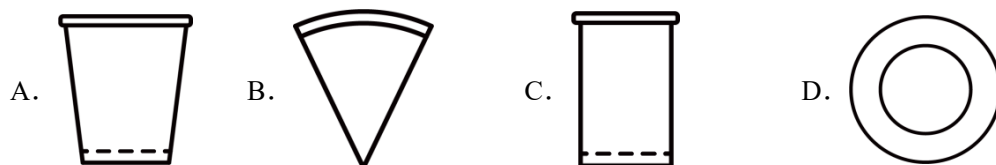


2024 年湖南省中考数学试题

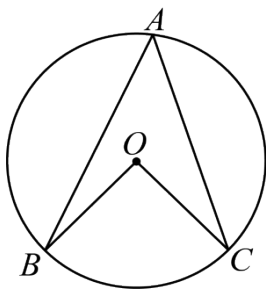
学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

1. 在日常生活中, 若收入 300 元记作 +300 元, 则支出 180 元应记作 ()
- A. +180 元 B. +300 元 C. -180 元 D. -480 元
2. 据《光明日报》2024 年 3 月 14 日报道: 截至 2023 年末, 我国境内有效发明专利量达到 401.5 万件, 高价值发明专利占比超过四成, 成为世界上首个境内有效发明专利数量突破 400 万件的国家, 将 4015000 用科学记数法表示应为 ()
- A. 0.4015×10^7 B. 4.015×10^6 C. 40.15×10^5 D. 4.015×10^3
3. 如图, 该纸杯的主视图是 ()



4. 下列计算正确的是 ()
- A. $3a^2 - 2a^2 = 1$ B. $a^3 \div a^2 = a (a \neq 0)$ C. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ D. $(2a)^3 = 6a^3$
5. 计算 $\sqrt{2} \times \sqrt{7}$ 的结果是 ()
- A. $2\sqrt{7}$ B. $7\sqrt{2}$ C. 14 D. $\sqrt{14}$
6. 下列命题中, 正确的是 ()
- A. 两点之间, 线段最短 B. 菱形的对角线相等
- C. 正五边形的外角和为 720° D. 直角三角形是轴对称图形
7. 如图, AB , AC 为 $\odot O$ 的两条弦, 连接 OB , OC , 若 $\angle A = 45^\circ$, 则 $\angle BOC$ 的度数为 ()

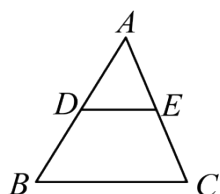


- A. 60° B. 75° C. 90° D. 135°

8. 某班的 5 名同学 1 分钟跳绳的成绩（单位：次）分别为：179, 130, 192, 158, 141. 这组数据的中位数是（ ）

- A. 130 B. 158 C. 160 D. 192

9. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D, E 分别为边 AB, AC 的中点. 下列结论中，错误的是（ ）








- A. $DE \parallel BC$ B. $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ C. $BC = 2DE$ D. $S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于点 $P(x, y)$ ，若 x, y 均为整数，则称点 P 为“整点”. 特别地，当 $\frac{y}{x}$ （其中 $xy \neq 0$ ）的值为整数时，称“整点” P 为“超整点”，已知点 $P(2a-4, a+3)$ 在第二象限，下列说法正确的是（ ）

- A. $a < -3$ B. 若点 P 为“整点”，则点 P 的个数为 3 个
C. 若点 P 为“超整点”，则点 P 的个数为 1 个 D. 若点 P 为“超整点”，则点 P 到两坐标轴的距离之和大于 10

二、填空题

11. 计算： $-(-2024) = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 有四枚材质、大小、背面图案完全相同的中国象棋棋子“”“”“”“”，将它们背面朝上任意放置，从中随机翻开一枚，恰好翻到棋子“”的概率是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

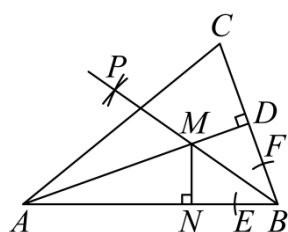
13. 分式方程 $\frac{2}{x+1} = 1$ 的解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 一个等腰三角形的一个底角为 40° ，则它的顶角的度数是 $\underline{\hspace{2cm}}$ 度.

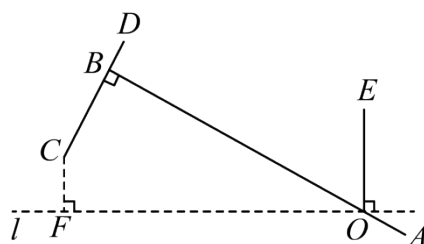
15. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + 2k = 0$ 有两个相等的实数根，则 k 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 在一定条件下，乐器中弦振动的频率 f 与弦长 l 成反比例关系，即 $f = \frac{k}{l}$ (k 为常数， $k \neq 0$)，若某乐器的弦长 l 为 0.9 米，振动频率 f 为 200 赫兹，则 k 的值为_____.

17. 如图，在锐角三角形 ABC 中， AD 是边 BC 上的高，在 BA ， BC 上分别截取线段 BE ， BF ，使 $BE = BF$ ；分别以点 E ， F 为圆心，大于 $\frac{1}{2}EF$ 的长为半径画弧，在 $\angle ABC$ 内，两弧交于点 P ，作射线 BP ，交 AD 于点 M ，过点 M 作 $MN \perp AB$ 于点 N ．若 $MN = 2$ ， $AD = 4MD$ ，则 $AM =$ _____.



18. 如图，左图为《天工开物》记载的用于舂（chōng）捣谷物的工具——“碓（duì）”的结构简图，右图为其平面示意图，已知 $AB \perp CD$ 于点 B ， AB 与水平线 l 相交于点 O ， $OE \perp l$ ．若 $BC = 4$ 分米， $OB = 12$ 分米， $\angle BOE = 60^\circ$ ，则点 C 到水平线 l 的距离 CF 为_____分米（结果用含根号的式子表示）.

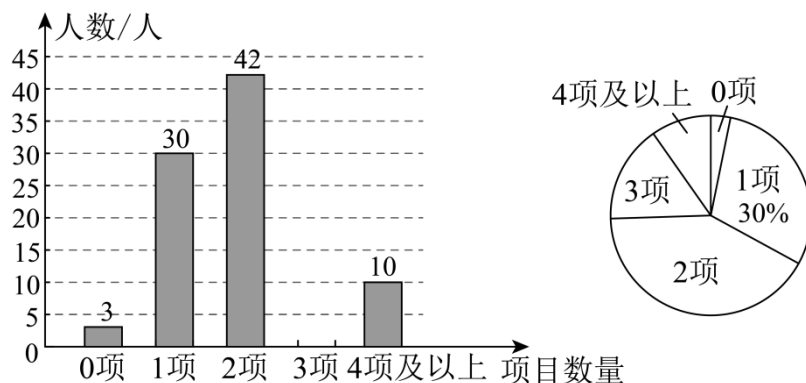


三、解答题

19. 计算： $|-3| + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \cos 60^\circ - \sqrt{4}$.

20. 先化简，再求值： $\frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2} + \frac{3}{x}$ ，其中 $x = 3$.

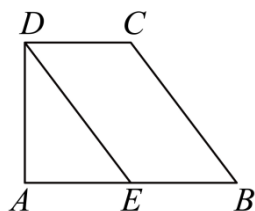
21. 某校为了了解学生五月份参与家务劳动的情况，随机抽取了部分学生进行调查、家务劳动的项目主要包括：扫地、拖地、洗碗、洗衣、做饭和简单维修等．学校德育处根据调查结果制作了如下两幅不完整的统计图：



请根据以上信息，解答下列问题：

- (1)本次被抽取的学生人数为_人；
- (2)补全条形统计图：
- (3)在扇形统计图中，“4项及以上”部分所对应扇形的圆心角度数是_°；
- (4)若该校有学生 1200 人，请估计该校五月份参与家务劳动的项目数量达到 3 项及以上的学生人数。

22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ，点 E 在边 AB 上，_。请从“① $\angle B = \angle AED$ ；
② $AE = BE$ ， $AE = CD$ ”这两组条件中任选一组作为已知条件，填在横线上（填序号），再解决下列问题：



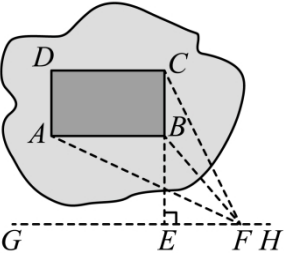
- (1)求证：四边形 $BCDE$ 为平行四边形；
- (2)若 $AD \perp AB$ ， $AD = 8$ ， $BC = 10$ ，求线段 AE 的长。

23. 某村决定种植脐橙和黄金贡柚，助推村民增收致富，已知购买 1 棵脐橙树苗和 2 棵黄金贡柚树苗共需 110 元；购买 2 棵脐橙树苗和 3 棵黄金贡柚树苗共需 190 元。

- (1)求脐橙树苗和黄金贡柚树苗的单价；
- (2)该村计划购买脐橙树苗和黄金贡柚树苗共 1000 棵，总费用不超过 38000 元，问最多可以购买脐橙树苗多少棵？

24. 某数学研究性学习小组在老师的指导下，利用课余时间进行测量活动。

活动主题	测算某水池中雕塑底座的底面积
------	----------------

测量工具		皮尺、测角仪、计算器等
活动过程	模型抽象	<p>某休闲广场的水池中有一雕塑，其底座的底面为矩形 $ABCD$，其示意图如下：</p> 
	测绘过程与数据信息	<p>①在水池外取一点 E，使得点 C, B, E 在同一条直线上；</p> <p>②过点 E 作 $GH \perp CE$，并沿 EH 方向前进到点 F，用皮尺测得 EF 的长为 4 米；</p> <p>③在点 F 处用测角仪测得 $\angle CFG = 60.3^\circ$， $\angle BFG = 45^\circ$，$\angle AFG = 21.8^\circ$；</p> <p>④用计算器计算得： $\sin 60.3^\circ \approx 0.87$， $\cos 60.3^\circ \approx 0.50$，$\tan 60.3^\circ \approx 1.75$． $\sin 21.8^\circ \approx 0.37$， $\cos 21.8^\circ \approx 0.93$，$\tan 21.8^\circ \approx 0.40$．</p>

请根据表格中提供的信息，解决下列问题（结果保留整数）：

(1)求线段 CE 和 BC 的长度：

(2)求底座的底面 $ABCD$ 的面积．

25. 已知二次函数 $y = -x^2 + c$ 的图像经过点 $A(-2, 5)$ ，点 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ 是此二次函数的图像上的两个动点．

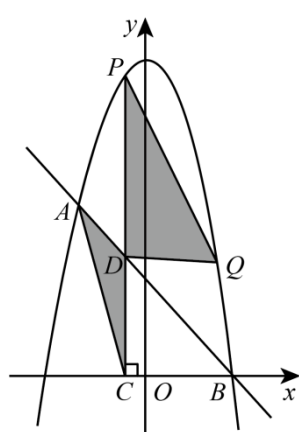


图1

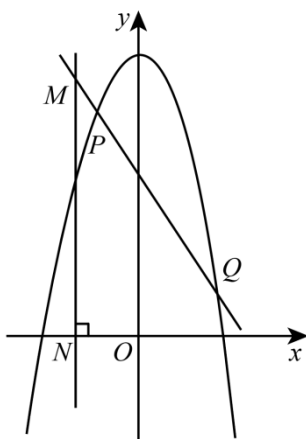


图2

(1)求此二次函数的表达式;

(2)如图 1, 此二次函数的图像与 x 轴的正半轴交于点 B , 点 P 在直线 AB 的上方, 过点 P 作

$PC \perp x$ 轴于点 C , 交 AB 于点 D , 连接 AC, DQ, PQ . 若 $x_2 = x_1 + 3$, 求证 $\frac{S_{\triangle PDQ}}{S_{\triangle ADC}}$ 的值为定值;

(3)如图 2, 点 P 在第二象限, $x_2 = -2x_1$, 若点 M 在直线 PQ 上, 且横坐标为 $x_1 - 1$, 过点 M 作 $MN \perp x$ 轴于点 N , 求线段 MN 长度的最大值.

26. 【问题背景】

已知点 A 是半径为 r 的 $\odot O$ 上的定点, 连接 OA , 将线段 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转 $\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$ 得到 OE , 连接 AE , 过点 A 作 $\odot O$ 的切线 l , 在直线 l 上取点 C , 使得 $\angle CAE$ 为锐角.

【初步感知】

(1) 如图 1, 当 $\alpha = 60^\circ$ 时, $\angle CAE = \underline{\quad}^\circ$;

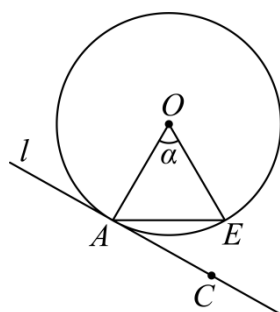


图1

【问题探究】

(2) 以线段 AC 为对角线作矩形 $ABCD$, 使得边 AD 过点 E , 连接 CE , 对角线 AC, BD 相交于点 F .

①如图2，当 $AC = 2r$ 时，求证：无论 α 在给定的范围内如何变化， $BC = CD + ED$ 总成立：

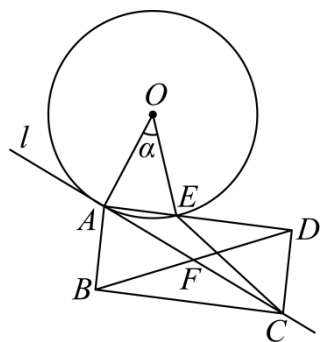


图2

②如图3，当 $AC = \frac{4}{3}r$ ， $\frac{CE}{OE} = \frac{2}{3}$ 时，请补全图形，并求 $\tan \alpha$ 及 $\frac{AB}{BC}$ 的值。

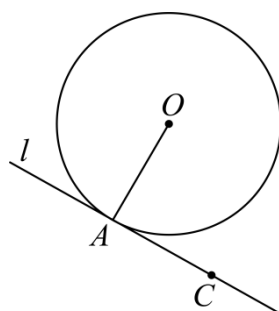


图3

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	A	B	D	A	C	B	D	C

1. C

【分析】此题主要考查了正负数的意义，解题关键是理解“正”和“负”的相对性，明确什么是一对具有相反意义的量．首先审清题意，明确“正”和“负”所表示的意义，结合题意解答即可；

【详解】解：收入为“+”，则支出为“-”，

那么支出 180 元记作 -180 元．

故选：C．

2. B

【分析】本题考查用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 可以用整数位数减去 1 来确定．用科学记数法表示数，一定要注意 a 的形式，以及指数 n 的确定方法．

科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值大于 10 时， n 是正数；当原数的绝对值小于 1 时， n 是负数．

【详解】解：4015000 用科学记数法表示为 4.015×10^6 ．

故选：B．

3. A

【分析】直接依据主视图即从几何体的正面观察，进而得出答案．

此题主要考查了简单几何体的三视图，正确把握观察角度是解题的关键．

【详解】解：该纸杯的主视图是选项 A，

故选：A．

4. B

【分析】本题考查了合并同类项，同底数幂的乘除法，积的乘方，根据以上运算法则逐项分析即可．

【详解】解：A、 $3a^2 - 2a^2 = a^2$ ，故该选项不正确，不符合题意；

B、 $a^3 \div a^2 = a (a \neq 0)$ ，故该选项正确，符合题意；

C、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故该选项不正确，不符合题意；

D、 $(2a)^3 = 8a^3$ ，故该选项不正确，不符合题意；

故选：B.

5. D

【分析】此题主要考查了二次根式的乘法，正确计算是解题关键.

直接利用二次根式的乘法运算法则计算得出答案.

【详解】解： $\sqrt{2} \times \sqrt{7} = \sqrt{14}$ ，

故选：D

6. A

【分析】本题考查了命题与定理的知识，多边形外角性质，菱形性质及轴对称图形的特点，解题的关键是掌握这些基础知识点.

【详解】解：A、两点之间，线段最短，正确，是真命题，符合题意；

B、菱形的对角线互相垂直，不一定相等，选项错误，是假命题，不符合题意；

C、正五边形的外角和为 360° ，选项错误，是假命题，不符合题意；

D、直角三角形不一定是轴对称图形，只有等腰直角三角形是轴对称图形，选项错误，是假命题，不符合题意；

故选：A.

7. C

【分析】本题考查了圆周角定理，熟知在同圆或等圆中，一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半是解题的关键. 根据圆周角定理可知 $\angle A = \frac{1}{2} \angle BOC$ ，即可得到答案.

【详解】根据题意，圆周角 $\angle A$ 和圆心角 $\angle BOC$ 同对着 \widehat{BC} ，

$$\therefore \angle A = \frac{1}{2} \angle BOC,$$

$$\therefore \angle A = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BOC = 2\angle A = 2 \times 45^\circ = 90^\circ.$$

故选：C.

8. B

【分析】本题考查了中位数，找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数或两个数的平均数为中位数. 据此求解即可.

【详解】解：从小到大排序为130，141，158，179，192，最中间的数是158，

∴中位数是 158,

故选: B.

9. D

【分析】本题考查了三角形中位线的性质,相似三角形的判定和性质,由三角形中位线性质可判断 A、C;由相似三角形的判定和性质可判断 B、D,掌握三角形中位线的性质及相似三角形的判定和性质是解题的关键.

【详解】解: ∵点 D, E 分别为边 AB, AC 的中点,

∴ $DE \parallel BC$, $BC = 2DE$, 故 A、C 正确;

∴ $DE \parallel BC$,

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$, 故 B 正确;

∴ $\triangle ADE \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{DE}{BC}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4},$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}, \text{ 故 D 错误;}$$

故选: D.

10. C

【分析】本题考查了新定义,点到坐标轴的距离,各象限内点的特征等知识,利用各象限内点的特征求出 a 的取值范围,即可判断选项 A,利用“整点”定义即可判断选项 B,利用“超整点”定义即可判断选项 C,利用“超整点”和点到坐标轴的距离即可判断选项 D.

【详解】解: ∵点 $P(2a-4, a+3)$ 在第二象限,

$$\therefore \begin{cases} 2a-4 < 0 \\ a+3 > 0 \end{cases},$$

∴ $-3 < a < 2$, 故选项 A 错误;

∵点 $P(2a-4, a+3)$ 为“整点”, $-3 < a < 2$,

∴整数 a 为 $-2, -1, 0, 1$,

∴点 P 的个数为 4 个, 故选项 B 错误;

∴“整点” P 为 $(-8, 1), (-6, 2), (-4, 3), (-2, 4)$,

$$\therefore \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}, \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}, \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}, \frac{4}{-2} = -2$$

∴“超整点” P 为 $(-2,4)$ ，故选项 C 正确；

∴点 $P(2a-4, a+3)$ 为“超整点”，

∴点 P 坐标为 $(-2,4)$ ，

∴点 P 到两坐标轴的距离之和 $2+4=6$ ，故选项 D 错误，

故选：C.

11. 2024

【分析】本题考查了求一个数的相反数，熟练掌握相反数的定义是解题的关键. 根据相反数的定义，即可求解.

【详解】解： $-(-2024)=2024$ ，


故答案为：2024.

12. $\frac{1}{4}$

【分析】本题考查了概率，熟练掌握概率公式是解本题的关键. 概率=所求情况数与总情况数之比.

根据概率公式计算即可.

【详解】解：∵共有 4 枚棋子，

∴从中任意摸出一张，恰好翻到棋子“ ”的概率是 $\frac{1}{4}$.

故答案为： $\frac{1}{4}$

13. $x=1$

【分析】先给方程两边同乘最简公分母 $x+1$ ，把分式方程转化为整式方程 $2=x+1$ ，求解后并检验即可.

【详解】解：方程的两边同乘 $x+1$ ，得 $2=x+1$ ，

解得 $x=1$.

检验：当 $x=1$ 时， $x+1=2 \neq 0$.

所以原方程的解为 $x=1$.

故答案为： $x=1$.

【点睛】此题考查了解分式方程，掌握解分式方程的一般步骤及方法是解题的关键.

14. 100

【分析】本题考查了等腰三角形的性质和三角形内角和，解答时根据等腰三角形两底角相等，求出顶角度数即可。

【详解】解：因为其底角为 40° ，所以其顶角 $= 180^\circ - 40^\circ \times 2 = 100^\circ$ 。

故答案为：100。

15. 2

【分析】本题考查根据一元二次方程根的情况求参数。一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个不相等的实数根，则 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ；有两个相等的实数根，则 $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ；没有实数根，则 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 。据此即可求解。

【详解】解：由题意得： $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 2k = 0$ ，

解得： $k = 2$

故答案为：2

16. 180

【分析】本题考查了待定系数法求反比例函数解析式，把 $l = 0.9$ ， $f = 200$ 代入 $f = \frac{k}{l}$ 求解即可。

【详解】解：把 $l = 0.9$ ， $f = 200$ 代入 $f = \frac{k}{l}$ ，得 $200 = \frac{k}{0.9}$ ，

解得 $k = 180$ ，

故答案为：180。

17. 6

【分析】本题考查了尺规作图，角平分线的性质等知识，根据作图可知 BP 平分 $\angle ABC$ ，根据角平分线的性质可知 $DM = MN = 2$ ，结合 $AD = 4MD$ 求出 AD ， AM 。

【详解】解：作图可知 BP 平分 $\angle ABC$ ，

$\because AD$ 是边 BC 上的高， $MN \perp AB$ ， $MN = 2$ ，

$\therefore MD = MN = 2$ ，

$\because AD = 4MD$ ，

$\therefore AD = 8$ ，

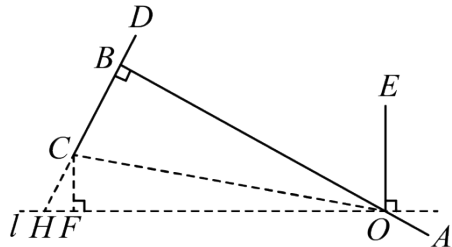
$\therefore AM = AD - MD = 6$ ，

故答案为：6。

18. $(6 - 2\sqrt{3}) / (-2\sqrt{3} + 6)$

【分析】题目主要考查解三角形及利用三角形等面积法求解，延长 DC 交 l 于点 H ，连接 OC ，根据题意及解三角形确定 $BH = 4\sqrt{3}$ ， $OH = 8\sqrt{3}$ ，再由等面积法即可求解，作出辅助线是解题关键.

【详解】解：延长 DC 交 l 于点 H ，连接 OC ，如图所示：



在 $\text{Rt}\triangle OBH$ 中， $\angle BOH = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ， $OB = 12\text{dm}$

$$\therefore BH = 12 \times \tan 30^\circ = 4\sqrt{3}, \quad OH = 8\sqrt{3}$$

$$\because S_{\triangle OBH} = S_{\triangle OCH} + S_{\triangle OBC}$$

$$\therefore \frac{1}{2} OB \cdot BH = \frac{1}{2} OH \cdot CF + \frac{1}{2} OB \cdot BC$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 12 = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times CF + \frac{1}{2} \times 12 \times 4,$$

$$\text{解得：} CF = 6 - 2\sqrt{3}.$$

故答案为： $(6 - 2\sqrt{3})$.

$$19. \frac{5}{2}$$

【分析】题目主要考查实数的混合运算，特殊角的三角函数、零次幂的运算等，先化简绝对值、零次幂及特殊角的三角函数、算术平方根，然后计算加减法即可，熟练掌握各个运算法则是解题关键.

$$\text{【详解】解：} |-3| + \left(-\frac{1}{2}\right)^0 + \cos 60^\circ - \sqrt{4}$$

$$= 3 + 1 + \frac{1}{2} - 2$$

$$= \frac{5}{2}.$$

$$20. \frac{x+1}{x}, \frac{4}{3}$$

【分析】本题主要考查了分式的化简求值，熟练掌握分式混合运算法则是解题的关键. 先计

算乘法，再计算加法，然后把 $x=3$ 代入化简后的结果，即可求解.

$$\begin{aligned} \text{【详解】解: } & \frac{x^2-4}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2} + \frac{3}{x} \\ &= \frac{(x+2)(x-2)}{x^2} \cdot \frac{x}{x+2} + \frac{3}{x} \\ &= \frac{x-2}{x} + \frac{3}{x} \\ &= \frac{x+1}{x}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } x=3 \text{ 时, 原式} = \frac{3+1}{3} = \frac{4}{3}.$$

21. (1)100

(2)见解析

(3)36

(4)300 人

【分析】题目主要考查条形统计图与扇形统计图，样本估计总体，求扇形统计图圆心角等，理解题意，结合统计图得出相关信息是解题关键.

(1) 根据参与 1 项家务劳动的人数及比例即可得出结果；

(2) 先求出参加 3 项家务劳动的学生人数，然后补全统计图即可；

(3) 用 360 度乘以 4 项及以上所占的比例即可；

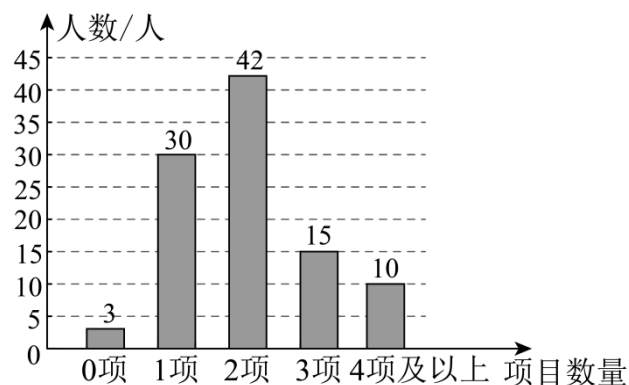
(4) 用总人数乘以参与家务劳动的项目数量达到 3 项及以上的比例即可.

【详解】(1) 解：根据题意得： $30 \div 30\% = 100$ 人，

故答案为：100；

(2) $100 - 3 - 30 - 42 - 10 = 15$ ，

补全统计图如下：



$$(3) 360^\circ \times \frac{10}{100} = 36^\circ,$$

故答案为：36；

$$(4) 1200 \times \frac{15+10}{100} = 300 \text{ 人}.$$

22. (1)①或②，证明见解析；

(2)6

【分析】题目主要考查平行四边形的判定和性质，勾股定理解三角形，理解题意，熟练掌握平行四边形的判定和性质是解题关键.

(1) 选择①或②，利用平行四边形的判定证明即可；

(2) 根据平行四边形的性质得出 $DE = BC = 10$ ，再由勾股定理即可求解.

【详解】(1) 解：选择①，

证明： $\because \angle B = \angle AED$ ，

$\therefore DE \parallel CB$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

\therefore 四边形 $BCDE$ 为平行四边形；

选择②，

证明： $\because AE = BE$ ， $AE = CD$ ，

$\therefore CD = BE$ ，

$\because AB \parallel CD$ ，

\therefore 四边形 $BCDE$ 为平行四边形；

(2) 解：由 (1) 得 $DE = BC = 10$ ，

$\because AD \perp AB$ ， $AD = 8$ ，

$$\therefore AE = \sqrt{DE^2 - AD^2} = 6.$$

23. (1)50 元、30 元

(2)400 棵

【分析】本题考查了二元一次方程组的应用、一元一次不等式的应用，解题的关键是：

(1) 设脐橙树苗和黄金贡柚树苗的单价分别为 x 元/棵， y 元/棵，根据“购买 1 棵脐橙树苗和 2 棵黄金贡柚树苗共需 110 元；购买 2 棵脐橙树苗和 3 棵黄金贡柚树苗共需 190 元”列方

程组求解即可；

(2) 购买脐橙树苗 a 棵，根据“总费用不超过 38000 元”列不等式求解即可．

【详解】(1) 解：设脐橙树苗和黄金贡柚树苗的单价分别为 x 元/棵， y 元/棵，

根据题意，得
$$\begin{cases} x+2y=110 \\ 2x+3y=190 \end{cases},$$

解得
$$\begin{cases} x=50 \\ y=30 \end{cases},$$

答：脐橙树苗和黄金贡柚树苗的单价分别为 50 元/棵，30 元/棵；

(2) 解：设购买脐橙树苗 a 棵，则购买黄金贡柚树苗 $(1000-a)$ 棵，

根据题意，得 $50a+30(1000-a) \leq 38000$ ，

解得 $a \leq 400$ ，

答：最多可以购买脐橙树苗 400 棵．

24. (1) 7 米；3 米

(2) 18 平方米

【分析】题目主要考查解三角形的应用，理解题意，结合图形求解是解题关键．

(1) 根据题意得 $\tan \angle CFE = \tan 60.3^\circ = \frac{CE}{EF} \approx 1.75$ ，即可确定 CE 长度，再由 $\angle BFG = 45^\circ$ 得

出 $BE = EF = 4$ 米，即可求解；

(2) 过点 A 作 $AM \perp GH$ 于点 M ，继续利用正切函数确定 $AB = ME = 6$ 米，即可求解面积．

【详解】(1) 解： $\because GH \perp CE$ ， EF 的长为 4 米， $\angle CFG = 60.3^\circ$ ，

$\therefore \tan \angle CFE = \tan 60.3^\circ = \frac{CE}{EF} \approx 1.75$ ，

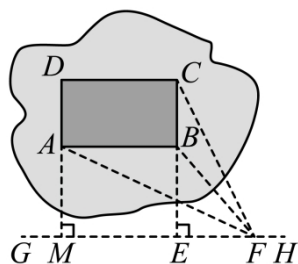
$\therefore CE = 7$ 米；

$\because \angle BFG = 45^\circ$ ，

$\therefore BE = EF = 4$ 米，

$\therefore CB = CE - BE = 3$ 米；

(2) 过点 A 作 $AM \perp GH$ 于点 M ，如图所示：



$$\because \angle AFG = 21.8^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle AFG = \tan 21.8^\circ = \frac{AM}{MF} \approx 0.4,$$

$$\because AM = BE = 4 \text{ 米},$$

$$\therefore MF = 10 \text{ 米},$$

$$\therefore AB = ME = 10 - 4 = 6 \text{ 米},$$

$$\therefore \text{底座的底面 } ABCD \text{ 的面积为: } 3 \times 6 = 18 \text{ 平方米}.$$

$$25. (1) y = -x^2 + 9$$

(2) 为定值 3, 证明见解析

$$(3) \frac{37}{4}$$

【分析】(1) 用待定系数法求解即可;

(2) 先求出直线 AB 的解析式, $P(x_1, -x_1^2 + 9)$, 则 $Q(x_1 + 3, -(x_1 + 3)^2 + 9)$, $D(x_1, -x_1 + 3)$,

表示出 $PD = (x + 2)(-x + 3)$, $CD = -x_1 + 3$, 代入 $\frac{S_{\triangle PDQ}}{S_{\triangle ADC}}$ 即可求解;

(3) 设 $P(x_1, -x_1^2 + 9)$, 则 $Q(-2x_1, -4x_1^2 + 9)$, 求出直线 PQ 的解析式, 把 $x = x_1 - 1$ 代入即可求出线段 MN 长度的最大值.

【详解】(1) \because 二次函数 $y = -x^2 + c$ 的图像经过点 $A(-2, 5)$,

$$\therefore 5 = -4 + c,$$

$$\therefore c = 9,$$

$$\therefore y = -x^2 + 9;$$

$$(2) \text{ 当 } y = 0 \text{ 时, } 0 = -x^2 + 9,$$

$$\therefore x_1 = -3, x_2 = 3,$$

$$\therefore B(3, 0),$$

设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = 5 \\ 3k + b = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k = -1 \\ b = 3 \end{cases},$$

$$\therefore y = -x + 3,$$

设 $P(x_1, -x_1^2 + 9)$, 则 $Q(x_1 + 3, -(x_1 + 3)^2 + 9)$, $D(x_1, -x_1 + 3)$,

$$\therefore PD = -x_1^2 + 9 - (-x_1 + 3) = -x_1^2 + x_1 + 6 = (x_1 + 2)(-x_1 + 3), \quad CD = -x_1 + 3.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PDQ}}{S_{\triangle ADC}} = \frac{(x+2)(-x_1+3)(x_1+3-x_1)}{(-x_1+3)(x_1+2)} = 3,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PDQ}}{S_{\triangle ADC}} \text{ 的值为定值};$$

(3) 设 $P(x_1, -x_1^2 + 9)$, 则 $Q(-2x_1, -4x_1^2 + 9)$,

设直线 PQ 的解析式为 $y = mx + n$,

$$\therefore \begin{cases} mx_1 + n = -x_1^2 + 9 \\ -2mx_1 + n = -4x_1^2 + 9 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} m = x_1 \\ n = -2x_1^2 + 9 \end{cases},$$

$$\therefore y = x_1x - 2x_1^2 + 9,$$

当 $x = x_1 - 1$ 时,

$$y = x_1(x_1 - 1) - 2x_1^2 + 9 = -\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{37}{4},$$

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{1}{2} \text{ 时, 线段 } MN \text{ 长度的最大值 } \frac{37}{4}.$$

【点睛】本题考查了待定系数法求函数解析式, 二次函数与几何综合, 数形结合是解答本题的关键.

26. (1) 30° ; ①证明见解析; ②补全图形见解析, $\frac{4}{3}, \frac{1}{2}$

【分析】(1) 可证 $\triangle OEA$ 是等边三角形, 则 $\angle OAE = 60^\circ$, 由直线 l 是 $\odot O$ 的切线, 得到

$\angle OAC = 90^\circ$ ，故 $\angle CAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ；

(2) ①根据矩形的性质与切线的性质证明 $\triangle OAE \cong \triangle FCD$ ，则 $AE = CD$ ，而 $BC = AD$ ，由 $AD = AE + DE$ ，得到 $BC = CD + DE$ ；

②过点 O 作 $OG \perp AE$ 于点 G ， $AH \perp OE$ 于点 H ，在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中，先证明点 E 在线段 OC 上，

$\tan \alpha = \frac{AC}{AO} = \frac{4}{3}$ ，由等腰三角形的性质得 $\angle EOG = \frac{1}{2}\alpha$ ，根据互余关系可得

$\angle EAH = \angle EOG = \frac{1}{2}\alpha$ ，可求 $\tan \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{4}{3}$ ，解 $\triangle OAE$ ，求得 $\tan \angle EAH = \frac{1}{2}$ ，可证明

$\angle ACB = \frac{1}{2}\alpha$ ，故在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\tan \angle ACB = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$ 。

【详解】解：(1) 由题意得 $\angle AOE = \alpha = 60^\circ$ ，

$\because OA = OE$ ，

$\therefore \triangle OEA$ 是等边三角形，

$\therefore \angle OAE = 60^\circ$ ，

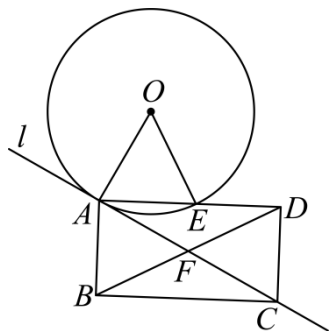
\because 直线 l 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore \angle OAC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

故答案为： 30° ；

(2) ①如图：



$\because OA = OE$ ，

$\therefore \angle OAE = \angle OEA$ ，

$\because \angle AOE = \alpha$ ，

$\therefore \angle OAE + \angle OEA + \alpha = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle OAE = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ ，

$\because \angle OAC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2}\alpha,$$

\because 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore FA = DF, \quad CF = DF = \frac{1}{2}AC = r,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle FDA = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle DFC = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha,$$

$$\because OA = OE = r,$$

$$\therefore OA = FC, OE = FD,$$

$$\because \angle AOE = \angle DFC,$$

$$\therefore \triangle OAE \cong \triangle FCD,$$

$$\therefore AE = CD,$$

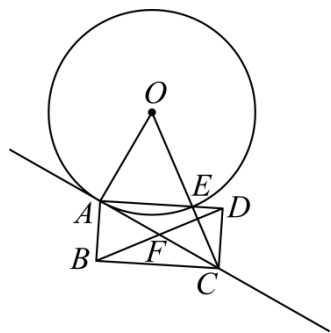
\because 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore BC = AD,$$

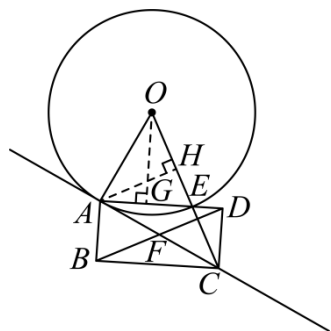
$$\because AD = AE + DE,$$

$$\therefore BC = CD + DE;$$

②补全图形如图:



过点 O 作 $OG \perp AE$ 于点 G , $AH \perp OE$ 于点 H ,



在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $OA = r, AC = \frac{4}{3}r$,

∴由勾股定理得 $OC = \frac{5}{3}r$,

$$\because \frac{CE}{OE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore CE = \frac{2}{3}r,$$

$$\therefore OC = OE + CE,$$

∴点 E 在线段 OC 上,

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ACO, \tan \alpha = \frac{AC}{AO} = \frac{4}{3},$$

$$\because OG \perp AE, OA = OE,$$

$$\therefore \angle EOG = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\because AH \perp OE,$$

$$\therefore \angle EOG + \angle OEA = \angle EAH + \angle OEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAH = \angle EOG = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OAH \text{ 中, } \tan \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore \text{设 } AH = 4m, OH = 3m,$$

$$\therefore \text{由勾股定理得 } OA = OE = 5m,$$

$$\therefore HE = 5m - 3m = 2m,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle AHE \text{ 中, } \tan \angle EAH = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{HE}{AH} = \frac{1}{2}$$

∵四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DAC = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\text{而 } \angle EAH = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, } \tan \angle ACB = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}.$$

【点睛】本题考查了圆的切线的性质，等腰三角形的性质，全等三角形的判定与性质，矩形的性质，解直角三角形，勾股定理，熟练掌握知识点，正确添加辅助线是解决本题的关键.