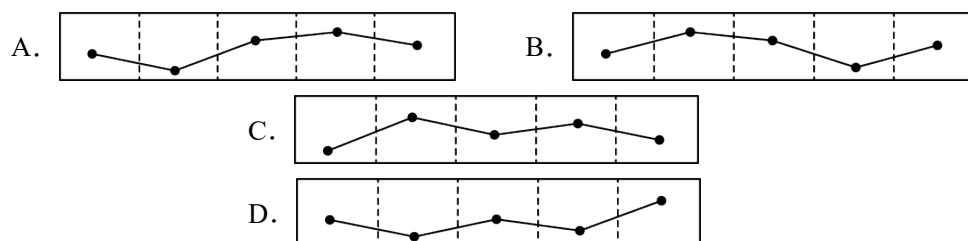
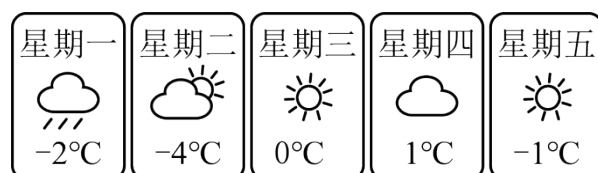


2024 年河北省中考数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

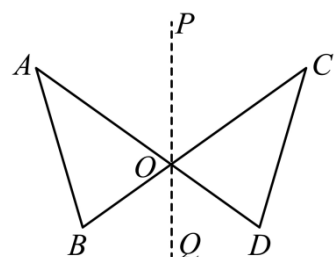
1. 如图显示了某地连续 5 天的日最低气温, 则能表示这 5 天日最低气温变化情况的是 ()



2. 下列运算正确的是 ()

A. $a^7 - a^3 = a^4$ B. $3a^2 \cdot 2a^2 = 6a^2$ C. $(-2a)^3 = -8a^3$ D. $a^4 \div a^4 = a$

3. 如图, AD 与 BC 交于点 O , $\triangle ABO$ 和 $\triangle CDO$ 关于直线 PQ 对称, 点 A, B 的对称点分别是点 C, D . 下列不一定正确的是 ()

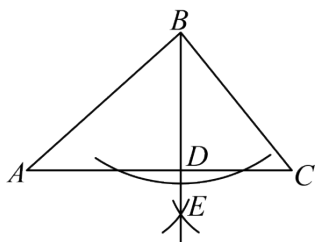


A. $AD \perp BC$ B. $AC \perp PQ$ C. $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ D. $AC \parallel BD$

4. 下列数中, 能使不等式 $5x - 1 < 6$ 成立的 x 的值为 ()

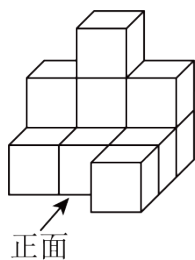
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

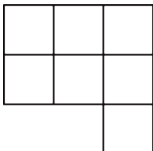
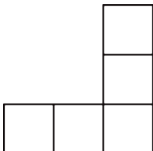
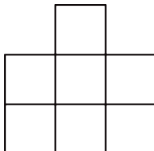
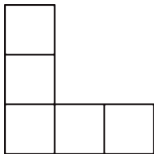
5. 观察图中尺规作图的痕迹, 可得线段 BD 一定是 $\triangle ABC$ 的 ()



- A. 角平分线 B. 高线 C. 中位线 D. 中线

6. 如图是由11个大小相同的正方体搭成的几何体，它的左视图是（ ）



- A.  B.  C.  D. 

7. 节能环保已成为人们的共识. 淇淇家计划购买 500 度电, 若平均每天用电 x 度, 则能使用 y 天. 下列说法错误的是（ ）

- A. 若 $x=5$, 则 $y=100$ B. 若 $y=125$, 则 $x=4$
C. 若 x 减小, 则 y 也减小 D. 若 x 减小一半, 则 y 增大一倍

8. 若 a, b 是正整数, 且满足 $\underbrace{2^a + 2^a + \cdots + 2^a}_{8 \text{ 个 } 2^a \text{ 相加}} = \underbrace{2^b \times 2^b \times \cdots \times 2^b}_{8 \text{ 个 } 2^b \text{ 相乘}}$, 则 a 与 b 的关系正确的是（ ）

- A. $a+3=8b$ B. $3a=8b$ C. $a+3=b^8$ D. $3a=8+b$

9. 淇淇在计算正数 a 的平方时, 误算成 a 与 2 的积, 求得的答案比正确答案小 1, 则 $a=$ （ ）

- A. 1 B. $\sqrt{2}-1$ C. $\sqrt{2}+1$ D. 1 或 $\sqrt{2}+1$

10. 下面是嘉嘉作业本上的一道习题及解答过程:

已知: 如图, $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AE 平分 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle CAN$, 点 M 是 AC 的中点, 连接 BM 并延长交 AE 于点 D , 连接 CD .

求证: 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

证明：∵ $AB = AC$ ，∴ $\angle ABC = \angle 3$ ．

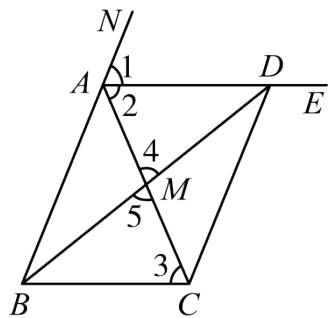
∵ $\angle CAN = \angle ABC + \angle 3$ ， $\angle CAN = \angle 1 + \angle 2$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ，

∴ ①_____．

又∵ $\angle 4 = \angle 5$ ， $MA = MC$ ，

∴ $\triangle MAD \cong \triangle MCB$ (②_____).

∴ $MD = MB$ ．∴ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形．



若以上解答过程正确，①，②应分别为（ ）

A. $\angle 1 = \angle 3$ ，AAS

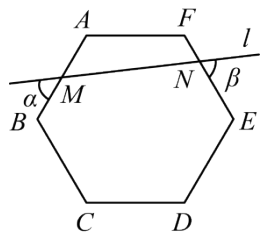
B. $\angle 1 = \angle 3$ ，ASA

C. $\angle 2 = \angle 3$ ，AAS

D. $\angle 2 = \angle 3$ ，ASA

11. 直线 l 与正六边形 $ABCDEF$ 的边 AB, EF 分别相交于点 M, N ，如图所示，则 $\alpha + \beta =$

()



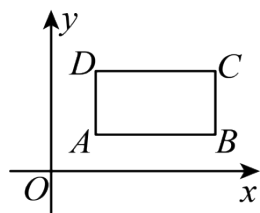
A. 115°

B. 120°

C. 135°

D. 144°

12. 在平面直角坐标系中，我们把一个点的纵坐标与横坐标的比值称为该点的“特征值”。如图，矩形 $ABCD$ 位于第一象限，其四条边分别与坐标轴平行，则该矩形四个顶点中“特征值”最小的是（ ）



A. 点 A

B. 点 B

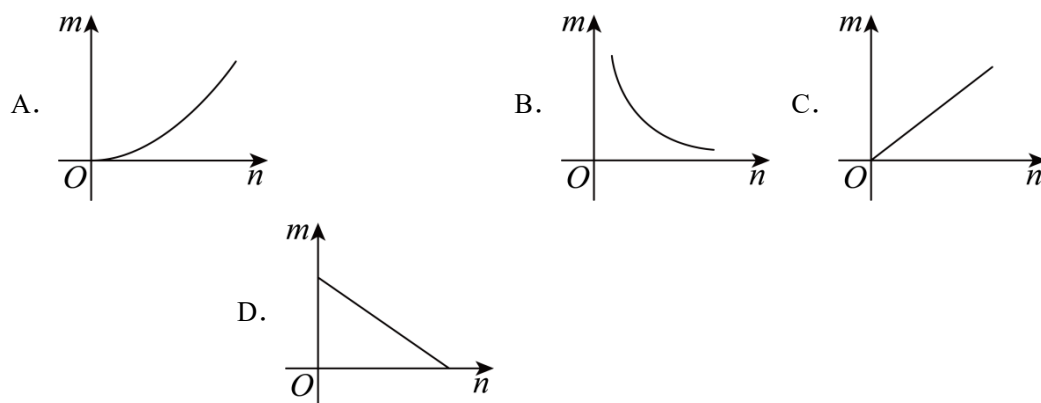
C. 点 C

D. 点 D

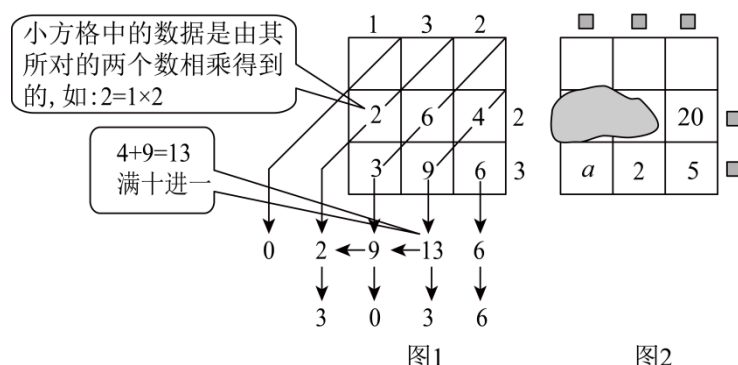
13. 已知 A 为整式, 若计算 $\frac{A}{xy+y^2} - \frac{y}{x^2+xy}$ 的结果为 $\frac{x-y}{xy}$, 则 $A = (\quad)$

- A. x B. y C. $x+y$ D. $x-y$

14. 扇文化是中华优秀传统文化的组成部分, 在我国有着深厚的底蕴. 如图, 某折扇张开的角度为 120° 时, 扇面面积为 S 、该折扇张开的角度为 n° 时, 扇面面积为 S_n , 若 $m = \frac{S_n}{S}$, 则 m 与 n 关系的图象大致是 ()



15. “铺地锦”是我国古代一种乘法运算方法, 可将多位数乘法运算转化为一位数乘法和简单的加法运算. 淇淇受其启发, 设计了如图 1 所示的“表格算法”, 图 1 表示 132×23 , 运算结果为 3036. 图 2 表示一个三位数与一个两位数相乘, 表格中部分数据被墨迹覆盖, 根据图 2 中现有数据进行推断, 正确的是 ()



- A. “20”左边的数是 16 B. “20”右边的“□”表示 5
- C. 运算结果小于 6000 D. 运算结果可以表示为 $4100a + 1025$

16. 平面直角坐标系中, 我们把横、纵坐标都是整数, 且横、纵坐标之和大于 0 的点称为“和

点”.将某“和点”平移，每次平移的方向取决于该点横、纵坐标之和除以 3 所得的余数（当余数为 0 时，向右平移；当余数为 1 时，向上平移；当余数为 2 时，向左平移），每次平移 1 个单位长度.

例：“和点” $P(2,1)$ 按上述规则连续平移 3 次后，到达点 $P_3(2,2)$ ，其平移过程如下：

$P(2,1) \xrightarrow[\text{余0}]{\text{右}} P_1(3,1) \xrightarrow[\text{余1}]{\text{上}} P_2(3,2) \xrightarrow[\text{余2}]{\text{左}} P_3(2,2)$

若“和点” Q 按上述规则连续平移 16 次后，到达点 $Q_{16}(-1,9)$ ，则点 Q 的坐标为（ ）

- A. $(6,1)$ 或 $(7,1)$ B. $(15,-7)$ 或 $(8,0)$ C. $(6,0)$ 或 $(8,0)$ D. $(5,1)$ 或 $(7,1)$

二、填空题

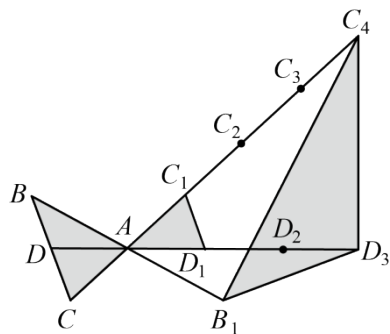
17. 某校生物小组的 9 名同学各用 100 粒种子做发芽实验，几天后观察并记录种子的发芽数分别为：89，73，90，86，75，86，89，95，89，以上数据的众数为_____.

18. 已知 a, b, n 均为正整数.

(1) 若 $n < \sqrt{10} < n+1$ ，则 $n =$ _____；

(2) 若 $n-1 < \sqrt{a} < n, n < \sqrt{b} < n+1$ ，则满足条件的 a 的个数总比 b 的个数少_____个.

19. 如图， $\triangle ABC$ 的面积为 2， AD 为 BC 边上的中线，点 A, C_1, C_2, C_3 是线段 CC_4 的五等分点，点 A, D_1, D_2 是线段 DD_3 的四等分点，点 A 是线段 BB_1 的中点.

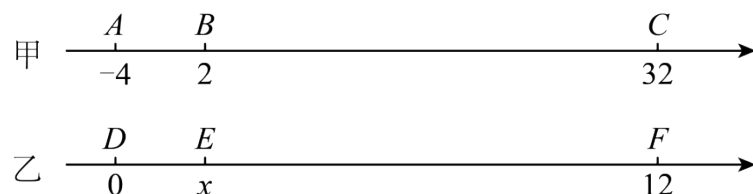


(1) $\triangle AC_1D_1$ 的面积为_____；

(2) $\triangle B_1C_4D_3$ 的面积为_____.

三、解答题

20. 如图，有甲、乙两条数轴．甲数轴上的三点 A ， B ， C 所对应的数依次为 -4 ， 2 ， 32 ，乙数轴上的三点 D ， E ， F 所对应的数依次为 0 ， x ， 12 ．



(1) 计算 A ， B ， C 三点所对应的数的和，并求 $\frac{AB}{AC}$ 的值；

(2) 当点 A 与点 D 上下对齐时，点 B ， C 恰好分别与点 E ， F 上下对齐，求 x 的值．

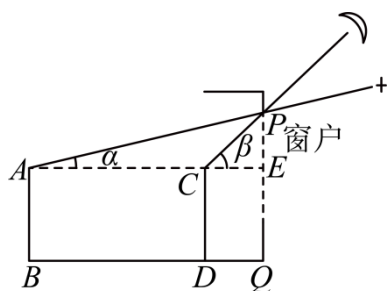
21. 甲、乙、丙三张卡片正面分别写有 $a+b$ ， $2a+b$ ， $a-b$ ，除正面的代数式不同外，其余均相同．

	$a+b$	$2a+b$	$a-b$
$a+b$	$2a+2b$		$2a$
$2a+b$			
$a-b$	$2a$		

(1) 将三张卡片背面向上并洗匀，从中随机抽取一张，当 $a=1$ ， $b=-2$ 时，求取出的卡片上代数式的值为负数的概率；

(2) 将三张卡片背面向上并洗匀，从中随机抽取一张，放回后重新洗匀，再随机抽取一张．请在表格中补全两次取出的卡片上代数式之和的所有可能结果（化为最简），并求出和为单项式的概率．

22. 中国的探月工程激发了同学们对太空的兴趣．某晚，淇淇在家透过窗户的最高点 P 恰好看到一颗星星，此时淇淇距窗户的水平距离 $BQ=4\text{m}$ ，仰角为 α ；淇淇向前走了 3m 后到达点 D ，透过点 P 恰好看到月亮，仰角为 β ，如图是示意图．已知，淇淇的眼睛与水平地面 BQ 的距离 $AB=CD=1.6\text{m}$ ，点 P 到 BQ 的距离 $PQ=2.6\text{m}$ ， AC 的延长线交 PQ 于点 E ．（注：图中所有点均在同一平面）



(1)求 β 的大小及 $\tan \alpha$ 的值;

(2)求 CP 的长及 $\sin \angle APC$ 的值.

23. 情境 图 1 是由正方形纸片去掉一个以中心 O 为顶点的等腰直角三角形后得到的.

该纸片通过裁剪, 可拼接为图 2 所示的钻石型五边形, 数据如图所示.

(说明: 纸片不折叠, 拼接不重叠无缝隙无剩余)

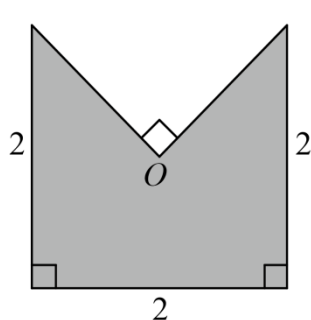


图 1

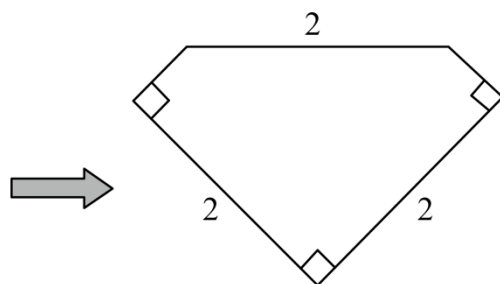


图 2

操作 嘉嘉将图 1 所示的纸片通过裁剪, 拼成了钻石型五边形.

如图 3, 嘉嘉沿虚线 EF , GH 裁剪, 将该纸片剪成①, ②, ③三块, 再按照图 4 所示进行拼接. 根据嘉嘉的剪拼过程, 解答问题:

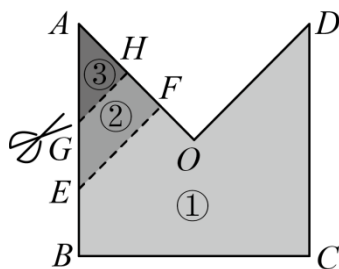


图 3

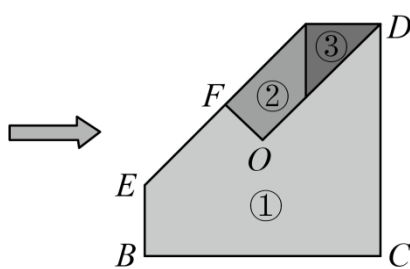


图 4

(1) 直接写出线段 EF 的长;

(2) 直接写出图 3 中所有与线段 BE 相等的线段, 并计算 BE 的长.

探究淇淇说: 将图 1 所示纸片沿直线裁剪, 剪成两块, 就可以拼成钻石型五边形.

请你按照淇淇的说法设计一种方案: 在图 5 所示纸片的 BC 边上找一点 P (可以借助刻度尺或圆规), 画出裁剪线 (线段 PQ) 的位置, 并直接写出 BP 的长.

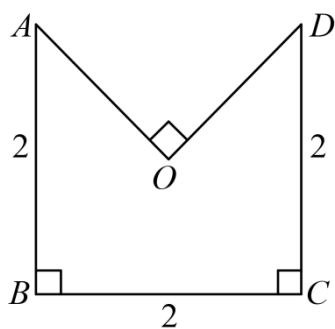


图 5

24. 某公司为提高员工的专业能力, 定期对员工进行技能测试, 考虑多种因素影响, 需将测试的原始成绩 x (分) 换算为报告成绩 y (分). 已知原始成绩满分 150 分, 报告成绩满分 100 分、换算规则如下:

$$\text{当 } 0 \leq x < p \text{ 时, } y = \frac{80x}{p};$$

$$\text{当 } p \leq x \leq 150 \text{ 时, } y = \frac{20(x-p)}{150-p} + 80.$$

(其中 p 是小于 150 的常数, 是原始成绩的合格分数线, 80 是报告成绩的合格分数线)

公司规定报告成绩为 80 分及 80 分以上 (即原始成绩为 p 及 p 以上) 为合格.

(1) 甲、乙的原始成绩分别为 95 分和 130 分, 若 $p=100$, 求甲、乙的报告成绩;

(2) 丙、丁的报告成绩分别为 92 分和 64 分, 若丙的原始成绩比丁的原始成绩高 40 分, 请推算 p 的值:

(3) 下表是该公司 100 名员工某次测试的原始成绩统计表:

原始成绩 (分)	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150
人数	1	2	2	5	8	10	7	16	20	15	9	5

① 直接写出这 100 名员工原始成绩的中位数;

② 若①中的中位数换算成报告成绩为 90 分, 直接写出该公司此次测试的合格率.

25. 已知 $\odot O$ 的半径为 3, 弦 $MN = 2\sqrt{5}$, $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 3\sqrt{2}$. 在平面上, 先将 $\triangle ABC$ 和 $\odot O$ 按图 1 位置摆放 (点 B 与点 N 重合, 点 A 在 $\odot O$ 上, 点 C 在 $\odot O$ 内), 随后移动 $\triangle ABC$, 使点 B 在弦 MN 上移动, 点 A 始终在 $\odot O$ 上随之移动, 设 $BN = x$.

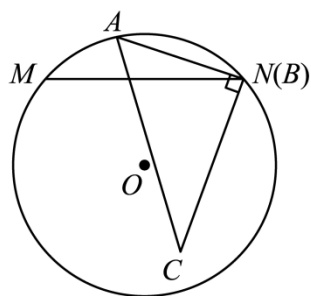


图1

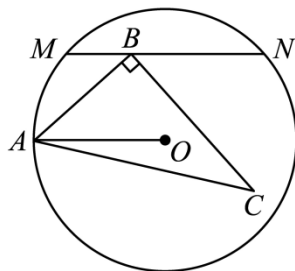
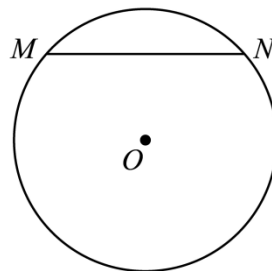


图2



备用图

(1) 当点 B 与点 N 重合时, 求劣弧 \widehat{AN} 的长;

(2) 当 $OA \parallel MN$ 时, 如图 2, 求点 B 到 OA 的距离, 并求此时 x 的值;

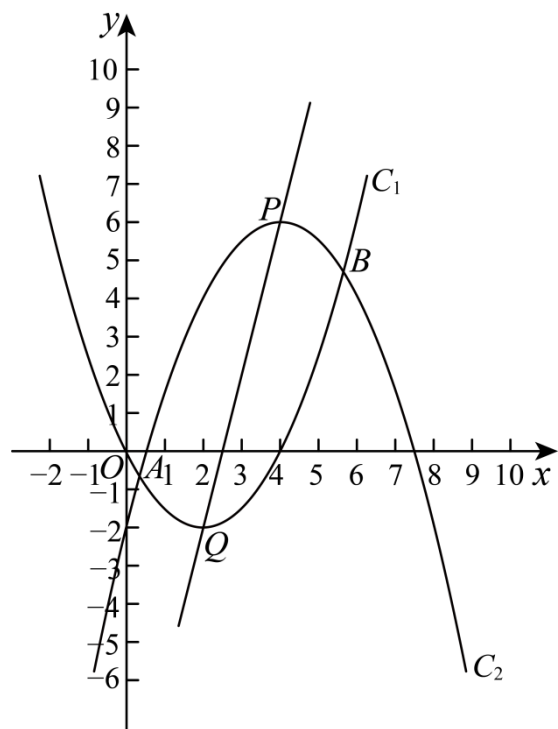
(3) 设点 O 到 BC 的距离为 d .

① 当点 A 在劣弧 \widehat{MN} 上, 且过点 A 的切线与 AC 垂直时, 求 d 的值;

② 直接写出 d 的最小值.

26. 如图, 抛物线 $C_1: y = ax^2 - 2x$ 过点 $(4, 0)$, 顶点为 Q . 抛物线 $C_2: y = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2$

(其中 t 为常数, 且 $t > 2$), 顶点为 P .



(1) 直接写出 a 的值和点 Q 的坐标.

(2) 嘉嘉说: 无论 t 为何值, 将 C_1 的顶点 Q 向左平移 2 个单位长度后一定落在 C_2 上.

淇淇说: 无论 t 为何值, C_2 总经过一个定点.

请选择其中一人的说法进行说理.

(3)当 $t=4$ 时,

①求直线 PQ 的解析式;

②作直线 $l \parallel PQ$, 当 l 与 C_2 的交点到 x 轴的距离恰为 6 时, 求 l 与 x 轴交点的横坐标.

(4)设 C_1 与 C_2 的交点 A, B 的横坐标分别为 x_A, x_B , 且 $x_A < x_B$. 点 M 在 C_1 上, 横坐标为 $m (2 \leq m \leq x_B)$. 点 N 在 C_2 上, 横坐标为 $n (x_A \leq n \leq t)$. 若点 M 是到直线 PQ 的距离最大的点, 最大距离为 d , 点 N 到直线 PQ 的距离恰好也为 d , 直接用含 t 和 m 的式子表示 n .

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	A	A	B	D	C	A	C	D
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	B	B	A	C	D	D				

1. A

【分析】本题考查了正负数的大小比较，熟练掌握正负数大小比较的方法解题的关键.

由五日气温为 -2°C , -4°C , 0°C , 1°C , -1°C 得到 $-2 > -4$, $-4 < 0 < 1$, $1 > -1$, 则气温变化为先下降, 然后上升, 再上升, 再下降.

【详解】解: 由五日气温为 -2°C , -4°C , 0°C , 1°C , -1°C 得到 $-2 > -4$, $-4 < 0 < 1$, $1 > -1$

\therefore 气温变化为先下降, 然后上升, 再上升, 再下降.

故选: A.

2. C

【分析】本题考查整式的运算, 根据合并同类项, 单项式乘以单项式, 积的乘方, 同底数幂的除法依次对各选项逐一分析判断即可. 解题的关键是掌握整式运算的相关法则.

【详解】解: A. a^7 , a^4 不是同类项, 不能合并, 故此选项不符合题意;

B. $3a^2 \cdot 2a^2 = 6a^4$, 故此选项不符合题意;

C. $(-2a)^3 = -8a^3$, 故此选项符合题意;

D. $a^4 \div a^4 = 1$, 故此选项不符合题意.

故选: C.

3. A

【分析】本题考查了轴对称图形的性质, 平行线的判定, 熟练掌握知识点是解题的关键.

根据轴对称图形的性质即可判断 B、C 选项, 再根据垂直于同一条直线的两条直线平行即可判断选项 D.

【详解】解: 由轴对称图形的性质得到 $\triangle ABO \cong \triangle CDO$, $AC \perp PQ$, $BD \perp PQ$,

$\therefore AC \parallel BD$,

\therefore B、C、D 选项不符合题意,

故选: A.

4. A

【分析】本题考查了解不等式, 不等式的解, 熟练掌握解不等式是解题的关键. 解不等式,

得到 $x < \frac{7}{5}$ ，以此判断即可.

【详解】解： $\because 5x - 1 < 6$,

$$\therefore x < \frac{7}{5}.$$

\therefore 符合题意的是 A

故选 A.

5. B

【分析】本题考查的是三角形的高的定义，作线段的垂线，根据作图痕迹可得 $BD \perp AC$ ，从而可得答案.

【详解】解：由作图可得： $BD \perp AC$ ，

\therefore 线段 BD 一定是 $\triangle ABC$ 的高线；

故选 B

6. D

【分析】本题考查简单组合体的三视图，左视图每一列的小正方体个数，由该方向上的小正方体个数最多的那个来确定，通过观察即可得出结论. 掌握几何体三种视图之间的关系是解题的关键.

【详解】解：通过左边看可以确定出左视图一共有 3 列，每列上小正方体个数从左往右分别为 3、1、1.

故选：D.

7. C

【分析】本题考查的是反比例函数的实际应用，先确定反比例函数的解析式，再逐一分析判断即可.

【详解】解： \because 淇淇家计划购买 500 度电，平均每天用电 x 度，能使用 y 天.

$$\therefore xy = 500,$$

$$\therefore y = \frac{500}{x},$$

当 $x = 5$ 时， $y = 100$ ，故 A 不符合题意；

当 $y = 125$ 时， $x = \frac{500}{125} = 4$ ，故 B 不符合题意；

$$\because x > 0, y > 0,$$

\therefore 当 x 减小，则 y 增大，故 C 符合题意；

若 x 减小一半, 则 y 增大一倍, 表述正确, 故 D 不符合题意;

故选: C.

8. A

【分析】本题考查了同底数幂的乘法, 幂的乘方的运算的应用, 熟练掌握知识点是解题的关键.

由题意得: $8 \times 2^a = (2^b)^8$, 利用同底数幂的乘法, 幂的乘方化简即可.

【详解】解: 由题意得: $8 \times 2^a = (2^b)^8$,

$$\therefore 2^3 \times 2^a = 2^{8b},$$

$$\therefore 3 + a = 8b,$$

故选: A.

9. C

【分析】本题考查了一元二次方程的应用, 解一元二次方程, 熟练掌握知识点是解题的关键.

由题意得方程 $2a + 1 = a^2$, 利用公式法求解即可.

【详解】解: 由题意得: $2a + 1 = a^2$,

解得: $a = 1 + \sqrt{2}$ 或 $a = 1 - \sqrt{2}$ (舍)

故选: C.

10. D

【分析】本题考查平行四边形的判定, 全等三角形的判定与性质, 根据等边对等角得

$\angle ABC = \angle 3$, 根据三角形外角的性质及角平分线的定义可得 $\angle 2 = \angle 3$, 证明

$\triangle MAD \cong \triangle MCB$, 得到 $MD = MB$, 再结合中点的定义得出 $MA = MC$, 即可得证. 解题的关键是掌握: 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

【详解】证明: $\because AB = AC$, $\therefore \angle ABC = \angle 3$.

$$\because \angle CAN = \angle ABC + \angle 3, \quad \angle CAN = \angle 1 + \angle 2, \quad \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \textcircled{1} \angle 2 = \angle 3.$$

$$\text{又} \because \angle 4 = \angle 5, \quad MA = MC,$$

$$\therefore \triangle MAD \cong \triangle MCB \quad (\textcircled{2} \text{ASA}).$$

$$\therefore MD = MB. \therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形.}$$

故选: D.

11. B

【分析】本题考查了多边形的内角和，正多边形的每个内角，邻补角，熟练掌握知识点是解决本题的关键.

先求出正六边形的每个内角为 120° ，再根据六边形 $MBCDEN$ 的内角和为 720° 即可求解 $\angle ENM + \angle NMB$ 的度数，最后根据邻补角的意义即可求解.

【详解】解：正六边形每个内角为： $\frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$ ，

而六边形 $MBCDEN$ 的内角和也为 $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$ ，

$$\therefore \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle ENM + \angle NMB = 720^\circ,$$

$$\therefore \angle ENM + \angle NMB = 720^\circ - 4 \times 120^\circ = 240^\circ,$$

$$\therefore \beta + \angle ENM + \alpha + \angle NMB = 180^\circ \times 2 = 360^\circ,$$

$$\therefore \alpha + \beta = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ,$$

故选：B.

12. B

【分析】本题考查的是矩形的性质，坐标与图形，分式的值的大小比较，设 $A(a,b)$ ，

$AB=m$ ， $AD=n$ ，可得 $D(a,b+n)$ ， $B(a+m,b)$ ， $C(a+m,b+n)$ ，再结合新定义与分式的值的大小比较即可得到答案.

【详解】解：设 $A(a,b)$ ， $AB=m$ ， $AD=n$ ，

\therefore 矩形 $ABCD$ ，

$$\therefore AD=BC=n, AB=CD=m,$$

$$\therefore D(a,b+n), B(a+m,b), C(a+m,b+n),$$

$$\therefore \frac{b}{a+m} < \frac{b}{a} < \frac{b+n}{a}, \text{ 而 } \frac{b}{a+m} < \frac{b+n}{a+m},$$

\therefore 该矩形四个顶点中“特征值”最小的是点 B ;

故选：B.

13. A

【分析】本题考查了分式的加减运算，分式的通分，平方差公式，熟练掌握分式的加减运算法则是解题的关键.

由题意得 $\frac{y}{x^2+xy} + \frac{x-y}{xy} = \frac{A}{xy+y^2}$ ，对 $\frac{y}{x^2+xy} + \frac{x-y}{xy}$ 进行通分化简即可.

【详解】解：∵ $\frac{A}{xy+y^2} - \frac{y}{x^2+xy}$ 的结果为 $\frac{x-y}{xy}$ ，

$$\therefore \frac{y}{x^2+xy} + \frac{x-y}{xy} = \frac{A}{xy+y^2},$$

$$\therefore \frac{y^2}{xy(x+y)} + \frac{(x-y)(x+y)}{xy(x+y)} = \frac{x^2}{xy(x+y)} = \frac{x}{xy+y^2} = \frac{A}{xy+y^2},$$

$$\therefore A = x,$$

故选：A.

14. C

【分析】本题考查正比例函数的应用，扇形的面积，设该扇面所在圆的半径为 R ，根据扇形的面积公式表示出 $\pi R^2 = 3S$ ，进一步得出 $S_n = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{nS}{120}$ ，再代入 $m = \frac{S_n}{S}$ 即可得出结论．掌握扇形的面积公式是解题的关键．

【详解】解：设该扇面所在圆的半径为 R ，

$$S = \frac{120\pi R^2}{360} = \frac{\pi R^2}{3},$$

$$\therefore \pi R^2 = 3S,$$

∵ 该折扇张开的角度为 n° 时，扇面面积为 S_n ，

$$\therefore S_n = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{n}{360} \times \pi R^2 = \frac{n}{360} \times 3S = \frac{nS}{120},$$

$$\therefore m = \frac{S_n}{S} = \frac{\frac{nS}{120}}{S} = \frac{n}{120} = \frac{1}{120}n,$$

∴ m 是 n 的正比例函数，

$$\therefore n \geq 0,$$

∴ 它的图像是过原点的一条射线．

故选：C.

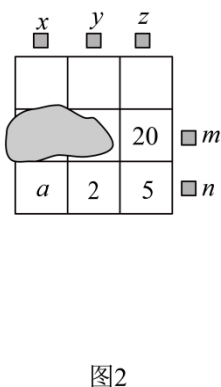
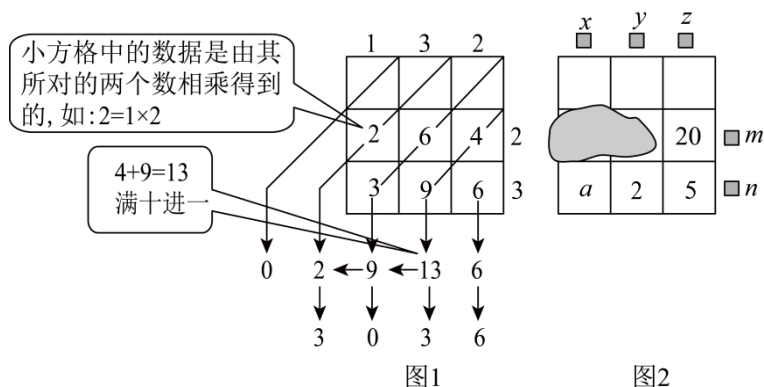
15. D

【分析】本题考查了整式的加法运算，整式的乘法运算，理解题意，正确的逻辑推理时解决本题的关键．

设一个三位数与一个两位数分别为 $100x+10y+z$ 和 $10m+n$ ，则 $mz=20, nz=5, ny=2, nx=a$ ，即 $m=4n$ ，可确定 $n=1, y=2$ 时，则 $m=4, z=5, x=a$ ，由题意可判断 A、B 选项，根据题意可得运算结果可以表示为： $1000(4a+1)+100a+25=4100a+1025$ ，故可判断 C、D 选项．

【详解】解：设一个三位数与一个两位数分别为 $100x+10y+z$ 和 $10m+n$

如图：



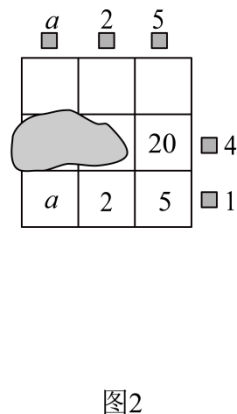
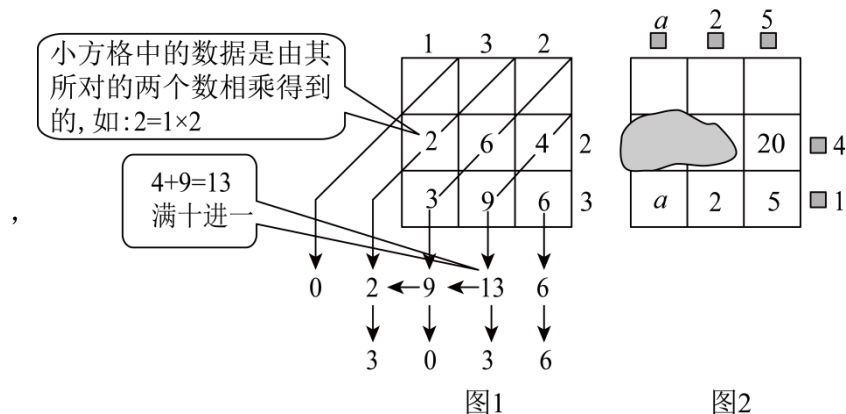
则由题意得：

$$mz = 20, nz = 5, ny = 2, nx = a,$$

$$\therefore \frac{mz}{nz} = 4, \text{ 即 } m = 4n,$$

\therefore 当 $n = 2, y = 1$ 时， $z = 2.5$ 不是正整数，不符合题意，故舍；

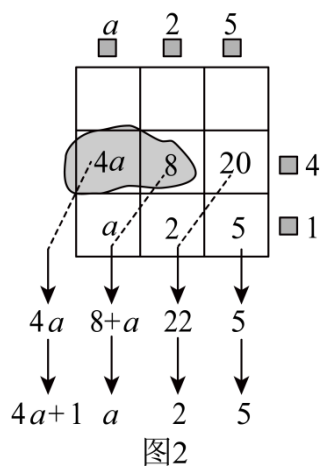
当 $n = 1, y = 2$ 时，则 $m = 4, z = 5, x = a$ ，如图：



\therefore A、“20”左边的数是 $2 \times 4 = 8$ ，故本选项不符合题意；

B、“20”右边的“□”表示4，故本选项不符合题意；

$\therefore a$ 上面的数应为 $4a$ ，如图：



∴运算结果可以表示为： $1000(4a+1)+100a+25=4100a+1025$,

∴D 选项符合题意，

当 $a=2$ 时，计算的结果大于 6000，故 C 选项不符合题意，

故选：D.

16. D

【分析】本题考查了坐标内点的平移运动，熟练掌握知识点，利用反向运动理解是解决本题的关键.

先找出规律若“和点”横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 0 时，先向右平移 1 个单位，之后按照向上、向左，向上、向左不断重复的规律平移，按照 Q_6 的反向运动理解去分类讨论：

① Q_6 先向右 1 个单位，不符合题意；② Q_6 先向下 1 个单位，再向右平移，当平移到第 15 次时，共计向下平移了 8 次，向右平移了 7 次，此时坐标为 $(6,1)$ ，那么最后一次若向右平移则为 $(7,1)$ ，若向左平移则为 $(5,1)$.

【详解】解：由点 $P_3(2,2)$ 可知横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 1，继而向上平移 1 个单位得到 $P_4(2,3)$ ，此时横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 2，继而向左平移 1 个单位得到 $P_4(1,3)$ ，此时横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 1，又要向上平移 1 个单位……，因此发现规律为若“和点”横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 0 时，先向右平移 1 个单位，之后按照向上、向左，向上、向左不断重复的规律平移，

若“和点” Q 按上述规则连续平移 16 次后，到达点 $Q_6(-1,9)$ ，则按照“和点” Q_6 反向运动 16 次求点 Q 坐标理解，可以分为两种情况：

① Q_{16} 先向右 1 个单位得到 $Q_{15}(0,9)$ ，此时横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 0，应该是 Q_{15}

向右平移 1 个单位得到 Q_{16} ，故矛盾，不成立；

② Q_{16} 先向下 1 个单位得到 $Q_{15}(-1,8)$ ，此时横、纵坐标之和除以 3 所得的余数为 1，则应该

向上平移 1 个单位得到 Q_{16} ，故符合题意，那么点 Q_{16} 先向下平移，再向右平移，当平移到第

15 次时，共计向下平移了 8 次，向右平移了 7 次，此时坐标为 $(-1+7, 9-8)$ ，即 $(6,1)$ ，那

么最后一次若向右平移则为 $(7,1)$ ，若向左平移则为 $(5,1)$ ，

故选：D.

17. 89

【分析】本题考查了众数，众数是一组数据中次数出现最多的数.

根据众数的定义求解即可判断.

【详解】解：几天后观察并记录种子的发芽数分别为：89，73，90，86，75，86，89，95，89，

\therefore 89 出现的次数最多，

\therefore 以上数据的众数为 89.

故答案为：89.

18. 3 2

【分析】本题考查的是无理数的估算以及规律探究问题，掌握探究的方法是解本题的关键；

(1) 由 $3 < \sqrt{10} < 4$ 即可得到答案；

(2) 由 $n-1$ ， n ， $n+1$ 为连续的三个自然数， $n-1 < \sqrt{a} < n$ ， $n < \sqrt{b} < n+1$ ，可得

$\sqrt{(n-1)^2} < \sqrt{a} < \sqrt{n^2}$ ， $\sqrt{n^2} < \sqrt{b} < \sqrt{(n+1)^2}$ ，再利用完全平方数之间的数据个数的特点探究规律即可得到答案.

【详解】解：(1) $\because 3 < \sqrt{10} < 4$ ，而 $n < \sqrt{10} < n+1$ ，

$\therefore n=3$ ；

故答案为：3；

(2) $\because a$ ， b ， n 均为正整数.

$\therefore n-1$ ， n ， $n+1$ 为连续的三个自然数，而 $n-1 < \sqrt{a} < n$ ， $n < \sqrt{b} < n+1$ ，

$$\therefore \sqrt{(n-1)^2} < \sqrt{a} < \sqrt{n^2}, \quad \sqrt{n^2} < \sqrt{b} < \sqrt{(n+1)^2},$$

观察 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ……,

而 $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 9$, $4^2 = 16$,

$\therefore (n-1)^2$ 与 n^2 之间的整数有 $(2n-2)$ 个,

n^2 与 $(n+1)^2$ 之间的整数有 $2n$ 个,

\therefore 满足条件的 a 的个数总比 b 的个数少 $2n - (2n-2) = 2n - 2n + 2 = 2$ (个),

故答案为: 2.

19. 1 7

【分析】(1) 根据三角形中线的性质得 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = 1$, 证明

$\triangle AC_1D_1 \cong \triangle ACD$ (SAS), 根据全等三角形的性质可得结论;

(2) 证明 $\triangle AB_1D_1 \cong \triangle ABD$ (SAS), 得 $S_{\triangle AB_1D_1} = S_{\triangle ABD} = 1$, 推出 C_1 、 D_1 、 B_1 三点共线, 得

$S_{\triangle AB_1C_1} = S_{\triangle AB_1D_1} + S_{\triangle AC_1D_1} = 2$, 继而得出 $S_{\triangle AB_1C_4} = 4S_{\triangle AB_1C_1} = 8$, $S_{\triangle AB_1D_3} = 3S_{\triangle AB_1D_1} = 3$, 证明

$\triangle C_3AD_3 \sim \triangle CAD$, 得 $S_{\triangle C_3AD_3} = 9S_{\triangle CAD} = 9$, 推出 $S_{\triangle AC_4D_3} = \frac{4}{3} S_{\triangle C_3AD_3} = 12$, 最后代入

$S_{\triangle B_1C_4D_3} = S_{\triangle AC_4D_3} + S_{\triangle AB_1D_3} - S_{\triangle AB_1C_4}$ 即可.

【详解】解: (1) 连接 B_1D_1 、 B_1D_2 、 B_1C_2 、 B_1C_3 、 C_3D_3 ,

$\therefore \triangle ABC$ 的面积为 2, AD 为 BC 边上的中线,

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 = 1,$$

\therefore 点 A, C_1 , C_2 , C_3 是线段 CC_4 的五等分点,

$$\therefore AC = AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = \frac{1}{5} CC_4,$$

\therefore 点 A, D_1 , D_2 是线段 DD_3 的四等分点,

$$\therefore AD = AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \frac{1}{4} DD_3,$$

\therefore 点 A 是线段 BB_1 的中点,

$$\therefore AB = AB_1 = \frac{1}{2} BB_1,$$

在 $\triangle AC_1D_1$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\begin{cases} AC_1 = AC \\ \angle C_1AD_1 = \angle CAD, \\ AD_1 = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AC_1D_1 \cong \triangle ACD (\text{SAS}),$$

$$\therefore S_{\triangle AC_1D_1} = S_{\triangle ACD} = 1, \quad \angle C_1D_1A = \angle CDA,$$

$$\therefore \triangle AC_1D_1 \text{ 的面积为 } 1,$$

故答案为: 1;

(2) 在 $\triangle AB_1D_1$ 和 $\triangle ABD$ 中,

$$\begin{cases} AB_1 = AB \\ \angle B_1AD_1 = \angle BAD, \\ AD_1 = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AB_1D_1 \cong \triangle ABD (\text{SAS}),$$

$$\therefore S_{\triangle AB_1D_1} = S_{\triangle ABD} = 1, \quad \angle B_1D_1A = \angle BDA,$$

$$\because \angle BDA + \angle CDA = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle B_1D_1A + \angle C_1D_1A = 180^\circ,$$

$$\therefore C_1, D_1, B_1 \text{ 三点共线},$$

$$\therefore S_{\triangle AB_1C_1} = S_{\triangle AB_1D_1} + S_{\triangle AC_1D_1} = 1 + 1 = 2,$$

$$\because AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4,$$

$$\therefore S_{\triangle AB_1C_4} = 4S_{\triangle AB_1C_1} = 4 \times 2 = 8,$$

$$\because AD_1 = D_1D_2 = D_2D_3, \quad S_{\triangle AB_1D_1} = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle AB_1D_3} = 3S_{\triangle AB_1D_1} = 3 \times 1 = 3,$$

在 $\triangle AC_3D_3$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\because \frac{AC_3}{AC} = 3 = \frac{AD_3}{AD}, \quad \angle C_3AD_3 = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle C_3AD_3 \sim \triangle CAD,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle C_3AD_3}}{S_{\triangle CAD}} = \left(\frac{AC_3}{AC} \right)^2 = 3^2 = 9,$$

$$\therefore S_{\triangle C_3AD_3} = 9S_{\triangle CAD} = 9 \times 1 = 9,$$

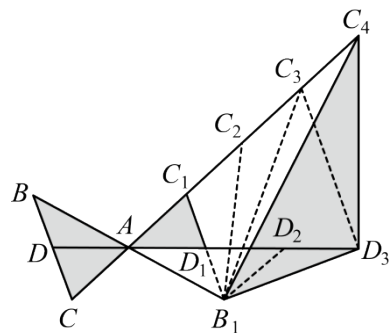
$$\because AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4,$$

$$\therefore S_{\triangle AC_4D_3} = \frac{4}{3}S_{\triangle C_3AD_3} = \frac{4}{3} \times 9 = 12,$$

$$\therefore S_{\triangle B_1C_4D_3} = S_{\triangle AC_4D_3} + S_{\triangle AB_1D_3} - S_{\triangle AB_1C_4} = 12 + 3 - 8 = 7,$$

$$\therefore \triangle B_1C_4D_3 \text{ 的面积为 } 7,$$

故答案为：7.



【点睛】本题考查三角形中线的性质，全等三角形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，等分点的意义，三角形的面积．掌握三角形中线的性质是解题的关键．

$$20. (1) 30, \frac{1}{6}$$

$$(2) x = 2$$

【分析】本题考查的是数轴上两点之间的距离的含义，一元一次方程的应用，理解题意是解本题的关键；

(1) 直接列式求解三个数的和即可，再分别计算 AB, AC ，从而可得答案；

(2) 由题意可得，对应线段是成比例的，再建立方程求解即可．

【详解】(1) 解： \because 甲数轴上的三点 A, B, C 所对应的数依次为 $-4, 2, 32$ ，

$$\therefore -4 + 2 + 32 = 30, \quad AB = 2 - (-4) = 2 + 4 = 6, \quad AC = 32 - (-4) = 32 + 4 = 36,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6};$$

(2) 解： \because 点 A 与点 D 上下对齐时，点 B, C 恰好分别与点 E, F 上下对齐，

$$\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC},$$

$$\therefore \frac{x}{6} = \frac{12}{36},$$

解得： $x = 2$ ；

21. (1) $\frac{1}{3}$

(2) 填表见解析， $\frac{4}{9}$

【分析】(1) 先分别求解三个代数式当 $a=1, b=-2$ 时的值，再利用概率公式计算即可；

(2) 先把表格补充完整，结合所有可能的结果数与符合条件的结果数，利用概率公式计算即可.

【详解】(1) 解：当 $a=1, b=-2$ 时，

$$a+b=-1, \quad 2a+b=0, \quad a-b=1-(-2)=3,$$

\therefore 取出的卡片上代数式的值为负数的概率为： $\frac{1}{3}$ ；

(2) 解：补全表格如下：

第一次 第二次 和	$a+b$	$2a+b$	$a-b$
$a+b$	$2a+2b$	$3a+2b$	$2a$
$2a+b$	$3a+2b$	$4a+2b$	$3a$
$a-b$	$2a$	$3a$	$2a-2b$

\therefore 所有等可能的结果数有 9 种，和为单项式的结果数有 4 种，

\therefore 和为单项式的概率为 $\frac{4}{9}$.

【点睛】本题考查的是代数式的值，正负数的含义，多项式与单项式的概念，利用列表法求解简单随机事件的概率，掌握基础知识是解本题的关键.

22. (1) 45° , $\frac{1}{4}$

(2) $\sqrt{2}$ m, $\frac{3\sqrt{34}}{34}$

答案第 13 页，共 24 页

次根式的混合运算，本题要求学生的操作能力要好，想象能力强，有一定的难度。

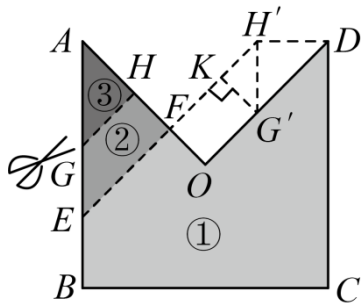
(1) 如图，过 G' 作 $G'K \perp FH'$ 于 K ，结合题意可得：四边形 $FOG'K$ 为矩形，可得 $FO = KG'$ ，由拼接可得： $HF = FO = KG'$ ，可得 $\triangle AHG$ ， $\triangle H'G'D$ ， $\triangle AFE$ 为等腰直角三角形， $\triangle G'KH'$ 为等腰直角三角形，设 $H'K = KG' = x$ ，则 $H'G' = H'D = \sqrt{2}x$ ，再进一步解答即可；

(2) 由 $\triangle AFE$ 为等腰直角三角形， $EF = AF = 1$ ；求解 $BE = 2 - \sqrt{2}$ ，再分别求解 GE, AH, GH ；可得答案，如图，以 B 为圆心， BO 为半径画弧交 BC 于 P' ，交 AB 于 Q' ，则直线 $P'Q'$ 为分割线，或以 C 为圆心， CO 为半径画弧，交 BC 于 P ，交 CD 于 Q ，则直线 PQ 为分割线，再进一步求解 BP 的长即可。

【详解】解：如图，过 G' 作 $G'K \perp FH'$ 于 K ，

结合题意可得：四边形 $FOG'K$ 为矩形，

$\therefore FO = KG'$ ，



由拼接可得： $HF = FO = KG'$ ，

由正方形的性质可得： $\angle A = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle AHG$ ， $\triangle H'G'D$ ， $\triangle AFE$ 为等腰直角三角形，

$\therefore \triangle G'KH'$ 为等腰直角三角形，

设 $H'K = KG' = x$ ，

$\therefore H'G' = H'D = \sqrt{2}x$ ，

$\therefore AH = HG = \sqrt{2}x$ ， $HF = FO = x$ ，

\because 正方形的边长为 2，

\therefore 对角线的长 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore OA = \sqrt{2}$ ，

$\therefore x + x + \sqrt{2}x = \sqrt{2}$ ，

解得： $x = \sqrt{2} - 1$ ，

$$\therefore EF = AF = (\sqrt{2} + 1)x = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) = 1;$$

(2) $\because \triangle AFE$ 为等腰直角三角形, $EF = AF = 1$;

$$\therefore AE = \sqrt{2}EF = \sqrt{2},$$

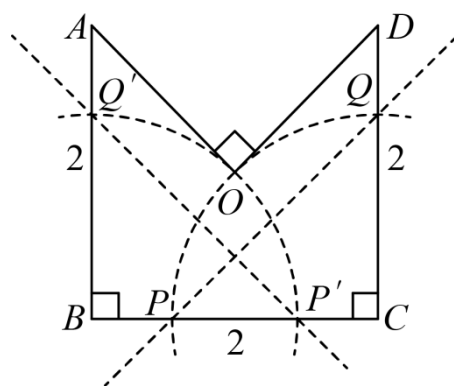
$$\therefore BE = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore GE = H'G' = \sqrt{2}x = \sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2},$$

$$AH = GH = \sqrt{2}x = 2 - \sqrt{2},$$

$$\therefore BE = GE = AH = GH;$$

如图, 以 B 为圆心, BO 为半径画弧交 BC 于 P' , 交 AB 于 Q' , 则直线 $P'Q'$ 为分割线,



此时 $BP' = \sqrt{2}$, $P'Q' = \sqrt{2+2} = 2$, 符合要求,

或以 C 为圆心, CO 为半径画弧, 交 BC 于 P , 交 CD 于 Q , 则直线 PQ 为分割线,

此时 $CP = CQ = \sqrt{2}$, $PQ = \sqrt{2+2} = 2$,

$$\therefore BP = 2 - \sqrt{2},$$

综上: BP 的长为 $\sqrt{2}$ 或 $2 - \sqrt{2}$.

24. (1) 甲、乙的报告成绩分别为 76, 92 分

(2) 125

(3) ① 130; ② 95%

【分析】(1) 当 $p = 100$ 时, 甲的报告成绩为: $y = \frac{80 \times 95}{100} = 76$ 分, 乙的报告成绩为:

$$y = \frac{20 \times (130 - 100)}{150 - 100} + 80 = 92 \text{ 分};$$

(2) 设丙的原始成绩为 x_1 分, 则丁的原始成绩为 $(x_1 - 40)$ 分, ① $0 \leq x_1 < p$ 时和 ②

$p \leq x_1 - 40 \leq 150$ 时均不符合题意, ③ $0 \leq x_1 - 40 < p, p \leq x_1 \leq 150$ 时,

$$y_{\text{丙}} = 92 = \frac{20(x_1 - p)}{150 - p} + 80 \dots\dots\dots ⑤, \quad y_{\text{丁}} = 64 = \frac{80(x_1 - 40)}{p} \dots\dots\dots ⑥, \quad \text{解得 } p = 125, x_1 = 140;$$

(3) ① 共计 100 名员工, 且成绩已经排列好, 则中位数是第 50, 51 名员工成绩的平均数,

由表格得第 50, 51 名员工成绩都是 130 分, 故中位数为 130; ② 当 $p > 130$ 时, 则

$$90 = \frac{80 \times 130}{p}, \quad \text{解得 } p = \frac{1040}{9} < 130, \quad \text{故不成立, 舍; 当 } p \leq 130 \text{ 时, 则 } 90 = \frac{20(130 - p)}{150 - p} + 80,$$

解得 $p = 110$, 符合题意, 而由表格得到原始成绩为 110 及 110 以上的人数为 $100 - 5 = 95$,

$$\text{故合格率为: } \frac{95}{100} \times 100\% = 95\%.$$

【详解】(1) 解: 当 $p = 100$ 时, 甲的报告成绩为: $y = \frac{80 \times 95}{100} = 76$ 分,

$$\text{乙的报告成绩为: } y = \frac{20 \times (130 - 100)}{150 - 100} + 80 = 92 \text{ 分;}$$

(2) 解: 设丙的原始成绩为 x_1 分, 则丁的原始成绩为 $(x_1 - 40)$ 分,

$$\text{① } 0 \leq x_1 < p \text{ 时, } y_{\text{丙}} = 92 = \frac{80x_1}{p} \dots\dots\dots ①, \quad y_{\text{丁}} = 64 = \frac{80(x_1 - 40)}{p} \dots\dots\dots ②,$$

$$\text{由①} - \text{②得 } \frac{3200}{p} = 28,$$

$$\therefore p = \frac{800}{7},$$

$$\therefore x_1 = \frac{92 \times \frac{800}{7}}{80} = \frac{920}{7} \approx 131 > p, \quad \text{故不成立, 舍;}$$

$$\text{② } p \leq x_1 - 40 \leq 150 \text{ 时, } y_{\text{丙}} = 92 = \frac{20(x_1 - p)}{150 - p} + 80 \dots\dots\dots ③,$$

$$y_{\text{丁}} = 64 = \frac{20(x_1 - 40 - p)}{150 - p} + 80 \dots\dots\dots ④,$$

$$\text{由③} - \text{④得: } 28 = \frac{800}{150 - p},$$

$$\therefore p = \frac{850}{7},$$

$$\therefore 92 = \frac{20\left(x_1 - \frac{850}{7}\right)}{150 - \frac{850}{7}} + 80,$$

$$\therefore x_1 = \frac{970}{7},$$

$$\therefore x_1 - 40 = \frac{690}{7} < p = \frac{850}{7}, \quad \text{故不成立, 舍;}$$

$$\textcircled{3} 0 \leq x_1 - 40 < p, p \leq x_1 \leq 150 \text{ 时, } y_{\text{丙}} = 92 = \frac{20(x_1 - p)}{150 - p} + 80 \dots \textcircled{5},$$

$$y_{\text{丁}} = 64 = \frac{80(x_1 - 40)}{p} \dots \textcircled{6},$$

联立⑤⑥解得:

$$p = 125, x_1 = 140, \text{ 且符合题意,}$$

综上所述 $p = 125$;

(3) 解: ① 共计 100 名员工, 且成绩已经排列好,

\therefore 中位数是第 50, 51 名员工成绩的平均数,

由表格得第 50, 51 名员工成绩都是 130 分,

\therefore 中位数为 130;

$$\textcircled{2} \text{ 当 } p > 130 \text{ 时, 则 } 90 = \frac{80 \times 130}{p}, \text{ 解得 } p = \frac{1040}{9} < 130, \text{ 故不成立, 舍;}$$

$$\text{当 } p \leq 130 \text{ 时, 则 } 90 = \frac{20(130 - p)}{150 - p} + 80, \text{ 解得 } p = 110, \text{ 符合题意,}$$

$$\therefore \text{ 由表格得到原始成绩为 110 及 110 以上的人数为 } 100 - (1 + 2 + 2) = 95,$$

$$\therefore \text{ 合格率为: } \frac{95}{100} \times 100\% = 95\%.$$

【点睛】本题考查了函数关系式, 自变量与函数值, 中位数的定义, 合格率, 解分式方程, 熟练知识点, 正确理解题意是解决本题的关键.

25. (1) π

(2) 点 B 到 OA 的距离为 2; 3

$$(3) \textcircled{1} d = 3 - \sqrt{3}; \textcircled{2} \frac{2}{3}$$

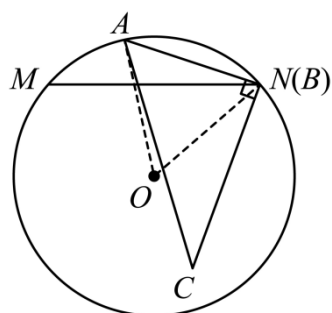
【分析】(1) 如图, 连接 OA , OB , 先证明 $\triangle AOB$ 为等边三角形, 再利用等边三角形的性质结合弧长公式可得答案;

(2) 过 B 作 $BI \perp OA$ 于 I , 过 O 作 $CH \perp MN$ 于 H , 连接 MO , 证明四边形 $BIOH$ 是矩形, 可得 $BH = OI$, $BI = OH$, 再结合勾股定理可得答案;

(3) ① 如图, 由过点 A 的切线与 AC 垂直, 可得 AC 过圆心, 过 O 作 $OJ \perp BC$ 于 J , 过 O 作 $OK \perp AB$ 于 K , 而 $\angle ABC = 90^\circ$, 可得四边形 $KOJB$ 为矩形, 可得 $OJ = KB$, 再利用勾股定理与锐角三角函数可得答案; ② 如图, 当 B 为 MN 中点时, 过 O 作 $OL \perp B'C'$ 于 L , 过 O 作 $OJ \perp BC$ 于 J , $OL > OJ$, 此时 OJ 最短, 如图, 过 A 作 $AQ \perp OB$ 于 Q , 而 $AB = AO = 3$,

证明 $BQ = OQ = 1$ ，求解 $AQ = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ ，再结合等角的三角函数可得答案.

【详解】(1) 解：如图，连接 OA ， OB ，



$\because \odot O$ 的半径为 3， $AB = 3$ ，

$\therefore OA = OB = AB = 3$ ，

$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形，

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$ ，

$\therefore \widehat{AN}$ 的长为 $\frac{60\pi \times 3}{180} = \pi$ ；

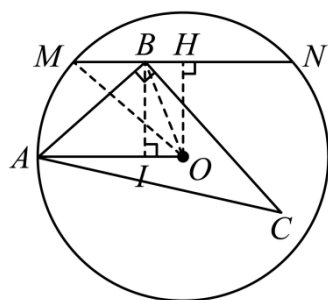
(2) 解：过 B 作 $BI \perp OA$ 于 I ，过 O 作 $OH \perp MN$ 于 H ，连接 MO ，

$\because OA \parallel MN$ ，

$\therefore \angle IBH = \angle BHO = \angle HOI = \angle BIO = 90^\circ$ ，

\therefore 四边形 $BIOH$ 是矩形，

$\therefore BH = OI$ ， $BI = OH$ ，



$\because MN = 2\sqrt{5}$ ， $OH \perp MN$ ，

$\therefore MH = NH = \sqrt{5}$ ，而 $OM = 3$ ，

$\therefore OH = \sqrt{OM^2 - MH^2} = 2 = BI$ ，

\therefore 点 B 到 OA 的距离为 2；

$\because AB = 3$ ， $BI \perp OA$ ，

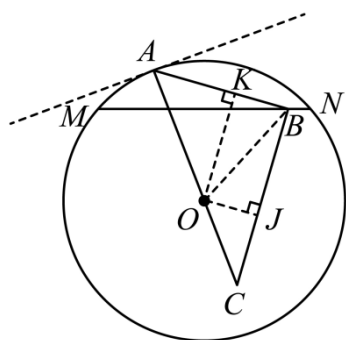
$$\therefore AI = \sqrt{AB^2 - BI^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore OI = OA - AI = 3 - \sqrt{5} = BH,$$

$$\therefore x = BN = BH + NH = 3 - \sqrt{5} + \sqrt{5} = 3;$$

(3) 解: ①如图, \therefore 过点 A 的切线与 AC 垂直,

$\therefore AC$ 过圆心,



过 O 作 $OJ \perp BC$ 于 J , 过 O 作 $OK \perp AB$ 于 K , 而 $\angle ABC = 90^\circ$,

\therefore 四边形 $KOJB$ 为矩形,

$$\therefore OJ = KB,$$

$$\therefore AB = 3, \quad BC = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\therefore \cos \angle BAC = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AK}{AO},$$

$$\therefore AK = \sqrt{3},$$

$$\therefore OJ = BK = 3 - \sqrt{3}, \text{ 即 } d = 3 - \sqrt{3};$$

②如图, 当 B 为 MN 中点时,

过 O 作 $OL \perp B'C'$ 于 L , 过 O 作 $OJ \perp BC$ 于 J ,

$$\therefore \angle OJL > 90^\circ,$$

$\therefore OL > OJ$, 此时 OJ 最短,

26. (1) $a = \frac{1}{2}$, $Q(2, -2)$

(2) 两人说法都正确, 理由见解析

(3) ① $y = 4x - 10$; ② $\frac{11}{2} - 2\sqrt{6}$ 或 $\frac{11}{2} + 2\sqrt{6}$

(4) $n = 2 + t - m$

【分析】(1) 直接利用待定系数法求解抛物线的解析式, 再化为顶点式即可得到顶点坐标;

(2) 把 $Q(2, -2)$ 向左平移 2 个单位长度得到对应点的坐标为: $(0, -2)$, 再检验即可, 再根据函数化为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + xt - 2$, 可得函数过定点;

(3) ① 先求解 P 的坐标, 再利用待定系数法求解一次函数的解析式即可; ② 如图, 当 $C_2: y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 6 = -6$ (等于 6 两直线重合不符合题意), 可得 $x = 4 \pm 2\sqrt{6}$, 可得交点 $J(4-2\sqrt{6}, -6)$, 交点 $K(4+2\sqrt{6}, 6)$, 再进一步求解即可;

(4) 如图, 由题意可得 C_2 是由 C_1 通过旋转 180° , 再平移得到的, 两个函数图象的形状相同, 如图, 连接 AB 交 PQ 于 L , 连接 AQ , BQ , AP , BP , 可得四边形 $APBQ$ 是平行四边形, 当点 M 是到直线 PQ 的距离最大的点, 最大距离为 d , 点 N 到直线 PQ 的距离恰好也为 d , 此时 M 与 B 重合, N 与 A 重合, 再进一步利用中点坐标公式解答即可.

【详解】(1) 解: \because 抛物线 $C_1: y = ax^2 - 2x$ 过点 $(4, 0)$, 顶点为 Q .

$$\therefore 16a - 8 = 0,$$

$$\text{解得: } a = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{抛物线为: } y = \frac{1}{2}x^2 - 2x = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2,$$

$$\therefore Q(2, -2);$$

(2) 解: 把 $Q(2, -2)$ 向左平移 2 个单位长度得到对应点的坐标为: $(0, -2)$,

当 $x = 0$ 时,

$$\therefore C_2: y = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2 = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2 = -2,$$

$$\therefore (0, -2) \text{ 在 } C_2 \text{ 上,}$$

\therefore 嘉嘉说法正确;

$$\therefore C_2: y = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + xt - 2,$$

当 $x=0$ 时, $y=-2$,

$$\therefore C_2: y = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2 \text{ 过定点 } (0, -2);$$

\therefore 淇淇说法正确;

(3) 解: ① 当 $t=4$ 时,

$$C_2: y = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2 = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 6,$$

\therefore 顶点 $P(4, 6)$, 而 $Q(2, -2)$,

设 PQ 为 $y = ex + f$,

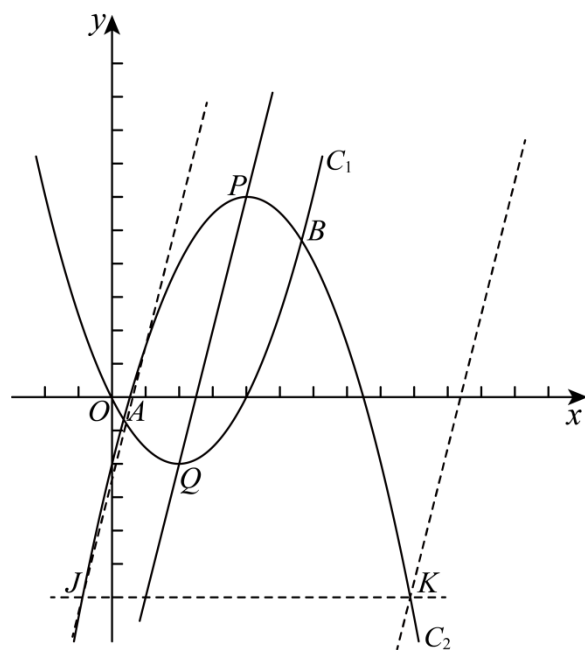
$$\therefore \begin{cases} 4e + f = 6 \\ 2e + f = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} e = 4 \\ f = -10 \end{cases},$$

$\therefore PQ$ 为 $y = 4x - 10$;

② 如图, 当 $C_2: y = -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 6 = -6$ (等于 6 两直线重合不符合题意),

$$\therefore x = 4 \pm 2\sqrt{6},$$



∴交点 $J(4-2\sqrt{6}, -6)$ ，交点 $K(4+2\sqrt{6}, 6)$ ，

由直线 $l \parallel PQ$ ，设直线 l 为 $y = 4x + b$ ，

$$\therefore 4(4-2\sqrt{6}) + b = -6,$$

$$\text{解得: } b = 8\sqrt{6} - 22,$$

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 为: } y = 4x + 8\sqrt{6} - 22,$$

$$\text{当 } y = 4x + 8\sqrt{6} - 22 = 0 \text{ 时, } x = \frac{11}{2} - 2\sqrt{6},$$

$$\text{此时直线 } l \text{ 与 } x \text{ 轴交点的横坐标为 } \frac{11}{2} - 2\sqrt{6},$$

$$\text{同理当直线 } l \text{ 过点 } K(4+2\sqrt{6}, 6),$$

$$\text{直线 } l \text{ 为: } y = 4x - 8\sqrt{6} - 22,$$

$$\text{当 } y = 4x - 8\sqrt{6} - 22 = 0 \text{ 时, } x = \frac{11}{2} + 2\sqrt{6},$$

$$\text{此时直线 } l \text{ 与 } x \text{ 轴交点的横坐标为 } \frac{11}{2} + 2\sqrt{6},$$

$$(4) \text{ 解: 如图, } \because y = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 2, \quad C_2: y = -\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2,$$

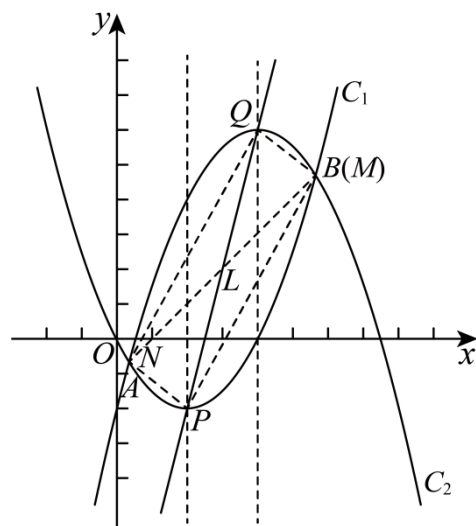
∴ C_2 是由 C_1 通过旋转 180° ，再平移得到的，两个函数图象的形状相同，

如图，连接 AB 交 PQ 于 L ，连接 AQ ， BQ ， AP ， BP ，

∴ 四边形 $APBQ$ 是平行四边形，

当点 M 是到直线 PQ 的距离最大的点，最大距离为 d ，点 N 到直线 PQ 的距离恰好也为 d ，

此时 M 与 B 重合， N 与 A 重合，



$$\therefore P(2, -2), Q\left(t, \frac{1}{2}t^2 - 2\right),$$

$$\therefore L \text{ 的横坐标为 } \frac{2+t}{2},$$

$$\therefore M\left(m, \frac{1}{2}m^2 - 2m\right), N\left[n, -\frac{1}{2}(n-t)^2 + \frac{1}{2}t^2 - 2\right],$$

$$\therefore L \text{ 的横坐标为 } \frac{m+n}{2},$$

$$\therefore \frac{m+n}{2} = \frac{2+t}{2},$$

$$\text{解得: } n = 2 + t - m;$$

【点睛】本题考查的是利用待定系数法求解二次函数的解析式，二次函数的性质，一次函数的综合应用，二次函数的平移与旋转，以及特殊四边形的性质，理解题意，利用数形结合的方法解题是关键.