专题 15　新定义解答题专练

1. (1)【解】$p=11$，$a=2$，$a^{p-1,\otimes}=2^{10,\otimes}$ 为 $2^{10}\div 11$ 的余数，为 1，即 $2^{10,\otimes}=1$.

(2)【证明】记 $a^{n_1}=a^{n_1,\otimes}+m_1p$，$a^{n_2}=a^{n_2,\otimes}+m_2p$，$a^{n_1,\otimes}\times a^{n_2,\otimes}=a^{n_1,\otimes}\otimes a^{n_2,\otimes}+kp$，其中 m_1,m_2,k 是整数，则 $a^{n_1+n_2}=a^{n_1,\otimes}\otimes a^{n_2,\otimes}+(m_1a^{n_2,\otimes}+m_2a^{n_1,\otimes}+m_1m_2p+k)p$，可知 $a^{n_1,\otimes}\otimes a^{n_2,\otimes}=a^{n_1+n_2,\otimes}$.

因为 $1,a,a^{2,\otimes},\cdots,a^{p-2,\otimes}$ 两两不同，所以存在 $i\in\{0,1,\cdots,p-2\}$，使得 $a^{p-1,\otimes}=a^{i,\otimes}$，即 $a^{p-1}-a^i=a^i(a^{p-1-i}-1)$ 可以被 p 整除，于是 $a^{p-1-i}-1$ 可以被 p 整除，即 $a^{p-1-i,\otimes}=1$. 若 $i\neq 0$，则 $p-1-i\in\{1,2,\cdots,p-2\}$，$a^{p-1-i,\otimes}\neq 1$，因此 $i=0$，$a^{p-1,\otimes}=1$.

记 $n=\log(p)_a b$，$m=\log(p)_a c$，$n+m=n\oplus m+l(p-1)$，其中 l 是整数，则 $b\otimes c=a^{n,\otimes}\otimes a^{m,\otimes}=a^{n+m,\otimes}=a^{n\oplus m+l(p-1),\otimes}=a^{n\oplus m,\otimes}\otimes a^{l(p-1),\otimes}=a^{n\oplus m,\otimes}$，即 $\log(p)_a(b\otimes c)=\log(p)_a b\oplus\log(p)_a c$.

(3)【证明】由题设和(2)的证明知

$$y_2=x\otimes b^{k,\otimes}=x\otimes(\overbrace{b\otimes b\otimes\cdots\otimes b}^{k})=x\otimes\overbrace{a^{n,\otimes}\otimes a^{n,\otimes}\otimes\cdots\otimes a^{n,\otimes}}^{k}=x\otimes\overbrace{a\otimes a\otimes a\otimes\cdots\otimes a}^{nk},$$

$$y_1^{n(p-2),\otimes}=\overbrace{y_1\otimes y_1\otimes\cdots\otimes y_1}^{n(p-2)}=\overbrace{a^{k,\otimes}\otimes a^{k,\otimes}\otimes\cdots\otimes a^{k,\otimes}}^{n(p-2)}=\overbrace{a^{p-2,\otimes}\otimes a^{p-2,\otimes}\otimes\cdots\otimes a^{p-2,\otimes}}^{nk}.$$

故 $y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}=x\otimes\overbrace{a\otimes a\otimes\cdots\otimes a}^{nk}\otimes\overbrace{a^{p-2,\otimes}\otimes a^{p-2,\otimes}\otimes\cdots\otimes a^{p-2,\otimes}}^{nk}$

$=x\otimes\overbrace{a^{p-1,\otimes}\otimes a^{p-1,\otimes}\otimes\cdots\otimes a^{p-1,\otimes}}^{nk}$.

由(2)的证明知 $a^{p-1,\otimes}=1$，所以 $y_2\otimes y_1^{n(p-2),\otimes}=x$.

2. (1)【证明】设 $m=10t+4$，$1\leqslant t\leqslant 9$ 且 t 为整数，

$\therefore m^2-16=(10t+4)^2-16=100t^2+80t+16-16=20(5t^2+4t)$.

$\because 1\leqslant t\leqslant 9$ 且 t 为整数，$\therefore 5t^2+4t$ 是正整数，

$\therefore m^2-16$ 一定是 20 的倍数.

(2)【解】$\because m=p^2-q^2$ 且 p,q 为正整数，$\therefore 10t+4=(p+q)(p-q)$.

当 $t=1$ 时，$10t+4=14=1\times14=2\times7$，没有满足条件的 p,q.

当 $t=2$ 时，$10t+4=24=1\times24=2\times12=3\times8=4\times6$，

此时满足条件的有 $\begin{cases}p+q=12,\\p-q=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p+q=6,\\p-q=4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}p=7,\\q=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=5,\\q=1,\end{cases}$ $\therefore H(m)=\dfrac{5}{7}$ 或 $H(m)=\dfrac{1}{5}$.

当 $t=3$ 时，$10t+4=34=1\times34=2\times17$，没有满足条件的 p,q.

当 $t=4$ 时，$10t+4=44=1\times44=2\times22=4\times11$，

此时满足条件的有 $\begin{cases}p+q=22,\\p-q=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=12,\\q=10,\end{cases}$ $\therefore H(m)=\dfrac{10}{12}=\dfrac{5}{6}$.

当 $t=5$ 时，$10t+4=54=1\times54=2\times27=3\times18=6\times9$，没有满足条件的 p,q.

当 $t=6$ 时，$10t+4=64=1\times64=2\times32=4\times16=8\times8$，

此时满足条件的有 $\begin{cases}p+q=32,\\p-q=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p+q=16,\\p-q=4,\end{cases}$

解得$\begin{cases}p=17,\\q=15\end{cases}$或$\begin{cases}p=10,\\q=6,\end{cases}$ $\therefore H(m)=\dfrac{15}{17}$或$H(m)=\dfrac{3}{5}$.

综上,小于 70 的"好数"中,所有"友好数对"的 $H(m)$ 的最大值为$\dfrac{15}{17}$.

3. (1)【**解**】因为$(1,1,0)\cdot(1,1,0)=1\times1+1\times1+0\times0=2$,$(1,0,1)\cdot(1,0,1)=(0,1,1)\cdot(0,1,1)=2$,

$(1,1,0)\cdot(1,0,1)=1\times1+1\times0+0\times1=1$,$(1,1,0)\cdot(0,1,1)=(1,0,1)\cdot(0,1,1)=1$,

所以集合 $A=\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$具有性质 $T(3,2)$.

(2)【**解**】当 $n=4$ 时,集合 A 中的元素个数为 4. 由题知,$p\in\{0,1,2,3,4\}$.

假设集合 A 具有性质 $T(4,p)$,

①当 $p=0$ 时,$A=\{(0,0,0,0)\}$,不具有性质 $T(4,0)$,矛盾.

②当 $p=1$ 时,$A=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$,不具有性质 $T(4,1)$,矛盾.

③当 $p=2$ 时,$A\subseteq\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$.

因为$(1,1,0,0)$和$(0,0,1,1)$至多有一个在 A 中,$(1,0,1,0)$和$(0,1,0,1)$至多有一个在 A 中,

$(1,0,0,1)$和$(0,1,1,0)$至多有一个在 A 中,故集合 A 中的元素个数小于 4,矛盾.

④当 $p=3$ 时,$A=\{(1,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1),(0,1,1,1)\}$,不具有性质 $T(4,3)$,矛盾.

⑤当 $p=4$ 时,$A=\{(1,1,1,1)\}$,不具有性质 $T(4,4)$,矛盾.

综上,不存在具有性质 $T(4,p)$ 的集合 A.

(3)【**证明**】记 $c_j=t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}(j=1,2,\cdots,n)$,则 $c_1+c_2+\cdots+c_n=np$.

若 $p=0$,则 $A=\{(0,0,\cdots,0,\cdots)\}$,不具有性质 $T(n,0)$,矛盾. 若 $p=1$,则 $A=\{(1,0,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,0,\cdots,1)\}$,不具有性质 $T(n,1)$,矛盾. 故 $p\geqslant2$.

假设存在 j 使得 $c_j\geqslant p+1$,不妨设 $j=1$,即 $c_1\geqslant p+1$.

当 $c_1=n$ 时,有 $c_j=0$ 或 $c_j=1(j=2,3,\cdots,n)$成立,

所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 中分量为 1 的个数至多有 $n+(n-1)=2n-1<2n\leqslant np$.

当 $p+1\leqslant c_1<n$ 时,不妨设 $t_{11}=t_{21}=\cdots=t_{p+1,1}=1,t_{n1}=0$,

因为 $\alpha_n\cdot\alpha_n=p$,所以 α_n 的各分量有 p 个 1,不妨设 $t_{n2}=t_{n3}=\cdots=t_{n,p+1}=1$.

由 $i\neq j$ 时,$\alpha_i\cdot\alpha_j=1$ 可知,$\forall q\in\{2,3,\cdots,p+1\}$,$t_{1q},t_{2q},\cdots,t_{p+1,q}$ 中至多有一个 1,即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p+1}$ 的前 $p+1$ 个分量中,至多含有 $p+1+p=2p+1$ 个 1.

又 $\alpha_i\cdot\alpha_n=1(i=1,2,\cdots,p+1)$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{p+1}$ 的前 $p+1$ 个分量中,含有$(p+1)+(p+1)=2p+2$ 个 1,矛盾,

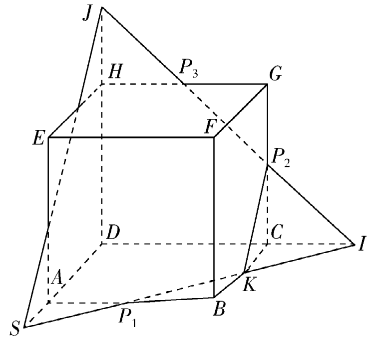
所以 $c_j\leqslant p(j=1,2,\cdots,n)$.

因为 $c_1+c_2+\cdots+c_n=np$,所以 $c_j=p(j=1,2,\cdots,n)$,

所以 $t_{1j}+t_{2j}+\cdots+t_{nj}=p(j=1,2,\cdots,n)$.

4.【解】(1)如图,作直线 P_2P_3 交 DC 的延长线于点 I,交 DH 的延长线于点 J;连接 IP_1 并延长,交 BC 于点 K,交 DA 的延长线于点 S;连接 JS,则平面 JSI 即为平面 $P_1P_2P_3$.

因为几何体 $ABCD-EFGH$ 是正方体,所以棱 AE 与平面 $P_1P_2P_3$ 所成的角即 P_2C 与平面 P_2KI 所成的角.



因为 P_1 是 AB 的中点,P_2 是 CG 的中点,P_3 是 HG 的中点,

正方体 $ABCD-EFGH$ 的棱长为 2,

所以 $P_2C=CK=CI=1$,$P_2I=P_2K=KI=\sqrt{2}$,

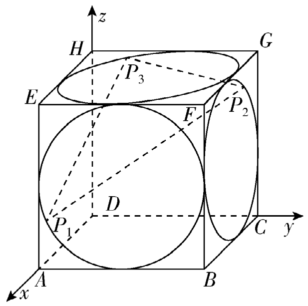
所以三棱锥 $C-P_2IK$ 是正三棱锥,

且三棱锥 P_2-CIK 的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{1}{6}$.

设点 C 到平面 P_2IK 的距离为 h,则三棱锥 $C-P_2IK$ 的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}h=\frac{1}{6}$,解得 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

设 P_2C 与平面 P_2KI 所成的角为 θ,则 $\sin\theta=\frac{h}{P_2C}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(2)如图,以点 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DH}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立空间直角坐标系.



根据题意,可设 $P_1(2,1+\cos\alpha,1+\sin\alpha)$,$P_2(1+\sin\beta,2,1+\cos\beta)$,$P_3(1+\cos\gamma,1+\sin\gamma,2)$,

则 $P_1P_2=\sqrt{(1-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-1)^2+(\sin\alpha-\cos\beta)^2}$,

$P_2P_3=\sqrt{(\sin\beta-\cos\gamma)^2+(1-\sin\gamma)^2+(\cos\beta-1)^2}$,

$P_3P_1=\sqrt{(\cos\gamma-1)^2+(\sin\gamma-\cos\alpha)^2+(1-\sin\alpha)^2}$,

且 P_1P_2,P_2P_3,P_3P_1 表达式的结构相同.

因为$(1-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-1)^2+(\sin\alpha-\cos\beta)^2\geqslant(1-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-1)^2\geqslant\frac{1}{2}[(1-\sin\beta)-(\cos\alpha-1)]^2=\frac{1}{2}(2-\sin\beta-\cos\alpha)^2$,

所以 $P_1P_2\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(2-\sin\beta-\cos\alpha)$.

同理，$P_2P_3\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(2-\sin\gamma-\cos\beta)$，$P_3P_1\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}(2-\sin\alpha-\cos\gamma)$.

所以 $P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1\geqslant 3\sqrt{2}-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 3\sqrt{2}-3$，

当且仅当 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{4}$时，等号成立.

因为$(1-\sin\beta)^2+(\cos\alpha-1)^2+(\sin\alpha-\cos\beta)^2=4-2\sin\beta-2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\beta$，

$(\sin\beta-\cos\gamma)^2+(1-\sin\gamma)^2+(\cos\beta-1)^2=4-2\sin\gamma-2\cos\beta-2\sin\beta\cos\gamma$，

$(\cos\gamma-1)^2+(\sin\gamma-\cos\alpha)^2+(1-\sin\alpha)^2=4-2\sin\alpha-2\cos\gamma-2\sin\gamma\cos\alpha$，

$\sin\alpha\geqslant-1$，$\sin\beta\geqslant-1$，$\sin\gamma\geqslant-1$，$\cos\alpha\geqslant-1$，$\cos\beta\geqslant-1$，$\cos\gamma\geqslant-1$，

所以 $P_1P_2^2+P_2P_3^2+P_3P_1^2=12-2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha)$

$=18-2[(1+\sin\alpha)(1+\cos\beta)]-2[(1+\sin\beta)(1+\cos\gamma)]-2[(1+\sin\gamma)(1+\cos\alpha)]\leqslant 18$.

因为$(P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1)^2\leqslant 3(P_1P_2^2+P_2P_3^2+P_3P_1^2)\leqslant 54$，

所以 $P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1\leqslant 3\sqrt{6}$，当 $\alpha=\beta=\gamma=\pi$ 时，等号成立.

综上，$P_1P_2+P_2P_3+P_3P_1$ 的最小值是 $3\sqrt{2}-3$，最大值是 $3\sqrt{6}$.