\theta}{2}$，

$CQ\perp PQ$，$CR\perp PR$，圆 O 的圆心为 $O(0,0)$，半径 $r_1=\sqrt{2}$，圆 C 的圆心为 $C(4,4)$，半径 $r_2=\sqrt{2}$，

则 $|PQ|+|PR|=2|PQ|=2\sqrt{|PC|^2-|CQ|^2}=2\sqrt{|PC|^2-2}$，

当 $|PQ|+|PR|$ 取最小值时，$|PC|$ 取得最小值，

$|PC|_{\min}=|OC|-r_1=\sqrt{16+16}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，

此时 $\sin\frac{\theta}{2}=\sin\angle CPQ=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$.

因为 $\frac{\theta}{2}$ 为锐角，所以 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，所以 $\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$，即当 $|PQ|+|PR|$ 取最小值时，$\sin\theta=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

10. A 【解析】易知直线 l 过定点 $A(1,-1)$，圆心 $C(-1,1)$，

半径为 4，因为 $(1+1)^2+(-1-1)^2=8<16$，

所以点 A 在圆 C 内，

当 $l\perp AC$ 时，l 被圆 C 所截得的弦长最短，

此时弦长为 $2\sqrt{4^2-|AC|^2}=2\sqrt{16-8}=4\sqrt{2}$. 故选 A.

11. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】圆 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ 的圆心坐标为 $(1,3)$，半径 $r=2$，圆心 $(1,3)$ 到直线 $x-my-1=0$ 的距离 $d=\frac{|3m|}{\sqrt{1+m^2}}$，

依题意得 $2\sqrt{r^2-d^2}=2$，即 $4-\frac{9m^2}{1+m^2}=1$，解得 $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以实数 m 的值是 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

12. $\left[\frac{3\sqrt{82}}{5},6\right]$ 【解析】由题意可知，圆 C_1 的圆心为 $C_1(-2,1)$，半径 $r_1=3$，圆 C_2 的圆心为 $C_2(3,-1)$，半径 $r_2=2$. 因为 $|AB|=2\sqrt{2}$，所以 $|C_2D|=\sqrt{2}$，即点 D 在以 C_2 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆

上. 设直线 OD 的方程为 $y=kx$，则 C_2 到直线 OD 的距离 $\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant\sqrt{2}$，即 $7k^2+6k-1\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant k\leqslant\frac{1}{7}$. 圆心 $C_1(-2,1)$ 到直线 OD 的距离为 $\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$，直线 OD 被圆 C_1 截得的弦长为 $2\sqrt{9-\frac{(2k+1)^2}{k^2+1}}$. 令 $f(x)=\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}\left(-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{7}\right)$（**提示：**由于不是常规代数式，可考虑构造函数，利用导数法求最值），则 $f'(x)=\frac{(2x+1)(4-2x)}{(x^2+1)^2}$，当 $-1\leqslant x<-\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{7}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，故 $f(x)_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，$f(-1)=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{81}{50}$，$f(x)_{\max}=\frac{81}{50}$. 当 $k=-\frac{1}{2}$ 时，直线 OD 经过 C_1，此时直线 OD 被圆 C_1 截得的弦长最长，最长的弦长是圆 C_1 的直径，为 6. 当 $k=\frac{1}{7}$ 时，直线 OD 被圆 C_1 截得的弦长最短，最短弦长为 $2\sqrt{9-\frac{81}{50}}=\frac{3\sqrt{82}}{5}$. 综上，直线 OD 被圆 C_1 截得的弦长的取值范围是 $\left[\frac{3\sqrt{82}}{5},6\right]$.