专题2　不等式

考点3　不等式的性质

1. C　【解析】对于 A，若 $a>b$，当 $c=0$ 时，$ac^2=bc^2$，所以 A 不成立；

对于 B，若 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$，当 $c<0$ 时，$a<b$，所以 B 不成立；

对于 C，因为 $ab<0$，将 $a>b$ 两边同时除以 ab，得到 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，所以 C 成立；

对于 D，若 $a^2>b^2$ 且 $ab>0$，当 $\begin{cases}a<0,\\b<0\end{cases}$ 时，$a<b$，所以 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，所以 D 不成立. 故选 C.

2. D　【解析】对于 A，根据 $e^{a-b}>0$，得 $a-b$ 为任意实数，故 A 错误.

对于 B，由 $\ln\frac{a}{b}>0=\ln 1$，得 $\frac{a}{b}>1$，当 $a>0$ 且 $b>0$ 时，有 $a>b$；当 $a<0$ 且 $b<0$ 时，有 $a<b$，不满足题意，故 B 错误.

对于 C，因为 $a=2>b=1$ 满足 $a^a>b^b$，$a=-\frac{2}{3}<b=1$ 也满足 $a^a>b^b$，不满足题意，故 C 错误.

对于 D，因为 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，所以 $0>a>b$，所以能推出 $a>b$，满足题意，故 D 正确.

故选 D.

3. D　【解析】对于 A，若 $a=0$，$b=-1$，满足 $a>b$，但 $a^2>b^2$ 不成立，故 A 错误.

对于 B，若 $a=-2\ 023$，$b=-2\ 025$，满足 $a>b$，但 $\frac{a}{b}=\frac{2\ 023}{2\ 025}$，$\frac{a+2\ 023}{b+2\ 024}=0$，$\frac{a}{b}<\frac{a+2\ 023}{b+2\ 024}$不成立，故 B 错误.

对于 C，当 $a>0>b$ 时，$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$不成立，故 C 错误.

对于 D，当 $a>b\geqslant 0$ 时，$a|a|=a^2$，$b|b|=b^2$，显然 $a|a|>b|b|$成立；当 $0\geqslant a>b$ 时，则 $a^2<b^2$，又 $a|a|=-a^2$，$b|b|=-b^2$，故 $a|a|>b|b|$成立；当 $a>0>b$ 时，$a|a|>0$，$b|b|<0$，显然 $a|a|>b|b|$成立. 故当 $a>b$ 时，总有 $a|a|>b|b|$成立，故 D 正确.

4. BCD　【解析】由条件知 a,b,c 三个数中必有一个正数，两个负数. 不妨设 $a>0,b<0,c<0$. 由条件得 $b+c=-a$，$bc=\frac{2}{a}$，则 b,c 为方程 $x^2+ax+\frac{2}{a}=0$ 的两个负根，因此该方程的判别式 $\Delta=a^2-\frac{8}{a}\geqslant 0$，解得 $a\geqslant 2$. 对于 A，若 $a>b>c$，当 $a=4$ 时，方程 $x^2+ax+\frac{2}{a}=0$ 即 $x^2+4x+\frac{1}{2}=0$，解得 $x=-2\pm\frac{\sqrt{14}}{2}$，则 $b=-2+\frac{\sqrt{14}}{2}$，$c=-2-$

$\frac{\sqrt{14}}{2}<-1$,故 A 错误;对于 B,若 $a>b>c$,由上面的分析,可知 $a\geqslant 2$,故 B 正确;对于 C,由题可知 $ab+bc+ca=a(b+c)+bc=-a^2+\frac{2}{a}$,因为 $a\geqslant 2$,所以 $-a^2\leqslant -4$,$\frac{2}{a}\leqslant 1$,则 $-a^2+\frac{2}{a}\leqslant -3$,当 $a=2$ 时等号成立,所以 $ab+bc+ca\leqslant -3$,故 C 正确;对于 D,$|a|+|b|+|c|=a-b-c=2a\geqslant 4$,故 D 正确.

5. C 【解析】因为 $P-Q=\left(a^2+b^2+\frac{1}{c^2}+c^2\right)-(2a+2b)=(a-1)^2+(b-1)^2+\left(c-\frac{1}{c}\right)^2\geqslant 0$,所以 $P-Q\geqslant 0$,即 $P\geqslant Q$. 故选 C.

6. C 【解析】对于 A,$\frac{b}{a}-\frac{b+1}{a+1}=\frac{b-a}{a(a+1)}$,因为 $a>b>0$,所以 $b-a<0$,$a+1>0$,所以$\frac{b-a}{a(a+1)}<0$,即$\frac{b}{a}-\frac{b+1}{a+1}<0$,即$\frac{b}{a}<\frac{b+1}{a+1}$,故 A 错误;

对于 B,$a+\frac{1}{a}-\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{a^2+1}{a}-\frac{b^2+1}{b}=\frac{a^2b+b-ab^2-a}{ab}=\frac{(a-b)(ab-1)}{ab}$, 因为 $a>b>0$,所以 $a-b>0$,$ab>0$,但 ab 与 1 的大小不确定,故 B 不一定成立,故 B 错误;

对于 C,$a+\frac{a}{b}-\left(b+\frac{b}{a}\right)=\frac{ab+a}{b}-\frac{ab+b}{a}=\frac{a^2b+a^2-ab^2-b^2}{ab}=\frac{(a-b)(ab+a+b)}{ab}$,因为 $a>b>0$,所以 $a-b>0$,$ab>0$,$ab+a+b>0$,所以$\frac{(a-b)(ab+a+b)}{ab}>0$,即 $a+\frac{a}{b}-\left(b+\frac{b}{a}\right)>0$,于是有 $a+\frac{a}{b}>b+\frac{b}{a}$,故 C 正确;

对于 D,$\frac{2a+b}{a+2b}-\frac{a}{b}=\frac{(2a+b)b-a(a+2b)}{b(a+2b)}=\frac{(b-a)(b+a)}{b(a+2b)}$,因为 $a>b>0$,所以 $b-a<0$,$b+a>0$,$a+2b>0$,所以$\frac{(b-a)(b+a)}{b(a+2b)}<0$,即$\frac{2a+b}{a+2b}-\frac{a}{b}<0$,于是有$\frac{2a+b}{a+2b}<\frac{a}{b}$,故 D 错误. 故选 C.

7. BD 【解析】对于 A,当 $a=0.5$,$c=-0.5$ 时,$\ln(a-c)=\ln 1=0$,故 A 错误;

对于 B,因为 $a>b>0$,$d<0$,所以 $ad<bd$(**提示:**当不等式两边同时乘一个负数时,注意不等号方向要发生改变),又 $b>0$,$d<c<0$,故 $bd<bc$,从而 $ad<bd<bc$,故 B 正确;

对于 C,$\frac{c}{a}-\frac{c+b}{a+b}=\frac{ac+bc-ac-ab}{a(a+b)}=\frac{b(c-a)}{a(a+b)}$,因为 $a>b>0>c>d$,所以 $c-a<0$,$a+b>0$,故$\frac{c}{a}-\frac{c+b}{a+b}=\frac{b(c-a)}{a(a+b)}<0$,即$\frac{c}{a}<\frac{c+b}{a+b}$,故 C 错误;

对于 D,$a^3+b^3-(a^2b+ab^2)=(a^3-a^2b)+(b^3-ab^2)=a^2(a-b)+b^2(b-a)=(a-b)(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)$(**提示:**利用作差法比较

大小的关键是变形，常采用配方、因式分解、分母有理化等方法把差式变成积式或者完全平方式），因为 $a>b>0$，故 $a+b>0$，$(a-b)^2>0$，所以 $a^3+b^3-(a^2b+ab^2)=(a-b)^2(a+b)>0$，即 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$，故 D 正确.

综上，故选 BD.

8. ABD 【解析】对于 A，因为 $a>b$，所以 $a-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}>0$，$\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}>0$，所以 $a>\frac{a+b}{2}>b$，故 A 正确；

对于 B，若 $a>b>0$，因为 $\frac{a}{\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}>1$，所以 $a>\sqrt{ab}$，因为 $\frac{\sqrt{ab}}{b}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}>1$，所以 $\sqrt{ab}>b$，即 $a>\sqrt{ab}>b$，故 B 正确；

对于 C，令 $a=2,b=3$，满足 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，不满足 $a>0,b<0$，故 C 错误；

对于 D，因为 $a>b>0,c>0$，所以 $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}>0$，即 $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$，故 D 正确.

9. C 【解析】因为 $2<a<3,-2<b<-1$，所以 $4<2a<6,1<-b<2$，则 $5<2a-b<8$，故选 C.

关键点拨 利用不等式性质求某些代数式的取值范围时，一般是利用整体思想，通过一次不等关系的运算求得整体范围，是避免错误的有效途径.

10. B 【解析】设 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)=(m+n)a-(m-n)b$，则有 $\begin{cases}m+n=4,\\m-n=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n=1\end{cases}$（关键：设参，根据等式的性质建立方程组求出参数的值），所以 $4a-2b=3(a-b)+(a+b)$. 因为 $a-b\in[0,1]$，$a+b\in[2,4]$，所以 $3(a-b)\in[0,3]$，所以 $4a-2b\in[2,7]$，故选 B.

11. $\frac{3}{4}$ 【解析】因为 $f(a)=f(b+1)$，则 $|a-1|=|b|$，所以 $a-1=b$ 或 $a-1=-b$，即 $a=b+1$ 或 $a=1-b$. 因为 $a\leqslant b$，所以 $a=1-b$，且 $a=1-b\leqslant b$，可得 $b\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $a\cdot(b+1)=(1-b)(1+b)=1-b^2\leqslant\frac{3}{4}$，当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，故 $a\cdot(b+1)$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$.

考点 4　基本不等式

1. D 【解析】因为 $a>0,b>0,2a+b=1$，所以 $ab=\frac{1}{2}\times 2ab\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{2a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$，当且仅当 $2a=b$，即 $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{2}$ 时，等号成立.

所以 ab 的最大值为 $\frac{1}{8}$.

2. D 【解析】因为 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$,所以 $2x-1\in(0,1]$(提示:在利用基本不等式时,注意相关式中的相关项必须是正数,如果不是正数,则需要通过构造转化为正数),所以 $2x+\frac{1}{2x-1}=\left[(2x-1)+\frac{1}{2x-1}\right]+1\geqslant 2\sqrt{(2x-1)\cdot\frac{1}{2x-1}}+1=3$,当且仅当 $2x-1=\frac{1}{2x-1}$,即 $x=1$ 时,等号成立,故选 D.

3. B 【解析】因为 $a>0,b>0$,所以 $\frac{4}{b}+\frac{b}{a^2}+2a\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{b}\cdot\frac{b}{a^2}}+2a=\frac{4}{a}+2a$,当且仅当 $\frac{4}{b}=\frac{b}{a^2}$,即 $b=2a$ 时等号成立. 又 $\frac{4}{a}+2a\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{a}\cdot 2a}=4\sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{4}{a}=2a$ 时等号成立,故当且仅当 $\frac{4}{b}=\frac{b}{a^2}$ 且 $\frac{4}{a}=2a$,即 $a=\sqrt{2}$,$b=2\sqrt{2}$ 时取等号,即 $\frac{4}{b}+\frac{b}{a^2}+2a$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$. 故选 B.

4. A 【解析】由 $x>0,y>0$,得 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$,所以 $x+y+xy=3\geqslant 2\sqrt{xy}+xy$,当且仅当 $x=y$ 时等号成立. 令 $\sqrt{xy}=t(t>0)$,则 $t^2+2t-3\leqslant 0$,解得 $0<t\leqslant 1$,即 $0<\sqrt{xy}\leqslant 1$,故 $0<xy\leqslant 1$,当且仅当 $x=y=1$ 时等号成立,故 xy 的最大值为 1,故选 A.

一题多解 由 $x+y+xy=3$,得 $y=\frac{3-x}{x+1}$,则 $xy=\frac{x(3-x)}{x+1}=\frac{-x^2+3x}{x+1}$. 因为 $x>0,y>0$,所以 $\frac{3-x}{x+1}>0$ 且 $x>0$,解得 $0<x<3$. 设 $t=x+1\in(1,4)$,则 $x=t-1$,$xy=\frac{-x^2+3x}{x+1}=\frac{-(t-1)^2+3(t-1)}{t}=\frac{-t^2+5t-4}{t}=-t-\frac{4}{t}+5=-\left(t+\frac{4}{t}\right)+5\leqslant -2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}+5=1$,当且仅当 $t=\frac{4}{t}$,即 $t=2$ 时等号成立,所以 xy 的最大值为 1,故选 A.

5. BC 【解析】对于 A,因为 a,b 为正实数,则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$,故 $(a+b)^2\geqslant 4ab$,即 $(a+b)(a+b)\geqslant 4ab$,故 $\frac{ab}{a+b}\leqslant\frac{a+b}{4}$,故 A 错误;

对于 B,由于 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$,当且仅当 $a=\frac{1}{a}$,即 $a=1$ 时,等号成立,$b+\frac{1}{b}\geqslant 2$,当且仅当 $b=\frac{1}{b}$,即 $b=1$ 时,等号成立,故 $\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4$,故 B 正确;

对于 C，因为 a, b 为正实数，$a^2+b^2 \geqslant 2ab$，所以 $2(a^2+b^2) \geqslant (a+b)^2$，故 $\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，即 $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，故 C 正确；

对于 D，因为 a, b 为正实数，则 $\frac{b^2}{a}+a \geqslant 2b$，$\frac{a^2}{b}+b \geqslant 2a$，当且仅当 $a=b$ 时，等号成立，所以 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b}+b+a \geqslant 2b+2a$，即 $\frac{b^2}{a}+\frac{a^2}{b} \geqslant b+a$，故 D 错误.

6. 16 【**解析**】因为 $a>0, b>2$，且 $\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b-2}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{2}{a+1}+\frac{4}{b-2}=1$，

所以 $2a+b=[2(a+1)+(b-2)]\left(\frac{2}{a+1}+\frac{4}{b-2}\right)=4+4+\frac{2(b-2)}{a+1}+\frac{8(a+1)}{b-2} \geqslant 8+2\sqrt{\frac{2(b-2)}{a+1} \cdot \frac{8(a+1)}{b-2}}=16$（**方法：**当两个变量为正实数时，有一个代数式的值已知，求另一个代数式的最值问题时，根据任意数乘 1 数值不变的性质，将已知式和所求式相乘，变成互为倒数式的形式，然后再使用基本不等式求值即可），当且仅当 $\frac{2(b-2)}{a+1}=\frac{8(a+1)}{b-2}$，即 $b-2=2(a+1)$，即 $a=3, b=10$ 时，等号成立，故 $2a+b$ 的最小值是 16.

7. D 【**解析**】因为 $a>0, b>0$，且 $a+b=1$，

所以由基本不等式可得 $ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ $\left(\text{当且仅当 } a=b=\frac{1}{2}\text{时取等号}\right)$，A 正确；

由基本不等式知 $\frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，则 $\frac{1}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，

即 $a^2+b^2 \geqslant \frac{1}{2}$ $\left(\text{当且仅当 } a=b=\frac{1}{2}\text{时取等号}\right)$，B 正确；

由题得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{1-b}+\frac{1}{b+1}=\frac{2}{1-b^2}$，

由已知得 $0<b<1$，故 $1-b^2 \in (0,1)$，所以 $\frac{2}{1-b^2}>2$，

故 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}>2$，C 正确；

由基本不等式可得 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a+b}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$，

即 $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leqslant \sqrt{2}$ $\left(\text{当且仅当 } a=b=\frac{1}{2}\text{时取等号}\right)$，D 错误.

8. 2 【**解析**】因为 $a, b \geqslant 0$，$a+b=2$，

所以由基本不等式得 $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}=1$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号，

又 $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2\sqrt{ab}+a+b=2+2\sqrt{ab}$，

所以$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\leqslant 4$，即$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2$，当且仅当 $a=b=1$ 时取等号，故 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$的最大值为 2.

9. B 【解析】对于 A，因为 $0<|\cos x|\leqslant 1$，且函数 $y=x+\frac{2}{x}$在$(0,1]$上单调递减，

所以当$|\cos x|=1$ 时，$y_{\min}=3$，故 A 错误；

对于 B，将 $y=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$两边分别平方得 $y^2=8+2\sqrt{-x^2+8x}$，且 $0\leqslant x\leqslant 8$，

因为$-x^2+8x=-(x-4)^2+16$，所以 $y^2\geqslant 8$（当 $x=0$ 或 $x=8$ 时等号成立），又 $y>0$，所以 $y_{\min}=2\sqrt{2}$，故 B 正确；

对于 C，因为 $2^x>0,2^{2-x}>0$，所以 $y=2^x+2^{2-x}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot 2^{2-x}}=4$，当且仅当 $2^x=2^{2-x}$，即 $x=1$ 时取等号，故 C 错误；

对于 D，$y=\frac{2x^4+8x^2+10}{x^2+2}=\frac{2[(x^2+2)^2+1]}{x^2+2}=2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2+2}\right)$，因为 $x^2+2\geqslant 2$，函数 $y=x+\frac{1}{x}$在$[2,+\infty)$上单调递增，

所以当 $x^2+2=2$，即 $x=0$ 时，$y_{\min}=5$，故 D 错误.

10. $(-\infty,5)$ 【解析】若命题“对于任意 $x\in(1,3)$，$a\geqslant x+\frac{4}{x}$”为真命题，则 $a\geqslant\left(x+\frac{4}{x}\right)_{\max}$，

设 $y=x+\frac{4}{x}$，$x\in(1,3)$，$x+\frac{4}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=4$，当且仅当 $x=\frac{4}{x}$，即 $x=2$ 时，等号成立，

由对勾函数的性质可知，当 $x\in(1,2)$时，函数单调递减，当 $x\in(2,3)$时，函数单调递增，

因为 $f(1)=5$，$f(3)=3+\frac{4}{3}<5$，所以 $4\leqslant x+\frac{4}{x}<5$，即 $a\geqslant 5$，

所以命题“对于任意 $x\in(1,3)$，$a\geqslant x+\frac{4}{x}$”为假命题，则实数 a 的取值范围为$(-\infty,5)$.

11. $\frac{25}{18}$ 【解析】设 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 α，$\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$|\overrightarrow{AM}|^2=\frac{8}{9}+\frac{8}{9}\cos\alpha$，由余弦定理得$|\overrightarrow{BC}|^2=5-4\cos\alpha$，

所以 $\frac{1}{|\overrightarrow{AM}|^2}+\frac{2}{|\overrightarrow{BC}|^2}=\frac{1}{\frac{8}{9}+\frac{8}{9}\cos\alpha}+\frac{2}{5-4\cos\alpha}=\frac{\frac{9}{8}}{1+\cos\alpha}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}-\cos\alpha}\geqslant\frac{\left(\sqrt{\frac{9}{8}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{(1+\cos\alpha)+\left(\frac{5}{4}-\cos\alpha\right)}$（**提示：**配凑系数并使用权方和不等式，且 $\alpha\in(0,\pi)$，$1+\cos\alpha>0$，$\frac{5}{4}-\cos\alpha>0$）$=\frac{25}{18}$，当

且仅当$\dfrac{\sqrt{\dfrac{9}{8}}}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{\dfrac{1}{2}}}{\dfrac{5}{4}-\cos\alpha}$，即 $\cos\alpha=\dfrac{7}{20}$时等号成立.

12. $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$　【解析】由柯西不等式可知，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\leqslant\left[\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]\cdot[(\sqrt{3a})^2+(\sqrt{2b})^2]=\dfrac{5}{6}(3a+2b)=\dfrac{5}{6}$，即$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\dfrac{\sqrt{30}}{6}$，当且仅当$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2b}=\sqrt{3a}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $4b=9a=\dfrac{6}{5}$时取等号，故$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的最大值为$\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

考点 5　二次函数与一元二次不等式

1. B　【解析】不等式 $4[x]^2-16[x]+7\leqslant0$，即为$(2[x]-1)(2[x]-7)\leqslant0$（关键：利用十字相乘法分解因式），解得$\dfrac{1}{2}\leqslant[x]\leqslant\dfrac{7}{2}$，故选 B.

2. C　【解析】由题可知，原不等式可转化为$[2x-(a+1)][2x-(a-1)]<0$，因为$\dfrac{a+1}{2}>\dfrac{a-1}{2}$，所以不等式的解为$\dfrac{a-1}{2}<x<\dfrac{a+1}{2}$. 故选 C.

3. B　【解析】因为关于 x 的不等式 $x^2+px+q<0$ 的解集是$\{x\mid-1<x<2\}$，所以 $x^2+px+q=0$ 的两个根是$-1,2$，由根与系数的关系可得 $p=-1,q=-2$，所以$\dfrac{x^2+px-12}{x+q}>0$ 可转化为$\dfrac{(x-4)(x+3)}{x-2}>0$，解得 $-3<x<2$ 或 $x>4$. 所以原不等式的解集为$(-3,2)\cup(4,+\infty)$. 故选 B.

4. ABD　【解析】因为关于 x 的不等式$(x+2)(x-4)+a<0(a<0)$的解集是$(x_1,x_2)(x_1<x_2)$，所以 x_1,x_2 是一元二次方程 $x^2-2x-8+a=0$ 的两个根. 所以 $x_1+x_2=2$，故 A 正确；$x_1x_2=a-8<-8$，故 B 正确；$x_2-x_1=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{9-a}>6$，故 D 正确；由 $x_2-x_1>6$，可得 $-2<x_1<x_2<4$ 是错误的，故 C 错误. 故选 ABD.

5. -2 或-1　-10　【解析】若 $a=0$，则原不等式为 $8x+16\geqslant0$，即 $x\geqslant-2$，显然原不等式的整数解有无数个，不符合题意，故 $a\neq0$. 设 $y=ax^2+8(a+1)x+7a+16(a\neq0)$，其图象为抛物线，对于任意一个给定的 a 值，其抛物线只有在开口向下的情况下才能满足 $y\geqslant0$ 的整数解是有限个，所以 $a<0$.

因为 0 为其中一个解，所以 $7a+16\geqslant0$，即 $a\geqslant-\dfrac{16}{7}$，所以$-\dfrac{16}{7}\leqslant a<0$，又 $a\in\mathbf{Z}$，所以 $a=-2$ 或 $a=-1$. 若 $a=-2$，则不等式为$-2x^2-8x+2\geqslant0$，解得$-2-\sqrt{5}\leqslant x\leqslant\sqrt{5}-2$，因为 x 为整数，所以 $x=-4,-3,-2,-1,0$；若 $a=-1$，则不等式为$-x^2+9\geqslant0$，解得$-3\leqslant x\leqslant3$，因为 x 为整数，所以 $x=-3,-2,-1,0,1,2,3$. 所以不等式的全部整数解的和为-10.

6. C 【解析】①当 $m=0$ 时，不等式化为 $2x<0$，解得 $x<0$，符合题意；

②当 $m>0$ 时，$y=mx^2-(m-2)x+m$ 的图象开口向上，则 $\Delta=(m-2)^2-4m^2=-3m^2-4m+4>0$，解得 $0<m<\frac{2}{3}$；

③当 $m<0$ 时，$y=mx^2-(m-2)x+m$ 的图象开口向下，则必存在实数 x，使得 $mx^2-(m-2)x+m<0$ 成立.

综上，实数 m 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$.

方法总结　解含参的一元二次不等式的注意事项

(1)若二次项系数含有参数，则应对二次项系数与 0 的大小关系进行讨论；

(2)若求对应的一元二次方程的根需用求根公式，则应对判别式 Δ 进行讨论；

(3)若求出的根含有参数，则应对两根的大小进行讨论.

7. A 【解析】不等式 $ax^2-|x|+2a\geqslant 0$ 的解集是 $(-\infty,+\infty)$，

即对于 $\forall x\in\mathbf{R}$，$ax^2-|x|+2a\geqslant 0$ 恒成立，即 $a\geqslant\frac{|x|}{x^2+2}$.

当 $x=0$ 时，$a\geqslant 0$；当 $x\neq 0$ 时，$a\geqslant\frac{|x|}{x^2+2}=\frac{1}{|x|+\frac{2}{|x|}}$，

因为 $\frac{1}{|x|+\frac{2}{|x|}}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{|x|\cdot\frac{2}{|x|}}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，当且仅当 $|x|=\sqrt{2}$ 时等号成立，所以 $a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{4}$.

综上，$a\in\left[\frac{\sqrt{2}}{4},+\infty\right)$.

8. ABC 【解析】因为函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，即 $f(x)$ 为偶函数. 又当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$ 时，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}<0$ 恒成立，即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. 若 $f(2ax)<f(2x^2+1)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，即 $|2ax|<2x^2+1$ 恒成立，即 $-2x^2-1<2ax<2x^2+1$ 恒成立，即 $\begin{cases}2x^2-2ax+1>0,\\2x^2+2ax+1>0\end{cases}$ 恒成立，即 $4a^2-8<0$，解得 $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$，即实数 a 的取值范围为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，故选 ABC.

9. B 【解析】若不等式 $|f(x)|\leqslant 2$ 在 $x\in[1,5]$ 上恒成立，则必须满足 $\begin{cases}-2\leqslant f(1)\leqslant 2,\\-2\leqslant f(3)\leqslant 2,\\-2\leqslant f(5)\leqslant 2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2\leqslant 1+a+b\leqslant 2,\\-2\leqslant 9+3a+b\leqslant 2,\\-2\leqslant 25+5a+b\leqslant 2.\end{cases}$ 由 $\begin{cases}-2\leqslant -1-a-b\leqslant 2,\\-2\leqslant 9+3a+b\leqslant 2,\end{cases}$ 两

式相加得 $-4\leqslant 8+2a\leqslant 4$，解得 $-6\leqslant a\leqslant -2$. 再由 $\begin{cases}-2\leqslant -9-3a-b\leqslant 2,\\ -2\leqslant 25+5a+b\leqslant 2,\end{cases}$ 两式相加得 $-4\leqslant 16+2a\leqslant 4$，解得 $-10\leqslant a\leqslant -6$. 故 $a=-6$，代入不等式组得 $\begin{cases}-2\leqslant -5+b\leqslant 2,\\ -2\leqslant -9+b\leqslant 2,\\ -2\leqslant -5+b\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $b=7$. 经检验，当 $a=-6,b=7$ 时，$f(x)=x^2-6x+7=(x-3)^2-2$，有 $[f(x)]_{\max}=f(1)=f(5)=2$，$[f(x)]_{\min}=f(3)=-2$，满足 $|f(x)|\leqslant 2$ 在 $x\in[1,5]$ 上恒成立. 综上，满足要求的有序数对 (a,b) 为 $(-6,7)$，共 1 个，故选 B.

10. $a=-3,b=3\left(\text{答案不唯一，只要满足 } b=-a>\frac{9}{4}\text{ 即可}\right)$

【**解析**】因为关于 x 的不等式 $ax>b(a,b\in\mathbf{R})$ 的解集为 $(-\infty,-1)$，所以 $\begin{cases}a<0,\\ b=-a\end{cases}$（**提示：**由不等式的解集知，不等号的方向发生了改变，则 $a<0$）. 又关于 y 的不等式 $y^2+3y+b>0$ 的解集为 $\mathbf{R}$，所以 $3^2-4b<0$（**提示：**若 $ax^2+bx+c>0(a>0)$ 恒成立，则需方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根的判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$），解得 $b>\frac{9}{4}$，所以满足条件的一组 a,b 的值依次为 $a=-3,b=3\left(\text{答案不唯一，只要满足 } b=-a>\frac{9}{4}\text{ 即可}\right)$.