

2024 年福建省中考真题数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

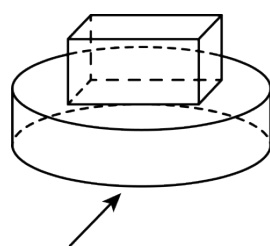
1. 下列实数中, 无理数是 ()

- A. -3 B. 0 C. $\frac{2}{3}$ D. $\sqrt{5}$

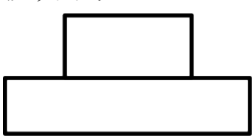

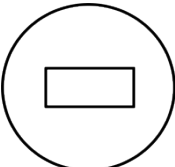
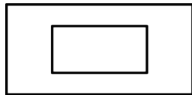
2. 据《人民日报》3月12日电, 世界知识产权组织近日公布数据显示, 2023年, 全球PCT(《专利合作条约》)国际专利申请总量为27.26万件, 中国申请量为69610件, 是申请量最大的来源国. 数据69610用科学记数法表示为 ()

- A. 6961×10 B. 696.1×10^2 C. 6.961×10^4 D. 0.6961×10^5

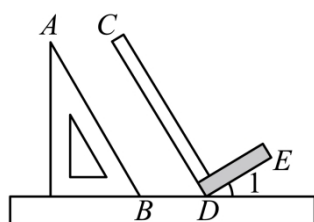
3. 如图是由长方体和圆柱组成的几何体, 其俯视图是 ()



主视方向

- A.  B. 
- C.  D. 

4. 在同一平面内, 将直尺、含 30° 角的三角尺和木工角尺 ($CD \perp DE$) 按如图方式摆放, 若 $AB \parallel CD$, 则 $\angle 1$ 的大小为 ()



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

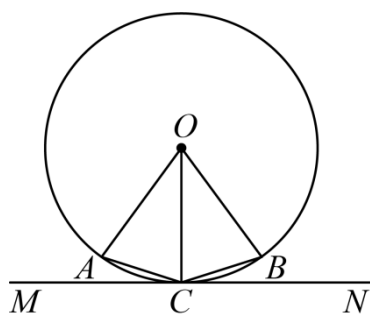
5. 下列运算正确的是 ()

A. $a^3 \cdot a^3 = a^9$ B. $a^4 \div a^2 = a^2$ C. $(a^3)^2 = a^5$ D. $2a^2 - a^2 = 2$

6. 哥德巴赫提出“每个大于 2 的偶数都可以表示为两个质数之和”的猜想，我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 在质数 2, 3, 5 中，随机选取两个不同的数，其和是偶数的概率是 ()

A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 如图，已知点 A, B 在 $\odot O$ 上， $\angle AOB = 72^\circ$ ，直线 MN 与 $\odot O$ 相切，切点为 C ，且 C 为 \widehat{AB} 的中点，则 $\angle ACM$ 等于 ()



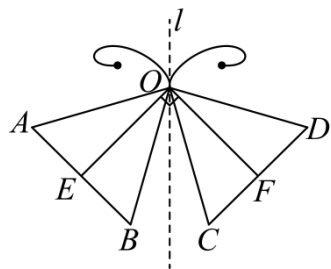
A. 18° B. 30° C. 36° D. 72°

8. 今年我国国民经济开局良好，市场销售稳定增长，社会消费增长较快，第一季度社会消费品零售总额 120327 亿元，比去年第一季度增长 4.7%，求去年第一季度社会消费品零售总额. 若将去年第一季度社会消费品零售总额设为 x 亿元，则符合题意的方程是 ()

A. $(1 + 4.7\%)x = 120327$ B. $(1 - 4.7\%)x = 120327$

C. $\frac{x}{1 + 4.7\%} = 120327$ D. $\frac{x}{1 - 4.7\%} = 120327$

9. 小明用两个全等的等腰三角形设计了一个“蝴蝶”的平面图案. 如图，其中 $\triangle OAB$ 与 $\triangle ODC$ 都是等腰三角形，且它们关于直线 l 对称，点 E, F 分别是底边 AB, CD 的中点， $OE \perp OF$. 下列推断错误的是 ()



A. $OB \perp OD$ B. $\angle BOC = \angle AOB$
C. $OE = OF$ D. $\angle BOC + \angle AOD = 180^\circ$

10. 已知二次函数 $y = x^2 - 2ax + a$ ($a \neq 0$) 的图象经过 $A\left(\frac{a}{2}, y_1\right)$, $B(3a, y_2)$ 两点, 则下列判断正确的是 ()

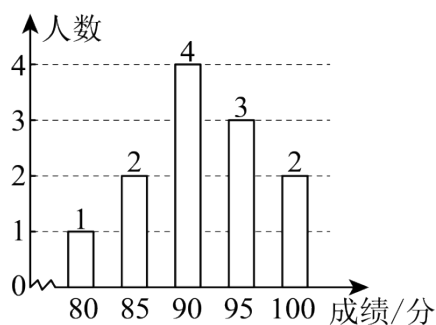
- A. 可以找到一个实数 a , 使得 $y_1 > a$ B. 无论实数 a 取什么值, 都有 $y_1 > a$
- C. 可以找到一个实数 a , 使得 $y_2 < 0$ D. 无论实数 a 取什么值, 都有 $y_2 < 0$

二、填空题

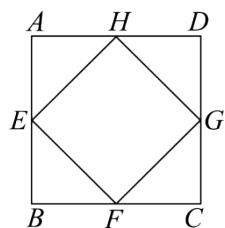
11. 因式分解: $x^2 + x =$ _____.

12. 不等式 $3x - 2 < 1$ 的解集是_____.

13. 学校为了解学生的安全防范意识, 随机抽取了 12 名学生进行相关知识测试, 将测试成绩整理得到如图所示的条形统计图, 则这 12 名学生测试成绩的中位数是_____. (单位: 分)



14. 如图, 正方形 $ABCD$ 的面积为 4, 点 E , F , G , H 分别为边 AB , BC , CD , AD 的中点, 则四边形 $EFGH$ 的面积为_____.



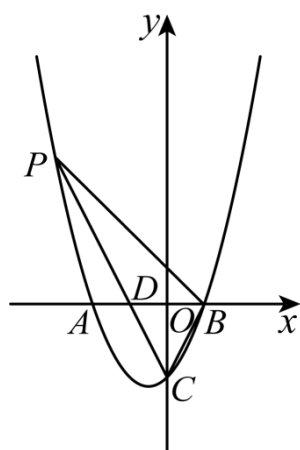
15. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与 $\odot O$ 交于 A, B 两点, 且点 A, B 都在第一象限. 若 $A(1, 2)$, 则点 B 的坐标为_____.

20. 已知 A、B 两地都只有甲、乙两类普通高中学校. 在一次普通高中学业水平考试中, A 地甲类学校有考生 3000 人, 数学平均分为 90 分; 乙类学校有考生 2000 人, 数学平均分为 80 分.

(1) 求 A 地考生的数学平均分;

(2) 若 B 地甲类学校数学平均分为 94 分, 乙类学校数学平均分为 82 分, 据此, 能否判断 B 地考生数学平均分一定比 A 地考生数学平均分高? 若能, 请给予证明; 若不能, 请举例说明.

21. 如图, 已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 其中 $A(-2, 0), C(0, -2)$.



(1) 求二次函数的表达式;

(2) 若 P 是二次函数图象上的一点, 且点 P 在第二象限, 线段 PC 交 x 轴于点 D , $\triangle PDB$ 的面积是 $\triangle CDB$ 的面积的 2 倍, 求点 P 的坐标.

22. 如图, 已知直线 $l_1 \parallel l_2$.



(1) 在 l_1, l_2 所在的平面内求作直线 l , 使得 $l \parallel l_1 \parallel l_2$, 且 l 与 l_1 间的距离恰好等于 l 与 l_2 间的距离; (要求: 尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹)

(2) 在 (1) 的条件下, 若 l_1 与 l_2 间的距离为 2, 点 A, B, C 分别在 l, l_1, l_2 上, 且 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

23. 已知实数 a, b, c, m, n 满足 $3m + n = \frac{b}{a}, mn = \frac{c}{a}$.

(1) 求证: $b^2 - 12ac$ 为非负数;

(2) 若 a, b, c 均为奇数, m, n 是否可以都为整数? 说明你的理由.

24. 在手工制作课上, 老师提供了如图 1 所示的矩形卡纸 $ABCD$, 要求大家利用它制作一个底面为正方形的礼品盒. 小明按照图 2 的方式裁剪 (其中 $AE = FB$), 恰好得到纸盒的展开图, 并利用该展开图折成一个礼品盒, 如图 3 所示.

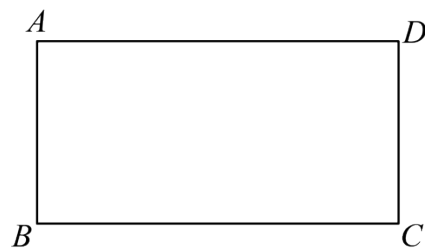


图 1

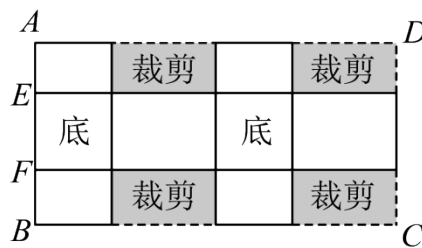


图 2

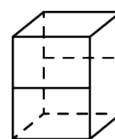


图 3

(1) 直接写出 $\frac{AD}{AB}$ 的值;

(2) 如果要求折成的礼品盒的两个相对的面上分别印有“吉祥”和“如意”, 如图 4 所示, 那么应选择的纸盒展开图图样是 ()

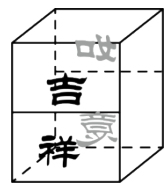
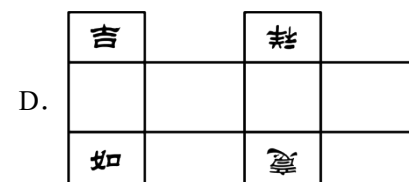
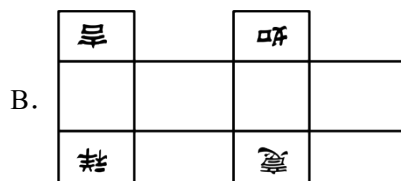


图 4



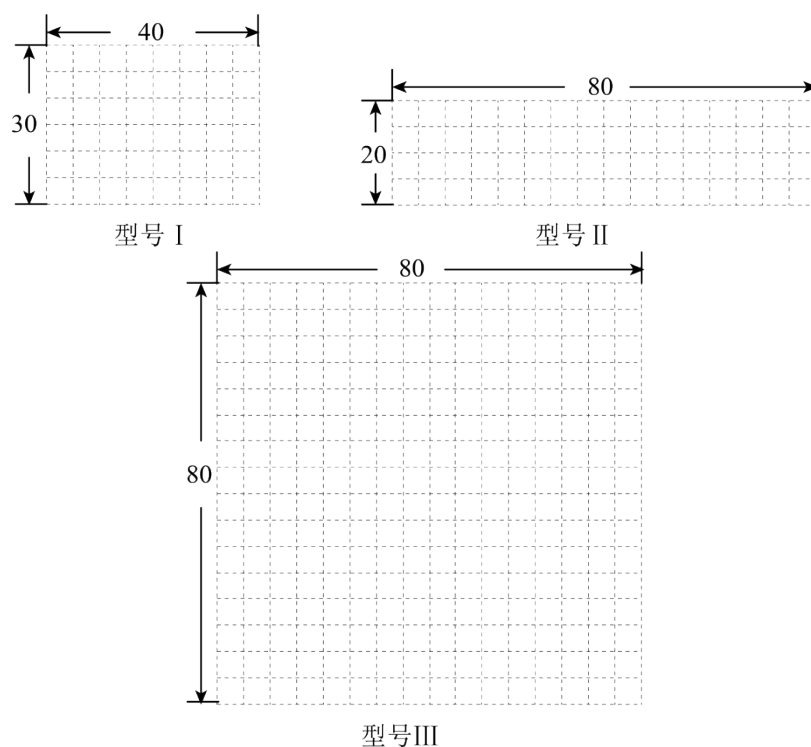
(3)

卡纸型号	型号I	型号II	型号III
------	-----	------	-------

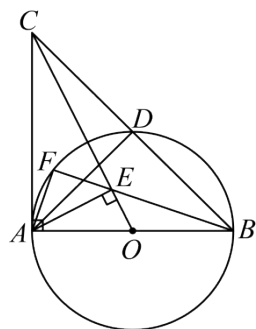
规格（单位：cm）	30×40	20×80	80×80
单价（单位：元）	3	5	20

现以小明设计的纸盒展开图(图2)为基本样式,适当调整 AE , EF 的比例,制作棱长为10cm的正方体礼品盒,如果要制作27个这样的礼品盒,请你合理选择上述卡纸(包括卡纸的型号及相应型号卡纸的张数),并在卡纸上画出设计示意图(包括一张卡纸可制作几个礼品盒,其展开图在卡纸上的分布情况),给出所用卡纸的总费用.

(要求:①同一型号的卡纸如果需要不止一张,只要在一张卡纸上画出设计方案;②没有用到的卡纸,不要在该型号的卡纸上作任何设计;③所用卡纸的数量及总费用直接填在答题卡的表格上;④本题将综合考虑“利用卡纸的合理性”和“所用卡纸的总费用”给分,总费用最低的才能得满分;⑤试卷上的卡纸仅供作草稿用)



25. 如图,在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$,以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 BC 于点 D , $AE \perp OC$,垂足为 E , BE 的延长线交 \widehat{AD} 于点 F .



(1)求 $\frac{OE}{AE}$ 的值；

(2)求证： $\triangle AEB \sim \triangle BEC$ ；

(3)求证： AD 与 EF 互相平分．

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	C	A	B	B	A	A	B	C

1. D

【分析】无理数就是无限不循环小数，理解无理数的概念，一定要同时理解有理数的概念，有理数是整数与分数的统称，即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数，由此即可判定选择项.

本题主要考查了无理数的定义，其中初中范围内学习的无理数有： π , 2π 等；开方开不尽的数；以及像 0.1010010001....，等数.

【详解】根据无理数的定义可得：无理数是 $\sqrt{5}$

故选：D.

2. C

【分析】根据科学记数法的定义解答，科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数，确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

本题考查了科学记数法，熟悉科学记数法概念是解题的关键.

【详解】 $69610 = 6.961 \times 10^4$

故选：C.

3. C

【分析】本题考查了简单组合体的三视图，根据从上边看得到的图形是俯视图，可得答案.

【详解】解：这个立体图形的俯视图是一个圆形，圆形内部中间是一个长方形.

故选：C.

4. A

【分析】本题考查了平行线的性质，由 $AB \parallel CD$ ，可得 $\angle CDB = 60^\circ$ ，即可求解.

【详解】 $\because AB \parallel CD$,

$\therefore \angle CDB = 60^\circ$,

$\because CD \perp DE$ ，则 $\angle CDE = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 = 180^\circ - \angle CDB - \angle CDE = 30^\circ$,

故选：A.

5. B

【分析】本题考查了同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项，解题的关键是掌握同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项运算法则.

利用同底数幂的乘法，同底数幂的除法，幂的乘方，合并同类项计算后判断正误.

【详解】解： $a^3 \cdot a^3 = a^6$ ，A 选项错误；

$a^4 \div a^2 = a^2$ ，B 选项正确；

$(a^3)^2 = a^6$ ，C 选项错误；

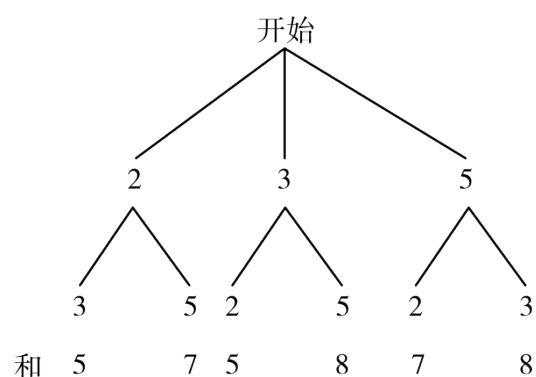
$2a^2 - a^2 = a^2$ ，D 选项错误；

故选：B.

6. B

【分析】此题考查了树状图或列表法求概率，根据题意画出树状图，求和后利用概率公式计算即可.

【详解】解：画树状图如下：



由树状图可知，共有 6 种不同情况，和是偶数的共有 2 种情况，故和是偶数的概率是

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

故选：B

7. A

【分析】本题考查了切线的性质，三角形内角和以及等腰三角形的性质，根据 C 为 $\overset{\circ}{A}B$ 的中点，三角形内角和可求出 $\angle OCA = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$ ，再根据切线的性质即可求解.

【详解】 $\because \angle AOB = 72^\circ$ ， C 为 \widehat{AB} 的中点，

$$\therefore \angle AOC = 36^\circ$$

$$\because OA = OC$$

$$\therefore \angle OCA = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 36^\circ) = 72^\circ$$

\because 直线 MN 与 $\odot O$ 相切,

$$\therefore \angle OCM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACM = \angle OCM - \angle OCA = 18^\circ$$

故选: A.

8. A

【分析】本题主要考查了列一元一次方程, 解题的关键是理解题意, 找出等量关系, 根据今年第一季度社会消费品零售总额 120327 亿元, 比去年第一季度增长 4.7%, 列出方程即可.

【详解】解: 将去年第一季度社会消费品零售总额设为 x 亿元, 根据题意得:

$$(1 + 4.7\%)x = 120327,$$

故选: A.

9. B

【分析】本题考查了对称的性质, 等腰三角形的性质等;

A. 由对称的性质得 $\angle AOB = \angle DOC$, 由等腰三角形的性质得 $\angle BOE = \frac{1}{2} \angle AOB$,

$\angle DOF = \frac{1}{2} \angle DOC$, 即可判断;

B. $\angle BOC$ 不一定等于 $\angle AOB$, 即可判断;

C. 由对称的性质得 $\triangle OAB \cong \triangle ODC$, 由全等三角形的性质即可判断;

D. 过 O 作 $GM \perp OH$, 可得 $\angle GOD = \angle BOH$, 由对称性质得 $\angle BOH = \angle COH$ 同理可证 $\angle AOM = \angle BOH$, 即可判断;

掌握轴对称的性质是解题的关键.

【详解】解: A. $\because OE \perp OF$,

$$\therefore \angle BOE + \angle BOF = 90^\circ,$$

由对称得 $\angle AOB = \angle DOC$,

\because 点 E, F 分别是底边 AB, CD 的中点, $\triangle OAB$ 与 $\triangle ODC$ 都是等腰三角形,

$$\therefore \angle BOE = \frac{1}{2} \angle AOB, \angle DOF = \frac{1}{2} \angle DOC,$$

$$\therefore \angle BOF + \angle DOF = 90^\circ,$$

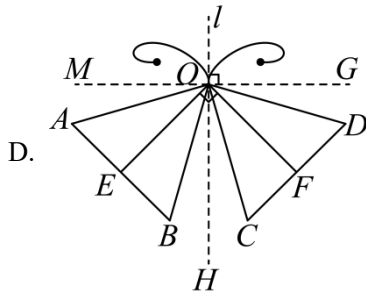
$\therefore OB \perp OD$ ，结论正确，故不符合题意；

B. $\angle BOC$ 不一定等于 $\angle AOB$ ，结论错误，故符合题意；

C. 由对称得 $\triangle OAB \cong \triangle ODC$ ，

\therefore 点 E ， F 分别是底边 AB ， CD 的中点，

$\therefore OE = OF$ ，结论正确，故不符合题意；



过 O 作 $GM \perp OH$ ，

$\therefore \angle GOD + \angle DOH = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BOH + \angle DOH = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle GOD = \angle BOH$ ，由对称得 $\angle BOH = \angle COH$ ，

$\therefore \angle GOD = \angle COH$ ，

同理可证 $\angle AOM = \angle BOH$ ，

$\therefore \angle AOD + \angle BOC = \angle AOD + \angle AOM + \angle DOG = 180^\circ$ ，结论正确，故不符合题意；

故选：B.

10. C

【分析】本题考查二次函数的图象和性质，根据题意得到二次函数开口向上，且对称轴为

$x = -\frac{-2a}{2} = a$ ，顶点坐标为 $(a, a - a^2)$ ，再分情况讨论，当 $a > 0$ 时，当 $a < 0$ 时， y_1 ， y_2 的

大小情况，即可解题.

【详解】解： \because 二次函数解析式为 $y = x^2 - 2ax + a (a \neq 0)$ ，

\therefore 二次函数开口向上，且对称轴为 $x = -\frac{-2a}{2} = a$ ，顶点坐标为 $(a, a - a^2)$ ，

当 $x = \frac{a}{2}$ 时， $y_1 = \frac{a^2}{4} - a^2 + a = a - \frac{3}{4}a^2$ ，

当 $a > 0$ 时， $0 < \frac{a}{2} < a$ ，

$\therefore a > y_1 > a - a^2$ ，

当 $a < 0$ 时, $a < \frac{a}{2} < 0$,

$\therefore a - a^2 < y_1 < a$,

故 A、B 错误, 不符合题意;

\because 当 $a > 0$ 时, $0 < a < 2a < 3a$,

由二次函数对称性可知, $y_2 > a > 0$,

当 $a < 0$ 时, $3a < 2a < a < 0$, 由二次函数对称性可知, $y_2 > a$, 不一定大于 0,

故 C 正确符合题意; D 错误, 不符合题意;

故选: C.

11. $x(x+1)$

【分析】要将一个多项式分解因式的一般步骤是首先看各项有没有公因式, 若有公因式, 则把它提取出来, 之后再观察是否是完全平方公式或平方差公式, 若是就考虑用公式法继续分解因式. 因此, 直接提取公因式 x 即可.

【详解】解: $x^2 + x = x(x+1)$

12. $x < 1$

【分析】本题考查的是解一元一次不等式, 通过移项, 未知数系数化为 1, 求解即可解.

【详解】解: $3x - 2 < 1$,

$3x < 3$,

$x < 1$,

故答案为: $x < 1$.

13. 90

【分析】本题考查了中位数的知识, 解题的关键是了解中位数的求法, 难度不大.

根据中位数的定义 (数据个数为偶数时, 排序后, 位于中间位置的数为中位数), 结合图中的数据进行计算即可;

【详解】解: \because 共有 12 个数,

\therefore 中位数是第 6 和 7 个数的平均数,

\therefore 中位数是 $(90 + 90) \div 2 = 90$;

故答案为: 90.

14. 2

【分析】本题考查正方形性质，线段中点的性质，根据正方形性质和线段中点的性质得到

$HD = DG = 1$ ，进而得到 $S_{\triangle DGH}$ ，同理可得 $S_{\triangle AHE} = S_{\triangle EFB} = S_{\triangle CGF} = \frac{1}{2}$ ，最后利用四边形 $EFGH$ 的面积 = 正方形 $ABCD$ 的面积 - 4 个小三角形面积求解，即可解题.

【详解】解：∵ 正方形 $ABCD$ 的面积为 4，

$$\therefore AB = BC = CD = AD = 2, \quad \angle D = 90^\circ,$$

∵ 点 E, F, G, H 分别为边 AB, BC, CD, AD 的中点，

$$\therefore HD = DG = 1,$$

$$\therefore S_{\triangle DGH} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{同理可得 } S_{\triangle AHE} = S_{\triangle EFB} = S_{\triangle CGF} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{四边形 } EFGH \text{ 的面积为 } 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2.$$

故答案为：2.

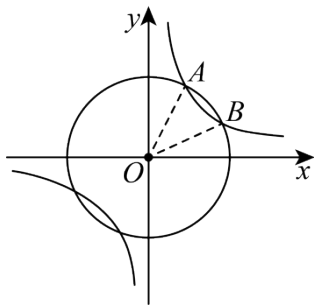
15. (2,1)

【分析】本题考查了反比例函数的性质以及勾股定理，完全平方公式的应用，先根据 $A(1,2)$

得出 $k = 2$ ，设 $B(n, m)$ ，则 $nm = k = 2$ ，结合完全平方公式的变形与应用得出

$$m + \frac{2}{m} = 3, \quad m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2) = 0, \quad \text{结合 } A(1,2), \text{ 则 } B(2,1), \text{ 即可作答.}$$

【详解】解：如图：连接 OA, OB



∵ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象与 $\odot O$ 交于 A, B 两点，且 $A(1,2)$

$$\therefore 2 = \frac{k}{1}, \quad k = 2$$

设 $B(n, m)$ ，则 $nm = k = 2$

$$\because OB = OA = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore m^2 + n^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

$$\text{则 } (m+n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn = 5 + 4 = 9$$

\therefore 点 B 在第一象限

$$\therefore m+n=3$$

$$\text{把 } nm=k=2 \text{ 代入得 } m+\frac{2}{m}=3, \quad m^2-3m+2=(m-1)(m-2)=0$$

$$\therefore m_1=1, \quad m_2=2$$

经检验: $m_1=1, \quad m_2=2$ 都是原方程的解

$$\therefore A(1,2)$$

$$\therefore B(2,1)$$

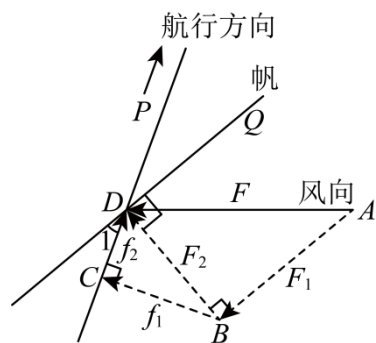
故答案为: $(2,1)$

16. 128

【分析】此题考查了解直角三角形的应用, 求出 $\angle ADQ = 40^\circ$, $\angle 1 = \angle PDQ = 30^\circ$, 由 $AB \parallel QD$ 得到 $\angle BAD = \angle ADQ = 40^\circ$, 求出 $F_2 = BD = AD \cdot \sin \angle BAD = 256$, 求出 $\angle BDC = 90^\circ - \angle 1 = 60^\circ$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 根据 $f_2 = CD = BD \cdot \cos \angle BDC$ 即可求出答案.

【详解】解: 如图,



\therefore 帆船航行方向与风向所在直线的夹角 $\angle PDA$ 为 70° , 帆与航行方向的夹角 $\angle PDQ$ 为 30° ,

$$\therefore \angle ADQ = \angle PDA - \angle PDQ = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ, \quad \angle 1 = \angle PDQ = 30^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel QD,$$

$$\therefore \angle BAD = \angle ADQ = 40^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $F = AD = 400$, $\angle ABD = 90^\circ$,

$$\therefore F_2 = BD = AD \cdot \sin \angle BAD = 400 \times \sin 40^\circ = 400 \times 0.64 = 256,$$

由题意可知, $BD \perp DQ$,

$$\therefore \angle BDC + \angle 1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ - \angle 1 = 60^\circ$$

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $BD = 256, \angle BCD = 90^\circ$,

$$\therefore f_2 = CD = BD \cdot \cos \angle BDC = 256 \times \cos 60^\circ = 256 \times \frac{1}{2} = 128,$$

故答案为: 128

17. 4

【分析】本题考查零指数幂、绝对值、算术平方根等基础知识, 熟练掌握运算法则是解题的关键.

根据零指数幂、绝对值、算术平方根分别计算即可;

【详解】解: 原式 $= 1 + 5 - 2 = 4$.

18. 见解析

【分析】本题考查菱形的性质、全等三角形的判定与性质, 熟练掌握全等三角形的判定与性质是解答的关键. 根据菱形的性质证得 $AB = AD$, $\angle B = \angle D$, 再根据全等三角形的判定证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ (AAS) 即可.

【详解】证明: \because 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore AB = AD, \angle B = \angle D,$$

$$\because \angle AEB = \angle AFD,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BE = DF.$$

19. $x = 10$.

【分析】本题考查解分式方程, 掌握解分式方程的步骤和方法, 将分式方程化为整式方程求解, 即可解题.

$$\text{【详解】解: } \frac{3}{x+2} + 1 = \frac{x}{x-2},$$

$$\text{方程两边都乘 } (x+2)(x-2), \text{ 得 } 3(x-2) + (x+2)(x-2) = x(x+2).$$

$$\text{去括号得: } 3x - 6 + x^2 - 4 = x^2 + 2x,$$

$$\text{解得 } x = 10.$$

经检验, $x=10$ 是原方程的根.

20. (1)86;

(2)不能, 举例见解析.

【分析】本小题考查加权平均数等基础知识,

(1) 根据平均数的概念求解即可;

(2) 根据平均数的意义求解即可.

【详解】(1) 由题意, 得 A 地考生的数学平均分为 $\frac{1}{5000} \times (90 \times 3000 + 80 \times 2000) = 86$.

(2) 不能.

举例如下: 如 B 地甲类学校有考生 1000 人, 乙类学校有考生 3000 人, 则 B 地考生的数学平均分为

$$\frac{1}{4000} \times (94 \times 1000 + 82 \times 3000) = 85.$$

因为 $85 < 86$,

所以不能判断 B 地考生数学平均分一定比 A 地考生数学平均分高.

21. (1) $y = x^2 + x - 2$

(2) $(-3, 4)$

【分析】本题考查二次函数表达式、二次函数的图象与性质、二元一次方程组、一元二次方程、三角形面积等基础知识, 考查运算能力、推理能力、几何直观等.

(1) 根据待定系数法求解即可;

(2) 设 $P(m, n)$, 因为点 P 在第二象限, 所以 $m < 0, n > 0$. 依题意, 得 $\frac{S_{\triangle PDB}}{S_{\triangle CDB}} = 2$, 即可得出 $\frac{n}{CO} = 2$, 求出 $n = 2CO = 4$, 由 $m^2 + m - 2 = 4$, 求出 m , 即可求出点 P 的坐标.

【详解】(1) 解: 将 $A(-2, 0), C(0, -2)$ 代入 $y = x^2 + bx + c$,

$$\text{得} \begin{cases} 4 - 2b + c = 0 \\ c = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b = 1 \\ c = -2 \end{cases},$$

所以，二次函数的表达式为 $y = x^2 + x - 2$.

(2) 设 $P(m, n)$, 因为点 P 在第二象限, 所以 $m < 0, n > 0$.

依题意, 得 $\frac{S_{\triangle PDB}}{S_{\triangle CDB}} = 2$, 即 $\frac{\frac{1}{2}BD \cdot n}{\frac{1}{2}BD \cdot CO} = 2$, 所以 $\frac{n}{CO} = 2$.

由已知, 得 $CO = 2$,

所以 $n = 2CO = 4$.

由 $m^2 + m - 2 = 4$,

解得 $m_1 = -3, m_2 = 2$ (舍去),

所以点 P 坐标为 $(-3, 4)$.

22. (1) 见解析;

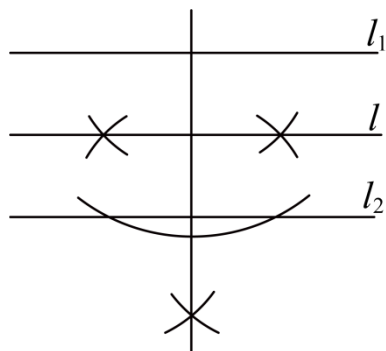
(2) $\triangle ABC$ 的面积为 1 或 $\frac{5}{2}$.

【分析】本题主要考查基本作图, 平行线的性质, 全等三角形的判定, 勾股定理以及分类讨论思想:

(1) 先作出与 l_2 的垂线, 再作出夹在 l_1, l_2 间垂线段的垂直平分线即可;

(2) 分 $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC$; $\angle ABC = 90^\circ, BA = BC$; $\angle ACB = 90^\circ, CA = CB$ 三种情况, 结合三角形面积公式求解即可

【详解】(1) 解: 如图,



直线 l 就是所求作的直线.

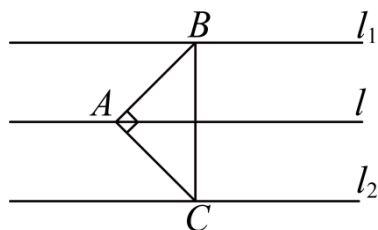
(2) ①当 $\angle BAC = 90^\circ, AB = AC$ 时,

$\therefore l \parallel l_1 \parallel l_2$, 直线 l_1 与 l_2 间的距离为 2, 且 l 与 l_1 间的距离等于 l 与 l_2 间的距离, 根据图形的

对称性可知： $BC = 2$ ，

$$\therefore AB = AC = \sqrt{2}，$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 1。$$



②当 $\angle ABC = 90^\circ$, $BA = BC$ 时，

分别过点 A, C 作直线 l_1 的垂线，垂足为 M, N ，

$$\therefore \angle AMB = \angle BNC = 90^\circ。$$

$\because l \parallel l_1 \parallel l_2$ ，直线 l_1 与 l_2 间的距离为 2，且 l 与 l_1 间的距离等于 l 与 l_2 间的距离，

$$\therefore CN = 2, AM = 1。$$

$$\because \angle MAB + \angle ABM = 90^\circ, \angle NBC + \angle ABM = 90^\circ,$$

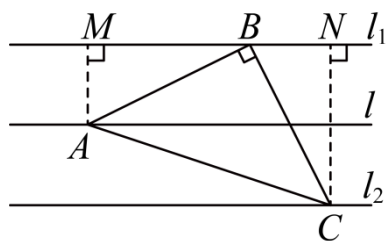
$$\therefore \angle MAB = \angle NBC, \therefore \triangle AMB \cong \triangle BNC,$$

$$\therefore BM = CN = 2。$$

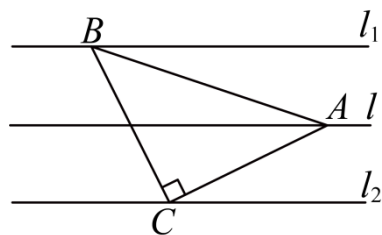
在 $\text{Rt}\triangle ABM$ 中，由勾股定理得 $AB^2 = AM^2 + BM^2$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{5}。$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{5}{2}。$$



③当 $\angle ACB = 90^\circ$, $CA = CB$ 时，同理可得， $S_{\triangle ABC} = \frac{5}{2}。$



综上所述, $\triangle ABC$ 的面积为 1 或 $\frac{5}{2}$.

23. (1) 证明见解析;

(2) m, n 不可能都为整数, 理由见解析.

【分析】本小题考查整式的运算、因式分解、等式的性质等基础知识: 考查运算能力、推理能力、创新意识等, 以及综合应用所学知识分析、解决问题的能力.

(1) 根据题意得出 $b = a(3m + n), c = amn$, 进而计算 $b^2 - 12ac$, 根据非负数的性质, 即可求解;

(2) 分情况讨论, ① m, n 都为奇数; ② m, n 为整数, 且其中至少有一个为偶数, 根据奇偶数的性质结合已知条件分析即可.

【详解】(1) 解: 因为 $3m + n = \frac{b}{a}, mn = \frac{c}{a}$,

所以 $b = a(3m + n), c = amn$.

则 $b^2 - 12ac = [a(3m + n)]^2 - 12a^2mn$

$= a^2(9m^2 + 6mn + n^2) - 12a^2mn$

$= a^2(9m^2 - 6mn + n^2)$

$= a^2(3m - n)^2$.

因为 a, m, n 是实数, 所以 $a^2(3m - n)^2 \geq 0$,

所以 $b^2 - 12ac$ 为非负数.

(2) m, n 不可能都为整数.

理由如下: 若 m, n 都为整数, 其可能情况有: ① m, n 都为奇数; ② m, n 为整数, 且其中至少有一个为偶数.

① 当 m, n 都为奇数时, 则 $3m + n$ 必为偶数.

又 $3m + n = \frac{b}{a}$, 所以 $b = a(3m + n)$.

因为 a 为奇数, 所以 $a(3m + n)$ 必为偶数, 这与 b 为奇数矛盾.

② 当 m, n 为整数, 且其中至少有一个为偶数时, 则 mn 必为偶数.

又因为 $mn = \frac{c}{a}$ ，所以 $c = amn$ 。

因为 a 为奇数，所以 amn 必为偶数，这与 c 为奇数矛盾。

综上所述， m, n 不可能都为整数。

24. (1)2;

(2)C;

(3)见解析。

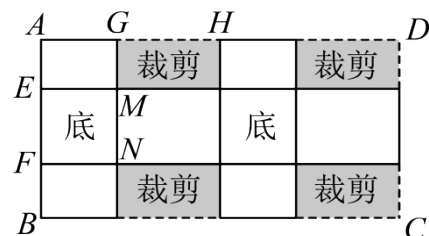
【分析】本题考查了几何体的展开与折叠，空间观念、推理能力、模型观念、创新意识等知识，掌握相关知识是解题的关键。

(1)由折叠和题意可知， $GH = AE + FB$ ， $AH = DH$ ，四边形 $EFNM$ 是正方形，得到 $EM = EF$ ，即 $AG = EF$ ，即可求解；

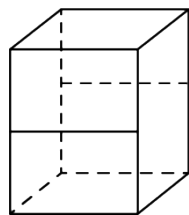
(2)根据几何体的展开图即可求解；

(3)由题意可得，每张型号Ⅲ卡纸可制作 10 个正方体，每张型号Ⅱ卡纸可制作 2 个正方体，每张型号Ⅰ卡纸可制作 1 个正方体，即可求解。

【详解】(1)解：如图：



上述图形折叠后变成：



由折叠和题意可知， $GH = AE + FB$ ， $AH = DH$ ，

\because 四边形 $EFNM$ 是正方形，

$\therefore EM = EF$ ，即 $AG = EF$ ，

$\therefore GH + AG = AE + FB + EF$ ，即 $AH = AB$ ，

$\because AH = DH$ ，

$$\therefore \frac{AD}{AB} = \frac{AH + DH}{AB} = 2,$$

$$\therefore \frac{AD}{AB} \text{ 的值为: } 2.$$

(2) 解: 根据几何体的展开图可知, “吉”和“如”在对应面上, “祥”和“意”在对应面上, 而对应面上的字中间相隔一个几何图形, 且字体相反,

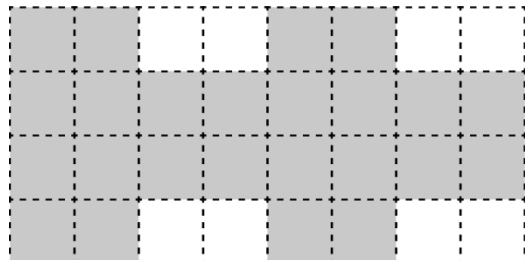
\therefore C 选项符合题意,

故选: C.

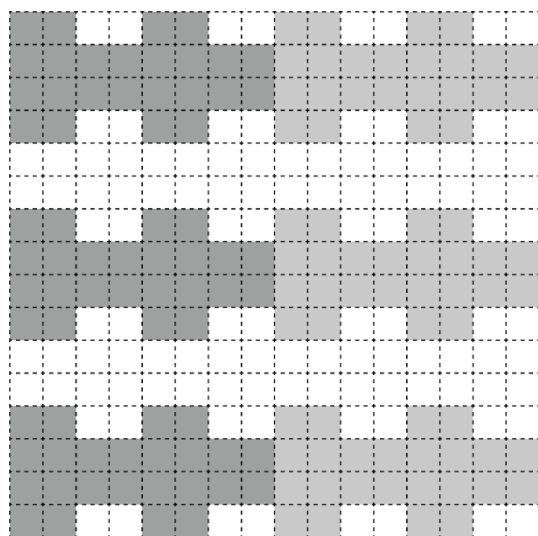
(3) 解:

卡纸型号	型号 I	型号 II	型号 III
需卡纸的数量 (单位: 张)	1	3	2
所用卡纸总费用 (单位: 元)	58		

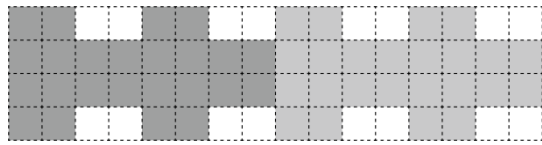
根据 (1) 和题意可得: 卡纸每格的边长为 5cm, 则要制作一个边长为 10cm 的正方体的展开图形为:



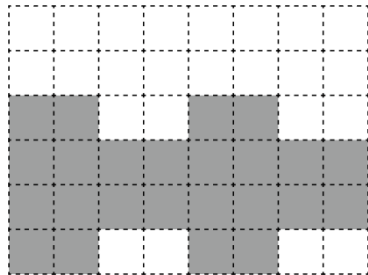
\therefore 型号 III 卡纸, 每张卡纸可制作 10 个正方体, 如图:



型号Ⅱ卡纸，每张这样的卡纸可制作 2 个正方体，如图：



型号Ⅰ卡纸，每张这样的卡纸可制作 1 个正方体，如图：



∴可选择型号Ⅲ卡纸 2 张，型号Ⅱ卡纸 3 张，型号Ⅰ卡纸 1 张，则

$$10 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 27 \text{ (个)},$$

∴所用卡纸总费用为：

$$20 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 1 = 58 \text{ (元)}.$$

25. (1) $\frac{1}{2}$

(2)证明见解析

(3)证明见解析

【分析】(1) 先证得 $AC = 2AO$ ，再在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中， $\tan \angle AOC = \frac{AC}{AO} = 2$ ．在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中， $\tan \angle AOC = \frac{AE}{OE}$ ，可得 $\frac{AE}{OE} = 2$ ，再证得结果；

(2) 过点 B 作 $BM \parallel AE$ ，交 EO 延长线于点 M ，先证明 $\triangle AOE \cong \triangle BOM$ ，可得 $AE = BM, OE = OM$ ，再证得 $\angle BAE = \angle CBE$ ，再由相似三角形的判定可得结论；

(3) 如图，连接 DE, DF ，由 (2) $\triangle AEB \sim \triangle BEC$ ，可得

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BC} = \frac{2AO}{2BD} = \frac{AO}{BD}, \angle EAO = \angle EBD, \text{从而得出 } \triangle AOE \sim \triangle BDE, \text{得出}$$

$$\angle BED = \angle AEO = 90^\circ, \text{得出 } \angle AFB = \angle DEF, \text{再由平行线判定得出 } AF \parallel DE, AE \parallel FD,$$

从而得出四边形 $AEDF$ 是平行四边形，最后由平行四边形的性质可得结果．

【详解】(1) $\because AB = AC$ ，且 AB 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore AC = 2AO.$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ,$$

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle AOC$ 中, $\tan\angle AOC = \frac{AC}{AO} = 2$.

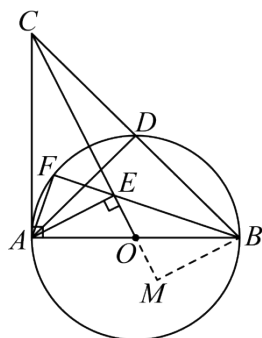
$\therefore AE \perp OC$,

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中, $\tan\angle AOC = \frac{AE}{OE}$.

$\therefore \frac{AE}{OE} = 2$,

$\therefore \frac{OE}{AE} = \frac{1}{2}$;

(2) 过点 B 作 $BM \parallel AE$, 交 EO 延长线于点 M .



$\therefore \angle BAE = \angle ABM, \angle AEO = \angle BMO = 90^\circ$.

$\therefore AO = BO$,

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle BOM$,

$\therefore AE = BM, OE = OM$.

$\therefore \frac{OE}{AE} = \frac{1}{2}$,

$\therefore BM = 2OE = EM$,

$\therefore \angle MEB = \angle MBE = 45^\circ$,

$\therefore \angle AEB = \angle AEO + \angle MEB = 135^\circ$, $\angle BEC = 180^\circ - \angle MEB = 135^\circ$,

$\therefore \angle AEB = \angle BEC$.

$\therefore AB = AC, \angle BAC = 90^\circ$,

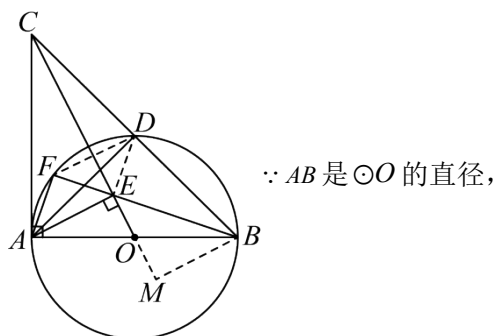
$\therefore \angle ABC = 45^\circ$,

$\therefore \angle ABM = \angle CBE$,

$\therefore \angle BAE = \angle CBE$,

$\therefore \triangle AEB \sim \triangle BEC$.

(3) 如图, 连接 DE, DF .



$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ADB = \angle AFB = 90^\circ, AB = 2AO.$$

$$\because AB = AC, \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore BC = 2BD, \angle DAB = 45^\circ.$$

由 (2) 知, $\triangle AEB \sim \triangle BEC$,

$$\therefore \frac{AE}{BE} = \frac{AB}{BC} = \frac{2AO}{2BD} = \frac{AO}{BD}, \angle EAO = \angle EBD,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle BDE,$$

$$\therefore \angle BED = \angle AEO = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle DEF = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle AFB = \angle DEF,$$

$$\therefore AF \parallel DE.$$

由 (2) 知, $\angle AEB = 135^\circ$,

$$\therefore \angle AEF = 180^\circ - \angle AEB = 45^\circ.$$

$$\because \angle DFB = \angle DAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle AEF,$$

$$\therefore AE \parallel FD,$$

\therefore 四边形 $AEDF$ 是平行四边形,

$\therefore AD$ 与 EF 互相平分.

【点睛】 本小题考查等腰三角形及直角三角形的判定与性质、锐角三角函数、全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、平行线的判定与性质、平行四边形的判定与性质、圆的基本性质等基础知识, 考查推理能力、几何直观、运算能力、创新意识等, 熟练掌握相关图形的性质定理是关键.