专题 8　复数

考点 26　复数的概念及其运算

1. A　【解析】$\because a-2\mathrm{i}=(b-\mathrm{i})\mathrm{i}=1+b\mathrm{i}$，$\therefore \begin{cases} a=1, \\ b=-2 \end{cases}$（提示：复数相等，即实部相等且虚部相等），$\therefore z=1-2\mathrm{i}$，$\therefore \bar{z}=1+2\mathrm{i}$，$\therefore \bar{z}$ 的虚部是 2. 故选 A.

2. A　【解析】$z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}=\dfrac{(2+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}{(a+\mathrm{i})(a-\mathrm{i})}=\dfrac{2a+1+(a-2)\mathrm{i}}{a^2+1}$，因为复数 $z=\dfrac{2+\mathrm{i}}{a+\mathrm{i}}$的实部与虚部相等，所以 $2a+1=a-2$，解得 $a=-3$. 故选 A.

3. D　【解析】设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，因为 $z\bar{z}-\mathrm{i}\bar{z}=3-\mathrm{i}$，即 $a^2+b^2-a\mathrm{i}-b=3-\mathrm{i}$，所以$\begin{cases} a^2+b^2-b=3, \\ a=1, \end{cases}$ 解得 $b=-1$ 或 $b=2$，所以 z 的虚部为-1 或 2，故选 D.

4. D　【解析】由题意知$\dfrac{z-2}{1+\mathrm{i}}=\mathrm{i}$，故 $z=\mathrm{i}(1+\mathrm{i})+2=1+\mathrm{i}$，故 $\bar{z}=1-\mathrm{i}$，则复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为$(1,-1)$，该点在第四象限，故选 D.

5. B　【解析】根据复数的几何意义，$z_1=-1+2\mathrm{i}$，$z_2=2+2\mathrm{i}$，于是$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{-1+2\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})}=\dfrac{(-1+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\dfrac{1+3\mathrm{i}}{4}$，对应的点为$\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$. 故选 B.

6. ABD　【解析】对于 A，复数 z_1 在复平面内对应的点的坐标为$(-2,1)$，该点位于第二象限，故 A 正确；

对于 B，$\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{-2+\mathrm{i}}=\dfrac{-2-\mathrm{i}}{(-2+\mathrm{i})(-2-\mathrm{i})}=-\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}\mathrm{i}$，故 B 正确；

对于 C，由题意可得 $z_2-1+2\mathrm{i}=(x-1)+(y+2)\mathrm{i}$，因为 $|z_2-1+2\mathrm{i}|=2$，所以$(x-1)^2+(y+2)^2=4$，故 C 错误；

对于 D，$z_1-1+2\mathrm{i}=-3+3\mathrm{i}$，则 $|z_1-1+2\mathrm{i}|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$，所以 $|z_2-z_1|=|(z_2-1+2\mathrm{i})-(z_1-1+2\mathrm{i})|\leqslant|z_2-1+2\mathrm{i}|+|z_1-1+2\mathrm{i}|=2+3\sqrt{2}$，故 D 正确.

7. 3π　【解析】不妨设复数 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则 $|z-1+\mathrm{i}|\leqslant\sqrt{3}$，即 $|(x-1)+(y+1)\mathrm{i}|\leqslant\sqrt{3}$，则$(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 3$，其表示以$(1,-1)$为圆心且半径 $r=\sqrt{3}$的圆的内部以及圆上的点，则这些点构成的图形的面积为 $\pi r^2=3\pi$.

8. A　【解析】$(1+\mathrm{i})^2(1-2\mathrm{i})=2\mathrm{i}(1-2\mathrm{i})=4+2\mathrm{i}$.

9. A　【解析】$\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\mathrm{i}^4=0$，则 $\mathrm{i}+\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3+\cdots+\mathrm{i}^{2\,021}=505\times0+\mathrm{i}=\mathrm{i}$，故选 A.

10. ABD　【解析】因为 $z_1=1-\mathrm{i}$，复数 z_2 是复数 z_1 的共轭复数，所以 $z_2=1+\mathrm{i}$，所以 $z_1+z_2=1-\mathrm{i}+1+\mathrm{i}=2$，故 A 正确；$z_1\cdot z_2=(1-\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}^2=2$，故 B 正确；由于虚数不能比较大小，故 C 错误；$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(1-\mathrm{i})^2}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\mathrm{i}$，故 D 正确.

11. $\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$　【解析】$\dfrac{2\mathrm{i}-1}{2\mathrm{i}+1}=\dfrac{(-1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{3+4\mathrm{i}}{5}=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}\mathrm{i}$.

12. $-1+\mathrm{i}$ 【解析】由题设知，$z=\frac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\frac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{2\mathrm{i}-2}{2}=\mathrm{i}-1.$

13. C 【解析】根据复数的运算性质，可得 $z\cdot\bar{z}=|z|^2=\left|\frac{2}{1-\mathrm{i}}\right|^2=\left(\frac{2}{|1-\mathrm{i}|}\right)^2=2.$ 故选 C.

14. A 【解析】因为 $(2z+3)\mathrm{i}=3z$，$2z\mathrm{i}+3\mathrm{i}=3z$，$(3-2\mathrm{i})z=3\mathrm{i}$，

所以 $z=\frac{3\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}=\frac{3\mathrm{i}(3+2\mathrm{i})}{(3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}=\frac{-6+9\mathrm{i}}{13}=-\frac{6}{13}+\frac{9}{13}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=-\frac{6}{13}-\frac{9}{13}\mathrm{i}.$ 故选 A.

15. A 【解析】由题知，$\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{3}}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，

故其共轭复数为 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$ 故选 A.

16. D 【解析】依题意，$z=\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}-2\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}}{2-2\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\mathrm{i}.$

17. B 【解析】$\because z=\frac{3\mathrm{i}}{\sqrt{2}+\mathrm{i}}$，$\therefore |z|=\frac{|3\mathrm{i}|}{|\sqrt{2}+\mathrm{i}|}=\frac{3}{\sqrt{2+1}}=\sqrt{3}$，故选 B.

18. B 【解析】因为 $z(1+\mathrm{i})=|1+\mathrm{i}|$，所以 $z=\frac{|1+\mathrm{i}|}{1+\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}.$

19. C 【解析】由复数 z_1，z_2 是关于 x 的方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个根，得 $z_1+z_2=2$，$\therefore z_2=2-z_1=2-(1+\mathrm{i})=1-\mathrm{i}$，$\therefore |z_2|=|1-\mathrm{i}|=\sqrt{2}.$ 故选 C.

一题多解 由复数 z_1，z_2 是关于 x 的方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个根，得 $z_1\cdot z_2=2$，

$\therefore z_2=\frac{2}{z_1}=\frac{2}{1+\mathrm{i}}$，$\therefore |z_2|=\left|\frac{2}{1+\mathrm{i}}\right|=\frac{2}{|1+\mathrm{i}|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$ 故选 C.

20. 1 【解析】因为复数 z_1，z_2，z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，

所以 $z_1\cdot\overline{z_1}=1$，$z_2\cdot\overline{z_2}=1$，$z_3\cdot\overline{z_3}=1$，

所以 $\left|\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=\left|\frac{\frac{z_1\cdot\overline{z_1}}{z_1}+\frac{z_2\cdot\overline{z_2}}{z_2}+\frac{z_3\cdot\overline{z_3}}{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=\left|\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=1.$

21. 2 【解析】设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，则 $\bar{z}=a-b\mathrm{i}.$

对于甲：$|z+\bar{z}|=|2a|=2\sqrt{5}$，则 $a^2=5$；

对于乙：$|z-\bar{z}|=|2b\mathrm{i}|=\sqrt{0^2+4b^2}=2|b|=2$，则 $b^2=1$；

对于丙：$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=6$；

对于丁：$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{(a+b\mathrm{i})^2}{(a-b\mathrm{i})(a+b\mathrm{i})}=\frac{a^2-b^2+2ab\mathrm{i}}{a^2+b^2}=\frac{z^2}{4}=\frac{a^2-b^2+2ab\mathrm{i}}{4}$，则 $a^2+b^2=4.$

综上，甲、乙、丙中任意两个都可推出第三个正确，甲与丁矛盾，丙与丁矛盾，因为四人的陈述中，有且只有两个人的陈述正确，所以乙和丁的陈述正确，即 $b^2=1$，$a^2+b^2=4$，故 $|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}=2.$

22. C 【解析】由题意得 $\bar{z}=2+i$，则代入原式得 $2+i-a(2-i)+b=i$，即 $(2-2a+b)+(1+a)i=i$，所以 $\begin{cases}2-2a+b=0,\\1+a=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\b=-2,\end{cases}$ 所以 $a-b=2$. 故选 C.

23. A 【解析】复数 $\dfrac{1-i^{2\,023}}{ai}=\dfrac{1+i}{ai}=\dfrac{(1+i)i}{-a}=\dfrac{-1+i}{-a}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a}i$（**提示**：$i^{2\,023}=i\times i^{2\,022}=i\times(i^2)^{1\,011}=i\times(-1)^{1\,011}=i\times(-1)=-i$）. ∵ 其虚部为 3，∴ $-\dfrac{1}{a}=3$，可得 $a=-\dfrac{1}{3}$. 故选 A.

24. 1 【解析】由复数 $m^2+3m-4+(m+4)i(m\in\mathbf{R})$ 是纯虚数，得 $\begin{cases}m^2+3m-4=0,\\m+4\neq 0\end{cases}$（**易错**：注意纯虚数的实部为零，虚部不为零），解得 $m=1$.

25. C 【解析】依题意知，$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，由棣莫弗公式，得 $\omega^4=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^4=\cos\dfrac{8\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{8\pi}{3}=\cos\left(3\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(3\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，所以 $\omega^4=\omega$.

26. BCD 【解析】对于 A，当 $z_1=1+i$，$z_2=1-i$ 时，$|z_1+z_2|=2=|z_1-z_2|$，而 $z_1z_2=2\neq 0$，A 错误；

对于 B，令 $z_1=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$r\geqslant 0$，$\theta\in\mathbf{R}$，则 $z_1^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，于是 $|z_1^n|=r^n|\cos n\theta+i\sin n\theta|=r^n$，而 $|z_1|=r$，即有 $|z_1|^n=r^n$，因此 $|z_1^n|=|z_1|^n$ 成立，B 正确；

对于 C，设复数 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$，

因为 $z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$，

所以 $|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$，

又因为 $|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$，

所以 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$，C 正确；

对于 D，设复数 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$，

$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$，则 $\overline{z_1\cdot z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i$，

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$，因此 $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，D 正确.