

2024 年上海市中考数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 如果 $x > y$, 那么下列正确的是 ()

- A. $x + 5 < y + 5$ B. $x - 5 < y - 5$ C. $5x > 5y$ D. $-5x > -5y$

2. 函数 $f(x) = \frac{2-x}{x-3}$ 的定义域是 ()

- A. $x = 2$ B. $x \neq 2$ C. $x = 3$ D. $x \neq 3$

3. 以下一元二次方程有两个相等实数根的是 ()

- A. $x^2 - 6x = 0$ B. $x^2 - 9 = 0$
C. $x^2 - 6x + 6 = 0$ D. $x^2 - 6x + 9 = 0$

4. 科学家同时培育了甲乙丙丁四种花, 从甲乙丙丁选个开花时间最短的并且最平稳的.

种类	甲种类	乙种类	丙种类	丁种类
平均数	2.3	2.3	2.8	3.1
方差	1.05	0.78	1.05	0.78

- A. 甲种类 B. 乙种类 C. 丙种类 D. 丁种类

5. 四边形 $ABCD$ 为矩形, 过 A 、 C 作对角线 BD 的垂线, 过 B 、 D 作对角线 AC 的垂线, 如果四个垂线拼成一个四边形, 那这个四边形为 ()

- A. 菱形 B. 矩形 C. 直角梯形 D. 等腰梯形

6. 在 $\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$, $AB = 5$, 点 P 在 $\triangle ABC$ 内, 分别以 A 、 B 、 P 为圆心画, 圆 A 半径为 1, 圆 B 半径为 2, 圆 P 半径为 3, 圆 A 与圆 P 内切, 圆 P 与圆 B 的关系是 ()

- A. 内含 B. 相交 C. 外切 D. 相离

二、填空题

7. 计算: $(4x^2)^3 =$ _____.

8. 计算 $(a+b)(b-a) =$ _____.

9. 已知 $\sqrt{2x-1} = 1$, 则 $x =$ _____.

10. 科学家研发了一种新的蓝光唱片, 一张蓝光唱片的容量约为 2×10^5 GB, 一张普通唱片

的容量约为 25 GB，则蓝光唱片的容量是普通唱片的_____倍．（用科学记数法表示）

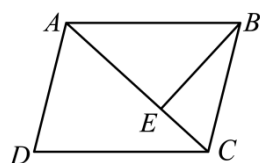
11. 若正比例函数 $y=kx$ 的图像经过点 $(7,-13)$ ，则 y 的值随 x 的增大而_____．（选填“增大”或“减小”）

12. 在菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC=66^\circ$ ，则 $\angle BAC=_____$ ．

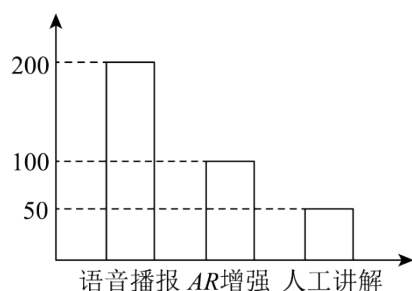
13. 某种商品的销售量 y （万元）与广告投入 x （万元）成一次函数关系，当投入 10 万元时销售额 1000 万元，当投入 90 万元时销售量 5000 万元，则投入 80 万元时，销售量为_____万元．

14. 一个袋子中有若干个白球和绿球，它们除了颜色外都相同随机从中摸一个球，恰好摸到绿球的概率是 $\frac{3}{5}$ ，则袋子中至少有_____个绿球．

15. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， E 为对角线 AC 上一点，设 $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ ， $\overrightarrow{BE}=\vec{b}$ ，若 $AE=2EC$ ，则 $\overrightarrow{DC}=_____$ （结果用含 \vec{a} ， \vec{b} 的式子表示）．



16. 博物馆为展品准备了人工讲解、语音播报和 AR 增强三种讲解方式，博物馆共回收有效问卷 1000 张，其中 700 人没有讲解需求，剩余 300 人中需求情况如图所示（一人可以选择多种），那么在总共 2 万人的参观中，需要 AR 增强讲解的人数约有_____人．



17. 在平行四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABC$ 是锐角，将 CD 沿直线 l 翻折至 AB 所在直线，对应点分别为 C' ， D' ，若 $AC':AB:BC=1:3:7$ ，则 $\cos \angle ABC=_____$ ．

18. 对于一个二次函数 $y=a(x-m)^2+k$ ($a \neq 0$) 中存在一点 $P(x',y')$ ，使得

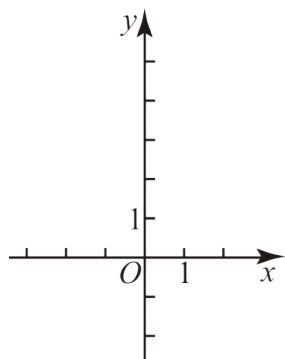
$x'-m=y'-k \neq 0$ ，则称 $2|x'-m|$ 为该抛物线的“开口大小”，那么抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x+3$ “开口大小”为_____．

三、解答题

19. 计算: $|1-\sqrt{3}|+24^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}-(1-\sqrt{3})^0$.

20. 解方程组:
$$\begin{cases} x^2-3xy-4y^2=0 \textcircled{1} \\ x+2y=6 \textcircled{2} \end{cases}.$$

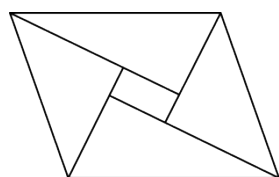
21. 在平面直角坐标系 xOy 中, 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ (k 为常数且 $k \neq 0$) 上有一点 $A(-3,m)$, 且与直线 $y=-2x+4$ 交于另一点 $B(n,6)$.



(1)求 k 与 m 的值;

(2)过点 A 作直线 $l \parallel x$ 轴与直线 $y=2x+4$ 交于点 C , 求 $\sin \angle OCA$ 的值.

22. 同学用两幅三角板拼出了如下的平行四边形, 且内部留白部分也是平行四边形 (直角三角板互不重叠), 直角三角形斜边上的高都为 h .



(1)直接写出:

① 两个直角三角形的直角边 (结果用 h 表示);

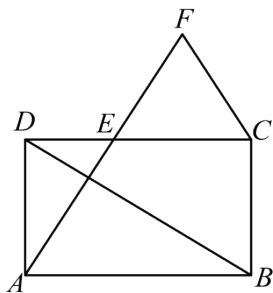
② 小平行四边形的底、高和面积 (结果用 h 表示);

(2)请画出同学拼出的另一种符合题意的图, 要求:

① 不与给定的图形状相同;

② 画出三角形的边.

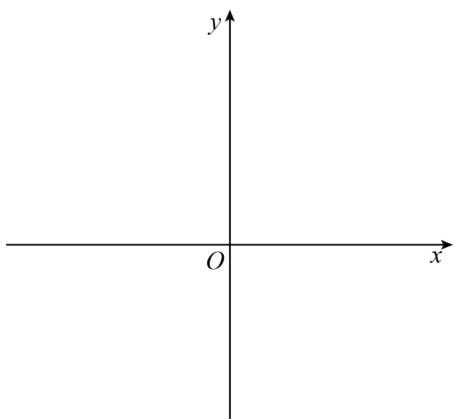
23. 如图所示, 在矩形 $ABCD$ 中, E 为边 CD 上一点, 且 $AE \perp BD$.



(1) 求证: $AD^2 = DE \cdot DC$;

(2) F 为线段 AE 延长线上一点, 且满足 $EF = CF = \frac{1}{2}BD$, 求证: $CE = AD$.

24. 在平面直角坐标系中, 已知平移抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2$ 后得到的新抛物线经过 $A\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ 和 $B(5, 0)$.



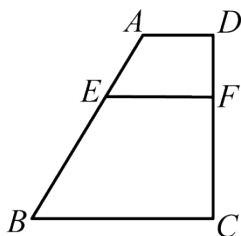
(1) 求平移后新抛物线的表达式;

(2) 直线 $x = m$ ($m > 0$) 与新抛物线交于点 P , 与原抛物线交于点 Q .

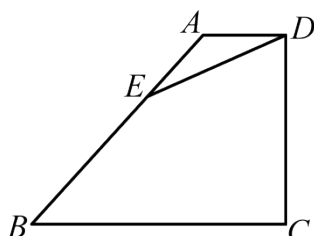
① 如果 PQ 小于 3, 求 m 的取值范围;

② 记点 P 在原抛物线上的对应点为 P' , 如果四边形 $P'BPQ$ 有一组对边平行, 求点 P 的坐标.

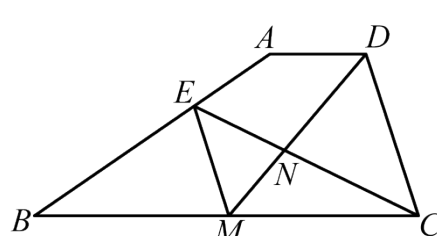
25. 在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 点 E 在边 AB 上, 且 $AE = \frac{1}{3}AB$.



(图1)



(图2)



(图3)

(1) 如图 1 所示, 点 F 在边 CD 上, 且 $DF = \frac{1}{3}CD$, 联结 EF , 求证: $EF \parallel BC$;

(2) 已知 $AD = AE = 1$;

①如图 2 所示，联结 DE ，如果 $\triangle ADE$ 外接圆的心恰好落在 $\angle B$ 的平分线上，求 $\triangle ADE$ 的外接圆的半径长；

②如图 3 所示，如果点 M 在边 BC 上，联结 EM 、 DM 、 EC ， DM 与 EC 交于 N ，如果 $BC = 4$ ，且 $CD^2 = DM \cdot DN$ ， $\angle DMC = \angle CEM$ ，求边 CD 的长．

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6				
答案	C	D	D	B	A	B				

1. C

【分析】本题主要考查了不等式的基本性质，根据不等式两边加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变．不等式两边乘（或除以）同一个正数，不等号的方向不变．不等式两边乘（或除以）同一个负数，不等号的方向改变．

【详解】解：A．两边都加上5，不等号的方向不改变，故错误，不符合题意；

B．两边都加上-5，不等号的方向不改变，故错误，不符合题意；

C．两边同时乘上大于零的数，不等号的方向不改变，故正确，符合题意；

D．两边同时乘上小于零的数，不等号的方向改变，故错误，不符合题意；

故选：C．

2. D

【分析】本题考查求函数定义域，涉及分式有意义的条件：分式分母不为0，解不等式即可得到答案，熟练掌握求函数定义域的方法是解决问题的关键．

【详解】解：函数 $f(x) = \frac{2-x}{x-3}$ 的定义域是 $x-3 \neq 0$ ，解得 $x \neq 3$ ，

故选：D．

3. D

【分析】本题考查了一元二次方程判别式判断根的情况，解答本题的关键是熟练掌握一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ ，当 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时，方程有两个不相等实数根；当 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时，方程的两个相等的实数根；当 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时，方程没有实数根．分别计算出各选项中的根的判别式的值，即可判断．

【详解】解：A． $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 0 = 36 > 0$ ，该方程有两个不相等实数根，故A选项不符合题意；

B． $\Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 36 > 0$ ，该方程有两个不相等实数根，故B选项不符合题意；

C． $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 12 > 0$ ，该方程有两个不相等实数根，故C选项不符合题意；

D． $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 9 = 0$ ，该方程有两个相等实数根，故D选项不符合题意；

故选：D．

4. B

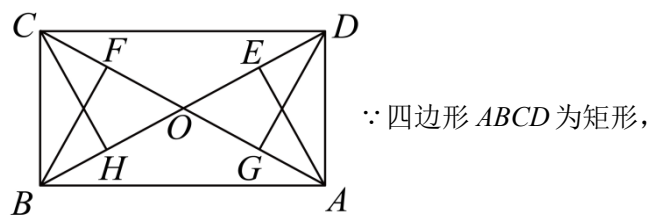
【分析】本题主要考查了用平均数和方差做决策，根据平均数的定义以及方差的定义做决策即可． 解题的关键是掌握方差的意义：方差是反映一组数据的波动大小的一个量．方差越大，则平均值的离散程度越大，稳定性也越小；反之，则它与其平均值的离散程度越小，稳定性越好．

【详解】解：∵由表格可知四种花开花时间最短的为甲种类和乙种类，
四种花的方差最小的为乙种类和丁种类，方差越小越稳定，
∴乙种类开花时间最短的并且最平稳的，
故选：B．

5. A

【分析】本题考查矩形性质、等面积法、菱形的判定等知识，熟练掌握矩形性质及菱形的判定是解决问题的关键．由矩形性质得到 $S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAD}$ ， $OC = OB = OA = OD$ ，进而由等面积法确定 $CH = BF = AE = DG$ ，再由菱形的判定即可得到答案．

【详解】解：如图所示：



$$\therefore S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAD}, \quad OC = OB = OA = OD,$$

∵ 过 A 、 C 作对角线 BD 的垂线，过 B 、 D 作对角线 AC 的垂线，

$$\therefore S_{\triangle OBC} = S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} OC \cdot BF = \frac{1}{2} OB \cdot CH = \frac{1}{2} OD \cdot AE = \frac{1}{2} OA \cdot DG$$

$$\therefore CH = BF = AE = DG,$$

如果四个垂线拼成一个四边形，那这个四边形为菱形，

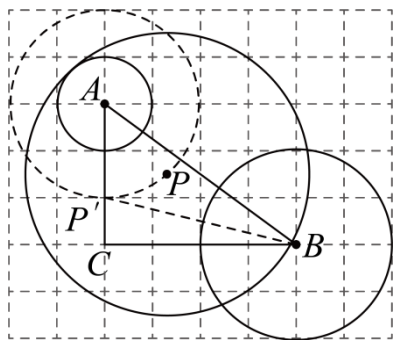
故选：A．

6. B

【分析】本题考查圆的位置关系，涉及勾股定理，根据题意，作出图形，数形结合，即可得到答案，熟记圆的位置关系是解决问题的关键．

【详解】解：∵圆 A 半径为 1，圆 P 半径为 3，圆 A 与圆 P 内切，
∴圆 A 含在圆 P 内，即 $PA = 3 - 1 = 2$ ，

$\therefore P$ 在以 A 为圆心、2 为半径的圆与 $\triangle ABC$ 边相交形成的弧上运动，如图所示：



\therefore 当到 P' 位置时，圆 P 与圆 B 圆心距离 PB 最大，为

$$\sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17},$$

$$\because \sqrt{17} < 3 + 2 = 5,$$

\therefore 圆 P 与圆 B 相交，

故选：B.

7. $64x^6$

【分析】本题考查了积的乘方以及幂的乘方，掌握相关运算法则是解题关键．先将因式分别乘方，再结合幂的乘方计算即可．

【详解】解： $(4x^2)^3 = 64x^6$ ，

故答案为： $64x^6$ ．

8. $b^2 - a^2$

【分析】根据平方差公式进行计算即可．

【详解】解： $(a+b)(b-a)$

$$= (b+a)(b-a)$$

$$= b^2 - a^2,$$

故答案为： $b^2 - a^2$ ．

【点睛】本题考查平方差公式，此为基础且重要知识点，必须熟练掌握．

9. 1

【分析】本题主要考查了二次根式有意义的条件，掌握二次根式中的被开方数是非负数是解题的关键．由二次根式被开方数大于 0 可知 $2x-1 > 0$ ，则可得出 $2x-1=1$ ，求出 x 即可．

【详解】解：根据题意可知： $2x-1 > 0$ ，

$$\therefore 2x-1=1,$$

解得： $x=1$ ，

故答案为：1.

10. 8×10^3

【分析】本题考查科学记数法，按照定义，用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，按要求表示即可得到答案，确定 a 与 n 的值是解决问题的关键.

【详解】解：蓝光唱片的容量是普通唱片的 $\frac{2 \times 10^5}{25} = 8000 = 8 \times 10^3$ 倍，

故答案为： 8×10^3 .

11. 减小

【分析】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征以及正比例函数的性质，牢记“当 $k > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大；当 $k < 0$ 时， y 随 x 的增大而减小”是解题的关键. 利用一次函数图象上点的坐标特征，可求出 $k = -\frac{13}{7}$ ，结合正比例函数的性质，即可得出 y 的值随 x 的增大而减小.

【详解】解： \because 正比例函数 $y = kx$ 的图象经过点 $(7, -13)$ ，

$$\therefore -13 = 7k,$$

$$\text{解得： } k = -\frac{13}{7},$$

$$\text{又 } \because k = -\frac{13}{7} < 0,$$

$\therefore y$ 的值随 x 的增大而减小.

故答案为：减小.

12. $57^\circ / 57$ 度

【分析】本题考查了菱形的性质，等腰三角形的性质以及三角形内角和定理，利用菱形性质得出 $AB = BC$ ，利用等边对等角得出 $\angle BAC = \angle ACB$ ，然后结合三角形内角和定理求解即可.

【详解】解： \because 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore AB = BC,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 66^\circ) = 57^\circ,$$

故答案为： 57° .

13. 4500

【分析】本题考查求一次函数解析式及求函数值，设 $y = kx + b$ ，根据题意找出点代入求出

解析式，然后把 $x = 80$ 代入求解即可.

【详解】解：设 $y = kx + b$,

把 $(10, 1000)$, $(90, 5000)$ 代入, 得 $\begin{cases} 10k + b = 1000 \\ 90k + b = 5000 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} k = 50 \\ b = 500 \end{cases}$,

$\therefore y = 50x + 500$,

当 $x = 80$ 时, $y = 50 \times 80 + 500 = 4500$,

即投入 80 万元时, 销售量为 4500 万元,

故答案为: 4500.

14. 3

【分析】本题主要考查了已知概率求数量, 一元一次不等式的应用, 设袋子中绿球有 $3x$ 个, 则根据概率计算公式得到球的总数为 $5x$ 个, 则白球的数量为 $2x$ 个, 再由每种球的个数为正整数, 列出不等式求解即可.

【详解】解：设袋子中绿球有 $3x$ 个,

\because 摸到绿球的概率是 $\frac{3}{5}$,

\therefore 球的总数为 $3x \div \frac{3}{5} = 5x$ 个,

\therefore 白球的数量为 $5x - 3x = 2x$ 个,

\because 每种球的个数为正整数,

$\therefore 2x > 0$, 且 x 为正整数,

$\therefore x > 0$, 且 x 为正整数,

$\therefore x$ 的最小值为 1,

\therefore 绿球的个数的最小值为 3,

\therefore 袋子中至少有 3 个绿球,

故答案为: 3.

15. $\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}$

【分析】本题考查了平面向量的知识, 解答本题的关键是先确定各线段之间的关系. 先求出

$AE = \frac{2}{3}AC$, 从而可得 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB}$.

【详解】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore DC \parallel AB, \quad DC = AB.$$

$$\because E \text{ 是 } AC \text{ 上一点, } AE = 2EC,$$

$$\therefore AE = \frac{2}{3}AC,$$

$$\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b},$$

$$\therefore \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b}.$$

16. 2000

【分析】本题考查条形统计图及用样本的某种“率”估计总体的某种“率”，正确得出需要 AR 增强讲解的人数占有需求讲解的人数的百分比是解题关键. 先求出需求讲解的人数占有效问卷的百分比，再根据条形统计图求出需要 AR 增强讲解的人数占有需求讲解的人数的百分比，进而可得答案.

【详解】解：∵ 共回收有效问卷 1000 张，其中 700 人没有讲解需求，剩余 300 人有需求讲解，

$$\therefore \text{需求讲解的人数占有有效问卷的百分比为 } \frac{300}{1000} \times 100\% = 30\%,$$

由条形统计图可知：需要 AR 增强讲解的人数为 100 人，

$$\therefore \text{需要 } AR \text{ 增强讲解的人数占有需求讲解的人数的百分比为 } \frac{100}{300} = \frac{1}{3},$$

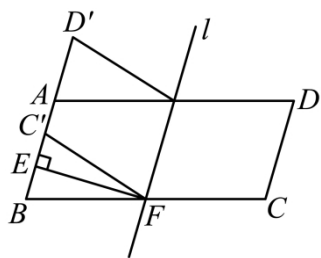
$$\therefore \text{在总共 2 万人的参观中，需要 } AR \text{ 增强讲解的人数约有 } 20000 \times 30\% \times \frac{1}{3} = 2000 \text{ (人)},$$

故答案为：2000

$$17. \frac{2}{7} \text{ 或 } \frac{4}{7} / \frac{4}{7} \text{ 或 } \frac{2}{7}$$

【分析】本题考查了平行四边形的翻折，求余弦值，等腰三角形的判定及性质，解题的关键是利用分类讨论的思想进行求解.

【详解】解：当 C' 在 AB 之间时，作下图，



根据 $AC':AB:BC=1:3:7$ ，不妨设 $AC'=1, AB=3, BC=7$ ，

由翻折的性质知： $\angle FCD = \angle FC'D'$ ，

$\because CD$ 沿直线 l 翻折至 AB 所在直线，

$\therefore \angle BC'F + \angle FC'D' = \angle FCD + \angle FBA$ ，

$\therefore \angle BC'F = \angle FBA$ 。

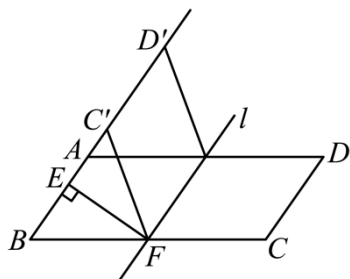
$$CF = BF = C'F = \frac{7}{2},$$

过 F 作 AB 的垂线交于 E ，

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC' = 1,$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{BE}{BF} = \frac{1}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{7},$$

当 C' 在 BA 的延长线上时，作下图，



根据 $AC':AB:BC=1:3:7$ ，不妨设 $AC'=1, AB=3, BC=7$ ，

$$\text{同理知： } CF = BF = C'F = \frac{7}{2},$$

过 F 作 AB 的垂线交于 E ，

$$\therefore BE = \frac{1}{2}BC' = 2,$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{BE}{BF} = \frac{2}{\frac{7}{2}} = \frac{4}{7},$$

故答案为： $\frac{2}{7}$ 或 $\frac{4}{7}$ 。

【分析】本题考查新定义运算与二次函数综合，涉及二次函数性质、分式化简求值等知识，读懂题意，理解新定义抛物线的“开口大小”，利用二次函数图象与性质将一般式化为顶点式

得到 $-\frac{1}{2} = \frac{1}{x' - \frac{1}{3}}$ ，按照定义求解即可得到答案，熟记二次函数图象与性质、理解新定义是解决问题的关键。

【详解】解：根据抛物线的“开口大小”的定义可知 $y - k = a(x - m)^2$ 中存在一点 $P(x', y')$ ，使

$$\text{得 } x' - m = y' - k \neq 0, \text{ 则 } a = \frac{y' - k}{(x' - m)^2} = \frac{1}{x' - m},$$

$$\begin{aligned} \because y &= -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3 \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) + 3 \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) + 3 \\ &= -\frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{18} + 3 \\ &= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{55}{18}, \end{aligned}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3 \text{ 中存在一点 } P(x', y'), \text{ 有 } -\frac{1}{2} = \frac{1}{x' - \frac{1}{3}}, \text{ 解得 } x' - \frac{1}{3} = -2, \text{ 则 } 2\left|x' - \frac{1}{3}\right| = 4,$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x + 3 \text{ “开口大小”为 } 4,$$

故答案为：4.

19. $2\sqrt{6}$

【分析】本题考查了绝对值，二次根式，零指数幂等，掌握化简法则是解题的关键。先化简绝对值，二次根式，零指数幂，再根据实数的运算法则进行计算。

$$\begin{aligned} \text{【详解】解：} & |1 - \sqrt{3}| + 24^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} - (1 - \sqrt{3})^0 \\ &= \sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{6} + \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} - 1 \\ &= \sqrt{3} - 1 + 2\sqrt{6} + 2 - \sqrt{3} - 1 \\ &= 2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

20. $x = 4, y = 1$ 或者 $x = -6, y = 6$.

【分析】本题考查了二元二次方程，求解一元二次方程，解题的关键是利用代入法进行求

解.

$$\text{【详解】解: } \begin{cases} x^2 - 3xy - 4y^2 = 0 \text{①} \\ x + 2y = 6 \text{②} \end{cases},$$

由②得: $x = 6 - 2y$ 代入①中得:

$$(6 - 2y)^2 - 3(6 - 2y)y - 4y^2 = 0,$$

$$(36 - 24y + 4y^2) - 18y + 6y^2 - 4y^2 = 0,$$

$$6y^2 - 42y + 36 = 0,$$

$$6(y^2 - 7y + 6) = 0,$$

$$6(y - 6)(y - 1) = 0$$

解得: $y = 1$ 或 $y = 6$,

当 $y = 1$ 时, $x = 6 - 2 \times 1 = 4$,

当 $y = 6$ 时, $x = 6 - 2 \times 6 = -6$,

\therefore 方程组的解为 $x = 4, y = 1$ 或者 $x = -6, y = 6$.

21. (1) $k = -6$, $m = 2$;

$$(2) \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

【分析】本题考查了反比例函数与一次函数, 锐角三角函数, 勾股定理等知识, 解题的关键是:

(1) 把 B 的坐标代入 $y = -2x + 4$, 求出 n , 然后把 B 的坐标代入 $y = \frac{k}{x}$, 求出 k , 最后把 A 的坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ 求出 m 即可;

(2) 根据 $l \parallel x$ 轴求出 C 的纵坐标, 然后代入 $y = -2x + 4$, 求出 C 的横坐标, 利用勾股定理求出 OC , 最后根据正弦的定义求解即可.

【详解】(1) 解: 把 $B(n, 6)$ 代入 $y = -2x + 4$,

$$\text{得 } 6 = -2n + 4,$$

解得 $n = -1$,

$$\therefore B(-1, 6),$$

把 $B(-1,6)$ 代入 $y = \frac{k}{x}$,

得 $k = -1 \times 6 = -6$,

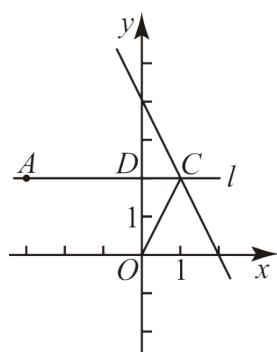
$$\therefore y = -\frac{6}{x},$$

把 $A(-3,m)$ 代入 $y = -\frac{6}{x}$,

$$\text{得 } m = -\frac{6}{-3} = 2;$$

(2) 解: 由 (1) 知: $A(-3,2)$

设 l 与 y 轴相交于 D ,



$\because l \parallel x$ 轴, x 轴 \perp y 轴,

$\therefore A, C, D$ 的纵坐标相同, 均为 2, $\angle CDO = 90^\circ$,

把 $y = 2$ 代入 $y = -2x + 4$, 得 $2 = -2x + 4$,

解得 $x = 1$,

$$\therefore C(1,2),$$

$$\therefore CD = 1, OD = 2,$$

$$\therefore OC = \sqrt{CD^2 + OD^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \sin \angle OCA = \frac{OD}{OC} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

22. (1) ① 等腰直角三角板直角边为 $\sqrt{2}h$, 含 30° 的直角三角形板直角边为 $2h$ 和 $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$; ②

底为 $(2 - \sqrt{2})h$, 高为 $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}h$, 面积为 $\frac{6\sqrt{2} - 6 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3}h^2$;

(2) 画图见解析.

【分析】(1) ① 解直角三角形即可求解;

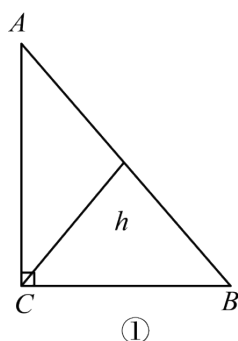
② 由题意可知四边形 $MNGH$ 是矩形，利用线段的和差可求出矩形的边长，进而可求出面积；

(2) 根据题意画出图形即可；

本题考查了解直角三角形，矩形的判定，矩形的面积，图形设计，正确识图是解题的关键。

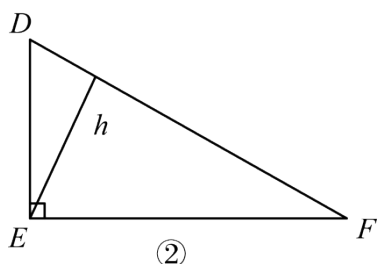
【详解】(1) 解：① 如图①， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角板， $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\text{则 } AC = BC = \frac{h}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}h;$$



如图2， $\triangle DEF$ 为含 30° 的直角三角形板， $\angle DEF = 90^\circ$ ， $\angle F = 30^\circ$ ， $D = 60^\circ$ ，

$$\text{则 } EF = 2h, \quad DE = \frac{h}{\sin 60^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{3}h;$$



综上，等腰直角三角板直角边为 $\sqrt{2}h$ ，含 30° 的直角三角形板直角边为 $2h$ 和 $\frac{2\sqrt{3}}{3}h$ ；

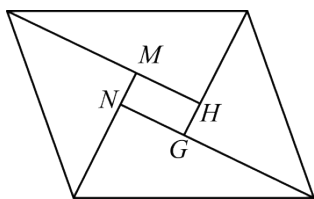
② 由题意可知 $\angle MNG = \angle NGH = \angle GHM = \angle HMN = 90^\circ$ ，

\therefore 四边形 $MNGH$ 是矩形，

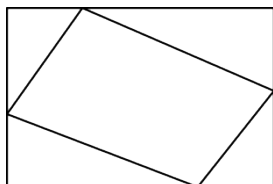
$$\text{由图可得, } MN = \sqrt{2}h - \frac{2\sqrt{3}}{3}h = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}h, \quad MH = 2h - \sqrt{2}h = (2 - \sqrt{2})h,$$

$$\therefore S_{\text{矩形EFGH}} = MN \cdot MH = \frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}h \times (2 - \sqrt{2})h = \frac{6\sqrt{2} - 6 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3}h^2,$$

故小平行四边形的底为 $(2 - \sqrt{2})h$ ，高为 $\frac{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3}h$ ，面积为 $\frac{6\sqrt{2} - 6 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{3}h^2$ ；



(2) 解：如图，即为所作图形．



23. (1)证明见解析

(2)证明见解析

【分析】(1) 由矩形性质得到 $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle ADE = 90^\circ$ ， $AB = DC$ ，由角的互余得到 $\angle ABD = \angle DAE$ ，从而确定 $\triangle ADE \sim \triangle BAD$ ，利用相似三角形性质得到 $AD^2 = DE \cdot DC$ ；

(2) 由矩形性质，结合题中条件，利用等腰三角形的判定与性质得到 $OA = OD = EF = CF$ ， $\angle ODA = \angle OAD$ ， $\angle FEC = \angle FCE$ ，进而由三角形全等的判定与性质即可得到．

【详解】(1) 证明：在矩形 $ABCD$ 中， $\angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle ADE = 90^\circ$ ， $AB = DC$ ，

$$\therefore \angle ABD + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because AE \perp BD,$$

$$\therefore \angle DAE + \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle DAE,$$

$$\because \angle BAD = \angle ADE = 90^\circ,$$

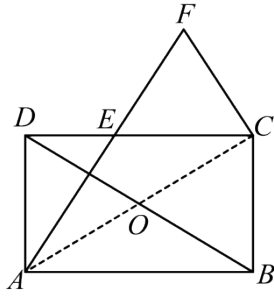
$$\therefore \triangle ADE \sim \triangle BAD,$$

$$\therefore \frac{AD}{BA} = \frac{DE}{AD}, \text{ 即 } AD^2 = DE \cdot BA,$$

$$\because AB = DC,$$

$$\therefore AD^2 = DE \cdot DC;$$

(2) 证明：连接 AC 交 BD 于点 O ，如图所示：



在矩形 $ABCD$ 中, $\angle ADE = 90^\circ$, 则 $\angle DAE + \angle AED = 90^\circ$,

$\therefore AE \perp BD$,

$\therefore \angle DAE + \angle ADB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADB = \angle AED$,

$\therefore \angle FEC = \angle AED$,

$\therefore \angle ADO = \angle FEC$,

在矩形 $ABCD$ 中, $OA = OD = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore EF = CF = \frac{1}{2}BD$,

$\therefore OA = OD = EF = CF$,

$\therefore \angle ADO = \angle OAD$, $\angle FEC = \angle FCE$,

$\therefore \angle ADO = \angle FEC$,

$\therefore \angle ADO = \angle OAD = \angle FEC = \angle FCE$,

在 $\triangle ODA$ 和 $\triangle FEC$ 中,

$$\begin{cases} \angle ODA = \angle FEC \\ \angle OAD = \angle FCE \\ OD = FE \end{cases}$$

$\therefore \triangle ODA \cong \triangle FEC$ (AAS),

$\therefore CE = AD$.

【点睛】 本题考查矩形综合, 涉及矩形性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质等知识, 熟练掌握相关几何性质与判定是解决问题第的关键.

24. (1) $y = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3$ 或 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$;

(2) ① $0 < m < 1$; ② $P\left(7, \frac{16}{3}\right)$.

【分析】(1) 设平移抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2$ 后得到的新抛物线为 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ ，把 $A\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ 和

$B(5, 0)$ 代入可得答案；

(2) ①如图，设 $Q\left(x, \frac{1}{3}x^2\right)$ ，则 $P\left(x, \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}\right)$ ， $PQ = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ ，结合 PQ 小于 3，可得 $\frac{4}{3}x + \frac{5}{3} < 3$ ，结合 $x = m (m > 0)$ ，从而可得答案；②先确定平移方式为，向右平移 2 个单位，

向下平移 3 个单位，由题意可得：P 在 B 的右边，当 $BP' \parallel PQ$ 时，可得 $P'\left(5, \frac{25}{3}\right)$ ，结合平

移的性质可得答案如图，当 $P'Q \parallel BP$ 时，则 $\angle P'QT = \angle BPT$ ，过 P' 作 $P'S \perp QP$ 于 S，证明

$\triangle P'SQ \sim \triangle BTP$ ，可得 $\frac{QS}{P'S} = \frac{PT}{BT}$ ，设 $P'\left(x, \frac{1}{3}x^2\right)$ ，则 $P\left(x+2, \frac{1}{3}x^2 - 3\right)$ ， $S\left(x+2, \frac{1}{3}x^2\right)$ ，

$Q\left[x+2, \frac{1}{3}(x+2)^2\right]$ ，再建立方程求解即可。

【详解】(1) 解：设平移抛物线 $y = \frac{1}{3}x^2$ 后得到的新抛物线为 $y = \frac{1}{3}x^2 + bx + c$ ，

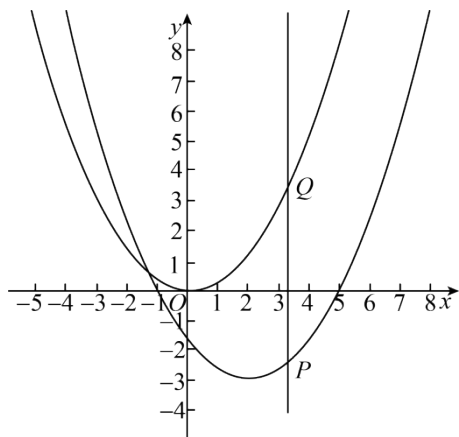
把 $A\left(0, -\frac{5}{3}\right)$ 和 $B(5, 0)$ 代入可得：

$$\begin{cases} c = -\frac{5}{3} \\ \frac{25}{3} + 5b + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} b = -\frac{4}{3} \\ c = -\frac{5}{3} \end{cases},$$

\therefore 新抛物线为 $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$ ；

(2) 解：①如图，设 $Q\left(x, \frac{1}{3}x^2\right)$ ，则 $P\left(x, \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}\right)$ ，



$$\therefore PQ = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3},$$

$$\therefore PQ \text{ 小于 } 3,$$

$$\therefore \frac{4}{3}x + \frac{5}{3} < 3,$$

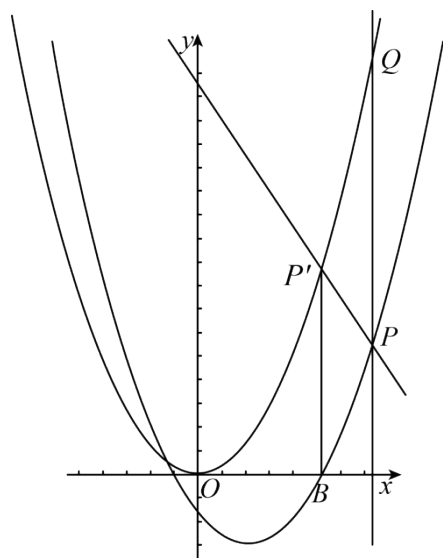
$$\therefore x < 1,$$

$$\therefore x = m (m > 0),$$

$$\therefore 0 < m < 1;$$

$$\textcircled{2} \therefore y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}(x-2)^2 - 3,$$

\therefore 平移方式为，向右平移 2 个单位，向下平移 3 个单位，



由题意可得：P 在 B 的右边，当 $BP' \parallel PQ$ 时，

$$\therefore BP' \perp x \text{ 轴},$$

$$\therefore x_{P'} = x_B = 5,$$

$$\therefore P' \left(5, \frac{25}{3} \right),$$

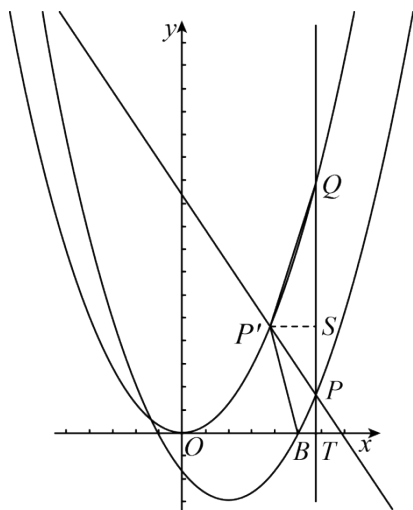
$$\text{由平移的性质可得：} P \left(5+2, \frac{25}{3}-3 \right), \text{ 即 } P \left(7, \frac{16}{3} \right);$$

如图，当 $P'Q \parallel BP$ 时，则 $\angle P'QT = \angle BPT$ ，

过 P' 作 $P'S \perp QP$ 于 S ，

$$\therefore \angle P'SQ = \angle BTP = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle P'SQ \sim \triangle BTP,$$



$$\therefore \frac{QS}{P'S} = \frac{PT}{BT},$$

$$\text{设 } P'\left(x, \frac{1}{3}x^2\right), \text{ 则 } P\left(x+2, \frac{1}{3}x^2-3\right), S\left(x+2, \frac{1}{3}x^2\right), Q\left[x+2, \frac{1}{3}(x+2)^2\right],$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{3}(x+2)^2 - \frac{1}{3}x^2}{2} = \frac{\frac{1}{3}x^2 - 3}{x+2-5},$$

解得: $x=1$ (不符合题意舍去);

$$\text{综上: } P\left(7, \frac{16}{3}\right);$$

【点睛】本题属于二次函数的综合题，抛物线的平移，利用待定系数法求解二次函数的解析式，二次函数的图象与性质，相似三角形的判定与性质，熟练的利用数形结合的方法解题是关键.

25. (1)见详解

$$(2) \textcircled{1} \frac{\sqrt{6}}{2}; \textcircled{2} \sqrt{3}$$

【分析】(1) 延长 DE, CB 交于点 G , 由 $AD \parallel BC$, 得到 $\frac{AE}{EB} = \frac{DE}{EG}$, 由已知数据得到

$$\frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}, \frac{DF}{FC} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } \frac{DE}{EG} = \frac{DF}{FC}, \text{ 因此 } EF \parallel BC;$$

(2) ①记点 O 为 $\triangle ADE$ 外接圆圆心, 过点 O 作 $OF \perp AE$ 于点 F , 连接 OA, OE, OD , 先证明 $\angle AOB = 90^\circ$, 再证明 $\triangle FAO \sim \triangle OAB$, 则 $AO^2 = AF \cdot AB$, 即 $AO^2 = \frac{3}{2}$, 求得 $AO = \frac{\sqrt{6}}{2}$;

②延长 BA, CD 交于点 P , 过点 E 作 $EQ \perp BC$, 垂足为点 Q , 由 $\triangle PAD \sim \triangle PBC$, 求得

$$PA=1, \text{ 可证明 } \triangle DCN \sim \triangle DCM, \text{ 角度推导得 } EM \parallel DC, \text{ 则 } \frac{BE}{EP} = \frac{BM}{MC}, \text{ 求出 } BE=2, \text{ 继}$$

而得到 $BM = MC = 2$ ，由 $\triangle BEM \sim \triangle BPC$ ，则 $\frac{BM}{BC} = \frac{ME}{PC} = \frac{1}{2}$ ，设 $ME = 2a$ ，则 $PC = 4a$ ，

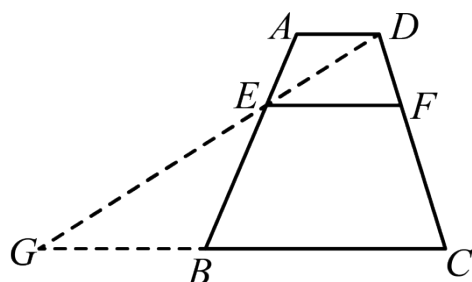
由 $AD \parallel BC$ ，设 $PD = a$ ， $DC = 3a$ ，由 $\triangle ENM \sim \triangle CND$ ，得到 $\frac{EN}{CN} = \frac{EM}{DC} = \frac{2}{3}$ ，设

$EN = 2b$ ， $CN = 3b$ ，可证明 $\triangle CNM \sim \triangle CME$ ，求出 $b = \frac{2}{15}\sqrt{15}$ ，则 $CE = \frac{2}{3}\sqrt{15}$ ，在

$\text{Rt}\triangle BQE$ ， $\text{Rt}\triangle CQE$ 中，运用勾股定理得： $4 - BQ^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{15}\right)^2 - (4 - BQ)^2$ ，则 $BQ = \frac{5}{3}$ ，在

$\text{Rt}\triangle EQM$ 中，由勾股定理得， $EM = \sqrt{EQ^2 + QM^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ ，故 $DC = \sqrt{3}$ 。

【详解】(1) 证明：延长 DE ， CB 交于点 G ，



$\because AD \parallel BC$ ，

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{DE}{EG}，$$

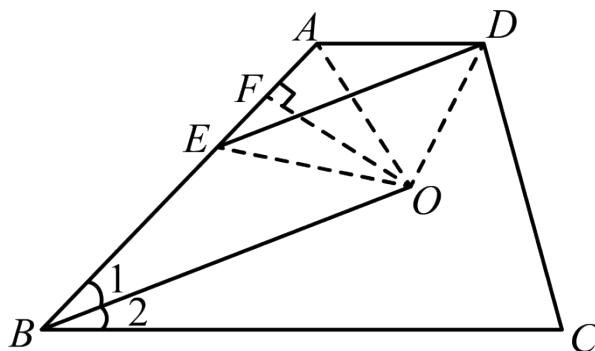
$$\because AE = \frac{1}{3}AB，DF = \frac{1}{3}CD$$

$$\therefore \frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}，\frac{DF}{FC} = \frac{1}{2}，$$

$$\therefore \frac{DE}{EG} = \frac{DF}{FC}，$$

$\therefore EF \parallel BC$ ；

(2) ①解：记点 O 为 $\triangle ADE$ 外接圆圆心，过点 O 作 $OF \perp AE$ 于点 F ，连接 OA, OE, OD ，



\because 点 O 为 $\triangle ADE$ 外接圆圆心，

$$\therefore OA = OE = OD，$$

$$\therefore AF = EF = \frac{1}{2},$$

$$\because AE = \frac{1}{3} AB,$$

$$\therefore AB = 3,$$

$$\because AE = AD, OE = OD, OA = OA,$$

$$\therefore \triangle AEO \cong \triangle ADO,$$

$$\therefore \angle EAO = \angle DAO,$$

$$\because BO \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAB + \angle ABC = 180^\circ,$$

$$\therefore 2\angle EAO + 2\angle 1 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EAO + \angle 1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\because OF \perp AE,$$

$$\therefore \angle AFO = \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\because \angle FAO = \angle OAB,$$

$$\therefore \triangle FAO \sim \triangle OAB,$$

$$\therefore \frac{AO}{AB} = \frac{FA}{AO},$$

$$\text{即 } AO^2 = AF \cdot AB,$$

$$\therefore AO^2 = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore AO = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore \triangle ADE \text{ 外接圆半径为 } \frac{\sqrt{6}}{2};$$

② 延长 BA, CD 交于点 P , 过点 E 作 $EQ \perp BC$, 垂足为点 Q ,

$$\therefore \frac{BM}{BC} = \frac{ME}{PC} = \frac{1}{2},$$

设 $ME = 2a$ ，则 $PC = 4a$ ，

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{PD}{PC} = \frac{PA}{PB} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore PD = a,$$

$$\therefore DC = 3a,$$

$$\because EM \parallel DC,$$

$$\therefore \triangle ENM \sim \triangle CND,$$

$$\therefore \frac{EN}{CN} = \frac{EM}{DC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \text{设 } EN = 2b, CN = 3b,$$

$$\because \angle 5 = \angle 6, \angle 7 = \angle 7,$$

$$\therefore \triangle CNM \sim \triangle CME,$$

$$\therefore \frac{CN}{CM} = \frac{CM}{CE},$$

$$\text{即 } CM^2 = CN \cdot CE,$$

$$\therefore 4 = 3b \cdot 5b,$$

$$\text{解得: } b = \frac{2}{15}\sqrt{15},$$

$$\therefore CE = \frac{2}{3}\sqrt{15},$$

在 $\text{Rt}\triangle BQE$, $\text{Rt}\triangle CQE$ 中，由勾股定理得：

$$BE^2 - BQ^2 = CN^2 - CQ^2,$$

$$\therefore 4 - BQ^2 = \left(\frac{2}{3}\sqrt{15}\right)^2 - (4 - BQ)^2,$$

$$\therefore BQ = \frac{5}{3},$$

$$\therefore EQ^2 = BE^2 - BQ^2 = \frac{11}{9},$$

$$\text{而 } QM = BM - BQ = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \text{在 } \text{Rt}\triangle EQM \text{ 中, 由勾股定理得, } EM = \sqrt{EQ^2 + QM^2} = \frac{2}{3}\sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{EM}{DC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DC = \sqrt{3}.$$

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理，相似三角形的判定与性质，勾股定理，三角形的外接圆等知识点，熟练掌握知识点，正确添加辅助线是解题的关键.