专题 4　导数及其应用

考点 13　导数的运算与几何意义

1. D　【解析】由题意知 $f'(x)=e^x-3x^2+2f'(0)x-f'(0)$，所以 $f'(0)=1-f'(0)$，解得 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$，故选 D.

2. 2　【解析】由题可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(1-\cos x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(e^x-e^{-x})'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

3. C　【解析】因为 $f(x)=xe^{2x-1}$，所以 $f'(x)=e^{2x-1}+2xe^{2x-1}=(2x+1)e^{2x-1}$. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线斜率为 k，则 $k=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2$，又 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$，故所求切线方程为 $y=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2}$，化简得 $4x-2y-1=0$. 故选 C.

4. $x-2y-1=0$　【解析】由题意知，$f(1)=0$，则切点为 $(1,0)$，$f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2+1}{x(x+1)^2}$ $(x>0)$，所以切线的斜率为 $f'(1)=\dfrac{1}{2}$，故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-0=\dfrac{1}{2}(x-1)$（提示：曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$），即 $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$，即 $x-2y-1=0$.

5. $y=0$（答案不唯一）　【解析】由题易得，切线斜率一定存在，令 $y=f(x)$，则 $f(x)=x^2(x+1)=x^3+x^2$，所以 $f'(x)=3x^2+2x$，

不妨设直线 l 与曲线 $y=f(x)$ 的切点为 (x_0,y_0)，斜率为 k，

则 $\begin{cases}k=f'(x_0)=3x_0^2+2x_0,\\ k=\dfrac{y_0-0}{x_0-\dfrac{3}{5}},\\ y_0=x_0^3+x_0^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=0,\\ y_0=0,\\ k=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=1,\\ y_0=2,\\ k=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-\dfrac{3}{5},\\ y_0=\dfrac{18}{125},\\ k=-\dfrac{3}{25}.\end{cases}$

当 $x_0=0,y_0=0,k=0$ 时，直线 l 的方程为 $y=0$；

当 $x_0=1,y_0=2,k=5$ 时，直线 l 的方程为 $y-2=5(x-1)$，即 $5x-y-3=0$；

当 $x_0=-\dfrac{3}{5},y_0=\dfrac{18}{125},k=-\dfrac{3}{25}$ 时，直线 l 的方程为 $y-\dfrac{18}{125}=-\dfrac{3}{25}\times\left(x+\dfrac{3}{5}\right)$，即 $15x+125y-9=0$.

综上，直线 l 的方程为 $y=0$ 或 $5x-y-3=0$ 或 $15x+125y-9=0$.

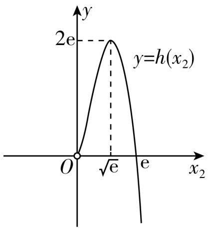
6. C　【解析】设直线与函数 $g(x)=x^2$ 的图象的切点为 (x_1,x_1^2)，由 $g'(x)=2x$，可知该直线的斜率为 $2x_1$，即该直线的方程为 $y-x_1^2=2x_1(x-x_1)$，即 $y=2x_1x-x_1^2$.

设直线与 $f(x)=a\ln x$ 的图象的切点为 $(x_2,a\ln x_2)$，由 $f'(x)=\dfrac{a}{x}$，可知该直线的斜率为 $\dfrac{a}{x_2}$，即该直线的方程为 $y-a\ln x_2=\dfrac{a}{x_2}(x-x_2)$，即 $y=\dfrac{a}{x_2}x+a(\ln x_2-1)$.

∵ 仅存在一条直线与函数 $f(x)=a\ln x(a>0)$ 和 $g(x)=x^2$ 的图象均相切，∴ $\begin{cases}2x_1=\dfrac{a}{x_2},\\ a(\ln x_2-1)=-x_1^2,\end{cases}$ 即 $a=4x_2^2-4x_2^2\ln x_2$.

令 $h(x_2)=4x_2^2-4x_2^2\ln x_2(x_2>0)$，则 $h'(x_2)=8x_2-8x_2\ln x_2-4x_2=4x_2(1-2\ln x_2)$.

当 $4x_2(1-2\ln x_2)>0$，即 $0<x_2<\sqrt{e}$ 时，$h(x_2)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，当 $4x_2(1-2\ln x_2)<0$，即 $x_2>\sqrt{e}$ 时，$h(x_2)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减，则 $h(x_2)$ 在 $x_2=\sqrt{e}$ 处取得最大值，$h(\sqrt{e})=4e-4e\times\dfrac{1}{2}=2e$，作出 $h(x_2)$ 大致图象如图所示.



∵ 切线只有一条，即 a 的值唯一，且 $a>0$，

∴ 结合图象可知 $a=2e$，故选 C.

7. C 【解析】设直线 $x+y+m=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 $(a,-a-m)$，与曲线 $y=g(x)$ 相切于点 $(b,-b-m)$，$b>0$.

由 $g(x)=x^2-3\ln x$ 知 $g'(x)=2x-\dfrac{3}{x}$，又两曲线的公切线斜率为 -1，则 $2b-\dfrac{3}{b}=-1$，解得 $b=1$ 或 $b=-\dfrac{3}{2}$（舍去）.

所以 $1-3\ln 1=-1-m$，解得 $m=-2$.

由 $f(x)=x^3+nx-52$ 知 $f'(x)=3x^2+n$，又两曲线的公切线斜率为 -1，则 $3a^2+n=-1$，即 $n=-3a^2-1$，故 $a^3-(3a^2+1)a-52=-a+2$，整理得 $a^3=-27$，故 $a=-3$，所以 $n=-3a^2-1=-28$，故 $m-n=26$. 故选 C.

8. AB 【解析】对于 A，因为 $y=\ln x$，所以 $y'=\dfrac{1}{x}$，又 $P(x_1,\ln x_1)$，

所以曲线 $y=\ln x$ 在点 P 处的切线的斜率 $k_1=\dfrac{1}{x_1}$，

切线方程为 $y-\ln x_1=\dfrac{1}{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\dfrac{1}{x_1}x-1+\ln x_1$.

因为 $y=e^x$，所以 $y'=e^x$，又 $Q(x_2,e^{x_2})$，所以曲线 $y=e^x$ 在点 Q 处的切线的斜率 $k_2=e^{x_2}$，切线方程为 $y-e^{x_2}=e^{x_2}(x-x_2)$，即 $y=e^{x_2}x+e^{x_2}(1-x_2)$，由题意可知两切线重合，

所以 $\begin{cases}\dfrac{1}{x_1}=e^{x_2},\\ \ln x_1-1=e^{x_2}(1-x_2),\end{cases}$ 所以 $x_1e^{x_2}=1$，即 $x_1y_2=1$，故 A 正确；

对于 B，当 $x_1=1$ 时，两切线不重合，不符合题意，所以 $x_1\neq1$，

所以 $\dfrac{1}{x_1}(1-x_2)=e^{x_2}(1-x_2)=\ln x_1-1=\ln e^{-x_2}-1=-x_2-1$，所以 $-x_1x_2-x_1=1-x_2$，所以 $x_1x_2-x_2+x_1+1=0$，则 $\dfrac{x_1+1}{x_1-1}+x_2=0$，故 B 正确；

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=x_1(-\ln x_1)+(\ln x_1)e^{x_2}=-x_1\ln x_1+\dfrac{\ln x_1}{x_1}=\left(\dfrac{1}{x_1}-x_1\right)\ln x_1$，

当 $0<x_1<1$ 时，$\frac{1}{x_1}-x_1>0$，$\ln x_1<0$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}<0$，当 $x_1>1$ 时，$\frac{1}{x_1}-x_1<0$，$\ln x_1>0$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}<0$，所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}<0$，故 C 错误；

对于 D，设 $f(x)=e^x(1-x)$，$x<0$，则 $f'(x)=-xe^x>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，当 $x\to0$ 时，$f(x)\to1$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to0$，所以 $0<f(x)<1$，所以当 $x_2<0$ 时，$0<e^{x_2}(1-x_2)<1$，

所以 $0<\ln x_1-1<1$，所以 $e<x_1<e^2$，

记 $g(x)=x-\ln x(e<x<e^2)$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 (e,e^2) 上单调递增，则 $g(x)<g(e^2)=e^2-2$，所以 $x_1+x_2=x_1-\ln x_1<e^2-2$，故 D 错误.

9. $\frac{e}{2}$ 【解析】由题易知 $a>0$. 设两曲线的交点为 $P(x_0,y_0)(x_0>0)$，$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，$g'(x)=\frac{a}{x}(x>0)$，则由题意得 $\begin{cases}\sqrt{x_0}=a\ln x_0,\\ \frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{a}{x_0}\end{cases}$（关键：解决导数与切线有关的问题，关键点在于切点和斜率，联络点在于切点的横坐标，以此建立方程组，求得未知参数的值），两式相除得 $2x_0=x_0\ln x_0$. 因为 $x_0>0$，所以 $\ln x_0=2$，解得 $x_0=e^2$. 代入 $\sqrt{x_0}=a\ln x_0$ 得 $e=2a$，解得 $a=\frac{e}{2}$.

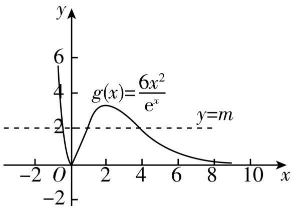
10. C 【解析】设切点横坐标为 $x_0(x_0>0)$，切线斜率为 k，则 $k=f'(x_0)=1-\frac{a}{x_0}$（提示：切点处的导函数值即为该切线的斜率）.

当 $a\leqslant0$ 时，$k=1-\frac{a}{x_0}>0$，设两条切线的斜率分别为 k_1,k_2，故不存在 $k_1k_2=-1$；当 $a>0$ 时，满足 $\begin{cases}1-a<0,\\ 1-\frac{a}{6}>0,\\ (1-a)\left(1-\frac{a}{6}\right)<-1,\end{cases}$ 得 $3<a<4$，

故选 C.

11. D 【解析】因为曲线 $y=f(x)$ 在不同的三点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，$(x_3,f(x_3))$ 处的切线均平行于 x 轴，所以 $f'(x)=me^x-6x^2=0$ 有三个不等实根，即 $m=\frac{6x^2}{e^x}$ 有三个不同的解. 令 $g(x)=\frac{6x^2}{e^x}$，则 $g(x)\geqslant0$，$g'(x)=\frac{12x-6x^2}{e^x}$. 当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，$g'(x)<0$，当 $0<x<2$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,+\infty)$ 上单调递减，在 $(0,2)$ 上单调递增，且 $g(0)=0$，$g(2)=\frac{24}{e^2}$，画出函数 $g(x)$ 的大致图象，如图所示.

突破点



方程 $m=\frac{6x^2}{e^x}$ 有三个不同的解，即直线 $y=m$ 与函数 $g(x)=\frac{6x^2}{e^x}$ 的图象有三个交点，由图象可得 $m\in\left(0,\frac{24}{e^2}\right)$，故选 D.

考点 14　导数与函数的单调性、极值、最值

1. A　【解析】根据题意，$\tan x\cdot f'(x)>f(x)$，即 $\tan x\cdot f'(x)-f(x)>0$，即 $\frac{\sin x}{\cos x}\cdot f'(x)-f(x)>0$，即 $\frac{1}{\cos x}\cdot[\sin x\cdot f'(x)-\cos x\cdot f(x)]>0$，所以 $\frac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot\left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]'>0$，分析可得，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\cos x>0$，$\left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]'>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$\cos x<0$，$\left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]'<0$，所以函数 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，所以 $\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}<\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}<\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$，即 $2f\left(\frac{\pi}{6}\right)<\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)<\frac{2\sqrt{3}}{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，故 $a<b<c$，故选 A.

2. ABD　【解析】$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-1$，则 $f'(x)=e^x-x$，

令 $g(x)=e^x-x$，则 $g'(x)=e^x-1$.

令 $g'(x)<0$，得 $x<0$，令 $g'(x)>0$，得 $x>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)\geqslant g(0)=1$，即 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $f(0)=0$.

若 $a+b>0$，则 $a>-b$，所以 $f(a)>f(-b)$，故 B 正确；

$f(b)+f(-b)=e^b-\frac{1}{2}b^2-1+\left(e^{-b}-\frac{1}{2}b^2-1\right)=e^b+e^{-b}-b^2-2$，

令 $h(b)=e^b+e^{-b}-b^2-2$，则 $h'(b)=e^b-e^{-b}-2b$，令 $u(b)=h'(b)$，

则 $u'(b)=e^b+e^{-b}-2\geqslant 0$，当且仅当 $e^b=e^{-b}$，即 $b=0$ 时，等号成立，

所以 $u(b)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，而 $h'(0)=u(0)=0$，

故 $h(b)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(b)\geqslant h(0)=0$，所以 $f(b)+f(-b)\geqslant 0$，即 $f(a)+f(b)\geqslant f(a)-f(-b)>0$，故 A 正确；

若 $f(a)+f(b)<0$，则 $f(a)<-f(b)\leqslant f(-b)$，所以 $a<-b$，即 $a+b<0$，故 D 正确；

设 $f(c)=-f(b)$，若 $c<a<-b$，则 $f(c)=-f(b)<f(a)$，满足 $f(a)+f(b)>0$，但 $a+b<0$，故 C 错误.

3. BC　【解析】对于 A，因为 $11^t=12$，所以 $t=\log_{11}12$. 令 $f(x)=$

$\log_x(x+1)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$，$x>1$（提示：观察所要比较的式子结构，构造相应函数），则 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{\ln x}{x+1}-\dfrac{\ln(x+1)}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}$. 因为 $x>1$，所以 $f'(x)=\dfrac{x\ln x-(x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)(\ln x)^2}<0$ 恒成立，故 $f(x)=\log_x(x+1)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $\log_{11}12>\log_{12}13$，则 $a=12^t-13=12^{\log_{11}12}-13>12^{\log_{12}13}-13=0$，故 A 错误.

对于 B，由 A 选项的分析可知，$\log_{10}11>\log_{11}12$，$b=10^t-11=10^{\log_{11}12}-11<10^{\log_{10}11}-11=0$，故 B 正确.

对于 C，D，由 A，B 选项的分析可知 $a>0>b$，故 C 正确，D 错误. 综上所述，故选 BC.

4. B 【解析】函数 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-(b-1)x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且其导函数为 $g'(x)=\dfrac{1}{x}+x-(b-1)$. 由 $g(x)$ 存在单调递减区间知 $g'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，即 $\dfrac{1}{x}+x-(b-1)<0$ 有解. 因为函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立. 要使 $\dfrac{1}{x}+x-(b-1)<0$ 有解，只需 $2<b-1$，即 $b>3$，所以实数 b 的取值范围是 $(3,+\infty)$.

5.【解】(1) ∵ 点 $(1,f(1))$ 在切线 $x-y+1=0$ 上，∴ $f(1)=3-a+b=2$，①

$f'(x)=3x^2-2ax+b$，$f'(1)=3-2a+b=1$，②

联立①②解得 $a=1$，$b=0$.

(2) 依题意有 $f'(x)=3x^2-2ax+b$，$f'(1)=3-2a+b=0$，$b=2a-3$，且方程 $3x^2-2ax+b=0$ 的根的判别式 $\Delta=4a^2-12(2a-3)=4(a^2-6a+9)>0$，∴ $a\neq 3$.

又 $\dfrac{f(x)}{x}=x^2-ax+\dfrac{2}{x}+2a-3$，$\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=2x-a-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-ax^2-2}{x^2}$，

则当 $x\in[2,3]$ 时，$2x^3-ax^2-2\geqslant 0$ 且不恒为 0（提示：若在某个子区间上，函数单调递增，则该函数的导函数值在该子区间上大于等于 0 恒成立，且不恒为 0，解题时易漏掉等于 0 情况），即 $a\leqslant\dfrac{2x^3-2}{x^2}$. 令 $g(x)=\dfrac{2x^3-2}{x^2}$，$2\leqslant x\leqslant 3$，则 $g'(x)=2+\dfrac{4}{x^3}>0$，∴ $g(x)$ 单调递增，∴ $a\leqslant g(x)_{\min}=g(2)=\dfrac{7}{2}$，又 $a\neq 3$，∴ 实数 a 的取值范围为 $(-\infty,3)\cup\left(3,\dfrac{7}{2}\right]$.

6. A 【解析】由题意得 $f'(x)=3x^2+2ax-1$，故 $f'(1)=3+2a-1=4$，则 $a=1$，所以 $f'(x)=3x^2+2x-1$. 令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=\dfrac{1}{3}$. 当 $x<-1$ 或 $x>\dfrac{1}{3}$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<\dfrac{1}{3}$ 时，$f'(x)<0$. 故函

数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 时取得极大值 $f(-1)=-1+1+1=1$，故选 A.

7. D 【解析】由题图知，当 $x\in(-\infty,-3)$ 时，$y>0$，$(x-1)^3<0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(-3,1)$ 时，$y<0$，$(x-1)^3<0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,3)$ 时，$y>0$，$(x-1)^3>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$y<0$，$(x-1)^3>0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. 所以函数有极小值 $f(-3)$ 和极大值 $f(3)$. 故选 D.

8. C 【解析】令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}$（关键：根据给出含有导数式子的等式，利用导数的运算法则构造出相应函数），则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}=\dfrac{x^2e^{2x}}{e^x}=x^2e^x$，故 $f'(x)=f(x)+x^2e^{2x}=e^xg(x)+x^2e^{2x}=e^x[g(x)+x^2e^x]$. 令 $h(x)=g(x)+x^2e^x$，所以 $h'(x)=g'(x)+(x^2+2x)e^x=x^2e^x+(x^2+2x)e^x=2x(x+1)e^x$，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in(-1,0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)$ 的极小值为 $h(0)=g(0)=\dfrac{f(0)}{e^0}=0$，$h(x)$ 的极大值为 $h(-1)=g(-1)+\dfrac{1}{e}>h(0)=0$，所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$h(x)$ 至多有一个变号零点，且在 $(-1,+\infty)$ 上无变号零点. 当 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上没有变号零点时，则 $h(x)\geqslant0$，$f'(x)=e^xh(x)\geqslant0$，$f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 无极值点，当 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上有一个变号零点时，可设为 x_0，则当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$h(x)<0$，$f'(x)=e^xh(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)\geqslant0$，$f'(x)=e^xh(x)\geqslant0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)$ 有且只有一个极小值点 x_0，无极大值点. 综上，$f(x)$ 最多有一个极小值点，无极大值点. 故选 C.

9. $(0,1)\cup(1,e^{\frac{1}{e}})$ 【解析】令 $f'(x)=a^x\ln a-\ln x=0$，得 $e^{x\ln a}(x\ln a)=(\ln x)e^{\ln x}(x>0)$（关键：通过对数与指数的运算转化成等式两边有相同结构的式子）. 令 $g(m)=me^m$，即 $g(x\ln a)=g(\ln x)$，有 $g'(m)=(1+m)e^m$. 当 $m<-1$ 时，$g'(m)<0$，$g(m)$ 单调递减；当 $m>-1$ 时，$g'(m)>0$，$g(m)$ 单调递增. 当 $a>1$ 时，$x\ln a>0$. 又 $g(m)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且当 $m\in(0,+\infty)$ 时，$g(m)>0$，当 $m\in(-\infty,0)$ 时，$g(m)<0$. 故由 $g(x\ln a)=g(\ln x)>0$，可得 $\ln x>0$，即 $x>1$，且 $x\ln a=\ln x$，即 $\ln a=\dfrac{\ln x}{x}(x>1)$ 有零点. 令 $h(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>1)$，则 $h'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}(x>1)$，当 $1<x<e$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x>e$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以当 $x=e$ 时，$h(x)$ 取得最大值 $\dfrac{1}{e}$，所以 $0<\ln a<\dfrac{1}{e}$，$1<a<e^{\frac{1}{e}}$. 当 $0<a<1$ 时，若 $x\to0$，则 $f'(x)\to+\infty$，若 $x\to+\infty$，则 $f'(x)\to$

$-\infty$，此时 $f'(x)$ 必存在一个零点，且这个零点的左边导函数值为正数，右边导函数值为负数，该零点即为极大值点（**易错：**在判断函数的极值点时一定要注意极值点左、右的导函数值符号一定不同，即极值点左、右的函数单调性不同），所以 a 的取值范围是 $(0,1)\cup(1,e^{\frac{1}{e}})$.

10.【解】(1) $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=ae^x-2x$，由题意知 $f'(0)=0$，解得 $a=0$，

经验证，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，

此时 $g(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$，定义域为 $\mathbf{R}$，且 $g'(x)=3x^2-3x$，

令 $g'(x)>0$，得 $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$，令 $g'(x)<0$，得 $x\in(0,1)$，

所以函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$.

(2) $f'(x)=ae^x-2x$，令 $h(x)=f'(x)=ae^x-2x$，$x\in\mathbf{R}$，则 $h'(x)=ae^x-2$.

①当 $a<0$ 时，$h'(x)<0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，$f'(x)$ 单调递减.

又因为 $f'(a)=a(e^a-2)>0$，$f'(0)=a<0$，所以存在 $x_0\in(a,0)$，使得 $f'(x_0)=0$，

易知 x_0 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

$g'(x)=3x^2-(a+3)x+a=(3x-a)(x-1)$. 令 $g'(x)=0$，解得 $x=\frac{a}{3}$ 或 $x=1$，

易知 $g(x)$ 的极大值点为 $\frac{a}{3}$，极小值点为 1，

由题意可知，$x_0<\frac{a}{3}$ 成立，则有 $f'\left(\frac{a}{3}\right)<0$，解得 $3\ln\frac{2}{3}<a<0$.

②当 $a=0$ 时，由(1)及①可知，0 既是函数 $f(x)$ 的极大值点，又是 $g(x)$ 的极大值点，不符合题意，所以 $a=0$ 舍去.

③当 $a>0$ 时，$h'(x)>0$ 的解集为 $\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$，$h'(x)<0$ 的解集为 $\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$，

所以 $f'(x)$ 在 $\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$ 上单调递减.

因为 $f(x)$ 有极值点，且当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$，当 $x\to-\infty$ 时，$f'(x)\to-\infty$，所以 $f'(x)$ 有两个零点，

所以 $f'\left(\ln\frac{2}{a}\right)=2-2\ln\frac{2}{a}<0$，解得 $0<a<\frac{2}{e}$，

$f'\left(\frac{2}{a}\right)=ae^{\frac{2}{a}}-\frac{4}{a}$. 令 $\frac{2}{a}=t$，$t\in(e,+\infty)$，则 $f'\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{2(e^t-t^2)}{t}$，

令 $m(t)=e^t-t^2$，

因为当 $a=1$ 时，$f'(x)=e^x-2x>0$ 恒成立，所以 $m'(t)=e^t-2t>0$，

即 $m(t)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $m(e)>0$，所以 $m(t)>0$ 在 $(e,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f'\left(\frac{2}{a}\right)>0$，

又因为 $f'(1)=ae-2<0$，

所以存在 $x_1\in\left(1,\frac{2}{a}\right)$，使得 $f'(x_1)=0$，即 x_1 是函数 $f(x)$ 的极值点，

易知 1 是 $g(x)$ 的极值点，而 $x_1>1$，不符合题意，

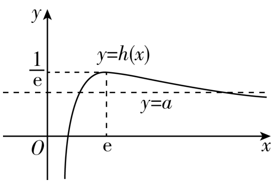
所以 $a>0$ 舍去.

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(3\ln\frac{2}{3},0\right)$.

11. B 【解析】因为 $f(-x)=e^{|x|}+\cos x+1=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=e^x+\cos x+1$，$f'(x)=e^x-\sin x$.

易知当 $x\geqslant 0$ 时，$e^x\geqslant 1$，$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，则 $f'(x)=e^x-\sin x\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增. 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,0)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(-\pi)=f(\pi)=e^{\pi}$，$f(x)_{\min}=f(0)=3$.

12. $\frac{1}{e}$ 【解析】由题意知 $f(x)=ax+xe^{-ax}-\ln x-1=e^{\ln x-ax}+ax-\ln x-1(x>0)$. 令 $t=\ln x-ax$，原函数变为 $y=e^t-t-1$. 令 $g(t)=e^t-t-1$（方法：构造函数并利用其单调性解决问题时，根据函数与方程的思想，利用数形结合求参数的值或取值范围是求解此类问题常用的方法，要掌握函数构造过程中需要的变形技巧），则 $g'(t)=e^t-1$，易知当 $t<0$ 时，$g'(t)<0$；当 $t>0$ 时，$g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即对于 $\forall t\in\mathbf{R}$，$g(t)\geqslant g(0)=0$，$g(t)_{\min}=0$，所以当 $t=\ln x-ax=0$ 时，y 取得最小值 0，即只需方程 $a=\frac{\ln x}{x}$ 有解即可，即直线 $y=a$ 与函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的图象有交点（关键：根据方程有解求参数的值或取值范围问题，关键是进行由方程向函数的转化，把方程问题转换为函数问题）. 令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,e)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，故 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$，在同一平面直角坐标系中画出直线 $y=a$ 与函数 $h(x)$ 的大致图象如图所示.



由图可知当 $a\leqslant\frac{1}{e}$ 时满足题意，所以实数 a 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

13.【解】(1) $\because f(x)=e^x-2x-1$，$\therefore f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln 2$.

当 $x\in(-1,\ln 2)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln 2,2)$

时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

$\therefore$ 当 $x=\ln 2$ 时，$f(x)_{\min}=1-2\ln 2$.

又$\because f(-1)=e^{-1}+1$，$f(2)=e^2-5$，$\therefore f(2)>f(-1)$，

$\therefore f(x)_{\max}=e^2-5$，$f(x)_{\min}=1-2\ln 2$.

(2) $f'(x)=e^x-2a$，当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为 0，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无最小值，不满足题意.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\ln(2a)$.

当 $x<\ln(2a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>\ln(2a)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

$\therefore$ 当 $x=\ln(2a)$ 时，$f(x)_{\min}=2a[1-\ln(2a)]-1=0$.

令 $h(x)=x(1-\ln x)-1\ (x>0)$，$h'(x)=-\ln x$，

令 $h'(x)=0$，则 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增；

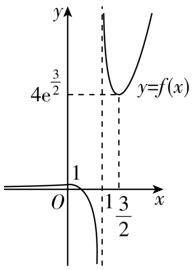
当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=0$，$\therefore 2a=1$，

即 $a=\dfrac{1}{2}$，故实数 a 的值为$\dfrac{1}{2}$.

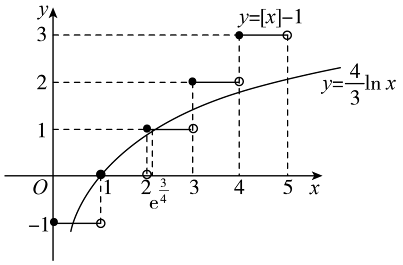
考点 15　导数与函数的零点

1. A　【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x-1)e^x-(2x-1)e^x}{(x-1)^2}=\dfrac{xe^x(2x-3)}{(x-1)^2}$. 令 $f'(x)>0$，可得 $x<0$ 或 $x>\dfrac{3}{2}$；令 $f'(x)<0$，可得 $0<x<1$ 或 $1<x<\dfrac{3}{2}$. 因此函数 $f(x)=\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，且当 $x<0$ 时，$f(x)>0$，当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取极大值 $f(0)=1$，当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 取极小值 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}$. 又因为当 $x\to 1^+$ 时，$y\to+\infty$；当 $x\to 1^-$ 时，$y\to-\infty$，故作出函数 $f(x)=\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 的大致图象如图所示.



因为 $1<4e<4e^{\frac{3}{2}}$，所以直线 $y=4e$ 与 $f(x)=\dfrac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 的图象无交点，故方程 $f(x)=4e$ 无解，故选 A.

2. C　【解析】令 $f(x)=4\ln x-3[x]+3=0\ (x>0)$，则$\dfrac{4}{3}\ln x=[x]-1$，故函数 $f(x)$ 的零点问题转化为 $y=\dfrac{4}{3}\ln x$ 与 $y=[x]-1$ 的图象的交点问题，且 $e^3>16$，即 $e^{\frac{3}{4}}>2$，其大致图象如图所示.



由图可得，当 $0<x<5$ 时，$y=\frac{4}{3}\ln x$ 与 $y=[x]-1$ 的图象有 3 个交点，即当 $0<x<5$ 时，$f(x)$ 有 3 个零点；

当 $x\geqslant5$ 时，$f(x)=4\ln x-3[x]+3<4\ln x-3(x-1)+3=4\ln x-3x+6$. 令 $g(x)=4\ln x-3x+6(x\geqslant5)$，则 $g'(x)=\frac{4-3x}{x}<0$ 在 $[5,+\infty)$ 上恒成立，则 $g(x)$ 在 $[5,+\infty)$ 上单调递减，故 $g(x)\leqslant g(5)=4\ln 5-9=\ln\frac{625}{e^9}<0$，

可得当 $x\geqslant5$ 时，$f(x)<g(x)<0$，即当 $x\geqslant5$ 时，函数 $f(x)$ 无零点.

综上所述，函数 $f(x)$ 有 3 个零点. 故选 C.

3. C 【**解析**】函数 $f(x)=a\ln x+ax-xe^x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，求导得 $f'(x)=(x+1)\left(\frac{a}{x}-e^x\right)$.

令 $g(x)=\frac{a}{x}-e^x$，$x>0$，显然 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，而 $a>e$，$g(a)=1-e^a<0$，$g(1)=a-e>0$，

则存在 $x_0\in(1,a)$，使得 $g(x_0)=0$，即 $\frac{a}{x_0}=e^{x_0}$，当 $0<x<x_0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$；当 $x>x_0$ 时，$g(x)<0$，即 $f'(x)<0$，因此，$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，

$f(x)_{\max}=f(x_0)=a\ln x_0+ax_0-x_0e^{x_0}=a(\ln x_0+x_0-1)>0$.

而 $f\left(\frac{1}{a}\right)=a\ln\frac{1}{a}+1-\frac{e^{\frac{1}{a}}}{a}=-a\ln a+1-\frac{e^{\frac{1}{a}}}{a}<-a+1-\frac{e^{\frac{1}{a}}}{a}<0$，则存在 $x_1\in\left(\frac{1}{a},x_0\right)$ 使得 $f(x_1)=0$，即 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上存在唯一零点.

又 $f(a)=a(\ln a+a-e^a)$，令 $h(x)=\ln x+x-e^x$，$x>e$，$h'(x)=\frac{1}{x}+1-e^x<0$，则 $h(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，当 $x\to e$ 时，$h(x)\to1+e-e^e<1+e-e^2<0$，则当 $x>e$ 时，$h(x)<0$，

于是得 $f(a)<0$，则存在 $x_2\in(x_0,a)$ 使得 $f(x_2)=0$，即 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上存在唯一零点.

综上，函数 $f(x)=a\ln x+ax-xe^x$ 的零点个数为 2. 故选 C.

4. 【**解**】(1) 由函数 $f(x)=ax^2-ax-\frac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}$，可得 $f'(x)=2ax-a+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}$.

因为当 $x=1$ 时函数 $f(x)$ 取到极值，所以 $f'(1)=0$（**方法：**已知函数的极值点求参数时，通常利用函数的导数在极值点处的取值等于零来建立关于参数的方程），解得 $a=1$. 当 $a=1$ 时（**易错：**可

导函数在某点处的导数值等于零只是函数在该点处取得极值的必要条件,所以必须对求出的参数值进行检验,看是否符合函数取得极值的条件),可得 $f'(x)=2x-1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}$,

令 $m(x)=f'(x)=2x-1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}$,

可得 $m'(x)=2-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+e^{1-x}>2-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3+x-2}{x^3}$.

令 $\lambda(x)=2x^3+x-2$,可得 $\lambda'(x)=6x^2+1>0$,所以 $\lambda(x)$ 单调递增,

又因为 $\lambda\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{55}{256}>0$,所以在区间 $\left(\frac{7}{8},+\infty\right)$ 上,$\lambda(x)>0$,

即 $m'(x)>0$,即 $f'(x)$ 单调递增,所以 $x=1$ 是 $f'(x)$ 的变号零点,

所以当 $x=1$ 时函数 $f(x)$ 取到极值,a 的值为 1.

(2) 当 $a\geqslant 1$ 时,因为当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$x^2-x>0$,

所以 $f(x)=ax^2-ax-\frac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}\geqslant x^2-x-\frac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}$.

令 $h(x)=x^2-x-\frac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}$,则 $h'(x)=2x-1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}>2x-2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=(x-1)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)>0$,

所以 $h(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增,则 $f(x)\geqslant h(x)>h(1)=0$,即 $f(x)>0$,所以当 $a\geqslant 1$ 时,$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上没有零点.

当 $0<a<1$ 时,可得 $f'(x)=2ax-a+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}$,

令 $n(x)=f'(x)=2ax-a+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}$,

可得 $n'(x)=2a-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+e^{1-x}>-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+e^{1-x}=\frac{(x-2)e^{x-1}+x^3}{x^3\cdot e^{x-1}}$,

令 $\varphi(x)=(x-2)e^{x-1}+x^3$(**方法:**利用导数判断单调性时,如果求导后的正负不容易辨别,往往可以将导函数的一部分抽离出来,构造新的函数,利用导数研究其单调性,进而可判断原函数的单调性),则 $\varphi'(x)=(x-1)e^{x-1}+3x^2>0$,

所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增,$\varphi(x)>\varphi(1)=0$,

则 $n'(x)>0$,

所以 $f'(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f'(1)=a-1<0$,$f'\left(1+\frac{1}{a}\right)=a+2+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^2}-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}-e^{-\frac{1}{a}}>a+2-1-1>0$,当 $x\to+\infty$ 时,$f'(x)\to+\infty$,

所以存在 $x_1\in\left(1,1+\frac{1}{a}\right)$ 使得 $f'(x_1)=0$,则 $f(x)$ 在区间 $(1,x_1)$ 上单调递减,在区间 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增,

又因为 $f(1)=0$,所以当 $x\in(1,x_1)$ 时,$f(x)<0$,故 $f(x)$ 在区间 $(1,x_1)$ 上没有零点,

因为在区间 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增,且 $f(x_1)<f(1)=0$,且 $\ln x\leqslant x-1$,$e^{1-x}>0$,$\frac{1}{x}<1$,所以 $f(x)=ax^2-ax-\frac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}>ax^2-ax-1-(x-1)$,则 $f\left(1+\frac{1}{a}\right)>a\left(1+\frac{1}{a}\right)^2-(a+1)\left(1+\frac{1}{a}\right)=0$,

所以存在唯一 $x_2\in\left(x_1,1+\frac{1}{a}\right)$，使得 $f(x_2)=0$（**提示：**在判断零点所在区间时，除利用零点存在定理外，往往还需结合函数的单调性），故 $f(x)$ 在区间 $(x_1,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_2，

因此当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在唯一零点.

综上所述，当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上没有零点；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在唯一零点.

5. C 【解析】当 $x\in(0,+\infty)$ 时，若关于 x 的方程 $x^2=e^{ax}$ 有两解，等价于 $2\ln x=ax$ 有两个正实数根，即 $\frac{2\ln x}{x}=a$ 有两个正实数根.

设 $f(x)=\frac{2\ln x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}$，而 $f'(e)=0$. 当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$\therefore f(x)_{\max}=f(e)=\frac{2}{e}$，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，$\therefore$ 当 $a\in\left(0,\frac{2}{e}\right)$ 时，$f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个交点，$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{2}{e}\right)$，故选 C.

6. A 【解析】由方程 $[f(x)]^2-tf(x)=0$ 得 $f(x)=t$ 或 $f(x)=0$，则方程 $[f(x)]^2-tf(x)=0$ 有 6 个不同的实根，等价于 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=t$，$y=0$ 有 6 个不同的交点.

突破点

当 $x>0$ 时，$f(x)=\frac{e^x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

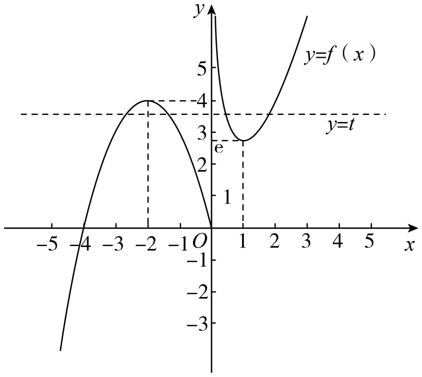
故当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(1)=e$.

当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=-x^2-4x=-(x+2)^2+4$，

当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(-2,0)$ 时，$f(x)$ 单调递减，且 $f(-4)=f(0)=0$，$f(-2)=4$，

根据以上信息，作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



由图可知，$y=f(x)$ 的图象与直线 $y=0$ 有 2 个不同的交点，

由题意，只需 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=t$ 有 4 个不同的交点，则 $e<t<4$. 综上，实数 t 的取值范围是 $(e,4)$. 故选 A.

7. B 【解析】若函数 $f(x)=xe^x$ 与 $g(x)=\ln x+(a+2)x+1(a\in\mathbf{R})$ 的图象没有公共点，则 $xe^x=\ln x+(a+2)x+1(a\in\mathbf{R})$ 无解，

即 $a+2=e^x-\dfrac{\ln x+1}{x}$ 无解.

令 $h(x)=e^x-\dfrac{\ln x+1}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\dfrac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，

令 $s(x)=x^2e^x+\ln x(x>0)$，$s'(x)=(x^2+2x)e^x+\dfrac{1}{x}>0$，

则 $s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $s\left(\dfrac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$，$s(1)=e>0$，故 $s(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在

唯一解 $x=x_0$，则 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，$\dfrac{1}{e}<x_0<1$，

化简得 $x_0e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\cdot\ln\dfrac{1}{x_0}$，即 $e^{x_0}\ln e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\cdot\ln\dfrac{1}{x_0}$.

设 $u(x)=x\ln x$，$x>1$，

则 $u'(x)=1+\ln x>0$，故 $u(x)=x\ln x$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

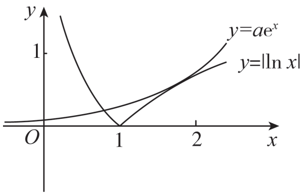
故 $e^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，所以 $x_0=-\ln x_0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{\ln x_0+1}{x_0}=\dfrac{-\ln x_0}{x_0}=1$，所以 $a+2<1$，解得 $a<-1$. 即实数 a 的取值范围为 $(-\infty,-1)$.

8. ACD 【**解析**】对于 A，若关于 x 的方程 $\dfrac{|\ln x|}{e^x}=a$ 有且仅有两个解 x_1,x_2，则 $y=ae^x$ 和 $y=|\ln x|$ 的图象有且仅有两个交点，作出 $y=ae^x$ 和 $y=|\ln x|$ 的大致图象如图所示.



易知，当 $\ln x>0$，即 $x>1$ 时，函数 $y=ae^x$ 与 $y=\ln x$ 的图象相切于唯一公共点 $(x_2,\ln x_2)$，故 A 正确；

对于 B，$ae^{x_1}=|\ln x_1|=-\ln x_1$，$ae^{x_2}=|\ln x_2|=\ln x_2$，可知 $a>0$，

因为 $ae^{x_2}>ae^{x_1}$，所以 $\ln x_2>-\ln x_1$，即 $\ln(x_1x_2)>0$，所以 $x_1x_2>1$，故 B 错误；

对于 C，设 $f(x)=ae^x$，$g(x)=\ln x$，由图可知 $f(x)=ae^x$ 与 $g(x)=\ln x$ 的图象相切于点 $(x_2,\ln x_2)$，所以 $\begin{cases}f'(x_2)=g'(x_2),\\ f(x_2)=g(x_2),\end{cases}$

即 $\begin{cases}ae^{x_2}=\dfrac{1}{x_2},\\ ae^{x_2}=\ln x_2,\end{cases}$ 即 $\ln x_2=\dfrac{1}{x_2}$.

设 $h(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}(x>1)$，则 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(1)=-1<0$，$h(2)=\ln 2-\dfrac{1}{2}>0$，

所以 $\exists x_2\in(1,2)$，使得 $h(x_2)=0$，即 $\ln x_2=\dfrac{1}{x_2}(1<x_2<2)$，

又 $x_1x_2>1$，所以 $\dfrac{1}{2}<x_1<1$，故 C 正确；

对于 D,因为 $ae^{x_2}=\frac{1}{x_2}$,所以 $a=\frac{1}{x_2e^{x_2}}(1<x_2<2)$,

设 $y=xe^x(1<x<2)$,$y'=(x+1)e^x$,当 $1<x<2$ 时,$y'=(x+1)e^x>0$,所以 $y=xe^x$ 在$(1,2)$上单调递增,因为 $1<x_2<2$,所以 $x_2e^{x_2}\in(e,2e^2)$,所以 $a\in\left(\frac{1}{2e^2},\frac{1}{e}\right)$,且 a 唯一,故 D 正确. 故选 ACD.

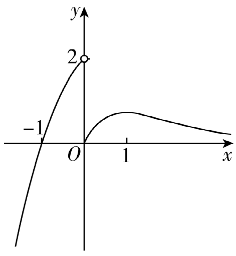
9. BCD 【解析】由题意可得 $f(x_1)=e^{x_1-3}+x_1-4=0$,$g(x_2)=\ln x_2-mx_2=0$,易知 $x_1=3$,则 $|3-x_2|\leqslant 1$,$2\leqslant x_2\leqslant 4$,则 $m=\frac{\ln x_2}{x_2}$在 $2\leqslant x_2\leqslant 4$ 时有解,求导得 $m'=\frac{1-\ln x_2}{x_2^2}$. 令 $m'=0$,解得 $x_2=e$,当 x_2 变化时,m,m'的变化情况如表所示.

x_2	2	$(2,e)$	e	$(e,4)$	4
m'		+	0	−	
m	$\frac{\ln 2}{2}$	单调递增	$\frac{1}{e}$	单调递减	$\frac{\ln 2}{2}$

由表可知,当 $x_2=e$ 时,m 取得极大值也为最大值$\frac{1}{e}$,当 $x_2=2$ 或 $x_2=4$ 时,$m=\frac{\ln 2}{2}$,则 m 的取值范围为$\left[\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{e}\right]$. 设 $y=\frac{\ln x}{x}$,$x>e$,则 $y'=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$,所以函数 $y=\frac{\ln x}{x}$在$(e,+\infty)$上单调递减,所以 $\frac{\ln 5}{5}<\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln 3}{3}<\frac{1}{e}$,所以 m 的值可以是$\frac{\ln 2}{2}$,$\frac{\ln 3}{3}$,$\frac{1}{e}$,故选 BCD.

关键点拨 “新定义”主要是指新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种,然后根据此新定义去解决问题,有时还需要用类比的方法去理解新的定义,这样有助于对新定义的透彻理解. 但是,透过现象看本质,它们考查的还是基础数学知识,所以说“新题”不一定是“难题”,掌握好基础知识,以不变应万变才是制胜法宝.

10. (4,5) 【解析】当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\frac{2x}{e^x}$,则 $f'(x)=\frac{2(1-x)}{e^x}$,所以当 $0<x<1$ 时,$f'(x)>0$,当 $x>1$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值,$f(1)=\frac{2}{e}$,且当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to 0$.



当 $x<0$ 时,$f(x)=-x^2+x+2$,函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.

对于函数 $g(x)=2e[f(x)]^2-af(x)+\frac{2}{e}$,令 $g(x)=0$,即 $2e[f(x)]^2-af(x)+\frac{2}{e}=0$,令 $f(x)=t$,则 $2et^2-at+\frac{2}{e}=0$,要使 $2e[f(x)]^2-af(x)+\frac{2}{e}=0$ 恰有 6 个不相等的实数根,则需关于

t 的方程 $2et^2-at+\frac{2}{e}=0$ 有 2 个不相等的实数根 t_1,t_2，且 $0<t_1<\frac{2}{e}$，$0<t_2<\frac{2}{e}$. 令 $h(t)=2et^2-at+\frac{2}{e}$，则 $h(t)$ 有 2 个不相等的零点均位于区间 $\left(0,\frac{2}{e}\right)$ 内，

所以 $\begin{cases}\Delta=a^2-4\times2e\times\frac{2}{e}>0,\\0<\frac{a}{4e}<\frac{2}{e},\\g(0)=\frac{2}{e}>0,\\g\left(\frac{2}{e}\right)=2e\times\left(\frac{2}{e}\right)^2-\frac{2a}{e}+\frac{2}{e}>0,\end{cases}$

解得 $4<a<5$，所以实数 a 的取值范围为 $(4,5)$.

11.【解】(1) 方法一：易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{m}{ex^2}=\frac{ex+m}{ex^2}$（**提示：**讨论含参函数的单调性时，要考虑参数所在的位置及参数取值对导函数符号的影响）.

当 $m\geqslant0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-1-m<0$，$f(e^m)=m-\frac{m}{e^{m+1}}=m\left(1-\frac{1}{e^{m+1}}\right)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一个零点.

当 $m<0$ 时，由 $f'(x)>0$ 得 $x>-\frac{m}{e}$，由 $f'(x)<0$ 得 $0<x<-\frac{m}{e}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,-\frac{m}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{m}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，

$f(x)\geqslant f\left(-\frac{m}{e}\right)=\ln\left(-\frac{m}{e}\right)+1$.

①当 $m<-1$ 时，$f\left(-\frac{m}{e}\right)>0$，所以 $f(x)>0$ 恒成立，故函数 $f(x)$ 没有零点；

②当 $m=-1$ 时，$f\left(-\frac{m}{e}\right)=0$，故函数 $f(x)$ 有且只有一个零点；

③当 $-1<m<0$ 时，$-\frac{m}{e}\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，$f\left(-\frac{m}{e}\right)<0$，$f(1)=-\frac{m}{e}>0$，

故函数 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{m}{e},1\right)$ 内有一个零点，

$f\left(\frac{m^2}{e^2}\right)=\ln\left(\frac{m^2}{e^2}\right)-\frac{e}{m}=2\ln\left(-\frac{m}{e}\right)-\frac{e}{m}$，

设 $t=-\frac{m}{e}$，令 $g(t)=2\ln t+\frac{1}{t}$，$t\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，

$g'(t)=\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}=\frac{2t-1}{t^2}<0$，所以 $g(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，所以 $g(t)>g\left(\frac{1}{e}\right)=-2+e>0$，即 $f\left(\frac{m^2}{e^2}\right)>0$，所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{m^2}{e^2},-\frac{m}{e}\right)$ 内有一个零点，所以函数 $f(x)$ 在定义域内有两个不同的零点.

综上，当 $-1<m<0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点；当 $m=-1$ 或 $m\geqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 有且只有一个零点；当 $m<-1$ 时，函数 $f(x)$ 没有

零点.

方法二：令 $f(x)=0$，得 $m=ex\ln x$，令 $g(x)=ex\ln x\ (x>0)$，

则 $g'(x)=e(\ln x+1)$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 时，$g'(x)<0$，当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，

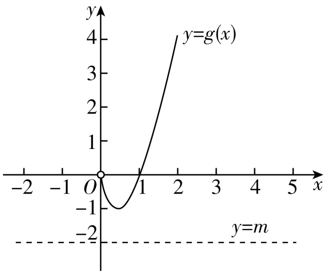
所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，

$g\left(\dfrac{1}{e}\right)=-1$，

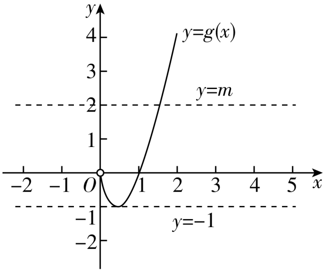
当 $x\to0$ 时，$g(x)\to0$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

故当 $m<-1$ 时，直线 $y=m$ 与函数 $g(x)$ 的图象没有交点，

即函数 $f(x)$ 没有零点，如图①所示.



图①

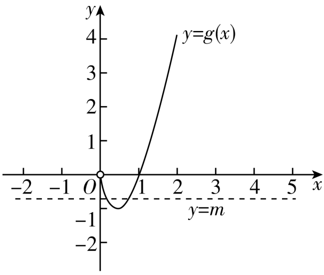


图②

当 $m=-1$ 或 $m\geqslant0$ 时，直线 $y=m$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象只有一个交点，即函数 $f(x)$ 只有一个零点，如图②所示.

当 $-1<m<0$ 时，直线 $y=m$ 与函数 $g(x)$ 的图象有两个交点，

即函数 $f(x)$ 有两个零点，如图③所示.



图③

综上，当 $-1<m<0$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点；当 $m=-1$ 或 $m\geqslant0$ 时，函数 $f(x)$ 有且只有一个零点；当 $m<-1$ 时，函数 $f(x)$ 没有零点.

(2) 因为函数 $f(x)$ 有两个零点，由(1)知，$-1<m<0$，且 $0<x_1<-\dfrac{m}{e}<x_2$.

若 $x_1x_2^a\leqslant e^{\frac{1}{2}}$ 恒成立，则 $\ln x_1+a\ln x_2\leqslant\dfrac{1}{2}$ 恒成立，

因为 $\begin{cases}\ln x_1=\dfrac{m}{ex_1},\\ \ln x_2=\dfrac{m}{ex_2},\end{cases}$ 所以 $\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2}=\dfrac{x_2}{x_1}$ （**方法：**与函数零点 x_1,x_2 有关的双变量问题，一般是根据 x_1,x_2 是方程 $f(x)=0$ 的两个根，确定 x_1,x_2 的关系，再通过消元转化为只含有 x_1 或 x_2 的关系式，再构造函数解题，有时也可以把所给条件转化为 x_1,x_2 的齐次式，然后转化为关于 $\dfrac{x_2}{x_1}$ 的函数）.

设 $t=\frac{x_2}{x_1}$，则 $\ln x_1=\frac{t\ln t}{1-t}$，$\ln x_2=\frac{\ln t}{1-t}$，

因为 $0<x_1<x_2$，所以 $t>1$，所以$\frac{t\ln t}{1-t}+\frac{a\ln t}{1-t}\leqslant\frac{1}{2}$对于 $t>1$ 恒成立，

即$(a+t)\ln t+\frac{1}{2}(t-1)\geqslant 0$ 对于 $t>1$ 恒成立.

令 $h(t)=(a+t)\ln t+\frac{1}{2}(t-1)(t>1)$，

当 $a\geqslant 0$ 时，显然 $h(t)\geqslant 0$ 恒成立，

当 $a<0$ 时，$h'(t)=\ln t+\frac{a}{t}+\frac{3}{2}$在$(1,+\infty)$上单调递增，$h'(1)=a+\frac{3}{2}$，当$-\frac{3}{2}\leqslant a<0$ 时，$h'(t)>h'(1)=a+\frac{3}{2}\geqslant 0$，

所以 $h(t)$ 在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $h(t)>h(1)=0$，

当 $a<-\frac{3}{2}$时，$h'(1)=a+\frac{3}{2}<0$，$h'(e^{-a})=-a+ae^{a}+\frac{3}{2}=a(e^{a}-1)+\frac{3}{2}>0$，故存在 $t_0\in(1,e^{-a})$，使得 $h'(t_0)=0$，

当 $t\in(1,t_0)$时，$h'(t)<0$，所以 $h(t)$ 在$(1,t_0)$上单调递减，

此时存在 $h(t)<h(1)=0$，不符合要求，舍去.

综上，实数 a 的取值范围为$\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$.

方法总结　求解函数的零点个数的步骤

(1)确定$f(x)$的定义域；(2)计算导数$f'(x)$；(3)求出$f'(x)=0$的根；(4)用$f'(x)=0$的根将$f(x)$的定义域分成若干个区间，通过这若干个区间内$f'(x)$的符号，进而确定$f(x)$的单调区间，若$f'(x)>0$，则$f(x)$在对应区间上单调递增，对应区间为增区间；若$f'(x)<0$，则$f(x)$在对应区间上单调递减，对应区间为减区间；(5)结合函数的单调性以及零点存在定理等知识判断出函数的零点个数.

考点 16　不等式恒成立与能成立问题

1. A　【解析】由题设，$ax-1>0$ 在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上恒成立，

$\therefore\begin{cases}a>0,\\ \frac{a}{2}-1>0,\end{cases}$ 即 $a>2$，原不等式可化为$\frac{e^x}{a}-\ln\left[a\left(x-\frac{1}{a}\right)\right]+\frac{1}{a}=e^{x-\ln a}-\ln a-\ln\left(x-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a}\geqslant 0$，$\therefore e^{x-\ln a}-\ln a\geqslant\ln\left(x-\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a}$，

即 $e^{x-\ln a}+x-\ln a\geqslant x-\frac{1}{a}+\ln\left(x-\frac{1}{a}\right)$. 令$f(x)=e^x+x$，易知$f(x)$单调递增，$f(x-\ln a)\geqslant f\left(\ln\left(x-\frac{1}{a}\right)\right)$，则 $x-\ln a\geqslant\ln\left(x-\frac{1}{a}\right)$，即 $\ln a\leqslant x-\ln\left(x-\frac{1}{a}\right)$ 在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上恒成立. 令 $g(x)=x-\ln\left(x-\frac{1}{a}\right)$，则 $g'(x)=\frac{x-\frac{1}{a}-1}{x-\frac{1}{a}}$，又 $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，$a>2$，$\therefore x-\frac{1}{a}-1<0$，$x-\frac{1}{a}>0$，即 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上单调递减，

$\therefore \ln a \leqslant g(x)_{\min}=g(1)=1-\ln\left(1-\dfrac{1}{a}\right)$，故 $\ln a+\ln\left(1-\dfrac{1}{a}\right)=\ln(a-1)\leqslant 1$，可得 $a\leqslant e+1$. 综上，$2<a\leqslant e+1$，故 a 的最大值为 $e+1$. 故选 A.

2. B 【解析】设 $g(x)=x^2f(x)$，$x>0$，

则 $g'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)=x^2\left[f'(x)+\dfrac{2}{x}f(x)\right]>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

由 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 可知 $ax>0$，故 $a>0$，

当 $x>1$ 时，可将不等式 $\dfrac{ax\cdot f(ax)}{\ln x}\geqslant\dfrac{f(\ln x)\cdot\ln x}{ax}$ 整理为 $a^2x^2\cdot f(ax)\geqslant f(\ln x)\cdot(\ln x)^2$，即 $g(ax)\geqslant g(\ln x)$，

故 $ax\geqslant\ln x$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

即 $a\geqslant\dfrac{\ln x}{x}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立.

令 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，其中 $x>1$，所以 $a\geqslant\varphi(x)_{\max}$，

$\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=e$.

当 $x\in(1,e)$ 时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(e)=\dfrac{1}{e}$，即 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$.

3. B 【解析】因为 $g(x)=x^3-x^2-3$，所以 $g'(x)=3x^2-2x$，令 $g'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{2}{3}$. 又因为当 $x_2\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3}\right]$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，$g(x)$ 单调递减，当 $x_2\in\left[\dfrac{2}{3},2\right]$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 单调递增，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{25}{8}$，$g(2)=1$，所以 $g(x)_{\max}=1$. 若 $\forall x_1,x_2\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，都有 $f(x_1)-g(x_2)\geqslant 0$，则转化为 $f(x)\geqslant 1$ 恒成立，即 $\dfrac{a}{x}+x\ln x\geqslant 1$，对于 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 恒成立，即 $a\geqslant x-x^2\ln x$，对于 $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$ 恒成立. 设 $h(x)=x-x^2\ln x$，$x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，$h'(x)=1-(2x\ln x+x)$，$h''(x)=-3-2\ln x<0$，所以 $h'(x)$ 单调递减. 当 $x=1$ 时，$h'(1)=1-(2\ln 1+1)=0$，所以当 $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 时，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in[1,2]$ 时，$h'(x)\leqslant 0$，$h(x)$ 单调递减，所以 $h(x)_{\max}=h(1)=1$，所以 $a\geqslant 1$. 故选 B.

4. ABD 【解析】对于 A，设函数 $f(x)=x-\sin x\ (x>0)$，则 $f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$ 恒成立，所以 $f(x)=x-\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$，所以 $x>\sin x$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，所以 $\sin x_1<x_1$ 恒成立，故 A 正确；

对于 B，设函数 $g(x)=e^x-x-1\ (x>0)$，则 $g'(x)=e^x-1>0$，所以 $g(x)=e^x-x-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>g(0)=0$，即 $e^x>x+1$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，所以 $e^{x_1}>1+x_1$ 恒成立，故 B 正确；

对于 C，设函数 $h(x)=2\cos x-x(x\in\mathbf{R})$，则 $h'(x)=-2\sin x-1$，令 $h'(x)>0$，解得 $\frac{7\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{11\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，令 $h'(x)<0$，解得 $-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{7\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，所以当 $x>0$ 时，$h(x)=2\cos x-x$ 有增有减，所以当 $x_1<x_2$ 时，$h(x_1)$ 与 $h(x_2)$ 的大小关系不确定，即 $2\cos x_2-2\cos x_1<x_2-x_1$ 不恒成立，故 C 错误；

对于 D，因为 $0<x_1<x_2$，所以令 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$，设 $F(t)=\ln t-\frac{2t-2}{t+1}(t>1)$，则 $F'(t)=\frac{1}{t}-\frac{2t+2-2t+2}{(t+1)^2}=\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$，

因为 $t>1$，所以 $F'(t)>0$ 恒成立，所以 $F(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $F(t)>F(1)=0$，即 $\ln t>\frac{2t-2}{t+1}$，即 $\ln\frac{x_2}{x_1}>\frac{2\frac{x_2}{x_1}-2}{\frac{x_2}{x_1}+1}$，

即 $\ln x_2-\ln x_1>\frac{2x_2-2x_1}{x_2+x_1}$，故 $\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}$，故 D 正确.

5. $\frac{40}{9}$ 【解析】因为 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数和奇函数，且 $f(x)+g(x)=e^x$ ①，所以 $f(-x)+g(-x)=e^{-x}$，即 $f(x)-g(x)=e^{-x}$ ②. 联立①②解得 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，$g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$（**关键**：根据函数的奇偶性，利用方程组求出函数的解析式）. 因为函数 $y=e^x$，$y=-e^{-x}$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递增，所以函数 $y=e^x-e^{-x}$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递增，$e^x-e^{-x}>e^0-e^0=0$，故不等式 $2f(x)-a[g(x)]^2\geqslant 0$ 等价于 $a\leqslant\frac{2f(x)}{[g(x)]^2}$，即 $a\leqslant\frac{e^x+e^{-x}}{\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}$ 在 $(0,\ln 2)$ 上恒成立（**方法**：已知恒成立的不等式在能够判断出参数系数正负的情况下，根据不等式的性质将参数分离出来，得到一个一端是参数，另一端是变量的不等式，只要研究变量不等式的最值就可以解决问题）. 令 $t=e^x+e^{-x}$，因为当 $x\in(0,\ln 2)$ 时，$t'=e^x-e^{-x}>0$，$t=e^x+e^{-x}$ 单调递增，所以 $2<t<\frac{5}{2}$. 又 $(e^x-e^{-x})^2=(e^x+e^{-x})^2-4=t^2-4$，所以 $\frac{e^x+e^{-x}}{\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}=\frac{4t}{t^2-4}=\frac{4}{t-\frac{4}{t}}$. 因为函数 $y=t$，$y=-\frac{4}{t}$ 在 $\left(2,\frac{5}{2}\right)$ 上单调递增，所以函数 $y=t-\frac{4}{t}$ 在 $\left(2,\frac{5}{2}\right)$ 上单调递增，故 $\frac{4}{t-\frac{4}{t}}>\frac{40}{9}$，所以 $a\leqslant\frac{40}{9}$，即实数 a 的最大值是 $\frac{40}{9}$.

6. $\frac{\sqrt{2}}{2e}$ 【解析】$a^2e^{2x+1}-\ln x+x+1+2\ln a\geqslant 0$，即 $e^{2x+1+2\ln a}+(2x+1+2\ln a)\geqslant\ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$. 设 $f(t)=e^t+t(t\in\mathbf{R})$，则 $f'(t)=e^t+1>0$ 恒成立，故 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 原不等式转化为 $f(2x+1+2\ln a)\geqslant f(\ln x)$，即 $2x+1+2\ln a\geqslant\ln x$，即 $2x+1-\ln x+2\ln a\geqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立. 设 $g(x)=2x+1-\ln x+2\ln a(x>0)$，$g'(x)=\frac{2x-1}{x}$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(0,\right.$

$\left.\frac{1}{2}\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，故 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=2+\ln 2+2\ln a\geqslant 0$，即 $2\ln a\geqslant -2-\ln 2=-\ln 2e^2$，解得 $a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2e}$，所以 a 的最小值是$\frac{\sqrt{2}}{2e}$.

7.【解】(1) $f'(x)=\frac{2e^x(\cos x+\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{2\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2 x}$，

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$，无最大值.

(2) 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，不等式 $2e^x-x\cos x-x+a\geqslant 0$，

即 $-a\leqslant 2e^x-x\cos x-x$ 对任意的 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立.

令 $g(x)=2e^x-x\cos x-x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $g'(x)=2e^x+x\sin x-\cos x-1$，

当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$2e^x\geqslant 2$，$x\sin x\geqslant 0$，则 $2e^x-\cos x-1\geqslant 0$，

则 $g'(x)\geqslant 0$，且不恒为 0，

则 $g(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，则 $g(x)\geqslant g(0)=2$.

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right)$ 时，$g'(x)\leqslant 2e^x-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\cos x-1$.

令 $m(x)=2e^x-\frac{\sqrt{2}}{2}x-\cos x-1$，$x\in\left[-\frac{\pi}{4},0\right)$，

则 $m'(x)=2e^x+\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

易知 $m'(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},0\right)$ 上单调递增，

且 $m'(0)=2-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，$m'\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2e^{-\frac{\pi}{4}}-\sqrt{2}=2\left(e^{-\frac{\pi}{4}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)<2\left(e^{-\frac{1}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)<0$，

由零点存在定理知，$\exists x_0\in\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$，使得 $m'(x_0)=0$（提示：注意隐零点法的应用），

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{4},x_0\right)$ 时，$m'(x)<0$，$m(x)$ 单调递减；当 $x\in(x_0,0)$ 时，$m'(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，

又 $m\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2e^{-\frac{\pi}{4}}+\frac{\sqrt{2}\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=2e^{-\frac{\pi}{4}}-1+\frac{\sqrt{2}}{8}(\pi-4)$，

因为 $e^{-\pi}<\frac{1}{16}$，所以 $e^{-\frac{\pi}{4}}<\frac{1}{2}$，即 $2e^{-\frac{\pi}{4}}-1<0$，

又 $\pi-4<0$，所以 $m\left(-\frac{\pi}{4}\right)<0$，又 $m(0)=0$，所以 $m(x)<0$.

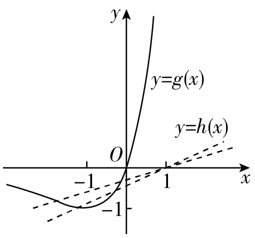
所以 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 上单调递减，

所以 $g(x)>g(0)=2$.

综上，$g(x)_{\min}=g(0)=2$，

所以 $-a\leqslant 2$，解得 $a\geqslant -2$，即实数 a 的取值范围是 $[-2,+\infty)$.

8. A 【解析】已知函数 $f(x)=xe^{x+1}-kx+k$，则 $f(x)\leqslant 0$ 等价于 $xe^{x+1}\leqslant kx-k$ 有且只有一个负整数解（关键：通过移项将函数解的问题转化为两个函数图象的交点问题）. 令 $g(x)=xe^{x+1}$，则 $g'(x)=(x+1)e^{x+1}$. 当 $x<-1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x>-1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递减，在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，故当 $x=-1$ 时，$g(x)$ 有极小值，也是最小值，$g(x)_{\min}=g(-1)=(-1)\times e^{-1+1}=-1$. 设 $h(x)=kx-k=k(x-1)$，则函数 $h(x)$ 恒过点 $(1,0)$，在同一平面直角坐标系中分别作出 $y=g(x)$ 和 $y=h(x)$ 的大致图象，如图所示.



显然 $x_0=-1$，依题意得 $g(-1)\leqslant h(-1)$ 且 $g(-2)>h(-2)$，即 $-1\leqslant -2k$ 且 $-\dfrac{2}{e}>-3k$，解得 $\dfrac{2}{3e}<k\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以实数 k 的取值范围是 $\left(\dfrac{2}{3e},\dfrac{1}{2}\right]$，故选 A.

9. A 【解析】函数 $f(x)=e^x-ax^2+ax$，$f(1)=e>0$，若恰好存在两个正整数 m,n，使得 $f(m)<0$，$f(n)<0$，则 $m>1$，$n>1$，当 $x>1$ 时，$f(x)<0$ 等价于 $a>\dfrac{e^x}{x^2-x}$，因此有且只有两个大于 1 的正整数使得 $a>\dfrac{e^x}{x^2-x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上成立. 令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2-x}$，$x>1$，则 $g'(x)=\dfrac{e^x(x^2-3x+1)}{(x^2-x)^2}$，当 $x>1$ 时，由 $g'(x)<0$ 得 $1<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，由 $g'(x)>0$ 得 $x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$，因此函数 $g(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，又 $g(2)=\dfrac{e^2}{2}$，$g(3)=\dfrac{e^3}{6}=\dfrac{e^2}{2}\cdot\dfrac{e}{3}<\dfrac{e^2}{2}=g(2)$，而 $2<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<3$，因此符合题意的正整数只有 2 和 3 两个，于是得 $a\leqslant g(4)=\dfrac{e^4}{12}$，所以实数 a 的取值范围是 $\left(\dfrac{e^2}{2},\dfrac{e^4}{12}\right]$.

10. $\left[e+\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 【解析】因为对任意的 $m\in(0,+\infty)$，存在 $n\in[1,3]$，使得 $f(m)\leqslant g(n)$，所以 $f(x)_{\max}\leqslant g(x)_{\max}$.

易错点

因为 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$，所以 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)>0$，得 $0<x<e$；令 $f'(x)<0$，得 $x>e$，所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(x)_{\max}=f(e)=\dfrac{1}{e}$.

因为 $g(x)=-ex^2+ax$ 的图象开口向下，对称轴方程为 $x=\dfrac{a}{2e}$. 当 $\dfrac{a}{2e}\leqslant 1$，即 $a\leqslant 2e$ 时，$g(x)$ 在 $[1,3]$ 上单调递减，则 $g(x)_{\max}=$

$g(1)=-e+a$,所以$\frac{1}{e}\leqslant -e+a$,则 $a\geqslant e+\frac{1}{e}$,故 $e+\frac{1}{e}\leqslant a\leqslant 2e$;当 $1<\frac{a}{2e}<3$,即 $2e<a<6e$ 时,$g(x)$ 在 $\left[1,\frac{a}{2e}\right]$ 上单调递增,在 $\left[\frac{a}{2e},3\right]$ 上单调递减,所以 $g(x)_{max}=g\left(\frac{a}{2e}\right)>g(1)=-e+a>e>\frac{1}{e}$,即$f(x)_{max}<g(x)_{max}$,故 $2e<a<6e$;当$\frac{a}{2e}\geqslant 3$,即 $a\geqslant 6e$ 时,$g(x)$在$[1,3]$上单调递增,所以 $g(x)_{max}=g(3)>g(1)=-e+a\geqslant 5e>\frac{1}{e}$,即$f(x)_{max}<g(x)_{max}$,故 $a\geqslant 6e$. 综上,$a\geqslant e+\frac{1}{e}$,即实数 a 的取值范围为 $\left[e+\frac{1}{e},+\infty\right)$.

11.【解】(1)由题可知,$f(x)=e^x+x^2-x-4$,$\therefore f'(x)=e^x+2x-1$,

$\therefore f'(0)=0$.

当 $x>0$ 时,$e^x>1$,$\therefore f'(x)>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

同理$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,

$f(0)=-3<0$,$f(1)=e-4<0$,$f(2)=e^2-2>0$,

且当 $x>2$ 时,$f(x)>0$,

故当 $x>0$ 时,函数$f(x)$的零点在$(1,2)$内,$\therefore k=1$ 满足条件.

同理,当 $x<0$ 时,函数$f(x)$的零点在$(-2,-1)$内,

$\therefore k=-2$ 满足条件.

综上,$k=1$ 或 $k=-2$.

(2)由题可得,当 $x\in[-1,1]$时,$|f(x)_{max}-f(x)_{min}|=f(x)_{max}-f(x)_{min}\geqslant e-1$. $f'(x)=a^x\ln a+2x-\ln a=2x+(a^x-1)\ln a$.

①当 $0<x\leqslant 1$ 时,由 $a>1$,可知 $a^x-1>0$,$\ln a>0$,$\therefore f'(x)>0$;

②当$-1\leqslant x<0$ 时,由 $a>1$,可知 $a^x-1<0$,$\ln a>0$,$\therefore f'(x)<0$;

③当 $x=0$ 时,$f'(x)=0$.

$\therefore f(x)$在$[-1,0]$上单调递减,$[0,1]$上单调递增,

$\therefore$ 当 $x\in[-1,1]$时,$f(x)_{min}=f(0)$,$f(x)_{max}=\max\{f(-1),f(1)\}$,而$f(1)-f(-1)=a-\frac{1}{a}-2\ln a$. 设 $g(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>0)$,$\because g'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2\geqslant 0$(当且仅当 $t=1$ 时取等号),$\therefore g(t)$在$(0,+\infty)$上单调递增,而 $g(1)=0$,

$\therefore$ 当 $t>1$ 时,$g(t)>0$,即当 $a>1$ 时,$a-\frac{1}{a}-2\ln a>0$,

$\therefore f(1)>f(-1)$,$\therefore f(1)-f(0)\geqslant e-1$,即 $a-\ln a\geqslant e-1=e-\ln e$.

构造 $h(x)=x-\ln x(x>1)$,易知 $h'(x)=1-\frac{1}{x}>0$,$\therefore h(x)$ 在 $(1,+\infty)$单调递增,$\therefore a\geqslant e$,即实数 a 的取值范围是$[e,+\infty)$.

12.【解】方法一:由已知得 $f'(x)=e^x-1-2ax$,令 $h(x)=e^x-1-2ax$ $(x\geqslant 0)$,则 $h'(x)=e^x-2a$.

①当 $2a\leqslant 1$,即 $a\leqslant\frac{1}{2}$时,在区间$[0,+\infty)$上,$h'(x)\geqslant 0$,

且 $h'(x)$不恒为 0,$h(x)$单调递增,$\therefore h(x)\geqslant h(0)$,

即$f'(x)\geqslant f'(0)=0$,且$f'(x)$不恒为 0,

$\therefore f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增,$\therefore f(x)\geqslant f(0)=0$,

$\therefore a\leqslant\frac{1}{2}$时满足题意.

②当 $2a>1$，即 $a>\frac{1}{2}$时，令 $h'(x)=0$，

解得 $x=\ln(2a)$，在区间$[0,\ln(2a)]$上，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，

$\therefore$ 当 $x\in(0,\ln(2a))$时，有 $h(x)<h(0)=0$，即$f'(x)<f'(0)=0$，$f(x)$在$(0,\ln(2a))$上单调递减，$\therefore f(x)<f(0)=0$，不满足题意.

综上，实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

方法二：当 $x=0$ 时，$f(x)=0$，对任意实数 a，都有$f(x)\geqslant0$，当 $x>0$ 时，由$f(x)\geqslant0$ 得 $a\leqslant\frac{e^x-1-x}{x^2}$，

设 $g(x)=\frac{e^x-1-x}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{xe^x-2e^x+x+2}{x^3}$，

令 $h(x)=xe^x-2e^x+x+2(x>0)$，则 $h'(x)=xe^x-e^x+1$，

记 $\varphi(x)=h'(x)$，则 $\varphi'(x)=xe^x>0$，

所以 $h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$h'(x)>h'(0)=0$，

所以 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$h(x)>h(0)=0$，

所以 $g'(x)>0$，$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

由洛必达法则知，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$，

故 $a\leqslant\frac{1}{2}$.

综上，实数 a 的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$.

考点 17　导数与不等式

1. (1)【**解**】因为$f(x)=e^x\ln(a+x)-x$，

所以$f'(x)=e^x\left[\ln(a+x)+\frac{1}{a+x}\right]-1$，

则$f'(0)=\ln a+\frac{1}{a}-1=0$.

令 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，其中 $x>0$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

令 $g'(x)<0$ 可得 $0<x<1$；令 $g'(x)>0$ 可得 $x>1$，

所以函数 $g(x)$的单调递减区间为$(0,1)$，单调递增区间为$(1,+\infty)$，且 $g(x)$的最小值 $g(1)=0$，故 $a=1$.

(2)【**证明**】由(1)可知，$f(x)=e^x\ln(x+1)-x$，

当 $x>\ln 4$ 时，要证 $f(x)>x^2$，即证 $e^x\ln(x+1)>x^2+x$，只需证 $\frac{\ln(x+1)}{x+1}>\frac{x}{e^x}$. 令 $1+x=t$，$e^x=s$，则上式等价于$\frac{\ln t}{t}>\frac{\ln s}{s}(t>0,s>0)$.

构造函数 $p(x)=\frac{\ln x}{x}$(**方法：**不等式的证明可构造“形似”函数，稍作变形再构造，对原不等式同解变形，根据相似结构构造辅助函数)，$x>0$，则 $p'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

故当 $x\in(0,e)$时，$p'(x)>0$，$p(x)$单调递增；

当 $x\in(e,+\infty)$时，$p'(x)<0$，$p(x)$单调递减.

由 $e>2.7>\frac{5}{2}$得，$e-1>\frac{3}{2}$，故 $e^{e-1}>e^{\frac{3}{2}}>\sqrt{2.7^3}>\sqrt{16}=4$，故 $e-1>$

$\ln 4$（关键：根据指数函数的单调性，利用放缩法，结合对数函数的运算比较出 $e-1$ 与 $\ln 4$ 之间的大小关系）.

当 $\ln 4<x<e-1$ 时，$t=1+x\in(1+\ln 4,e)$，$s=e^x\in(4,e^{e-1})\subseteq(e,+\infty)$，故 $p(s)<p(4)=\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{\ln 2}{2}=p(2)$.

又 $p(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，而 $2<1+\ln 4<t<e$，

则 $p(2)<p(t)$，故 $p(t)>p(s)$，即 $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}>\dfrac{x}{e^x}$.

当 $x\geqslant e-1$ 时，$e^x>1+x\geqslant e$，即 $s>t\geqslant e$，

$p(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递减，故 $p(t)>p(s)$，即 $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}>\dfrac{x}{e^x}$.

综上，原命题得证.

2. (1)【解】由已知得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

由 $f(x)=2\ln x-ax+1=0$，得 $a=\dfrac{2\ln x+1}{x}$.

令函数 $u(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x}(x>0)$，则 $u'(x)=\dfrac{1-2\ln x}{x^2}$，

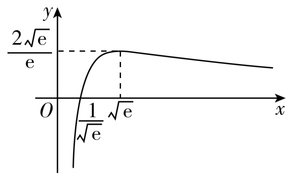
当 $0<x<\sqrt{e}$ 时，$u'(x)>0$，函数 $u(x)$ 在 $(0,\sqrt{e})$ 上单调递增，

当 $x>\sqrt{e}$ 时，$u'(x)<0$，函数 $u(x)$ 在 $(\sqrt{e},+\infty)$ 上单调递减，

所以 $u(x)_{\max}=u(\sqrt{e})=\dfrac{2}{\sqrt{e}}=\dfrac{2\sqrt{e}}{e}$.

因为 $u\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+2\ln x}{x}\to-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+2\ln x}{x}\to 0$，

可知函数 $u(x)$ 的大致图象如图所示.



故当 $a>\dfrac{2\sqrt{e}}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 的零点个数为 0；当 $a\leqslant 0$ 或 $a=\dfrac{2\sqrt{e}}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 的零点个数为 1；当 $0<a<\dfrac{2\sqrt{e}}{e}$ 时，函数 $f(x)$ 的零点个数为 2.

(2)【证明】由题设方程 $f(x)=g(x)$，即 $2\ln x-ax+1=e^{ax}-ex^2$，

得 $ax+e^{ax}=2\ln x+ex^2+1=\ln(ex^2)+e^{\ln(ex^2)}$（方法：同构法是证明不等式的一种技巧，通过等价变形使得等号两边的式子结构相同，从而将等号两边看成是同一个函数的两个函数值，此时借助该函数的单调性化简不等式，从而达到证明不等式的目的. 特别是函数中同时出现了指数函数与对数函数时，通过这种方法往往可以取得很好的效果）.

令 $\varphi(x)=x+e^x$（关键：在证明不等式时，常有两种思路，直接求最值和等价转化. 无论是哪种方式，都要敢于构造函数），得 $\varphi(ax)=\varphi(\ln(ex^2))$.

又 $\varphi'(x)=1+e^x>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，所以 $\varphi(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

所以 $ax=\ln(ex^2)$，即 $ax=1+2\ln x$，

由题可知，方程 $ax=1+2\ln x$ 有两个实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，

即 $a=\frac{1+2\ln x}{x}$ 有两个实根 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，由(1)得 $\frac{1}{\sqrt{e}}<x_1<\sqrt{e}<x_2$.

令 $\frac{1}{x_1}=t_1,\frac{1}{x_2}=t_2\left(0<t_2<\frac{1}{\sqrt{e}}<t_1<\sqrt{e}\right)$，所以 $\begin{cases}a=t_1-2t_1\ln t_1,\\a=t_2-2t_2\ln t_2.\end{cases}$

令 $h(t)=t-2t\ln t(t>0)$，所以 $h(t)=a$ 有两个实根 t_1,t_2，

先证 $t_1+t_2>\frac{2}{\sqrt{e}}$. 因为 $h'(t)=-1-2\ln t$，令 $h'(t)>0$，解得 $0<t<\frac{1}{\sqrt{e}}$，

令 $h'(t)<0$，解得 $t>\frac{1}{\sqrt{e}}$，

所以 $h(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ 上单调递减，要证 $t_1+t_2>\frac{2}{\sqrt{e}}$，即证 $t_1>\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2$，

因为 $t_1>\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2>\frac{1}{\sqrt{e}}$，$h(t)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ 上单调递减，只需证 $h(t_1)<h\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2\right)$，即证 $h(t_2)<h\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2\right)$.

令 $F(t)=h(t)-h\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)\left(0<t<\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$（**方法：**利用导数证明不等式问题可采用直接构造函数法，证明不等式 $f(x)>g(x)$（或 $f(x)<g(x)$）转化为证明 $f(x)-g(x)>0$（或 $f(x)-g(x)<0$），进而构造辅助函数 $h(x)=f(x)-g(x)$），

$F'(t)=h'(t)+h'\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)=-1-2\ln t-1-2\ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)=-2-2\ln\left[t\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)\right]$，由 $t\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)=-t^2+\frac{2t}{\sqrt{e}}\left(0<t<\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，

令 $k(t)=-t^2+\frac{2t}{\sqrt{e}}\left(0<t<\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$，可知函数 $k(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 上单调递增，所以 $0<t\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)<\frac{1}{e}$，所以 $\ln\left[t\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)\right]<-1$，

所以 $-2-2\ln\left[t\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t\right)\right]>0$，即 $F'(t)>0$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 上恒成立，

所以 $F(t)$ 在 $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 上单调递增，所以 $F(t)<F\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=0$，

所以 $h(t_2)<h\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2\right)$ 成立，即 $h(t_1)<h\left(\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2\right)$ 成立. 又 $t_1>\frac{1}{\sqrt{e}}$，$\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2>\frac{1}{\sqrt{e}}$，且 $h(t)$ 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $t_1>\frac{2}{\sqrt{e}}-t_2$，所以 $t_1+t_2>\frac{2}{\sqrt{e}}$，即 $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>\frac{2}{\sqrt{e}}$，所以 $\frac{1}{x_2}>\frac{2}{\sqrt{e}}-\frac{1}{x_1}$，

所以 $x_1-\frac{1}{x_2}<x_1+\frac{1}{x_1}-\frac{2}{\sqrt{e}}<\sqrt{e}-\frac{1}{\sqrt{e}}$，即 $x_1-\sqrt{e}<\frac{1}{x_2}-\frac{1}{\sqrt{e}}$.

3.【解】(1)当 $m=n=1$ 时，$f(x)=(x-1)\ln x-1(x>0)$，

因为 $f'(x)=\ln x+\frac{x-1}{x}$，所以 $f'(1)=0$.

又 $f(1)=-1$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=-1$.

(2)显然 $m\neq0$，若 $m<0$，当 $x\to0^+$ 时，$(x-m)\ln x-n\to-\infty$，而与 $x>0$ 矛盾，所以 $m>0$.

令 $g(x)=f(x)-x=(x-m)\ln x-x-n(x>0)$，则 $g(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $g(x)_{\min}\geqslant 0$.

由于 $g'(x)=\ln x-\frac{m}{x}$，且 $\left(\ln x-\frac{m}{x}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{m}{x^2}>0$，

则 $g'(x)=\ln x-\frac{m}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又因为 $g'(1)=-m<0$，$x\to+\infty$ 时 $g'(x)\to+\infty$，故存在 $x_0>1$，使得 $g'(x_0)=0$（**方法：**在求解导数问题时，经常会遇到导函数具有零点，但是零点求解困难甚至无法求解的情形，此时可以将这个零点只设出来而不必求出具体数值，然后利用这个零点作为过渡的桥梁，对问题进行转化），

且在 $(0,x_0)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，且 $m=x_0\ln x_0$，

故 $g(x)_{\min}=g(x_0)=x_0\ln x_0-m\ln x_0-x_0-n\geqslant 0$，

所以 $n\leqslant x_0\ln x_0-m\ln x_0-x_0=x_0\ln x_0-x_0(\ln x_0)^2-x_0$，

所以 $\frac{n}{m}\leqslant\frac{x_0\ln x_0-x_0(\ln x_0)^2-x_0}{x_0\ln x_0}=1-\left(\ln x_0+\frac{1}{\ln x_0}\right)\leqslant -1$，

当且仅当 $\ln x_0=1$，即 $x_0=\mathrm{e}$ 时取得等号，

此时 $m=x_0\ln x_0=\mathrm{e}\ln\mathrm{e}=\mathrm{e}$. 故当 $\frac{n}{m}$ 取最大值时，$m=\mathrm{e}$.

4. (1)【**解**】函数 $f(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+a(a\in\mathbf{R})$ 定义域为 $\mathbf{R}$，$f'(x)=x\mathrm{e}^x$，

由 $f'(x)>0$，解得 $x>0$，故 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

由 $f'(x)<0$，解得 $x<0$，故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

故 $f(x)$ 的最小值是 $f(0)=a-1\geqslant 0$，解得 $a\geqslant 1$，所以实数 a 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

(2)【**证明**】在(1)中，令 $a=1$ 时，$x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+1\geqslant 0$，

令 $t=\mathrm{e}^x(t>0)$，得 $t\ln t-t+1\geqslant 0$，即 $\ln t\geqslant 1-\frac{1}{t}$.

令 $t=\frac{n+k}{n+k-1}$，$k\in\{0,1,2,\cdots,n\}$，则 $t>1$，则 $\ln\frac{n+k}{n+k-1}>\frac{1}{n+k}$，

所以 $\frac{1}{n+k}<\ln\frac{n+k}{n+k-1}=\ln(n+k)-\ln(n+k-1)$，

令 $g(x)=x-\sin x(x>0)$，则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，且 $g'(x)$ 不恒为零，所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)>g(0)=0$，

则 $\sin x<x(x>0)$.

所以 $\sin\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n+k}<\ln(n+k)-\ln(n+k-1)$，$k\in\{0,1,2,\cdots,n\}$（**方法：**利用放缩法证明不等式时，一是根据已知条件适当放缩；二是利用常见放缩结论），

所以 $\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<[\ln(n+1)-\ln n]+[\ln(n+2)-\ln(n+1)]+\cdots+[\ln(2n)-\ln(2n-1)]=\ln(2n)-\ln n=\ln\frac{2n}{n}=\ln 2$.

5. (1)【**解**】$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

当 $a=-1$ 时，$f(x)=-x-\ln x-\frac{2}{x}$，所以 $f'(x)=-1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=-\frac{x^2+x-2}{x^2}=-\frac{(x+2)(x-1)}{x^2}(x>0)$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$.

(2)**【证明】**由 $f(x_1)=f(x_2)$，得 $ax_1-\ln x_1-\dfrac{2}{x_1}=ax_2-\ln x_2-\dfrac{2}{x_2}$.

所以 $\ln x_2-\ln x_1=a(x_2-x_1)+\dfrac{2}{x_1}-\dfrac{2}{x_2}=a(x_2-x_1)+\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1x_2}$，

则 $\dfrac{1}{x_2-x_1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}=a+\dfrac{2}{x_1x_2}$. 要证 $(x_1+x_2)\left(a+\dfrac{2}{x_1x_2}\right)<\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}$，

只需证 $(x_1+x_2)\left(\dfrac{1}{x_2-x_1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}\right)<\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}$，

即证 $\dfrac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}$，需证 $\dfrac{1+\dfrac{x_2}{x_1}}{\dfrac{x_2}{x_1}-1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}<\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}$.

令 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$ (**方法：**在题目中遇到类似 $\dfrac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\dfrac{x_2}{x_1}$ 时，常设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，从而使双变量变为单变量)，

设 $g(t)=\dfrac{t+1}{t-1}\ln t(t>1)$，则 $g'(t)=\dfrac{t-\dfrac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$，

设 $h(t)=t-\dfrac{1}{t}-2\ln t(t>1)$ (**提示：**由于导函数 $g'(t)$ 的分母大于 0 恒成立，故只需讨论 $g'(t)$ 分子的符号)，

则 $h'(t)=1+\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}=\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^2>0$，

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $h(t)>h(1)=0$，

所以 $g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

由 $ax_2<x_1<x_2$，得 $\dfrac{1}{a}>\dfrac{x_2}{x_1}>1$，则 $\dfrac{1}{a}>1$，所以 $0<a<1$，

所以 $g\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)<g\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{a}+1}{\dfrac{1}{a}-1}\ln\dfrac{1}{a}=\dfrac{a+1}{1-a}\ln\dfrac{1}{a}$，

所以需证 $\dfrac{a+1}{1-a}\ln\dfrac{1}{a}<\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}$，即证 $\ln\dfrac{1}{a}<\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}$.

令 $u=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，则 $u>1$ (**提示：**在使用换元法时要注意新元的取值范围)，即证 $2\ln u<u-\dfrac{1}{u}$.

设 $\varphi(u)=2\ln u-u+\dfrac{1}{u}$，则 $\varphi'(u)=\dfrac{2}{u}-1-\dfrac{1}{u^2}=\dfrac{-(u-1)^2}{u^2}<0$，

所以 $\varphi(u)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $\varphi(u)<\varphi(1)=0$，

所以 $2\ln u-u+\dfrac{1}{u}<0$，即 $\ln\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}$ 成立，

故 $(x_1+x_2)\left(a+\dfrac{2}{x_1x_2}\right)<\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}$.

6.**【解】**(1) $f(x)=(x^2-x-b)e^x$，则 $f'(x)=[x^2+x-(b+1)]e^x$，

令 $g(x)=x^2+x-(b+1)(x\in\mathbf{R})$，

方程 $x^2+x-(b+1)=0$ 的根的判别式 $\Delta=1+4(b+1)=4b+5$，

当 $4b+5>0$，即 $b>-\dfrac{5}{4}$ 时，令 $g(x)=0$ 得 $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{4b+5}}{2}$，

$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{4b+5}}{2}$，

当 $x<x_1$ 或 $x>x_2$ 时，$g(x)>0$，因为 $e^x>0$，所以 $f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 单调递增；

当 $x_1<x<x_2$ 时，$g(x)<0$，因为 $e^x>0$，所以 $f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 单调递减.

当 $4b+5\leqslant 0$，即 $b\leqslant -\dfrac{5}{4}$ 时，$g(x)\geqslant 0$ 恒成立，因为 $e^x>0$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，且 $f'(x)$ 不恒为 0，函数 $f(x)$ 单调递增.

综上，当 $b\leqslant -\dfrac{5}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增；

当 $b>-\dfrac{5}{4}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{-1-\sqrt{4b+5}}{2}\right)$ 和 $\left(\dfrac{-1+\sqrt{4b+5}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{-1-\sqrt{4b+5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{4b+5}}{2}\right)$ 上单调递减.

(2) 由 (1) 知 $x_1+x_2=-1$，$x_1x_2=-(b+1)$，

且 $b>-\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}=\dfrac{x_2^2-x_2-b}{x_1^2-x_1-b}e^{x_2-x_1}=\dfrac{x_2^2-x_2-(b+1)+1}{x_1^2-x_1-(b+1)+1}e^{x_2-x_1}=\dfrac{x_2^2-x_2+x_1x_2+1}{x_1^2-x_1+x_1x_2+1}\cdot e^{x_2-x_1}=\dfrac{x_2(x_2+x_1)-x_2+1}{x_1(x_2+x_1)-x_1+1}e^{x_2-x_1}=\dfrac{-2x_2+1}{-2x_1+1}e^{x_2-x_1}=\dfrac{2x_2-1}{2x_1-1}e^{x_2-x_1}$.

令 $x_2-x_1=t(t<0)$，由 $x_1+x_2=-1$ 可得 $x_2=\dfrac{t-1}{2}$，$x_1=\dfrac{-t-1}{2}$，

所以 $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}=\dfrac{2-t}{2+t}e^t$，由 $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}\geqslant\dfrac{3}{e}>0$ 可得 $-2<t<0$.

令 $h(t)=\dfrac{2-t}{2+t}e^t(-2<t<0)$，则 $h'(t)=\dfrac{-t^2}{(t+2)^2}e^t<0$，函数 $h(t)$ 在 $(-2,0)$ 上单调递减，又 $h(-1)=\dfrac{3}{e}$，要使 $\dfrac{f(x_2)}{f(x_1)}\geqslant\dfrac{3}{e}$，则需满足 $h(t)\geqslant h(-1)$，所以 $-2<t\leqslant -1$. 因为 $-(b+1)=x_1x_2=-\dfrac{t^2-1}{4}$，且 $-\dfrac{3}{4}<-\dfrac{t^2-1}{4}\leqslant 0$，所以 $-\dfrac{3}{4}<-(b+1)\leqslant 0$，解得 $-1\leqslant b<-\dfrac{1}{4}$，

所以实数 b 的取值范围为 $\left[-1,-\dfrac{1}{4}\right)$.

7. (1)【**解**】因为 $f(x)=x^3-ax^2(x\in\mathbf{R})$，所以 $f'(x)=3x^2-2ax$.

若 $a=0$，则 $f'(x)=3x^2\geqslant 0$，且 $f'(x)$ 不恒为 0，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，没有极值，故舍去.

若 $a<0$，当 $x<\dfrac{2a}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\dfrac{2a}{3}\right)$ 上单调递增，当 $\dfrac{2a}{3}<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{2a}{3},0\right)$ 上单调递减，

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$，不符合题意，故舍去.

若 $a>0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

当 $0<x<\dfrac{2a}{3}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{2a}{3}\right)$ 上单调递减，

当 $x>\dfrac{2a}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $\left(\dfrac{2a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(\dfrac{2a}{3}\right)=-\dfrac{4}{27}a^3=-4$，

所以 $a=3$.

(2)【证明】由(1)知，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，

当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以不妨设 $0<x_1<2<x_2<3$.

下面先证 $x_1+x_2<4$：

要证 $x_1+x_2<4$，即证 $x_1<4-x_2$，因为 $0<x_1<2<x_2<3$，所以 $1<4-x_2<2$，又因为 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，

所以只需证 $f(x_1)>f(4-x_2)$，又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，

所以只需证 $f(x_2)>f(4-x_2)$，即证 $f(x_2)-f(4-x_2)>0$.

设 $g(x)=f(x)-f(4-x)\ (2<x<3)$，

突破点

则 $g'(x)=f'(x)+f'(4-x)=3x(x-2)+3(4-x)(4-x-2)=6(x-2)^2>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调递增，

所以 $g(x)>g(2)=0$，所以 $f(x_2)-f(4-x_2)>0$，所以 $x_1<4-x_2$.

下面证 $3<x_1+x_2$：

设 $h(x)=2x^2-6x\ (0<x<3)$，因为 $f(x)-h(x)=x^3-5x^2+6x=x(x-2)(x-3)$，

当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)>h(x)$；当 $x\in(2,3)$ 时，$f(x)<h(x)$.

函数 $h(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=\dfrac{3}{2}$，且 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{3}{2},3\right)$ 上单调递增.

设 $x_3\in\left(0,\dfrac{3}{2}\right)$，使得 $f(x_1)=h(x_3)=t$，因为 $f(x_1)>h(x_1)$，

所以 $h(x_3)>h(x_1)$，所以 $x_3<x_1$.

设 $x_4\in(2,3)$，使得 $f(x_2)=h(x_4)=t$，因为 $f(x_2)<h(x_2)$，

所以 $h(x_2)>h(x_4)$，所以 $x_4<x_2$.

因为 $h(x_3)=h(x_4)=t$，所以 $x_3+x_4=3$，所以 $3=x_3+x_4<x_1+x_2$.

综上，$3<x_1+x_2<4$.

8.【证明】(1)由题意，$f(x)-1=2x\ln x-x^2=x(2\ln x-x)$.

设 $g(x)=2\ln x-x\ (x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{2-x}{x}$，

当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 单调递减.

从而 $g(x)_{\max}=g(2)=2\ln 2-2=2(\ln 2-1)<0$，故 $g(x)<0$ 恒成立，所以 $f(x)-1=xg(x)<0$，故 $f(x)<1$.

(2) 由题意，$f'(x)=2\ln x+2-2x$，$f''(x)=\frac{2}{x}-2=\frac{2(1-x)}{x}$，$x>0$，

所以当 $0<x<1$ 时，$f''(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f''(x)<0$，

从而 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

故 $f'(x)\leqslant f'(1)=0$，且 $f'(x)$ 不恒为 0，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(1)=0$，

若 $0<x_1<x_2\leqslant 1$，则 $f(x_1)+f(x_2)>0$，不符合题意，

若 $1\leqslant x_1<x_2$，则 $f(x_1)+f(x_2)<0$，不符合题意，所以 $0<x_1<1<x_2$.

要证 $x_1+x_2>2$，只需证 $x_2>2-x_1$，

结合 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减知，只需证 $f(x_2)<f(2-x_1)$.

又 $f(x_1)+f(x_2)=0$，所以 $f(x_2)=-f(x_1)$，故只需证 $-f(x_1)<f(2-x_1)$，即证 $f(x_1)+f(2-x_1)>0$①.

令 $F(x)=f(x)+f(2-x)$，$0<x<1$，

则 $F'(x)=f'(x)+f'(2-x)=2\ln x+2-2x-[2\ln(2-x)+2-2(2-x)]=2\ln\frac{x}{2-x}+4-4x$，

则 $F''(x)=2\times\frac{2-x}{x}\times\frac{2-x+x}{(2-x)^2}-4=\frac{4}{x(2-x)}-4>\frac{4}{\left(\frac{x+2-x}{2}\right)^2}-4=0$，

所以 $F'(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，又 $F'(1)=0$，所以 $F'(x)<0$，从而 $F(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减.

因为 $F(1)=2f(1)=0$，所以 $F(x)>0$.

因为 $0<x_1<1$，所以 $F(x_1)=f(x_1)+f(2-x_1)>0$，即不等式①成立，

故 $x_1+x_2>2$.