专题 5　三角函数

考点 18　三角函数的概念、同角三角函数的基本关系及诱导公式

1. A 【解析】因为 α 是第三象限角，所以 $\sin\alpha<0,\cos\alpha<0,\tan\alpha>0$. 对于 A，$\tan\alpha-\sin\alpha>0$，故 A 正确；对于 B，$\sin\alpha+\cos\alpha<0$，故 B 错误；对于 C，$\cos\alpha-\tan\alpha<0$，故 C 错误；对于 D，$\tan\alpha\sin\alpha<0$，故 D 错误. 故选 A.

2. A 【解析】充分性：由 $\cos\theta<0$ 可知 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

又 $\because\sin2\theta>0$，$\therefore\sin\theta<0$，故 $2k\pi+\pi<\theta<2\pi+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

综上，$\pi+2k\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 θ 为第三象限角.

必要性：若 θ 为第三象限角，则 $\sin\theta<0,\cos\theta<0$，$\therefore\sin2\theta>0$，即 $\sin2\theta>0$ 且 $\cos\theta<0$. $\therefore$ "$\sin2\theta>0$ 且 $\cos\theta<0$" 是 "θ 为第三象限角" 的充要条件. 故选 A.

3. BD 【解析】由题得，$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$，故 $k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=2n,n\in\mathbf{Z}$ 时，$2n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{\pi}{2},n\in\mathbf{Z}$，则角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限左上部分（不含边界）；

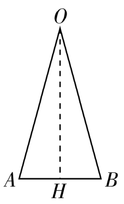
当 $k=2n+1,n\in\mathbf{Z}$ 时，$2n\pi+\frac{5\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{3\pi}{2},n\in\mathbf{Z}$，则角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第三象限右下部分（不含边界）. 所以角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限左上部分或第三象限右下部分（不含边界），

故 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 符号不确定且与 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 大小关系不确定，$\tan\frac{\alpha}{2}>0$，$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|>\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$. 所以 A，C 错误，B，D 正确. 故选 BD.

4. D 【解析】因为 $\frac{l_1}{l_2}=3$，所以 $\frac{OA}{OB}=3$.

又因为 $S_{扇形AOD}=\frac{1}{2}l_1\cdot OA$，$S_{扇形BOC}=\frac{1}{2}l_2\cdot OB$，所以 $\frac{S_{扇形AOD}}{S_{扇形BOC}}=\frac{l_1\cdot OA}{l_2\cdot OB}=9$，所以 $\frac{S_{扇环ABCD}}{S_{扇形BOC}}=8$，即 $\frac{S_1}{S_2}=8$. 故选 D.

5. A 【解析】因为圆的半径为 r，且圆的内接正十二边形被分成 12 个如图所示的等腰三角形，其顶角为 $30°$，即 $\angle AOB=30°$，作 $OH\perp AB$ 交 AB 于点 H，则 H 为 AB 的中点，且 $\angle AOH=15°$.



因为 $OA=OB=r$，在 $\mathrm{Rt}\triangle AOH$ 中，$\sin\angle AOH=\frac{AH}{OA}$，即 $\sin15°=\frac{AH}{r}$，所以 $AH=r\sin15°$，则 $AB=2AH=2r\sin15°$，

所以正十二边形的周长 $L=12\times2r\times\sin15°=24r\sin15°$，

所以 $\pi\approx\frac{L}{2r}=\frac{24r\sin 15^\circ}{2r}=12\sin 15^\circ$.

6. D 【解析】由诱导公式可得 $\sin\alpha=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi-\alpha)=-2\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=-2$. 则 $2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan^2\alpha-\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{10}{5}=2$. 故选 D.

7. D 【解析】由题意 $\sin 5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$，

令 $\alpha=72^\circ$，则有 $\sin 360^\circ=5\sin 72^\circ-20\sin^3 72^\circ+16\sin^5 72^\circ=0$.

设 $t=\sin 72^\circ$，则 $16t^5-20t^3+5t=0$，

由 $\sin 90^\circ=1>t=\sin 72^\circ>\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $\frac{3}{4}<t^2<1$，

由 $16t^5-20t^3+5t=t(16t^4-20t^2+5)=0$，

解得 $t=0$(舍)或 $t^2=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$(舍)或 $t^2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$，

所以 $\sin 72^\circ\cos 18^\circ=\sin^2 72^\circ=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$.

8. D 【解析】因为 $b=\frac{1}{\cos 48^\circ}-\sin 42^\circ=\frac{1-\cos 48^\circ\sin 42^\circ}{\cos 48^\circ}=\frac{1-\cos^2 48^\circ}{\cos 48^\circ}=\frac{\sin^2 48^\circ}{\cos 48^\circ}$，$0<\cos 48^\circ<1$，所以 $b>\sin^2 48^\circ=a$.

因为 $c=\frac{\tan 48^\circ}{1+\tan^2 48^\circ}=\frac{\sin 48^\circ\cos 48^\circ}{\sin^2 48^\circ+\cos^2 48^\circ}=\sin 48^\circ\cos 48^\circ$，

$\sin 48^\circ>\sin 45^\circ=\cos 45^\circ>\cos 48^\circ>0$，

所以 $\sin^2 48^\circ>\sin 48^\circ\cos 48^\circ$，所以 $a>c$，所以 $c<a<b$.

9. AB 【解析】对于 A，$\frac{\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}=\frac{1}{\tan\theta+2}=\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}$，故 A 正确；

对于 B，$\tan\left(\theta-\frac{5\pi}{4}\right)=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{3-1}{1+3}=\frac{1}{2}$，故 B 正确；

对于 C，$\sin^2\theta+\frac{1}{10}=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}+\frac{1}{10}=\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}+\frac{1}{10}=\frac{3^2}{3^2+1}+\frac{1}{10}=1$，故 C 错误；

对于 D，$\frac{1+\cos 2\theta}{\sin 2\theta}=\frac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{3}$，故 D 错误.

10. $\sqrt{3}$ 【解析】由 $\frac{\sin x}{1-\cos x}=\sqrt{3}$ 知 $1-\cos x\neq 0$，$\sin x\neq 0$，又 $x\in(0,\pi)$，所以有 $\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{\sin^2 x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\sqrt{3}$. 故 $\frac{1+\cos x}{\sin x}=\sqrt{3}$.

考点 19　三角恒等变换

1. C 【解析】$\frac{\cos 70^\circ\cos 20^\circ}{1-2\sin^2 25^\circ}=\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\cos 50^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{1}{2}$. 故选 C.

2. C 【解析】因为 $\tan 60^\circ=\tan(21^\circ+39^\circ)=\frac{\tan 21^\circ+\tan 39^\circ}{1-\tan 21^\circ\tan 39^\circ}$，所以

$\tan 21°+\tan 39°=\sqrt{3}(1-\tan 21°\tan 39°)$，所以 $\tan 21°+\tan 39°+\sqrt{3}\tan 21°\cdot\tan 39°=\sqrt{3}$. 故选 C.

3. BCD 【解析】对于 A，$\cos^2 75°-\sin^2 75°=\cos 150°=\cos(180°-30°)=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

对于 B，$\frac{\tan 15°}{1+\tan^2 15°}=\frac{\frac{\sin 15°}{\cos 15°}}{1+\frac{\sin^2 15°}{\cos^2 15°}}=\frac{\sin 15°\cos 15°}{\cos^2 15°+\sin^2 15°}=\frac{1}{2}\sin 30°=\frac{1}{4}$；

对于 C，$\cos 36°\cos 72°=\frac{\sin 36°\cos 36°\cos 72°}{\sin 36°}=\frac{\frac{1}{2}\sin 72°\cos 72°}{\sin(180°-144°)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 144°}{\sin 144°}=\frac{1}{4}$；

对于 D，$2\cos 20°\cos 40°\cos 80°=\frac{2\cos 20°\sin 20°\cos 40°\cos 80°}{\sin 20°}=\frac{\sin 40°\cos 40°\cos 80°}{\sin 20°}=\frac{\frac{1}{2}\sin 80°\cos 80°}{\sin(180°-160°)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 160°}{\sin 160°}=\frac{1}{4}$.

4. D 【解析】因为 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{4}{5}$，即 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{4}{5}$，

所以 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=-\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{4}{5}$.

5. AC 【解析】$\cos^2\alpha-\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha=\frac{1}{5}$，

因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2}$，$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{3}{5}$，$\tan 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=-\frac{4}{3}$. 故选 AC.

6. C 【解析】因为 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{14}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{11}{14}$，所以 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{6}{7}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{13}{14}$，所以 $\cos(2\alpha-2\beta)=\cos[2(\alpha-\beta)]=2\cos^2(\alpha-\beta)-1=2\times\left(\frac{13}{14}\right)^2-1=\frac{71}{98}$.

7. A 【解析】由题意可得，$\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left[\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$

$=\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

$=\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$,

所以 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,得到 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\cos 2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+4k\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0, k\in\mathbf{Z}$.

8. $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$ 【**解析**】因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2}$,

所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$,

由 $\sin(\alpha-\beta)>0, \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)>0$ 可得 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$,

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

所以 $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos(\alpha-\beta)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin(\alpha-\beta)=\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$.

9. A 【**解析**】因为 $\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\sin\alpha\neq0$.

由 $(1-\cos 2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta$,可得 $2\sin^2\alpha(1+\sin\beta)=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta$,即 $\sin\alpha(1+\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta$.

所以 $\sin\alpha=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$,

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$,

因为 $\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,所以 $\pi<\alpha+\beta<2\pi$,且 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\alpha<0$,

根据函数 $y=\cos x$ 的图象易知 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha+2\pi$,则 $2\alpha+\beta=\frac{5\pi}{2}$. 故选 A.

10. A 【**解析**】$\because \alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则 $\cos\beta>0$,且 $0<\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{4}$,

$$\tan\alpha=\frac{1-\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sin^2\frac{\beta}{2}+\cos^2\frac{\beta}{2}-2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}\right)\left(\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}}=\frac{1-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\beta}{2}}=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\beta}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\beta}{2}}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right),$$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$，又$\because \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\therefore 2\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$，故选 A.

11. $\frac{3\pi}{4}$ 【解析】因为$\frac{\pi}{4}<\beta<\pi$，所以$\frac{\pi}{2}<2\beta<2\pi$.

又因为 $\sin 2\beta=\frac{4}{5}>0$，所以$\frac{\pi}{2}<2\beta<\pi$，

所以$\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以$-\frac{\pi}{2}<-\beta<-\frac{\pi}{4}$.

因为 $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$，所以$\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{5\pi}{4}$，$\frac{5\pi}{4}<\alpha+\beta<2\pi$.

因为$\frac{\pi}{2}<2\beta<\pi$，$\sin 2\beta=\frac{4}{5}$，所以 $\cos 2\beta=-\frac{3}{5}$.

因为 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{10}$，所以 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{7\sqrt{2}}{10}$.

所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sin[(\alpha+\beta)-2\beta]=\sin(\alpha+\beta)\cos 2\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin 2\beta=-\frac{7\sqrt{2}}{10}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{\sqrt{2}}{10}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以 $\alpha-\beta=\frac{3\pi}{4}$.

考点 20　三角函数的图象与性质

1. C 【解析】$y=\sin 2x$ 的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后得到 $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，再将曲线 C_1 上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

故 C_2 的解析式为 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

2. C 【解析】函数 $f(x)=A\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{3}\right)(\omega>0)$ 的图象与 x 轴的两个相邻交点间的距离为$\frac{\pi}{3}$，则最小正周期 $T=2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{\omega}$，

$\therefore \omega=3$，$\therefore f(x)=A\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)=A\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)=A\cos\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=A\cos\left[3\left(x-\frac{\pi}{18}\right)\right]$，$\therefore$ 只需将函数 $f(x)$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{18}$个单位长度即可得到函数 $g(x)=A\cos\omega x$ 的图象. 故选 C.

3. D 【解析】由题图①知 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期 $T=2$，

$\therefore \frac{2\pi}{\omega}=2$，$\omega=\pi$，$\therefore f(x)=\sin\pi x$.

由题图①和题图②可知，从题图①到题图②，函数的周期减半，则 $f(x)$ 变为 $f(2x)$，且 $f(x)$ 的图象向右平移$\frac{1}{2}$个单位长度，$\therefore$ 得到 $y=f(2x-1)$ 的图象. 故选 D.

4. A 【解析】因为 $|AB|=\pi$，$|BC|=2\pi$，

所以相邻两条对称轴间的距离为$\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$，即最小正周期 $T=$

3π,所以 $\omega=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$,排除 B,D. 当 $x=0$ 时,代入 $f(x)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$,可得 $f(0)=\sqrt{3}>1$,满足题意,代入 $f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$,可得 $f(0)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$,不符合题意,故 A 正确,C 错误.

5. BC 【解析】因为 $\begin{cases}A+b=3,\\-A+b=-1,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}A=2,\\b=1,\end{cases}$ 设最小正周期为 T,则

$\frac{1}{4}T=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}$,所以 $T=\pi$,则 $\omega=2$,

故 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)+1$.

将点 $\left(\frac{\pi}{3},1\right)$ 代入 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)+1$,

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)+1=1$,$\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=0$,

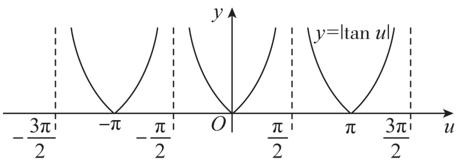
且 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$,$\frac{2\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}+\varphi<\frac{7\pi}{6}$,则 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\pi$,所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

则 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$,B 正确;

若 $f(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+1$,则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$,A 错误;

而 $1-2\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=1-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+1$,C 正确;若 $f(x)=1-2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,则 $f(0)=0$,D 错误.

6. C 【解析】作出函数 $y=|\tan u|$ 的大致图象如图所示.



由图可知,函数 $y=|\tan u|$ 的最小正周期为 π,且其单调递增区间为 $\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

对于函数 $f(x)$,其最小正周期 $T=\frac{\pi}{\omega}=4$,可得 $\omega=\frac{\pi}{4}$,

则 $f(x)=\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

由 $k\pi<\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $4k+1<x<4k+3$,其中 $k\in\mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(4k+1,4k+3)(k\in\mathbf{Z})$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ 上不单调,在 $\left(\frac{5}{3},3\right)$ 上单调递增,在 $(3,4)$ 上单调递减.

7. C 【解析】$\because$ 函数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的图象向左平移 φ 个单位长度后得到 $g(x)=$

$2\sin\left[2(x+\varphi)+\dfrac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(2x+2\varphi+\dfrac{\pi}{3}\right)$的图象.

当$-\dfrac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}$时,$2\varphi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant 2x+2\varphi+\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2\varphi+\dfrac{2\pi}{3}$,由$g(x)$在$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}\right]$上单调及正弦函数的单调性可知,$\left[2\varphi-\dfrac{\pi}{6},2\varphi+\dfrac{2\pi}{3}\right]\subseteq\left[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$或$\left[2\varphi-\dfrac{\pi}{6},2\varphi+\dfrac{2\pi}{3}\right]\subseteq\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right](k\in\mathbf{Z})$.

要使φ最小,则k取0,故有

$\begin{cases}2\varphi-\dfrac{\pi}{6}\geqslant\dfrac{\pi}{2},\\2\varphi+\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$或$\begin{cases}2\varphi-\dfrac{\pi}{6}\geqslant-\dfrac{\pi}{2},\\2\varphi+\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$结合$\varphi>0$,解得$\dfrac{\pi}{3}\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{5\pi}{12}$,

综上,φ的最小值为$\dfrac{\pi}{3}$.

8. C 【**解析**】由$f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$的图象可知,相邻两条对称轴之间的距离为最小正周期$T$的一半,$\therefore\dfrac{T}{2}=\dfrac{\pi}{2}$,即$T=\pi$,$\therefore\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi$,即$\omega=2$,$\therefore f(x)=\sin(2x+\varphi)$.

$\because$对任意$x\in\mathbf{R}$,都有$f(x)\geqslant f\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$,$\therefore$当$x=\dfrac{7\pi}{12}$时,$f(x)$取得最小值,$\therefore 2\times\dfrac{7\pi}{12}+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore\varphi=2k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

$\because|\varphi|<\pi$,$\therefore\varphi=\dfrac{\pi}{3}$,$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

令$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,得$\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{7\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$的单调递减区间为$\left[\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

对于A,在区间$\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}\right]$内,$f(x)$在$\left[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{12}\right]$上单调递增,在$\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{3}\right]$上单调递减,故A错误;

对于B,在区间$\left[0,\dfrac{7\pi}{12}\right]$内,$f(x)$在$\left[0,\dfrac{\pi}{12}\right]$上单调递增,在$\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$上单调递减,故B错误;

对于C,$f(x)$在区间$\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{7\pi}{12}\right]$上单调递减,故C正确;

对于D,$f(x)$在区间$\left[\dfrac{7\pi}{12},\pi\right]$上单调递增,故D错误.

故选C.

9. B 【**解析**】$f(x)=\sqrt{3}\sin^2x+\sin x\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{3}(1-\cos 2x)}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$,

故函数$f(x)$的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

10. C 【解析】对于 A, $f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$, ∴ 最小正周期 $T_1=\pi$.

对于 B, $\sin x\neq 0$ 且 $\cos x\neq 0$, $f(x)=\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{2\sin x\cos x}=\frac{2\sin^2 x}{2\sin x\cos x}=\tan x$, ∴ 最小正周期 $T_2=\pi$.

对于 C, $f(x)=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos x$,

∴ 最小正周期 $T_3=2\pi$.

对于 D, $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$, ∴ 最小正周期 $T_4=\pi$. 故选 C.

11. $f(x)=\sin 2x$(答案不唯一)

【解析】$f(x)=\sin 2x$ 满足题目三个条件(答案不唯一).

12. C 【解析】$f(x)=\cos 2x+\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+\sin x=\cos 2x+\sin^2 x+\sin x=1-2\sin^2 x+\sin^2 x+\sin x=-\sin^2 x+\sin x+1$.

令 $t=\sin x\in[-1,1]$, 则原函数转化为

$g(t)=-t^2+t+1=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$, $t\in[-1,1]$,

则函数 $g(t)$ 在 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递减,

又 $g(-1)=-1$, $g(1)=1$, 所以函数 $g(t)$ 的最小值为-1,

即 $f(x)$ 的最小值为-1.

13. $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ 【解析】由题可知 $g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$,

$h(x)=f(x)g(x)=\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\frac{\sqrt{2}-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{4}$,

所以当 $2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$, 即 $x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ 时, $h(x)$ 取到最大值, 且最大值为$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

14. B 【解析】$y=4\cos\left(x+\frac{7\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\cos\left(x+2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\left(\frac{1}{2}\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin^2 x\right)=2\cos 2x$.

令 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, 则 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$, 即函数图象的对称

中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，函数图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$. 故选 B.

15. D 【解析】因为 $f(x)=2\tan(\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，由 $f(0)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 可得 $2\tan\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. 又因为点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 是 $f(x)$ 的图象的一个对称中心，故 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=3k-1$，$k\in\mathbf{Z}$，

且 $T\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，即 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{\omega}<\frac{3}{4}\pi$，则 $\frac{4}{3}<\omega<4$，

所以当 $k=1$ 时，$\omega=2$，即 $f(x)=2\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\tan\left(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故选 D.

16. B 【解析】函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得 $f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\theta\right)$ 的图象，

依题意，$\frac{\pi}{3}-\theta=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $|\theta|<\frac{\pi}{2}$，则 $k=0$，$\theta=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. 由 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$ 得 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$ 的极值点为 $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$.

17. ABD 【解析】由题意知 $A=2$，且最小正周期 T 满足 $\frac{T}{4}=\frac{5\pi}{12}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}$，故 $T=\pi$，即 $\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，$\omega=2$，故 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)$.

$\because f(x)$ 在 $x=\frac{5\pi}{12}$ 处取得极小值 -2，$\therefore 2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

则 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $0<\varphi<\pi$，故 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

则 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

对于 A，$f(x)=2\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，故 A 正确；

对于 B，$f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left[2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=2\sin 2x$，为奇函数，故 B 正确；

对于 C，$x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$，则 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，不为余弦函数的单调递减区间，故 C 错误；

对于 D，$x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)$，则 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right)$，故 $\cos\left(2x+\right.$

$\left.\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，则 $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\in[-2,\sqrt{3})$，故 D 正确.

故选 ABD.

18. $-\frac{19}{3}$　1　**【解析】** $f(x)=\tan 2x+2\tan(\pi-x)-1=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}-2\tan x-1$. 若 $\tan\alpha=2$，则 $f(\alpha)=\frac{4}{1-4}-4-1=-\frac{19}{3}$.

令 $f(x)=0$，即 $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}-2\tan x-1=0$，整理得 $2\tan^3 x+\tan^2 x-1=0$.

设 $\tan x=t$，若 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，

则 $t\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$，

则 $g(t)=2t^3+t^2-1$，$t\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$，$g'(t)=6t^2+2t$.

当 $t\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 时，$g'(t)>0$.

又当 $t\to-1$ 时，$g(t)\to-2<0$，当 $t\to0$ 时，$g(t)\to-1<0$，当 $t\to1$ 时，$g(t)\to2>0$，故 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一的零点.

又 $t=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上的零点个数为 1.

考点 21　ω 的求解

1. B　**【解析】** 易知 $\omega\neq0$，因为恒有 $f(x)\leqslant f(2\pi)$，所以当 $x=2\pi$ 时，$f(x)$ 取得最大值，所以 $2\pi\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\omega=\frac{1}{6}+k$，$k\in\mathbf{Z}$.

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，

所以 $\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{T}{2}$，即 $\frac{2\pi}{|\omega|}\geqslant\pi$，解得 $0<|\omega|\leqslant2$.

当 $0<\omega\leqslant2$ 时，因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right]$. 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增，所以 $\begin{cases}-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$，解得 $\begin{cases}\omega\leqslant4-12k,\\ \omega\leqslant1+6k,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$. 所以 $4-12k>0$，且 $1+6k>0$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$. 故 $k=0$，$\omega=\frac{1}{6}$.

当 $-2\leqslant\omega<0$ 时，因为 $\omega=\frac{1}{6}+k$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $\omega=-\frac{5}{6}$ 或 $\omega=-\frac{11}{6}$.

取 $\omega=-\frac{5}{6}$，则 $f(x)=2\sin\left(-\frac{5}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(\frac{5}{6}x-\frac{\pi}{6}\right)$，

因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$，所以 $\frac{5}{6}x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{11\pi}{36},\frac{\pi}{9}\right]$，故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，不满足题意. 同理可得 $\omega=-\frac{11}{6}$ 也不满足题意，所以 $\omega=\frac{1}{6}$，故选 B.

2. $\frac{1}{3}$ $\left(答案不唯一,满足\ \omega\in\left(0,\frac{1}{3}\right]即可\right)$

【解析】$\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{3}\geqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\ \frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$,即$\begin{cases}\omega\leqslant\frac{5}{3}-4k,\\ \omega\leqslant\frac{1}{3}+4k,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$,

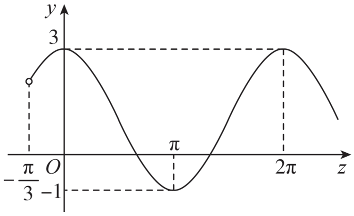
令$\frac{5}{3}-4k=\frac{1}{3}+4k$,得 $k=\frac{1}{6}\notin\mathbf{Z}$.

当 $k\leqslant0,k\in\mathbf{Z}$ 时,$\frac{5}{3}-4k>\frac{1}{3}+4k$,则 $\omega\leqslant\frac{1}{3}+4k\leqslant\frac{1}{3}$.

当 $k\geqslant1,k\in\mathbf{Z}$ 时,$\frac{1}{3}+4k>\frac{5}{3}-4k$,则 $\omega\leqslant\frac{5}{3}-4k\leqslant-\frac{7}{3}$.

$\because\omega>0,\therefore0<\omega\leqslant\frac{1}{3}$,故 ω 的值可以为$\frac{1}{3}$$\left(答案不唯一,满足\ \omega\in\left(0,\frac{1}{3}\right]即可\right)$.

3. A 【解析】因为 $x\in(0,2\pi)$,$\omega>0$,所以 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},2\omega\pi-\frac{\pi}{3}\right)$,令 $z=\omega x-\frac{\pi}{3}$,画出 $y=2\cos z+1$ 的大致图象,如图所示.



要使$f(x)$的图象在区间$(0,2\pi)$内至多存在 3 条对称轴,则 $2\omega\pi-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},3\pi\right]$,解得 $\omega\in\left(0,\frac{5}{3}\right]$.

4. D 【解析】$\because$ 函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$的图象向左平移$\frac{2\pi}{3}$个单位长度,所得到的图象与原函数图象的对称轴重合,设最小正周期为 T,$\therefore\frac{2\pi}{3}=k\cdot\frac{T}{2}=\frac{k\pi}{\omega}$,即 $\omega=\frac{3}{2}k,k\in\mathbf{Z},\omega>0$,令 $k=1$,可得 ω 的最小值为$\frac{3}{2}$. 故选 D.

5. D 【解析】因为$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\cos^2\omega x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\omega x-\frac{1+\cos2\omega x}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$,

由$-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant1$ 可得$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$.

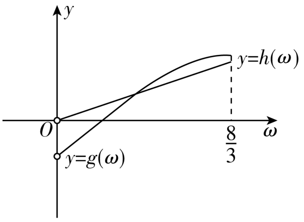
因为 $0\leqslant x\leqslant\pi$,所以$-\frac{\pi}{6}\leqslant2\omega x-\frac{\pi}{6}\leqslant2\pi\omega-\frac{\pi}{6}$,由题意可得$\frac{\pi}{2}\leqslant2\pi\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$,解得$\frac{1}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{2}{3}$. 故选 D.

6. B 【解析】因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值为$\frac{\omega}{3}$,所以 $0<\frac{\omega}{3}\leqslant1$,解得 $0<\omega\leqslant3$. 因为 $x\in$

$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，所以 $-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\omega x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}$，

当 $\dfrac{\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，即 $0<\omega\leqslant\dfrac{8}{3}$ 时，$f(x)_{\max}=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\omega}{3}$.

令 $g(\omega)=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}\right)$，$h(\omega)=\dfrac{\omega}{3}$，在同一坐标系中作出大致图象.



由图可知，在 $\left(0,\dfrac{8}{3}\right]$ 上存在唯一 ω，使得 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\omega}{3}$.

当 $\dfrac{\pi}{4}\omega-\dfrac{\pi}{6}>\dfrac{\pi}{2}$，即 $\dfrac{8}{3}<\omega\leqslant3$ 时，$f(x)_{\max}=1$，即 $\dfrac{\omega}{3}=1$，解得 $\omega=3$，此时 $x=\dfrac{2\pi}{9}<\dfrac{\pi}{4}$.

综上，实数 ω 的取值个数最多为 2. 故选 B.

7. C 【解析】令 $t=\omega x+\dfrac{\pi}{3}$，当 $x\in[0,1]$ 时，$t\in\left[\dfrac{\pi}{3},\omega+\dfrac{\pi}{3}\right]$.

因为函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ $(\omega>0)$ 在 $[0,1]$ 上有唯一的极大值，所以函数 $y=\sin t$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{3},\omega+\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上有唯一的极大值，

所以 $\begin{cases}\omega+\dfrac{\pi}{3}>\dfrac{\pi}{2},\\ \omega+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{5\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\omega\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{13\pi}{6}\right]$. 故选 C.

8. A 【解析】由题图可知 $f(0)=2\sin\varphi=\sqrt{3}$，$\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\because\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$，$\therefore\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$，$f(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{2\pi}{3}\right)$. 令 $g(x)=2\sin\left(\omega x+\dfrac{2\pi}{3}\right)+1=0$，得 $\sin\left(\omega x+\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$，由 $\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\pi$ 得 $\dfrac{\pi}{6}\omega+\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\omega x+\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\pi\omega+\dfrac{2\pi}{3}$，依题意知 $g(x)=f(x)+1$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{6},\pi\right]$ 上有且仅有 3 个零点，故当 ω 取值最小时，有 $\begin{cases}\dfrac{2\pi}{3}<\dfrac{\pi}{6}\omega+\dfrac{2\pi}{3}\leqslant\dfrac{7\pi}{6},\\ 3\pi+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\pi\omega+\dfrac{2\pi}{3}<4\pi-\dfrac{\pi}{6},\end{cases}$ 解得 $\dfrac{5}{2}\leqslant\omega\leqslant3$，$\therefore\omega$ 的最小值为 $\dfrac{5}{2}$.

故选 A.

9. D 【解析】因为 $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，$\omega>0$，

所以 $\omega x-\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\omega\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6},\omega\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

因为函数在区间 $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 内有零点，无极值点，

所以 $\omega\pi-\frac{\pi}{6}-\left(\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)<\pi$，解得 $0<\omega<2$，

则 $\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，$\omega\pi-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$，要想满足要求，则 $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right),\\ \omega\pi-\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right),\\ \omega\pi-\frac{\pi}{6}\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right],\end{cases}$

解得 $\frac{1}{6}<\omega<\frac{1}{3}$ 或 $\frac{4}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{3}$，

故 ω 的取值范围是 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)\cup\left[\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right]$.