

2024 年浙江省 G3 联盟中考数学第二次联考模拟试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、单选题

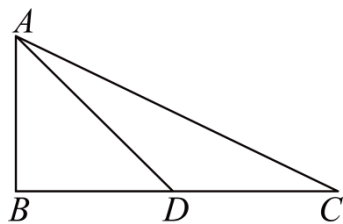
1. 这是 2024 年 1 月某日的气温实施预测情况, 则通过预测图可知, 下午 5 时的气温和此时气温的相对差值为 ()



- A. 4°C B. 3°C C. 2°C D. -4°C
2. “天有日月, 道分阴阳”, 从古至今, 中国人一直都在追求对称美. 中国传统图形比较注重于对称, 其集中体现在文字和建筑、绘画上, 下列图形、文字为轴对称图形的是 ()

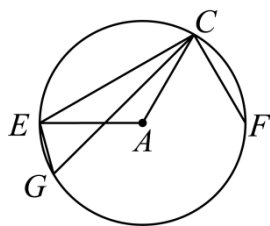


3. 2023 年杭州亚运会, 有五位同学将参加“中国舞迎亚运”活动, 已知小队中的每个人的身高 (单位: cm) 分别为: 168、167、170、172、158. 则这些队员的身高的方差为 ()
- A. 116 B. 33.4 C. 23.2 D. 4.8
4. 某商场举办促销活动, 负责人在一个不透明的袋子里装着 8 个大小、质量相同的小球, 其中 5 个为红色、2 个为黄色、1 个为绿色, 若要获奖需要一次性摸出 2 个红球和 1 个黄球, 那么获奖的概率为 ()
- A. $\frac{25}{256}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{5}{14}$
5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 的中点, 若 $AD = \sqrt{2}CD$, $AB = BD$. 则 $\tan \angle C$ 的值为 ()



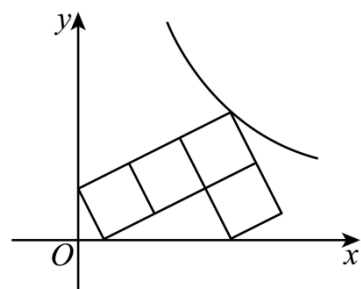
- A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

6. 如图，在 $\odot A$ 上有 C 、 E 、 F 、 G 四个点，其中 CG 为 $\angle ACE$ 的角平分线，若 $\angle A=120^\circ$ ， E 、 A 、 F 共线，则 $\angle GCF$ 的度数为（ ）



- A. 75° B. 60° C. 45° D. 90°

7. 如图，四个边长均为1的正方形如图摆放，其中三个顶点位于坐标轴上，其中一个顶点在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像上，则 k 的值为（ ）



- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

8. 在平面直角坐标系中，一次函数 $y_1=m(x+1)+1(m \neq 0)$ 和 $y_2=a(x-1)+2(a \neq 0)$ ，无论 x 取何值，始终有 $y_2 < y_1$ ，则 m 的取值为（ ）

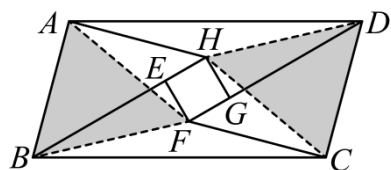
- A. $m < 0$ B. $m > \frac{1}{2}$ C. $m < \frac{1}{2}$ D. $m < \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$

9. 点 $A(-2, m)$ ， $B(4, n)$ 都在二次函数 $y=ax^2+bx+c(a \neq 0)$ 的图像上，若 $m > n$ ，则下列可能成立的是（ ）

- A. 当 $a < 0$ 时， $4a+b=0$ B. 当 $a < 0$ 时， $2a+b=0$
C. 当 $a > 0$ 时， $3a+b=0$ D. 当 $a > 0$ 时， $a+b=0$

10. 将两张全等的等腰直角三角形纸片 $\triangle ABH$ 与 $\triangle CDF$ 和一张正方形纸片 $EFGH$ 按照如图

所示的方式拼成一个平行四边形 $ABCD$ ，同时形成了剩余部分（即 $\triangle BEF$ ， $\triangle BFC$ ， $\triangle AHD$ ， $\triangle HDG$ ），若只知道阴影部分的面积，则不能直接求出（ ）

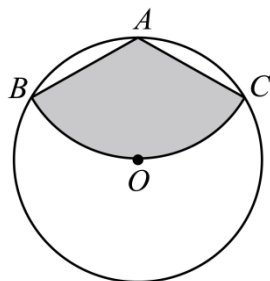


- A. $\triangle BEF$ 的面积
- B. $\triangle CDF$ 的面积
- C. 平行四边形 $ABCD$ 的面积
- D. 剩余部分的面积之和与正方形 $EFGH$ 面积和

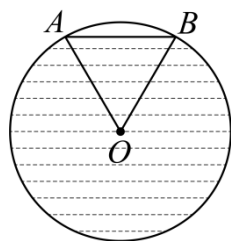
二、填空题

11. 定义一种运算 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ ，计算 $\begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sin 60^\circ \\ 2 & \sqrt{15} \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

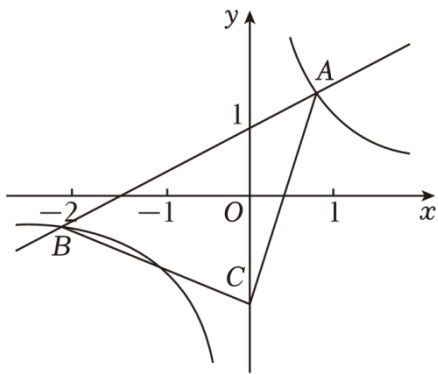
12. 从如图的一块半径为 1m 的铁圆盘上剪出一个圆周角为 120° 扇形 ABC ，若将剪下的扇形围成一个圆锥，则该圆锥的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



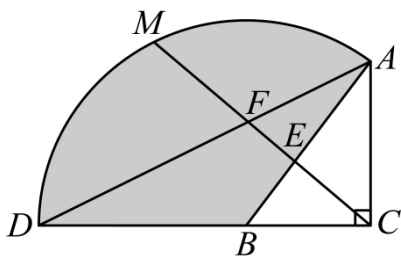
13. 某校区的输水管模型如图，输水管的直径为 4m ，某时刻水面 AB 满足 $\angle AOB = 60^\circ$ ，则此时水管截面的水面面积（即阴影部分面积）为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



14. 平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = \frac{1}{2}(x+3)$ 分别与函数 $y = \frac{k}{x} (k > 0)$ 的图象交于 A 、 B ，若 y 轴负半轴上存在点 C 使得 $\triangle ABC$ 是以 C 为直角顶点的等腰直角三角形，则 k 为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



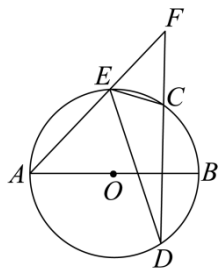
15. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ，以点 B 为圆心、 BA 为半径画劣弧 \widehat{AD} 交射线 CB 于点 D ， M 为 \widehat{AD} 的中点，联接 CM 、 AD ， CM 分别交 AB 、 AD 于点 E 、 F ，如果点 B 是线段 CD 的黄金分割点，则 $\cos \angle ABC =$ _____.



16. 若点 $(p, 1)$ 在抛物线 $y = \frac{1}{4}x^2$ 上过 y 轴上点 E 作两条相互垂直的直线与抛物线分别交于 A 、 B 、 C 、 D ，且 M 、 N 分别是线段 AB 、 CD 的中点， $\triangle EMN$ 面积的最小值为_____.

三、解答题

17. 已知：如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ ， E 是 \widehat{AC} 上一点， AE ， DC 的延长线相交于点 F ．求证： $\angle AED = \angle CEF$ ．



18. 图 1，图 2 都是由边长为 1 的小等边三角形构成的网格，每个小等边三角形的顶点称为格点，线段 AB 的端点都在格点上，分别按要求画出图形：

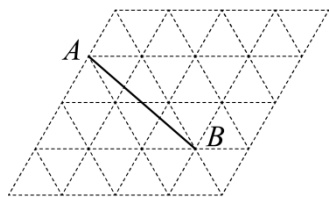


图1

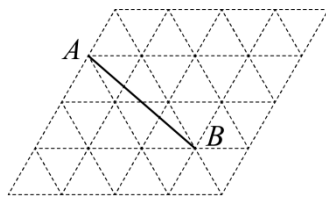


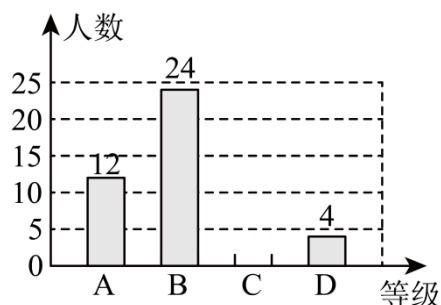
图2

(1)在图 1 中画出两个以 AB 为斜边的直角三角形 ABC ，且点 C 在格点上；

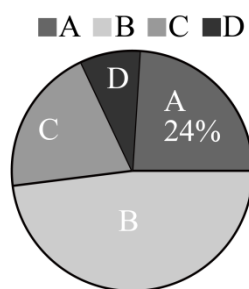
(2)在图 2 中画出一个以 AB 为对角线的菱形 $ADBE$ ，且 D, E 在格点上.

19. 法国著名的思想家伏尔泰说过“生命在于运动”，某大学小组为了调查初中同学学生课后运动时间，按照时间分为 A 、 B 、 C 、 D 四个等级，绘制了如下不完整统计表：

各等级人数分布图



各等级人数扇形统计图



(1)求本次调查的总人数，并且补全人数分布图；

(2)估计本次调查的中位数位于 A 、 B 、 C 、 D 哪个等级中；

(3)小宁认为我们可以根据本次调查数据精确预测全市初中生为 A 等的人数，请判断他这句话的正误，并说明理由.

20. 顶点为 D 的二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a < 0$) 满足以下三个条件的任意两个：

①其与 y 轴的交点为 $(0,1)$ ；

②其与 x 轴的交点为 $(-1,0)$ 和 $(3,0)$ ；

③该函数其最大值为 12

(1)从以上条件任选两个，求出函数的表达式；

(2)若存在直线 $y = -1$ ，二次函数上的存在一个点 A ，使得 AD 等于 A 到直线的距离，求出 A 点的坐标.

21. 阅读理解

教学实践活动：910班测量雷峰塔高度实践的相关数据

活动 1	<p>如图, A 点为塔顶, 将一根木棒立在 D 处, AC 的连线交地面于 Q 点, 同理将相同长度的木棒立在 F 处, 同时得到 P 点. 若移动木棒使得 $CD = QD$, 在 E 点的仰角为 30°, 则 $\angle PAQ =$ _____.</p>	
活动 2	<p>如图, 小组 2 设计了此测量方法, 若 CD 的长度为 18m, 已知 $\angle\alpha = 37^\circ$, $\angle\beta = 30^\circ$, 则可以得到塔的高度大约为 _____ . ($\sqrt{3} = 1.732$)</p> <p>($\sin 37^\circ \approx 0.602, \cos 37^\circ \approx 0.799, \tan 37^\circ \approx 0.754$)</p>	
总结与取优		
<p>老师做了一个小小的总结, 并且设计了一个新的方案, 已知塔前有一高 4 米的小树 CD, 发现水平地面上点 E、树顶和塔顶 A 恰好在一条直线上, 测得 $BD = 57$ 米, D、E 之间有一个花圃无法测量, 然后在 E 处放置一个平面镜, 沿 BE 后退, 退到 G 处恰好在平面中看到树顶 C 的像, 此时 $EG = 24$ 米, 测量者眼睛到地面的距离 FG 为 1.6 米, 求出塔高 AB.</p>		

22. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 为常数, 且 $a \neq 0$) 经过 $A(-2, -4)$ 和 $B(3, 1)$ 两点.

(1) 求 b 和 c 的值 (用含 a 的代数式表示);

(2) 若该抛物线开口向下, 且经过 $C(2m-3, n)$, $D(7-2m, n)$ 两点, 当 $k-3 < x < k+3$ 时, y 随 x 的增大而减小, 求 k 的取值范围;

(3) 已知点 $M(-6, 5)$, $N(2, 5)$, 若该抛物线与线段 MN 恰有一个公共点时, 结合函数图象, 求 a 的取值范围.

23. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, AC 为 $\odot O$ 的直径, $DE \perp AC$ 于点 F 交 BC 于点 E .

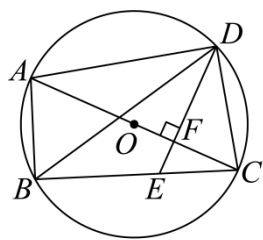


图1

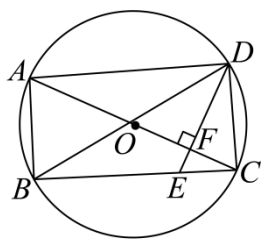


图2

(1) 设 $\angle DBC = \alpha$ ，试用含 α 的代数式表示 $\angle ADE$ ；

(2) 如图 2，若 $BE = 3CE$ ，求 $\frac{BD}{DE}$ 的值；

(3) 在 (2) 的条件下，若 AC, BD 交于点 G ，设 $\frac{FG}{CF} = x$ ， $\cos \angle BDE = y$ 。

① 求 y 关于 x 的函数表达式。

② 若 $BC = BD$ ，求 y 的值。

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	C	D	D	A	B	B	C	A

1. D

【分析】本题考查了有理数减法的应用，直接根据有理数减法的运算法则进行计算即可得出答案.

【详解】∵下午 5 时的气温是 8°C ，此时气温为 12°C

∴下午 5 时的气温和此时气温的相对差值为 $8^{\circ}\text{C}-12^{\circ}\text{C}=-4^{\circ}\text{C}$

故选 D.

2. C

【分析】本题主要考查了轴对称图形，如果一个平面图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形就叫做轴对称图形.

根据轴对称图形的定义进行逐一判断即可.

【详解】解：C 选项中的图形能找到一条直线，使图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，所以是轴对称图形；

A，B，D 选项中的图形不能找到一条直线，使图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，所以不是轴对称图形.

故选：C.

3. C

【分析】本题考查求方差，掌握方差公式，是解题的关键.

【详解】解：平均数为 $\frac{1}{5}(168+167+170+172+158)=167$ ，

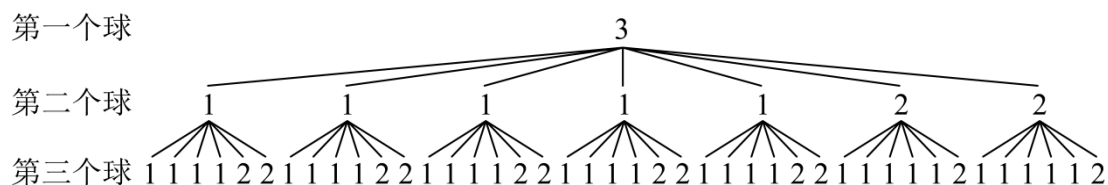
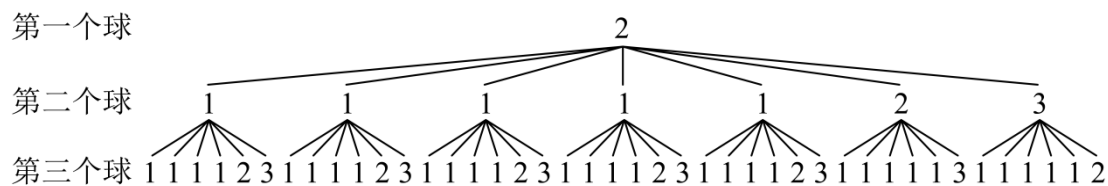
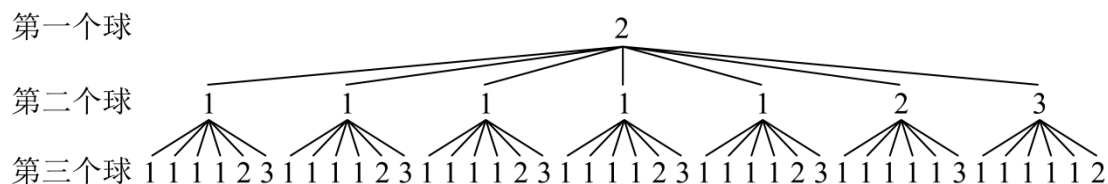
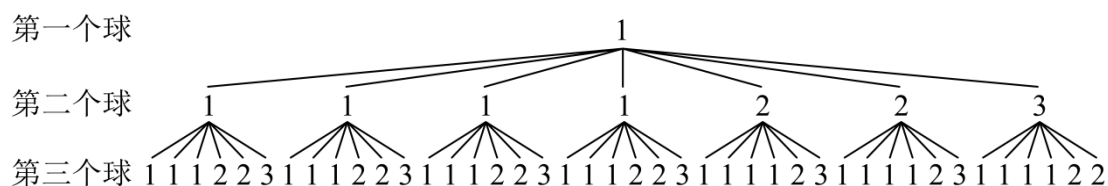
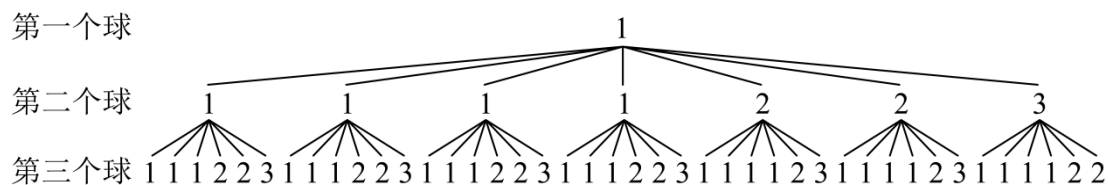
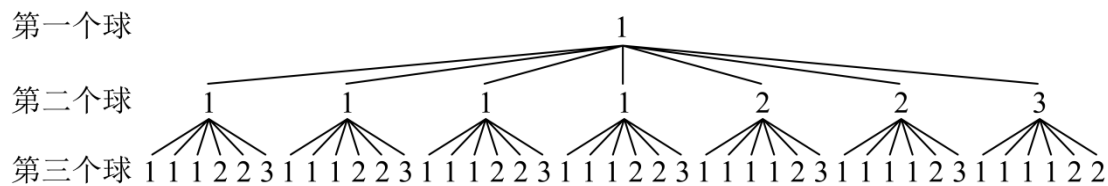
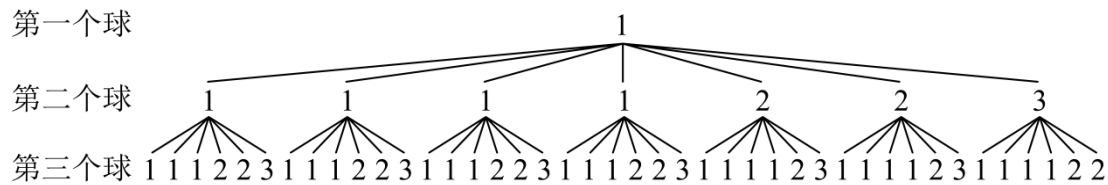
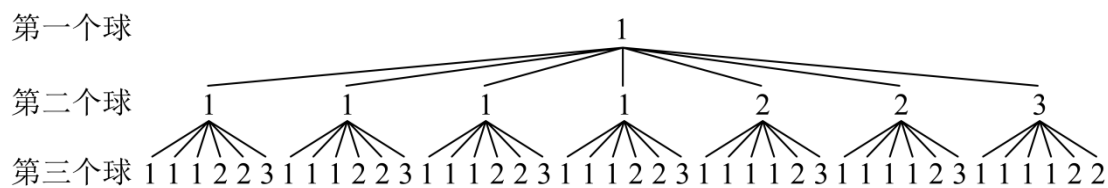
∴方差为 $\frac{1}{5}[(168-167)^2+(167-167)^2+(170-167)^2+(172-167)^2+(158-167)^2]=23.2$ ；

故选 C.

4. D

【分析】本题考查了列树状图求概率，先把所有情况列出来，用符合情况的数除以总数，即可作答.

【详解】解：把红色球记为“1”、黄色球记为“2”、绿球记为“3”，列出树状图如下：



共有 $6 \times 7 \times 8 = 336$ (种) 结果, 符合一次性摸出 2 个红球和 1 个黄球的结果数为 120 种

则 $\frac{120}{336} = \frac{5}{14}$

故选: D

5. D

【分析】此题主要考查了勾股定理的逆定理及锐角三角函数，准确识图找准线段间等量关系是解题关键.

先判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形，然后根据线段中点的概念分析可得 $AB = BD = CD$ ，从而利用正切的概念计算求解.

【详解】解： \because 点 D 为 BC 的中点，

$$\therefore BD = CD,$$

$$\because AB = BD, \quad AD = \sqrt{2}CD,$$

$$\therefore AB = BD = CD, \quad AD = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}BD,$$

$$\therefore AB^2 + BD^2 = 2AB^2, \quad AD = (\sqrt{2}AB)^2 = 2AB^2,$$

$$\therefore AB^2 + BD^2 = AD^2, \quad \text{即} \triangle ABC \text{ 为直角三角形,}$$

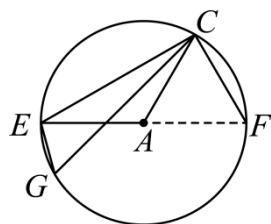
$$\text{在 Rt} \triangle ABC \text{ 中, } \tan \angle C = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BD + CD} = \frac{AB}{2AB} = \frac{1}{2},$$

故选：D.

6. A

【分析】连接 AF ，由 E 、 A 、 F 共线可知 EF 是 $\odot A$ 的直径，故 $\angle ECF = 90^\circ$ ，根据 $\angle A = 120^\circ$ ， $AE = AC$ 得出 $\angle ACE$ 的度数，再由 CG 为 $\angle ACE$ 的角平分线得出 $\angle ECG$ 的度数，进而得出结论. 本题考查的是圆周角定理，根据题意作出辅助线，构造出圆周角是解题的关键.

【详解】解：连接 AF ，



$$\because E、A、F \text{ 共线,}$$

$$\therefore EF \text{ 是 } \odot A \text{ 的直径,}$$

$$\therefore \angle ECF = 90^\circ,$$

$$\because \angle A = 120^\circ, \quad AE = AC,$$

$$\therefore \angle ACE = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$$

$$\because CG \text{ 为 } \angle ACE \text{ 的角平分线,}$$

$$\therefore \angle ECG = \frac{1}{2} \angle ACE = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle GCF = \angle ECF - \angle ECG = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

故选：A.

7. B

【分析】本题主要考查了反比例函数图象上的点，正方形的性质，相似三角形的判定和性质，熟练掌握正方形的性质，相似三角形的判定和性质，理解反比例函数图象上的点满足反比例函数的表达式是解决问题的关键.

过点 P 作 $PE \perp y$ 轴于点 E ，依题意得： $PD=3$ ， $AD=1$ ， $AC=2$ ， $BC=1$ ，进而根据勾股

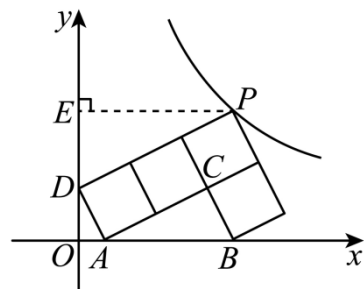
定理求得 $AB=\sqrt{5}$ ，证明 $\triangle DAO \sim \triangle ABC$ ，得到 $\frac{OD}{AC} = \frac{OA}{BC} = \frac{AD}{AB}$ ，求出 $OD = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ，

$OA = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，同理可得 $\triangle DAO \sim \triangle PDE$ ，得到 $\frac{OD}{PE} = \frac{OA}{DE} = \frac{AD}{PD}$ ，求得 $PE = \frac{6\sqrt{5}}{5}$ ， $DE = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ，

进而 $DE = \sqrt{5}$ ，因此点 P 的坐标为 $\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5}\right)$ ，将点 P 坐标代入函数 $y = \frac{k}{x}$ 中即可求出 k 的

值.

【详解】过点 P 作 $PE \perp y$ 轴于点 E ， 如图所示：



依题意得： $PD=3$ ， $AD=1$ ， $AC=2$ ， $BC=1$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $AC=2$ ， $BC=1$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \angle DAC = \angle AOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAD + \angle ADO = 90^\circ,$$

$$\angle OAD + \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle BAC,$$

$$\text{又} \because \angle AOD = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DAO \sim \triangle ABC,$$

$$\therefore \frac{OD}{AC} = \frac{OA}{BC} = \frac{AD}{AB}, \text{ 即 } \frac{OD}{2} = \frac{OA}{1} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\therefore OD = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad OA = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

同理可证: $\triangle DAO \sim \triangle PDE$,

$$\therefore \frac{OD}{PE} = \frac{OA}{DE} = \frac{AD}{PD}, \text{ 即 } \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{PE} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{DE} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore PE = \frac{6\sqrt{5}}{5}, \quad DE = \frac{3\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore DE = OD + DE = \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5},$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{6\sqrt{5}}{5}, \sqrt{5} \right),$$

\therefore 点 P 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上,

$$\therefore k = \frac{6\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{5} = 6.$$

故选: B

8. B

【分析】本题考查一次函数的图象及性质, 熟练掌握一次函数的图象及性质, 通过所给的条件确定两条直线的位置关系是解题的关键.

由题意可知 $y_1 \parallel y_2$, 且 y_2 在 y_1 的下方, 则 $a = m$, 当 $y_2 = a(x-1) + 2$ 经过点 $(-1, 1)$ 时, $a = \frac{1}{2}$,

此时两直线相交, 则 $m > \frac{1}{2}$ 时, $y_1 > y_2$.

【详解】解: $\because y_1 = m(x+1) + 1 (m \neq 0)$,

\therefore 直线经过定点 $(-1, 1)$,

\therefore 无论 x 取何值, 始终有 $y_2 < y_1$,

$\therefore y_1 \parallel y_2$, 且 y_2 在 y_1 的下方,

$\therefore a = m$,

当 $y_2 = a(x-1) + 2$ 经过点 $(-1, 1)$ 时,

$$1 = -2a + 2,$$

$$\therefore a = \frac{1}{2},$$

此时两直线相交,

$\therefore a > \frac{1}{2}$ 时, $y_2 < y_1$,

即 $m > \frac{1}{2}$.

故选: B.

9. C

【分析】本题考查了二次函数图象上点的坐标特征: 二次函数图象上的点坐标满足二次函数的解析式.

先把点 A 、 B 的坐标分别代入解析式得到 $m = 4a - 2b + c$, $n = 16a + 4b + c$, 则利用 $m > n$ 得到 $4a - 2b + c > 16a + 4b + c$, 则 $2a + b < 0$, 然后依次对各选项进行判断.

【详解】解: 把 $A(-2, m)$, $B(4, n)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 中得

$$m = 4a - 2b + c, \quad n = 16a + 4b + c,$$

$$\therefore m > n,$$

$$\therefore 4a - 2b + c > 16a + 4b + c,$$

即 $2a + b < 0$, 所以 B 选项不符合题意;

当 $a < 0$ 时, $4a + b < 0$, 所以 A 选项不符合题意;

当 $a > 0$ 时, $3a + b$ 可能等于 0, 所以 C 选项符合题意;

当 $a > 0$ 时, $a + b < 0$, 所以 D 选项不符合题意.

故选: C.

10. A

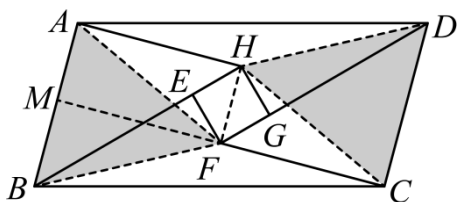
【分析】连接 FH , 根据等边对等角, 正方形的性质, 得到

$\angle ABH = \angle AHB = \angle EHF = \angle CDF = \angle CFD = 45^\circ$, 进而得到 $AB \parallel FH \parallel CD$, 推出

$S_{\triangle ABH} = S_{\triangle ABF}, S_{\triangle CDH} = S_{\triangle CDF}$, 得到 $S_{\triangle ABH} + S_{\triangle CDF} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle CDH}$, 设阴影部分的面积为 a^2 , 即

可求出 $\triangle CDF$ 的面积, 延长 CF 交 AB 于点 M , 则四边形 $AMFH$ 为矩形, 进而可求出平行四边形 $ABCD$ 的面积, 用平行四边形的面积减去阴影部分的面积即可求出剩余部分的面积之和与正方形 $EFGH$ 面积和, 即可得出结论.

【详解】解: 如图, 连接 HF ,



$\because \triangle ABH$ 与 $\triangle CDF$ 是等腰直角三角形, 四边形 $EFGH$ 是正方形,

$$\therefore \angle ABH = \angle AHB = \angle EHF = \angle CDF = \angle CFD = 45^\circ,$$

$$\therefore AB \parallel FH \parallel CD, \quad \angle BAH = \angle AHF = \angle CFH = \angle FCD = 90^\circ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABH} = S_{\triangle ABF}, S_{\triangle CDH} = S_{\triangle CDF},$$

$$\therefore S_{\triangle ABH} + S_{\triangle CDF} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle CDH},$$

设阴影部分的面积为 a^2 ,

$$\text{则: } S_{\triangle ABH} + S_{\triangle CDF} = S_{\triangle ABF} + S_{\triangle CDH} = a^2,$$

\because 平行四边形 $ABCD$,

$$\therefore AB = CD,$$

$\therefore \triangle ABH$ 和 $\triangle CDF$ 全等,

$$\therefore S_{\triangle ABH} = S_{\triangle CDF},$$

$$\therefore S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2}a^2,$$

故 $\triangle CDF$ 的面积可求;

$$\therefore AB = AH = CF = CD = a,$$

延长 CF 交 AB 于点 M , 则四边形 $AMFH$ 为矩形,

$$\therefore AH = FM, CM \perp AB,$$

$$\therefore S_{\square ABCD} = AB \cdot CM = a \cdot 2a = 2a^2,$$

故平行四边形的面积可求;

\therefore 剩余部分的面积之和与正方形 $EFGH$ 面积和等于 a^2 , 可求;

故只有 $\triangle BEF$ 的面积无法求出;

故选 A.

【点睛】本题考查等腰三角形的性质, 全等三角形的判定和性质, 平行四边形的性质, 矩形的判定和性质, 正方形的性质, 解题的关键是添加辅助线构造平行线和特殊图形.

11. $4\sqrt{3}$

【分析】本题考查了含特殊角的三角函数的混合运算, 根据定义运算进行列式, 再化简计算, 即可作答.

【详解】解： $\because \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\therefore \begin{vmatrix} \sqrt{5} & \sin 60^\circ \\ 2 & \sqrt{15} \end{vmatrix} = \sqrt{5} \times \sqrt{15} - 2 \times \sin 60^\circ = 5\sqrt{3} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} - \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

故答案为： $4\sqrt{3}$

12. $\frac{2}{81}\sqrt{2}\pi\text{m}^3$

【分析】本题主要考查了圆锥的母线、底面半径和高的关系，圆锥侧面展开图的圆心角计算公式，圆锥的体积，熟练掌握圆锥的相关计算公式是解题的关键．圆锥的母线、底面半径和高的关系： $h^2 + r^2 = l^2$ ；圆锥侧面展开图的圆心角计算公式： $\theta = \frac{r}{l} \cdot 360$ ；圆锥的体积是 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ．连结 OA ， OB ，证明 $\triangle AOB$ 是等边三角形，继而求得 AB 的长，然后利用圆锥侧面展开图的圆心角计算公式，求出底面半径，根据母线、底面半径和高的关系，求出圆锥的高，再根据圆锥的体积公式计算即可作答．

【详解】连结 OA ， OB ，

$\because OA = OB$ ， OA 为半径，

$$\therefore \angle BAO = \frac{1}{2} \angle BAC = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，

$$\therefore AB = OA = 1\text{m},$$

即圆锥的母线长 $l = AB = 1\text{m}$ ，

$$\therefore \theta = \frac{r}{l} \cdot 360,$$

$$\therefore 120 = \frac{r}{1} \cdot 360,$$

$$\therefore r = \frac{1}{3}\text{m},$$

$$\therefore h^2 + r^2 = l^2,$$

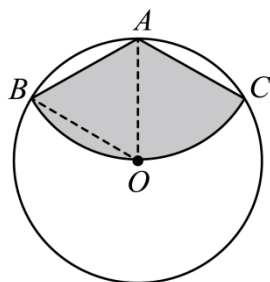
$$\therefore h^2 = l^2 - r^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9},$$

$$\text{解得 } h = \frac{2}{3}\sqrt{2},$$

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3}\sqrt{2} = \frac{2}{81}\sqrt{2}\pi(\text{m}^3),$$

即该圆锥的体积为 $\frac{2}{81}\sqrt{2}\pi\text{m}^3$.

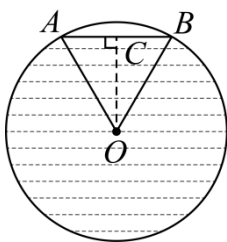
故答案为: $\frac{2}{81}\sqrt{2}\pi\text{m}^3$.



13. $\frac{10}{3}\pi + \sqrt{3}$

【分析】本题考查求不规则图形的面积，先求出弓形的面积，再用圆的面积减去弓形的面积，进行求解即可.

【详解】解：过点 O 作 $OC \perp AB$,



$$\because OA = OB = \frac{4}{2} = 2, \quad \angle AOB = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle AOB$ 为等边三角形,

$$\therefore AC = \frac{1}{2}AB = 1,$$

$$\therefore OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{弓形}} = \frac{60\pi}{360} \times 2^2 - \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{圆}} - S_{\text{弓形}} = 4\pi - \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3} = \frac{10}{3}\pi + \sqrt{3};$$

故答案为: $\frac{10}{3}\pi + \sqrt{3}$.

14. $\frac{27}{8}$

【分析】根据反比例函数图象上点的坐标特征以及全等三角形的判定和性质进行计算即可.

【详解】解：由题意得，

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(x+3) \\ y = \frac{k}{x} \end{cases},$$

$$\therefore x^2 + 3x - 2k = 0,$$

设 $A(x_1, y_1)B(x_2, y_2)$ 且 $x_1 > x_2$,

$$\therefore x_1 + x_2 = -3, \quad x_1 x_2 = -2k,$$

$$\therefore y_1 + y_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + 3 = \frac{3}{2},$$

如图, 过点 A 作 $AE \perp y$ 轴, 过点 B 作 $BF \perp y$ 轴, 垂足分别为 E 、 F ,

$\because \triangle ABC$ 是以 C 为直角顶点的等腰直角三角形,

$$\therefore AC = BC, \quad \angle BCF + \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BCF + \angle CBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle ACE,$$

$$\because \angle BFC = \angle CEA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle CBF \quad (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = CF = x_1, \quad BF = CE = -x_2,$$

$$\because AE = y_1 - y_2 + x_1, \quad \text{而} \quad AE = BF = -x_2,$$

$$\therefore -x_2 = y_1 - y_2 + x_1, \quad \text{即} \quad x_1 + x_2 = y_2 - y_1, \quad \text{而} \quad x_1 + x_2 = -3,$$

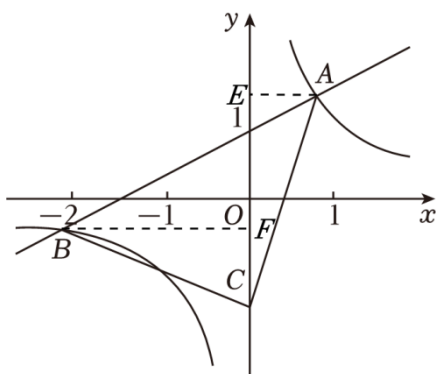
$$\therefore y_1 - y_2 = 3, \quad \text{而} \quad y_1 + y_2 = \frac{3}{2},$$

$$\text{解得} \quad y_1 = \frac{9}{4}, \quad y_2 = -\frac{3}{4},$$

$$\therefore -2k = x_1 \cdot x_2 = \frac{k}{y_1} \cdot \frac{k}{y_2} = \frac{k}{\frac{9}{4}} \cdot \frac{k}{-\frac{3}{4}} = -\frac{16}{27}k^2,$$

$$\therefore k = \frac{27}{8}.$$

故答案为: $\frac{27}{8}$.



【点睛】本题主要考查了反比例函数与一次函数、全等三角形的判定及性质，直角三角形的两锐角互余，反比例函数与几何的综合等知识点，正确画出图形是解答本题的关键。

15. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

【分析】本题主要考查了余弦的定义，三角形三边关系的应用，黄金分割的定义，熟练掌握黄金分割的定义是解题的关键，根据题意可得 $BD = BA$ ，然后利用黄金分割的定义可得

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \text{ 从而在 Rt}\triangle ABC \text{ 中, 利用锐角三角函数的定义进行计算, 即可解答.}$$

【详解】解：由题意得： $BD = BA$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$

$$\therefore AB > BC,$$

$$\therefore BD > BC,$$

\therefore 点 B 是线段 CD 的黄金分割点，

$$\therefore \frac{BC}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{BD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\text{故答案为: } \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

16. 4

【分析】本题考查了二次函数最值，熟练掌握化简二次根式是解答本题的关键。根据题意设 E 坐标为 $(0, m)$ ，直线 AB 的解析式为 $y_{AB} = kx + m$ ，直线 CD 的解析式为 $y_{CD} = -\frac{1}{k}x + m$ 联立方程组得到 A 、 B 坐标，由中点坐标公式得到 $M(2k, 2k^2 + m)$ ， $N(-\frac{2}{k}, \frac{2}{k} + m)$ 再根据两点间的距离公式得到 NE 、 MN 的代数式，由面积公式得到 $= 2\sqrt{2 + \frac{1}{k^2} + k^2}$ ，利用均值不等式得到最小值即可。

【详解】解：由 $AB \perp CD$ ，且两直线均与抛物线有两个交点，所以直线 k 值都存在，

设 E 坐标为 $(0, m)$, 直线 AB 的解析式为 $y_{AB} = kx + m$, 直线 CD 的解析式为 $y_{CD} = -\frac{1}{k}x + m$

直线 AB 与抛物线联立方程组为:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y_{AB} = kx + m, \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 得 } x^2 - 4kx - 4m = 0$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

由根与系数的关系得: $x_1 + x_2 = 4k$,

$\because M$ 为线段 AB 的中点,

$$\therefore x_M = 2k, y_M = 2k^2 + m,$$

$$\therefore M(2k, 2k^2 + m)$$

$$\text{同理得 } N\left(-\frac{2}{k}, \frac{2}{k} + m\right)$$

$$\therefore |NE| = \sqrt{\left(\frac{2}{k} + m - m\right)^2 + \left(\frac{2}{k}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{k^2} \left(\frac{1}{k^2} + 1\right)}$$

$$|MN| = \sqrt{(2k^2 + m - m)^2 + (2k)^2} = \sqrt{4k^4 + 2k^2} = \sqrt{4k^2(1 + k^2)}$$

$\because NE \perp ME$,

$$\therefore S_{\triangle EMN} = \frac{1}{2} \times |NE| \times |ME| = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{4}{k^2} \left(\frac{1}{k^2} + 1\right)} \times 2k\sqrt{1 + k^2}$$

根据均值不等式, 当 $\frac{1}{k} = k$ 时,

$$2\sqrt{2 + \frac{1}{k^2} + k^2} \geq 2\sqrt{4} = 4$$

即 $k = \pm 1$ 时, $\triangle EMN$ 的面积最小值为 4.

故答案为: 4.

17. 证明见解析

【分析】先根据垂径定理、圆周角定理得出 $\angle AED = \angle ADC$, 再根据四点共圆的性质可得 $\angle CEF = \angle ADC$, 然后根据等量代换即可得证.

【详解】如图, 连接 AD

$\because CD \perp AB$, AB 是 $\odot O$ 的直径

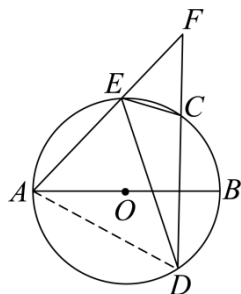
$$\therefore \widehat{AC} = \widehat{AD}$$

$$\therefore \angle AED = \angle ADC$$

$\therefore A, D, C, E$ 共圆

$$\therefore \angle CEF = \angle ADC$$

$$\therefore \angle AED = \angle CEF.$$



【点睛】本题考查了垂径定理、圆周角定理、四点共圆的性质等知识点，通过作辅助线，利用到圆周角定理和四点共圆的性质是解题关键.

18. (1)见详解

(2)见详解

【分析】(1) 根据等边三角形的性质及直角三角形的性质作图;

(2) 根据等边三角形的性质及菱形的性质作图.

本题考查了作图的应用与设计, 掌握等边三角形的性质、直角三角形的性质及菱形的性质是解题的关键.

【详解】(1) 解: 点 C, C' 即为所求;

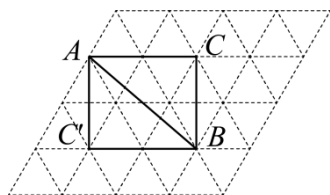


图1

(2) 解: 菱形 $ADBE$ 即为所求.

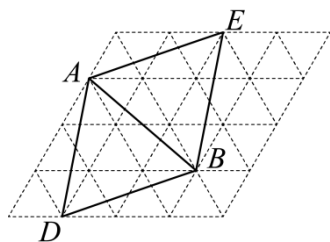


图2

19. (1)50 人, 补全人数分布图见解析

(2) B 等级

(3) 这句话是错误的，本次调查是抽样调查，是用样本的数据估计全体的情况，因此只能根据本次调查数据估计全市初中生为 A 等的人数，只是估计值，而非精确值。

【分析】 本题考查条形统计图与扇形统计图的综合，中位数，用样本估计总体。

(1) 将 A 等级的人数除以所占的百分比，即可求出总人数。将总人数减去 A 、 B 、 D 等级的人数之和，求出 C 等级的人数，即可补全人数分布图；

(2) 根据中位数的定义即可解答；

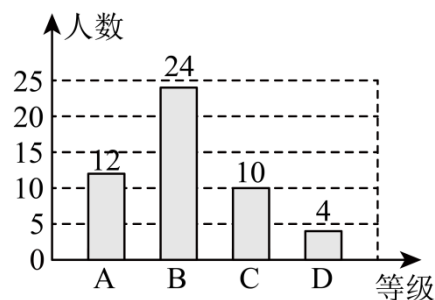
(3) 根据抽样调查的意义即可解答。

【详解】 (1) 本次调查的总人数为： $12 \div 24\% = 50$ (人)，

C 等级人数： $50 - 12 - 24 - 4 = 10$ (人)，

补全人数分布图如下：

各等级人数分布图



(2) 本次调查 50 位学生，按等级排序后，中位数是第 25 位和第 26 为学生等级的平均数，而第 25 位和第 26 为学生均为 B 等级，

故本次调查的中位数位于 B 等级。

(3) 这句话是错误的。

因为本次调查是抽样调查，是用样本的数据估计全体的情况，

因此只能根据本次调查数据估计全市初中生为 A 等的人数，只是估计值，而非精确值。

20. (1) $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

(2) $\left(1 + \frac{7\sqrt{23}}{23}, \frac{43}{69}\right)$ 或 $\left(1 - \frac{7\sqrt{23}}{23}, \frac{43}{69}\right)$.

【分析】 本题考查的重点是利用待定系数法求函数的解析式，熟练掌握点和直线，两点间距

离公式.

(1) 选择任意两个条件用待定系数法, 就可以求出函数的表达式;

(2) 根据函数的表达式, 计算出点 D 的坐标, 利用点和直线, 两点间距离公式就可以计算出点 A 的坐标.

【详解】(1) 解: 选择条件①和②,

∵二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与 y 轴的交点为 $(0,1)$

∴ $c = 1$,

∵二次函数与 x 轴的交点为 $(-1,0)$ 和 $(3,0)$;

∴将点 $(-1,0)$ 和 $(3,0)$ 代入函数,

$$\begin{cases} a - b + 1 = 0 \\ 9a + 3b + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \end{cases},$$

∴函数的表达式 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$

答: 函数的表达式为: $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$;

(2) 解: 设点 A 的坐标为 $\left(t, -\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t + 1\right)$,

∵点 D 为函数 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$ 的顶点,

则对称轴 $x = -\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{1}{3} \times 2} = 1$,

把 $x = 1$ 代入 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$, 得 $y = \frac{4}{3}$,

∴点 D 的坐标为 $\left(1, \frac{4}{3}\right)$,

∵直线 $y = -1$,

∴点 A 到直线的距离 $= \left| -\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t + 2 \right| = \left| \frac{1}{3}(t-1)^2 - \frac{7}{3} \right|$,

∴ $AD^2 = (t-1)^2 + \left(-\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t - \frac{1}{3} \right)^2 = (t-1)^2 + \frac{1}{9}[(t-1)^2]^2$,

$$\text{设 } (t-1)^2 = m$$

$\because A$ 到直线的距离等于 AD ,

$$\therefore m + \frac{1}{9}m^2 = \left(\frac{1}{3}m - \frac{7}{3}\right)^2$$

$$\therefore m = \frac{49}{23},$$

$$\therefore t = 1 + \frac{7\sqrt{23}}{23} \text{ 或 } 1 - \frac{7\sqrt{23}}{23},$$

$$\text{把 } t = 1 \pm \frac{7\sqrt{23}}{23} \text{ 代入 } -\frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{3}t + 1 = -\frac{1}{3}(t-1)^2 + \frac{4}{3}, \text{ 得 } -\frac{1}{3} \times \frac{49}{23} + \frac{4}{3} = \frac{43}{69}$$

$$\therefore \text{点 } A \left(1 + \frac{7\sqrt{23}}{23}, \frac{43}{69}\right), \text{ 或 } \left(1 - \frac{7\sqrt{23}}{23}, \frac{43}{69}\right)$$

$$\text{答: 点 } A \text{ 的坐标为: } \left(1 + \frac{7\sqrt{23}}{23}, \frac{43}{69}\right) \text{ 或 } \left(1 - \frac{7\sqrt{23}}{23}, \frac{43}{69}\right).$$

21. 活动 1: 15° ; 活动 2: 44.35 米; 总结与取优: 42 米

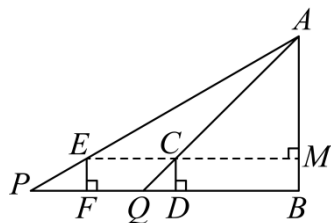
【分析】活动一: 过点 E 作 $EM \perp AB$ 于点 M , 根据 $\angle AEM = 30^\circ$ 求出 $\angle EAM = 60^\circ$, 根据 $CD = QD$ 求出 $\angle CQD = \angle QCD = \angle QAB = 45^\circ$, 进而求出 $\angle PAQ$ 即可;

活动二: 设塔的高度为 x 米, 用 $\tan \alpha$ 表示出 BC , 进而用 $\tan \beta$ 求出 x 即可;

总结与取优: 先证明 $\triangle CDE \sim \triangle FGE$, 求出 DE 的长, 再证明 $\triangle ABE \sim \triangle CDE$ 即可求出答案.

本题考查了解直角三角形的应用, 相似三角形的判定与性质, 正确理解题意并构造直角三角形是解题关键.

【详解】解: 活动一: 过点 E 作 $EM \perp AB$ 于点 M ,



$$\because \angle AEM = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle EAM = 60^\circ,$$

$$\because CD = QD$$

$$\therefore \angle CQD = \angle QCD$$

$$\because AB \perp BQ,$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle QCD = \angle QAB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle PAQ = \angle EAM - \angle QAB = 15^\circ.$$

故答案为： 15° ；

活动二： 设塔的高度为 x m，

$$\text{在 Rt}\triangle ABC \text{ 中， } \tan \alpha = \frac{AB}{BC},$$

$$\because \angle \alpha = 37^\circ,$$

$$\therefore BC = \frac{x}{0.754},$$

$$\because CD = 18\text{m},$$

$$\therefore BD = \left(18 + \frac{x}{0.754}\right)\text{m},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABD \text{ 中， } \tan \beta = \frac{AB}{BD},$$

$$\because \beta = 30^\circ,$$

$$\therefore \frac{x}{18 + \frac{x}{0.754}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

解得 $x \approx 44.35$ ，

即塔的高度大约为 44.35 米.

故答案为： 44.35；

总结与取优： $\because CD \perp BG, FG \perp BG,$

$$\therefore \angle CDE = \angle FGE = 90^\circ,$$

$$\because \angle CED = \angle FEG,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle FGE,$$

$$\therefore \frac{CD}{DE} = \frac{FG}{EG},$$

$$\because CD = 4, FG = 1.6, EG = 2.4,$$

$$\therefore \frac{4}{DE} = \frac{1.6}{2.4}$$

解得： $DE = 6$,

$$\because BD = 57,$$

$$\therefore BE = BD + DE = 57 + 6 = 63,$$

$$\because AB \perp BG, CD \perp BG,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CDE = 90^\circ,$$

$$\because \angle AEB = \angle CED,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CDE,$$

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{CD}{DE},$$

$$\text{即 } \frac{AB}{63} = \frac{4}{6},$$

$$\text{解得: } AB = 42,$$

\therefore 塔高 AB 为 42 米.

$$22. (1) \begin{cases} b = 1 - a \\ c = -6a - 2 \end{cases}$$

$$(2) k \geq 5$$

$$(3) a \geq \frac{13}{36} \text{ 或 } a = -1 \text{ 或 } a < -\frac{5}{4}$$

【分析】 本题考查二次函数的性质和图象，根据题意画出图象，分类讨论是解题的关键；

(1) 把 $A(-2, -4)$ 和 $B(3, 1)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ ，即可求解；

(2) 先求出对称轴为：直线 $x = 2$ ，结合开口方向和增减性列出不等式即可求解；

(3) 分 $a > 0$ 时， $a < 0$ 时，结合图象即可求解

【详解】 (1) 解：把 $A(-2, -4)$ 和 $B(3, 1)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ ，

$$\text{得: } \begin{cases} 4a - 2b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = 1 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} b = 1 - a \\ c = -6a - 2 \end{cases};$$

(2) \because 抛物线经过 $C(2m-3, n)$ ， $D(7-2m, n)$ 两点，

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为: 直线 } x = \frac{2m-3+7-2m}{2} = 2,$$

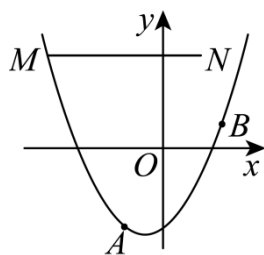
\because 抛物线开口向下，当 $k-3 < x < k+3$ 时， y 随 x 的增大而减小，

$$\therefore k-3 \geq 2, \text{ 即 } k \geq 5;$$

(3) ①当 $a > 0$ 时， $x = -6$ ， $y \geq 5$ ，即 $a \times (-6)^2 + (1-a) \times (-6) - 6a - 2 \geq 5$ ，

$$\text{解得: } a \geq \frac{13}{36}, \text{ 抛物线不经过点 } N,$$

如图①，抛物线与线段 MN 只有一个交点，结合图象可知： $a \geq \frac{13}{36}$ ；



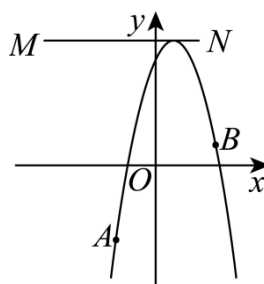
图①

②当 $a < 0$ 时，若抛物线的顶点在线段 MN 上时，则 $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4a(-6a-2)-(1-a)^2}{4a} = 5$ ，

解得： $a_1 = -1$ ， $a_2 = -\frac{1}{25}$ ，

当 $a_1 = -1$ 时， $\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times (-1)} = 1$ ，此时，定点横坐标满足 $-6 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} \leq 2$ ，符合题意；

所以当 $a_1 = -1$ 时，如图②，抛物线与线段 MN 只有一个交点，



图②

如图③，当 $a_2 = -\frac{1}{25}$ 时， $\frac{1}{2} - \frac{1}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times (-\frac{1}{25})} = 13$ ，此时顶点横坐标不满足 $-6 \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2a} \leq 2$ ，

不符合题意，舍去；

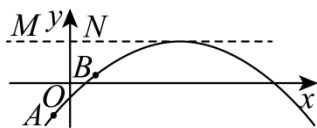
若抛物线与线段 MN 有两个交点，且其中一个交点恰好为点 N 时，把 $N(2,5)$ 代入

$y = ax^2 + (1-a)x - 6a - 2$ ，得 $5 = a \times 2^2 + (1-a) \times 2 - 6a - 2$ ，解得： $a = -\frac{5}{4}$ ，

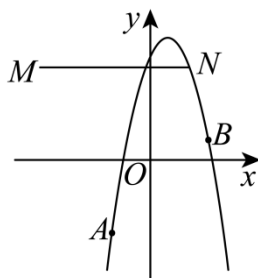
∴当 $a = -\frac{5}{4}$ 时，如图④，抛物线和线段 MN 有两个交点，且其中一个交点恰好为点 N ，

结合图象可知： $a < -\frac{5}{4}$ 时，抛物线与线段 MN 有一个交点，

综上所述： a 的取值范围为： $a \geq \frac{13}{36}$ 或 $a = -1$ 或 $a < -\frac{5}{4}$



图③



图④

23. (1) $90^\circ - \alpha$

(2) 2

(3) ① $y = \frac{2}{x+1}$ ② $\frac{11}{16}$

【分析】(1) 根据同弧所对的圆周角相等，结合三角形的内角和定理，即可得解；

(2) 圆周角定理得到 $\angle ADC = 90^\circ = \angle AFD$ ，进而得到 $\angle DAC = \angle CDF$ ，推出

$\triangle DCE \sim \triangle BCD$ ，得到 $\frac{BD}{DE} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{CE}$ ，设 $CE = a$ ，求出 CD 的长，即可得出结果；

(3) ① 过点 G 作 $GH \parallel DE$ ，得到 $\triangle CEF \sim \triangle CHG$ ， $\triangle BHG \sim \triangle BED$ ，进而得到

$\frac{CE}{CH} = \frac{CF}{CG} = \frac{EF}{GH}$ ， $\frac{GH}{DE} = \frac{BH}{BE} = \frac{BG}{BD}$ ，根据 $\frac{FG}{CF} = x$ ， $BE = 3CE$ ，推出 $DG = \frac{x}{3}BD$ ，

$DF = \frac{4x}{3(x+1)} \cdot DE$ ，利用 $y = \cos \angle BDE = \frac{DF}{DG}$ 结合 $\frac{BD}{DE} = 2$ 进行求解即可；

② 作 $EW \perp BD$ 于 W ，根据已知条件推出 $BD = 4CE$ ， $DE = 2CE$ ，设 $CE = a$ ， $DW = m$ ，勾股

定理求出 $m = \frac{11}{8}a$ ，再根据 $y = \cos \angle BDE = \frac{DW}{DE}$ 求解即可。

【详解】(1) 解：∵ 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$ ，

∴ $\angle DAC = \angle CBD = \alpha$ ，

∵ $DE \perp AC$ ，

∴ $\angle AFD = 90^\circ$ ，

∴ $\angle ADE = 90^\circ - \angle DAC = 90^\circ - \alpha$ ；

(2) ∵ AC 为 $\odot O$ 的直径，

∴ $\angle ADC = 90^\circ = \angle AFD$ ，

∴ $\angle DAC = \angle CDF = 90^\circ - \angle ADF$ ，

∵ $\angle DBC = \angle DAC$ ，

∴ $\angle DBC = \angle CDF$ ，

∴ $\angle DCE = \angle BCD$ ，

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{CE},$$

$$\therefore BE = 3CE,$$

$$\therefore \text{设 } CE = a, \text{ 则: } BE = 3a,$$

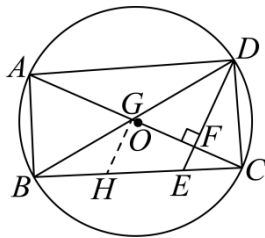
$$\therefore BC = 4a,$$

$$\therefore CD^2 = BC \cdot CE = 4a \cdot a = 4a^2,$$

$$\therefore CD = 2a \text{ (负值舍去);}$$

$$\therefore \frac{BD}{DE} = \frac{BC}{CD} = \frac{4a}{2a} = 2;$$

(3) ①过点 G 作 $GH \parallel DE$,



则: $\triangle CEF \sim \triangle CHG, \triangle BHG \sim \triangle BED$,

$$\therefore \frac{CE}{CH} = \frac{CF}{CG} = \frac{EF}{GH}, \frac{GH}{DE} = \frac{BH}{BE} = \frac{BG}{BD},$$

$$\therefore \frac{FG}{CF} = x, \quad BE = 3CE,$$

$$\therefore \frac{CE}{CH} = \frac{EF}{GH} = \frac{1}{x+1}, \quad BC = 4CE,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{x+1}GH, \quad CH = (x+1)CE,$$

$$\therefore BH = BC - CH = 4CE - (x+1)CE = (3-x)CE,$$

$$\therefore BE = 3CE,$$

$$\therefore \frac{BG}{BD} = \frac{GH}{DE} = \frac{BH}{BE} = \frac{3-x}{3},$$

$$\therefore GH = \frac{3-x}{3}DE, \quad BG = \frac{3-x}{3}BD,$$

$$\therefore DG = BD - BG = \frac{x}{3}BD, \quad EF = \frac{1}{x+1}GH = \frac{3-x}{3(x+1)} \cdot DE,$$

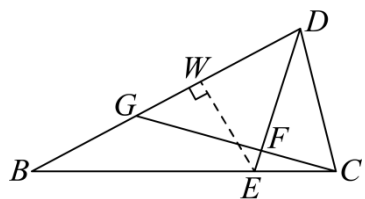
$$\therefore DF = DE - EF = \frac{4x}{3(x+1)} \cdot DE,$$

$$\therefore y = \cos \angle BDE = \frac{DF}{DG} = \frac{\frac{4x}{3(x+1)} \cdot DE}{\frac{x}{3} BD},$$

由 (2) 知: $\frac{BD}{DE} = 2$,

$$\therefore y = \frac{\frac{4x}{3(x+1)}}{\frac{x}{3} \cdot 2} = \frac{2}{x+1};$$

②如图, 作 $EW \perp BD$ 于 W ,



$$\because BC = BD, BD = 2DE, BC = 4CE,$$

$$\therefore BD = 4CE, DE = 2CE,$$

$$\text{设 } CE = a, DW = m, \text{ 则: } BD = 4a, DE = 2a, BE = 3a, BW = BD - DW = 4a - m,$$

$$\because EW^2 = DE^2 - DW^2 = BE^2 - BW^2,$$

$$\therefore 4a^2 - m^2 = 9a^2 - (4a - m)^2,$$

$$\text{解得: } m = \frac{11}{8}a,$$

$$\therefore y = \cos \angle BDE = \frac{DW}{DE} = \frac{\frac{11}{8}a}{2a} = \frac{11}{16}.$$

【点睛】 本题考查圆的综合应用, 涉及到圆周角定理, 相似三角形的判定和性质, 解直角三角形, 求函数解析式, 勾股定理等知识点, 综合性强, 难度大, 计算量大, 掌握圆周角定理, 添加辅助线, 构造特殊图形和相似三角形, 是解题的关键, 注意计算的准确性.