专题 13　计数原理

考点 49　两个计数原理与排列组合

1. C 【解析】3 名男医生各去 1 个区域，有 A_3^3 种方法，2 名女医生有 3^2 种方法，则不同的派遣方法共有 $A_3^3\cdot 3^2=54$(种)．故选 C.

2. 19 【解析】满足条件的分配方案可分为三类，第一类，每人 2 块；第二类，两人 3 块，两人 1 块；第三类，一人 3 块，一人 1 块，两人 2 块. 则第一类的分配方案有 1 种，第二类的分配方案有 C_4^2 种，即 6 种，第三类的分配方案有 $C_4^2C_2^1$ 种，即 12 种，故满足条件的分配方案共有 19 种.

3. A 【解析】若安排的人中没有甲，则安排方法有 $A_3^3=6$(种)；
若安排的人中有甲，则先安排甲，然后再选两人来安排，则安排的方法有 $A_2^1\times A_3^2=12$(种)，所以不同的安排方法共有 $6+12=18$(种).

4. D 【解析】若甲、乙两车停泊在同一排，丙、丁两车停泊在同一排，则有$2A_4^2\cdot A_4^2$ 种方案；
若丙、丁选一辆与甲、乙停泊在同一排，另一辆单独一排，则有 $2A_2^1\cdot A_4^3\cdot A_4^1$ 种方案，所以共有$2A_4^2\cdot A_4^2+2A_2^1\cdot A_4^3\cdot A_4^1=672$(种)停车方案. 故选 D.

5. D 【解析】若数学只能排在第一节或者最后一节，则数学的排法有 2 种，
物理和化学必须排在相邻的两节，将物理和化学捆绑，与语文、英语、生物学三门课程进行排序，有 $A_2^2A_4^4=48$(种)排法(易错：捆绑法解决相邻问题时，一定要考虑捆绑内部是否有顺序).
由分步乘法计数原理可知，共有 $2\times 48=96$(种)不同的排法. 故选 D.

6. 24 【解析】将 A 和 B 捆绑，则除 C 以外其他四人的排列方法有 $A_3^3\cdot A_2^2=12$(种). 因为 C 不排在两边，所以 C 可选的位置有 $A_2^1=2$(种)，所以共有 $12\times 2=24$(种)不同的排法.

一题多解　将 A 和 B 捆绑，若 C 的位置任意，则五人的排列方法有 $A_4^4\cdot A_2^2=48$(种)，
其中 C 排在两边的情况有 $A_2^1\cdot A_3^1\cdot A_2^2\cdot A_2^2=24$(种)，
所以 C 不排在两边的情况有 $48-24=24$(种).

7. B 【解析】由题意，心电图和血压测量有 A_2^2 种排法，形成 3 个空，将腹部彩超和胸部 CT 插入，有 A_3^2 种插法，故不同顺序的检查方案一共有 $A_2^2A_3^2=12$(种). 故选 B.

8. BD 【解析】对于 A，甲、乙、丙按从左到右的顺序排法的排列有 $\dfrac{A_5^5}{A_3^3}=20$(种)，故 A 错误；
对于 B，先安排丙、丁、戊三人，有 $A_3^3=6$(种)排法，形成 4 个空，再将甲、乙两人插空，则有 $A_4^2=12$(种)排法，故甲、乙不相邻的排法有 $6\times 12=72$(种)，故 B 正确；
对于 C，若最左端排乙，则其余四人可进行全排列，有 $A_4^4=24$(种)排法，若最左端不排乙，则最左端只能从丙、丁、戊中选出一人，又乙不能在最右端，则有 $A_3^1A_3^1A_3^3=54$(种)排法，故共有 24+

$54=78$(种)排法，故 C 错误；

对于 D，将甲与乙捆绑，看作一个整体且顺序固定，再与其余三人进行排列，有 $A_4^4=24$(种)排法，故 D 正确.

9. A 【解析】不考虑限制条件共有 A_6^6 种方法，B 最先汇报共有 A_5^5 种方法，如果 B 不能最先汇报，而 A,C,D 按先后顺序汇报(不一定相邻)，那么共有$\frac{A_6^6-A_5^5}{A_3^3}=100$(种)安排方法.

10. 24 【解析】先将徵、羽两音阶捆绑在一起有 A_2^2 种排法，然后与宫、商、角进行全排列有 A_4^4 种排法，考虑到顺序问题，则可排成不同的音序的种数为$\frac{A_2^2A_4^4}{A_2^2}=24$.

11. BD 【解析】对于 A，6 本不同的书分给甲、乙、丙三人，每人各 2 本，共有 $C_6^2C_4^2=15\times6=90$(种)分法，故 A 错误；

对于 B，6 本不同的书分给甲、乙、丙三人，一人 4 本，另两人各 1 本，共有$\frac{C_6^1C_5^1}{A_2^2}\cdot A_3^3=15\times6=90$(种)分法，故 B 正确；

对于 C，6 本不同的书分给甲、乙每人各 2 本，丙、丁每人各 1 本，共有 $C_6^2C_4^2C_2^1=180$(种)分法，故 C 错误；

对于 D，6 本不同的书，分给甲、乙、丙、丁四人，有两人各 2 本，另两人各 1 本，共有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^1}{A_2^2A_2^2}\cdot A_4^4=45\times24=1\ 080$(种)分法，故 D 正确. 故选 BD.

方法总结 在排列组合的分组分配问题中注意完全平均分组和部分平均分组以及不平均分组的区别.

12. 540 【解析】(1)若按照 1∶1∶4 进行分配，则有 $C_6^4\times A_3^3=90$(种)分配方法；

(2)若按照 1∶2∶3 进行分配，则有 $C_6^3C_3^2\times A_3^3=360$(种)分配方法；

(3)若按照 2∶2∶2 进行分配，则有$\frac{C_6^2C_4^2}{A_3^3}\times A_3^3=90$(种)分配方法(**易错**：平均分配有重复，注意消除重复). 由分类加法计数原理得，共有 $90+360+90=540$(种)分配方法.

13. A 【解析】在编号为 2 和 3 的盒内分别放入 1 个小球和 2 个小球，还剩 17 个小球. 由题知三个盒内每个至少再放入 1 个小球，将 17 个小球排成一排，有 16 个空隙，插入 2 块隔板分为三堆放入三个盒中即可，共有 $C_{16}^2=120$(种)方法.

14. 144 【解析】根据题意，可分为两步进行：

①先将票分为符合条件的 4 份，4 人分 6 张票，且每人至少分 1 张，至多分 2 张，

则有 2 个人各 1 张，2 个人各 2 张且分得的票必须连号，相当于将 1，2，3，4，5，6 这 6 个数字用 3 个板子隔开，分为四部分且不存在三连号，

即在其中的 5 个空隙中插入 3 个板子，有 $C_5^3=10$(种)情况，

其中出现 3 张三连号的有 123，4，5，6；1，234，5，6；1，2，345，6；1，2，3，456，共 4 种情况，不满足题意，

所以有 $10-4=6$(种)情况；

②再将分好的 4 份全排列，对应到 4 个人，有 $A_4^4=24$(种)情况，由分步乘法计数原理可得，共有 $6\times24=144$(种)不同的分法.

15. C 【解析】根据题意可知，先排 3 位妈妈，有 A_3^3 种方法；

把这位爸爸与 2 位男宝宝按爸爸在 2 位男宝宝之间，视为一个整体，插入 3 位妈妈排列形成的中间 2 个空隙，有 A_2^1 种方法.

下面分为两类：第一类：任选 2 位女宝宝排在中间的空隙中且目前没有宝宝的 2 位妈妈中间，有 A_3^2 种方法；

然后把余下的女宝宝排在男宝宝与妈妈间，有 A_2^1 种方法；

最后排 2 位男宝宝，有 A_2^2 种方法，

由分步乘法计数原理得，不同的排法种数为 $A_3^3A_2^1A_3^2A_2^1A_2^2=6\times2\times6\times2\times2=288$.

第二类：任选 2 位女宝宝，将 2 位女宝宝分别排在 2 位男宝宝与 2 位妈妈间，有 A_3^2 种方法；

然后把余下的女宝宝排在中间的空隙中且目前没有宝宝的 2 位妈妈中间，有 1 种方法；

最后排 2 位男宝宝，有 A_2^2 种方法，

由分步乘法计数原理得，不同的排法种数为 $A_3^3A_2^1A_3^2A_2^2=6\times2\times6\times2=144$.

所以不同的排法共有 $288+144=432$(种).

16. 150 【解析】由题意得，三个学校可分得的志愿者人数分别为 3，1，1 或 2，2，1.

当三个学校可分得的志愿者人数分别为 3，1，1 时，分配方案有 $C_5^3A_3^3=60$(种)，

当三个学校可分得的志愿者人数分别为 2，2，1 时，分配方案有 $\dfrac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}A_3^3=90$(种).

综上，不同的分配方案有 $60+90=150$(种).

17. B 【解析】依题意，第 1 个格子必须为黑色，则出现从左往右数，不管数到哪个格子，总有黑色格子不少于白色格子包含的情况有：

①全染黑色，有 1 种方法；

②第 1 个格子染黑色，另外 4 个格子中有 1 个格子染白色，剩余的都染黑色，有 $C_4^1=4$(种)方法；

③第 1 个格子染黑色，另外 4 个格子中有 2 个格子染白色，2 个格子染黑色，具体分为若第 3 个格子染白色，则第 2 个格子染黑色，剩余的格子 1 白 1 黑，有 C_2^1 种方法，若第 3 个格子染黑色，则另外 3 个格子中有 2 个格子染白色，剩余的染黑色，有 C_3^2 种方法，故有 $C_2^1+C_3^2=5$(种)方法.

所以出现从左往右数，不管数到哪个格子，总有黑色格子不少于白色格子的染色方法有 $1+4+5=10$(种)，故选 B.

18. C 【解析】由题意，将上色情况相同的棋子所在棋盘格用同一个序号表示，则棋盘内最多出现①，②，③三类情况.

①6 个格子分为 3+3 的两类，如表所示，

①	②	①
②	①	②

只用两种颜色，并选取两个位置放 A,B，其余位置放 C,D,E,F，此时有 $A_3^2(C_3^2+C_3^2)\cdot A_2^2\cdot A_4^4=36\cdot A_2^2\cdot A_4^4$(种).

②6 个格子分为 3+2+1 的三类，如表所示，

①	③	②
③	②	③

选用三种颜色，且只用一次的颜色放在拐角，并选取两个位置放 A,B，其余位置放 C,D,E,F，此时有 $C_4^1\cdot A_3^3\cdot(C_3^2+C_2^2)\cdot A_2^2\cdot A_4^4=96\cdot A_2^2\cdot A_4^4$(种)，或

③	①	③
②	③	②

选用三种颜色，且只用一次的颜色放在中间，并选取两个位置放 A,B，其余位置放 C,D,E,F，此时有 $C_2^1\cdot A_3^3\cdot(C_3^2+C_2^2)\cdot A_2^2\cdot A_4^4=48\cdot A_2^2\cdot A_4^4$(种).

③6 个格子分为 2+2+2 的三类，如表所示，

①	③	②
②	①	③

选用三种颜色，并选取两个位置放 A,B，其余位置放 C,D,E,F，此时有 $C_3^1\cdot A_3^3\cdot A_2^2\cdot A_4^4=18\cdot A_2^2\cdot A_4^4$(种)，或

①	②	③
②	③	①

选用三种颜色，并选取两个位置放 A,B，其余位置放 C,D,E,F，此时有 $C_3^1\cdot A_3^3\cdot A_2^2\cdot A_4^4=18\cdot A_2^2\cdot A_4^4$(种). 所以不同的放置与上色方式有 $(36+96+48+18+18)\cdot A_2^2\cdot A_4^4=10\ 368$(种).

故选 C.

考点 50　二项式定理

1. D　【解析】由题可得展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}(-2y)^r$，$T_3=C_6^2x^4(-2y)^2=60x^4y^2$，故 $(x-2y)^6$ 的展开式中 x^4y^2 的系数为 60. 故选 D.

2. B　【解析】二项展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\cdot\left(-\frac{3}{x^2}\right)^r=C_6^r(-3)^r x^{6-3r}$，令 $6-3r=0$，解得 $r=2$，所以常数项 $T_3=C_6^2(-3)^2=135$，故选 B.

3. $-\frac{35}{8}$　【解析】$\because\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}x\right)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_7^r(\sqrt{x})^{7-r}\cdot\left(-\frac{1}{2}x\right)^r=C_7^r\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^r\cdot x^{\frac{7+r}{2}}$，

令 $\frac{7+r}{2}=5$，解得 $r=3$，可得展开式中含 x^5 项的系数为 $C_7^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{35}{8}$.

4. B　【解析】$(3x-y)(2x+y)^5=3x(2x+y)^5-y(2x+y)^5$，

而 $(2x+y)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}y^r$，

所以当 $r=3$ 时，x^3y^3 的系数为 $3\times C_5^3 2^2=120$，

当 $r=2$ 时，x^3y^3 的系数为 $-1\times C_5^2 2^3=-80$，

所以 x^3y^3 的系数为 $120-80=40$.

5. D 【解析】$(1-2x)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_4^r(-2x)^r=C_4^r(-2)^r\cdot x^r$，所以$\left(\frac{1}{x}-2\right)(1-2x)^4$ 的展开式中，常数项为 $C_4^1\times(-2)+(-2)\times C_4^0=-8-2=-10$，故选 D.

6. A 【解析】$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2x}\right)^8(x^3+a)=x^3\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2x}\right)^8+a\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2x}\right)^8$，

其中$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2x}\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r(\sqrt{x})^{8-r}\left(\frac{1}{2x}\right)^r=\left(\frac{1}{2}\right)^rC_8^rx^{\frac{8-3r}{2}}(r=0,1,2,3,4,5,6,7,8)$. 令$\frac{8-3r}{2}=-2$，解得 $r=4$；令$\frac{8-3r}{2}=1$，解得 $r=2$. 此时含 x 项的系数为$\left(\frac{1}{2}\right)^2C_8^2a+\left(\frac{1}{2}\right)^4C_8^4=-\frac{21}{8}$，解得 $a=-1$. 故选 A.

7. A 【解析】将$(2x^2+y+1)^5$ 看作 5 个因式$(2x^2+y+1)$相乘，根据 x^4y^2 的指数可得 5 个因式中有两个选 $2x^2$，两个选 y，一个选 1，进行相乘，即$(2x^2+y+1)^5$ 的展开式中 x^4y^2 项的系数为 $C_5^2\times2^2\times C_3^2=120$，故选 A.

易错警示 **三项展开式的求解方法**

求解三项展开式问题，主要有两种处理方法，一种是将三项式转化为二项式，另一种是利用分类加法计数原理、分步乘法计数原理，结合三项式的每一项的构成形式分类讨论求解.

8. A 【解析】因为$(x-2y+2z)^5=[(x-2y)+2z]^5$，所以其展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot(x-2y)^{5-r}\cdot(2z)^r$，

令 $r=1$，得 $T_2=C_5^1\cdot(x-2y)^4\cdot2z=10(x-2y)^4z$，

$(x-2y)^4$ 的展开式的通项为 $T'_{k+1}=C_4^k\cdot x^{4-k}\cdot(-2y)^k$，

令 $k=3$，得 $T'_4=C_4^3\cdot x\cdot(-2y)^3=-32xy^3$，因此 xy^3z 的系数为 $10\times(-32)=-320$，故选 A.

9. A 【解析】令 $x=1$，得$(3-5+1)^5=-1$，所以$(3x^3-5x^2+1)^5$ 的展开式中所有项的系数和为-1.

$(3x^3-5x^2+1)^5$ 可以看成是 5 个因式$(3x^3-5x^2+1)$相乘.

要得到 x^5 项，则 5 个因式中有 1 个因式取 $3x^3$，一个因式取$-5x^2$，其余 3 个因式取 1，然后相乘而得，

所以$(3x^3-5x^2+1)^5$ 的展开式中含 x^5 的项为 $C_5^1(3x^3)^1C_4^1\cdot(-5x^2)^1=-300x^5$，所以$(3x^3-5x^2+1)^5$ 的展开式中，除 x^5 项之外，剩下所有项的系数之和为$-1-(-300)=299$. 故选 A.

10. AC 【解析】根据二项式定理，$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式的通项为

$T_{r+1}=C_8^r2^{8-r}(-1)^rx^{8-2r}$，$r=0,1,2,\cdots,8$.

对于 A，令 $8-2r=0$，得 $r=4$，则常数项为 $C_8^42^4(-1)^4=1\ 120$，故 A 正确；

对于 B，第四项的系数为 $C_8^32^{8-3}(-1)^3=-1\ 792$，第六项的系数为 $C_8^52^{8-5}(-1)^5=-448$，故 B 错误；

对于 C，因为 $n=8$，所以各项的二项式系数之和为 $2^8=256$，故 C 正确；

对于 D，令 $x=1$，各项的系数之和为 1，故 D 错误.

11. B 【解析】由题知 $T_6=C_n^5(2x)^5$，$T_7=C_n^6(2x)^6$，所以 $C_n^5\cdot 2^5=C_n^6\cdot 2^6$，所以 $C_n^5=2C_n^6$，即 $\frac{n!}{(n-5)!\ 5!}=\frac{2\cdot n!}{6!\ (n-6)!}$，所以 $6=2(n-5)$，解得 $n=8$，所以二项式系数最大的项为 $T_5=C_8^4(2x)^4=1\ 120x^4$. 故选 B.

12. BC 【解析】对于 A，$a_1=C_{2\ 023}^1\cdot a=2\ 023a=-6\ 069$，可得 $a=-3$，故 A 错误；

对于 B，因为 $(1-3x)^{2\ 023}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2\ 023}x^{2\ 023}$，

令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2\ 023}=(1-3)^{2\ 023}=-2^{2\ 023}$，故 B 正确；

对于 C，令 $x=0$，得 $a_0=1$，

令 $x=\frac{1}{3}$，得 $\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\cdots+\frac{a_{2\ 023}}{3^{2\ 023}}=\left(1-3\times\frac{1}{3}\right)^{2\ 023}-a_0=-a_0=-1$，

故 C 正确；

对于 D，由展开式知，$a_{2n}>0$，$a_{2n+1}<0(n\in\mathbf{N})$，故第 1 012 项的系数 $a_{1\ 011}<0$，不会是展开式中系数最大的项，故 D 错误.

13. C 【解析】$15^{2\ 023}-a=(14+1)^{2\ 023}-a=C_{2\ 023}^0 14^{2\ 023}+C_{2\ 023}^1 14^{2\ 022}+C_{2\ 023}^2 14^{2\ 021}+\cdots+C_{2\ 023}^{2\ 022}14+C_{2\ 023}^{2\ 023}-a$，因为 $15^{2\ 023}-a$ 能被 7 整除，

且 $C_{2\ 023}^0 14^{2\ 023}+C_{2\ 023}^1 14^{2\ 022}+C_{2\ 023}^2 14^{2\ 021}+\cdots+C_{2\ 023}^{2\ 022}14$ 能被 7 整除，

所以 $C_{2\ 023}^{2\ 023}-a=1-a$ 能被 7 整除，又 $-7\leqslant a<0$，所以 $a=-6$.

14. 6 【解析】令 $x=1$，得各项系数之和为 $(5+1)^{2\ 023}=6^{2\ 023}$，

由于 $6^{2\ 023}=(-1+7)^{2\ 023}$

$=-1+C_{2\ 023}^1\cdot 7-C_{2\ 023}^2\cdot 7^2+C_{2\ 023}^3\cdot 7^3-\cdots+7^{2\ 023}$

$=6-7+C_{2\ 023}^1\cdot 7-C_{2\ 023}^2\cdot 7^2+C_{2\ 023}^3\cdot 7^3-\cdots+7^{2\ 023}$，

因为 $-7+C_{2\ 023}^1\cdot 7-C_{2\ 023}^2\cdot 7^2+C_{2\ 023}^3\cdot 7^3-\cdots+7^{2\ 023}$ 均能被 7 整除，所以所得余数为 6.