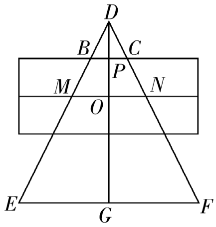
专题 10　立体几何

考点 34　空间几何体的结构、表面积与体积

1. A　【解析】设五边形有 x 个，共 $5x$ 条棱，六边形有 y 个，共 $6y$ 条棱，由于每条棱出现在两个面中，故会被重复计算一次，因此总棱数 $E=\dfrac{5x+6y}{2}$，同理每个顶点出现在三个面中，总顶点数 $V=\dfrac{5x+6y}{3}=60$，故 $E=90$，又面数 $F=x+y$，故 $60-90+x+y=2$，即 $x+y=32$，与 $5x+6y=180$ 联立可解得 $x=12$. 故选 A.

2. 2　【解析】过 BC 作垂直于四棱锥底面的截面（关键：作出截面把立体几何问题转化为平面几何问题，然后应用相似三角形求解），如图所示.



由条件可知 $DE=3\sqrt{10}$，EF 为正四棱锥底面正方形的对角线，所以 $EF=6\sqrt{2}$，所以 $DG=\sqrt{DE^2-EG^2}=6\sqrt{2}$.

MN 的长度与正四棱柱底面正方形的对角线的长度相等，所以 $MN=4$，则 $PO=2$.

由 $\triangle DMN\backsim\triangle DEF$ 可得 $\dfrac{DO}{DG}=\dfrac{MN}{EF}$，解得 $DO=4$，$DP=DO-PO=2$.

由 $\triangle DBC\backsim\triangle DMN$ 可得 $\dfrac{BC}{MN}=\dfrac{DP}{DO}=\dfrac{1}{2}$，所以 $BC=2$.

3. D　【解析】设圆台的母线长为 l，因为该圆台的侧面积为 $3\sqrt{5}\pi$，

所以由圆台侧面积公式可得 $\pi l(1+2)=3\pi l=3\sqrt{5}\pi$，解得 $l=\sqrt{5}$.

设截去的圆锥的母线长为 l'，由三角形相似可得 $\dfrac{l'}{l'+l}=\dfrac{1}{2}$，

则 $2l'=l'+\sqrt{5}$，解得 $l'=\sqrt{5}$，

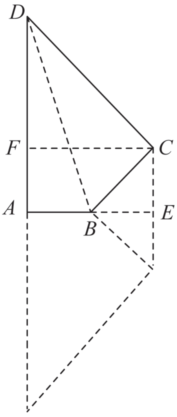
所以原圆锥的母线长为 $l'+l=\sqrt{5}+\sqrt{5}=2\sqrt{5}$. 故选 D.

4. C　【解析】连接 BD，在圆内接四边形 $ABCD$ 中，$\angle DAB=90°$，

所以 BD 是四边形 $ABCD$ 外接圆的直径，所以 $\angle DCB=90°$，则 $\angle ABC=135°$.

延长 AB，过点 C 作 $CE\perp AB$，垂足为 E，过点 C 作 $CF\perp AD$，垂足为 F，则 $\angle CBE=45°$，所以 $\triangle BCE$ 是等腰直角三角形，

所以 $BE=CE=2$. 作出四边形 $ABCD$ 关于直线 AB 对称的图形，如图所示.



由于 $CE/\!/AF$，$AE/\!/CF$，$\angle DAB=90°$，所以四边形 $AECF$ 是矩形，

$AF=CE=2$，$DF=CF=AE=4$，

所以在等腰直角三角形 CDF 中，$CD=4\sqrt{2}$.

将该四边形沿 AB 旋转一周，则旋转形成的几何体是一个圆台挖掉一个圆锥，

其表面积为 $\pi\times6^2+\pi\times(2+6)\times4\sqrt{2}+\pi\times2\times2\sqrt{2}=(36\sqrt{2}+36)\pi$. 故

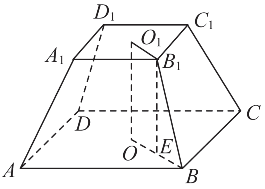
选 C.

5. $(5+\sqrt{2})\pi$　【解析】因为陀螺的底面圆的半径 $r=1$，由 $AB=1$，$AC=3$，得 $BC=2$，即圆柱的母线长 $l'=2$，

所以圆锥的母线长 $l=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，则圆锥的侧面积为 $\pi rl=\pi\times1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi$，圆柱的侧面积为 $2\pi rl'=2\pi\times1\times2=4\pi$，圆柱的底面积为 $\pi r^2=\pi\times1^2=\pi$，

所以该陀螺的表面积 $S=\sqrt{2}\pi+4\pi+\pi=(5+\sqrt{2})\pi$.

6. A　【解析】如图所示，在正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，OO_1 是该四棱台的高（O_1，O 分别为上、下底面的中心），连接 OB，O_1B_1，过点 B_1 作 $B_1E\perp OB$，垂足为 E.



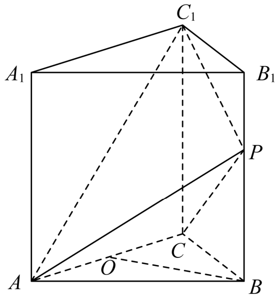
显然 $OB=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2}=2\sqrt{2}$，$O_1B_1=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{2}$，

所以该正四棱台的高 $OO_1=B_1E=\sqrt{11-(2\sqrt{2}-\sqrt{2})^2}=3$，

则该正四棱台的体积 $V=\frac{1}{3}\times(2^2+2\times4+4^2)\times3=28$. 故选 A.

7. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　【解析】如图，取 AC 的中点 O，连接 OB.

因为 $\triangle ABC$ 为正三角形，所以 $OB\perp AC$，又因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$OB\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp OB$，又 $AA_1\cap AC=A$，AA_1，$AC\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $OB\perp$ 平面 ACC_1A_1，所以 $OB=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$，即顶点 B 到平面 ACC_1A_1 的距离 $OB=\sqrt{3}$.



又因为 $BB_1/\!/AA_1$，$BB_1\not\subset$ 平面 ACC_1A_1，$AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $BB_1/\!/$平面 ACC_1A_1. 因为 P 是棱 BB_1 上一点，所以点 P 到平面 ACC_1A_1 的距离为$\sqrt{3}$，

所以 $V_{P-ACC_1}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ACC_1}\times\sqrt{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

8. $5:6$　【解析】如图所示，连接 AC，因为 G 为 CD 的中点，且 $EF:AB=3:4$，设 $AB=CD=4a$，$EF=3a(a>0)$ 且梯形 $CDEF$ 的高为 h，

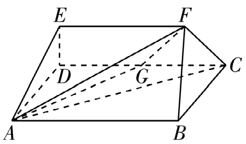
则四边形 $DEFG$ 和$\triangle CFG$ 的面积分别为 $S_{DEFG}=\frac{1}{2}(DG+EF)\cdot h=\frac{1}{2}(2a+3a)\cdot h=\frac{5}{2}ah$，

$S_{\triangle CFG}=\frac{1}{2}CG\cdot h=\frac{1}{2}\times2a\cdot h=ah$，所以四边形 $DEFG$ 与$\triangle CFG$ 的面积比为 $5:2$，

所以 $V_1:V_{A-CFG}=5:2$，

即令 $V_1=5m$，则 $V_{A-CFG}=2m$，$m>0$.

在矩形 $ABCD$ 中，因为 G 为 CD 的中点，



可得 $S_{\triangle ACG}=\frac{1}{2}CG\cdot BC=\frac{1}{4}AB\cdot BC$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC$，

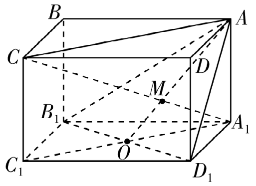
所以 $\triangle ACG$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $1:2$，所以 $V_{A-CFG}:V_{F-ABC}=V_{F-ACG}:V_{F-ABC}=1:2$，所以 $V_{F-ABC}=4m$.

所以 $V_1:V_2=V_1:(V_{A-CFG}+V_{F-ABC})=5:6$.

考点35　空间点、线、面的位置关系

1. D　【解析】$\because$ 直线 $AB\cap l=M$，过 A,B,C 三点的平面记作 γ，$\therefore \beta\cap\gamma=MC$，$\therefore \gamma$ 与 β 的交线必通过点 C 和点 M.

2. BCD　【解析】对于 A，连接 AO,A_1C_1,AC，如图所示，



在长方形 $A_1B_1C_1D_1$，由于 O 为对角线 B_1D_1 的中点，$A_1C_1\cap B_1D_1=O$，

则平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $AB_1D_1=AO$，

由 $M\in$ 平面 AB_1D_1，$M\in A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，则 $M\in AO$.

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，

由于 $AO\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A$，

所以 BB_1 与 MO 异面，故 A 错误.

对于 B，由选项 A 分析可知 $M\in AO$，$A_1C_1\cap B_1D_1=O$，易知 $A,M,O,A_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，故 B 正确.

对于 C，由选项 A 分析可知 $M\in AO$，$A_1C_1\cap B_1D_1=O$，易知 $A,M,O,C\subset$ 平面 ACC_1A_1，故 C 正确.

对于 D，由选项 A 分析可知 $M\in AO$，故 D 正确.

3. BD　【解析】延长线段 EH,FG 交于点 M，连接 DM，如图所示.

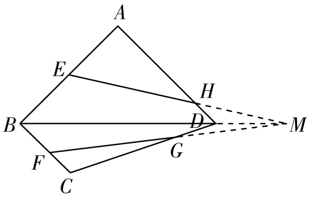
$\because$ 点 E,H 分别在直线 AB,AD 上，而 AB,AD 是平面 ABD 内的直线. $\therefore E\in$ 平面 ABD，$H\in$ 平面 ABD，可得直线 $EH\subset$ 平面 ABD，

$\because$ 点 F,G 分别在直线 BC,CD 上，而 BC,CD 是平面 BCD 内的直线，

$\therefore F\in$ 平面 BCD，$G\in$ 平面 BCD，可得直线 $FG\subset$ 平面 BCD，

因此，直线 EH 与 FG 的公共点在平面 ABD 与平面 BCD 的交线上，$\because$ 平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，

$\therefore B,D,M$ 三点共线，即点 $M\in$ 直线 BD.



4. B　【解析】对于 A，若直线 l 与 α 相交，则 α 内的直线与 l 相交或异面，因此若 l 与 α 相交，则不存在直线 $m\subset\alpha$，使 $l/\!/m$，故 A 错误；

对于 B，由于 $l\not\subset\alpha$，所以 l 与 α 相交或平行，不论是相交还是平行，均可在 α 内找到与 l 垂直的直线 m，故 B 正确；

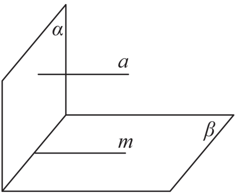
对于 C，当 $l/\!/\alpha$ 时，α 内的直线与 l 平行或异面，所以不存在 $m\subset\alpha$，使 l,m 相交，故 C 错误；

对于 D，当直线 $l\perp\alpha$ 时，直线 l 与 α 内的所有直线均垂直，故不存在直线 $m\subset\alpha$，使 l,m 所成角为 $\frac{\pi}{6}$，故 D 错误.

5. B　【解析】对于 A，若 $a/\!/b$，$b/\!/\alpha$，则 $a/\!/\alpha$ 或 $a\subset\alpha$，故 A 错误；

对于 B，若 $a/\!/b$，$b/\!/\beta$，则 $a\subset\beta$ 或 $a/\!/\beta$，

若 $a\subset\beta$，$a\perp\alpha$，则 $\alpha\perp\beta$，



若 $a/\!/\beta$，如图所示，则在平面 β 内一定存在一条直线 $m/\!/a$，因为 $a\perp\alpha$，所以 $m\perp\alpha$，又 $m\subset\beta$，所以 $\alpha\perp\beta$，

综上，若 $a/\!/b$，$a\perp\alpha$，$b/\!/\beta$，则 $\alpha\perp\beta$，故 B 正确；

对于 C，若 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\beta$，$\alpha/\!/\beta$，则直线 a，b 相交或平行或异面，故 C 错误；

对于 D，若 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\beta$，$\alpha\perp\beta$，则直线 a，b 相交或平行或异面，故 D 错误. 故选 B.

6. A 【解析】对于①，若 a，b 是异面直线，b，c 是异面直线，则 a，c 可能相交、平行、异面，故①为假命题；

对于②，若 a 和 b 相交，b 和 c 相交，则 a 和 c 可能相交、平行、异面，故②为假命题；

对于③，若 a 和 b 共面，b 和 c 共面，则 a 和 c 可能共面，也可能异面，故③为假命题. 故真命题的个数为 0. 故选 A.

7. ABC 【解析】对于 A，由于 $n/\!/\alpha$，所以存在直线 $l\subset\alpha$ 且 $n/\!/l$，由于 $m\perp\alpha$，$l\subset\alpha$，所以 $m\perp l$，所以 $m\perp n$，故 A 正确.

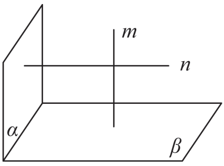
对于 B，垂直于同一个平面的两条直线平行，故 B 正确.

对于 C，若 $m\perp\alpha$，$m\perp n$，则存在 $l\subset\alpha$，$l/\!/n$，由于 $n\not\subset\alpha$，所以 $n/\!/\alpha$，故 C 正确.

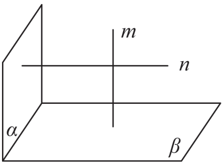
对于 D，若 $m\perp n$，$n/\!/\alpha$，则 m 可能与 α 平行或与 α 垂直，故 D 错误. 故选 ABC.

8. 若②③④，则①（或若①③④，则②）

【解析】如图甲，若②③④，则①，成立；



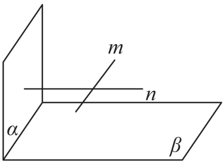
图甲



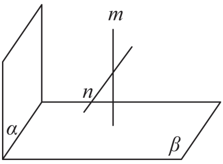
图乙

如图乙，若①③④，则②，成立；

如图丙，若①②④，则③，不成立；



图丙

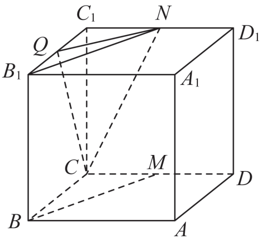


图丁

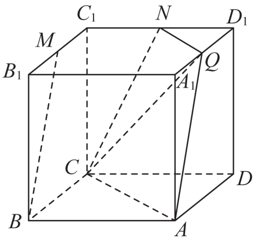
如图丁，若①②③，则④，不成立.

考点 36　直线、平面平行的判定与性质

1. B 【解析】对于 A，如图①，连接 B_1N，由正方体的性质可知 $BM/\!/B_1N$，又 B_1N 与平面 CNQ 相交于点 N，所以直线 BM 与平面 CNQ 不平行，故 A 错误；



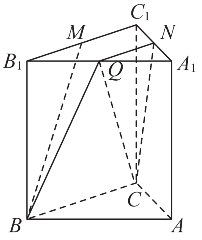
图①



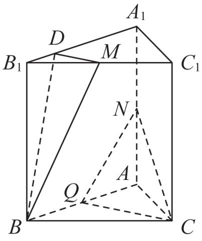
图②

对于 B,如图②,连接 AC,AQ,由正方体的性质可知 $NQ//AC$,故平面 CNQ 即为平面 $ACNQ$,而 $BM//AQ$,$BM\not\subset$平面 CNQ,$AQ\subset$平面 CNQ,所以直线 BM 与平面 CNQ 平行,故 B 正确;

对于 C,如图③,连接 BQ,由中位线定理及正三棱柱的性质可知 $NQ//BC$,故平面 CNQ 即为平面 $BCNQ$,则直线 BM 与平面 CNQ 相交于点 B,故 C 错误;



图③



图④

对于 D,假设直线 BM 与平面 CNQ 平行,如图④,过点 M 作 CQ 的平行线交 A_1B_1 于点 D,则 D 是线段 A_1B_1 上靠近点 B_1 的四等分点,连接 BD,

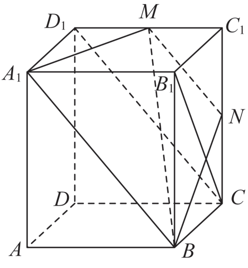
由 $MD//CQ$,$MD\not\subset$平面 CNQ,$CQ\subset$平面 CNQ,可得 $MD//$平面 CNQ,又 BM 与平面 CNQ 平行,$MD\cap BM=M$,MD,$BM\subset$平面 BDM,则平面 $BDM//$平面 CNQ,

而平面 ABB_1A_1 与平面 BDM、平面 CNQ 分别相交于 BD,QN,则 BD 与 QN 平行,

显然 BD 与 QN 不平行,故假设错误,所以直线 BM 与平面 CNQ 不平行,故 D 错误. 故选 B.

2. D 【解析】在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,M 是棱 C_1D_1 的中点.

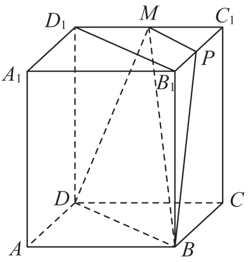
对于 A,取 CC_1 的中点 N,连接 BM,MN,BN,CD_1,A_1B,A_1M,B_1C,如图①.



图①

四边形 A_1BCD_1 是矩形,$A_1B//D_1C//MN$,则 $BN\subset$平面 A_1BM,而 B_1C 与 BN 相交,则 B_1C 与平面 A_1BM 有公共点,故 A 不正确.

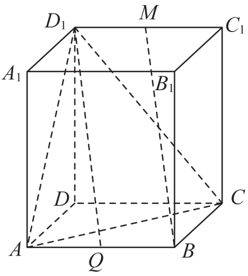
对于 B,取 B_1C_1 的中点 P,连接 BM,MP,BP,D_1B_1,BD,DM,如图②.



图②

四边形 BDD_1B_1 是矩形，$DB//D_1B_1//MP$，而 $A_1B_1\cap D_1B_1=B_1$，又 A_1B_1，D_1B_1，MP 都在平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内，则 A_1B_1 与 MP 相交，因此 A_1B_1 与平面 BDM 有公共点，故 B 不正确.

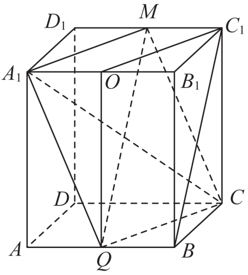
对于 C，取 AB 的中点 Q，连接 D_1Q，AD_1，CD_1，AC，BM，如图③.



图③

易知在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB//A_1B_1//D_1C_1$，$AB=A_1B_1=D_1C_1$，则 $BQ//D_1M$，$BQ=D_1M$，四边形 BQD_1M 是平行四边形，因此 $BM//D_1Q$，又 $D_1Q\cap$平面 $ACD_1=D_1$，则 BM 与平面 ACD_1 相交，故 C 不正确.

对于 D，取 AB 的中点 Q，A_1B_1 的中点 O，连接 A_1C，CQ，MQ，C_1O，OQ，A_1M，CM，BC_1，A_1Q，如图④.



图④

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$QO//BB_1//CC_1$，$QO=BB_1=CC_1$，则四边形 CC_1OQ 是平行四边形，有 $CQ//C_1O$.

在长方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1O//MC_1$，$A_1O=MC_1$，即四边形 A_1MC_1O 是平行四边形，有 $A_1M//C_1O//CQ$.

又 $C_1M//A_1B_1//BQ$，$C_1M=\dfrac{1}{2}A_1B_1=BQ$，所以四边形 C_1MQB 是平行四边形，则 $BC_1//MQ$.

因为 $MQ\subset$平面 A_1MC，$BC_1\not\subset$平面 A_1MC，所以 $BC_1//$平面 A_1MC，故 D 正确. 故选 D.

3. ACD 【解析】对于 A，设平面 $PBC\cap$平面 $PAD=l$，在平面 PBC 内存在无数条直线与 l 平行，且不在平面 PAD 内，则在平面 PBC 内存在无数条直线与平面 PAD 平行，故 A 正确.

对于 B，若 $l//$平面 $ABCD$，$l\subset$平面 PBC，平面 $PBC\cap$平面 $ABCD=BC$，则 $l//BC$；同理，$l//AD$，则 $BC//AD$，这与四边形 $ABCD$ 为梯形

矛盾,故 B 错误.

对于 C,设平面 $PAB\cap$平面 $PCD=m$,$\because AB/\!/CD$,平面 $PAB\cap$平面 $ABCD=AB$,平面 $PCD\cap$平面 $ABCD=CD$,

$\therefore AB/\!/m$,又 $AB\subset$平面 $ABCD$,$m\not\subset$平面 $ABCD$,

$\therefore m/\!/$平面 $ABCD$,故 C 正确.

对于 D,假设平面 PAD 内存在一条直线 a 与 BC 平行,则 $BC/\!/$平面 PAD,又 $BC\subset$平面 $ABCD$,

平面 $ABCD\cap$平面 $PAD=AD$,则 $BC/\!/AD$,不符合题意,

$\therefore$ 平面 PAD 内任意一条直线都不与 BC 平行,故 D 正确. 故选 ACD.

4.【解】(1)取 AD 的中点 G,连接 PG,GB,如图所示.

在$\triangle PAD$ 中,$PA=PD$,G 是 AD 的中点,所以 $PG\perp AD$.

又平面 $PAD\perp$平面 $ABCD$,平面 $PAD\cap$平面 $ABCD=AD$,$PG\subset$平面 PAD,

所以 $PG\perp$平面 $ABCD$,即 PG 为四棱锥 $P-ABCD$ 的高.

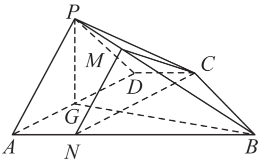
又 $GB\subset$平面 $ABCD$,所以 $PG\perp GB$.

在$\triangle AGB$ 中,由余弦定理得 $GB^2=AG^2+AB^2-2AG\cdot AB\cdot\cos\angle GAB=(\sqrt{2})^2+4^2-2\times\sqrt{2}\times4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=10$,故 $GB=\sqrt{10}$.

在$\triangle PGB$ 中,$PB=2\sqrt{3}$,$GB=\sqrt{10}$,$PG\perp GB$,

所以 $PG=\sqrt{2}$. 梯形 $ABCD$ 的高为 $AD\cdot\sin 45°=2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2$.

所以 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}PG\cdot S_{\text{四边形}ABCD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{2}\times\frac{(1+4)\times2}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$.



(2)存在,且$\frac{BM}{BP}=\frac{3}{4}$. 过点 C 作 $CN/\!/AD$ 交 AB 于点 N,则$\frac{AN}{NB}=\frac{1}{3}$. 过点 N 作 $NM/\!/AP$ 交 PB 于点 M,连接 CM,则$\frac{PM}{MB}=\frac{1}{3}$.

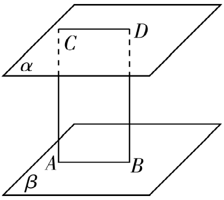
又因为 $CN/\!/AD$,$AD\subset$平面 PAD,$CN\not\subset$平面 PAD,所以 $CN/\!/$平面 PAD. 因为 $MN/\!/PA$,$PA\subset$平面 PAD,$MN\not\subset$平面 PAD,所以 $MN/\!/$平面 PAD.

又 $CN\cap MN=N$,$CN,MN\subset$平面 CNM,所以平面 $PAD/\!/$平面 CMN.

又 $CM\subset$平面 CMN,所以 $CM/\!/$平面 PAD.

所以在 PB 上存在点 M,使得 $CM/\!/$平面 PAD,且$\frac{BM}{BP}=\frac{3}{4}$.

5. BC 【解析】对于 A,当直线上的两点位于平面的同侧时,可得直线与平面平行,当两点位于平面两侧时,直线与平面相交,故 A 错误;



对于 B,如图所示,$AC/\!/BD$,则 AC,BD 确定一个平面,又因为 $\alpha/\!/\beta$,平面 $ABDC\cap\alpha=CD$,平面 $ABDC\cap\beta=AB$,所以根据平面与平面平行的性质得 $CD/\!/AB$,所以四边形 $ABDC$ 是平行四边形,所以 $AC=BD$,故 B 正确;

对于 C，根据平面与平面平行的判定定理的推论可知 C 正确；

对于 D，当平面内的无数条直线都平行时，不能得到直线与平面垂直，故 D 错误.

6. C 【解析】对于 A，若 $\alpha\perp\beta,\beta\perp\gamma$，则 α 与 γ 可能相交，故 A 错误；

对于 B，若 $m\subset\alpha,n\subset\beta,m/\!/n$，则 α 与 β 可能相交，故 B 错误；

对于 C，因为 $m\subset\alpha,n\subset\beta$，且 m,n 是异面直线，所以 $m\not\subset\beta$，又 $m/\!/\beta$，

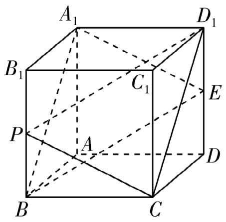
所以由线面平行的性质定理可知在平面 β 内存在 $l/\!/m$，则 $l\not\subset\alpha$，

进而可得 $l/\!/\alpha$，所以 l 与 n 相交，

又 $n/\!/\alpha$，所以由面面平行的判定定理得 $\alpha/\!/\beta$，故 C 正确；

对于 D，平面 α 内有不共线的三点到平面 β 的距离相等，则 α 与 β 可能相交，故 D 错误.

7. $\sqrt{5}$ 【解析】取棱 BB_1 的中点 P，连接 CP，PD_1，CD_1，如图所示.



因为 $CD_1/\!/A_1B$，$CD_1\not\subset$ 平面 A_1BE，$A_1B\subset$ 平面 A_1BE，所以 $CD_1/\!/$平面 A_1BE.

因为 $CP/\!/A_1E$，$CP\not\subset$ 平面 A_1BE，$A_1E\subset$ 平面 A_1BE，所以 $CP/\!/$平面 A_1BE.

又因为 $CP,CD_1\subset$ 平面 CPD_1，$CP\cap CD_1=C$，所以平面 $CPD_1/\!/$平面 A_1BE.

因此平面 α 即为平面 CPD_1，即平面 α 与正方形 B_1BCC_1 的交线为 CP. 所以 $CP=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

8.【证明】(1) $\because$ E,F 分别为 B_1C_1,A_1B_1 的中点，$\therefore$ $EF/\!/A_1C_1$.

$\because$ $A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1G，$EF\not\subset$ 平面 A_1C_1G，

$\therefore$ $EF/\!/$平面 A_1C_1G.

又 F,G 分别为 A_1B_1,AB 的中点，$\therefore$ $A_1F=BG$，

又 $A_1F/\!/BG$，$\therefore$ 四边形 A_1GBF 为平行四边形，

$\therefore$ $BF/\!/A_1G$.

$\because$ $A_1G\subset$ 平面 A_1C_1G，$BF\not\subset$ 平面 A_1C_1G，

$\therefore$ $BF/\!/$平面 A_1C_1G.

又 $EF\cap BF=F$，$EF,BF\subset$ 平面 BEF，

$\therefore$ 平面 $A_1C_1G/\!/$平面 BEF.

(2) $\because$ 平面 $ABC/\!/$平面 $A_1B_1C_1$，平面 $A_1C_1G\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=A_1C_1$，平面 A_1C_1G 与平面 ABC 有公共点 G，经过点 G 的直线交 BC 于 H，则 $A_1C_1/\!/GH$，则 $GH/\!/AC$.

$\because$ G 为 AB 的中点，$\therefore$ H 为 BC 的中点.

考点 37 直线、平面垂直的判定与性质

1. D 【解析】对于 A，若 $m/\!/\beta,\beta\perp\alpha$，则 $m\subset\alpha$ 或者 $m/\!/\alpha$ 或者 m,α 相交，故 A 错误；

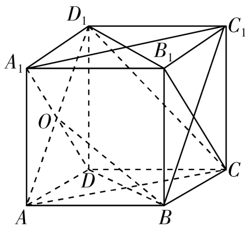
对于 B，若 $m\perp n,n\perp\beta,\beta\perp\alpha$，则 $m\subset\alpha$ 或者 $m/\!/\alpha$ 或者 m,α 相交，故 B 错误；

对于 C，若 $m/\!/\alpha$ 且 $n/\!/\alpha$，则 m 与 n 可能平行、相交或异面，故 C 错误；

对于 D，若 $m\perp\beta,n\perp\beta$，则 $m/\!/n$，又 $n\perp\alpha$，所以 $m\perp\alpha$，故 D 正确.

2. C 【解析】连接 BD，作出图形如图所示.

对于 C，因为 $D_1D//B_1B$ 且 $D_1D=B_1B$，所以四边形 D_1DBB_1 为平行四边形，所以 $BD//B_1D_1$，



又 $BD\not\subset$ 平面 CD_1B_1，$B_1D_1\subset$ 平面 CD_1B_1，所以 $BD//$平面 CD_1B_1，

同理可证 $OD//B_1C$，即可证明 $OD//$平面 CD_1B_1，

又 $OD\cap BD=D$，OD，$BD\subset$ 平面 OBD，所以平面 $OBD//$平面 CD_1B_1，

且 $OB\subset$平面 ABD，故 $OB//$平面 CD_1B_1，故 C 正确；

对于 A，因为 $AA_1\perp$平面 $ABCD$，$BD\subset$平面 $ABCD$，所以 $AA_1\perp BD$，

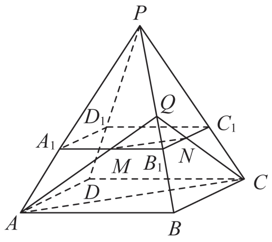
又因为 $AC\perp BD$，$AC\cap AA_1=A$，AC，$AA_1\subset$平面 ACC_1A_1，

所以 $BD\perp$平面 ACC_1A_1，而 BD 与 OB 不平行，所以 OB 不垂直于平面 ACC_1A_1，故 A 错误；

对于 B，同理可证 $BC_1\perp$平面 A_1B_1CD，而 BC_1 与 OB 不平行，所以 OB 不垂直于平面 A_1B_1CD，故 B 错误；

对于 D，易知 $AB\perp BC_1$，而 AB，OB，BC_1 共面且 OB 与 AB 不平行，所以 OB 不垂直于 BC_1，故 D 错误.

3. C 【解析】延长 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 交于一点 P，取 PB 的中点 Q，连接 AQ，CQ，AC，如图所示.



因为棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱台，所以 $P-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱锥.

因为 $AB=6$，$A_1B_1=4$，$BB_1=2$，且 $\triangle PA_1B_1\backsim\triangle PAB$，

所以$\dfrac{A_1B_1}{AB}=\dfrac{PB_1}{PB}$，即$\dfrac{4}{6}=\dfrac{PB_1}{PB_1+2}$，解得 $PB_1=4$，所以 $PB=PA=AB=6$，即$\triangle PAB$ 为等边三角形.

因为 Q 为 PB 的中点，所以 $AQ\perp PB$，且 $QB=3$，同理可得 $CQ\perp PB$.

因为 $BB_1=2$，所以 $QB_1=1$，即$\dfrac{QB_1}{QB}=\dfrac{1}{3}$.

因为 M，N 分别为 A_1B_1，B_1C_1 的中点，

所以 $MB_1=NB_1=2$，故$\dfrac{MB_1}{AB}=\dfrac{NB_1}{BC}=\dfrac{QB_1}{QB}$，

又 $MB_1//AB$，$NB_1//CB$，

所以点 M 在 AQ 上，点 N 在 CQ 上.

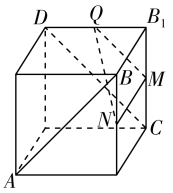
因为 $AQ\perp PB$，$CQ\perp PB$，所以 $AM\perp PB$，$CN\perp PB$，

即 $AM\perp BB_1$，$CN\perp BB_1$，因为 $AM\subset$平面 $ACNM$，$CN\subset$平面 $ACNM$，$AM\cap CN=Q$，所以 $BB_1\perp$平面 $ACNM$. 故选 C.

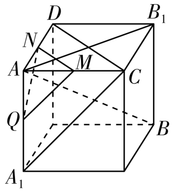
4. C 【解析】对于 A 选项，C，D 为另外两个顶点，连接 CD，如图①，因为 M，N，Q 分别为所在棱的中点，故由正方体的性质易得 $BB_1\perp AB$，$CD\perp AB$，$MQ//CD$，$MN//BB_1$，所以 $MQ\perp AB$，$MN\perp AB$，由于 $MQ\cap MN=M$，故$AB\perp$平面 MNQ，故 A 选项不符合题意；

对于 B 选项，A_1，B_1，D 为另外的顶点，连接 CD，AB_1，A_1C，如图②，因为 M，N，Q 分别为所在棱的中点，所以 $MN//CD$，$MQ//A_1C$，由正方体的性质得 $AB_1\perp CD$，$CD\perp BB_1$，$AB_1\cap BB_1=B_1$，所以

$CD\perp$平面 ABB_1，又 $AB\subset$ 平面 ABB_1，故 $CD\perp AB$，所以 $MN\perp AB$，同理得 $MQ\perp AB$，又 $MN\cap MQ=M$，故 $AB\perp$ 平面 MNQ，故 B 选项不符合题意；

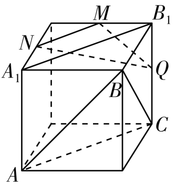


图①



图②

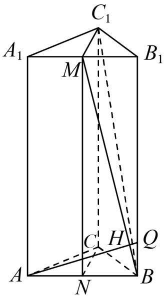
对于 C 选项，A_1，B_1，C 为另外的顶点，连接 A_1B_1，AC，如图③，因为 M,N,Q 分别为所在棱的中点，所以 $MN/\!/A_1B_1$，$AC/\!/A_1B_1$，则 $MN/\!/AC$，在 $\triangle ABC$ 中，AB 与 AC 夹角为 $\frac{\pi}{3}$，故异面直线 MN 与 AB 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，故 $AB\perp$ 平面 MNQ 不成立，故 C 选项符合题意；



图③

对于 D 选项，同 A 选项，可判断 $AB\perp$ 平面 MNQ，故 D 选项不符合题意. 故选 C.

5.【解】(1) 存在，且 $\frac{B_1Q}{QB}=7$. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，因为 M 为 A_1B_1 的中点，所以 $C_1M\perp A_1B_1$.



又 $A_1A\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，$C_1M\subset$ 平面 $A_1B_1C_1$，则有 $AA_1\perp C_1M$，

而 $AA_1\cap A_1B_1=A_1$，AA_1，$A_1B_1\subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $C_1M\perp$ 平面 AA_1B_1B.

又 $C_1M\subset$ 平面 BC_1M，所以平面 $BC_1M\perp$ 平面 AA_1B_1B. 在平面 AA_1B_1B 内过点 A 作 $AQ\perp BM$ 交 BB_1 于点 Q.

因为平面 $BC_1M\cap$ 平面 $AA_1B_1B=BM$，因此 $AQ\perp$ 平面 BC_1M，故点 Q 即为所要找的点.

显然 $\triangle ABQ\backsim\triangle BB_1M$，因此 $\frac{BQ}{B_1M}=\frac{AB}{BB_1}$，即有 $\frac{BQ}{1}=\frac{2}{4}$，故 $BQ=\frac{1}{2}$，

$B_1Q=B_1B-BQ=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$，所以 $\frac{B_1Q}{QB}=7$.

(2) 取 AB 的中点 N，连接 CN，MN，如图所示. 因为 M 为 A_1B_1 的中点，所以 $MN/\!/BB_1/\!/CC_1$，$MN=BB_1=CC_1$，所以四边形 $CNMC_1$ 为平行四边形，即 $CN/\!/C_1M$，而 $C_1M\subset$ 平面 BC_1M，$CN\not\subset$ 平面 BC_1M，

所以 $CN/\!/$平面 BC_1M，所以点 C 到平面 BC_1M 的距离 h_C 等于点 N 到平面 BC_1M 的距离 h_N.

又 N 为 AB 的中点，则点 N 到平面 BC_1M 的距离 h_N 等于点 A 到平面 BC_1M 的距离 h_A 的一半，

而由(1)知，当 $BQ=\frac{1}{2}$ 时，$AQ\perp$ 平面 BC_1M，$\cos\angle BAQ=\frac{AB}{AQ}=\frac{2}{\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{4\sqrt{17}}{17}$.

设 $AQ\cap BM=H$，则 $h_A=AH=AB\cdot\cos\angle BAQ=2\times\dfrac{4\sqrt{17}}{17}=\dfrac{8\sqrt{17}}{17}$，

所以点 C 到平面 BC_1M 的距离 $h_C=h_N=\dfrac{1}{2}h_A=\dfrac{4\sqrt{17}}{17}$.

6. B 【解析】对于 A，

因为 $EG\cap$ 平面 $ACD=G$，$AD\subset$ 平面 ACD，$G\notin AD$，

所以 AD 与 EG 异面，A 选项错误；

对于 C，

因为 E,F 分别是棱 AB,BC 的中点，所以 $EF/\!/AC$，$EF=\dfrac{1}{2}AC$，

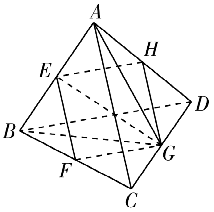
由于 $AC\cap AD=A$，所以 AD 与 EF 是异面直线，C 选项错误；

对于 B，连接 BG，如图所示，由于 $\triangle BCD$，$\triangle ACD$ 是等边三角形，

所以 $AG\perp CD$，$BG\perp CD$，由于 $AG\cap BG=G$，$AG,BG\subset$ 平面 AEG，

所以 $CD\perp$ 平面 AEG，由于 $CD\subset$ 平面 ACD，

所以平面 $AEG\perp$ 平面 ACD，B 选项正确；



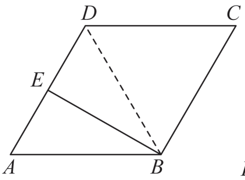
对于 D，设 H 是棱 AD 的中点，连接 EH，GH，如图所示，

由于 G 是棱 CD 的中点，所以 $GH/\!/AC$，$GH=\dfrac{1}{2}AC$，

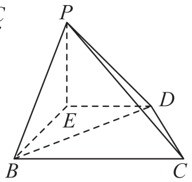
所以 $EF/\!/GH$，所以平面 EFG 也即平面 $EFGH$，

$AD\cap$ 平面 $EFGH=H$，D 选项错误.

7. D 【解析】如图①，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle BAD=60°$，连接 BD，则 $\triangle ABD$ 为等边三角形，$\because$ E 是 AD 的中点，$\therefore$ $BE\perp AD$，$AE=DE=1$.



图①



图②

对于 A，如图②，在四棱锥 $P\text{-}BCDE$ 中，$BE\perp PE$，$BE\perp DE$（提示：注意菱形 $ABCD$ 中 BE 与 AE,DE 的垂直关系在折叠过程中与 P 点位置无关），

$PE\cap DE=E$，$PE,DE\subset$ 平面 PDE，

$\therefore$ $BE\perp$ 平面 PDE.

$\because$ $BE\subset$ 平面 PBE，$\therefore$ 平面 $PBE\perp$ 平面 PDE，故 A 正确.

对于 B，$\because$ $PE=DE=1$，$PD=\sqrt{2}$，即 $PE^2+DE^2=PD^2$，$\therefore$ $PE\perp DE$，

又 $PE\cap BE=E$，$PE,BE\subset$ 平面 PBE，

$\therefore$ $DE\perp$ 平面 PBE，

又$\because$ $DE/\!/BC$，$\therefore$ $BC\perp$ 平面 PBE，

又 $BC\subset$ 平面 PBC，$\therefore$ 平面 $PBE\perp$ 平面 PBC，故 B 正确.

对于 C，$\because$ $BE\perp PE$，$DE\perp PE$，$BE\cap DE=E$，$BE,DE\subset$ 平面 $BCDE$，

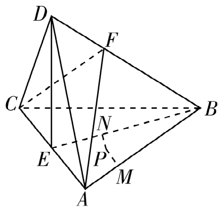
$\therefore$ $PE\perp$ 平面 $BCDE$，

又 $PE\subset$ 平面 PBE，$\therefore$ 平面 $PBE\perp$ 平面 $BCDE$，故 C 正确.

对于 D，$\because$ 直线 PE 与平面 PBD 交于点 P，$PE\perp$ 平面 $BCDE$，则平面 PBD 内不存在与平面 $BCDE$ 垂直的直线，

$\therefore$ 平面 PBD 不与平面 $BCDE$ 垂直，故 D 错误. 故选 D.

8. C 【解析】因为 $AB=CB$，$AD=CD$，E 是 AC 的中点，所以 $BE\perp AC$，$DE\perp AC$，而 $BE\cap DE=E$，BE，$DE\subset$ 平面 BDE，则有 $AC\perp$ 平面 BDE. 又 $AC\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 BDE，故 C 正确.



在平面 ABC 内取点 P，作 $PM\perp AB$，$PN\perp BE$，垂足分别为 M，N，如图所示，因为平面 $ABC\perp$ 平面 BDE，平面 $ABC\cap$ 平面 $BDE=BE$，所以 $PN\perp$ 平面 BDE，又 $BD\subset$ 平面 BDE，所以 $PN\perp BD$.

若平面 $ABC\perp$ 平面 ABD，同理可得 $PM\perp BD$，而 $PM\cap PN=P$，PM，$PN\subset$ 平面 ABC，则 $BD\perp$ 平面 ABC，显然 BD 与平面 ABC 不一定垂直，故 A 不正确.

过点 A 作 $AF\perp BD$ 交 BD 于点 F，连接 CF，如图所示. 由题可知 $\triangle ABD\cong\triangle CBD$，则 $CF\perp BD$，则 $\angle AFC$ 是二面角 $A-BD-C$ 的平面角，而 $\angle AFC$ 不一定是直角，即平面 ABD 与平面 BDC 不一定垂直，故 B 不正确.

因为 $AC\perp$ 平面 BDE，$DE\subset$ 平面 BDE，所以 $AC\perp DE$，又 $BE\perp AC$，平面 $ACB\cap$ 平面 $DAC=AC$，则 $\angle DEB$ 是二面角 $D-AC-B$ 的平面角，而 $\angle DEB$ 不一定是直角，故平面 ABC 与平面 ADC 不一定垂直，故 D 不正确. 故选 C.

9. (1)【证明】因为四边形 AA_1D_1D 为正方形，$A_1D\cap AD_1=O$，所以 O 为 AD_1 的中点.

又因为 $OE//$平面 D_1BC，平面 $ABD_1\cap$ 平面 $D_1BC=BD_1$，$OE\subset$ 平面 ABD_1，所以 $OE//BD_1$.

又因为 O 为 AD_1 的中点，所以 E 为 AB 的中点.

(2)【解】存在点 E，当 $AE=\dfrac{1}{2}$ 时，平面 $D_1DE\perp$ 平面 AD_1C，理由如下：

设 $AC\cap DE=F$(图略)，

因为四边形 AA_1D_1D 为正方形，所以 $D_1D\perp AD$，

又因为平面 $AA_1D_1D\cap$ 平面 $ABCD=AD$，平面 $AA_1D_1D\perp$ 平面 $ABCD$，$D_1D\subset$ 平面 AA_1D_1D，所以 $D_1D\perp$ 平面 $ABCD$，

又因为 $AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $D_1D\perp AC$.

在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$，

当 $AE=\dfrac{1}{2}$ 时，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$\tan\angle ADE=\dfrac{AE}{AD}=\dfrac{1}{2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\tan\angle BAC=\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\angle ADE=\angle BAC$，又因为 $\angle BAD=\angle BAC+\angle DAC=90^\circ$，

所以 $\angle ADE+\angle DAC=90^\circ$，则 $\angle AFD=90^\circ$，所以 $AC\perp DE$，

又因为 $DE\cap DD_1=D$，DE，$DD_1\subset$ 平面 D_1DE，

所以 $AC\perp$ 平面 D_1DE.

又因为 $AC\subset$ 平面 AD_1C，所以平面 $D_1DE\perp$ 平面 AD_1C.

考点 38　空间角和距离

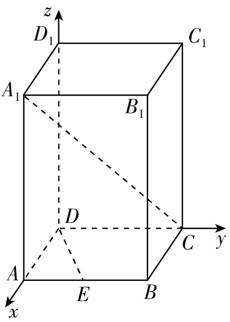
1. B 【解析】以 D 为坐标原点，$\overrightarrow{DA}$，$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x，y，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，如图所示，

则 $D(0,0,0)$，$E(1,1,0)$，$C(0,2,0)$，$A_1(1,0,3)$，

$\overrightarrow{DE}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{A_1C}=(-1,2,-3)$.

设异面直线 A_1C 与 DE 所成角的大小为 θ，

所以 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{A_1C}||\overrightarrow{DE}|}=\dfrac{|-1+2|}{\sqrt{2}\times\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$.



2. C 【解析】连接 B_1D_1 与 A_1C_1 交于点 O_1，连接 AO_1，A_1B.

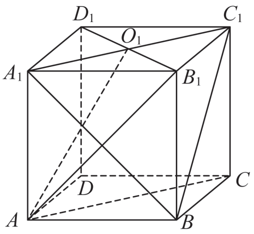
因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是长方体，

所以 $AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$，

又 $B_1D_1\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$，

所以 $AA_1\perp B_1D_1$.

因为 $AB=BC=2$，所以四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 为正方形，所以 $B_1D_1\perp A_1C_1$，又 $A_1C_1\cap AA_1=A_1$，A_1C_1，$AA_1\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $B_1D_1\perp$平面 ACC_1A_1，



则 $\angle B_1AO_1$ 即为直线 AB_1 与平面 ACC_1A_1 所成的角，所以 $\angle B_1AO_1=30°$.

因为 $O_1A\subset$平面 ACC_1A_1，所以 $O_1B_1\perp O_1A$，即 $\triangle AO_1B_1$ 是直角三角形.

由题可知 $B_1O_1=\sqrt{2}$，所以 $AB_1=2\sqrt{2}$，

又 $AC/\!/A_1C_1$，所以 $\angle A_1C_1B$ 为直线 BC_1 与直线 AC 所成的角.

易得 $AB_1=BA_1=BC_1=A_1C_1=2\sqrt{2}$，即 $\triangle A_1C_1B$ 为正三角形，故 $\angle A_1C_1B=60°$.

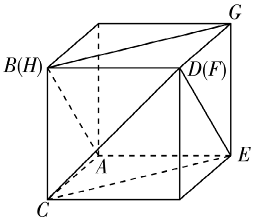
故选 C.

3. ACD 【解析】由正方体的表面展开图可知正方体如图所示，

连接 CE，易知 $\triangle CDE$ 为等边三角形，

所以 $\angle CDE=\angle DCE=\angle CED=60°$.

对于 A，因为 AB 与 CD 不同在任何一个平面，所以 AB 与 CD 是异面直线，



因为 $AB/\!/DE$，所以 $\angle CDE$ 为异面直线 AB 与 CD 所成的角，

因为 $\angle CDE=60°$，所以异面直线 AB 与 CD 所成角为 $60°$，所以 A 正确；

对于 B，因为 $AB/\!/EF$，所以 AB 与 EF 不是异面直线，所以 B 错误；

对于 C，因为 EF 与 GH 不同在任何一个平面，所以 EF 与 GH 是异面直线，

因为 $GH/\!/CE$，所以 $\angle CED$ 为异面直线 EF 与 GH 所成的角，

因为 $\angle CED=60°$，所以异面直线 EF 与 GH 所成的角为 $60°$，所以 C 正确；

对于 D，因为 CD 与 GH 不同在任何一个平面，所以 CD 与 GH 是异面直线，

因为 $GH/\!/CE$，所以 $\angle DCE$ 为异面直线 CD 与 GH 所成的角，

因为 $\angle DCE=60°$，所以异面直线 GH 与 CD 所成的角为 $60°$，所以 D 正确. 故选 ACD.

4. $\frac{2}{3}$ 【解析】因为在矩形 $ABCD$ 中，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，E 是边 BC 的中点，所以 $BE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故$\frac{BE}{AB}=\frac{AB}{AD}$，又$\angle BAD=\angle ABE=90°$，

所以$\triangle ABE\backsim\triangle DAB$，所以$\angle BAE=\angle ADB$，则$\angle BAE+\angle ABD=\angle ADB+\angle ABD=90°$，

故 $AE\perp MD$. 将$\triangle ABE$ 沿 AE 折起，使点 B 移动到点 B'处，且 AB' 与 MD 垂直.

因为 $AE\cap AB'=A$，AE，$AB'\subset$平面 $AB'E$，

所以 $MD\perp$平面 $AB'E$，因为 $MD\subset$平面 $AECD$，

所以平面 $AB'E\perp$平面 $AECD$，

因为平面 $AB'E\cap$平面 $AECD=AE$，$B'M\perp AE$，$B'M\subset$平面 $AB'E$，故 $B'M\perp$平面 $AECD$.

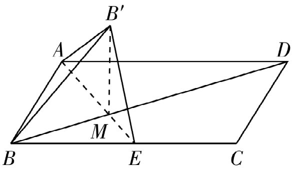
连接 $B'B$，则$\angle B'AB$ 或其补角即为异面直线 $B'A$ 和 CD 所成角.

因为 $AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，所以 $BD=\sqrt{1+2}=\sqrt{3}$，

故 $BM=B'M=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $BB'=\sqrt{BM^2+B'M^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

又 $AB'=AB=1$，故 $\cos\angle B'AB=\frac{AB^2+AB'^2-B'B^2}{2AB\cdot AB'}=\frac{1+1-\frac{2}{3}}{2}=\frac{2}{3}$，

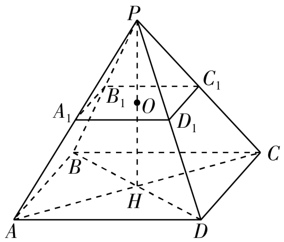
即异面直线 BA 和 CD 所成角的余弦值为$\frac{2}{3}$.



5. A 【解析】依题意，过正四棱锥 $P-ABCD$ 的高 PH 的中点 O 作平行于底面 $ABCD$ 的截面 $A_1B_1C_1D_1$，如图所示.

则 A_1，B_1，C_1，D_1 分别为棱 PA，PB，PC，PD 的中点，

设正方形 $ABCD$ 的边长 $AD=a$，$PA=b(a>0,b>0)$，



所以正方形 $ABCD$ 的面积为 a^2，正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积为$\frac{1}{4}a^2$，正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面积为 $4\times\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=2a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$，

四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧面积为 $4\left[\frac{1}{2}a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{1}{2}\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right]=\frac{3}{2}a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$，

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积为 $a^2+2a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$，

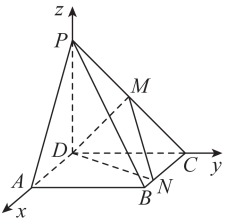
四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面积为 $a^2+\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{2}a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{5}{4}a^2+\frac{3}{2}a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$,

所以$\frac{a^2+2a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{5}{4}a^2+\frac{3}{2}a\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}=\frac{12}{11}$,解得 $b=\frac{\sqrt{5}}{2}a$,

由 $PH\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $\angle PAH$ 为直线 PA 与底面 $ABCD$ 所成的角,所以 $\cos\angle PAH=\frac{AH}{PA}$,又 $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}a$,$PA=b=\frac{\sqrt{5}}{2}a$,

所以 $\cos\angle PAH=\frac{\sqrt{10}}{5}$,故选 A.

6. (1)【**证明**】因为 $PD\perp$ 平面 $ABCD$,AD,$CD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PD\perp AD$,$PD\perp CD$,又底面 $ABCD$ 为正方形,所以 $AD\perp CD$,则 AD,CD,PD 两两垂直. 以 D 为坐标原点,以 DA,DC,DP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立空间直角坐标系 $D-xyz$,如图所示. 由已知可得 $D(0,0,0)$,$M(0,2,2)$,$N(3,4,0)$,$P(0,0,4)$,$B(4,4,0)$,$C(0,4,0)$,则 $\overrightarrow{DM}=(0,2,2)$,$\overrightarrow{DN}=(3,4,0)$,$\overrightarrow{PB}=(4,4,-4)$,$\overrightarrow{PC}=(0,4,-4)$.



设平面 DMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DM},\\\boldsymbol{n}_1\perp\overrightarrow{DN}\end{cases}$得$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DM}=0,\\\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{DN}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}2y_1+2z_1=0,\\3x_1+4y_1=0.\end{cases}$

令 $z_1=1$,得 $y_1=-1$,$x_1=\frac{4}{3}$,所以 $\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{4}{3},-1,1\right)$.

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

由$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{PB},\\\boldsymbol{n}_2\perp\overrightarrow{PC}\end{cases}$得$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PB}=0,\\\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{PC}=0,\end{cases}$所以$\begin{cases}4x_2+4y_2-4z_2=0,\\4y_2-4z_2=0,\end{cases}$

令 $z_2=1$,得 $y_2=1$,$x_2=0$,所以 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,1)$,

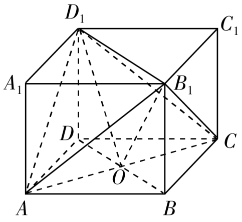
因为 $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$,所以 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$,所以平面 $DMN\perp$ 平面 PBC.

(2)【**解**】由(1)得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$,平面 DMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{4}{3},-1,1\right)$,

设直线 AB 与平面 DMN 所成的角为 θ,则$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{AB},\boldsymbol{n}_1\rangle|=\frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}_1|}{|\overrightarrow{AB}||\boldsymbol{n}_1|}=\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

7. $\frac{\pi}{3}$ 【**解析**】连接 BD 交 AC 于点 O,连接 OD_1,OB_1,B_1D_1,

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱,且四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形,$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$,所以$\triangle ABD$ 为等边三角形,



则 $AD_1=CD_1=\sqrt{7}$,$AB_1=CB_1=\sqrt{7}$,且 O 为 AC 中点,则 $OA=\sqrt{3}$,

所以 $OD_1\perp AC$，$OB_1\perp AC$，则 $\angle D_1OB_1$ 为二面角 D_1-AC-B_1 的平面角.

因为 $OB_1=OD_1=\sqrt{AD_1^2-OA^2}=2$，且 $D_1B_1=DB=2$，

所以 $\triangle OD_1B_1$ 为等边三角形，所以 $\angle D_1OB_1=\dfrac{\pi}{3}$.

所以二面角 D_1-AC-B_1 的平面角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$.

8. (1)【证明】过点 C_1 作 $C_1O_1\perp AC$，交 AC 于点 O_1(图略)，因为平面 $A_1C_1CA\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $A_1C_1CA\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$C_1O_1\subset$ 平面 A_1C_1CA，所以 $C_1O_1\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $\angle C_1CO_1$ 为直线 CC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，所以 $\angle C_1CO_1=60°$.

由 $CC_1=AA_1=2$，得 $CO_1=1$，

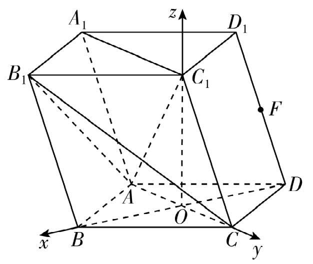
又因为底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=\sqrt{2}$，

所以 $AC=2$，且 O 是 AC 中点，所以 $CO=1$，

可知 O，O_1 为同一点，所以 $C_1O\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)【解】因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AC\perp BD$，

以 O 为原点，OB，OC，OC_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示.



由图易知 $AC=BD=2$，$CO=1$，$CC_1=AA_1=2$，$C_1O=\sqrt{3}$，

则 $A(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$C_1(0,0,\sqrt{3})$，$B(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$.

又 $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，所以 $B_1(1,-1,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,\sqrt{3})$，

设平面 ACB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=-\sqrt{3}$，$y=0$，得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},0,1)$.

因为 $\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(-1,-1,0)$，

设平面 CDD_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

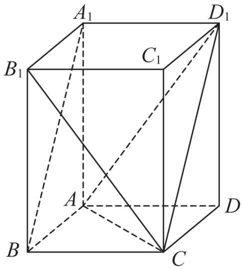
所以 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CC_1}=-y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=-x_1-y_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=1$，则 $x_1=-\sqrt{3}$，$y_1=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$，所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{|-\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})+\sqrt{3}\times0+1\times1|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+0^2+1^2}\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

所以平面 ACB_1 与平面 CDD_1C_1 的夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

9. B　【解析】如图，连接 D_1C，AC，因为该四棱柱为正四棱柱，所以

$A_1B // D_1C$,



所以$\angle AD_1C$为异面直线A_1B与AD_1所成角.

设底面正方形边长为$a(a>0)$,

则$AC=\sqrt{2}a$,$AD_1=CD_1=\sqrt{a^2+4}$,

在$\triangle AD_1C$中,$\cos\angle AD_1C=\dfrac{AD_1^2+CD_1^2-AC^2}{2AD_1\cdot CD_1}=\dfrac{8}{2a^2+8}=\dfrac{4}{5}$,

解得$a=1$.

因为该四棱柱为正四棱柱,所以$AB\perp$平面BCC_1B_1,$B_1C\subset$平面BCC_1B_1,

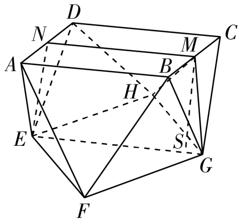
所以$AB\perp B_1C$,同理$AB\perp AD_1$,

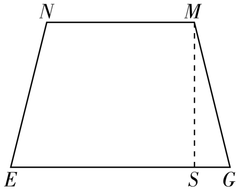
所以直线AD_1与直线B_1C的距离为$AB=a=1$. 故选 B.

方法总结 **求异面直线间距离的常用方法**

①定义法:两异面直线公垂线段的长度;②转化为其中一条直线到过另一直线且与该线平行的平面间的距离;③转化为分别过两条异面直线,且互相平行的两平行平面间的距离;④异面直线上两点连线线段长度的最小值.

10. B 【解析】分别取BC,AD的中点M,N,连接MN,MG,NE,EG,根据半正多面体的性质可知,四边形$EGMN$为等腰梯形.





根据题意可知$BC\perp MN$,$BC\perp MG$,

而$MN\cap MG=M$,MN,$MG\subset$平面$EGMN$,

故$BC\perp$平面$EGMN$,又$BC\subset$平面$ABCD$,

故平面$ABCD\perp$平面$EGMN$,则平面$EFGH\perp$平面$EGMN$,

作$MS\perp EG$,垂足为S,平面$EFGH\cap$平面$EGMN=EG$,

$MS\subset$平面$EGMN$,故$MS\perp$平面$EFGH$,

则梯形$EGMN$的高即为平面$ABCD$与平面$EFGH$之间的距离.

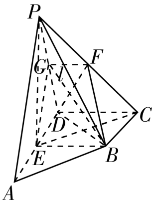
由题可得$MG=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,$SG=\dfrac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$,

故$MS=\sqrt{MG^2-SG^2}=\sqrt{3-(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{8}$,

即平面$ABCD$与平面$EFGH$之间的距离为$\sqrt[4]{8}$.

关键点拨 关键是根据几何体的结构特征,作出其截面图,确定梯形$EGMN$的高即为平面$ABCD$与平面$EFGH$之间的距离

11.【解】(1) 如图，连接 BE，$\because BC/\!/AD$，且 E 为 AD 的中点，$BC=\frac{1}{2}AD$，$\therefore BC/\!/DE$ 且 $BC=DE$，



$\therefore$ 四边形 $BCDE$ 为平行四边形，

$\therefore BE/\!/CD$.

$\because BE\not\subset$ 平面 PCD，$CD\subset$ 平面 PCD，$\therefore BE/\!/$ 平面 PCD.

又 $BE\subset$ 平面 BEF，平面 $BEF\cap$ 平面 $PCD=l$，$\therefore BE/\!/l$.

取 PD 的中点 G，连接 FG，则 $FG/\!/CD$，又 $CD/\!/BE$，$\therefore FG/\!/BE$，故 FG 就是所求的直线 l.

(2) 连接 GE，EF，BD，EC，BF，BG.

$\because E$ 为 AD 的中点，G 为 PD 的中点，$\therefore GE=\frac{1}{2}PA$. $\because BE/\!/CD$，$\angle ADC=90°$，$\therefore BE\perp AD$.

$\because PE\perp$ 平面 $ABCD$，$BE\subset$ 平面 $ABCD$，$\therefore PE\perp BE$.

$\because PE\cap AD=E$，AD，$PE\subset$ 平面 PAD，$\therefore BE\perp$ 平面 PAD，$\because EG\subset$ 平面 PAD，$\therefore BE\perp EG$.

$\because FG/\!/CD$，$\therefore$ 点 F，G 到平面 $BCDE$ 的距离相等，且由四边形 $BCDE$ 为正方形得 $S_{\triangle BCE}=S_{\triangle BED}$.

设 h 为点 C 到平面 BEF 的距离，

$\therefore V_{C-BEF}=V_{F-BCE}=V_{G-BED}$，$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle BEF}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle BED}\cdot\frac{1}{2}PE$，

$\therefore \frac{1}{2}BE\cdot GE\cdot h=\frac{1}{2}BE\cdot DE$，$\therefore h=\frac{DE}{GE}=\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

考点 39　内切球问题、外接球问题

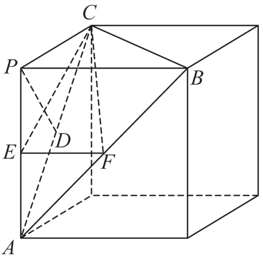
1. A　【解析】设 $PA=PB=PC=2x$，$\because E$，F 分别为 PA，AB 的中点，$\therefore EF/\!/PB$，$EF=\frac{1}{2}PB=x$，$AE=\frac{1}{2}PA=x$.

连接 CF，CE，$\because \triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，$\therefore CF=\sqrt{3}$，又 $\angle CEF=90°$，$\therefore CE=\sqrt{3-x^2}$. 在 $\triangle AEC$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle EAC=\frac{x^2+4-(3-x^2)}{2\times 2x}$. 过点 P 作 $PD\perp AC$ 于点 D.

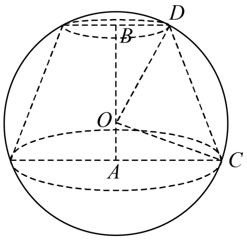
$\because PA=PC$，$\therefore D$ 为 AC 的中点，$\therefore \cos\angle EAC=\frac{AD}{PA}=\frac{1}{2x}$，

$\therefore \frac{x^2+4-3+x^2}{4x}=\frac{1}{2x}$，解得 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$（负值舍去），

$\therefore PA=PB=PC=\sqrt{2}$，又 $AB=BC=AC=2$，$\therefore PA$，PB，PC 两两垂直，即三棱锥 $P-ABC$ 是以 PA，PB，PC 为棱的正方体的一部分，$\therefore$ 球 O 的直径 $2R=\sqrt{2+2+2}=\sqrt{6}$，解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则球 O 的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\frac{6\sqrt{6}}{8}=\sqrt{6}\pi$，故选 A.



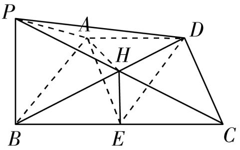
2. D 【解析】设该圆台的高为 h，其体积 $V=(9+3\sqrt{2})\pi=\frac{1}{3}h(3\pi+\sqrt{3\pi\times6\pi}+6\pi)$，解得 $h=3$.



如图，由题意得上底面圆的半径 $BD=\sqrt{3}$，下底面圆的半径 $AC=\sqrt{6}$.

设球心 O 到下底面的距离为 t，即 $OA=t$，则 $BO=3-t$，由勾股定理得 $OA^2+AC^2=OB^2+BD^2$，即 $t^2+(\sqrt{6})^2=(3-t)^2+(\sqrt{3})^2$，解得 $t=1$，则球 O 的半径 $R=\sqrt{t^2+6}=\sqrt{7}$，故球 O 的表面积为 $4\pi R^2=28\pi$. 故选 D.

3. C 【解析】如图，取 BC 的中点 E，连接 EA，ED，取 PC 的中点 H，连接 EH，BH，AH，DH.



在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB=CD=AD=1$，$BC=2$，则 $AD/\!/BE$，$AD=BE$，则四边形 $ADEB$ 为平行四边形，则 $DE=AB=1$，又 $CE=CD=1$，所以 $\triangle CDE$ 为等边三角形，则 $\angle DCE=\angle ABE=60°$，则 $\triangle ABE$ 为等边三角形，则 $EB=EA=DE=EC=1$，故点 E 为等腰梯形 $ABCD$ 的外接圆圆心.

在 $\triangle PBC$ 中，$PH=CH$，$BE=CE$，

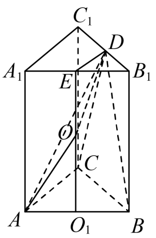
则 $PB/\!/HE$，$HE=\frac{1}{2}PB=\frac{1}{2}$.

又 $PB\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $HE\perp$ 底面 $ABCD$，$HP=HB=HC$.

因为 $HA=\sqrt{HE^2+EA^2}=\sqrt{HE^2+EB^2}=HB$，$HD=\sqrt{HE^2+ED^2}=\sqrt{HE^2+EB^2}=HB$，即 $HP=HB=HC=HA=HD$，

故点 H 为四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球球心，球半径 $HB=\sqrt{HE^2+EB^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积为 $4\pi\times\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=5\pi$，故选 C.

4. A 【解析】如图所示，因为 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$AC=BC=2$，所以 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 AB 的中点 O_1，且 $AO_1=\sqrt{2}$，连接 O_1 与 A_1B_1 的中点 E，则 $O_1E/\!/AA_1$，因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，所以 $O_1E\perp$ 平面 ABC. 设球心为 O，易知 O 在 O_1E 上（**关键**：确定球心位置在过三棱锥底面外心且与底面垂直的直线上）.

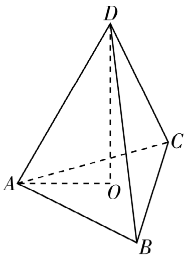


连接 DE，OA，OD，设 $OO_1=x$，$DE=t(0\leqslant t\leqslant\sqrt{2})$，三棱锥 $D-ABC$ 的外接球半径为 R，因为 $OA=OD=R$，所以 $\sqrt{2+x^2}=\sqrt{(4-x)^2+t^2}$，所以 $t^2=8x-14$，又 $0\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$，所以 $\frac{7}{4}\leqslant x\leqslant2$. 因为 $R^2=2+x^2$，所以 $\frac{81}{16}\leqslant R^2\leqslant6$，所以当 $R^2=\frac{81}{16}$ 时，外接球表面积最小，为 $\frac{81}{4}\pi$，当 $R^2=6$ 时，外接球表面积最大，为 24π. 所以三棱锥 $D-ABC$ 的外接球表面积的取值范围为 $\left[\frac{81}{4}\pi,24\pi\right]$. 故选 A.

5. BCD 【解析】对于 A，棱长为 2 的正方体的外接球直径为 $2\sqrt{3}>3$，故 A 不符合；

对于 B，底面为半径为 1 的圆，高为 2 的圆柱体的外接球半径为 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}<\frac{3}{2}$，故 B 符合；

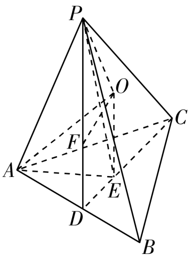
对于 C，如图①，棱长为$\sqrt{6}$的正四面体 $DABC$ 的底面中心为 O，连接 OA，OD，则底面外接圆的半径 $r=OA$，则 $2r=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{2}$，所以 $r=\sqrt{2}$，则正四面体的高度 $h=OD=\sqrt{(\sqrt{6})^2-(\sqrt{2})^2}=2$，



图①

设该几何体的外接球半径为 R，则 $R^2=(2-R)^2+(\sqrt{2})^2$，解得 $R=\frac{3}{2}$，所以外接球直径 $2R=3$，故 C 符合；

对于 D，设该几何体的外接球半径为 R_1，如图②，其中 D 为线段 AB 的中点，E 为 $\triangle ABC$ 的中心，F 为 $\triangle PAB$ 的外心，连接 PD，CD，PE，因为 $PA=PB=\sqrt{3}$，D 为线段 AB 的中点，



图②

所以 $PD\perp AB$，又平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABC=AB$，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $PD\perp$ 平面 ABC，

又 $AC=BC=AB=2$，E 为 $\triangle ABC$ 的中心，所以 $CE=2DE$，

设外接球的球心为 O，则 O 一定经过过点 E 且垂直于平面 ABC 的直线上，且到点 A，点 P 的距离相等，连接 OP，OA，OE，OF，AE，

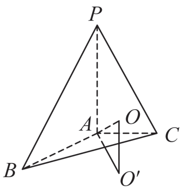
由点 F 在线段 PD 上及外接球的性质，不妨令 $DF=OE=x$，

又 $AE=2DE=2OF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$PO=OA=R_1$，$PF=PD-DF=\sqrt{2}-x$，

所以 $AO^2=OE^2+AE^2$，$PO^2=OF^2+PF^2$，计算可得 $R_1=\sqrt{\frac{35}{24}}<\frac{\sqrt{6}}{2}<\frac{3}{2}$，故 D 符合.

6. $\frac{2+3\sqrt{2}}{8\pi}$ 【解析】连接 OA_1（图略），设 $A_1B_1=a$，$AB=b$，$OO_1=h$，因为以 O_1 为球心，O_1A_1 为半径的球与平面 $ABCD$ 相切，所以 $h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$. 因为 O 是该四棱台外接球的球心，所以 $OA_1=\sqrt{h^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}b$，即 $b=\sqrt{2}a$，所以四棱台的体积 $V_1=\frac{1}{3}\cdot h\cdot(a^2+b^2+ab)=\frac{2+3\sqrt{2}}{6}a^3$，其外接球的体积 $V_2=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)^3=\frac{4}{3}\pi a^3$，则$\frac{V_1}{V_2}=\frac{2+3\sqrt{2}}{8\pi}$.

7. $\frac{32\pi}{3}$ 【解析】如图，该四面体的外接球的球心 O 一定在经过过$\triangle ABC$ 外接圆的圆心 O'且垂直于平面 ABC 的直线上，且到 A，P 的距离



相等. 连接 OO', AO', OA. 在 $\triangle ABC$ 中,

由余弦定理得 $BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos 120^\circ}=\sqrt{2+2-2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{6}$.

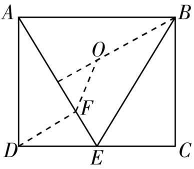
由正弦定理得 $\frac{BC}{\sin 120^\circ}=2AO'$, 解得 $AO'=\frac{BC}{2\sin 120^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$,

而 $OO'=\frac{1}{2}PA=\sqrt{2}$, 所以 $OA=\sqrt{OO'^2+O'A^2}=\sqrt{2+2}=2$,

即该四面体的外接球的半径 $R=OA=2$.

所以外接球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times2^3=\frac{32\pi}{3}$.

8. $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$ 【解析】如图, 过点 D 作 $DF\perp AE$ 交 AE 于点 F, $AB=2$, $AD=\sqrt{3}$, $DE=1$, $AE=BE=2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中有 $\frac{1}{2}\cdot AD\cdot DE=\frac{1}{2}\cdot AE\cdot DF$, 则 $DF=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $EF=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$.



由 $\triangle ABE$ 是等边三角形, 边长为 2, 得 $\frac{2}{\sin 60^\circ}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 则 $\triangle ABE$ 外接圆的半径为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, 设其外接圆圆心为 O, 连接 OB, OF, 则 $OB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $OF=\sqrt{\left(\frac{1}{2}OB\right)^2+(1-EF)^2}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{21}}{6}$.

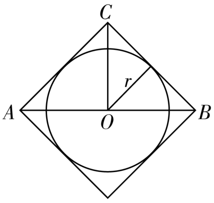
当平面 $ADE\perp$ 平面 ABE 时, 三棱锥 $D-ABE$ 的体积最大, 此时 $DF\perp$ 平面 ABE.

由于 $OD=\sqrt{OF^2+DF^2}=\sqrt{\frac{7}{12}+\frac{3}{4}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $OD=OB$, 所以 O 是三棱锥 $D-ABE$ 外接球的球心.

设外接球半径为 R, 则 $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

所以外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$.

9. A 【解析】如图所示, 旋转体的轴截面为边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形, 设 O 为内切球的球心. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中, $CA=CB=\sqrt{2}$, 则 $AB=2$, 内切球半径 $r=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以该几何体的内切球的体积为 $\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$. 故选 A.



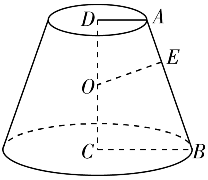
10. A 【解析】由题意, 设正三棱柱的底面边长为 a, 则其内切球的半径 $r=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$(提示:正三棱柱内切球的半径等于底面三角形内切圆的半径), 所以正三棱柱的高 $h=2r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. 棱柱的体积 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{a^3}{4}=48\sqrt{3}$, 得 $a=4\sqrt{3}$, 所以

球的表面积 $S=4\pi r^2=4\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2=\frac{\pi}{3}a^2=16\pi$. 故选 A.

11. C 【解析】设正方体内切球的球心为 O，则 $|\overrightarrow{OM}|=|\overrightarrow{ON}|=2$，$\overrightarrow{OM}=-\overrightarrow{ON}$，

$\therefore \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OP})=|\overrightarrow{OP}|^2-\overrightarrow{OP}\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=|\overrightarrow{OP}|^2-4$. 又点 P 在正方体表面上运动，$\therefore$ 当 P 为正方体顶点时，$|\overrightarrow{OP}|$ 最大，且最大值为正方体体对角线长的一半，$|\overrightarrow{OP}|_{\max}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3\times4^2}=2\sqrt{3}$，$\therefore \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最大值为 $(2\sqrt{3})^2-4=8$. 故选 C.

12. $\frac{4\pi}{3}$ 【解析】由题意，画出圆台的直观图，其中 AB 为圆台的母线，D，C 分别为上、下底面圆的圆心，点 O 为内切球的球心，E 为球 O 与圆台侧面相切的一个切点.

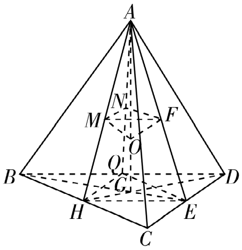


由题意可得 $AB=AE+BE=AD+BC=r_1+r_2$，

$CD=\sqrt{AB^2-(BC-AD)^2}=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_2-r_1)^2}=\sqrt{4r_1r_2}=2$.

故内切球半径 $r=\frac{CD}{2}=1$，即得内切球的体积为 $\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4\pi}{3}$.

13. $\frac{6\sqrt{3}}{5}$ 【解析】设三棱锥 $A-BCD$ 的内切球球心为 O，球 O 切三棱锥的侧面 ACD 于点 F，取 CD 的中点 E(如图)，连接 BE，设正三角形 BCD 的中心为点 G，则 G 在线段 BE 上. 连接 AG，设 $AG=h$，$\triangle BCD$ 的外接圆半径为 $BG=\frac{2\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}=2$，则 $GE=\frac{1}{2}BG=1$.



$\because AC=AD$，E 为 CD 的中点，

$\therefore AE\perp CD$，$AE=\sqrt{AG^2+GE^2}=\sqrt{h^2+1}$.

设球 O 的半径为 r，则 $4\pi r^2=\pi$，解得 $r=\frac{1}{2}$，即 $OF=OG=\frac{1}{2}$.

$\because OF\perp AE$，$\therefore \sin\angle EAG=\frac{OF}{OA}=\frac{GE}{AE}$，即 $\frac{\frac{1}{2}}{h-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{h^2+1}}$，

解得 $h=\frac{4}{3}$，$\therefore OA=AG-OG=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$，

$AF=\sqrt{AO^2-OF^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2}{3}$.

取 BC 的中点 H，连接 AH，EH，DH，设球 O 切侧面 ABC 于点 M，连接 FM. 同理可得 $AM=\frac{2}{3}$，$AH=AE=\frac{5}{3}$.

$\because H$，E 分别为 BC，CD 的中点，$\therefore EH=\frac{1}{2}BD=\sqrt{3}$.

$\because \frac{AF}{AE}=\frac{AM}{AH}=\frac{2}{5}$，则 $FM/\!/EH$，

且 $\frac{FM}{EH}=\frac{AF}{AE}=\frac{2}{5}$，$\therefore FM=\frac{2}{5}EH=\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

设 BD 的中点为 Q，连接 EQ，HQ，设球 O 切侧面 ABD 于点 N，连接 NM，NF，则 $EQ=HQ=EH=\sqrt{3}$，故 $\triangle EHQ$ 为等边三角形. 故易知 $\triangle FMN$ 为等边三角形，故 $\triangle FMN$ 的周长为 $3\times\frac{2\sqrt{3}}{5}=\frac{6\sqrt{3}}{5}$.

14. C 【解析】棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体的棱切球，其半径为正方体面对角线的一半，则半径 $r=1$，所以该球的表面积 $S=4\pi r^2=4\pi$.

15. ABD 【解析】对于 A，易知正方体的棱切球 O 的半径 $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

则球 O 的表面积为 $4\pi R^2=2\pi$，故 A 正确；

对于 B，设球体、正方体的体积分别为 V_1，V_2，

球 O 在正方体外部的体积 $V>V_1-V_2=\frac{4}{3}\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-1=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi-1$，故 B 正确；

对于 C，球 O 的半径 $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$，设圆柱的高为 h，

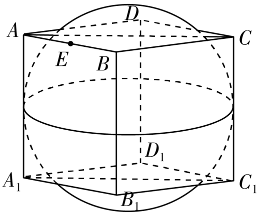
则底面圆半径 $r=\sqrt{R^2-\left(\frac{h}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{h^2}{4}}$，

所以 $S_{侧}=2\pi rh=2\pi\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{h^2}{4}}\cdot h=2\pi\sqrt{-\frac{1}{4}(h^2-1)^2+\frac{1}{4}}$，

当 $h^2=1$，即 $h=1$ 时取得最大值，且最大值为 π，故 C 错误；

对于 D，取 AB 的中点 E，可知 E 在球面上，

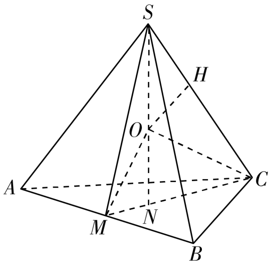
可得 $\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{EA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EA})\cdot(\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB})=\overrightarrow{ME}^2-\overrightarrow{EA}^2=|\overrightarrow{ME}|^2-\frac{1}{4}$，



因为点 M 在球 O 上且在正方体外部（含正方体表面）运动，

所以 $0\leqslant|\overrightarrow{ME}|\leqslant\sqrt{2}$（当 ME 为直径时，$|\overrightarrow{ME}|=\sqrt{2}$），所以 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}\in\left[-\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right]$，故 D 正确.

16. C 【解析】如图所示，三棱锥 $S-ABC$ 为正三棱锥，且底面边长 $AB=BC=AC=2\sqrt{6}$，侧棱 $SA=SB=SC=3$. 设正三棱锥的棱切球球心为 O，半径为 R，则顶点 S 在底面的射影为 N，则 N 为 $\triangle ABC$ 的中心，可知球心 O 在 SN 上，取 AB 的中点 M，连接 OM，SM，CM，过 O 点作 $OH\perp SC$，垂足为 H，则 $OM=OH=R$（关键：因为棱切球的球心到各棱的距离相等，即为半径，所以球心在直线 SN 上，同时构造直角三角形，借助勾股定理进而求解）.



设 $ON=h$，在 $\mathrm{Rt}\triangle CMB$ 中，$CM=\sqrt{CB^2-MB^2}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-(\sqrt{6})^2}=3\sqrt{2}$.

因为 N 为 $\triangle ABC$ 的中心,

所以 $NC=\frac{2}{3}MC=2\sqrt{2}$, $MN=\frac{1}{3}MC=\sqrt{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OMN$ 中, $OM^2=ON^2+MN^2$,即 $R^2=h^2+2$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle SNC$ 中, $SN^2=SC^2-NC^2$,即 $SN=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$,

连接 OC,在 $\mathrm{Rt}\triangle ONC$ 中, $OC^2=ON^2+NC^2$,

则 $OC=\sqrt{ON^2+NC^2}=\sqrt{h^2+(2\sqrt{2})^2}\ (0<h<1)$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle OSH$ 中, $SH^2=OS^2-OH^2$,则 $SH=\sqrt{(1-h)^2-R^2}$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCH$ 中, $HC^2=OC^2-OH^2$,

则 $HC=\sqrt{\left[\sqrt{h^2+(2\sqrt{2})^2}\right]^2-R^2}$.

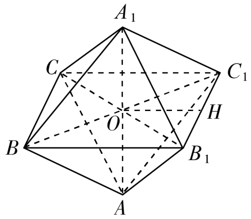
又因为 $SH+HC=SC$,

所以 $\sqrt{(1-h)^2-R^2}+\sqrt{\left[\sqrt{h^2+(2\sqrt{2})^2}\right]^2-R^2}=3$,

化简得 $R=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1-h)$,由 $\begin{cases}R^2=h^2+2,\\ R=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1-h)\end{cases}$ 得 $R^2-12\sqrt{2}R+24=0$,

解得 $R=6\sqrt{2}\pm4\sqrt{3}$,因为 $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}>3$,不符合题意,所以 $R=6\sqrt{2}-4\sqrt{3}$. 故选 C.

17. $\sqrt{2}$ 【解析】在多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,连接 CB_1, BC_1 交于点 O,则 O 为正方形 CBB_1C_1 的中心,如图所示.



由题意可知 O 既是多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心,也是棱切球的球心(关键: O 为正方形 CBB_1C_1 的中心,则 O 既是多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心,也是棱切球的球心,过点 O 作 $OH\perp B_1C_1$ 于点 H,即可得出外接球的半径 R 与棱切球的半径 r),连接 AA_1,过点 O 作 $OH\perp B_1C_1$ 于点 H,在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1OC_1$ 中, $OC_1=\frac{1}{2}BC_1=\sqrt{6}$, $A_1C_1=2\sqrt{3}$,

所以 $R=OC_1=OA_1=\sqrt{6}$,

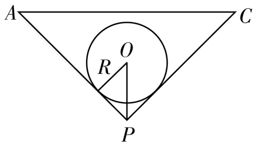
$r=OH=\sqrt{OC_1^2-C_1H^2}=\sqrt{3}$,所以 $\frac{R}{r}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$.

18. 8π 【解析】在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle APB=\frac{\pi}{3}$,则 $\triangle PAB$ 是正三角形,则 $\triangle PBC$, $\triangle PCD$, $\triangle PAD$ 均为正三角形,所以 $AC^2=AB^2+BC^2=PA^2+PC^2$,所以 $\angle APC=\frac{\pi}{2}$.

因为球 O 与侧棱 PA, PB, PC, PD 均相切,且 $PA=PC$,

所以可知平面 PAC 截正四棱锥得到等腰直角三角形 APC,

截球 O 得到球 O 的大圆,且圆 O 与 PA, PC 都相切,如图.

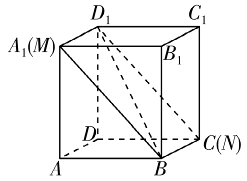


显然 OP 平分 $\angle APC$,因此球 O 的半径 $R=OP\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}$,

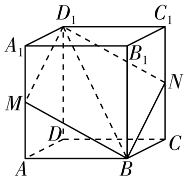
所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=8\pi$.

考点 40 截面、翻折问题

1. C 【解析】如图①，当点 M,N 分别与对角顶点重合时，显然截面 BMD_1N 是矩形；



图①



图②

如图②，当 M,N 为棱 AA_1,CC_1 的中点时，显然截面 BMD_1N 是菱形，由正方体的性质及勾股定理易知截面 BMD_1N 不可能为正方形；

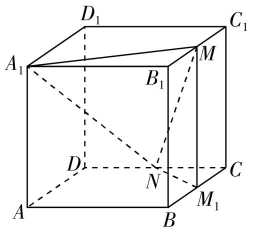
根据对称性，其他情况下截面 BMD_1N 为平行四边形. 故选 C.

2. ACD 【解析】对于 A，当点 M,N 在棱 B_1C_1,CD 上运动时，M 到 A_1D_1 的距离始终为 2，N 到平面 A_1D_1M 的距离始终为 2，所以四面体 A_1D_1MN 的体积 $V_{N-A_1MD_1}=\dfrac{1}{3}\times2\times\dfrac{1}{2}\times2\times2=\dfrac{4}{3}$，恒为定值，A 正确.

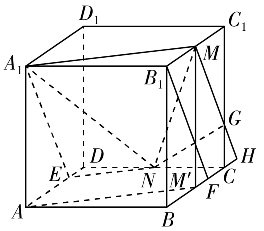
对于 B，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，棱可分为三类，分别是 A_1A,A_1B_1,A_1D_1 及分别与它们平行的棱，因为 A_1A,A_1B_1,A_1D_1 均不与平面 A_1MN 平行，所以在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，不存在棱与平面 A_1MN 平行，B 错误.

对于 C，正方体棱长为 2，如图①，过 M 作 $MM_1\perp BC$ 于 M_1，连接 M_1N，则有 $MM_1\perp$ 平面 $ABCD$，又 $M_1N\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $M_1N\perp MM_1$，所以 MN 与平面 $ABCD$ 所成角即为 $\angle MNM_1$，则 $\tan\angle MNM_1=\dfrac{MM_1}{M_1N}=\dfrac{2}{M_1N}$.

又 M_1N 的最大值为 $2\sqrt{2}$，所以 MN 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值的最小值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，C 正确.



图①



图②

对于 D，如图②，取 BC 的中点 M'，连接 AM',MM'，有 $MM'/\!/BB_1/\!/AA_1$，且 $MM'=BB_1=AA_1$，

则四边形 AA_1MM' 是平行四边形，有 $AM'/\!/A_1M$，过 N 作 AM' 的平行线交 AD 于点 E，此时 $DE=\dfrac{1}{4}DA$，则 $EN/\!/A_1M$，即 EN 为过 A_1，M,N 三点的平面与平面 $ABCD$ 的交线.

连接 A_1E，在 BC 上取点 F，使得 $CF=\dfrac{1}{4}CB$，连接 B_1F，易知 $A_1E/\!/B_1F$，在棱 CC_1 上取点 G，使得 $CG=\dfrac{1}{3}CC_1$，连接 MG 并延长交直

线 BC 于 H，则 $CH=\frac{1}{2}C_1M=CF$，即 $FH=C_1M=B_1M$，又 $FH/\!/B_1M$，所以四边形 $FHMB_1$ 是平行四边形，

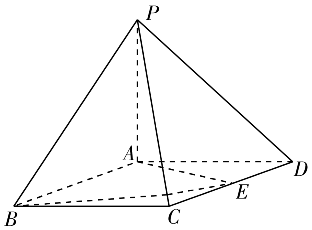
则 $MG/\!/B_1F/\!/A_1E$，则 MG 为过 A_1, M, N 三点的平面与平面 BCC_1B_1 的交线，连接 NG，则可得五边形 A_1MGNE 即为正方体中过 A_1, M, N 三点的截面，D 正确. 故选 ACD.

方法总结 作截面的常用三种方法：直接法，截面的定点在几何体的棱上；平行线法，截面与几何体的两个平行平面相交，或者截面上有一条直线与几何体的某个平面平行；交线法，延长交线得交点，截面上的点中至少有两个点在几何体的同一平面上.

3. $\frac{2\pi}{3}$　$\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$　【解析】因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为矩形，则以 P 为球心，以 PB 为半径的球与底面 $ABCD$ 的交线为以 A 为圆心，AB 为半径的圆弧.

如图①，在 CD 上取一点 E，使得 $AE=AB=2$，连接 AE，

则 $\overset{\frown}{BE}$ 的长度即为以 P 为球心，以 PB 为半径的球，被底面 $ABCD$ 截得的弧长，



图①

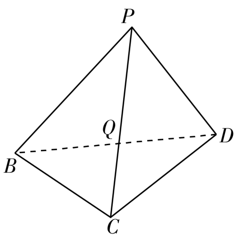
由 $AD=\sqrt{3}$，$AB=2$，

所以 $\cos\angle DAE=\frac{AD}{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

则 $\angle DAE=\frac{\pi}{6}$，所以 $\angle BAE=\frac{\pi}{3}$，

则 $\overset{\frown}{BE}$ 的长度为 $\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{2\pi}{3}$，即以 P 为球心，以 PB 为半径的球，被底面 $ABCD$ 截得的弧长为 $\frac{2\pi}{3}$.

将平面 PDC 翻折到与平面 PBC 共面，平面图形如图②所示，连接 BD 交 PC 于点 Q，此时 $QB+QD$ 取得最小值为 BD（提示：翻折问题平面化处理得出距离之和的最值）.



图②

因为 $AD=\sqrt{3}$，$AB=2$，$PA=1$，

所以 $PD=\sqrt{AD^2+PA^2}=2$，$CD=AB=2$，

$PB=\sqrt{AB^2+AP^2}=\sqrt{5}$，$PC=\sqrt{1^2+2^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{2}$，$BC=AD=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\angle BCP=\frac{BC^2+PC^2-BP^2}{2BC\cdot PC}=\frac{\sqrt{6}}{4}$，又 $\cos\angle DCP=\frac{DC^2+PC^2-DP^2}{2DC\cdot PC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\sin\angle BCP=\frac{\sqrt{10}}{4}$，$\sin\angle DCP=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\cos\angle BCD=\cos(\angle DCP+\angle BCP)=\cos\angle DCP\cos\angle BCP-\sin\angle DCP\sin\angle BCP=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}$.

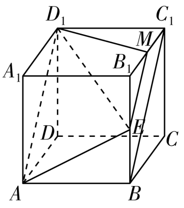
又 $BD^2=BC^2+DC^2-2BC\cdot DC\cos\angle BCD=(\sqrt{3})^2+2^2-2\times\sqrt{3}\times 2\times$

$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}=4+\sqrt{15}$，所以 $BD=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$（负值舍去），

即 $QB+QD$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$.

关键点拨 球心在截面圆上的射影即为截面圆的圆心，所以球被平面所截得的图形形状是圆，被平面图形所截得的图形形状是圆弧. 本题中以 P 为球心，以 PB 为半径的球与底面 $ABCD$ 的交线为以 A 为圆心，AB 为半径的圆弧，求出圆心角即可求出弧长.

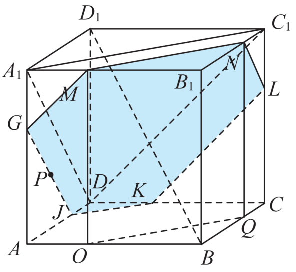
4. D 【解析】取 B_1C_1 的中点为 M，连接 EM，MD_1，BC_1，则 $EM /\!/ BC_1$，且 $EM=\frac{1}{2}BC_1$，则 $EM /\!/ AD_1$，且 $EM=\frac{1}{2}AD_1$. 又 $AB=2$，所以 $MD_1=AE=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$BC_1=AD_1=2\sqrt{2}$，因此 $EM=\sqrt{2}$，所以平面 AED_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面为等腰梯形 EMD_1A，



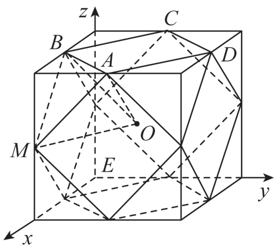
则该等腰梯形的高 $h=\sqrt{D_1M^2-\left(\frac{AD_1-EM}{2}\right)^2}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

所以该截面的面积 $S=\frac{1}{2}(AD_1+EM)\cdot h=\frac{9}{2}$. 故选 D.

5. C 【解析】由题意可以作出与 BD_1 垂直的平面 DA_1C_1，利用面面平行的判定定理可作出过点 P 且平行于平面 DA_1C_1 的平面 $GJKLNM$，则平面 $GJKLNM$ 与 BD_1 垂直，作出点 M，N 在平面 $ABCD$ 的射影 O，Q，连接 OQ，则平面 $AOQCKJ$ 的面积 S 即为所求. 已知正方体的棱长为 3，点 P 到棱 AA_1 与到棱 AD 的距离均为 1，所以点 G，J，K，L，N，M 均为各棱的三等分点，$S=S_{正方形ABCD}-S_{\triangle DJK}-S_{\triangle OBQ}=3\times3-\frac{1}{2}\times1\times1-\frac{1}{2}\times2\times2=\frac{13}{2}$，故选 C.



6. $\frac{\pi}{3}a^2$ 【解析】如图建立空间直角坐标系，则 $O(a,a,a)$，$A(2a,a,2a)$，$B(a,0,2a)$，$M(2a,0,a)$.



连接 OA，OB，OM，易知 $OA=OB=OM=AB=AM=BM=\sqrt{2}a$，

四面体 $OABM$ 为正四面体，O 到平面 ABM 的距离即为球 O 的半径，则半径 $R=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{2}a=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$ （提示：正四面体顶点到底面的距离为 $\frac{\sqrt{6}a'}{3}$，其中 a' 为正四面体的棱长），

易知球心 O 到正方形 $ABCD$ 所在平面的距离为 a，

则球被正方形 $ABCD$ 截得的圆的半径 $r=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，

所求截面面积 $S=\frac{\pi}{3}a^2$.

7. $2\sqrt{22}$　**【解析】**如图，连接 EF,EA,FC,AC,BD,A_1C_1，

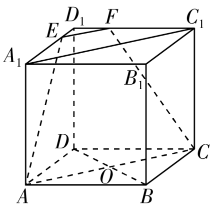
在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，易知 $A_1C_1 \mathrel{\underline{/\!/}} AC$，

$\because \frac{D_1E}{D_1A_1}=\frac{D_1F}{D_1C_1}=\frac{1}{3}$，$\therefore EF \mathrel{\underline{/\!/}} \frac{1}{3}A_1C_1$，即 $EF \mathrel{\underline{/\!/}} \frac{1}{3}AC$，

$\therefore A,C,E,F$ 四点共面.

又$\because$ O 在 AC 上，

$\therefore$ 过 E,F,O 三点作正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面为梯形 $ACFE$，



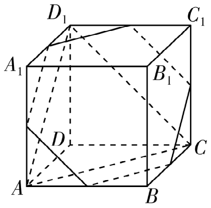
$\because$ 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，

$\therefore AC=3\sqrt{2}$，$EF=\sqrt{2}$，$\therefore AE=\sqrt{AA_1^2+A_1E^2}=\sqrt{13}$，

$\therefore$ 梯形 $ACFE$ 的高为 $\sqrt{AE^2-\left(\frac{AC-EF}{2}\right)^2}=\sqrt{13-2}=\sqrt{11}$，

$\therefore$ 梯形 $ACFE$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(3\sqrt{2}+\sqrt{2})\times\sqrt{11}=2\sqrt{22}$.

8. $6\sqrt{3}$　**【解析】**由相互平行的直线与平面所成的角是相等的，可知在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 ACD_1 与直线 AD,DC,DD_1 所成的角是相等的，故平面 α 与平面 ACD_1 平行. 由正方体的对称性可知，要求截面面积最大，



则截面的位置为过棱的中点的正六边形（过正方体的中心），易求得该正六边形的边长为 2，所以其面积 $S=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times2^2=6\sqrt{3}$.

9. (1)**【证明】**$\because \tan\angle ADB=\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{6}}{2}}=\sqrt{2}$，$\tan\angle CAB=\frac{BC}{AB}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$，

且 $\angle ADB,\angle CAB\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore \angle ADB=\angle CAB$，

$\therefore \angle ADB+\angle MAD=\angle CAB+\angle MAD=\frac{\pi}{2}$，$\therefore AC\perp BD$，

即 $AM\perp BD$，$CM\perp BD$，

$\therefore PM\perp BD$，$CM\perp BD$，又 $PM\cap CM=M$，$PM,CM\subset$ 平面 PMC，

$\therefore BD\perp$ 平面 PMC，又 $PC\subset$ 平面 PMC，$\therefore BD\perp PC$.

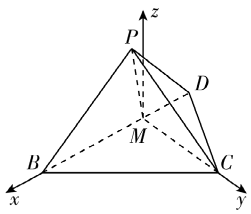
(2)**【解】**在 $Rt\triangle ABC$ 中，$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=3$，

$\because AD/\!/BC$，$\therefore \frac{AM}{CM}=\frac{AD}{BC}=\frac{DM}{BM}=\frac{1}{2}$，$\therefore AM=1$，$CM=2$，$BM=$

$\sqrt{AB^2-AM^2}=\sqrt{3-1}=\sqrt{2}$，则 $BD=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$MD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由(1)知 $BD\perp$ 平面 PMC，

以 M 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $M(0,0,0)$，$B(\sqrt{2},0,0)$，$C(0,2,0)$，

$D\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$.

设 $P(0,\cos\theta,\sin\theta)$，其中 $\angle PMC=\theta$，$0<\theta<\pi$，

$\therefore \overrightarrow{MB}=(\sqrt{2},0,0)$，$\overrightarrow{CB}=(\sqrt{2},-2,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{2},\cos\theta,\sin\theta)$.

设平面 PBD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MB}=\sqrt{2}x_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-\sqrt{2}x_1+y_1\cos\theta+z_1\sin\theta=0,\end{cases}$

取 $y_1=\sin\theta$，则 $\boldsymbol{n}=(0,\sin\theta,-\cos\theta)$.

设平面 PBC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}=\sqrt{2}x_2-2y_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-\sqrt{2}x_2+y_2\cos\theta+z_2\sin\theta=0,\end{cases}$

取 $y_2=\sin\theta$，则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2}\sin\theta,\sin\theta,2-\cos\theta)$，

则 $|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}\right|=\left|\dfrac{1-2\cos\theta}{\sqrt{3\sin^2\theta+(2-\cos\theta)^2}}\right|=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，

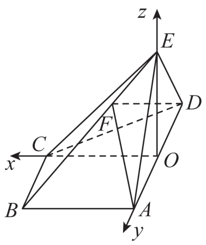
解得 $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$，$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$ 或 $\cos\theta=0$，$\sin\theta=1$，

则 $P\left(0,\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ 或 $P(0,0,1)$.

由 $V_{P-BCD}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BCD}\cdot|z_P|=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\cdot BD\cdot MC\right)\cdot|z_P|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|z_P|$，

得 $V_{P-BCD}=\dfrac{3\sqrt{2}}{10}$ 或 $V_{P-BCD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

10. (1)**【证明】**取 AD 的中点 O，连接 EO，CO，如图所示.



因为 $\triangle ADE$ 是等边三角形，O 为 AD 中点，

所以 $EO\perp AD$.

因为 $AD=2\sqrt{2}$，

所以 $EO=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$.

因为 $AD=2BC$，$\angle ABC=90°$，$AD/\!/BC$，

所以四边形 $ABCO$ 为矩形，所以 $CO=AB=\sqrt{3}$.

又因为 $EC=3$，所以 $EC^2=CO^2+EO^2$，即 $EO\perp CO$.

因为 $EO\perp AD$，$EO\perp CO$，$CO\cap AD=O$，CO，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $EO\subset$ 平面 ADE，所以平面 $EAD\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)**【解】**以 O 为原点，OC，OA，OE 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，如图所示.

则 $A(0,\sqrt{2},0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(0,-\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{3},\sqrt{2},0)$，$E(0,0,\sqrt{6})$，因为 $\dfrac{EF}{EB}=\dfrac{1}{3}$，$\overrightarrow{EB}=(\sqrt{3},\sqrt{2},-\sqrt{6})$，

所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

由 $\overrightarrow{EA}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{6})$,

得 $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EF}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{6})-\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\overrightarrow{AD}=(0,-2\sqrt{2},0)$.

设平面 FAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FA}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{2}}{3}y-\frac{2\sqrt{6}}{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-2\sqrt{2}y=0,\end{cases}$

令 $x=2\sqrt{2}$,则 $y=0$, $z=-1$,即 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{2},0,-1)$.

易知平面 EAD 的一个法向量为 $\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3},0,0)$.

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OC}\rangle=\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

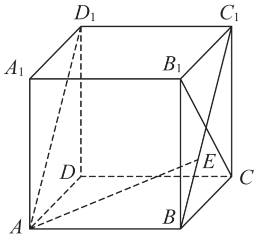
因为二面角 $E-AD-F$ 的平面角为锐角,

所以二面角 $E-AD-F$ 的余弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

考点 41　探索性问题

1. B　【解析】对于①,连接 AD_1, BC_1,如图①,易知 $B_1C\perp BC_1$, $AB\perp$ 平面 CC_1B_1B,又 $B_1C\subset$ 平面 CC_1B_1B,所以 $AB\perp B_1C$,又 $AB\cap BC_1=B$, AB, $BC_1\subset$ 平面 ABC_1D_1,

所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1D_1,所以只要点 E 在线段 BC_1 上,就有 $AE\perp B_1C$,所以动点 E 的轨迹是线段 BC_1(**关键:**利用线面垂直,确定动点位置),故①正确.



图①

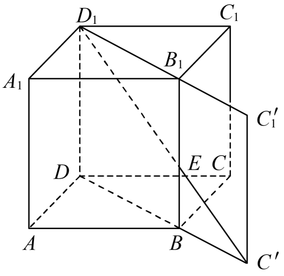
对于②,若 $\angle EA_1C=30°$,则点 E 在以 A_1C 为轴,一条母线所在直线为 A_1E 的圆锥的侧面上,平面 BCC_1B_1 与圆锥的轴 A_1C 斜交,截圆锥的侧面所得的截线是椭圆的一部分(**提示:**由于 $\angle EA_1C$ 是定值,A_1C 为定直线,因而 A_1E 绕 A_1C 旋转,形成圆锥侧面,而平面 BCC_1B_1 与圆锥的轴线 A_1C 不垂直,也不与圆锥母线平行,因而截面形状为椭圆一部分),故②正确.

对于③,因为 $A_1B_1/\!/CD$,所以 A_1E 与 CD 所成的角等于 $\angle EA_1B_1$,当 E 为 BC_1 中点时,$B_1E\perp BC_1$,此时 $\tan\angle EA_1B_1$ 最小.

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1B_1E$ 中,$\tan\angle EA_1B_1=\frac{B_1E}{A_1B_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\angle EA_1B_1$ 不可能为 $30°$,故③错误.

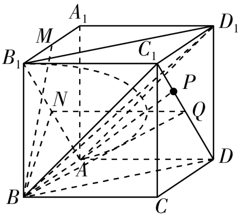
对于④,如图②,将侧面 BCC_1B_1 旋转到与平面 DBB_1D_1 重合的

位置，连接 D_1C' 交 BB_1 于点 E，此时 $EC+ED_1$ 最小，最小值为 $D_1C'=\sqrt{1^2+(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$，故④错误，故选 B.



图②

2. ABD 【**解析**】对于 A，如图①所示，连接 BD，



图①

根据正方体的性质可知 $BD/\!/B_1D_1$，

$BD\not\subset$ 平面 B_1D_1A，

$B_1D_1\subset$ 平面 B_1D_1A，$\therefore BD/\!/$平面 B_1D_1A，

同理可知 $C_1D/\!/$平面 B_1D_1A，

又 $BD\cap DC_1=D$，BD，$DC_1\subset$ 平面 BC_1D，

$\therefore$ 平面 $BC_1D/\!/$平面 B_1D_1A，

又 $P\in C_1D$，$\therefore BP\subset$ 平面 BC_1D，$\therefore BP/\!/$平面 B_1D_1A，故 A 正确；

对于 B，易知 $BB_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$A_1C_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，则 $A_1C_1\perp B_1B$，连接 B_1D_1（图略），又 $A_1C_1\perp B_1D_1$，$B_1D_1\cap BB_1=B_1$，B_1D_1，$BB_1\subset$ 平面 BB_1D_1，$\therefore A_1C_1\perp$ 平面 BB_1D_1，

又 $BD_1\subset$ 平面 BB_1D_1，$\therefore BD_1\perp A_1C_1$，同理 $BD_1\perp DC_1$，

又 $DC_1\cap A_1C_1=C_1$，DC_1，$A_1C_1\subset$ 平面 A_1C_1D，

$\therefore BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D，又$\because BD_1\subset$ 平面 PBD_1，$\therefore$ 平面 $PBD_1\perp$ 平面 A_1C_1D，故 B 正确；

对于 C，连接 BM，BD_1，如图①所示，$\because BM$ 为定直线，$\angle D_1BM$ 是定角，D_1 到 BM 的距离为定值，

$\therefore$ 当 $\angle MBP=\angle MBD_1$ 时，P 在以 BM 为旋转轴，D_1 到 BM 的距离为半径的圆锥上，

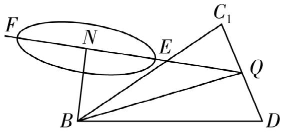
又 $BM/\!/$平面 CDD_1C_1，故平面 CDD_1C_1 截圆锥的轨迹为双曲线的一支（**提示：**根据平面截圆锥（不过圆锥顶点）的相关性质来判定即可，当且仅当平面平行于圆锥底面时截圆锥所得图形为圆，慢慢倾斜平面至与圆锥母线平行之前截圆锥所得图形均为椭圆，当且仅当平面与圆锥的母线平行时所截图形为抛物线，再倾斜平面直至与圆锥的轴平行时所截图形均为双曲线的一支），故 C 错误；

对于 D，设 AB_1，DC_1 的中点分别为 N，Q，连接 BN，NQ，BQ，则点 A 的运动轨迹是平面 AB_1C_1D 内以 N 为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{2}$为半径的圆（如图①所示为该圆在正方体中的部分），

易知 $DC_1\perp NQ$，$DC_1\perp BQ$，$NQ\cap BQ=Q$，NQ，$BQ\subset$ 平面 BNQ，

$\therefore DC_1\perp$ 平面 BNQ，$\because DC_1\subset$ 平面 BDC_1，$\therefore$ 平面 $BDC_1\perp$ 平面 BNQ，

而 $\sin\angle NQB=\dfrac{NB}{BQ}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,设 NQ 与圆的交点分别为 E,F(点 E 位于点 F,Q 之间,如图②所示),



图②

易知当点 A 分别位于点 E,F 时,点 A 到平面 BDC_1 的距离分别取到最小值和最大值,

且距离的最小值 $d_{\min}=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sin\angle NQB=\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

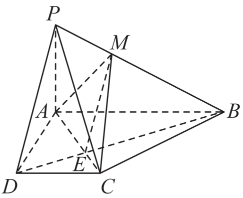
距离的最大值 $d_{\max}=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\sin\angle NQB=\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

$\because$ $\triangle BDC_1$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore$ 三棱锥 $A-BDC_1$ 体积的最小值 $V_{\min}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{2}}{12}$,三棱锥 $A-BDC_1$ 体积的最大值 $V_{\max}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{\sqrt{2}}{12}$,故 D 正确.

故选 ABD.

3.【解】(1)条件②可以推断出 PD//平面 ACM.



图①

如图①,连接 AC,AM,MC,连接 BD 交 AC 于点 E,连接 EM.

在梯形 $ABCD$ 中,有 $AB//DC,AD=DC=\dfrac{1}{2}AB=1$,则 $\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{1}{2}$.

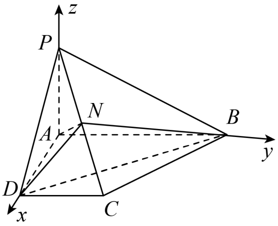
又因为 $\dfrac{PM}{MB}=\dfrac{DE}{BE}=\dfrac{1}{2}$,所以 $\triangle BME\backsim\triangle BPD$,故 $EM//PD$,

又 $PD\not\subset$ 平面 ACM,$EM\subset$ 平面 ACM,

所以 PD//平面 ACM. 故当 $\dfrac{PM}{MB}=\dfrac{1}{2}$ 时,PD//平面 ACM.

(2)存在点 N,$\dfrac{PN}{NC}=1$. 因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,$AD\subset$ 平面 $ABCD$,$AB\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PA\perp AD$,$PA\perp AB$,又 $\angle DAB=90^\circ$,所以 AP,AB,AD 两两垂直.

以 A 为原点,AD,AB,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图②所示的空间直角坐标系,连接 DB,NA,ND,NB.



图②

则 $A(0,0,0)$,$D(1,0,0)$,$P(0,0,1)$,$C(1,1,0)$,$B(0,2,0)$,

设 $\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{PC}(0<\lambda<1)$,则 $N(\lambda,\lambda,$

$1-\lambda)$, $\overrightarrow{AD}=(1,0,0)$, $\overrightarrow{AN}=(\lambda,\lambda,1-\lambda)$,

设平面 ADN 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，满足 $\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\\ \overrightarrow{AN}\cdot\boldsymbol{n}_1=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x_1=0,\\ \lambda x_1+\lambda y_1+(1-\lambda)z_1=0,\end{cases}$ 取 $\boldsymbol{n}_1=\left(0,\dfrac{\lambda-1}{\lambda},1\right)$.

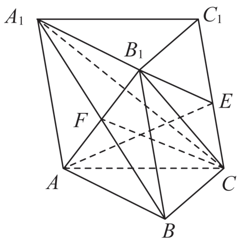
设平面 BDN 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{DB}=(-1,2,0)$，$\overrightarrow{BN}=(\lambda,\lambda-2,1-\lambda)$，

满足 $\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\\ \overrightarrow{BN}\cdot\boldsymbol{n}_2=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_2+2y_2=0,\\ \lambda x_2+(\lambda-2)y_2+(1-\lambda)z_2=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}_2=\left(2,1,\dfrac{3\lambda-2}{\lambda-1}\right)$.

若平面 $ADN\perp$ 平面 BDN，则 $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$，即 $\dfrac{\lambda-1}{\lambda}+\dfrac{3\lambda-2}{\lambda-1}=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，此时 N 为 PC 的中点，$\dfrac{PN}{NC}=1$.

4. (1)【**证明**】连接 A_1B 与 AB_1 相交于点 F，连接 CF，如图①所示.



图①

$\because$ 四边形 AA_1B_1B 为菱形，$\therefore$ F 为 AB_1 的中点，$BF\perp AB_1$.

$\because$ $\triangle AB_1C$ 为等边三角形，$\therefore$ $CF\perp AB_1$，

又 BF，$CF\subset$ 平面 BFC，$BF\cap CF=F$，

$\therefore$ $AB_1\perp$ 平面 BFC. $\because$ $BC\subset$ 平面 BFC，

$\therefore$ $AB_1\perp BC$.

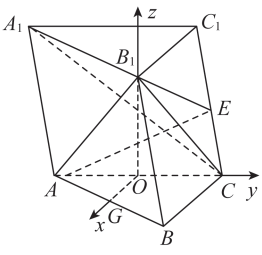
又 $AB_1\perp BA_1$，BA_1，$BC\subset$ 平面 A_1BC，$BA_1\cap BC=B$，

$\therefore$ $AB_1\perp$ 平面 A_1BC，又 $A_1C\subset$ 平面 A_1BC，

$\therefore$ $AB_1\perp A_1C$.

(2)【**解**】设 O，G 分别为 AC，AB 的中点，连接 B_1O，OG，由(1)可知 $AB_1\perp BC$，又 $AC\perp BC$，AB_1，$AC\subset$ 平面 AB_1C，$AB_1\cap AC=A$，$\therefore$ $BC\perp$ 平面 AB_1C. 又 $OG/\!/BC$，$\therefore$ $OG\perp$ 平面 AB_1C. $\because$ $\triangle AB_1C$ 为等边三角形，$\therefore$ $B_1O\perp AC$，故 OG，OC，OB_1 两两垂直（**易错：**缺少必要的垂直关系证明直接建系）.

以 O 为原点，$\overrightarrow{OG}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OB_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图②所示的空间直角坐标系，则 $A(0,-2,0)$，$C(0,2,0)$，$B(3,2,0)$，$B_1(0,0,2\sqrt{3})$，$O(0,0,0)$.



图②

$\because$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$，$\therefore$ $A_1(-3,-4,2\sqrt{3})$，$C_1(-3,0,2\sqrt{3})$.

设 $\overrightarrow{CE}=\lambda\overrightarrow{CC_1}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{CC_1}$，有 $\overrightarrow{OE}=\lambda\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{OC}=\lambda(-3,-2,2\sqrt{3})+(0,2,0)=(-3\lambda,2-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda)$，

$\therefore$ $E(-3\lambda,2-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{AE}=(-3\lambda,4-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,2,2\sqrt{3})$.

设平面 AB_1E 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则有 $\begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=-3\lambda x+(4-2\lambda)y+2\sqrt{3}\lambda z=0,\\ \overrightarrow{AB_1}\cdot\boldsymbol{n}=2y+2\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

当 $\lambda\neq0$ 时,令 $z=\sqrt{3}$,则 $x=\dfrac{4\lambda-4}{\lambda}$,$y=-3$,

即 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{4\lambda-4}{\lambda},-3,\sqrt{3}\right)$.

平面 ABC 的一个法向量为 $\overrightarrow{OB_1}$ 方向上的单位向量 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$.

若平面 AB_1E 与平面 ABC 的夹角的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$,

则有 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{\left(\dfrac{4\lambda-4}{\lambda}\right)^2+9+3}}=\dfrac{1}{4}$,

则 $\left(\dfrac{4\lambda-4}{\lambda}\right)^2=36$,又 $0<\lambda\leqslant1$,$\therefore\lambda=\dfrac{2}{5}$.

当 $\lambda=0$ 时,平面 AB_1E 即平面 AB_1C,

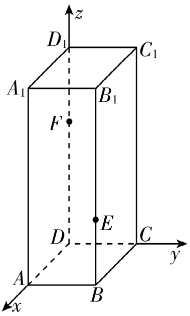
$\because B_1O\perp$ 平面 ABC,$B_1O\subset$ 平面 AB_1C,

$\therefore$ 平面 $AB_1C\perp$ 平面 ABC,不满足题意.

$\therefore$ 点 E 存在,且 $CE=\dfrac{2}{5}CC_1$.

5. ACD 【解析】对于 A,若 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$,此时 $A_1F/\!/CE$,则 A_1,F,C,E 四点共面,则 $A_1\in$ 平面 CEF,故 A 正确;

对于 B,以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系,如图所示,



设 $AB=1$,则 $AA_1=3$,所以 $D(0,0,0)$,$C(0,1,0)$,$A(1,0,0)$,$B(1,1,0)$,$B_1(1,1,3)$,$D_1(0,0,3)$,$E(1,1,3\lambda)$,$F(0,0,3\mu)$,则 $\overrightarrow{EF}=(-1,-1,3\mu-3\lambda)$,$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$,$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,3)$,

若直线 EF 与该正四棱柱的 12 条棱所在直线所成的角都相等,则直线 EF 与 DA,DC,DD_1 所成的角均相等,

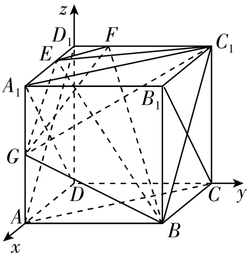
可设所成的角为 θ,所以 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA}|}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{DA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DD_1}|}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{DD_1}|}$,

即 $\dfrac{1}{\sqrt{1+1+(3\mu-3\lambda)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+1+(3\mu-3\lambda)^2}}=\dfrac{|3(3\mu-3\lambda)|}{3\sqrt{1+1+(3\mu-3\lambda)^2}}$,

化简可得 $|3\mu-3\lambda|=1$,即 $|\mu-\lambda|=\dfrac{1}{3}$,则存在 λ,μ 满足题意,故 B 错误;

对于 C,D,当平面 CEF 截四棱柱的截面与平面 $ABCD$ 只有一个交点 C 时,截面最多,为五边形,故 C,D 正确.

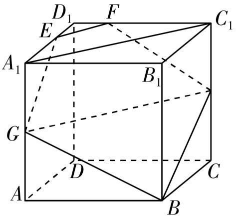
6. BD 【解析】已知正方体的棱长为 4,以 D 为原点,以 DA,DC,DD_1 所在的直线分别为 x 轴,y 轴,z 轴,建立空间直角坐标系,连接 EC_1,A_1C_1,GE,AD_1,A_1D,GC_1,BG,BE,BF,AC,BC_1,B_1C,如图①所示.



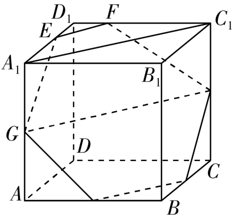
图①

对于 A,当 $\lambda=1$ 时,点 G 即为点 A,

$\frac{D_1E}{D_1A_1}=\frac{D_1F}{D_1C_1}=\frac{1}{4}$，由 $EF//A_1C_1$ 可知 $EF//AC$，所以截面 EFG 即为四边形 $EFCA$. 若 $\lambda\in(0,1)$，则由截面的性质知，截面为五边形或六边形分别如图②，图③，故 A 错误.



图②



图③

对于 B，当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时，$\frac{A_1G}{A_1A}=\frac{3}{4}=\frac{A_1E}{A_1D_1}$，所以 $EG//D_1A//C_1B$，因为 $C_1B\not\subset$ 平面 EFG，$EG\subset$ 平面 EFG，所以 $C_1B//$ 平面 EFG，$V_{B-EFG}=V_{C_1-EFG}=V_{G-C_1EF}$，又 $GA_1\perp$ 平面 EFC_1，

所以 $V_{G-C_1EF}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1EF}\cdot GA_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times1\times3=\frac{3}{2}$，即三棱锥 $B-EFG$ 的体积为 $\frac{3}{2}$，故 B 正确.

对于 C，当 $\lambda=\frac{3}{4}$ 时，$A_1G=A_1E$ 且 $A_1B_1\perp$ 平面 A_1EG，所以根据外接球的性质容易判断，三棱锥 A_1-EFG 的外接球的球心在过线段 EG 的中点且垂直于平面 A_1D_1DA 的直线上.

因为 $E(1,0,4)$，$G(4,0,1)$，$F(0,1,4)$，所以 EG 的中点 $M\left(\frac{5}{2},0,\frac{5}{2}\right)$，可记球心 $O\left(\frac{5}{2},t,\frac{5}{2}\right)$，外接球的半径 $r=|OE|=|OF|=\sqrt{\frac{9}{4}+t^2+\frac{9}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}+(t-1)^2+\frac{9}{4}}$，解得 $t=\frac{5}{2}$，$r=\frac{\sqrt{43}}{2}$，

所以三棱锥 A_1-EFG 的外接球表面积为 43π，故 C 错误.

对于 D，当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$B(4,4,0)$，$C_1(0,4,4)$，$G(4,0,2)$，$E(1,0,4)$，$F(0,1,4)$，

所以 $\overrightarrow{BC_1}=(-4,0,4)$，$\overrightarrow{GE}=(-3,0,2)$，$\overrightarrow{EF}=(-1,1,0)$，设平面 EFG 的一个法向量 $\boldsymbol{p}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{GE}=-3x_1+2z_1=0,\\ \boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{EF}=-x_1+y_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=2$，则 $y_1=2$，$z_1=3$，所以可取 $\boldsymbol{p}=(2,2,3)$，

易知 $BC_1\perp$ 平面 A_1B_1CD，故平面 A_1B_1CD 的一个法向量为 $\overrightarrow{BC_1}=(-4,0,4)$.

记平面 EFG 与平面 A_1B_1CD 的交线 l 的一个方向向量为 $\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{p}=2x_2+2y_2+3z_2=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC_1}=-4x_2+4z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=2$，则 $y_2=-5$，$z_2=2$，所以可取 $\boldsymbol{m}=(2,-5,2)$，

又平面 $ABCD$ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=2$，$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{33}$，$|\boldsymbol{n}|=1$，设直线 l 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{33}}=\frac{2\sqrt{33}}{33}$，故 D 正确. 故

选 BD.

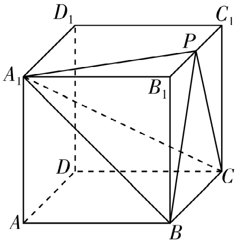
7. ①②③ 【解析】对于①，因为 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，$\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，

所以点 P 在正方形 BCC_1B_1 内(包括边界)，而正方形 BCC_1B_1 的面积为 1，故①正确.

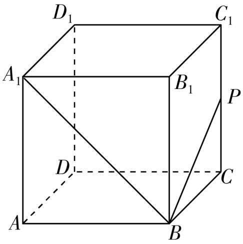
对于②，当 $\mu=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$，

所以 $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BB_1}=\lambda\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{B_1C_1}$，

故点 P 在线段 B_1C_1 上，如图①所示.



图①



图②

易知 $B_1C_1//$平面 A_1BC，

所以 B_1C_1 上的点到平面 A_1BC 的距离都相等，

又 $S_{\triangle A_1BC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值，故②正确.

对于③，当 $\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，

所以 $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}=\mu\overrightarrow{BB_1}$，$\overrightarrow{CP}=\mu\overrightarrow{BB_1}=\mu\overrightarrow{CC_1}$，

所以点 P 在线段 CC_1 上，连接 BP，如图②所示.

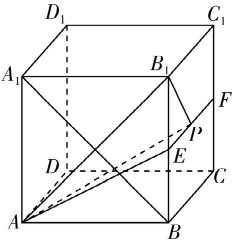
易知 $BC\perp$平面 ABB_1A_1，又 $A_1B\subset$平面 ABB_1A_1，所以 $BC\perp A_1B$，

当点 P 与点 C 重合时，点 P 到 A_1B 的距离取最小值，最小值为 1，故③正确.

对于④，当 $\mu=\dfrac{1}{2}$时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$，

取 BB_1 的中点 E，CC_1 的中点 F，连接 A_1B，AE，EF，如图③所示，

易知点 P 在线段 EF 上.



图③

若 $A_1B\perp$平面 AB_1P，则 $AP\subset$平面 AB_1P，必有 $A_1B\perp AP$，

因为 $PE\perp$平面 ABB_1A_1，$A_1B\subset$平面 ABB_1A_1，

所以 $PE\perp A_1B$，由 $AP\cap PE=P$，AP，$PE\subset$平面 APE，

知 $A_1B\perp$平面 APE，又 $AE\subset$平面 APE，则有 $A_1B\perp AE$，

又 $A_1B\perp AB_1$，所以 $AE//AB_1$，与 $AE\cap AB_1=A$ 矛盾，

故不存在满足题意的点 P，故④错误.