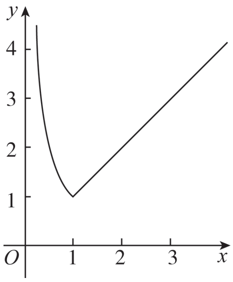
专题 3　函数及其性质

考点 6　函数的概念

1. C　【解析】由已知可得 $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0,\\x+1>0,\\\ln(x+1)\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\x>-1,\\x\neq 0,\end{cases}$ 因此，函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\ln(x+1)}$ 的定义域为 $(-1,0)\cup(0,2]$. 故选 C.

2. D　【解析】因为函数 $y=f(2x-1)$ 的定义域是 $[-2,3]$，所以 $-2\leqslant x\leqslant 3$，所以 $-5\leqslant 2x-1\leqslant 5$，所以函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[-5,5]$. 要使 $y=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+2}}$ 有意义，则需要 $\begin{cases}-5\leqslant x\leqslant 5,\\x+2>0,\end{cases}$ 解得 $-2<x\leqslant 5$，所以 $y=\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+2}}$ 的定义域是 $(-2,5]$. 故选 D.

3. 2　【解析】$f(x)=\max\left\{|x|,\dfrac{1}{x}\right\}(x>0)$，



当 $0<x<1$ 时，$\dfrac{1}{x}>|x|=x$；当 $x=1$ 时，$\dfrac{1}{x}=|x|=x$；当 $x>1$ 时，$\dfrac{1}{x}<|x|=x$. 所以 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x},0<x<1,\\x,x\geqslant 1,\end{cases}$ 画出 $f(x)$ 的图象如图所示.

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=1$，则 $1\geqslant m-1$，即 $m\leqslant 2$，故 m 的最大值是 2.

4. $[2,14]$　【解析】由 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 81,\\1\leqslant x^2\leqslant 81\end{cases}$ 得 $1\leqslant x\leqslant 9$，即 $g(x)$ 的定义域为 $[1,9]$（**方法：**一般地，若已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求函数 $f(g(x))$ 的定义域时，由于在 $f(x)$ 中的 x 和 $f(g(x))$ 中的 $g(x)$ 受同一个对应法则的作用，所以范围相同，因此 $f(g(x))$ 的定义域即为满足条件 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 中的 x 的取值范围），$g(x)=[f(x)]^2+f(x^2)=(1+\log_3x)^2+1+\log_3x^2=(\log_3x)^2+4\log_3x+2$，令 $\log_3x=t$，则 $t\in[0,2]$，令 $h(t)=t^2+4t+2=(t+2)^2-2$，则 $h(t)_{\min}=h(0)=2$，$h(t)_{\max}=h(2)=14$，所以 $h(t)\in[2,14]$，即函数 $y=g(x)$ 的值域为 $[2,14]$.

5. B　【解析】对于 A，$f(x)$，$g(x)$ 一个为指数函数、一个为对数函数，对应法则不同，因此不是相同函数；对于 B，$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|=f(x)$，是相同函数；对于 C，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，因此不是相同函数；对于 D，$g(x)=\lg(2x)=\lg 2+\lg x$ 与函数 $f(x)=2\lg x$ 对应法则不同，因此不是相同函数. 故选 B.

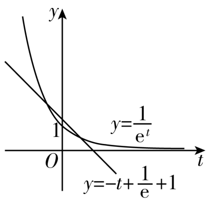
6. BD 【解析】对于 A，$f(x)=2\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$g(x)=\ln(x^2)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域不同，所以不是同一函数，故 A 错误；对于 B，$f(x)=x|x|$ 与 $g(x)=\begin{cases}x^2,x\geqslant 0,\\-x^2,x<0\end{cases}$ 是同一函数，故 B 正确；对于 C，$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$ 对应法则不同，所以不是同一函数，故 C 错误；对于 D，$g(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}=\dfrac{x+1}{x(x+1)}=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 与 $f(x)=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 是同一函数，故 D 正确.

7. A 【解析】在 $f(x)+2f(-x)=4x$①中令 $x=-x$（**方法：**方程组法求解函数解析式的方法技巧：(1) 题目中既有 $f(x)$，也有 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，可将所有的 x 变成 $\dfrac{1}{x}$，用方程组法消去 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 求出 $f(x)$；(2) 题目中既有 $f(x)$，也有 $f(-x)$，根据 $x,-x$ 互为相反数关系，令 x 等于 $-x$ 进行整理即可；(3) 根据奇函数和偶函数的定义，列出另一个表达式建立方程组，通过解方程组求出函数解析式），

得 $f(-x)+2f(x)=-4x$②，联立①②得 $f(x)=-4x$，所以 $f(2)=-4\times 2=-8$，故选 A.

一题多解 因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f(-x)=4x$，所以在 $f(x)+2f(-x)=4x$ 中分别令 $x=2$，$x=-2$，可得 $\begin{cases}f(2)+2f(-2)=8,\\f(-2)+2f(2)=-8,\end{cases}$ 解不等式组可得 $f(2)=-8$，故选 A.

8. B 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数，且 $f\left(f(x)-\dfrac{1}{e^x}\right)=\dfrac{1}{e}+1$，所以在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一一个实数 t 使得 $f(t)=\dfrac{1}{e}+1$，且 $f(x)-\dfrac{1}{e^x}=t$（**方法：**已知复合函数的解析式 $y=f(g(x))$，可用换元法 $t=g(x)$，$y=f(t)$，但要注意新元的取值范围，即 $g(x)$ 的值域）. 令 $x=t$，得 $\dfrac{1}{e}+1-\dfrac{1}{e^t}=t$，即 $-t+\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{1}{e^t}$. 画出 $y=-t+\dfrac{1}{e}+1$ 与 $y=\dfrac{1}{e^t}$ 的大致图象如图所示.



由图象可知，函数 $y=-t+\dfrac{1}{e}+1$ 与 $y=\dfrac{1}{e^t}$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 上只有 1 个交点，且 $t=1$ 是方程 $-t+\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{1}{e^t}$ 的解（**关键：**根据函数的单调性，以及等式恒成立，求出 t 的值），所以 $f(x)=\dfrac{1}{e^x}+1$，故 $f(\ln 3)=\dfrac{1}{e^{\ln 3}}+1=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$，故选 B.

9. $f(x)=x$（答案不唯一） 【解析】若设 $f(x)=ax$（**方法：**可以用待

定系数法，首先把函数设出来，再结合条件列出方程组确定系数的值），则由 $f(x+2)=f(x)+2$，得 $a(x+2)=ax+2$，解得 $a=1$，所以 $f(x)=x$（答案不唯一）.

10. D 【解析】当 $x-2>1$，即 $x>3$ 时，$f(x-2)=-f(x-4)$，所以当 $x>3$ 时，$f(x)=-f(x-2)=f(x-4)$，所以当 $x>3$ 时，$f(x)$ 的周期为 4（关键：判断出函数的周期性），所以 $f(2\,023)=f(3)$. 又因为当 $x>1$ 时，$f(x)=-f(x-2)$，所以 $f(3)=-f(3-2)=-\cos\pi=1$（提示：由于分段函数在各段上的对应法则不同，所以求分段函数在某点的函数值时，关键要弄清该点所在区间对应的函数解析式是哪一个，然后再代入求值），即 $f(2\,023)=1$，故选 D.

11. D 【解析】因为当 $x>0$ 时，$f(x)=f(x-1)-f(x-2)$，所以 $f(x+1)=f(x)-f(x-1)$，$f(x+1)=-f(x-2)$，即 $f(x+3)=-f(x)$，$f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$，所以 $f(2\,024)=f(337\times6+2)=f(2)=-f(-1)=\dfrac{a}{2}-1=1$，则 $a=4$. 故选 D.

12. $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup[e^2,+\infty)$ 【解析】①当 $0<x_1<x_2<1$ 时，$f(x_1)=x_1$，$f(x_2)=x_2$，由 $f(x_2)=ef(x_1)$ 得 $x_2=ex_1\in(0,1)$，所以 $x_1\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$，则 $x_1\cdot f(x_2)=x_1x_2=ex_1^2\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$；

②当 $0<x_1<1\leqslant x_2$ 时，因为 $ef(x_1)=ex_1\in(0,e)$，$f(x_2)=e^{x_2}\geqslant e$，所以不存在 $0<x_1<1\leqslant x_2$，使得 $f(x_2)=ef(x_1)$；

③当 $1\leqslant x_1<x_2$ 时，$f(x_1)=e^{x_1}$，$f(x_2)=e^{x_2}$，由 $f(x_2)=ef(x_1)$ 得 $e^{x_2}=e\cdot e^{x_1}=e^{x_1+1}$，则 $x_2=x_1+1$，$x_1\cdot f(x_2)=x_1e^{x_1+1}$，令 $g(x)=xe^{x+1}$ $(x\geqslant1)$，则 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(1)=e^2$，则 $x_1\cdot f(x_2)\geqslant e^2$.

综上，$x_1\cdot f(x_2)$ 的取值范围为 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\cup[e^2,+\infty)$.

考点 7　函数的基本性质

1. C 【解析】由题意可得 $2x^2-x-3\geqslant0$，解得 $(2x-3)(x+1)\geqslant0$，即 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant\dfrac{3}{2}$（提示：在讨论函数的单调区间时，要先确定函数的定义域），根据二次函数及复合函数的性质可知，$f(x)=\sqrt{2x^2-x-3}$ 的单调递增区间为 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$ $\left(\text{提示：}y=2x^2-x-3=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{25}{8}\text{，其在}\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)\text{上单调递增}\right)$，故选 C.

2. AB 【解析】对于 A，因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $f(f(x))$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增（提示：若内层函数与外层函数有相同的单调性，则复合函数单调递增；若内层函数与外层函数有相反的单调性，则复合函数单调递减），故 A 正确；

对于 B，因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $f(g(x))$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，故 B 正确；

对于 C，因为 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $-g(x)$ 在 $(-\infty,

0)上单调递减，因为$-g(x)$的值域是否在$(-\infty,0)$内无法判断，所以$g(-g(x))$在$(-\infty,0)$上的单调性无法判断，故C错误；

对于D，因为$-f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减，$g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，因为$-f(x)$的值域是否在$[0,+\infty)$内无法判断，所以$g(-f(x))$在$[0,+\infty)$上的单调性无法判断，故D错误.

综上，故选AB.

3. x^2-2x　$-x^2+x$　【解析】不妨令$f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$，$g(x)=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$（**关键：**假设出一个在$\mathbf{R}$上都是单调递减的函数，再检验是否满足命题中的条件），

一方面：$f(x)+g(x)=x^2-2x+(-x^2+x)=-x$是$\mathbf{R}$上的减函数.

另一方面：因为$f(x)=(x-1)^2-1$开口向上，其图象对称轴为$x=1$，所以当$x>1$时，函数$f(x)$单调递增，即$f(x)$不为$\mathbf{R}$上的减函数. 因为$g(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$开口向下，其图象对称轴为$x=\frac{1}{2}$，所以当$x<\frac{1}{2}$时，函数$g(x)$单调递增，即$g(x)$不为$\mathbf{R}$上的减函数，因此$f(x)$，$g(x)$都不是$\mathbf{R}$上的减函数. 因此满足题意的一组函数可以是$f(x)=x^2-2x$，$g(x)=-x^2+x$.

4. B　【解析】因为函数$y=f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，所以函数$y=f(x)$的图象关于原点对称，且$f(0)=0$. 当$x>0$时，函数$f(x)=a(x-1)+1=ax+1-a$，当$x<0$时，$-x>0$，则$f(-x)=-ax+1-a$，则$f(x)=-f(-x)=ax+a-1$，即当$x<0$时，函数$f(x)=ax+a-1$，所以$f(x)=\begin{cases}ax+a-1,x<0,\\0,x=0,\\ax+1-a,x>0.\end{cases}$　因为函数$y=f(x)$是$\mathbf{R}$上的增函数，则有$\begin{cases}a>0,\\1-a\geqslant0,\\a-1\leqslant0,\end{cases}$解得$0<a\leqslant1$，所以实数$a$的取值范围为$(0,1]$，故选B.

5. B　【解析】因为$f(x)=-x^2+2ax$图象的对称轴为直线$x=a$，图象开口向下，且在$(1,+\infty)$上单调递减（**提示：**判断二次函数的单调性要根据函数图象的对称轴，在开口方向确定的情况下，对称轴左、右两侧的单调性也就确定了），所以$a\leqslant1$. 因为$g(x)=\frac{2x+1-2a}{x-a}=2+\frac{1}{x-a}$，且在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$x-a>0$在$(1,+\infty)$上恒成立，即$a<x$在$(1,+\infty)$上恒成立，可得$a\leqslant1$. 综上，$a\in(-\infty,1]$. 故选B.

6. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$　【解析】因为对于任意实数$x_1\neq x_2$，都有$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$成立，所以函数$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递减，所以$\begin{cases}3a-1<0,\\0<a<1,\\3a-1+4a\geqslant a^{2-1}+\frac{1}{2},\end{cases}$　解得$\frac{1}{4}\leqslant a<\frac{1}{3}$，所以实数$a$的取值范围

是$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right)$.

7. A 【解析】因为$f(x+2)$为偶函数,图象关于y轴对称,所以$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称. 依题意可知,$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增,则在$(-\infty,2)$上单调递减. 由于$f(x)<f(7)$,所以$|x-2|<|7-2|$,即$-5<x-2<5$,解得$-3<x<7$,所以不等式$f(x)<f(7)$的解集为$(-3,7)$. 故选 A.

8. B 【解析】当$x>0$时,$f'(x)<0$,故偶函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以$f(x^2-x)-f(x)>0$即$f(|x^2-x|)>f(|x|)$,所以$|x^2-x|<|x|$,显然$x=0$不满足不等式,解得$|x-1|<1$,即$-1<x-1<1$,所以$x\in(0,2)$. 故选 B.

9. $(-3,3)$ 【解析】令$x=y=0$得$2f(0)=f(0)$,所以$f(0)=0$. 令$y=-x$,得$f(-x)=-f(x)$,则$f(x)$为奇函数. 设$x_1>x_2$,则$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)$. 因为当$x>0$时,$f(x)>0$,所以$f(x_1-x_2)>0$,则$f(x_1)>f(x_2)$,所以$f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增(**关键:**利用单调性的定义,及奇函数在对称区间的单调性一致判断出函数$f(x)$的单调性). 由$f\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$,得$f\left(\frac{1}{4}\right)=1$,所以$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=4f\left(\frac{1}{4}\right)=4$. 不等式$f(x^2-8)<4$可转化为$f(x^2-8)<f(1)$(**方法:**若不等式一边没有函数符号"$f$",而是常数(如$f(m)<a$),应先将常数转化为带有函数符号"$f$"的函数值再求解),所以$x^2-8<1$,解得$-3<x<3$.

10. B 【解析】令$s(x)=2g(x)-1$,则$s(x)+s(-x)=2g(x)-1+2g(-x)-1=6$,所以$s(x)$的图象关于点$(0,3)$中心对称. 令$p(x)=\sin x+x$,则$p(-x)=-\sin x-x=-p(x)$,所以$p(x)$为奇函数. 因为$h(x)=s(x)+p(x)$,设$h(x)$在$x=x_0$处取得最大值,则在$x=-x_0$处取得最小值,所以$h(x_0)+h(-x_0)=s(x_0)+s(-x_0)+p(x_0)+p(-x_0)=6$,所以$h(x)$的最大值与最小值的和为 6. 故选 B.

11. 16 【解析】由对勾函数的性质可知$f(x)=x+\frac{9}{x}$在$[1,3]$上单调递减,在$(3,8]$上单调递增,所以$f(x)_{\min}=f(3)=6$. 又因为$f(1)=10$,$f(8)=8+\frac{9}{8}=\frac{73}{8}<10$(**易错:**忽略端点值的比较),所以$f(x)_{\max}=10$,所以$f(x)_{\max}+f(x)_{\min}=10+6=16$.

12. D 【解析】$\left|\ln\frac{1}{4}\right|=\ln 4\in(\ln e,\ln e^2)=(1,2)$,$2^{1.2}>2$,$|\cos 2|\in(0,1)$. 因为定义在$\mathbf{R}$上的偶函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递增,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减(**提示:**偶函数在两个关于原点对称的区间上单调性相反). 因为$|\cos 2|<\left|\ln\frac{1}{4}\right|<2^{1.2}$,所以$f(|\cos 2|)>f\left(\left|\ln\frac{1}{4}\right|\right)>f(2^{1.2})$. 又$a=f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=f\left(\left|\ln\frac{1}{4}\right|\right)$,$b=f(\cos 2)=f(|\cos 2|)$,故$b>a>c$(**方法:**解决比

较大小(最值)问题时,应充分利用奇函数在关于原点对称的两个区间上具有相同的单调性,偶函数在关于原点对称的两个区间上具有相反的单调性的性质),故选 D.

13. A 【解析】已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(-x)=e^{|-x|}+\log_2|-x|=f(x)$,所以函数 $f(x)$ 为偶函数(**关键:**根据函数奇偶性的定义判断出函数 $f(x)$ 为偶函数). 当 $x\in(0,+\infty)$ 时,函数 $f(x)=e^x+\log_2 x$ 单调递增,所以 $a=f\left(\log_2\frac{1}{3}\right)=f(-\log_2 3)=f(\log_2 3)$, $c=f(\log_{\frac{1}{4}}25)=f(-\log_4 25)=f(\log_4 25)$. 因为 $y=\log_2 x$ 在定义域上单调递增,所以 $\log_2 2<\log_2 3<\log_2 4$,即 $1<\log_2 3<2$. 因为 $y=7^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $0<7^{-0.1}<7^0=1$. 因为 $y=\log_4 x$ 在定义域上单调递增,所以 $\log_4 25>\log_4 16=2$,所以 $\log_4 25>\log_2 3>7^{-0.1}>0$. 根据函数 $f(x)=e^x+\log_2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $f(\log_4 25)>f(\log_2 3)>f(7^{-0.1})$,所以 $c>a>b$,故选 A.

14. B 【解析】令 $f(x)=e^x-x-1$, $h(x)=x-\sin x$, $g(x)=\sin x-x+x^2$. 则 $f'(x)=e^x-1$,当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,所以 $f(x)\geqslant f(0)=0$.

所以 $f\left(\frac{1}{e}-1\right)=e^{\frac{1}{e}-1}-\left(\frac{1}{e}-1\right)-1=e^{\frac{1}{e}-1}-\frac{1}{e}>0$,即 $e^{\frac{1}{e}-1}>\frac{1}{e}$.

因为 $h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,且 $h'(x)$ 不恒为零,故 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,因为 $\frac{1}{e}>0$,所以 $h\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}-\sin\frac{1}{e}>h(0)=0$,所以 $\frac{1}{e}>\sin\frac{1}{e}$,则 $e^{\frac{1}{e}-1}>\sin\frac{1}{e}$,即 $a>b$.

又 $g'(x)=\cos x-1+2x$, 令 $u(x)=\cos x-1+2x$,则 $u'(x)=2-\sin x>0$,故 $u(x)$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递增,当 $x>0$ 时, $g'(x)=u(x)>u(0)=0$,故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, 故当 $x>0$ 时, $g(x)>g(0)=0$, 又因为 $\frac{1}{e}>0$, 所以 $g\left(\frac{1}{e}\right)=\sin\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+\left(\frac{1}{e}\right)^2=\sin\frac{1}{e}-\frac{e-1}{e^2}>0$,所以 $\sin\frac{1}{e}>\frac{e-1}{e^2}$,即 $b>c$.

综上, $c<b<a$. 故选 B.

15. A 【解析】当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时, $f(x)=x^\alpha=\sqrt{x}$,定义域为 $[0,+\infty)$,故 $\alpha\neq\frac{1}{2}$;当 $\alpha=1$ 时, $f(x)=x^\alpha=x$,定义域为 $\mathbf{R}$,但是为奇函数,故 $\alpha\neq 1$;当 $\alpha=2$ 时, $f(x)=x^\alpha=x^2$,定义域为 $\mathbf{R}$,且为偶函数,故 $\alpha=2$. 故选 A.

16. A 【解析】因为 $f(1+x)=-f(1-x)$,所以 $f(x+2)=-f(1-(x+1))=-f(-x)$. 因为 $f(2+x)=f(2-x)$,所以 $f(2-x)=-f(-x)$,即 $f(2+x)=-f(x)$,所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数,则 $f(x+2)=f(x-2)$. 因为 $f(2+x)=f(2-x)$,所以 $f(x-2)=f(2-x)$,所以 $f(x)=f(-x)$, $f(x)$ 是偶函数. 故选 A.

一题多解 因为 $f(1+x)=-f(1-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于 $(1,0)$ 中心对称；因为 $f(2+x)=f(2-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，则 $f(x+2)=f(x-2)$. 又 $f(2+x)=f(2-x)$，所以 $f(x-2)=f(2-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，$f(x)$ 是偶函数. 故选 A.

17. D 【解析】由题意知，在函数 $f(x)$ 中，$f(x+y)-[f(x)+f(y)]=2\ 023$，当 $x=y=0$ 时，$f(0)-[f(0)+f(0)]=2\ 023$，解得 $f(0)=-2\ 023$（提示：若函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，则该函数的图象必过原点，即有 $f(0)=0$），故 B 错误.

当 $y=-x$ 时，$f(0)-[f(x)+f(-x)]=2\ 023$，解得 $f(x)+f(-x)=-4\ 046$，无法得到 $f(x)=f(-x)$，故 A 错误.

在函数 $f(x)+2\ 023$ 中，$f(0)+2\ 023=0$，$f(x)+2\ 023+f(-x)+2\ 023=0$，所以 $f(x)+2\ 023$ 是奇函数，故 C 错误，D 正确. 故选 D.

18. C 【解析】因为函数 $f(x)=\cos x\cdot\lg(\sqrt{x^2+m}-x)$ 为奇函数，所以 $f(x)+f(-x)=\cos x\cdot\lg(\sqrt{x^2+m}-x)+\cos(-x)\cdot\lg[\sqrt{(-x)^2+m}-(-x)]=\cos x\cdot\lg(\sqrt{x^2+m}-x)+\cos x\cdot\lg(\sqrt{x^2+m}+x)=\cos x\cdot[\lg(\sqrt{x^2+m}-x)+\lg(\sqrt{x^2+m}+x)]=\cos x\cdot\lg(x^2+m-x^2)=\cos x\cdot\lg m=0$，解得 $m=1$. 当 $m=1$ 时，$f(x)=\cos x\cdot\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$，定义域为 $\mathbf{R}$ 且满足 $f(x)=-f(-x)$，函数 $f(x)$ 为奇函数，所以 $m=1$，故选 C.

一题多解 因为函数 $f(x)=\cos x\cdot\lg(\sqrt{x^2+m}-x)$ 为奇函数，且 $y=\cos x$ 为偶函数，所以函数 $g(x)=\lg(\sqrt{x^2+m}-x)$ 为奇函数，所以 $g(x)+g(-x)=\lg(\sqrt{x^2+m}-x)+\lg(\sqrt{x^2+m}+x)=\lg m=0$，解得 $m=1$. 当 $m=1$ 时，函数 $g(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$，定义域为 $\mathbf{R}$，且满足 $g(x)=-g(-x)$，故 $g(x)$ 为奇函数，所以 $m=1$，故选 C.

19. 1 【解析】函数 $f(x)=\dfrac{a+1}{e^x-1}+1$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $f(x)+f(-x)=0$，即 $\left(\dfrac{a+1}{e^x-1}+1\right)+\left(\dfrac{a+1}{e^{-x}-1}+1\right)=\dfrac{a+1}{e^x-1}-\dfrac{(a+1)e^x}{e^x-1}+2=0$，解得 $a=1$.

20. 8　ln 2 【解析】因为函数 $f(x)=x^3\left(\ln\left|\dfrac{a}{2-x}-2\right|-b\right)$（$a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq0$）是偶函数，则函数 $f(x)$ 对定义域内任意实数恒有 $f(-x)=f(x)$ 成立，即 $-x^3\left(\ln\left|\dfrac{a}{2+x}-2\right|-b\right)=x^3\left(\ln\left|\dfrac{a}{2-x}-2\right|-b\right)$，整理得 $x^3\left(\ln\left|\dfrac{a-4-2x}{2+x}\right|+\ln\left|\dfrac{a-4+2x}{2-x}\right|-2b\right)=0$，即 $x^3\cdot\left(\ln\left|\dfrac{(a-4)^2-4x^2}{4-x^2}\right|-2b\right)=0$，显然 x^3 不恒为 0，因此当 $x\neq0$ 时，

$\ln\left|\frac{(a-4)^2-4x^2}{4-x^2}\right|-2b=0$ 恒成立，而 b 为常数，则必有 $\frac{(a-4)^2-4x^2}{4-x^2}$ 为常数，于是得 $\frac{(a-4)^2}{4}=\frac{-4}{-1}$，又 $a\neq0$，解得 $a=8$，故 $b=\ln 2$，此时 $f(x)=x^3\left(\ln\left|\frac{8}{2-x}-2\right|-\ln 2\right)=x^3\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|$，其定义域为 $\{x\in\mathbf{R}|x\neq-2$ 且 $x\neq2\}$，$f(-x)=-x^3\ln\left|\frac{2-x}{2+x}\right|=x^3\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|=f(x)$，即函数 $f(x)$ 是偶函数，所以 $a=8$，$b=\ln 2$.

21. A 【解析】因为 $f(2x+1)$ 为偶函数，则 $f(-2x+1)=f(2x+1)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则 $f(0)=f(2)$. 因为 $f(x)=f(x+1)-f(x+2)$，所以 $f(0)=f(1)-f(2)$，因为 $f(1)=2$，所以 $f(0)=f(2)=1$，所以 $f(3)=f(2)-f(1)=-1$，$f(4)=f(3)-f(2)=-2$，$f(5)=f(4)-f(3)=-1$，$f(6)=f(5)-f(4)=1$，$f(7)=f(6)-f(5)=2$，所以 $f(x)$ 是以 6 为周期的函数，所以 $f(18)=f(6\times3)=f(0)=1$. 故选 A.

一题多解 （特例法）因为 $f(2x+1)$ 为偶函数，则 $f(-2x+1)=f(2x+1)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，设 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $f(1)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2$ 且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 又 $f(x)+f(x+2)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=\left(4\cos\frac{\pi}{3}x\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{3}x$，$f(x+1)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}x$，所以符合条件 $f(x)=f(x+1)-f(x+2)$，所以 $f(18)=2\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)=1$. 故选 A.

22. C 【解析】定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，由 $f(x)f(x-2)=4$，$f(x)>0$，得 $f(x)=\frac{4}{f(x-2)}$，于是 $f(x+2)=\frac{4}{f(x)}=\frac{4}{\frac{4}{f(x-2)}}=f(x-2)$，即 $f(x+4)=f(x)$，因此函数 $f(x)$ 的周期 $T=4$（**提示：**若 $f(x+a)=f(x-a)$，则函数的周期为 $2a$）. 又 $f(2\ 024)=1$，所以 $f(0)=f(4)=f(2\ 024)=1$. 又 $f(x)$ 为偶函数，$f(1)f(-1)=4$，所以 $f(3)=f(-1)=f(1)=2$. 由 $f(2)f(0)=4$，得 $f(2)=4$，所以 $\sum_{i=1}^{2\ 023}f(i)=506\sum_{i=1}^{4}f(i)-f(2\ 024)=506\times(2+4+2+1)-1=4\ 553$，故选 C.

23. ACD 【解析】对于 A，方法一：由 $f(x+1)$ 为奇函数得 $f(-x+1)=-f(x+1)$，即 $f(-x)+f(x+2)=0$，故 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 中心对称，故 A 正确.

方法二：由于$f(x+1)$为奇函数，其图象关于原点对称，将$y=f(x+1)$的图象向右平移一个单位长度后得到函数$y=f(x)$的图象，所以$f(x)$的图象关于点$(1,0)$中心对称，故A正确.

对于B，由$f(-x)=f(x)$，$f(-x)+f(x+2)=0$得$f(x)=-f(2+x)$，所以$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，即$f(x)$是周期为4的函数，故B错误.

对于C，由$f(-x+1)=-f(x+1)$，令$x=0$，得$f(1)=-f(1)$，所以$f(1)=0$，所以$f(-1)=f(1)=0$，故C正确.

对于D，当$x\in[0,1)$时，$f(x)=x^2$，因为$f(x)$的周期为4，所以$f\left(\frac{7}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，故D正确. 故选ACD.

考点 8　基本初等函数

1. C　【解析】因为$x\log_2 3=1$，则$\log_2 3^x=1$，因此$3^x=2$，所以$3^x+3^{-x}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. 故选C.

2. ABD　【解析】对于A，由于$a>0$，则$\frac{a^2}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}=\frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}=a^{2-\frac{5}{6}}=a^{\frac{7}{6}}$，故A正确；

对于B，由于$3a+2b=1$，则$\frac{9^a\cdot 3^b}{\sqrt{3^a}}=\frac{3^{2a+b}}{3^{\frac{a}{2}}}=3^{\frac{1}{2}(3a+2b)}=\sqrt{3}$，故B正确；

对于C，$\frac{1}{\log_{\frac{1}{4}}9}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}3}=\log_{\frac{1}{9}}4+\log_{\frac{1}{3}}5=\log_9 4+\log_3 5=\log_3 2+\log_3 5$$\left(\text{提示：}\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b\right)$$=\log_3 10\neq\lg 3$，故C错误；

对于D，由于$\log_a 2=m$，$\log_a 3=n$，$a>0$且$a\neq1$，则$a^m=2$，$a^n=3$，故$a^{m+2n}=a^m\cdot(a^n)^2=18$，故D正确.

综上，故选ABD.

3. A　【解析】若函数$f(x)$的图象经过点$(-1,1)$，则$f(-1)=(-1)^{\alpha}=1$，因为$\alpha\in\left\{-1,\frac{1}{2},1,2,3\right\}$，所以$\alpha=2$，所以$f(x)=x^2$，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减；而$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，函数$f(x)$的图象不一定经过点$(-1,1)$，如$f(x)=x^{-1}$. 所以"函数$f(x)$的图象经过点$(-1,1)$"是"函数$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减"的充分不必要条件. 故选A.

4. A　【解析】因为函数$f(x)=(m^2-m-5)x^{m^2-6}$是幂函数，所以$m^2-m-5=1$，解得$m=-2$或$m=3$（关键：根据幂函数的系数为1建立方程求出参数m的值）. 因为对任意$x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且$x_1\neq x_2$，都满足$(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$，即对任意$x_1>x_2$，都有$f(x_1)>f(x_2)$，故幂函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以$m^2-6>0$，所以$m=3$，则$f(x)=x^3$，易知$f(x)$为$\mathbf{R}$上的奇函数. 由$a+b>0$得$a>$

$-b$，所以 $f(a)>f(-b)=-f(b)$，所以 $f(a)+f(b)>0$，故选 A.

5. C 【解析】因为函数 $g(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数（**提示：**指数函数 $g(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq1)$，当 $0<a<1$ 时，指数函数 $g(x)$ 单调递减，当 $a>1$ 时，指数函数 $g(x)$ 单调递增），根据复合函数的单调性可知，要使函数 $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x^2-ax}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则函数 $h(x)=2x^2-ax$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 根据二次函数的性质可知，函数 $h(x)=2x^2-ax=2\left(x-\dfrac{a}{4}\right)^2-\dfrac{a^2}{8}$ 在 $\left(\dfrac{a}{4},+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $\dfrac{a}{4}\leqslant1$（**提示：**对于二次函数，当函数的图象开口向上时，函数在对称轴的右侧单调递增），即 $a\leqslant4$，故选 C.

6. BD 【解析】对于 A，由 $e^x-e^{-x}\neq0$，得 $x\neq0$，故 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq0\}$，故 A 错误；

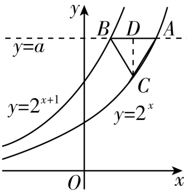
对于 B，函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，且 $f(-x)=\dfrac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数，故 B 正确；

对于 C，$f(-1)=\dfrac{e^{-1}+e}{e^{-1}-e}=\dfrac{e^2+1}{1-e^2}<0$，$f(1)=\dfrac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}}=\dfrac{e^2+1}{e^2-1}>0$，

故 $f(-1)<f(1)$，故 $f(x)$ 在定义域上不是减函数，故 C 错误；

对于 D，$f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=1+\dfrac{2}{e^{2x}-1}(x\neq0)$，令 $t=e^{2x}>0$，$y=1+\dfrac{2}{t-1}$，由于 $t=e^{2x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$y=1+\dfrac{2}{t-1}$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上分别单调递减，故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上分别单调递减，且 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-1$，$x\to0^-$ 时，$f(x)\to-\infty$，$x\to0^+$ 时，$f(x)\to+\infty$，$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to1$，故函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，无最小值，无最大值，故 D 正确. 故选 BD.

7. $\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 【解析】由 $2^x=a$，得 $x=\log_2a$，即点 $A(\log_2a,a)$，由 $2^{x+1}=a$，得 $x=\log_2a-1$，即点 $B(\log_2a-1,a)$（**关键：**根据指数式与对数式的互化求出点 A,B 的坐标），所以 $|AB|=1$，



如图所示，取 AB 的中点 D，连接 CD，由 $\triangle ABC$ 为等边三角形，得 $CD\perp AB$，$|CD|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

易知点 C 不可能在直线 l 上方，因此点 $C\left(\log_2a-\dfrac{1}{2},a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，又点 C 在函数 $y=2^x$ 的图象上，所以 $a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2^{\log_2a-\frac{1}{2}}$，即 $a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$（**提示：**$\log_2a-\dfrac{1}{2}=\log_2a-\log_22^{\frac{1}{2}}=\log_2\dfrac{a}{\sqrt{2}}$），解得 $a=\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，所

以满足题意的 a 的值为$\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

8. B 【解析】$f(x)=\log_2 x+2^x$ 的定义域为$(0,+\infty)$，且$f(2)=5$，所以不等式$f(3x-2)<5$ 即 $f(3x-2)<f(2)$. 又因为 $f(x)=\log_2 x+2^x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增，所以 $0<3x-2<2$，解得$\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$，故 x 的取值范围为$\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$. 故选 B.

9. BCD 【解析】对于 A，当 $a>1$ 时，由 $\log_a 3<1$，得 $\log_a 3<\log_a a$，则 $a>3$；当 $0<a<1$ 时，由 $\log_a 3<1$，得 $\log_a 3<\log_a a$，则 $a<3$，又 $0<a<1$，所以 $0<a<1$. 综上，若 $\log_a 3<1$，则 $a>3$ 或 $0<a<1$，故 A 错误.

对于 B，因为 $0<\frac{1}{3}<\frac{\pi}{6}$，所以 $0<\sin\frac{1}{3}<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，

所以 $\log_2\sin\frac{1}{3}<\log_2\frac{1}{2}=-1$，所以 $-\log_2\sin\frac{1}{3}>1$. 因为 $-\frac{1}{2}<-\sin\frac{1}{3}<0$，所以 $2^{-\frac{1}{2}}<2^{-\sin\frac{1}{3}}<2^0=1$，即$\frac{\sqrt{2}}{2}<2^{-\sin\frac{1}{3}}<1$.

所以 $\sin\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}<2^{-\sin\frac{1}{3}}<1<-\log_2\sin\frac{1}{3}$，所以 $b>c>a$，故 B 正确.

对于 C，令 $2^x=18^y=9^{xy}=t>0$，则 $x=\log_2 t$，$y=\log_{18}t$，$xy=\log_9 t$，所以 $\log_2 t\cdot\log_{18}t=\log_9 t$，所以$\frac{\lg t}{\lg 2}\cdot\frac{\lg t}{\lg 18}=\frac{\lg t}{\lg 9}$，即 $\lg t=\frac{\lg 2\cdot\lg 18}{\lg 9}$. 所以 $x-y=\log_2 t-\log_{18}t=\frac{\lg t}{\lg 2}-\frac{\lg t}{\lg 18}=\frac{\lg t(\lg 18-\lg 2)}{\lg 2\cdot\lg 18}=\frac{\lg 2\cdot\lg 18}{\lg 9}\cdot\frac{(\lg 18-\lg 2)}{\lg 2\cdot\lg 18}=\frac{\lg 18-\lg 2}{\lg 9}=\frac{\lg 9}{\lg 9}=1$，故 C 正确.

对于 D，令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$. 当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$. 所以 $f(x)$ 在$(0,\mathrm{e})$上单调递增，在$(\mathrm{e},+\infty)$上单调递减. 因为 $\mathrm{e}<3<4$，所以$f(\mathrm{e})>f(3)>f(4)$，所以$\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}>\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 4}{4}$，因为$\frac{\ln 4}{4}=\frac{2\ln 2}{4}=\frac{\ln 2}{2}$，所以$\frac{1}{\mathrm{e}}>\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 2}{2}$，所以 $a<c<b$，故 D 正确.

故选 BCD.

10. $\lg x$（答案不唯一） 【解析】对于函数 $f(x)=\lg x(x>0)$（关键：根据对数函数的运算法则设出特殊函数），$f(xy)=\lg(xy)=\lg x+\lg y=f(x)+f(y)$，且当 $x>y>0$ 时，$f(x)>f(y)$ 也成立，所以函数 $f(x)=\lg x$ 满足题意（答案不唯一）.

考点 9 函数的图象

1. D 【解析】对于 A，由对数函数图象可知 $a>1$，又函数 $g(x)=ax^2-2x$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{1}{a}<1$，$g(x)=0$ 的两个根分别为 $0,\frac{2}{a}$，由图知 $0<\frac{2}{a}<1$，从而 $a>2$，故 A 有可能.

对于 B，由对数函数图象可知 $a>1$，又函数 $g(x)=ax^2-2x$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{1}{a}<1$，$g(x)=0$ 的两个根分别为 $0,\frac{2}{a}$，由图知$\frac{2}{a}>1$，从而 $1<a<2$，故 B 有可能.

对于 C，由对数函数图象可知 $0<a<1$，又函数 $g(x)=ax^2-2x$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{1}{a}>1$，$g(x)=0$ 的两个根分别为 $0,\frac{2}{a}$，由图知 $\frac{2}{a}>1$，解得 $0<a<2$，从而 $0<a<1$，故 C 有可能.

对于 D，由对数函数图象可知 $0<a<1$，又函数 $g(x)=ax^2-2x$ 图象的对称轴方程为 $x=\frac{1}{a}<1$，与 $0<a<1$ 矛盾，故 D 不可能. 故选 D.

2. ABD 【解析】因为函数 $f(x)=|\ln|x+a||$ 的定义域为 $(-\infty,-a)\cup(-a,+\infty)$，故 C 错误；

当 $a=0$ 时，$f(x)=|\ln|x||$，将 $y=\ln x$ 的图象关于 y 轴对称到 y 轴左侧，y 轴右侧的图象不变，再把 x 轴下方的图象翻折上去，可得 $f(x)=|\ln|x||$ 的图象，故 D 正确；

当 $a=-3$ 时，将 $y=|\ln|x||$ 的图象向右平移 3 个单位长度得到 $f(x)=|\ln|x-3||$ 的图象，故 B 正确；

当 $a=3$ 时，将 $y=|\ln|x||$ 的图象向左平移 3 个单位长度得到 $f(x)=|\ln|x+3||$ 的图象，故 A 正确. 故选 ABD.

3. C 【解析】易知函数 $f(x)=\frac{\cos \pi x}{x}$ 是奇函数，图象关于原点对称，故排除 A；在原点右侧附近，$f(x)$ 的函数值大于 0，故排除 D；函数 $f(x)=\frac{\cos \pi x}{x}$ 在区间 $[-4,4]$ 上有零点 $\pm\frac{1}{2},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{5}{2},\pm\frac{7}{2}$，共计 8 个，故排除 B. 故选 C.

4. B 【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{2(-x)^3\cos(-x)}{e^{-x}+e^x}=-\frac{2x^3\cos x}{e^x+e^{-x}}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，故 C，D 错误. 当 $x\in(0,2\pi)$ 时，$2x^3>0$，$e^x+e^{-x}>0$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$\cos x>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$\cos x<0$，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$f(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)<0$，故 A 错误，B 正确. 故选 B.

快解 因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{2(-x)^3\cos(-x)}{e^{-x}+e^x}=-\frac{2x^3\cos x}{e^{-x}+e^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，故 C，D 错误. 因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\left(\frac{\pi}{6}\right)^3\cos\frac{\pi}{6}}{e^{\frac{\pi}{6}}+e^{-\frac{\pi}{6}}}>0$，故 A 错误，B 正确. 故选 B.

5. D 【解析】由题图可得，函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且当 $x\to+\infty$ 时，$y\to0$，当 $x\to-\infty$ 时，$y\to0$.

对于 A，$f(x)+g(x)=x^2+2^x-2^{-x}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故 A 不符合题意；

对于 B，$f(x)\cdot g(x)=x^2(2^x-2^{-x})$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，故 B 不符合题意；

对于 C，$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{2^x-2^{-x}}{x^2}=\frac{2^x-\frac{1}{2^x}}{x^2}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{g(x)}{f(x)}\to+\infty$，故 C 不符合题意；

对于 D，$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2}{2^x-2^{-x}}=\frac{x^2}{2^x-\frac{1}{2^x}}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{f(x)}{g(x)}\to 0$，故 D 符合题意. 故选 D.

6. B 【解析】由题图可知函数$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq0\}$，其图象关于坐标原点对称，故函数$f(x)$是奇函数. 对于 A 选项：$f(-x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{-x}-1}\right)\cdot\sin(-x)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{x}-1}\right)\cdot\sin x=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数，故排除 A；

对于 D 选项：$f(\pi)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\pi}-1}\right)\cdot|\sin\pi|=0$，由题图可知$f(\pi)\neq0$，故排除 D；

对于 C 选项：当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\frac{1}{2}+\frac{1}{e^x-1}>0$，$\cos x$ 的符号不确定，由题图可知，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant0$，故排除 C. 故选 B.

考点 10　函数与方程

1. B 【解析】易知$f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增且连续. 因为$f(-4)=\frac{1}{16}-\frac{4}{3}<0$，$f(-2)=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}<0$，$f(-1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}>0$，所以 $x_0\in(-2,-1)$. 故选 B.

2. C 【解析】因为函数$f(x)=5-2x-\lg(2x+1)$在$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减，所以函数$f(x)$最多只有一个零点. 因为$f(0)=5-\lg 1=5>0$，$f(1)=3-\lg 3>0$，$f(2)=1-\lg 5>0$，$f(3)=-1-\lg 7<0$，所以函数$f(x)=5-2x-\lg(2x+1)$的零点所在的区间是$(2,3)$. 故选 C.

3. B 【解析】函数$f(x)=(\sqrt{e})^x$ 的图象与函数 $g(x)=2-\ln x$ 的图象交点的横坐标即为函数 $h(x)=f(x)-g(x)=(\sqrt{e})^x+\ln x-2(x>0)$的零点，因为 $h'(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{e})^x+\frac{1}{x}>0$，所以 $h(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增. 又图象连续，且 $h(1)=\sqrt{e}+\ln 1-2=\sqrt{e}-2<0$，$h(2)=(\sqrt{e})^2+\ln 2-2=e+\ln 2-2>0$，所以 $h(1)\cdot h(2)<0$，所以 $h(x)$ 的零点所在的区间为$(1,2)$. 所以函数$f(x)=(\sqrt{e})^x$ 的图象与函数 $g(x)=2-\ln x$ 的图象交点横坐标所在的区间为$(1,2)$，故选 B.

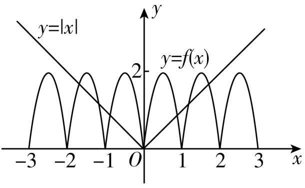
4. B 【解析】因为函数 $y=81\ln x$ 与 $y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}-80$ 在$(0,+\infty)$上均单调递增，所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. 因为$f(2)=81\ln 2-83<0$，$f(3)=81\ln 3-81>0$，$f(2)\cdot f(3)<0$，所以函数$f(x)$的零点位于区间$(2,3)$内，故 $k=2$. 故选 B.

5. C 【解析】因为函数$f(x)=\ln x+2x-5$ 在$(0,+\infty)$上单调递增（提示：由于函数 $y=\ln x$ 与函数 $y=2x-5$ 在定义域内均为增函数，根据增函数+增函数=增函数，知$f(x)$为增函数），且$f(2)=$

$\ln 2-1<0, f(3)=\ln 3+1>0$，即 $x_0\in(2,3)$，所以 $k=2$，故选 C.

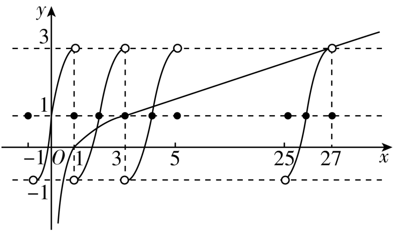
6. $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$（答案不唯一） 【解析】因为 $y=\dfrac{1}{2^x}, y=-x^{\frac{1}{3}}$ 都是减函数，所以 $f(x)=\dfrac{1}{2^x}-x^{\frac{1}{3}}$ 是减函数，又 $f(1)=-\dfrac{1}{2}<0, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<0, f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}>0$，即 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{1}{3}\right)<0$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 上有零点，且 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^x}-x^{\frac{1}{3}}$ 的零点属于 $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$（答案不唯一）.

7. C 【解析】因为 $f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 2 的函数，且 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，根据 $x\in[0,1]$ 时的解析式，结合函数性质，可以画出 $f(x)$ 的大致图象如图所示. 函数 $y=f(x)-|x|$ 的零点个数，等价于方程 $f(x)=|x|$ 的根的个数，即函数 $f(x)$ 与 $y=|x|$ 图象的交点个数，观察图象可得零点个数为 7，故选 C.



8. A 【解析】令 $x=-1$，得 $f(1)+f(-1)=f(1)$，即 $f(-1)=0$，因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(1)=0$，则 $f(x+2)+f(x)=f(1)=0$，则 $f(x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数. 因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $[-2,0]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在一个周期内有两个零点，故 $f(x)$ 在区间 $[-100,100]$ 上的零点个数为 $50\times2=100$. 故选 A.

9. C 【解析】由 $y=f(x)-1$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，得 $f(-x)-1=-[f(x)-1]$，即 $f(x)+f(-x)=2$，又 $f(x)+f(2-x)=2$，则 $f(2-x)=f(-x)$，即 $f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 2 的函数. 又 $f(x)+f(2-x)=2$，将 $x=1$ 代入得 $f(1)+f(1)=2$，即 $f(1)=1$. 当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=2^x-\dfrac{1}{2^x}+\sin\dfrac{\pi}{6}x+1$，则 $f(0)=1$，所以当 $x\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)=1$. 又当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=2^x-\dfrac{1}{2^x}+\sin\dfrac{\pi}{6}x+1$ 单调递增，且 $-1<f(x)<3$. 故可作出函数 $y=f(x), y=\log_3 x$ 的大致图象如图所示.



而集合 A 中的元素个数为函数 $y=f(x)$ 与 $y=\log_3 x$ 图象交点的个数，由以上分析结合函数 $y=\log_3 x$ 性质可知，3 为集合 A 中的一个元素，且 $y=f(x)$ 与 $y=\log_3 x$ 在 $(1,3),(3,5),\cdots,(23,25)$ 中各有一个交点，所以集合 $A=\{x\mid f(x)=\log_3 x\}$ 中的元素个数为 13. 故选 C.

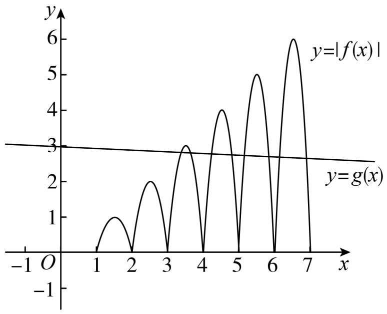
10. C 【解析】设 $g(x)=3-\dfrac{x}{50}$，当 $0<x<1$ 时，$[x]=0$；当 $1\leqslant x<2$

时，$[x]=1$；当 $2\leqslant x<3$ 时，$[x]=2$；当 $3\leqslant x<4$ 时，$[x]=3$；当 $4\leqslant x<5$ 时，$[x]=4$；…，

所以 $f(x)=[x]\cdot\sin\pi x=\begin{cases}0,0<x<1,\\ \sin\pi x,1\leqslant x<2,\\ 2\sin\pi x,2\leqslant x<3,\\ 3\sin\pi x,3\leqslant x<4,\\ 4\sin\pi x,4\leqslant x<5,\\ 5\sin\pi x,5\leqslant x<6,\\ \cdots,\end{cases}$

则 $|f(x)|=\begin{cases}0,0<x<1,\\ -\sin\pi x,1\leqslant x<2,\\ 2\sin\pi x,2\leqslant x<3,\\ -3\sin\pi x,3\leqslant x<4,\\ 4\sin\pi x,4\leqslant x<5,\\ -5\sin\pi x,5\leqslant x<6,\\ \cdots,\end{cases}$

令 $g(x)\geqslant0$，解得 $x\leqslant150$，画出 $y=|f(x)|$ 与 $y=g(x)$ 的部分图象如图所示.



由图可知 $y=|f(x)|$ 与 $y=g(x)$ 的图象在每个区间 $[k,k+1]$ $(3\leqslant k\leqslant149$ 且 $k\in\mathbf{Z})$ 上均有 2 个交点，所以交点总数为 $(150-3)\times2=294$，所以方程 $|f(x)|=3-\frac{x}{50}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的实根个数为 294. 故选 C.

11. B 【解析】由题意，函数 $f(x)=|\sin^2x-\sin|x||$ 满足 $f(-x)=f(x)$，所以函数 $f(x)=|\sin^2x-\sin|x||$ 为偶函数. 当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=|\sin^2x-\sin x|=\sin x-\sin^2x$，因为 $f(x)-\frac{1}{6}=0$，即 $\sin^2x-\sin x+\frac{1}{6}=0$，设 $t=\sin x\in[0,1]$，可得 $t^2-t+\frac{1}{6}=0$，解得 $t_1=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$，$t_2=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$，即 $\sin x=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ 或 $\sin x=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$，此时共有 4 个解；当 $x\in(\pi,2\pi]$ 时，$f(x)=|\sin^2x-\sin x|=\sin^2x-\sin x$，因为 $f(x)-\frac{1}{6}=0$，即 $\sin^2x-\sin x-\frac{1}{6}=0$，设 $m=\sin x\in[-1,0]$，可得 $m^2-m-\frac{1}{6}=0$，解得 $m_1=\frac{3-\sqrt{15}}{6}$，$m_2=\frac{3+\sqrt{15}}{6}>0$（舍去），即 $\sin x=\frac{3-\sqrt{15}}{6}$，此时共有 2 个解. 所以方程 $f(x)-\frac{1}{6}=0$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的根的个数为 $(4+2)\times2=12$. 故选 B.

12. ABD 【解析】当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=-xe^x$，$f'(x)=-(x+1)e^x$，令

$f'(x)=0$,得 $x=-1$,当 $x<-1$ 时,故 $f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,当 $-1<x<0$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,$f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值,$f(-1)=\frac{1}{e}$,$f(0)=0$. 当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时,$f(x)=\frac{(2x-1)e^x}{x-1}$ $(x\neq1)$,$f'(x)=\frac{2x\left(x-\frac{3}{2}\right)e^x}{(x-1)^2}$,令 $f'(x)=0$,得 $x=\frac{3}{2}$,当 $0<x<1$ 或 $1<x<\frac{3}{2}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,当 $x>\frac{3}{2}$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增,$f(x)$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 处取得极小值,$f\left(\frac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}$. 当 $x\to0^+$ 时,$f(x)\to1$,当 $x=1$ 时,$f(x)$ 不存在,所以函数 $f(x)$ 的大致图象如图①(**关键:**通过求导讨论函数的单调性画出函数 $f(x)$ 的大致图象,在画图时也应该尽量准确,能表达出关键点之间的关系). 令 $f(x)=t$,则 $h(x)=t^2-at+\frac{1}{16}$(**提示:**在讨论含参二次函数 $h(x)$ 的零点时,需对照 $f(x)$ 的图象和 a 的取值范围分类讨论).

对于 A,若关于 t 的方程仅有 1 个解,则 $\Delta=a^2-\frac{1}{4}=0$,解得 $a=\pm\frac{1}{2}$,

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时,令 $t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{16}=0$,即 $\left(t+\frac{1}{4}\right)^2=0$,解得 $t=-\frac{1}{4}$,

由图①知当 $a=-\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=-\frac{1}{4}$ 仅有 1 个解,

当 $a=\frac{1}{2}$ 时,令 $t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{16}=0$,即 $\left(t-\frac{1}{4}\right)^2=0$,解得 $t=\frac{1}{4}$,由图①可知 $f(x)=\frac{1}{4}$ 有 3 个解,即 $h(x)$ 有 3 个零点,故选项 A 正确.

对于 B,若关于 t 的方程有 2 个解,则 $\Delta=a^2-\frac{1}{4}>0$,解得 $a>\frac{1}{2}$ 或 $a<-\frac{1}{2}$,不妨设 2 个解分别为 t_1,t_2,且 $t_1<t_2$,

则 $t_1+t_2=a$,$t_1\cdot t_2=\frac{1}{16}>0$,即 t_1,t_2 必定同号并且都不为 0.

若使原函数有 4 个零点,则情况如下:

①$t_1=0$,$t_2=\frac{1}{e}$ 或 $t_2>4e^{\frac{3}{2}}$,此种情况与 $t_1\cdot t_2=\frac{1}{16}$ 矛盾,故舍去;

②$t_1<0$,$t_2\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$,此种情况与 $t_1\cdot t_2=\frac{1}{16}$ 矛盾,故舍去;

③$0<t_1<\frac{1}{e}$,$t_2=4e^{\frac{3}{2}}$;

④$0<t_1<\frac{1}{e}$,$\frac{1}{e}<t_2<1$.

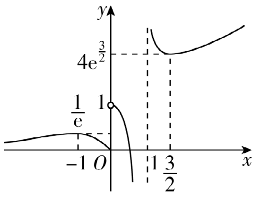
若情况③成立,即 $t_1\cdot4e^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{16}$,则 $t_1=\frac{1}{64e^{\frac{3}{2}}}$,$a=\frac{1}{64e^{\frac{3}{2}}}+4e^{\frac{3}{2}}>\frac{1}{2}$,满足题意,即存在 a,使 $h(x)$ 有 4 个零点,故选项 B 正确.

对于 C，若使原函数有 5 个零点，则必有 $0<t_1<\frac{1}{e}$，$t_2>4e^{\frac{3}{2}}$，则 $t^2-at+\frac{1}{16}=0$ 的两根分别落在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 和 $(4e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 内，作出函数 $y=x^2-ax+\frac{1}{16}$ 的大致图象如图②.

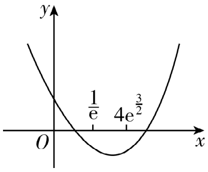
由 $\begin{cases}\Delta=a^2-\frac{1}{4}>0,\\ \frac{1}{e^2}-a\cdot\frac{1}{e}+\frac{1}{16}<0,\\ 16e^3-a\cdot 4e^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{16}<0,\\ \frac{1}{e}<\frac{a}{2}<4e^{\frac{3}{2}}\end{cases}$ 可得 $\frac{1}{2}<\frac{2}{e}<\frac{1}{64e^{\frac{3}{2}}}+4e^{\frac{3}{2}}<a<8e^{\frac{3}{2}}$，存在 a，使 $h(x)$ 有 5 个零点，故选项 C 错误.

对于 D，若原函数有 6 个零点，则 $0<t_1<\frac{1}{e}$，$0<t_2<\frac{1}{e}$，作出函数 $y=x^2-ax+\frac{1}{16}$ 的大致图象如图③.

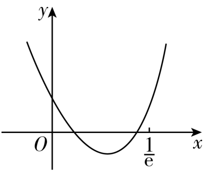
由 $\begin{cases}\Delta=a^2-\frac{1}{4}>0,\\ 0<\frac{a}{2}<\frac{1}{e},\\ \frac{1}{e^2}-a\cdot\frac{1}{e}+\frac{1}{16}>0,\end{cases}$ 且 $\frac{2}{e}>\frac{1}{e}+\frac{e}{16}>\frac{1}{3}+\frac{2.7}{16}=\frac{241}{480}>\frac{1}{2}$，可得 $\frac{1}{2}<a<\frac{1}{e}+\frac{e}{16}$，故选项 D 正确.



图①



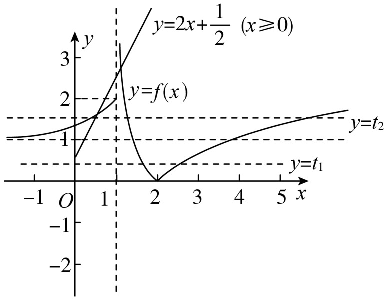
图②



图③

综上，故选 ABD.

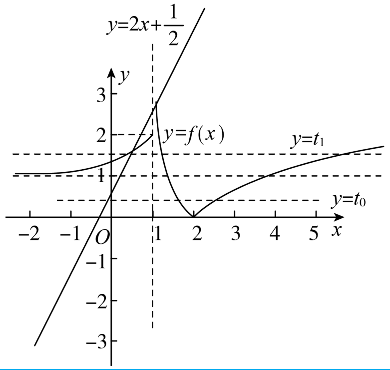
13. 5 【**解析**】作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



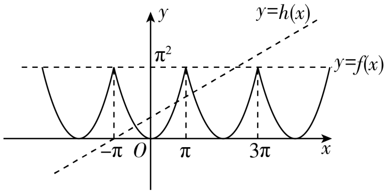
令 $f(x)=t(t\geqslant 0)$，则函数 $F(x)=f(t)-2t-\frac{1}{2}$，令 $f(t)-2t-\frac{1}{2}=0$，得 $f(t)=2t+\frac{1}{2}$. $f(t)=2t+\frac{1}{2}$ 的根的个数，即为函数 $y=2t+\frac{1}{2}$ 与 $y=f(t)$，$t\geqslant 0$ 的图象的交点个数. 作出 $y=2x+\frac{1}{2}(x\geqslant 0)$

的图象. 因为 $f(0)=\frac{1}{e}+1>\frac{1}{2}$, $f(1)=2<\frac{5}{2}$, 所以方程 $f(t)=2t+\frac{1}{2}$ 的一个根 $t_1\in(0,1)$. 由图可知, 方程 $f(t)=2t+\frac{1}{2}$ 的另一个根 $t_2\in(1,2)$. 函数 $f(x)$ 与 $y=t_1$ 的图象有 2 个交点, 所以 $f(x)=t_1$ 有 2 个实根; 函数 $f(x)$ 与 $y=t_2$ 的图象有 3 个交点, 所以 $f(x)=t_2$ 有 3 个实根, 所以方程 $F(x)=0$ 共有 5 个实根, 即函数 $F(x)$ 有 5 个零点.

一题多解 作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示. 令 $f(x)=t$, 则函数 $F(x)=f(t)-2t-\frac{1}{2}$, 令 $f(t)-2t-\frac{1}{2}=0$, 得 $f(t)=2t+\frac{1}{2}$. 当 $t\leqslant 1$ 时, $e^{t-1}+1=2t+\frac{1}{2}$, 即 $e^{t-1}=2t-\frac{1}{2}$, 设 $m=t-1\ (m\leqslant 0)$, 则 $e^m=2m+\frac{3}{2}$. 令 $g(m)=e^m-2m-\frac{3}{2}\ (m\leqslant 0)$, 则 $g'(m)=e^m-2<0$, 所以 $g(m)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减. 因为 $g(0)=-\frac{1}{2}<0$, $g(-1)=\frac{1}{e}+\frac{1}{2}>0$, 所以 $g(m)$ 在 $(-\infty,0]$ 上有且仅有一个零点 m_0, $m_0\in(-1,0)$, 则 $e^{t-1}=2t-\frac{1}{2}$ 有且仅有一个实根 t_0, $t_0\in(0,1)$. 当 $t>1$ 时, $|\ln(t-1)|=2t+\frac{1}{2}$. 当 $1<t<2$ 时, $\ln(t-1)+2t+\frac{1}{2}=0$, 令 $h(t)=\ln(t-1)+2t+\frac{1}{2}$, 易知 $h(t)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增, 当 $t\to1^+$ 时, $h(t)\to-\infty$, 当 $t=2$ 时, $h(2)=\frac{9}{2}>0$, 所以 $h(t)$ 在 $(1,2)$ 上有且仅有一个零点 t_1, $t_1\in(1,2)$. 当 $t>2$ 时, 结合函数图象可知 $\ln(t-1)=2t+\frac{1}{2}$ 无解, 所以方程 $f(t)=2t+\frac{1}{2}$ 有两个根 t_0, t_1. 由图象得, $f(x)$ 与 $y=t_0$ 的图象有 2 个交点, 所以 $f(x)=t_0$ 有 2 个实根, $f(x)$ 与 $y=t_1$ 的图象有 3 个交点, 所以 $f(x)=t_1$ 有 3 个实根, 所以方程 $F(x)=0$ 共有 5 个实根, 即函数 $F(x)$ 有 5 个零点.

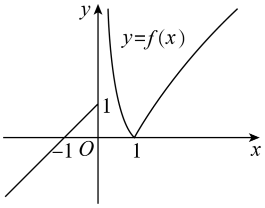


14. A 【解析】令函数 $h(x)=a(x+\pi)$, 则 $h(x)$ 的图象是过点 $(-\pi,0)$, 斜率为 a 的直线. 由 $f(2\pi-x)=f(x)$ 可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称, 又 $f(x)$ 为偶函数, 可画出 $f(x)$ 和 $h(x)$ 在同一坐标系下的大致图象(如图为 $a>0$ 时的情况)如图所示.



由题知 $g(x)$ 有且仅有三个零点，则 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的图象有且仅有三个交点. 当 $a=0$ 时，显然不成立；当 $a>0$ 时，由图可得 $\begin{cases}h(\pi)=2a\pi<\pi^2,\\h(3\pi)=4a\pi>\pi^2,\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{2}$；当 $a<0$ 时，由对称性知 $-\frac{\pi}{2}<a<-\frac{\pi}{4}$. 综上，$a$ 的取值范围是 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，故选 A.

15. C 【解析】设函数 $h(x)=x-\frac{1}{x}$，$x>0$，则 $h'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$h(1)=0$，作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



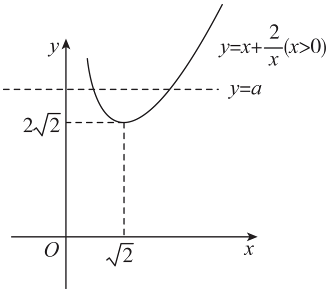
令 $t=f(x)$，则 $t^2+(m-4)t+2(2-m)=0$，则 $t_1=2$，$t_2=2-m$. 由图可知，直线 $y=2$ 与 $f(x)$ 的图象有 2 个交点，则 $0<2-m\leqslant 1$，解得 $1\leqslant m<2$，故选 C.

16. CD 【解析】当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)<0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上无零点，所以当 $x>0$ 时，$f(x)$ 有三个零点，即 $x|x-a|=2$ 有三个不相等的正根，解得 $a=x-\frac{2}{x}$ 或 $a=x+\frac{2}{x}$. 当 $x>0$ 时，$y=x-\frac{2}{x}$ 单调递增，且 $x-\frac{2}{x}\in\mathbf{R}$，则方程 $a=x-\frac{2}{x}$ 有一个正根 x_1，则方程 $a=x+\frac{2}{x}$ 要有两个不相等的正根 $x_2,x_3(x_2<x_3)$，且 $x_2\neq x_1$，$x_3\neq x_1$.

方法一：若 $x^2-ax+2=0$ 有两个正根，则 $\begin{cases}\Delta=a^2-8>0,\\x_2+x_3=a>0,\end{cases}$ 解得 $a>2\sqrt{2}$，排除 A，B. 当 $a=3$ 时，令 $f(x)=0$，得 $x_1=\frac{\sqrt{17}+3}{2}$，$x_2=1$，$x_3=2$，符合题意. 当 $a=4$ 时，令 $f(x)=0$，得 $x_1=2+\sqrt{6}$，$x_2=2-\sqrt{2}$，$x_3=2+\sqrt{2}$，符合题意. 故选 CD.

方法二：若方程 $a=x+\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不相等的实根，即直线 $y=a$ 与 $y=x+\frac{2}{x}(x>0)$ 的图象有两个交点.

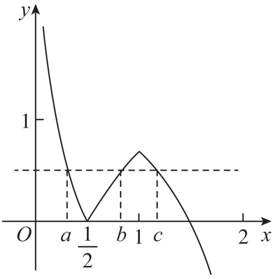
作出 $y=x+\frac{2}{x}(x>0)$ 的大致图象，如图所示.



由图象可以看出，当 $a>2\sqrt{2}$ 时，方程 $a=x+\frac{2}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两

个不相等的实根，排除 A，B. 当 $a=3$ 时，令 $f(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{\sqrt{17}+3}{2}$，$x_2=1$，$x_3=2$，符合题意. 当 $a=4$ 时，令 $f(x)=0$，得 $x_1=2+\sqrt{6}$，$x_2=2-\sqrt{2}$，$x_3=2+\sqrt{2}$，符合题意. 故选 CD.

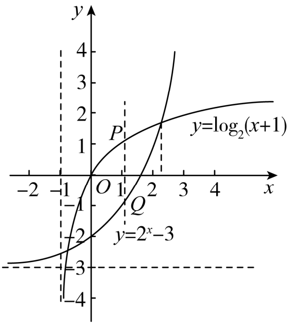
17. BC 【解析】因为 $\ln(2-x)+\ln 2=\ln[2(2-x)]$，所以 $y=\ln 2x$ 与 $y=\ln(2-x)+\ln 2$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示，所以 $b+c=2$.



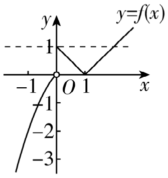
因为 $|\ln 2a|=|\ln 2b|$，即 $-\ln 2a=\ln 2b$，所以 $\ln 4ab=0$，所以 $ab=\dfrac{1}{4}$.

因为 $\dfrac{1}{2}<b<1$，即 $\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{4a}<1$，所以 $\dfrac{1}{4}<a<\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ac}=\dfrac{a+b+c}{abc}=\dfrac{a+2}{\frac{c}{4}}=\dfrac{4(a+2)}{2-\frac{1}{4a}}=\dfrac{16a(a+2)}{8a-1}$. 设 $t=8a-1$，则 $t\in(1,3)$，所以 $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{17}{t}+18\right)$，因为 $h(x)=x+\dfrac{17}{x}$ 在 $(1,3)$ 上单调递减，所以 $h(t)\in(h(3),h(1))=\left(\dfrac{26}{3},18\right)$，所以 $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}=\dfrac{1}{4}\left(t+\dfrac{17}{t}+18\right)\in\left(\dfrac{20}{3},9\right)$，故 $\dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}$ 的取值可以是 7，8. 故选 BC.

18. 2 【解析】当 $x>a$ 时，$f(x)=2^x-3$ 单调递增，当 $-1<x\leqslant a$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)$ 单调递增. 由题意知，若存在实数 t 使得 $g(x)$ 有两个不同的零点，即存在实数 t，使得方程 $f(x)=-t$ 有两个不相等的根，即函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=-t$ 有两个交点，所以当点 $P(a,\log_2(a+1))$ 在点 $Q(a,2^a-3)$ 上方，如图所示，即 $\log_2(a+1)>2^a-3$ 时，符合题意. 因为 $\log_2(2+1)>2^2-3=1$，$\log_2(3+1)<2^3-3=5$，结合 $y=2^x-3$ 与 $y=\log_2(x+1)$ 的图象可得正整数 a 的最大值为 2.

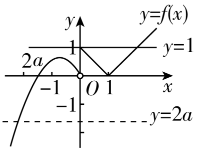


19. $(-1,0)$ 【解析】设 $t=f(x)$，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=|x-1|$，此时 $t\geqslant 0$. 由 $f(t)=0$，得 $t=1$，即 $f(x)=|x-1|=1$，解得 $x=0$ 或 $x=2$，即 $y=f(f(x))$ 在 $[0,+\infty)$ 上有 2 个零点. 当 $x<0$ 时，若 $a\geqslant 0$，$f(x)=-x^2+2ax$，其图象的对称轴方程为 $x=a$，此时函数 $f(x)$ 的大致图象如图①.



图①

则此时 $f(x)=-x^2+2ax<0$，即 $t<0$，则 $f(t)<0$，即 $f(t)=0$ 无解，则 $t=f(x)$ 无零点，此时 $y=f(f(x))$ 无零点，不符合题意，故需 $a<0$，此时函数 $f(x)$ 的大致图象如图②.



图②

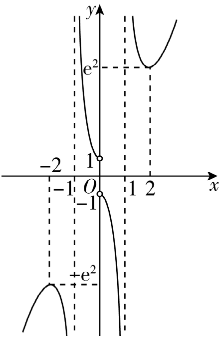
由 $f(t)=0$ 得 $t=1$ 或 $t=2a$，要使得函数 $y=$

$f(f(x))$恰有 3 个零点,需满足 $y=f(f(x))$在$(-\infty,0)$上有 1 个零点,此时$f(x)=2a$ 只有 1 个解,故只需 $t=1$ 与函数 $t=f(x)$的图象在 y 轴左侧无交点,即$f(a)=-a^2+2a^2<1$,解得$-1<a<1$,结合 $a<0$(**方法:**根据函数零点个数求解参数范围的问题,采用数形结合思想能高效解答问题,通过数与形的相互转化能使问题转化的更简单,常见的图象应用的命题角度有:(1)确定方程根的个数;(2)求参数范围;(3)求不等式解集;(4)研究函数性质),可得 $a\in(-1,0)$.

20. $(-\infty,-1-\ln 2)\cup(-1-\ln 2,+\infty)$ 【解析】已知$f(x)=e^{x-a}+4e^{a-x}-\ln(x+2)+x-3$ 不存在零点,即函数 $h(x)=e^{x-a}+4e^{a-x}$ $(x>-2)$与 $g(x)=\ln(x+2)-x+3(x>-2)$的图象没有交点.

$g'(x)=\dfrac{1}{x+2}-1=\dfrac{-1-x}{x+2}$,当 $x\in(-2,-1)$时,$g'(x)>0$;当 $x\in(-1,+\infty)$时,$g'(x)<0$. 则 $g(x)$在 $x=-1$ 处取得极大值,也是最大值,$g(x)_{\max}=g(-1)=\ln 1+4=4$. $h(x)=e^{x-a}+4e^{a-x}\geqslant 2\sqrt{e^{x-a}\cdot 4e^{a-x}}=4$,当且仅当 $e^{x-a}=4e^{a-x}$,即 $x=a+\ln 2$ 时等号成立. 要想两函数图象没有交点,则满足 $a+\ln 2\neq-1$,即 $a\neq-1-\ln 2$,故 a 的取值范围是$(-\infty,-1-\ln 2)\cup(-1-\ln 2,+\infty)$.

21. $(1-e^4,e^4-1)$ 【解析】当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时,$f'(x)=\dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$,$f'(2)=0$,当 $0<x<2$ 且 $x\neq1$ 时,$f'(x)<0$;当 $x>2$ 时,$f'(x)>0$. 故$f(x)$在$(0,1)$,$(1,2)$上单调递减,在$(2,+\infty)$上单调递增. 当 $x=2$ 时,$f(x)$取得极小值$f(2)=e^2$,当 $0<x<1$ 时,$f(x)<0$;当 $x>1$ 时,$f(x)>0$. 由$f(x)$解析式可知,$f(x)$为奇函数,作出$f(x)$的大致图象如图所示.

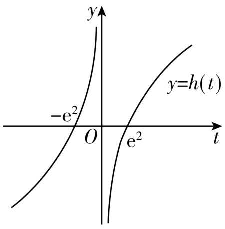


令 $g(x)=0$,得$[f(x)]^2-mf(x)-e^4=0$,设 $t=f(x)$,$t\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,得到关于 t 的方程 $t^2-mt-e^4=0(*)$(**关键:**根据方程结构,通过换元转化为一元二次函数的零点问题),则 $\Delta=m^2+4e^4>0$ 恒成立,设$(*)$式有 2 个不等实根 $t_1,t_2(t_1<t_2)$,当 $t_1=-e^2,t_2=e^2$,即 $m=0$ 时,满足题意,当 $\begin{cases}-e^2<t_1<-1,\\t_2>e^2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}t_1<-e^2,\\1<t_2<e^2\end{cases}$ 时,满足题意(**提示:**在解决有关二次函数的零点问题时,一定要充分利用一元二次方程根的分布、二次函数的图象及所给条件三者的关系,观察、分析函数的图象,找函数的零点,判断各区间上函数值的符号,使问题得以解决).

方法一:令 $h(t)=t^2-mt-e^4$,则 $\begin{cases}h(-e^2)>0,\\h(-1)<0,\\h(e^2)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}h(-e^2)<0,\\h(1)<0,\\h(e^2)>0,\end{cases}$ 故 $0<m<e^4-1$ 或 $1-e^4<m<0$. 综上,实数 m 的取值范围是$(1-e^4,e^4-1)$.

方法二:$(*)$式化为 $m=t-\dfrac{e^4}{t}$,令 $h(t)=t-\dfrac{e^4}{t}(t\neq0)$,易知 $y=$

$h(t)$在$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$上单调递增,且$h(1)=1-e^4$,$h(-1)=e^4-1$,$h(e^2)=h(-e^2)=0$,作出$h(t)$的大致图象如图所示.



当$0<m<e^4-1$或$1-e^4<m<0$时,满足$\begin{cases}-e^2<t_1<-1,\\ t_2>e^2\end{cases}$或$\begin{cases}t_1<-e^2,\\ 1<t_2<e^2,\end{cases}$

综上,实数m的取值范围是$(1-e^4,e^4-1)$.

考点 11　函数模型及其应用

1. D　【解析】已知 $q=\lambda_1\dfrac{|\Delta T|}{d\left(\dfrac{\lambda_1 l}{\lambda_2 d}+2\right)}=\dfrac{4\times10^{-3}\times|\Delta T|}{\dfrac{4\times10^{-3}}{2.5\times10^{-4}}l+2d}=\dfrac{4\times10^{-3}\times|\Delta T|}{16l+2d}$,固定$|\Delta T|$,可知$16l+2d$越大,$q$越小,保温效果越好. 对于 A 型玻璃,$16l+2d=16\times3+2\times0.4=48.8$,对于 B 型玻璃,$16l+2d=16\times4+2\times0.3=64.6$,对于 C 型玻璃,$16l+2d=16\times3+2\times0.5=49$,对于 D 型玻璃,$16l+2d=16\times4+2\times0.4=64.8$,经过比较可知,D 型玻璃保温效果最好. 故选 D.

2. AC　【解析】因为震级$M'=M+1=1+\lg\dfrac{A_{\max}}{A_0}=\lg\dfrac{10A_{\max}}{A_0}$,所以最大振幅$A'_{\max}=10A_{\max}$,故 A 正确;因为放出的能量$E'=10^{4.8}\times10^{1.5M'}=10^{4.8}\times10^{1.5(M+1)}=10^{4.8}\times10^{1.5M+1.5}=10^{1.5}E$,故 B 错误;因为$\lg\dfrac{10A_{\max}}{A_0}=M+1=M'$,$E'=10^{4.8}\times10^{1.5M'}=10^{4.8}\times10^{1.5(M+1)}=10^{4.8}\times10^{1.5M+1.5}=10^{1.5}E=10\sqrt{10}E$,故 C 正确,D 错误. 故选 AC.

3. AC　【解析】把$k=\ln2$,$\theta_1=5\theta_0$,$t=4$代入$\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$,得$\theta=\theta_0+(5\theta_0-\theta_0)\cdot e^{-4\ln2}$,解得$\theta=\dfrac{5}{4}\theta_0$,则$\dfrac{\frac{5}{4}\theta_0}{5\theta_0}=\dfrac{1}{4}$,故 A 正确;

根据题意,若$\theta_0+4\theta_0\cdot e^{-kt}=2(\theta_0+4\theta_0\cdot e^{-2kt})$,则化简得$8\cdot(e^{-kt})^2-4\cdot e^{-kt}+1=0$,令$e^{-kt}=m(m>0)$,则$8m^2-4m+1=0$,$\Delta=(-4)^2-4\times8\times1<0$,所以方程无解,故 B 错误;

因为$0<t_1<t_2<t_3$,$t_1+t_3=2t_2$,

所以$e^{-kt_1}+e^{-kt_3}>2\sqrt{e^{-kt_1}\cdot e^{-kt_3}}=2e^{-kt_2}$,

所以$f(t_1)+f(t_3)-2f(t_2)=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt_1}+\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt_3}-2[\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt_2}]=(\theta_1-\theta_0)(e^{-kt_1}+e^{-kt_3}-2e^{-kt_2})>0$,

即$f(t_1)+f(t_3)>2f(t_2)$,故 C 正确;

因为$f(t)=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$,所以$f'(t)=-k(\theta_1-\theta_0)e^{-kt}$,

所以$f'(t_1)+f'(t_3)-2f'(t_2)=-k(\theta_1-\theta_0)e^{-kt_1}-k(\theta_1-\theta_0)e^{-kt_3}+2k(\theta_1-\theta_0)e^{-kt_2}=-k(\theta_1-\theta_0)(e^{-kt_1}+e^{-kt_3}-2e^{-kt_2})<0$,即$f'(t_1)+f'(t_3)<2f'(t_2)$,故 D 错误.

故选 AC.

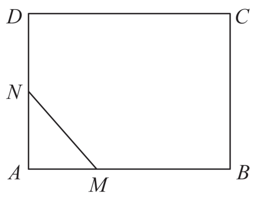
4. B　【解析】设总利润$f(x)=x\left(\dfrac{800}{x+2}-3\right)-(100+13x)=732-\dfrac{1600}{x+2}-16(x+2)\leqslant732-2\sqrt{\dfrac{1600}{x+2}\times16(x+2)}=412$(方法:应用题

的最值问题，主要是选取适当的变量，再依据题设，建立数学模型（即函数关系式），由变量和常量之间的关系，如本题选取基本不等式求最值，进而求解），当且仅当$\frac{1\ 600}{x+2}=16(x+2)$，即 $x=8$ 时，$f(x)$最大，故总利润最大时的产量为 8 万件. 故选 B.

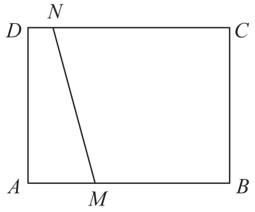
5. B 【解析】设该企业需要更新设备的年数为 $x(x\in\mathbf{N}^*)$，设备年平均费用为 y 万元，则 x 年的设备维护费用为 $2+4+6+\cdots+2x=\frac{x(2+2x)}{2}=x(x+1)$，所以 x 年的平均费用 $y=\frac{100+0.5x+x(x+1)}{x}=x+\frac{100}{x}+\frac{3}{2}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{100}{x}}+\frac{3}{2}=\frac{43}{2}$（万元），当且仅当 $x=10$ 时，等号成立，因此，为使该设备年平均费用最低，该企业需要更新设备的年数为 10. 故选 B.

6. $[8,2\sqrt{29}]$ 【解析】由题意得，矩形纸片的面积为 $10\times8=80(\text{cm}^2)$，设折痕分成的两部分的面积分别为 S_1,S_2，则 $S_1:S_2=1:3$，所以 $S_1=20\ \text{cm}^2,S_2=60\ \text{cm}^2$.

当折痕 MN 如图①所示时，设 $AM=x,AN=y$，



图①



图②

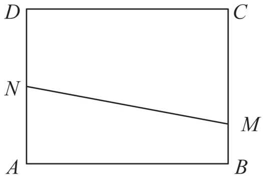
则$\begin{cases}\frac{1}{2}xy=20,\\0\leqslant x\leqslant10,\\0\leqslant y\leqslant8,\end{cases}$解得$\begin{cases}xy=40,\\5\leqslant x\leqslant10,\\4\leqslant y\leqslant8,\end{cases}$所以 $MN^2=x^2+y^2=x^2+\frac{1\ 600}{x^2}$. 令 $t=x^2,t\in[25,100]$，则$f(t)=t+\frac{1\ 600}{t}$，$f(t)$在$[25,40]$上单调递减，在$[40,100]$上单调递增，又$f(25)=89$，$f(40)=80$，$f(100)=116$，所以$f(t)\in[80,116]$，则 $MN\in[4\sqrt{5},2\sqrt{29}]$.

当折痕 MN 如图②所示时，设 $AM=x,DN=z$，

则$\begin{cases}\frac{1}{2}(x+z)\times8=20,\\0\leqslant x\leqslant10,\\0\leqslant z\leqslant10,\end{cases}$解得$\begin{cases}x+z=5,\\0\leqslant x\leqslant5,\\0\leqslant z\leqslant5,\end{cases}$则 $MN^2=(x-z)^2+64=(2x-5)^2+64,0\leqslant x\leqslant5$.

当 $x=\frac{5}{2}$时，$MN^2=(2x-5)^2+64$ 取得最小值 64，当 $x=0$ 或 $x=5$ 时，$MN^2=(2x-5)^2+64$ 取得最大值 89，则 $MN\in[8,\sqrt{89}]$.

当折痕 MN 如图③所示时，设 $BM=p$，$AN=y$，



图③

则$\begin{cases}\frac{1}{2}(p+y)\times10=20,\\0\leqslant p\leqslant8,\\0\leqslant y\leqslant8,\end{cases}$解得$\begin{cases}p+y=4,\\0\leqslant p\leqslant4,\\0\leqslant y\leqslant4,\end{cases}$

则 $MN^2=(p-y)^2+100=(2p-4)^2+100,0\leqslant p\leqslant4$. 当 $p=2$ 时，MN^2

取得最小值 100，当 $p=0$ 或 $p=4$ 时，MN^2 取得最大值 116，所以 $MN\in[10,2\sqrt{29}]$. 综上，折痕长的取值范围为 $[8,2\sqrt{29}]$.

考点 12　抽象函数的性质

1. B 【解析】因为函数 $y=f(x)$ 对任意实数 x 都有 $f(1-x)+f(x-1)=0$，即 $f(1-x)=-f(x-1)$，即 $f(-x)=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是奇函数（提示：也可以由 $f(1-x)+f(x-1)=0$ 得到 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，得到 $f(x)$ 为奇函数），所以 $f(0)=0$. 由题意知 $f(x+6)+f(x)=2f(3)$，代入 $x=-3$，得 $f(3)+f(-3)=2f(3)$，即 $f(3)-f(3)=2f(3)$，所以 $f(3)=0$，则 $f(x+6)+f(x)=2f(3)=0$，即 $f(x+6)=-f(x)$，所以 $f(x+12)=-f(x+6)=-[-f(x)]=f(x)$，即 12 为函数 $y=f(x)$ 的周期，所以 $f(2\ 022)=f(12\times168+6)=f(6)=-f(0)=0$，故选 B.

2. C 【解析】由题设 $f(-x)=-f(x)=-f(a-x)$，即 $f(x)=-f(x+a)=f(x+2a)$，所以 $f(x)$ 是周期为 $2a$ 的奇函数（提示：若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的周期 $T=2a$），且直线 $x=\frac{a}{2}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴.

当 $a=2$ 时，则 $f(1)=-f(1+2)=-f(3)$，$f(1)=f(1+2\times4)=f(9)$，不符合；

当 $a=3$ 时，则 $f(1)=f(1+6n)$ 且 $n\in\mathbf{Z}$，不符合；

当 $a=4$ 时，则 $f(1)=f(4-1)=f(3)$，$f(1)=f(1+2\times4)=f(9)$，故 $f(1)=f(3)=f(9)$，符合；

当 $a=5$ 时，则 $f(1)=f(1+10m)$ 且 $m\in\mathbf{Z}$，不符合.

综上，故选 C.

3. C 【解析】因为函数 $f(x-1)$ 的图象关于点 $(1,-1)$ 对称，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,-1)$ 对称，即 $f(x)+f(-x)=-2$①，因为 $f(x+1)$ 为偶函数，所以 $f(x+1)=f(-x+1)$，则 $f(x)=f(2-x)$，则 $f(-x)=f(2+x)$②，由①②得 $f(x)+f(2+x)=-2$，$f(2+x)+f(4+x)=-2$，所以 $f(x)=f(4+x)$（提示：如果 $f(x+a)+f(x)=c(a\neq0)$，那么 $f(x)$ 是周期函数，其中一个周期 $T=2a$），所以 4 为 $f(x)$ 的周期.

对于 C，令 $g(x)=f(x+4)+1=f(x)+1$，则 $g(-x)=f(-x)+1=-2-f(x)+1=-1-f(x)=-g(x)$，则 $g(x)$ 为奇函数，C 正确；

对于 A，令 $h(x)=f(x)-1$，则 $h(-x)=f(-x)-1=-3-f(x)=-4-h(x)$，即 $h(-x)+h(x)=-4$，所以 $h(x)=f(x)-1$ 不为奇函数，A 错误；

对于 B，令 $m(x)=f(x+2)-1$，则 $m(-x)=f(-x+2)-1=-3-f(x+2)=-4-m(x)$，即 $m(x)+m(-x)=-4$，所以 $m(x)=f(x+2)-1$ 不为奇函数，B 错误；

对于 D，令 $\varphi(x)=f(x+3)+1$，则 $\varphi(-x)=f(-x+3)+1=f(-x-1)+1=f(3+x)+1=\varphi(x)$，所以 $\varphi(x)=f(x+3)+1$ 不为奇函数，D

错误.

故选 C.

4. D 【解析】因为 $f(2x+1)$ 是偶函数，所以 $f(2x+1)=f(-2x+1)$，令 $t=2x+1$，则 $2x=t-1$，故 $-2x+1=2-t$，所以 $f(t)=f(2-t)$，即 $f(x)=f(2-x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.

因为 $f(x-1)$ 是奇函数，所以 $f(-1)=0$，且函数 $f(x-1)$ 的图象关于 $(0,0)$ 对称. 又因为函数 $f(x-1)$ 的图象是由函数 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度得到的，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称，所以 $f(-x-1)=-f(x-1)$，所以 $f(x)=-f(-x-2)$，所以 $f(2-x)=-f(-x-2)$，则 $f(x)=-f(x-4)=f(x-8)$，所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 8，故有 $f(x)=f(x+(-2)\times 8)=f(x-16)$，故①正确.

由函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，$f(-1)=0$，

得 $f(3)=f(-1)=0$，所以 $f(11)=f(3)=0$，故②正确.

因为 $f(2\ 022)=f(8\times 253-2)=f(-2)$，$f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 对称，所以 $f(-2)=-f(0)$，所以 $f(2\ 022)=-f(0)$，故③正确.

$f(2\ 021)=f(8\times 253-3)=f(-3)$，故④正确. 所以正确的个数是 4.

故选 D.

5. C 【解析】对于 A，方法一：将 $f(2x+1)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，得到函数 $f(x+1)$ 的图象，再将 $f(x+1)$ 的图象上的所有点向右平移 1 个单位长度得到 $f(x)$ 的图象，因为 $f(2x+1)$ 的一个周期为 2，所以 $f(x)$ 的一个周期为 4，1 不是 $f(x)$ 的周期，故 A 错误.

方法二：因为 $f(2x+1)$ 的一个周期为 2，所以 $f[2(x+2)+1]=f(2x+1)$，即 $f(2x+1+4)=f(2x+1)$，设 $t=2x+1$，则 $f(t+4)=f(t)$，所以 $f(x)$ 的一个周期为 4，1 不是 $f(x)$ 的周期，故 A 错误.

对于 B，因为 $f(2x+1)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，

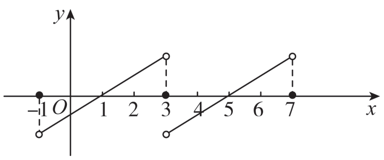
所以 $f(-2x+1)=-f(2x+1)$，

设 $m=2x$，则 $f(-m+1)=-f(m+1)$，

所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，故 B 错误.

对于 C，因为 $f(x)$ 的一个周期为 4，所以 $f(2\ 023)=f(4\times 506-1)=f(-1)$，又 $f(-2x+1)=-f(2x+1)$，则 $f(3)=-f(-1)=f(-1)$，故 $f(-1)=0$，所以 $f(2\ 023)=0$，故 C 正确.

对于 D，由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，因为 $f(-1)=0$，$f(x)$ 的一个周期为 4，所以 $f(4k+3)=0(k\in\mathbf{Z})$，$f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，作出一个符合上述条件的图象，如图所示，此时 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x=2$ 对称，故 D 错误. 故选 C.



一题多解

(特例法)因为 $y=\begin{cases}\tan\dfrac{\pi x}{2}, x\neq 2k+1, k\in\mathbf{Z},\\ 0, x=2k+1, k\in\mathbf{Z}\end{cases}$ 为定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇函数,周期为 2,所以函数 $f(2x+1)=\begin{cases}\tan\dfrac{\pi x}{2}, x\neq 2k+1, k\in\mathbf{Z},\\ 0, x=2k+1, k\in\mathbf{Z}\end{cases}$ 满足条件,令 $2x+1=t$,可得 $f(t)=\begin{cases}\tan\dfrac{\pi t-\pi}{4}, t\neq 4k+3, k\in\mathbf{Z},\\ 0, t=4k+3, k\in\mathbf{Z},\end{cases}$ 函数 $y=f(t)$ 的最小正周期为 4,对称中心为 $(2k+1,0)$,$k\in\mathbf{Z}$,函数 $y=f(t)$ 的图象没有对称轴,故 A 错误,B 错误,D 错误;因为函数 $f(2x+1)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(-2x+1)=-f(2x+1)$,取 $x=0$,可得 $f(1)=0$,因为 $f(2x+1)$ 的一个周期为 2,所以 $f(2x+4+1)=f(2x+1)$,取 $x=\dfrac{\mu-1}{2}$,可得 $f(\mu+4)=f(\mu)$,所以函数 $f(x)$ 的周期为 4,所以 $f(2\ 023)=f(505\times4+3)=f(3)=0$,C 正确. 故选 C.

6. ①②③④ 【解析】由 $f(-1)=0$,且 $f(x)+g(x+2)=1$,$f(x-4)-g(x)=3$,得 $g(1)=1$,$g(3)=-3$,故①正确;

由 $f(x-4)-g(x)=3$,得 $f(x+4-4)-g(x+4)=3$,即 $f(x)-g(x+4)=3$,由 $f(x)+g(x+2)=1$,得 $g(x+2)+g(x+4)=-2$,则 $g(x)+g(x+2)=-2$,所以 $g(x)=g(x+4)$,所以 4 为 $g(x)$ 的周期,故②正确;

由 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,得 $f(x)=f(2-x)$,由 $f(x)+g(x+2)=1$,可得 $f(2-x)+g(x+2)=1$,则 $f(2-(-x+6))+g((-x+6)+2)=1$,即 $f(x-4)+g(8-x)=1$,又 $f(x-4)-g(x)=3$,得 $g(8-x)+g(x)=-2$,所以 $g(x)$ 的图象关于点 $(4,-1)$ 对称,且 $g(4)=-1$,故③正确;

结合②有 $g(x)+g(x+2)=-2$,则 $g(2)+g(4)=-2$,得 $g(2)=-1$,故④正确. 所以正确的有①②③④.

7. BC 【解析】令 $x=y=0$,得 $f(0)=0$,令 $y=0$,得 $f(x)=xf(0)=0$,则 $f(-x)=f(x)=-f(x)=0$,所以 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数. 由 $g(x+1)=(x+1)(x^2+2x)=(x+1)[(x+1)^2-1]$,得 $g(x)=x^3-x$. 因为 $g(-x)=-g(x)$,所以 $g(x)$ 是奇函数,故选 BC.

8. 0 【解析】因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以 $f(0)=0$. 又 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $f(2-x)=f(x)+f(2)$,令 $x=2$,则 $f(0)=2f(2)$,即 $f(2)=0$,所以 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有 $f(2-x)=f(x)$,即 $f(2+x)=f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x+4)=f(x)$,即函数的周期 $T=4$,则 $f(4)=f(0)=0$. 由 $f(2-x)=f(x)$,令 $x=3$,可得 $f(3)=f(-1)=-f(1)$,所以 $f(1)+f(3)=0$,则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$,所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 022)=505\times0+f(2\ 021)+f(2\ 022)=f(1)+f(2)$,则 $f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 022)=f(1)+f(2)-f(1)=f(2)=0$.

9. $\dfrac{1}{2^{|x|}}$(答案不唯一) 【解析】令 $f(x)=\dfrac{1}{a^{|x|}}(a>1)$,$f(x+y)=\dfrac{1}{a^{|x+y|}}$,$f(x)f(y)=\dfrac{1}{a^{|x|}}\cdot\dfrac{1}{a^{|y|}}=\dfrac{1}{a^{|x|+|y|}}=\dfrac{1}{a^{|x+y|}}(xy>0)$,所以满足若 $xy>0$,则

$f(x+y)=f(x)f(y)$. $f(-x)=\dfrac{1}{a^{|-x|}}=f(x)$，即 $f(x)=f(-x)$ 成立. 又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)=\dfrac{1}{a^{|x|}}(a>1)$ 符合题意.

10. x^3（答案不唯一）　【**解析**】$f(x)$ 可以为幂函数，即 $f(x)=x^{\alpha}$，其中 α 为正奇数，如 $f(x)=x^3$，则 $f(x_1)=x_1^3$，$f(x_2)=x_2^3$，$f(x_1x_2)=(x_1x_2)^3=x_1^3x_2^3=f(x_1)f(x_2)$，满足①；$f'(x)=3x^2$ 为偶函数，满足②；$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，且 $f'(x)$ 不恒为 0，所以 $f(x)=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，满足③. 故函数可以是 $f(x)=x^3$（答案不唯一）.