专题 12　圆锥曲线

考点 44　椭圆

1. B　【解析】由题意得$\dfrac{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}}{|x-4|}=\dfrac{1}{2}$，整理得$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$，所以点 P 的轨迹为椭圆. 故选 B.

2. C　【解析】设 $M(x_0,y_0)$，由题知 $B(0,1)$，且$\dfrac{x_0^2}{3}+y_0^2=1$，

所以$|MB|=\sqrt{(x_0-0)^2+(y_0-1)^2}$

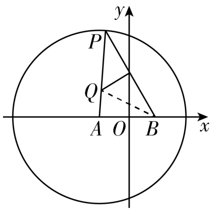
$=\sqrt{x_0^2+(y_0-1)^2}=\sqrt{3-3y_0^2+(y_0-1)^2}$

$=\sqrt{-2y_0^2-2y_0+4}=\sqrt{-2\left(y_0+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{2}}$.

又因为 $y_0\in[-1,1]$，所以当 $y_0=-\dfrac{1}{2}$时取最大值，

所以$|MB|_{\max}=\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

3. $\sqrt{14}$　【解析】如图，连接 QB，



因为点 Q 在线段 PB 的垂直平分线上，

所以$|PQ|=|QB|$，

故$|QA|+|QB|=|QA|+|PQ|=|PA|=6$，

所以点 Q 的轨迹是以 A,B 为焦点的椭圆.

设其方程为$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则 $2a=6,a=3,c=2,b^2=a^2-c^2=9-4=5$，

故点 Q 的轨迹方程为$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

设直线方程为 $x+y=t$，联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1,\\ x+y=t,\end{cases}$消去 y 得 $14x^2-18tx+9t^2-45=0$，

则判别式 $\Delta=(-18t)^2-4\times14\times(9t^2-45)\geqslant0,t^2\leqslant14$，

解得$-\sqrt{14}\leqslant t\leqslant\sqrt{14}$，

故 $x+y$ 的最大值为 $\sqrt{14}$，

即 x_Q+y_Q 的最大值为 $\sqrt{14}$.

4. C　【解析】令 $x=0$，可得 $y=-3$；令 $y=0$，可得 $x=2$，

则椭圆的两个顶点坐标分别为$(0,-3),(2,0)$.

因为$|-3|>2$，所以椭圆的焦点在 y 轴上（**提示：**求椭圆的标准方程的第一步就是定位，即确定焦点位置，本题是根据两轴上的顶点坐标来确定的）.

设椭圆的方程为$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $a=3,b=2$，所以椭圆的方程为$\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$. 故选 C.

5. C　【解析】设$|MF_1|=m,|MF_2|=n$，因为 $MF_1\perp MF_2$，$|MF_1|\cdot|MF_2|=8$，$|F_1F_2|=2\sqrt{5}$，所以 $m^2+n^2=20,mn=8$，所以$(m+n)^2=m^2+n^2+2mn=36$，所以 $m+n=2a=6$，所以 $a=3$. 因为 $c=\sqrt{5}$，所以

$b=\sqrt{a^2-c^2}=2$. 所以该椭圆的方程是$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$. 故选 C.

6. B 【解析】设 $A(m,n)$, $F(\sqrt{a^2-1},0)$, 则 $P\left(\dfrac{m+\sqrt{a^2-1}}{2},\dfrac{n}{2}\right)$,

因为 $|OP|=|PF|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $|AF|=\sqrt{3}$,

所以$\begin{cases}(m-\sqrt{a^2-1})^2+n^2=3,\\ \dfrac{(m+\sqrt{a^2-1})^2}{4}+\dfrac{n^2}{4}=\dfrac{3}{4},\\ \dfrac{m^2}{a^2}+n^2=1,\end{cases}$即$\begin{cases}(m-\sqrt{a^2-1})^2+n^2=3,\\ (m+\sqrt{a^2-1})^2+n^2=3,\\ \dfrac{m^2}{a^2}+n^2=1,\end{cases}$

解得 $m=0$, $n^2=1$, $a^2=3$, 所以椭圆 M 的方程为$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$. 故选 B.

7. D 【解析】由题意可得, $a=2$, $b=\sqrt{3}$, $c=\sqrt{a^2-b^2}=1$, 则椭圆 C: $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的右焦点为 $F(1,0)$.

$\because \dfrac{1}{4}+\dfrac{(2\sqrt{2})^2}{3}=\dfrac{35}{12}>1$, $\therefore$ 点 $A(1,2\sqrt{2})$ 在椭圆外 (提示: $P(x_0,y_0)$ 在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 内, 即$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}<1$; $P(x_0,y_0)$ 在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 外, 即$\dfrac{x_0^2}{a^2}+\dfrac{y_0^2}{b^2}>1$).

设椭圆 C 的左焦点为 $F'(-1,0)$, 连接 PF'(图略),

则 $|PF'|+|PF|=4$, 即 $|PF|=4-|PF'|$,

故 $|PA|+|PF|=|PA|+4-|PF'|$.

$\because$ $|PA|-|PF'|\leqslant|AF'|=2\sqrt{3}$, 当点 P 为 AF'的延长线与椭圆的交点时取等号, $\therefore$ $|PA|+|PF|\leqslant4+2\sqrt{3}$,

突破点

故 $|PA|+|PF|$的最大值为 $4+2\sqrt{3}$. 故选 D.

8. D 【解析】因为椭圆 C 过点 $A(-2,0)$ 和 $B(0,1)$,

所以 $a^2=4$, $b^2=1$, 可得 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$,

所以 $F_1(-\sqrt{3},0)$, $F_2(\sqrt{3},0)$.

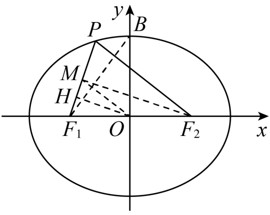
设 $P(x,y)$, 由题意得直线 AB 的方程为$\dfrac{x}{-2}+y=1$, 即 $x-2y+2=0$.

因为点 P 在线段 AB 上, 所以 $P(x,y)$ 满足$-2\leqslant x\leqslant0$, $0\leqslant y\leqslant1$,

则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{3}-x,-y)\cdot(\sqrt{3}-x,-y)=x^2+y^2-3=(2y-2)^2+y^2-3=5y^2-8y+1=5\left(y-\dfrac{4}{5}\right)^2-\dfrac{11}{5}$, $y\in[0,1]$,

当 $y=\dfrac{4}{5}$时, $(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\min}=-\dfrac{11}{5}$, 当 $y=0$ 时, $(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\max}=1$, 所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围为$\left[-\dfrac{11}{5},1\right]$. 故选 D.

9. BCD 【解析】对于 B, 由题知, 椭圆$\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ 的焦点在 x 轴上, 且 $a=5$, $b=4$, $c=3$, 连接 OM, 如图所示,



所以 $|OM|=3$, $|PF_2|=6$, $|F_1F_2|=6$,

所以 $|PF_1|=2a-|PF_2|=4$,

所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot\sqrt{|PF_2|^2-\left(\frac{|PF_1|}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{36-4}=8\sqrt{2}$，故 B 正确；

对于 D，连接 MF_2，易知 $MF_1\perp MF_2$.

因为 PF_1 的中点为 M，

所以 $|MF_1|=2$，过点 O 作 $OH\perp MF_1$ 于 H，$|OH|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{|PF_2|^2-\left(\frac{|PF_1|}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{36-4}=2\sqrt{2}$ （提示：$F_2M\perp PF_1$，所以 $|OH|=\frac{1}{2}|F_2M|$），则 H 在圆 $x^2+y^2=8$ 上，故 D 正确；

对于 C，因为 $|OM|=|OF_1|=3$，$|MF_2|=2|OH|=4\sqrt{2}$，$|MF_1|=2$，O 为 F_1F_2 的中点，$OH\perp MF_1$，所以 $|HF_1|=1$，

直线 PF_1 的斜率 $k_{PF_1}=\tan\angle HF_1O=\frac{|OH|}{|HF_1|}=2\sqrt{2}$，故 C 正确；

对于 A，设椭圆的上顶点为 B，连接 BF_1，直线 BF_1 的斜率 $k_{BF_1}=\frac{4}{3}<k_{PF_1}$，所以点 P 在第二象限，故 A 错误. 故选 BCD.

10. 2　5　**【解析】**$\because$ 椭圆 C 的长轴长为 $2a=4$，$\therefore a=2$，又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore c=\sqrt{3}$，$\therefore b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，$\therefore$ 椭圆 C 的短轴长为 $2b=2$，$\therefore$ 椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

设 $P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$，$Q(2\cos\beta,\sin\beta)$ （提示：椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上任意一点的坐标都可以表示为 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$），

直线 OP，OQ 的斜率分别为 k_{OP}，k_{OQ}，$\therefore k_{OP}\cdot k_{OQ}=\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{2\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{4\cos\alpha\cos\beta}=-\frac{1}{4}$，

$\therefore \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=0$，

$\therefore \alpha-\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore |OP|^2+|OQ|^2=4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+4\cos^2\beta+\sin^2\beta=4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+k\pi+\beta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+k\pi+\beta\right)+4\cos^2\beta+\sin^2\beta=4\sin^2\beta+\cos^2\beta+4\cos^2\beta+\sin^2\beta=5$.

11. (1)**【解】**设 $T(x,y)$，则 $\frac{\sqrt{x^2+(y-\sqrt{3})^2}}{\left|y-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y\neq\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

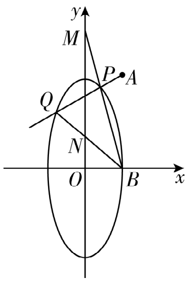
整理得 $4x^2+y^2=4$，即 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$，

故动点 T 的轨迹 C 的方程为 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$.

(2)**【证明】**当直线 PQ 斜率不存在时不成立，故直线 PQ 的斜率存在，记为 k，

故设直线 PQ 的方程为 $y=kx-k+2$.

联立$\begin{cases}\dfrac{y^2}{4}+x^2=1,\\ y=kx-k+2,\end{cases}$得$(4+k^2)x^2+(4k-2k^2)x+k^2-4k=0.$



由判别式$\Delta>0$,得$(4k-2k^2)^2-4(4+k^2)(k^2-4k)>0$,整理得$k>0$.

设$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,则$x_1+x_2=\dfrac{2k^2-4k}{4+k^2}$,

$x_1x_2=\dfrac{k^2-4k}{4+k^2}$.

直线BP的方程为$\dfrac{y}{y_1}=\dfrac{x-1}{x_1-1}$,

令$x=0$,得$M\left(0,\dfrac{y_1}{1-x_1}\right)$,同理可得$N\left(0,\dfrac{y_2}{1-x_2}\right)$.

则$\dfrac{y_1}{1-x_1}+\dfrac{y_2}{1-x_2}=\dfrac{(kx_1-k+2)(1-x_2)+(kx_2-k+2)(1-x_1)}{(1-x_1)(1-x_2)}$

$=\dfrac{(2k-2)(x_1+x_2)-2kx_1x_2-2k+4}{1-(x_1+x_2)+x_1x_2}$

$=\dfrac{(2k-2)\cdot\dfrac{2k^2-4k}{4+k^2}-2k\cdot\dfrac{k^2-4k}{4+k^2}-2k+4}{1-\dfrac{2k^2-4k}{4+k^2}+\dfrac{k^2-4k}{4+k^2}}=4$,

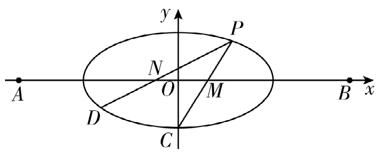
所以$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_1}{1-x_1}+\dfrac{y_2}{1-x_2}\right)=2$,所以线段$MN$的中点坐标为$(0,2)$,

即线段MN的中点为定点.

12. (1)【**解**】设椭圆方程为$px^2+qy^2=1(p>0,q>0,p\neq q)$,

则$\begin{cases}q=1,\\ \dfrac{64}{25}p+\dfrac{9}{25}q=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}p=\dfrac{1}{4},\\ q=1,\end{cases}$所以椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)【**证明**】设$P(x_0,y_0)$,$A(m,0)$,$B(n,0)$,$M(x_M,0)$,$N(x_N,0)$,



则$\overrightarrow{CM}=(x_M,1)$,$\overrightarrow{CP}=(x_0,y_0+1)$,由$\overrightarrow{CM}//\overrightarrow{CP}$,得$x_M(y_0+1)=x_0$,

而$y_0+1\neq0$,于是$x_M=\dfrac{x_0}{y_0+1}$.

$\overrightarrow{DN}=\left(x_N+\dfrac{8}{5},\dfrac{3}{5}\right)$,$\overrightarrow{DP}=\left(x_0+\dfrac{8}{5},y_0+\dfrac{3}{5}\right)$,

同理可得$\left(x_N+\dfrac{8}{5}\right)\left(y_0+\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{3}{5}\left(x_0+\dfrac{8}{5}\right)$,

而$y_0+\dfrac{3}{5}\neq0$,于是$x_N=\dfrac{\dfrac{3}{5}x_0-\dfrac{8}{5}y_0}{y_0+\dfrac{3}{5}}$,

则$\overrightarrow{NA}=\left(m-\dfrac{\dfrac{3}{5}x_0-\dfrac{8}{5}y_0}{y_0+\dfrac{3}{5}},0\right)$,$\overrightarrow{MB}=\left(n-\dfrac{x_0}{y_0+1},0\right)$,

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=\left(n-\dfrac{x_0}{y_0+1}\right)\left(m-\dfrac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}}\right)$

$=\dfrac{(ny_0+n-x_0)(5my_0+8y_0+3m-3x_0)}{(y_0+1)(5y_0+3)}$,

令 $5my_0+8y_0+3m=-3ny_0-3n$,因为 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆上的动点,所以 $5m+8=-3n,3m=-3n$,得 $n=4,m=-4$,

于是 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=\dfrac{-3[(4y_0+4)^2-x_0^2]}{(y_0+1)(5y_0+3)}=\dfrac{-3[(4y_0+4)^2-(4-4y_0^2)]}{(y_0+1)(5y_0+3)}=\dfrac{-12(5y_0^2+8y_0+3)}{5y_0^2+8y_0+3}=-12$,

所以存在 $A(-4,0)$ 和 $B(4,0)$,使得 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}$ 是定值,且定值为-12.

13.【解】(1)联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ x=c,\end{cases}$解得 $y=\pm\dfrac{b^2}{a}$,由题意得$\dfrac{2b^2}{a}=2\sqrt{2}$,所以 $b^2=\sqrt{2}a$. 因为椭圆 W 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $c^2=\dfrac{1}{2}a^2$.

因为 $a^2=b^2+c^2$,所以 $a^2=8,b^2=4$,

故椭圆 W 的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2)由题意知,直线 AC 不垂直于 y 轴.

设直线 AC 的方程为 $x=ty-2$,$A(x_1,y_1)$,$C(x_2,y_2)$,

联立$\begin{cases}x=ty-2,\\ x^2+2y^2=8,\end{cases}$消去 x 并整理得 $(t^2+2)y^2-4ty-4=0$,

判别式 $\Delta=32(t^2+1)>0$,

所以 $y_1+y_2=\dfrac{4t}{t^2+2}$,$y_1y_2=-\dfrac{4}{t^2+2}$,

所以 $|AC|=\sqrt{(t^2+1)}\,|y_2-y_1|=\sqrt{(t^2+1)[(y_2+y_1)^2-4y_2y_1]}=\sqrt{(t^2+1)\left[\left(\dfrac{4t}{t^2+2}\right)^2+\dfrac{16}{t^2+2}\right]}=\dfrac{4\sqrt{2}(t^2+1)}{t^2+2}$.

因为点 O 到直线 AC 的距离 $d=\dfrac{2}{\sqrt{t^2+1}}$,且 O 是线段 AB 的中点,

所以点 B 到直线 AC 的距离为 $2d$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|AC|\cdot 2d=\dfrac{4\sqrt{2}(t^2+1)}{t^2+2}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{t^2+1}}=\dfrac{8\sqrt{2}\sqrt{t^2+1}}{t^2+2}$.

由$\dfrac{8\sqrt{2}\sqrt{t^2+1}}{t^2+2}=\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$,解得 $t^2=8$ 或 $t^2=-\dfrac{8}{9}$(舍去),

所以 $t=\pm2\sqrt{2}$,

故直线 AC 的方程为 $x-2\sqrt{2}y+2=0$ 或 $x+2\sqrt{2}y+2=0$.

14.【解】(1)将 $A(-2,0)$,$B\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 代入椭圆 C:$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$中,得$\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{0^2}{b^2}=1,\\ \dfrac{3}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\end{cases}$

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2) 由题意,设直线 $l:y=kx+m$, $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$,

则 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+3},\\x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3},\end{cases}$

判别式 $\Delta=64k^2m^2-4(4k^2+3)(4m^2-12)=192k^2-48m^2+144>0$

(**提示:**已知条件无法保证直线与椭圆相交,因此需用判别式来限制).

$k_1=\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{kx_1+m}{x_1+2}$, $k_2=\frac{y_2}{x_2+2}=\frac{kx_2+m}{x_2+2}$,

故 $k_1+k_2=\frac{kx_1+m}{x_1+2}+\frac{kx_2+m}{x_2+2}$

$=\frac{2kx_1x_2+2k(x_1+x_2)+m(x_1+x_2)+4m}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$

$=\frac{8km^2-24k-16k^2m-8km^2+16k^2m+12m}{4m^2-12-16km+16k^2+12}$

$=\frac{3m-6k}{m^2-4km+4k^2}$,

由 $k\cdot k_1+k\cdot k_2+3=0$,得 $(k_1+k_2)k+3=0$,则 $m^2-3km+2k^2=0$,

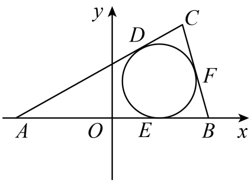
即 $(m-2k)(m-k)=0$,解得 $m=2k$ 或 $m=k$.

①当 $m=2k$ 时,直线 $l:y=kx+2k=k(x+2)$,过定点 $A(-2,0)$,不符合题意,舍去;

②当 $m=k$ 时,直线 $l:y=kx+k=k(x+1)$,过定点 $(-1,0)$,即直线 l 过左焦点,此时 $\Delta=192k^2-48m^2+144=144k^2+144>0$,符合题意. 所以 $\triangle FPQ$ 的周长为 $4a=8$.

考点 45 双曲线

1. C 【解析】如图,内切圆分别与 x 轴,AC,BC 相切于点 E,D,F,$|AD|=|AE|=9$,$|BF|=|BE|=3$,$|CD|=|CF|$,所以 $|CA|-|CB|=9-3=6$. 根据双曲线定义,所求轨迹是以 A,B 为焦点,实轴长为 6 的双曲线的右支(除去右顶点),则 $c=6$,$a=3$,$b=\sqrt{c^2-a^2}=3\sqrt{3}$,顶点 C 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1(x>3)$. 故选 C.



易错警示 **对双曲线定义的理解不透彻致错**

(1) 双曲线定义用集合语言可叙述为:点集 $P=\{M\mid ||MF_1|-|MF_2||=2a, 0<2a<|F_1F_2|\}$;

(2) F_1,F_2 分别为双曲线的左、右焦点或上、下焦点,当 $|MF_1|-|MF_2|=2a$ 时,表示双曲线的右支或下支;当 $|MF_1|-|MF_2|=-2a$ 时,表示双曲线的左支或上支.

2. B 【解析】因为方程$\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$表示双曲线,所以$(2-m)(m+1)<0$$\left(\text{提示:当方程}\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1\text{ 表示的曲线为双曲线时,必须满足 }mn<0\right)$,解得 $m<-1$ 或 $m>2$,

所以"$m>2$"是"方程$\frac{x^2}{2-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$表示双曲线"的充分不必要条件. 故选 B.

3. C 【解析】圆 $C:x^2+y^2-6x+6=0$,整理为$(x-3)^2+y^2=3$,圆心坐标为$(3,0)$,半径 $r=\sqrt{3}$,双曲线的渐近线方程为 $bx\pm ay=0$.

由题意可知$\begin{cases}\frac{|3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{3},\\ c=3,\\ a^2+b^2=c^2,\end{cases}$解得 $b^2=3,c^2=9,a^2=6$,所以双曲线的方程为$\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{3}=1$. 故选 C.

4. A 【解析】由题意可知,双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,点 $P(-1,\sqrt{3})$在一条渐近线上,所以$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$,则 $b=\sqrt{3}a$,且两条渐近线的倾斜角分别为 $60°,120°$,设 O 为坐标原点,则$\angle POF=60°$. 又$|PF|=2,|OP|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$,所以$\triangle OFP$ 为等边三角形,从而 $c=|OF|=2$. 由 $a^2+b^2=c^2,b=\sqrt{3}a$,解得 $a^2=1,b^2=3$,所以双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$,故选 A.

5. B 【解析】因为$|F_1A|=2|F_2A|$,所以$|F_1A|>|F_2A|$,
又因为点 A 在 C 上,所以$|F_1A|-|F_2A|=2a$,
即 $2|F_2A|-|F_2A|=2a$,所以$|F_2A|=2a,|F_1A|=4a$.
在$\triangle AF_1F_2$ 中,由正弦定理得$\frac{|AF_2|}{\sin\angle AF_1F_2}=\frac{|AF_1|}{\sin\angle AF_2F_1}$,
所以 $\sin\angle AF_2F_1=\frac{|AF_1|\sin 30°}{|AF_2|}=1$,
又 $0°<\angle AF_2F_1<180°$,所以$\angle AF_2F_1=90°$,故$\angle F_1AF_2=60°$,
则 $S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}|AF_1||AF_2|\sin 60°=2\sqrt{3}a^2=6\sqrt{3}$,所以 $a^2=3$,
则$|F_1F_2|^2=(2c)^2=|AF_1|^2-|AF_2|^2=16a^2-4a^2=12a^2=36$,所以 $c^2=9$,所以 $b^2=c^2-a^2=6$,所以 C 的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$. 故选 B.

6. D 【解析】$\because$ 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的离心率为 2,

$\therefore\frac{c}{a}=2$,即 $c^2=4a^2$,$\because c^2=a^2+b^2$,$\therefore b^2=3a^2$,即$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$.

$\because$ 双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$,

$\therefore$ 双曲线 C 的渐近线的斜率为$\pm\sqrt{3}$. 故选 D.

7. D 【解析】如图所示,因为 $\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{F_2A}$,所以$\triangle F_1AF_2\backsim\triangle F_1BC$.
易知$|F_1F_2|=2c$,则$|F_2C|=6c$,设$|AF_1|=t$,则$|BF_1|=4t$,$|AB|=$

$3t$. 因为 BF_2 平分 $\angle F_1BC$,

由角平分线定理可知,$\dfrac{|BF_1|}{|BC|}=\dfrac{|F_1F_2|}{|F_2C|}=\dfrac{2c}{6c}=\dfrac{1}{3}$,

所以$|BC|=3|BF_1|=12t$,所以$|AF_2|=\dfrac{1}{4}|BC|=3t$.

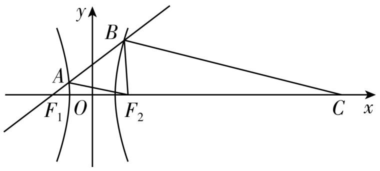
由双曲线定义知$|AF_2|-|AF_1|=2a$,即 $3t-t=2a$,解得 $t=a$.

又由$|BF_1|-|BF_2|=2a$,得$|BF_2|=4t-2a=2t=2a$,

所以$|AB|=|AF_2|=3a$,即$\triangle ABF_2$ 是等腰三角形.

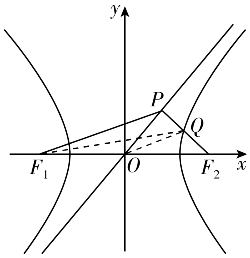
由余弦定理知,$\cos\angle F_1BF_2=\dfrac{|BF_1|^2+|BF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|BF_1||BF_2|}=\dfrac{|BA|^2+|BF_2|^2-|AF_2|^2}{2|AB||BF_2|}$,即$\dfrac{16a^2+4a^2-4c^2}{16a^2}=\dfrac{1}{3}$,化简得 $11a^2=3c^2$,

所以 $8a^2=3b^2$,则双曲线 Γ 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}x$. 故选 D.



8. C 【解析】因为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的两条渐近线的方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$,不妨取 $D(a,b)$,$E(a,-b)$,所以$\triangle ODE$ 的面积为$\dfrac{1}{2}\times 2b\times a=32$,即 $ab=32$. 又因为 $c^2=a^2+b^2\geqslant 2ab=64$,当且仅当 $a=b=4\sqrt{2}$时,等号成立,所以 c 的最小值为 8,即焦距的最小值为 16. 故选 C.

9. ACD 【解析】连接 F_1Q,OQ,如图所示,由题可知,$|PF_2|=\dfrac{\left|\dfrac{2c}{a}\right|}{\sqrt{\left(\dfrac{2}{a}\right)^2+1}}=2$,



$|OP|=\sqrt{c^2-4}=a$,$|OF_1|=|OF_2|=c$,

$\sin\angle POF_2=\dfrac{2}{c}$,$\cos\angle POF_2=\dfrac{a}{c}$.

在$\triangle POF_1$ 中,由正弦定理可知,$\dfrac{|OP|}{\sin\angle PF_1O}=\dfrac{|OF_1|}{\sin\angle F_1PO}$,即$\dfrac{a}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\angle POF_1\right)}=\dfrac{c}{\dfrac{1}{2}}$,即$\dfrac{a}{\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{a}{c}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{c}}=\dfrac{c}{\dfrac{1}{2}}$,解得 $a=\sqrt{3}$,则 $c=\sqrt{7}$,$\sin\angle PF_1F_2=\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{a}{c}\right)+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{2}{c}=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$,$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$,故 A,C 正确,B 错误.

在$\triangle QF_1F_2$ 中,由余弦定理可知,

$\cos\angle QF_2F_1=\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{(2\sqrt{7})^2+|QF_2|^2-(|QF_2|+2\sqrt{3})^2}{2|QF_2|\times 2\sqrt{7}}$,

解得$|QF_2|=8-4\sqrt{3}$,故 $S_{\triangle OF_2Q}=\dfrac{1}{2}|QF_2||OF_2|\sin\angle QF_2O=\dfrac{1}{2}\times$

$(8-4\sqrt{3})\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=4\sqrt{3}-6$，故 D 正确.

10. $\frac{5}{2}$ 【解析】由题可知，离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$，设双曲线一条渐近线为 $y=\frac{b}{a}x$，即 $bx-ay=0$，焦点到渐近线的距离 $d=\frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{bc}{c}=b=5$. 由 $c=\sqrt{5}a$，$c^2=a^2+b^2$，解得 $a=\frac{5}{2}$.

11. (1)【解】由已知可得，$A(-1,0)$，$B(1,0)$.

因为点 $M(2,\sqrt{3})$，直线 BM 的斜率 $k_{MB}=\frac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$，

所以直线 BM 的垂线 l 的方程为 $y-0=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$，

即 $x=-\sqrt{3}y+2$.

设点 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$，

联立直线 l 与双曲线的方程 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}y+2,\\x^2-y^2=1,\end{cases}$ 可得 $2y^2-4\sqrt{3}y+3=0$，

则判别式 $\Delta=(-4\sqrt{3})^2-4\times2\times3=24$，且 $\begin{cases}y_1+y_2=2\sqrt{3},\\y_1y_2=\frac{3}{2},\end{cases}$

所以 $|ST|=\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

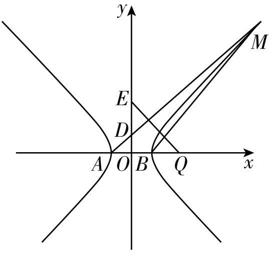
$=2\sqrt{(2\sqrt{3})^2-4\times\frac{3}{2}}$

$=2\sqrt{6}$.

又原点 O 到直线 l 的距离 $d=1$，

所以 $\triangle OST$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times|ST|\times d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times1=\sqrt{6}$.

(2)【证明】如图所示，若选①②为条件，③为结论.



设点 $D(0,y_D)$，$M(x_0,y_0)$ $(x_0>1)$，且 $x_0^2-y_0^2=1$.

因为 A，D，M 三点共线，所以 $\frac{y_0}{x_0+1}=y_D$.

又 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$，所以点 E 的坐标为 $\left(0,\frac{2y_0}{x_0+1}\right)$.

因为直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\frac{y_0}{x_0-1}$，$BM\perp EQ$，

所以直线 EQ 的斜率 $k_{EQ}=-\frac{1}{k_{BM}}=\frac{1-x_0}{y_0}$.

设点 $Q(x_Q,0)$，因为直线 EQ 的斜率 $k_{EQ}=\frac{1-x_0}{y_0}=\frac{\frac{2y_0}{x_0+1}}{-x_Q}$，

所以 $x_Q=\frac{2y_0^2}{x_0^2-1}=\frac{2y_0^2}{y_0^2}=2$，所以 $|OQ|=2$.

若选①③为条件，②为结论.

设点 $D(0,y_D)$，$M(x_0,y_0)$ $(x_0>1)$，且 $x_0^2-y_0^2=1$，

因为 A,D,M 三点共线，所以$\frac{y_0}{x_0+1}=y_D$.

又 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$，所以点 E 的坐标为$\left(0,\frac{2y_0}{x_0+1}\right)$，

又$|OQ|=2$，点 Q 在 x 轴正半轴上，所以 $Q(2,0)$，

所以直线 EQ 的斜率 $k_{EQ}=\frac{\frac{2y_0}{x_0+1}}{-2}=-\frac{y_0}{x_0+1}$.

又直线 BM 的斜率 $k_{BM}=\frac{y_0}{x_0-1}$，所以 $k_{BM}\cdot k_{EQ}=-\frac{y_0}{x_0-1}\cdot\frac{y_0}{x_0+1}=-\frac{y_0^2}{x_0^2-1}=-\frac{x_0^2-1}{x_0^2-1}=-1$，所以 $BM\perp EQ$.

若选②③为条件，①为结论.

设点 $D(0,y_D)$，$M(x_0,y_0)(x_0>1)$，且 $x_0^2-y_0^2=1$，不妨设 $y_0>0$.

因为 A,D,M 三点共线，

所以 $y_D=\frac{y_0}{x_0+1}>0$，且 $y_D^2=\frac{y_0^2}{(x_0+1)^2}=\frac{x_0^2-1}{(x_0+1)^2}=\frac{x_0-1}{x_0+1}$.

因为$|OQ|=2$，点 Q 在 x 轴正半轴上，所以 $Q(2,0)$.

因为 $BM\perp EQ$，所以直线 EQ 的斜率 $k_{EQ}=-\frac{1}{k_{BM}}=\frac{1-x_0}{y_0}$.

设点 $E(0,y_E)$，因为 $k_{EQ}=\frac{y_E-0}{0-2}$，

所以 $y_E=\frac{2(x_0-1)}{y_0}>0$，且 $y_E^2=\frac{4(x_0-1)^2}{y_0^2}=\frac{4(x_0-1)^2}{x_0^2-1}=\frac{4(x_0-1)}{x_0+1}$，

所以 $y_E=2y_D$，即 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$.

12.【解】(1)由题意知，$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$，设 $D(x_0,y_0)(x_0\neq\pm a)$（**易错：**注意点 D 不与 A_1,A_2 重合），

则$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$，所以 $y_0^2=\frac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)$①.

因为直线 DA_1，DA_2 的斜率之积为 3，

所以$\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=3$，将①式代入化简得$\frac{b^2}{a^2}=3$②.

又 $a^2+b^2=4$，结合②式解得 $a=1$，$b=\sqrt{3}$，

故双曲线 C 的方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$.

(2)因为 A,B,Q,P 四点共圆，所以$\angle TPA=\angle TBQ$，$\triangle TAP\backsim\triangle TQB$，则$\frac{|TA|}{|TP|}=\frac{|TQ|}{|TB|}$，所以有$|TA||TB|=|TP||TQ|$.

设直线 AB 的方程为 $y=k_1(x-m)+n$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，不妨设 $m<1\leqslant x_1<x_2$，

将直线 AB 的方程代入 C 的方程中，化简整理得 $(3-k_1^2)x^2+(2k_1^2m-2k_1n)x-n^2+2k_1mn-k_1^2m^2-3=0$，

由已知得 $3-k_1^2\neq0$，且判别式 $\Delta=(2k_1^2m-2k_1n)^2-4(3-k_1^2)(-n^2+2k_1mn-k_1^2m^2-3)>0$，$x_1+x_2=\frac{-2k_1^2m+2k_1n}{3-k_1^2}$，$x_1x_2=\frac{-n^2+2k_1mn-k_1^2m^2-3}{3-k_1^2}$. $|AT|=\sqrt{1+k_1^2}(x_1-m)$，

$|BT|=\sqrt{1+k_1^2}(x_2-m)$，则$|AT||BT|=(1+k_1^2)(x_1-m)(x_2-m)=$

$(1+k_1^2)\cdot[x_1x_2-m(x_1+x_2)+m^2]=(1+k_1^2)\dfrac{3m^2-n^2-3}{3-k_1^2}$.

设直线 PQ 的方程为 $y=k_2(x-m)+n$,$P(x_3,y_3)$,$Q(x_4,y_4)$,设 $m<1<x_3<x_4$,

同理可得 $|PT||QT|=\dfrac{(1+k_2^2)(3m^2-n^2-3)}{3-k_2^2}$.

由已知得 $3m^2-n^2-3\neq0$,又 $|AT||BT|=|PT||QT|$,则 $\dfrac{1+k_1^2}{3-k_1^2}=\dfrac{1+k_2^2}{3-k_2^2}$,化简可得 $k_1^2=k_2^2$,

又 $k_1\neq k_2$,则 $k_1=-k_2$,即 $k_1+k_2=0$,即直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为 0.

考点 46　抛物线

1. A　【解析】由题意知 $F\left(0,-\dfrac{p}{2}\right)$,设 $|PF|=2a$,则 $P\left(\sqrt{3}a,-\dfrac{p}{2}-a\right)$,由抛物线的几何性质知 $\dfrac{p}{2}+a+\dfrac{p}{2}=2a$(关键:利用抛物线的定义,即抛物线上一点到焦点的距离等于该点到准线的距离建立 p,a 的等量关系式),则 $a=p$,

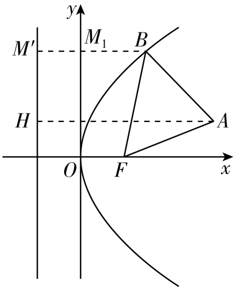
所以 $P\left(\sqrt{3}p,-\dfrac{3p}{2}\right)$,所以 $|OP|=\sqrt{3p^2+\dfrac{9}{4}p^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$,

解得 $p=1$. 故选 A.

2. B　【解析】如图所示,过点 B 作准线的垂线,垂足为 M',交 y 轴于点 M_1,抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$,准线 l 的方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$.

设点 B 到准线的距离为 d,则由抛物线的定义可知 $|BF|=|BM'|=d$,过点 A 作准线的垂线,垂足为 H,

$\therefore$ $\triangle ABF$ 的周长为 $|AB|+|AF|+|BF|=|BA|+|BM'|+|AF|\geqslant|AH|+|AF|=4+\sqrt{5}$,当且仅当 A,B,H 三点共线时,等号成立,



$\because$ $|AH|=3+\dfrac{p}{2}$,$|AF|=\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}-3\right)^2+1^2}=\sqrt{\dfrac{p^2}{4}+10-3p}$,

$\therefore$ $3+\dfrac{p}{2}+\sqrt{\dfrac{p^2}{4}+10-3p}=4+\sqrt{5}$,$\because$ $p>0$,$\therefore$ $p=2$.

3. B　【解析】由题可知,抛物线 C 开口向上,设 C 的方程为 $x^2=2py(p>0)$,则抛物线 C 的焦点坐标为 $\left(0,\dfrac{p}{2}\right)$,准线方程为 $y=-\dfrac{p}{2}$,所以 $\dfrac{\dfrac{p}{2}+(-9)}{2}=-\dfrac{p}{2}$,解得 $p=6$,所以 C 的方程为 $x^2=12y$,

故选 B.

4. A　【解析】设 $T(x_0,y_0)$,则 $\overrightarrow{MT}=(x_0,y_0-1)$.

又 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$,所以 $\overrightarrow{MF}=\left(\dfrac{p}{2},-1\right)$.

因为 $MF\perp MT$,所以 $\overrightarrow{MF}\cdot\overrightarrow{MT}=0$,可得 $\dfrac{p}{2}x_0-y_0+1=0$.

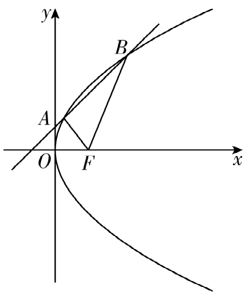
又 $y_0^2=2px_0$，与上式联立消去 x_0，化简得 $y_0^2-4y_0+4=0$，

解得 $y_0=2$，故 $T\left(\frac{2}{p},2\right)$.

又 $|FT|=x_0+\frac{p}{2}=\frac{5}{2}$，所以 $\frac{5}{2}-\frac{p}{2}=\frac{2}{p}$，化简得 $p^2-5p+4=0$，

解得 $p=1$ 或 $p=4$，所以 C 的方程为 $y^2=2x$ 或 $y^2=8x$. 故选 A.

5. $y^2=8x$ 【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



因为 $|BF|-|AF|=4$，

所以 $x_2+\frac{p}{2}-\left(x_1+\frac{p}{2}\right)=4$，所以 $x_2-x_1=4$.

易知直线 AB 的斜率存在，故设直线 AB 的斜率为 k_{AB}，因为 $|AB|=\sqrt{1+k_{AB}^2}\times|x_1-x_2|=4\sqrt{2}$，所以 $k_{AB}^2=1$，

因为 A，B 都在第一象限，所以 $k_{AB}=1$.

又因为 $k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}=\frac{2p}{y_1+y_2}=1$，且 $y_1+y_2=4\times2=8$，

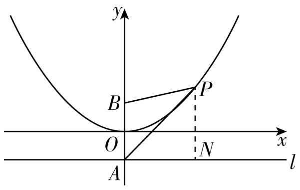
所以 $2p=8$，解得 $p=4$，所以抛物线的方程为 $y^2=8x$.

6. A 【解析】因为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到其准线的距离为 4，所以 $p=4$，$C:y^2=8x$.

依题意，$y_1^2-4y_2^2=48$，又 $y_1^2=8x_1$，$4y_2^2=32x_2$，故 $8x_1-32x_2=48$，即 $8x_1+16=32x_2+64$，则 $x_1+2=4(x_2+2)$，

故 $\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{x_1+2}{x_2+2}=4$（提示：抛物线焦半径的应用），故选 A.

7. C 【解析】设抛物线 C 的准线为 l，作 $PN\perp l$，垂足为 N（如图所示），



则 $|PN|=|BP|$，

$\sin\angle PAN=\frac{|PN|}{|PA|}=\frac{|PB|}{|PA|}$.

当 $\frac{|PA|}{|PB|}$ 取最大值时，$\sin\angle PAN$ 取得最小值.

当且仅当 PA 与抛物线相切于点 P 时，$\sin\angle PAN$ 取得最小值.

当 PA 与抛物线相切时，设直线 PA 的斜率为 k，且 $k\neq0$，则设直线 PA 的方程为 $y=kx-1$，代入 $x^2=4y$，可得 $x^2-4kx+4=0$，

由方程根的判别式 $\Delta=16k^2-16=0$，解得 $k=\pm1$，

不妨设点 P 在第一象限，即 $k=1$，则 $P(2,1)$，

$|PN|=2$，$|PA|=\sqrt{|PN|^2+|AN|^2}=2\sqrt{2}$，即 $\sin\angle PAN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

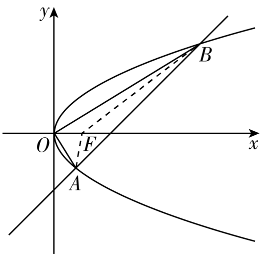
所以 $\frac{|PA|}{|PB|}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.

当点 P 在坐标原点时，$|PA|=|PB|$，即 $\frac{|PA|}{|PB|}$ 的最小值为 1.

综上，$\frac{|PA|}{|PB|}$ 的取值范围为 $[1,\sqrt{2}]$.

8. BC 【解析】连接 BF，AF，由 $C:y^2=2x$，则其焦点为 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$，准

线方程为 $x=-\frac{1}{2}$，故 A 错误，B 正确；



联立直线方程与抛物线方程得 $y^2-2y-4=0$，若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$y_1+y_2=2$，$y_1y_2=-4$，而 $x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{4}=4$，

由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，得 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，故 C 正确；

显然直线 $y=x-2$ 不过焦点 F，由抛物线定义有 $|AF|=x_1+\frac{1}{2}$，

$|BF|=x_2+\frac{1}{2}$，所以 $|AF|+|BF|=x_1+x_2+1>|AB|$，故 D 错误.

9. C 【解析】设抛物线 C 的焦点为 F，由题可知，反射光线 PQ 必过抛物线的焦点 F.

由抛物线 $C:y^2=4x$，得焦点 $F(1,0)$，可设直线 PQ 的方程为 $x=my+1$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+1,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $y^2-4my-4=0$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$.

$|PQ|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{(1+m^2)(16m^2+16)}=4(m^2+1)$，所以当 $m^2=0$，即 $m=0$ 时，$|PQ|$ 取得最小值，最小值为 4. 故选 C.

10. A 【解析】设抛物线 C 的准线交 x 轴于点 D（图略）.

因为 $\triangle AFM$ 为等边三角形，所以 $|AF|=|AM|$. 又因为点 M 在 C 的准线上，所以由抛物线的定义可知 AM 垂直于准线.

由 $y^2=4x$ 可知 $F(1,0)$，$D(-1,0)$，设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，由题知 $\angle FMD=\frac{\pi}{6}$，$|DF|=2$，所以 $|MF|=|AM|=4$，

所以 $x_A=4-1=3$，代入抛物线 C 的方程得 $A(3,\pm2\sqrt{3})$，所以直线 AB 的方程为 $\frac{y\pm2\sqrt{3}}{0\pm2\sqrt{3}}=\frac{x-3}{1-3}$，整理得 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$ 或 $y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$.

由 $\begin{cases}y=\sqrt{3}x-\sqrt{3},\\y^2=4x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3},\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 y，化简得 $3x^2-10x+3=0$，则 $x_A+x_B=\frac{10}{3}$，所以 $|AB|=x_A+x_B+p=\frac{16}{3}$（方法：在抛物线中求过焦点的弦长时，常利用抛物线的定义），故选 A.

11. BCD 【解析】因为抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2，所以 $p=2$，

则抛物线 $C:y^2=4x$，所以焦点为 $F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$，如图所示.

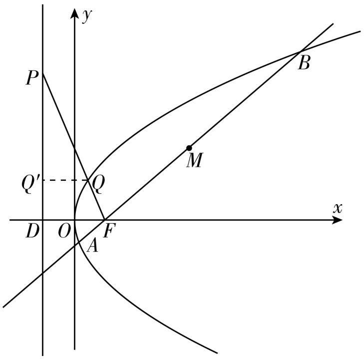
对于 A，设所求点为 (x_0,y_0)，则 $x_0+1=3$，解得 $x_0=2$，所以 $y_0^2=4\times2$，解得 $y_0=\pm2\sqrt{2}$，

所以此抛物线上与焦点 F 之间的距离等于 3 的点的坐标是 $(2,2\sqrt{2})$ 或 $(2,-2\sqrt{2})$，故 A 错误；

对于 B，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+$

$2=8$，解得 $x_1+x_2=6$，

又 M 为线段 AB 的中点，则 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，所以点 M 到 y 轴的距离为 $\frac{x_1+x_2}{2}=3$，故 B 正确；



对于 C，过点 Q 作准线的垂线，垂足为 Q'，则 $|QQ'|=|QF|$，设准线与 x 轴交于点 D，则 $\triangle PQ'Q\backsim\triangle PDF$，因为 $\overrightarrow{FP}=4\overrightarrow{FQ}$，所以 $\frac{|Q'Q|}{|DF|}=\frac{|PQ|}{|PF|}=\frac{|PQ'|}{|PD|}=\frac{3}{4}$，

则 $|Q'Q|=\frac{3}{2}$，设 $Q(x_Q,y_Q)$，则 $x_Q=|QQ'|-1=\frac{1}{2}$，所以 $|y_Q|=\sqrt{2}$，即 $|Q'D|=\sqrt{2}$，所以 $|PD|=4\sqrt{2}$，则 $|PF|=\sqrt{2^2+(4\sqrt{2})^2}=6$，故 C 正确；

对于 D，依题意过点 F 的直线的斜率不为 0，设过点 F 的直线为 $x=my+1$，由 $\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4my-4=0$，

显然方程根的判别式 $\Delta>0$，所以 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$，则 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2$，$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=1$，所以 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}=\frac{x_1+x_2+2}{(x_1+1)(x_2+1)}=\frac{x_1+x_2+2}{x_1x_2+x_1+x_2+1}=1$，

所以 $9|AF|+|BF|=(9|AF|+|BF|)\left(\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}\right)=10+\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{9|AF|}{|BF|}\geqslant 10+2\sqrt{\frac{|BF|}{|AF|}\cdot\frac{9|AF|}{|BF|}}=16$，

当且仅当 $\frac{|BF|}{|AF|}=\frac{9|AF|}{|BF|}$，即 $|AF|=\frac{4}{3}$，$|BF|=4$ 时取等号，故 D 正确.

12.【解】(1) 由题意可得抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，则圆 F 的方程为 $x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=4p^2$.

由 $\begin{cases}x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=4p^2,\\x^2=2py,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2+py-\frac{15p^2}{4}=0$，

解得 $y=\frac{3}{2}p$ 或 $y=-\frac{5}{2}p$（舍去），

将 $y=\frac{3}{2}p$ 代入 $x^2=2py$ 得 A,B 的坐标为 $\left(\pm\sqrt{3}p,\frac{3}{2}p\right)$，

故 $|AB|=2\sqrt{3}p=4\sqrt{3}$，所以 $p=2$，

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$，圆 F 的方程为 $x^2+(y-1)^2=16$.

(2) $|MF|\cdot|NF|$ 为定值，理由如下：

设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $y_1=\dfrac{x_1^2}{4}$，$y_2=\dfrac{x_2^2}{4}$.

因为抛物线 C 的方程为 $y=\dfrac{x^2}{4}$ $\Big($**提示：**在抛物线 $x^2=2py(p\neq0)$ 中利用导数的几何意义求切线方程时，一定要先将抛物线的方程转化为 $y=\dfrac{x^2}{2p}\Big)$，则 $y'=\dfrac{x}{2}$，

所以切线 PM 的方程为 $y-y_1=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)$，即 $x_1x-2y-2y_1=0$，①

同理，切线 PN 的方程为 $x_2x-2y-2y_2=0$. ②

由直线 PM，PN 过 $P(x_0,y_0)$，得 $\begin{cases}x_1x_0-2y_1-2y_0=0,\\x_2x_0-2y_2-2y_0=0,\end{cases}$

所以直线 MN 的方程为 $x_0x-2y-2y_0=0$.

由 $\begin{cases}x_0x-2y-2y_0=0,\\x^2=4y,\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-2x_0x+4y_0=0$，

则 $x_1+x_2=2x_0$，$x_1x_2=4y_0$，

所以 $|MF|\cdot|NF|=(y_1+1)(y_2+1)=y_1y_2+y_1+y_2+1=\dfrac{x_1^2}{4}\cdot\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{x_2^2}{4}+1=\dfrac{(x_1x_2)^2}{16}+\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{4}+1=y_0^2+x_0^2-2y_0+1=x_0^2+(y_0-1)^2$.

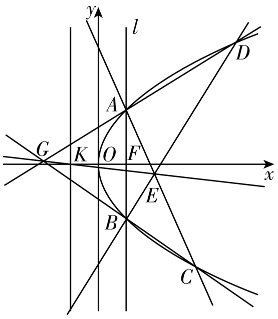
又 $P(x_0,y_0)$ 在圆 F 上，则 $x_0^2+(y_0-1)^2=16$，

即 $|MF|\cdot|NF|=16$，故 $|MF|\cdot|NF|$ 为定值 16.

13. (1)【**解**】抛物线 Γ：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点坐标为 $\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，由题意知过点 F 作垂直于 x 轴的直线 l，与抛物线 Γ 相交于 A，B 两点，且 $|AB|=4$，不妨设 $A\left(\dfrac{p}{2},2\right)$，$B\left(\dfrac{p}{2},-2\right)$，则 $2^2=2p\cdot\dfrac{p}{2}$，

解得 $p=2$ 或 $p=-2$（舍去），所以抛物线 Γ 的方程为 $y^2=4x$.

(2)【**证明**】如图所示.



由(1)知 $A(1,2)$，$B(1,-2)$，设 $C\left(\dfrac{y_1^2}{4},y_1\right)$，$D\left(\dfrac{y_2^2}{4},y_2\right)$ $(y_1\neq\pm2$，$y_2\neq\pm2)$，

则直线 AC 的方程为 $y-2=\dfrac{y_1-2}{\dfrac{y_1^2}{4}-1}(x-1)$，即 $y-2=\dfrac{4}{y_1+2}(x-1)$，

直线 BD 的方程为 $y+2=\dfrac{y_2+2}{\dfrac{y_2^2}{4}-1}(x-1)$，即 $y+2=\dfrac{4}{y_2-2}(x-1)$，

联立得$\begin{cases} y-2=\dfrac{4}{y_1+2}(x-1), \\ y+2=\dfrac{4}{y_2-2}(x-1), \end{cases}$解得$\begin{cases} x=\dfrac{y_1y_2-y_1+y_2}{y_1-y_2+4}, \\ y=\dfrac{2(y_1+y_2)}{y_1-y_2+4}, \end{cases}$

则 $E\left(\dfrac{y_1y_2-y_1+y_2}{y_1-y_2+4},\dfrac{2(y_1+y_2)}{y_1-y_2+4}\right)$，

又 $K(-1,0)$，所以直线 EK 的斜率 $k_{EK}=\dfrac{\dfrac{2(y_1+y_2)}{y_1-y_2+4}}{\dfrac{y_1y_2-y_1+y_2}{y_1-y_2+4}-(-1)}=\dfrac{\dfrac{2(y_1+y_2)}{y_1-y_2+4}}{\dfrac{y_1y_2-y_1+y_2}{y_1-y_2+4}+1}=\dfrac{2(y_1+y_2)}{y_1y_2+4}$.

则直线 BC 的方程为 $y+2=\dfrac{y_1+2}{\dfrac{y_1^2}{4}-1}(x-1)$，即 $y+2=\dfrac{4}{y_1-2}(x-1)$，

直线 AD 的方程为 $y-2=\dfrac{y_2-2}{\dfrac{y_2^2}{4}-1}(x-1)$，即 $y-2=\dfrac{4}{y_2+2}(x-1)$，

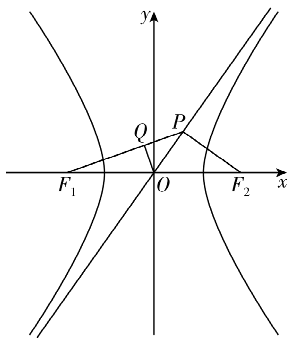
联立得$\begin{cases} y+2=\dfrac{4}{y_1-2}(x-1), \\ y-2=\dfrac{4}{y_2+2}(x-1), \end{cases}$解得$\begin{cases} x=\dfrac{y_1y_2-y_2+y_1}{y_2-y_1+4}, \\ y=\dfrac{2(y_1+y_2)}{y_2-y_1+4}, \end{cases}$

则 $G\left(\dfrac{y_1y_2-y_2+y_1}{y_2-y_1+4},\dfrac{2(y_1+y_2)}{y_2-y_1+4}\right)$，所以直线 GK 的斜率 $k_{GK}=\dfrac{\dfrac{2(y_1+y_2)}{y_2-y_1+4}}{\dfrac{y_1y_2-y_2+y_1}{y_2-y_1+4}-(-1)}=\dfrac{\dfrac{2(y_1+y_2)}{y_2-y_1+4}}{\dfrac{y_1y_2-y_2+y_1}{y_2-y_1+4}+1}=\dfrac{2(y_1+y_2)}{y_1y_2+4}$.

则 $k_{EK}=k_{GK}$，所以 E,K,G 三点共线.

考点 47　直线与圆锥曲线的位置关系

1. D　【解析】易知 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，



因为直线 PF_2 与直线 $y=\dfrac{b}{a}x$ 垂直，

则直线 PF_2 的方程为 $y=-\dfrac{a}{b}(x-c)$，

联立$\begin{cases} y=\dfrac{b}{a}x, \\ y=-\dfrac{a}{b}(x-c), \\ c^2=a^2+b^2, \end{cases}$可得$\begin{cases} x=\dfrac{a^2}{c}, \\ y=\dfrac{ab}{c}, \end{cases}$即点 $P\left(\dfrac{a^2}{c},\dfrac{ab}{c}\right)$，

所以 $\overrightarrow{PF_1}=\left(-c-\frac{a^2}{c},-\frac{ab}{c}\right)=\left(-\frac{a^2+c^2}{c},-\frac{ab}{c}\right)$.

又 $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}$,

所以 $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF_1}=\left(\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}\right)\cdot\overrightarrow{PF_1}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PF_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}^2=$
$\frac{(a^2+c^2)^2+a^2b^2}{3c^2}-\frac{a^2b^2+a^2(a^2+c^2)}{c^2}=0$,整理可得 $c=\sqrt{3}a$,

故该双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}$.

2. C 【解析】设 $P(x_0,y_0)$,则有 $\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{PO}$($O$ 为坐标原点),则 $(\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2})^2=(2\overrightarrow{PO})^2$,即 $\overrightarrow{PF_1}^2+2\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}+\overrightarrow{PF_2}^2=\frac{9}{2}a^2-3b^2=4|\overrightarrow{PO}|^2$,故 $4(x_0^2+y_0^2)=\frac{9}{2}a^2-3b^2$①.

设 $F_1(0,c)$,$F_2(0,-c)$,则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-x_0,c-y_0)\cdot(-x_0,-c-y_0)=x_0^2+y_0^2-c^2=\frac{1}{4}a^2$,

$x_0^2+y_0^2=c^2+\frac{1}{4}a^2$②,由①②得 $4\left(c^2+\frac{1}{4}a^2\right)=\frac{9}{2}a^2-3b^2$(提示:整体思想的应用,即视 $x_0^2+y_0^2$ 为整体建立了关于 a,b,c 的齐次等式),

即 $8c^2=7a^2-6b^2$,又 $b^2=a^2-c^2$,所以 $8c^2=7a^2-6(a^2-c^2)$,即 $2c^2=a^2$,即 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以椭圆 C 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,故选 C.

3. $\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{19}-\sqrt{3}}{4}\right]$ 【解析】取椭圆的左焦点 F',连接 AF',BF'(图略),根据椭圆的对称性 $|OA|=|OB|$,$|OF|=|OF'|$,于是四边形 $AFBF'$为平行四边形. 由 $\angle AFB=120°$,得 $\angle FAF'=60°$,记 $|AF|=x$,$|AF'|=y$,根据椭圆定义有 $x+y=2a$. 在 $\triangle AFF'$ 中,根据余弦定理得 $x^2+y^2-2xy\cos\angle FAF'=4c^2$,即 $x^2+y^2-xy=4c^2$,对 $x+y=2a$ 两边平方,得 $x^2+y^2+2xy=4a^2$,故 $3xy=4a^2-4c^2=4b^2$,显然 $S_{\triangle AFB}=S_{\triangle AFF'}=\frac{S_{\square AFBF'}}{2}=\frac{xy\sin 60°}{2}=\frac{\sqrt{3}b^2}{3}\geqslant\frac{ac}{2}$,即 $a^2-c^2=b^2\geqslant\frac{\sqrt{3}ac}{2}$,不等式两边同时除以 a^2,整理得到 $e^2+\frac{\sqrt{3}}{2}e-1\leqslant 0$,结合 $0<e<1$,得 $e\in\left(0,\frac{\sqrt{19}-\sqrt{3}}{4}\right]$. 由余弦定理得 $\frac{1}{2}=\cos\angle FAF'=\frac{x^2+y^2-4c^2}{2xy}\geqslant\frac{\frac{(x+y)^2}{2}-4c^2}{2\times\frac{(x+y)^2}{4}}=1-2e^2$,当且仅当 $x=y$ 时,等号成立,得 $e\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. 综上,$e\in\left[\frac{1}{2},\frac{\sqrt{19}-\sqrt{3}}{4}\right]$.

4. D 【解析】不妨设直线 PF_2 与渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 垂直且交点为 M,O 为坐标原点,则 $\tan\angle MOF_2=\frac{b}{a}$,$\sin\angle MOF_2=\frac{b}{c}$,

所以 $|F_2M|=|OF_2|\cdot\sin\angle MOF_2=b$,

$|OM|=\sqrt{|OF_2|^2-|MF_2|^2}=a$.

由 O,M 分别是 F_1F_2 与 PF_2 的中点,知 $OM/\!/PF_1$,

且 $|OM|=\frac{1}{2}|PF_1|=1$，即 $a=1$.

由 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$ 得 $c=\sqrt{5}$，$b=2$，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=4S_{\triangle OMF_2}=4\times\frac{1}{2}\times2\times1=4$.

5. A 【解析】由题意可得，$|PF_1|+|PF_2|=2a$，$|F_1F_2|=2c$，

设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r，所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)r=\frac{1}{2}(2c+2a)r=(c+a)r$（**提示：**若 $\triangle ABC$ 的边长分别为 d,e,f，内切圆半径为 r，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(d+e+f)r$）.

因为 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径的最大值为 $a-c$，

所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=(c+a)r\leqslant(c+a)(a-c)=a^2-c^2=b^2$. 因为 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_P|\leqslant\frac{1}{2}\cdot2c\cdot b=bc$，所以 $b^2=bc$，可得 $b=c$.

又椭圆的长轴长为 4，即 $a=2$，由 $a^2=b^2+c^2$，得 $b=c=\sqrt{2}$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S_{\triangle PF_1F_2}\leqslant bc=2$. 故选 A.

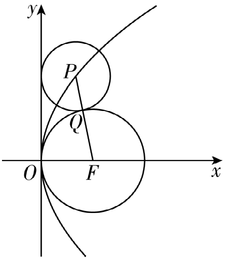
6. C 【解析】椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，则 $a=2$，$b=\sqrt{3}$，$c=1$，F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点，P 是椭圆上一点，点 P 到两个焦点的距离之差为 1，假设 $|PF_1|>|PF_2|$，

则 $\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=1,\\|PF_1|+|PF_2|=2a=4,\end{cases}$ 解得 $|PF_1|=\frac{5}{2}$，$|PF_2|=\frac{3}{2}$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理可得

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2^2}{2\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}}=\frac{3}{5}$$，所以 $\sin\angle F_1PF_2=\frac{4}{5}$，所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{2}$. 故选 C.

7. A 【解析】设动点 $P(m,n)$，$m\neq0$，如图所示，$\odot P$ 与 $\odot F$ 外切于点 Q，则 $|PF|=|PQ|+|QF|$，

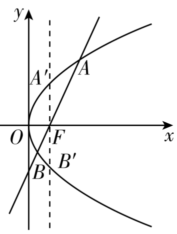


由抛物线焦半径公式得 $|PF|=m+\frac{p}{2}$，又因为 $\odot F$ 的半径为 $\frac{p}{2}$，即 $|QF|=\frac{p}{2}$，

所以 $|PQ|=|PF|-|QF|=m+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=m$，即 $\odot P$ 的半径为 m，

又点 P 到 y 轴的距离为 m，所以 $\odot P$ 与直线 $x=0$ 相切，故选 A.

8. $\frac{9}{2}$ 【解析】如图所示，易知焦点 $F\left(\frac{1}{2},0\right)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且 $x_1,x_2>0$.



当直线斜率不存在时（如图中虚线所示），此

时$|A'F|=|B'F|=1$，此时$4|A'F|+|B'F|=5$；

当直线斜率存在时，可设直线方程为$y=k\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，显然$k\neq0$，

联立$\begin{cases}y=k\left(x-\dfrac{1}{2}\right),\\ y^2=2x,\end{cases}$

消去y整理可得$k^2x^2-(k^2+2)x+\dfrac{1}{4}k^2=0$，

利用一元二次方程根与系数的关系可知$x_1x_2=\dfrac{1}{4}$.

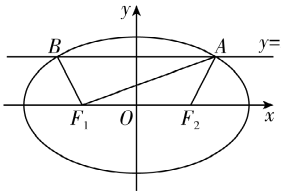
又利用焦半径公式可知$|AF|=x_1+\dfrac{1}{2}$，$|BF|=x_2+\dfrac{1}{2}$，

所以可得$4|AF|+|BF|=4\left(x_1+\dfrac{1}{2}\right)+x_2+\dfrac{1}{2}=4x_1+x_2+\dfrac{5}{2}\geqslant 2\sqrt{4x_1\cdot x_2}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{9}{2}$，

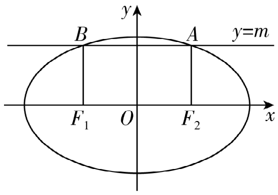
当且仅当$4x_1=x_2$，即$x_1=\dfrac{1}{4}$，$x_2=1$时，等号成立.

综上，$4|AF|+|BF|$的最小值是$\dfrac{9}{2}$.

9. ABD 【**解析**】如图①，由椭圆与直线$y=m$都关于y轴对称，可得$|AF_1|+|BF_1|=|AF_1|+|AF_2|=2\sqrt{5}$，故A正确；



图①



图②

如图②，当$m=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$时，可得$A\left(1,\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$，$B\left(-1,\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)$，

又由题可知$F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，

则$AF_2\perp F_1F_2$，$BF_1\perp F_1F_2$，$AB/\!/F_1F_2$，则四边形ABF_1F_2为矩形，故B正确；

设$A(n,m)$，$B(-n,m)$，

则$\overrightarrow{AF_1}=(-1-n,-m)$，$\overrightarrow{BF_1}=(-1+n,-m)$，

若$AF_1\perp BF_1$，则$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{BF_1}=1-n^2+m^2=0$，又$\dfrac{n^2}{5}+\dfrac{m^2}{4}=1$，

联立得$9m^2-16=0$，解得$m=\pm\dfrac{4}{3}$，故C错误；

若四边形ABF_1O为平行四边形，则$|AB|=|F_1O|=1$，即A的横坐标为$\dfrac{1}{2}$即可，代入椭圆方程可得$m=\pm\dfrac{\sqrt{95}}{5}$，故当$m=\pm\dfrac{\sqrt{95}}{5}$时，四边形$ABF_1O$为平行四边形，故D正确.

10. (1)【**解**】由题意知点$P(2,3)$在双曲线C上，且$\triangle PF_1F_2$的面积为6，可得$\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1$且$\dfrac{1}{2}\times2c\times3=6$，则$c=2$，

又$c^2=a^2+b^2=4$，$a<c$，解得$a^2=1$，$b^2=3$，

故双曲线C的方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)【证明】由(1)知 $F_2(2,0)$,故设直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$,

由于直线 l 交双曲线 C 的右支于 A,B 两点,故 $k>\sqrt{3}$ 或 $k<-\sqrt{3}$.

联立 $\begin{cases} y=k(x-2), \\ x^2-\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 可得 $(3-k^2)x^2+4k^2x-4k^2-3=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $x_1+x_2=\dfrac{4k^2}{k^2-3}$,$x_1x_2=\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}$,故 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{2k^2}{k^2-3}$,

$\dfrac{y_1+y_2}{2}=k\left(\dfrac{2k^2}{k^2-3}-2\right)=\dfrac{6k}{k^2-3}$,

即线段 AB 的中点坐标为 $\left(\dfrac{2k^2}{k^2-3},\dfrac{6k}{k^2-3}\right)$.

因为 Q 为 x 轴上一点,满足 $|QA|=|QB|$,所以 Q 为线段 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点,

线段 AB 的垂直平分线的方程为 $y-\dfrac{6k}{k^2-3}=-\dfrac{1}{k}\left(x-\dfrac{2k^2}{k^2-3}\right)$,

令 $y=0$,得 $x=\dfrac{8k^2}{k^2-3}$,即 $Q\left(\dfrac{8k^2}{k^2-3},0\right)$,

所以 $|QF_2|=\left|\dfrac{8k^2}{k^2-3}-2\right|=\dfrac{6(k^2+1)}{k^2-3}$.

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{4k^2}{k^2-3}\right)^2-4\times\dfrac{4k^2+3}{k^2-3}}$

$=\dfrac{6(k^2+1)}{k^2-3}$,

又因为点 A,B 在双曲线的右支上,所以 $|AF_1|-|AF_2|=2$,$|BF_1|-|BF_2|=2$(**提示:** 双曲线左、右焦点分别为 F_1,F_2,当点 A 在双曲线的右支上时,$|AF_1|-|AF_2|=2a$,当点 A 在双曲线的左支上时,$|AF_1|-|AF_2|=-2a$),

故 $|AF_1|+|BF_1|-|AF_2|-|BF_2|=4$,

即 $|AF_1|+|BF_1|-4=|AB|$,故 $\dfrac{|AF_1|+|BF_1|-4}{|QF_2|}=\dfrac{|AB|}{|QF_2|}=\dfrac{\dfrac{6(k^2+1)}{k^2-3}}{\dfrac{6(k^2+1)}{k^2-3}}=1$,即 $\dfrac{|AF_1|+|BF_1|-4}{|QF_2|}$ 为定值 1.

11.【解】(1)当 M 为椭圆短轴端点时 $\angle F_1MF_2$ 最大,

此时 $\angle F_1MF_2=\dfrac{\pi}{3}$,则 $\triangle F_1MF_2$ 为正三角形,则 $a=2c$,

且 $(\overrightarrow{MF_1}+\overrightarrow{MF_2})\cdot\overrightarrow{MF_1}=2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{MF_1}=2b\cdot a\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}ba=6$,

得 $ba=2\sqrt{3}$,又 $a^2=b^2+c^2$,所以 $a=2,b=\sqrt{3},c=1$,

故椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2)设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$P(4,t)(t\neq 0)$,

由题知两条切线 PA,PB 的斜率必定存在,

设切线 PA 的方程为 $y=k(x-x_1)+y_1=kx+y_1-kx_1$,

由$\begin{cases}y=kx+y_1-kx_1,\\3x^2+4y^2=12,\end{cases}$整理得$(3+4k^2)x^2+8k(y_1-kx_1)x+4(y_1-kx_1)^2-12=0$,

由判别式$\Delta=64k^2(y_1-kx_1)^2-4(3+4k^2)[4(y_1-kx_1)^2-12]=0$,

得$k^2(x_1^2-4)-2x_1y_1k+y_1^2-3=0$,

将$x_1^2-4=-\frac{4}{3}y_1^2$,$y_1^2-3=-\frac{3}{4}x_1^2$代入,

得$-\frac{4}{3}y_1^2k^2-2x_1y_1k-\frac{3}{4}x_1^2=0$,

整理得$k^2+\frac{3x_1}{2y_1}k+\frac{9x_1^2}{16y_1^2}=0$,故$k=-\frac{3x_1}{4y_1}$,

故切线方程为$y=-\frac{3x_1}{4y_1}x+y_1+\frac{3x_1^2}{4y_1}=-\frac{3x_1}{4y_1}x+\frac{3}{y_1}$,

故直线PA的方程为$\frac{x_1x}{4}+\frac{y_1y}{3}=1$,

同理,直线PB的方程为$\frac{x_2x}{4}+\frac{y_2y}{3}=1$.

因为直线PA,PB都过点$P(4,t)$,$t\neq0$,

所以$x_1+\frac{y_1t}{3}=1$,$x_2+\frac{y_2t}{3}=1$,

则直线AB的方程为$x+\frac{yt}{3}=1$,即直线AB过定点$(1,0)$.

故设直线AB的方程为$x=my+1$,$m\neq0$,

联立$\begin{cases}x=my+1,\\3x^2+4y^2=12,\end{cases}$整理得$(3m^2+4)y^2+6my-9=0$,

所以$y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$.

又$B'(x_2,-y_2)$,则直线AB'的方程为$y-y_1=\frac{-y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$,

令$G(x_G,0)$,$y=0$,

$$x_G=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}=\frac{(my_1+1)y_2+(my_2+1)y_1}{y_1+y_2}$$

$$=\frac{2my_1y_2+y_1+y_2}{y_1+y_2}=2m\cdot\frac{y_1y_2}{y_1+y_2}+1$$

$$=2m\cdot\frac{\frac{-9}{3m^2+4}}{\frac{-6m}{3m^2+4}}+1=4$$,所以$G(4,0)$.

则$|S_1-S_2|=\frac{1}{2}|F_2G|\cdot||y_1|-|y_2||=\frac{3}{2}|y_1+y_2|=\frac{3}{2}\cdot\frac{6|m|}{3m^2+4}=\frac{9|m|}{3m^2+4}=\frac{9}{3|m|+\frac{4}{|m|}}\leqslant\frac{9}{2\sqrt{12}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 当且仅当$3|m|=\frac{4}{|m|}$,即$m^2=\frac{4}{3}$时取等号,故$|S_1-S_2|$的最大值为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

12. A 【解析】设以点$M(2,1)$为中点的弦的端点为$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则有$\begin{cases}\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{2}=1,\\\frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{2}=1,\end{cases}$两式相减得$\frac{x_1^2-x_2^2}{9}+\frac{y_1^2-y_2^2}{2}=0$.

因为 $M(2,1)$ 为弦 AB 的中点，所以 $\frac{x_1+x_2}{2}=2,\frac{y_1+y_2}{2}=1$，所以中点弦所在直线的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{2(x_1+x_2)}{9(y_1+y_2)}=-\frac{4}{9}$（提示：利用点差法求出斜率再求出直线方程），所以所求直线方程为 $y-1=-\frac{4}{9}(x-2)$，即 $4x+9y-17=0$. 故选 A.

13. D 【解析】由过椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F 且与长轴垂直的弦长为 $6\sqrt{2}$，可得椭圆过点 $(-c,3\sqrt{2})$，

代入方程得 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{18}{b^2}=1$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$，

两式作差得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$，

即 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$，

因为 P 恰好是线段 AB 的中点，所以 $x_1+x_2=4,y_1+y_2=2$，

又因为直线 AB 斜率为 -1，

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$，可得 $a^2=2b^2$，

则联立方程 $\begin{cases}\frac{c^2}{a^2}+\frac{18}{b^2}=1,\\ a^2=2b^2,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=6\sqrt{2},\\ b=6,\\ c=6.\end{cases}$

所以椭圆 C 上一点 M 到点 F 的距离的最大值为 $a+c=6+6\sqrt{2}$.

14. C 【解析】设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

则 AB 的中点 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，设直线 OM 的斜率为 k，

可得 $k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},k=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}}{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$，

因为点 A,B 在双曲线上，则 $\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{9}=1,\\ x_2^2-\frac{y_2^2}{9}=1,\end{cases}$ 两式相减得 $(x_1^2-x_2^2)-\frac{y_1^2-y_2^2}{9}=0$，所以 $k_{AB}\cdot k=\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=9$.

对于选项 A，可得 $k=1,k_{AB}=9$，则直线 AB 的方程为 $y=9x-8$，

联立方程 $\begin{cases}y=9x-8,\\ x^2-\frac{y^2}{9}=1,\end{cases}$ 消去 y 得 $72x^2-2\times72x+73=0$，

此时 $\Delta_1=(-2\times72)^2-4\times72\times73=-288<0$，

所以直线 AB 与双曲线没有交点，故 A 错误；

对于选项 B，可得 $k=-2,k_{AB}=-\frac{9}{2}$，则直线 AB 的方程为 $y=$

$-\frac{9}{2}x-\frac{5}{2}$，联立方程$\begin{cases}y=-\frac{9}{2}x-\frac{5}{2},\\x^2-\frac{y^2}{9}=1,\end{cases}$消去 y 得 $45x^2+2\times45x+61=0$，此时 $\Delta_2=(2\times45)^2-4\times45\times61=-4\times45\times16<0$，

所以直线 AB 与双曲线没有交点，故 B 错误；

对于选项 C，$k=4$，$k_{AB}=\frac{9}{4}$，则直线 AB 的方程为 $y=\frac{9}{4}x+\frac{7}{4}$，

联立方程$\begin{cases}y=\frac{9}{4}x+\frac{7}{4},\\x^2-\frac{y^2}{9}=1,\end{cases}$消去 y 得 $63x^2-126x-193=0$，

此时 $\Delta_3=126^2+4\times63\times193>0$，故直线 AB 与双曲线有两个交点，故 C 正确；

对于选项 D，可得 $k=3$，$k_{AB}=3$，则直线 AB 的方程为 $y=3x$，

由双曲线方程可得 $a=1$，$b=3$，则直线 AB 为双曲线的渐近线，

所以直线 AB 与双曲线没有交点，故 D 错误.

15. 5 **【解析】**由题意得，抛物线焦点 $F(1,0)$，且直线 AB 斜率不为 0，设直线 AB 的方程为 $x=ty+1$，$A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，

联立抛物线方程，得 $y^2-4ty-4=0$，$\Delta>0$，故 $y_A+y_B=4t$，$y_Ay_B=-4$，

所以 $x_A+x_B=t(y_A+y_B)+2=2\times\frac{3}{2}=3$，即 $t^2=\frac{1}{4}$，

则 $|AB|=\sqrt{1+t^2}\cdot|y_A-y_B|=\sqrt{1+t^2}\cdot\sqrt{(y_A+y_B)^2-4y_Ay_B}=\frac{\sqrt{5}}{2}\times\sqrt{4+16}=5$.

16.【解】(1) 由已知可得，抛物线的焦点坐标为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$.

联立抛物线与直线的方程$\begin{cases}y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right),\\y^2=2px,\end{cases}$得 $x^2-7px+\frac{p^2}{4}=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=7p$，

则 $|AB|=x_1+x_2+p=8p=16$，所以 $p=2$.

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$，准线方程为 $x=-1$.

(2) 设直线 l：$x=my+1$，

联立直线与抛物线的方程$\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$得 $y^2-4my-4=0$，

所以 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4$.

又直线 OA 的斜率 $k_{OA}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{4}{y_1}$，故直线 OA 的方程为 $y=\frac{4}{y_1}x$，所以 $M\left(-2,\frac{-8}{y_1}\right)$. 同理可得 $N\left(-2,\frac{-8}{y_2}\right)$.

设圆上任意一点为 $Q(x,y)$，则由 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=0$ 可得，

圆的方程为 $(x+2)^2+\left(y+\frac{8}{y_1}\right)\left(y+\frac{8}{y_2}\right)=0$，

整理可得 $(x+2)^2+y^2+y\left(\frac{8}{y_2}+\frac{8}{y_1}\right)+\frac{64}{y_1y_2}=(x+2)^2+y^2-8my-16=$

0. 令 $y=0$，可得 $x=2$ 或 $x=-6$，

所以以 MN 为直径的圆过定点，定点坐标为 $(2,0)$，$(-6,0)$.

17.【解】(1)将 $(1,1)$ 的坐标代入 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 中，满足 $\frac{1}{4}+\frac{1}{3}<1$（提示：判断点与椭圆的位置关系，可将点的坐标代入椭圆方程，若等号成立，则点在椭圆上，若“<”成立，则点在椭圆内，若“>”成立，则点在椭圆外），故点 $(1,1)$ 在椭圆内部. 又线段 AB 的中点为 $(1,1)$，所以直线 AB 的斜率存在且不为 0，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1$，

两式相减整理得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4}\times\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}$.

由已知可得 $x_1+x_2=y_1+y_2=2$，则 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{3}{4}$，所以直线 AB 的斜率为 $-\frac{3}{4}$，所以直线 AB 的方程为 $y-1=-\frac{3}{4}(x-1)$，

即 $3x+4y-7=0$.

(2)由已知可得 $F(1,0)$，设 $P(x_3,y_3)$，因为 F 恰好是 $\triangle ABP$ 的重心，所以 $\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=1$ $\left(提示：三角形重心坐标公式\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)\right)$，即 $x_1+x_2+x_3=3$.

因为 $|AF|$，$|PF|$，$|BF|$ 依次成等差数列，

所以 $2|PF|=|AF|+|BF|$.

$|AF|=\sqrt{(x_1-1)^2+y_1^2}=\sqrt{(x_1-1)^2+3\left(1-\frac{x_1^2}{4}\right)}=\sqrt{\left(\frac{x_1}{2}-2\right)^2}=2-\frac{x_1}{2}$，同理 $|BF|=2-\frac{x_2}{2}$，$|PF|=2-\frac{x_3}{2}$.

所以 $4-x_3=2-\frac{x_1}{2}+2-\frac{x_2}{2}$，可得 $x_1+x_2=2x_3$，所以 $x_1+x_2+x_3=3x_3=3$，解得 $x_3=1$，将 $x_3=1$ 代入椭圆方程得 $y_3=\pm\frac{3}{2}$，

所以点 P 的坐标为 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 或 $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$.

18.【解】(1)设点 P 的坐标为 $(3,y_0)$，

因为点 P 在第一象限，所以 $y_0>0$.

双曲线 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$ 的渐近线方程为 $y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x$，因为点 P 在双曲线的渐近线上，所以 $y_0=2\sqrt{3}$，所以点 P 的坐标为 $(3,2\sqrt{3})$. 又点 $P(3,2\sqrt{3})$ 在抛物线 $y^2=2px$ 上，所以 $12=2p\times3$，所以 $p=2$，

故抛物线 E 的标准方程为 $y^2=4x$.

(2)因为直线 AB 的斜率存在且不为 0，所以设直线 AB 的方程为 $x=my+n(m\neq0)$. 联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=my+n,\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2-4my-4n=0$，

$\Delta=16m^2+16n>0$，即 $m^2+n>0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4n$.

因为点 A,B 在第一象限，所以 $y_1+y_2=4m>0$，$y_1y_2=-4n>0$，故 $m>0$，$n<0$（易错：忽视利用 A,B 所在象限确定 m,n 的符号）.

设线段 AB 的中点为 $M(x_3,y_3)$，则 $y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=2m, x_3=2m^2+n$，

所以点 M 的坐标为 $(2m^2+n,2m)$，$|AB|=\sqrt{1+m^2}|y_2-y_1|=\sqrt{1+m^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=4\sqrt{1+m^2}\sqrt{m^2+n}$.

因为点 $C(t,0)$ 到直线 $x=my+n$ 的距离 $d=\frac{|t-n|}{\sqrt{1+m^2}}$，且 $\triangle ABC$ 为等边三角形，所以 $CM\perp AB$，且 $|CM|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，

所以 $\frac{2m-0}{2m^2+n-t}\cdot\frac{1}{m}=-1$，且 $\frac{|t-n|}{\sqrt{1+m^2}}=2\sqrt{3}\sqrt{1+m^2}\sqrt{m^2+n}$，

所以 $t-n=2m^2+2$①，

$|t-n|=2\sqrt{3}(1+m^2)\sqrt{m^2+n}$②.

将①代入②可得 $\frac{1}{3}=m^2+n$③，

所以 $n=\frac{1}{3}-m^2<0$，所以 $m^2>\frac{1}{3}$，

将③代入①可得 $t=2m^2+2+n=\frac{7}{3}+m^2$，所以 $t>\frac{8}{3}$，

故 t 的取值范围为 $\left(\frac{8}{3},+\infty\right)$.

考点 48 圆锥曲线的综合问题

1. (1)【**解**】因为 $||PF_1|-|PF_2||=2\sqrt{2}$，

所以 $2a=2\sqrt{2}$，解得 $a=\sqrt{2}$.

设双曲线 C 的半焦距为 c，因为离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，解得 $c=\sqrt{3}$，则 $b=\sqrt{c^2-a^2}=1$，

所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

(2)【**证明**】设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，$M(0,m)$，则 $N(0,-m)$，直线 AM 的斜率 $k_{AM}=\frac{1-m}{2}$，直线 AN 的斜率 $k_{AN}=\frac{1+m}{2}$，

直线 AP 的方程为 $y=\frac{1-m}{2}x+m$，直线 AQ 的方程为 $y=\frac{1+m}{2}x-m$.

联立 $\begin{cases}y=\frac{1-m}{2}x+m,\\x^2-2y^2=2,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $\left[1-\frac{(1-m)^2}{2}\right]x^2+2m(m-1)x-2m^2-2=0$，则 $1-\frac{(1-m)^2}{2}\neq0$，$\Delta_1=4m^2(m-1)^2+4(2m^2+2)\left[1-\frac{(1-m)^2}{2}\right]>0$，

即 $\begin{cases}m\neq1+\sqrt{2},\\m\neq1-\sqrt{2},\\m\neq-1,\end{cases}$ 所以 $2x_1=-\frac{2m^2+2}{1-\frac{(1-m)^2}{2}}$，故 $x_1=\frac{2m^2+2}{(m-1)^2-2}$，

$y_1=\frac{1-m}{2}x_1+m=-\frac{(m+1)^2-2}{(m-1)^2-2}$，

所以 $P\left(\frac{2m^2+2}{(m-1)^2-2},-\frac{(m+1)^2-2}{(m-1)^2-2}\right)$.

联立$\begin{cases}y=\dfrac{1+m}{2}x-m,\\x^2-2y^2=2,\end{cases}$消去 y 并整理得$\left[1-\dfrac{(m+1)^2}{2}\right]x^2+2m(m+1)x-2m^2-2=0$,

则 $1-\dfrac{(m+1)^2}{2}\neq 0,\Delta_2=4m^2(m+1)^2+4(2m^2+2)\left[1-\dfrac{(m+1)^2}{2}\right]>0$,即$\begin{cases}m\neq -1+\sqrt{2},\\m\neq -1-\sqrt{2},\\m\neq 1,\end{cases}$所以 $2x_2=\dfrac{-2m^2-2}{1-\dfrac{(m+1)^2}{2}}$,

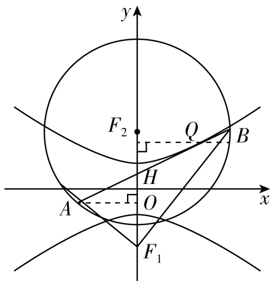
故 $x_2=\dfrac{2m^2+2}{(m+1)^2-2},y_2=\dfrac{1+m}{2}x_2-m=-\dfrac{(m-1)^2-2}{(m+1)^2-2}$,

所以 $Q\left(\dfrac{2m^2+2}{(m+1)^2-2},-\dfrac{(m-1)^2-2}{(m+1)^2-2}\right)$.

即当 $m\neq\pm 1,m\neq\pm\sqrt{2}+1,m\neq\pm\sqrt{2}-1$ 时,直线 PQ 的方程为 $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$,将 P,Q 的坐标代入得 $y+\dfrac{(m+1)^2-2}{(m-1)^2-2}=-\dfrac{m^2-1}{m^2+1}\left[x-\dfrac{2m^2+2}{(m-1)^2-2}\right]$,

整理得 $y=-\dfrac{m^2-1}{m^2+1}x+1$,所以直线 l 过定点 $(0,1)$.

2. (1)【解】$\because\begin{cases}\dfrac{4}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1,\\\dfrac{c}{a}=2,\\c^2=a^2+b^2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a^2=1,\\b^2=3,\\c=2,\end{cases}\therefore y^2-\dfrac{x^2}{3}=1.$



设过曲线 E 上一点的切线的方程为 $y=kx+t$,

由$\begin{cases}y^2-\dfrac{x^2}{3}=1,\\y=kx+t\end{cases}$可得 $(3k^2-1)x^2+6ktx+3t^2-3=0$,

则判别式 $\Delta=(6kt)^2-4(3k^2-1)(3t^2-3)=0$,即 $3k^2+t^2-1=0$.

又$\because$ 切点为 Q,$\therefore 2=3k+t$,$\therefore$ 解得 $k=t=\dfrac{1}{2}$,

则过点 Q 的切线 l 的方程为 $2y-x=1$.

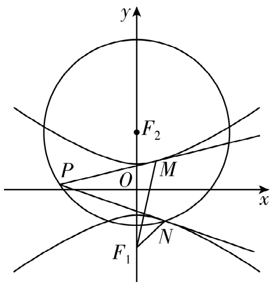
设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,$\therefore$ 切线 l 交 y 轴于点 $H\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,如图所示. 联立直线 l 与圆 F_2 的方程$\begin{cases}2y-x=1,\\x^2+(y-2)^2=10,\end{cases}$

消去 y 得 $5x^2-6x-31=0$,$\therefore x_1+x_2=\dfrac{6}{5},x_1x_2=-\dfrac{31}{5}$.

$\therefore |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\dfrac{36}{25}+\dfrac{124}{5}}=\dfrac{4\sqrt{41}}{5}$,

$\therefore S_{\triangle F_1AB}=\frac{1}{2}|F_1H|\cdot|x_1-x_2|=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot\frac{4\sqrt{41}}{5}=\sqrt{41}$（提示：过点 A,B 作 y 轴的垂线如图所示）.

（2）【证明】如图所示，设 $P(x_0,y_0)$，$M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，



则 $x_0^2+(y_0-2)^2=10$.

设过点 $M(x_3,y_3)$ 的双曲线的切线方程为 $y=mx+n$，

由（1）可知 $3m^2+n^2-1=0$，

又 $\because y_3=mx_3+n$，则 $3m^2+(y_3-mx_3)^2-1=0$，即 $(3+x_3^2)m^2-2x_3y_3m+y_3^2-1=0$（$*$），

而 $y_3^2-\frac{x_3^2}{3}=1$，$\therefore 3+x_3^2=3y_3^2$，$y_3^2-1=\frac{x_3^2}{3}$，

则（$*$）式可化为 $9y_3^2m^2-6x_3y_3m+x_3^2=0$，即 $(3y_3m-x_3)^2=0$，

可得 $m=\frac{x_3}{3y_3}$，$n=y_3-mx_3=\frac{1}{y_3}$，则切线方程为 $y=\frac{x_3}{3y_3}x+\frac{1}{y_3}$，

整理可得过点 M 的双曲线的切线方程为 $y_3y-\frac{x_3x}{3}=1$.

同理可得过点 N 的双曲线的切线方程为 $y_4y-\frac{x_4x}{3}=1$.

又两切线均过点 $P(x_0,y_0)$，则 $\begin{cases}y_3y_0-\frac{x_3x_0}{3}=1,\\ y_4y_0-\frac{x_4x_0}{3}=1,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 MN 的方程为 $y_0y-\frac{x_0x}{3}=1$.

联立直线 MN 与双曲线 E 的方程 $\begin{cases}y_0y-\frac{x_0x}{3}=1,\\ y^2-\frac{x^2}{3}=1,\end{cases}$

消去 y 可得 $(x_0^2-3y_0^2)x^2+6x_0x+(9-9y_0^2)=0$，故 $\begin{cases}x_3+x_4=\frac{-6x_0}{x_0^2-3y_0^2},\\ x_3\cdot x_4=\frac{9-9y_0^2}{x_0^2-3y_0^2},\end{cases}$

$\therefore (y_3+2)(y_4+2)=\left(\frac{x_0}{3y_0}x_3+\frac{1}{y_0}+2\right)\left(\frac{x_0}{3y_0}x_4+\frac{1}{y_0}+2\right)=\frac{x_0^2}{9y_0^2}x_3x_4+\frac{x_0}{3y_0}\cdot\frac{1+2y_0}{y_0}(x_3+x_4)+\left(\frac{1+2y_0}{y_0}\right)^2=\frac{3(x_0^2-4y_0^2-4y_0-1)}{x_0^2-3y_0^2}$.

$\because x_0^2+(y_0-2)^2=10$，则 $x_0^2=10-(y_0-2)^2$，则 $x_0^2-4y_0^2-4y_0-1=5-5y_0^2$，

$\therefore k_1k_2=\frac{y_3+2}{x_3}\cdot\frac{y_4+2}{x_4}=\frac{3(5-5y_0^2)}{x_0^2-3y_0^2}\cdot\frac{x_0^2-3y_0^2}{9(1-y_0^2)}=\frac{5}{3}$.

3.【解】（1）抛物线 C 的焦点为 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$，$|FM|=\frac{p}{2}+3$，

所以 F 与圆 $M:x^2+(y+3)^2=1$ 上点的距离的最大值为 $\frac{p}{2}+3+1=5$，解得 $p=2$，故抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

（2）设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$，$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$.

设 $l_{AB}:y=kx+b$（**提示：**直线 AB 的斜率一定存在），联立 l_{AB} 和抛物线 C 的方程得 $\begin{cases}y=kx+b,\\x^2=4y,\end{cases}$ 整理得 $x^2-4kx-4b=0$，

方程根的判别式 $\Delta=16k^2+16b>0$，即 $k^2+b>0$，且 $x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4b$，抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$，即 $y=\dfrac{x^2}{4}$，有 $y'=\dfrac{x}{2}$，

则 $l_{PA}:y-\dfrac{x_1^2}{4}=\dfrac{x_1}{2}(x-x_1)$，

整理得 $y=\dfrac{x_1}{2}\cdot x-\dfrac{x_1^2}{4}$，同理可得 $l_{PB}:y=\dfrac{x_2}{2}\cdot x-\dfrac{x_2^2}{4}$.

联立 $\begin{cases}y=\dfrac{x_1}{2}\cdot x-\dfrac{x_1^2}{4},\\y=\dfrac{x_2}{2}\cdot x-\dfrac{x_2^2}{4},\end{cases}$ 可得 $P\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1x_2}{4}\right)$，即 $P(2k,-b)$.

将点 P 的坐标代入圆 M 的方程，得 $(2k)^2+(-b+3)^2=1$，整理得 $k^2=\dfrac{1-(b-3)^2}{4}$.

由弦长公式得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{16k^2+16b}$，

点 P 到直线 AB 的距离 $d=\dfrac{|2k^2+2b|}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}|AB|d=\dfrac{1}{2}\sqrt{16k^2+16b}\cdot|2k^2+2b|=4\sqrt{(k^2+b)^3}=4\sqrt{\left[\dfrac{1-(b-3)^2}{4}+b\right]^3}=4\sqrt{\left(\dfrac{-b^2+10b-8}{4}\right)^3}$，

其中 $y_P=-b\in[-4,-2]$，即 $b\in[2,4]$.

当 $b=4$ 时，$(S_{\triangle PAB})_{\max}=32$.

4.【解】(1) 设双曲线的半焦距为 c.

因为双曲线 C 的右焦点为 $F(2,0)$，所以 $c=2$.

因为点 M 和点 P 关于 y 轴对称，

所以当 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}=0$ 时，直线 l 的方程为 $x=c$.

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\x=c,\end{cases}$ 得 $y=\pm\dfrac{b^2}{a}$，又 $|MN|=\dfrac{2\sqrt3}{3}$，所以 $2\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{2\sqrt3}{3}$，又 $c^2=a^2+b^2$，所以 $a=\sqrt3$，$b=1$，故双曲线 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{3}-y^2=1$.

(2) 若直线 l 的斜率为 0，则直线 l 与双曲线右支只有一个交点，与已知矛盾，

所以可设直线 l 的方程为 $x=ty+2$（**方法：**当直线的斜率不一定存在时，设直线方程为 $x=my+n$ 的形式，其中当 $m\neq0$ 时，斜率存在；当 $m=0$ 时，斜率不存在）.

由 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}-y^2=1,\\x=ty+2,\end{cases}$ 得 $(t^2-3)y^2+4ty+1=0$，判别式 $\Delta=16t^2-4(t^2-3)=12t^2+12>0$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $P(-x_1,y_1)$，

则 $y_1+y_2=-\dfrac{4t}{t^2-3}$，$y_1y_2=\dfrac{1}{t^2-3}$，$x_1+x_2=t(y_1+y_2)+4=-\dfrac{12}{t^2-3}$，$x_1x_2=$

$t^2y_1y_2+2t(y_1+y_2)+4=\frac{-3t^2-12}{t^2-3}$.

由已知得$-\frac{12}{t^2-3}>0$,$\frac{-3t^2-12}{t^2-3}>0$,所以$-\sqrt{3}<t<\sqrt{3}$(**关键:**由于M,N在双曲线的右支上,则有$x_1>0$,$x_2>0$,由此建立不等式求出t的取值范围),线段MN的中点坐标为$\left(-\frac{6}{t^2-3},-\frac{2t}{t^2-3}\right)$,

所以线段MN的垂直平分线方程为$y+\frac{2t}{t^2-3}=-t\left(x+\frac{6}{t^2-3}\right)$.

又线段MP的垂直平分线方程为$x=0$,

所以点Q的坐标为$\left(0,\frac{-8t}{t^2-3}\right)$,

所以$|QF|=\sqrt{(2-0)^2+\left(0+\frac{8t}{t^2-3}\right)^2}=\frac{2}{3-t^2}\sqrt{t^4+10t^2+9}$,

$|MN|=\sqrt{1+t^2}|y_2-y_1|=\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{\sqrt{12t^2+12}}{3-t^2}=\frac{2\sqrt{3}(t^2+1)}{3-t^2}$,

所以$\frac{|QF|}{|MN|}=\frac{\sqrt{t^4+10t^2+9}}{\sqrt{3}(t^2+1)}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{t^2+9}{t^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\frac{8}{t^2+1}}$.

因为$-\sqrt{3}<t<\sqrt{3}$,所以$1\leqslant t^2+1<4$,

所以$3<1+\frac{8}{t^2+1}\leqslant 9$,所以$1<\frac{|QF|}{|MN|}\leqslant\sqrt{3}$,

所以$\frac{|QF|}{|MN|}$的取值范围为$(1,\sqrt{3}]$.

5.【解】(1)当直线MD垂直于x轴时,点M的横坐标为$2p$,

根据抛物线的定义知,$|MF|=\frac{p}{2}+2p=5$,$\therefore p=2$,

则抛物线C的方程为$y^2=4x$.

(2)由题意知,直线MN的斜率不为0,

$F(1,0)$,设直线MN的方程为$x=my+1$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$.

由$\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$得$y^2-4my-4=0$,方程根的判别式$\Delta=16m^2+16>0$,

得$y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4$.

若选①,设$N'(x_2,-y_2)$,

当$m\neq 0$时,直线MN'的斜率$k_{MN'}=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}=\frac{4m}{x_1-x_2}=\frac{4m}{m(y_1-y_2)}=\frac{4}{y_1+\frac{4}{y_1}}=\frac{4y_1}{y_1^2+4}$,$\therefore$直线$MN'$的方程为$y-y_1=\frac{4y_1}{y_1^2+4}(x-x_1)$,

由$x_1=\frac{y_1^2}{4}$,化简得$y=\frac{4y_1}{y_1^2+4}(x+1)$,

$\therefore$直线MN'过定点$(-1,0)$.

当$m=0$时,点N'与点M重合,

$\therefore$对任意的x轴上的点Q,M,N',Q三点共线.

综上,存在$Q(-1,0)$使条件①成立.

若选②,设$Q(t,0)$,直线MQ的斜率为k_{MQ},直线NQ的斜率为k_{NQ}. $\because x$轴平分$\angle MQN$,

$\therefore k_{MQ}+k_{NQ}=\frac{y_1}{x_1-t}+\frac{y_2}{x_2-t}=\frac{y_1}{my_1+1-t}+\frac{y_2}{my_2+1-t}$

$$=\frac{y_1(my_2+1-t)+y_2(my_1+1-t)}{(my_1+1-t)(my_2+1-t)}=\frac{2my_1y_2+(1-t)(y_1+y_2)}{(my_1+1-t)(my_2+1-t)}$$

$$=\frac{-8m+4m(1-t)}{(my_1+1-t)(my_2+1-t)}=0,$$

$\therefore -8m+4m(1-t)=0$,即 $4m(t+1)=0$,

若 $4m(t+1)=0$ 对任意的 $m\in\mathbf{R}$ 恒成立,则 $t=-1$.

$\therefore$ 存在 $Q(-1,0)$ 使条件②成立.