专题 1　集合与常用逻辑用语

考点 1　集合

1. D　【解析】因为 $a\in B,b\in C$,则由题意可设 $a=4m+1,b=4n+2$,其中 $m\in\mathbf{Z},n\in\mathbf{Z}$,则 $a+b=4(m+n)+3$,且 $m+n\in\mathbf{Z}$,故 $a+b\in D$,故选 D.

快解　当 $a=1,b=2$ 时,$a+b=3\in D$,故排除 ABC,选 D.

2. D　【解析】显然 $\pi\in\mathbf{R}$,$\varnothing\subseteq\{0\}$(**提示:**空集是任何一个集合的子集,是任何一个非空集合的真子集),故①③正确;$\{x\mid x^2-2\ 025x+2\ 024=0\}=\{x\mid(x-1)(x-2\ 024)=0\}=\{1,2\ 024\}$,故②正确;在 $y=x^2-x-2$ 中,当 $x=1$ 时,$y=-2$,即有 $(1,-2)\in\{(x,y)\mid y=x^2-x-2\}$,因此 $\{(1,-2)\}\subseteq\{(x,y)\mid y=x^2-x-2\}$,故④正确. 综上,正确命题的个数是 4,故选 D.

3. BCD　【解析】因为集合 A 有且仅有 2 个子集,所以集合 A 中有且仅有 1 个元素. 当 $a=0$ 时,$2x=0$,所以 $x=0$,所以$A=\{0\}$,满足要求;当 $a\neq0$ 时,因为集合 A 中有且仅有 1 个元素,所以方程 $ax^2+2x+a=0$ 的根的判别式 $\Delta=4-4a^2=0$,所以 $a=\pm1$,此时 $A=\{1\}$或 $A=\{-1\}$,满足要求. 故选 BCD.

4. B　【解析】因为 $x^2+y^2\leqslant\sqrt{3}$,$x\in\mathbf{Z}$,所以 x 可取$-1,0,1$. 当 $x=-1$ 时,原式为 $1+y^2\leqslant\sqrt{3}$,又 $y\in\mathbf{Z}$,所以 $y=0$;当 $x=0$ 时,原式为 $y^2\leqslant\sqrt{3}$,又 $y\in\mathbf{Z}$,所以 $y=-1$ 或 $y=0$ 或 $y=1$;当 $x=1$ 时,原式为 $1+y^2\leqslant\sqrt{3}$,又 $y\in\mathbf{Z}$,所以 $y=0$. 所以 $A=\{(-1,0),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,0)\}$(**方法:**当集合为有限集且元素个数较少时,考虑将集合的元素一一列举出来),共有 5 个元素. 故选 B.

5. D　【解析】由题意可得,$A\cap B=\{0\}$. 故选 D.

6. A　【解析】由题意可知$\complement_U B=\{3,4\}$,所以 $A\cup(\complement_U B)=\{1,3,4\}$,故选 A.

一题多解　因为 $3\in A$,所以 $3\in A\cup(\complement_U B)$,故排除 CD;又 $4\notin B$,所以 $4\in\complement_U B$,所以 $4\in A\cup(\complement_U B)$,故排除 B,故选 A.

7. B　【解析】易知不等式 $\ln x\leqslant1$ 的解集为$\{x\mid0<x\leqslant\mathrm{e}\}$,则 $A=\{x\mid0<x\leqslant\mathrm{e}\}$.

由$|2x+1|\leqslant3$ 可得$-3\leqslant2x+1\leqslant3$,即$-2\leqslant x\leqslant1$,所以 $B=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant1\}$.

所以 $A\cup B=\{x\mid-2\leqslant x\leqslant\mathrm{e}\}$.

8. AC　【解析】由图可知阴影部分所表示的集合为 $A\cap(\complement_U B)$,故 C 正确;因为 $A=\{x\in\mathbf{N}\mid x<5\}=\{0,1,2,3,4\}$,$\complement_U B=\{0,2,4,6\}$,所以 $A\cap(\complement_U B)=\{0,2,4\}$,故 A 正确. 故选 AC.

9. B　【解析】由题意可知,$x=\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{4}=(2n+1)\times\dfrac{1}{4}$,$n\in\mathbf{Z}$,则集合 M 表示的是$\dfrac{1}{4}$的奇数倍;

由 $x=\dfrac{n}{4}$,$n\in\mathbf{Z}$ 可知,集合 N 表示的是$\dfrac{1}{4}$的整数倍,

即 $N=M\cup\left\{x\ \middle|\ x=\dfrac{2n}{4}=\dfrac{n}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$,所以$\complement_N M=\left\{x\ \middle|\ x=\dfrac{n}{2},n\in\mathbf{Z}\right\}$.

故选 B.

10. B 【解析】集合 $A=\left\{x \middle| \left(\frac{1}{2}\right)^x<1\right\}=\{x \mid x>0\}$，集合 $B=\{x \mid \ln x>0\}=\{x \mid x>1\}$，所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x \mid x\leqslant 1\}$，$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x \mid x\leqslant 0\}$，

对于 A，$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x \mid 0<x\leqslant 1\}$，故 A 错误；

对于 B，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$，故 B 正确；

对于 C，$A\cap B=\{x \mid x>1\}$，故 C 错误；

对于 D，$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x \mid x\leqslant 0\}$，故 D 错误.

11. C 【解析】由 $\left|x-\frac{1}{4}\right|<\frac{1}{4}$ 可得 $-\frac{1}{4}<x-\frac{1}{4}<\frac{1}{4}$，即 $0<x<\frac{1}{2}$，所以集合 $A=\left\{x \middle| 0<x<\frac{1}{2}\right\}$.

当 $a\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$；

当 $a<\frac{1}{2}$ 时，因为 $B\subseteq A$，所以 $0\leqslant a<\frac{1}{2}$. 综上，实数 a 的取值范围是 $[0,+\infty)$. 故选 C.

12. AC 【解析】因为 $N\subseteq M$，所以 $x^2=9$ 或 $x^2=3x$，解得 $x=\pm 3$ 或 $x=0$. 当 $x=3$ 时，$3x=9$，集合 M 中的元素不满足互异性（易错：求出 x 的值后，忘记根据集合元素的互异性进行验证，从而错选 ABC），故舍去；当 $x=-3$ 时，符合题意；当 $x=0$ 时，符合题意，故选 AC.

13. C 【解析】由 $x^2-8x+15=0$，得 $(x-3)(x-5)=0$，解得 $x=3$ 或 $x=5$，所以集合 $A=\{3,5\}$.

当 $a=0$ 时，$B=\varnothing$，满足 $B\subseteq A$，

当 $a\neq 0$ 时，$B=\left\{\frac{1}{a}\right\}$，因为 $B\subseteq A$，

所以 $\frac{1}{a}=3$ 或 $\frac{1}{a}=5$，得 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=\frac{1}{5}$.

综上，实数 a 取值的集合为 $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right\}$，

所以实数 a 取值的集合的真子集的个数为 $2^3-1=7$，故选 C.

14. B 【解析】因为 $A\cup B=A$，所以 $B\subseteq A$（提示：涉及 $A\cap B=B$ 或 $A\cup B=A$ 的问题，可利用集合的运算性质，转化为相关集合之间的关系求解）. 因为 $A=\{1,3,a^2\}$，$B=\{1,a+2\}$，所以 $a+2=3$ 或 $a+2=a^2$. 当 $a+2=3$ 时，$a=1$，此时集合 A 中有两个 1，所以 $a=1$ 不符合题意，舍去（提示：注意依据集合中元素的互异性对求得的结果进行检验）. 当 $a+2=a^2$ 时，得 $a=-1$ 或 $a=2$. 当 $a=-1$ 时，集合 A 和集合 B 中均有两个 1，所以 $a=-1$ 不符合题意，舍去；当 $a=2$ 时，$A=\{1,3,4\}$，$B=\{1,4\}$，符合题意. 综上，$a=2$，所以满足 $A\cup B=A$ 的实数 a 的个数为 1，故选 B.

15. C 【解析】$2x^2+(a-4)x-2a\leqslant 0$，即 $(2x+a)(x-2)\leqslant 0$（关键：讨论 $-\frac{a}{2}$ 和 2 的大小），当 $-\frac{a}{2}=2$，即 $a=-4$ 时，$B=\{2\}$，此时 $A\cap B=\varnothing$，不符合题意，当 $-\frac{a}{2}>2$，即 $a<-4$ 时，$B=\left\{x \middle| 2\leqslant x\leqslant -\frac{a}{2}\right\}$，此时 $A\cap B=\varnothing$，不符合题意；当 $-\frac{a}{2}<2$，即

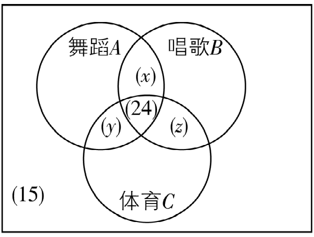
$a>-4$ 时，$B=\left\{x \,\middle|\, -\frac{a}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$，因为 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$，$A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，所以 $-\frac{a}{2}=-1$，解得 $a=2$，故选 C.

一题多解 （代入法）当 $a=1$ 时，$B=\{x\mid 2x^2-3x-2\leqslant 0\}=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$，$A\cap B=\left\{x \,\middle|\, -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$，不符合题意；当 $a=-1$ 时，$B=\{x\mid 2x^2-5x+2\leqslant 0\}=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2\right\}$，$A\cap B=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right\}$，不符合题意；当 $a=2$ 时，$B=\{x\mid x^2-x-2\leqslant 0\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 2\}$，$A\cap B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，符合题意；当 $a=-2$ 时，$B=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$，$A\cap B=\{1\}$，不符合题意，故选 C.

16. 0 或 1 【解析】因为 $A=\left\{(x,y) \,\middle|\, \frac{y-3}{x-2}=1\right\}=\{(x,y)\mid y-3=x-2,\ x\neq 2\}=\{(x,y)\mid y=x+1,\ x\neq 2\}$，所以 A 表示直线 $y=x+1$ 上除点 $(2,3)$ 外的点的集合（易错点）. $B=\{(x,y)\mid y=kx+3\}$ 表示直线 $y=kx+3$ 上的点的集合. 要使 $A\cap B=\varnothing$，有以下两种情况：①当两直线平行时，两直线无交点，则 $k=1$；②当两直线不平行时，$k\neq 1$，此时直线 $y=kx+3$ 恰好过点 $(2,3)$（易错点），故 $2k+3=3$，即 $k=0$. 综上，实数 k 的值为 0 或 1.

17. C 【解析】因为 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$，所以 $\mathrm{card}(A\cap B)=0$，$A\cap B=\varnothing$，故“$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$”是“$A\cap B=\varnothing$”的充要条件，故选 C.

18. A 【解析】如图所示，用 Venn 图表示题设中的集合关系，不妨将参加舞蹈、唱歌、体育课外活动的小学生分别用集合 A,B,C 表示，则 $\mathrm{card}(A)=63$，$\mathrm{card}(B)=89$，$\mathrm{card}(C)=47$，$\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=24$.



不妨设总人数为 n，选择舞蹈和唱歌的人数为 x，选择舞蹈和体育的人数为 y，选择唱歌和体育的人数为 z，则 $\mathrm{card}(A\cap B)=24+x$，$\mathrm{card}(A\cap C)=24+y$，$\mathrm{card}(B\cap C)=24+z$，$x+y+z=46$.

由三个集合的容斥关系公式得 $n-15=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)+\mathrm{card}(A\cap B\cap C)=63+89+47-(24+x)-(24+y)-(24+z)+24$，解得 $n=120$.

故接受调查的小学生共有 120 人.

19. BCD 【解析】对于 A，由 $2\,021=4\times 505+1$ 得 $2\,021\in[1]$，故 A 错误.

对于 B，由 $-2=4\times(-1)+2$ 得 $-2\in[2]$，故 B 正确.

对于 C，所有整数被 4 除所得的余数只有 0，1，2，3 四种情况，即刚好分成[0]，[1]，[2]，[3]，共 4“类”，故 $\mathbf{Z}=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]$，故 C 正确.

对于 D，若整数 a,b 属于同一“类”，则 $a=4n_1+k,n_1\in\mathbf{Z},b=4n_2+k,n_2\in\mathbf{Z}$，

故 $a-b=4(n_1-n_2)+0$，所以 $a-b\in[0]$；

若 $a-b\in[0]$，不妨设 $a=4n_1+k_1,n_1\in\mathbf{Z},b=4n_2+k_2,n_2\in\mathbf{Z}$，则 $a-b=4(n_1-n_2)+(k_1-k_2)$，则 $k_1-k_2=0$，即 $k_1=k_2$，所以整数 a,b 属于同一“类”.

故“整数 a,b 属于同一‘类’”的充要条件是“$a-b\in[0]$”，故 D 正确.

20. 14　$\dfrac{4^n+2}{3}-2^n$　【解析】由题意可知，当 $n=3$ 时，$U_n=\{1,2,3\}$.

当集合 A 中最大数为 1，即 $A=\{1\}$ 时，无满足题意的集合 B；当集合 A 中最大数为 2，即 $A=\{2\}$ 或 $A=\{1,2\}$ 时，只有一种满足题意的集合 $B=\{1\}$，此时“兄弟集合对”有 $2\times1=2$(对)；当集合 A 中最大数为 3，即 $A=\{3\}$ 或 $A=\{1,3\}$ 或 $A=\{2,3\}$ 或 $A=\{1,2,3\}$ 时，满足题意的集合 B 有 $\{1\}$，$\{2\}$ 和 $\{1,2\}$ 三种可能，此时“兄弟集合对”有 $4\times3=12$(对). 故当 $n=3$ 时，这样的“兄弟集合对”有 $2+12=14$(对).

若集合 A 中最大数为 m，集合 A 的个数为 $\{1,2,3,\cdots,m-1\}$ 的子集个数，即 2^{m-1} 个，此时集合 B 的个数为 $\{1,2,3,\cdots,m-1\}$ 的非空子集个数，即 $(2^{m-1}-1)$ 个，因此这样的“兄弟集合对”有 $2^{m-1}(2^{m-1}-1)$ 对，故当 $n\geqslant3$ 时，这样的“兄弟集合对”有 $2^0\times(2^0-1)+2^1\times(2^1-1)+\cdots+2^{n-1}\times(2^{n-1}-1)=4^0+4^1+\cdots+4^{n-1}-(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})=\dfrac{1\times(1-4^n)}{1-4}-\dfrac{1\times(1-2^n)}{1-2}=\dfrac{4^n+2}{3}-2^n$(对).

考点 2　常用逻辑用语

1. C　【解析】由 $S_4>0$，得 $\dfrac{a_1-a_5}{1-q}>0$，因为 $q>1$，所以 $a_5-a_1>0$，即 $a_5>a_1$，故必要性成立；

$S_4=\dfrac{a_1-a_5}{1-q}$，因为 $q>1,a_5>a_1$，所以 $S_4>0$，故充分性成立.

所以“$a_5>a_1$”是“$S_4>0$”的充要条件. 故选 C.

2. D　【解析】两个周期函数之和是否为周期函数，取决于两个函数的周期的比是否为有理数，若为有理数，则函数之和有周期，若不为有理数，则函数之和无周期. 如 $f(x)=\sin 2x$ 的周期为 π，$g(x)=\sin \pi x$ 的周期为 2，两个函数的周期的比不是有理数，故充分性不成立；

若 $f(x)=\sin x+x,g(x)=-x$，则 $f(x)+g(x)=\sin x+x-x=\sin x$ 为周期函数，但 $f(x)=\sin x+x,g(x)=x$ 为周期函数不正确，故必要性不成立.

因此“$f(x),g(x)$ 为周期函数”是“$f(x)+g(x)$ 为周期函数”的既不充分也不必要条件.

3. B　【解析】由已知得，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(1,3+x)$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3,3-x)$，若$(\boldsymbol{a}+$

$\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$，即$3+9-x^2=0$，解得$x=\pm2\sqrt{3}$，所以"$x=2\sqrt{3}$"可以推出"$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$"，但"$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$"不能推出"$x=2\sqrt{3}$"，所以"$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$"是"$x=2\sqrt{3}$"的必要不充分条件，故选 B.

4. BC 【解析】对于 A，异面直线 a，b 满足 $a//\alpha$，$b//\beta$，则可能 $\alpha//\beta$，也可能 α 和 β 相交，故 A 错误；

对于 B，α 内有两条相交直线与平面 β 均无交点，即 α 内有两条相交直线与平面 β 平行，由面面平行的判定定理知 $\alpha//\beta$，故 B 正确；

对于 C，由垂直于同一条直线的两平面平行可知 C 正确；

对于 D，α 内有无数个点到 β 的距离相等，则可能 $\alpha//\beta$，也可能 α 和 β 相交，故 D 错误.

故选 BC.

5. A 【解析】由题可得，$A=\{-2,2\}$，$B\subsetneqq A$. 当 $B=\varnothing$ 时，有 $a=0$，符合题意；当 $B\neq\varnothing$ 时，有 $a\neq0$，此时 $B=\left\{\frac{2}{a}\right\}$，则 $\frac{2}{a}=2$ 或 $\frac{2}{a}=-2$，所以 $a=\pm1$. 综上，实数 a 的所有可能的取值组成的集合为 $\{-1,0,1\}$，故选 A.

快解 由题可得，$A=\{-2,2\}$，$B\subsetneqq A$. 当 $a=0$ 时，$B=\varnothing$，则 $B\subsetneqq A$ 满足题意，故排除 BCD，故选 A.

6. B 【解析】由"$\forall x\in\mathbf{R}$，使得关于 x 的不等式 $x^2-ax+a>0$ 恒成立"，等价于方程 $x^2-ax+a=0$ 的根的判别式 $\Delta=(-a)^2-4a<0$，解得 $0<a<4$，则结合选项可知"$0<a<4$"的一个充分不必要条件是"$0<a<1$".

7. (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$（答案不唯一） 【解析】(1) 由已知可得 $A=B$，则 $x=2$ 是方程 $bx=1$ 的解，且有 $b>0$，解得 $b=\frac{1}{2}$.

(2) 若 A 是 B 的充分不必要条件，则 $A\subsetneqq B$，若不等式 $bx>1$ 对任意的 $x>2$ 恒成立，则 $b>\frac{1}{x}$ 对任意的 $x>2$ 恒成立，故 $b\geqslant\frac{1}{2}$，所以若 A 是 B 的充分不必要条件，则 b 的取值范围可以是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$（答案不唯一）.

8. A 【解析】命题"$\exists a\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2-ax$ 是偶函数"的否定是"$\forall a\in\mathbf{R}$，$f(x)=x^2-ax$ 不是偶函数"，故选 A.

9. C 【解析】方程 $3x+4=3^x$ 可化为 $3x+4-3^x=0$，设 $f(x)=3x+4-3^x$，则方程 $3x+4=3^x$ 的根就是函数 $f(x)=3x+4-3^x$ 的零点，当 $x=2$ 时，$f(2)=3\times2+4-3^2>0$，当 $x=3$ 时，$f(3)=3\times3+4-3^3<0$，由零点存在定理知函数 $f(x)=3x+4-3^x$ 在区间 $(2,3)$ 内存在零点，故方

突破点

程 $3x+4=3^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，故 p 为真命题. 根据存在量词命题的否定方法可得 $\neg p$: $\forall x\in(0,+\infty)$，$3x+4\neq 3^x$，所以 C 正确，故选 C.

10. AD 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，当 $n=3$，即 $A=3B$ 时，取 $B=\frac{\pi}{12}$，则

$A=\frac{\pi}{4}$，$\tan A=1$，$\tan B=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$，$3\tan B=3(2-\sqrt{3})$，

则 $\tan A>3\tan B$，故 B 错误，D 正确；

显然 $\begin{cases}0<A<\pi,\\0<B<\pi,\\0<C<\pi,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}0<nB<\pi,\\0<B<\pi,\\0<\pi-B-nB<\pi,\end{cases}$ 则 $0<B<\frac{\pi}{n+1}$，

令 $f(x)=\sin nx-n\sin x$，$0<x<\frac{\pi}{n+1}$，$n\geqslant 2$，$f'(x)=n\cos nx-n\cos x=n(\cos nx-\cos x)<0$，

因此函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{n+1}\right)$ 上单调递减，则 $f(x)<f(0)=0$，

即 $\sin nB<n\sin B$，从而 $\sin A<n\sin B$，故 A 正确，C 错误.

11. D 【解析】因为 $x^2-a>0$，即 $x^2>a$，且 $x\in(1,2)$，则 $x^2\in(1,4)$. 所以可得 $a\leqslant 1$（**易错：**忘记取等号），只有选项 D 满足 $\{a|a\leqslant 1\}$ 是 $\{a|a<2\}$ 的真子集，所以命题"$\forall x\in(1,2)$，$x^2-a>0$"为真命题的一个必要不充分条件是"$a<2$"，故选 D.

12. $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 【解析】由 $\frac{x}{3}-\frac{1}{4}\geqslant-\frac{1}{6}$，

解得 $x\in\left[\frac{1}{4},+\infty\right)$. 由 $2x<a$，解得 $x\in\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$.

由题意知 $\left[\frac{1}{4},+\infty\right)\cap\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)\neq\varnothing$，

突破点

所以 $\frac{a}{2}>\frac{1}{4}$，即 $a>\frac{1}{2}$.