

2024 年浙江省宁波市中考数学模拟试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

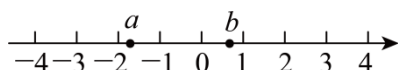
一、单选题

1. 春节期间冰雪旅游大热，杭州的小明同学准备去旅游，考虑温差准备着装时，他查询气温，结果如图所示，杭州的气温是 19°C ，哈尔滨的气温是 -14°C ，则此刻两地的温差是（ ）

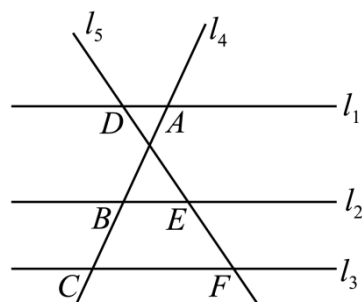
兰州 ✓	晴 东风1级
19°C	$-4-19^{\circ}\text{C}$
风力	降水量 紫外线

哈尔滨 ✓	阴 东风2级
-4°C	$-2-13^{\circ}\text{C}$
风力	降水量 紫外线

- A. 33°C B. 19°C C. 14°C D. 5°C
2. 光年是天文学上的一种距离单位，一光年指光在一年内走过的路程，约等于 9460000000000 km，数 9460000000000 可以用科学记数法表示为（ ）
- A. 9.46×10^{12} B. 94.6×10^{12} C. 0.946×10^{12} D. 9.46×10^{13}
3. 下列计算正确的是（ ）
- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $(-a^3b)^2 = -a^6b^2$ C. $a^6 \div a^3 = a^2$ D. $(a^2)^3 = a^6$
4. 实数 a ， b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论中正确的是（ ）



- A. $b < a$ B. $a < -2$ C. $a + b > 0$ D. $-a > b$
5. 如图，已知 $l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$ ，它们依次交直线 l_4 、 l_5 于点 A 、 B 、 C 和点 D 、 E 、 F ，如果 $DE:DF = 3:5$ ， $AC = 12$ ，那么 BC 的长等于（ ）

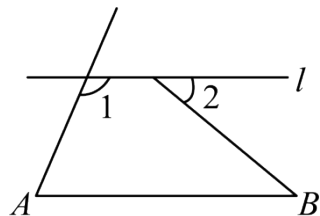


- A. 2 B. 4 C. $\frac{24}{5}$ D. $\frac{36}{5}$
6. 一组数据 3、4、4、5，若添加一个数 4 后得到一组新数据，则前后两组数据的统计量会

发生变化的是 ()

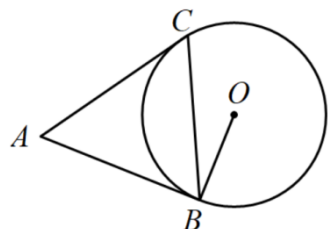
- A. 平均数 B. 众数 C. 中位数 D. 方差

7. 如图, 已知直线 $l \parallel AB$, $\angle A = 2\angle B$, 若 $\angle 1 = 118^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数为 ()



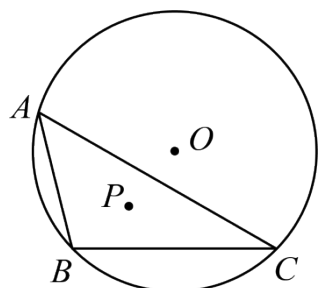
- A. 31° B. 36° C. 62° D. 72°

8. 如图, AB , AC 分别切 $\odot O$ 于 B , C 两点, 若 $\angle OBC = 26^\circ$, 则 $\angle A$ 的度数为 ()



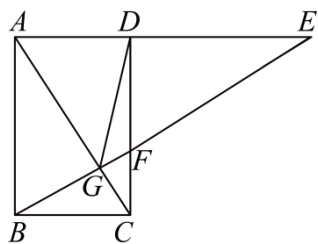
- A. 32° B. 52° C. 64° D. 72°

9. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\angle BAC < 60^\circ$, 点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心, 若 $BC = 6$, 当点 A 到 BC 的距离最大时, 线段 PO 的长为 ()



- A. $\frac{1}{\tan \angle BAC} - \frac{2}{\sin \angle BAC}$ B. $\frac{2}{\tan \angle BAC} - \frac{1}{\sin \angle BAC}$
C. $\tan \angle BAC - 2\sin \angle BAC$ D. $2 \tan \angle BAC - \sin \angle BAC$

10. 如图, 已知 AC 是矩形 $ABCD$ 的对角线, 以点 D 为旋转中心将 $\triangle ADC$ 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle FDE$, B, F, E 三点恰好同在同一条直线上, 设 AC 与 BE 相交于点 G , 连结 DG . 有以下结论: ① $AC \perp BE$; ② $\triangle BCG \sim \triangle GAD$; ③ F 是线段 CD 的黄金分割点; ④ $CG + \sqrt{2}DG = EG$, 其中正确的是 ()



A. ①

B. ①③

C. ②④

D. ①③④

二、填空题

11. 分解因式: $ma^2 - mb^2 =$ _____.

12. 已知二次根式 $\sqrt{3x+1}$ 的值为 4, 则 $x =$ _____.

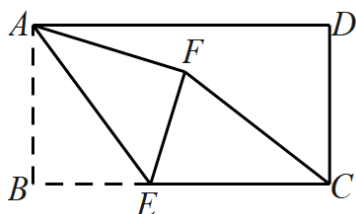
13. 不透明的袋子里有 2 个红球和 1 个白球, 这些球除颜色外无其他差别, 随机摸取两个球, 恰好为一个红球一个白球的概率是_____.

14. 若 $2x^2 - x - 7 = 0$, 则 $x(x-3) + (x+1)^2 =$ _____.

15. 已知二次函数 $y = x^2 - 4tx + 3t$ 的图象与 x 轴交于 $A(a, 0)$, $B(b, 0)$ 两点, 且满足

$-6 \leq a + b \leq -4$. 当 $-3 \leq x \leq -1$ 时, 则该函数的最大值 M 与 t 满足的关系式是_____.

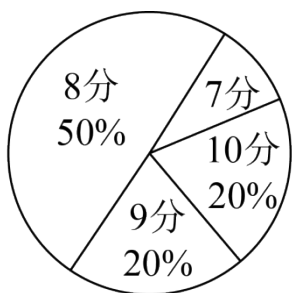
16. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $BC = 9$, 点 E 为 BC 上一点, 将 ABE 沿着 AE 翻折得到 $\triangle AFE$, 连结 CF . 若 $\angle FEC = 2\angle FCE$, 且 $CF = 6$, 则 BE 的长为_____, AB 的长为_____.



三、解答题

17. 计算 $6 \div (-\frac{1}{2} + \frac{1}{3})$, 方方同学的计算过程如下, 原式 $= 6 \div (-\frac{1}{2}) + 6 \div \frac{1}{3} = -12 + 18 = 6$. 请你判断方方的计算过程是否正确, 若不正确, 请你写出正确的计算过程.

18. 端午节是中国的传统节日, 民间有端午节吃粽子的习俗, 在端午节来临之际, 某校七、八年级开展了一次“包粽子”实践活动, 对学生的活动情况按 10 分制进行评分, 成绩 (单位: 分) 均为不低于 6 的整数. 为了解这次活动的效果, 现从这两个年级各随机抽取 10 名学生的活动成绩作为样本进行活整理, 并绘制统计图表, 部分信息如下:



七年级10名学生活动成绩扇形统计图

八年级10名学生活动成绩统计表

成绩/分	6	7	8	9	10
人数	1	2	a	b	2

已知八年级10名学生活动成绩的中位数为8.5分.

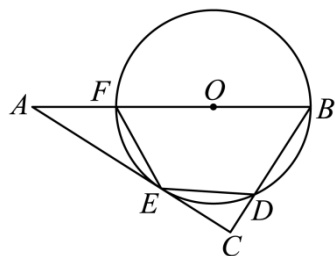
请根据以上信息, 完成下列问题:

(1) 样本中, 七年级活动成绩为7分的学生数是_____, 七年级活动成绩的众数为_____分;

(2) $a =$ _____, $b =$ _____;

(3) 若认定活动成绩不低于9分为“优秀”, 根据样本数据, 判断本次活动中优秀率高的年级是否平均成绩也高, 并说明理由.

19. 如图, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点, $\odot O$ 与边 AC 相切于点 E , 与边 BC 、 AB 分别相交于点 D 、 F , 且 $DE = EF$.



(1) 求证: $\angle C = 90^\circ$;

(2) 当 $BC = 3$, $\cos A = \frac{4}{5}$ 时, 求 AF 的长.

20. 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$, 点 $(3, a)$, $(1, 2a+1)$ 都在该反比例函数图象上.

(1)求 k 的值;

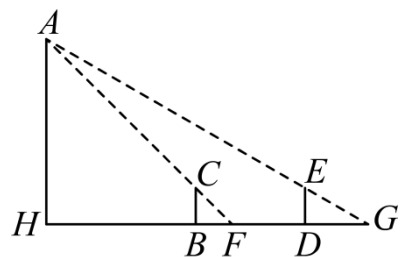
(2)若点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 都在该反比例函数图象上;

①当 $y_2 = y_1 + 6$, 点 A 和点 B 关于原点中心对称时, 求点 B 坐标;

②当 $x_1 = 3$, $y_1 + y_2 < 0$ 时, 求 x_2 的取值范围.

21. 《海岛算经》是中国古代测量术的代表作, 原名《重差》. 这本著作建立起了从直接测量向间接测量的桥梁. 直至近代, 重差测量法仍有借鉴意义.

如图, 为测量海岛上一座山峰 AH 的高度, 直立两根高2米的标杆 BC 和 DE , 两杆间距 BD 相距6米, D 、 B 、 H 三点共线. 从点 B 处退行到点 F , 观察山顶 A , 发现 A 、 C 、 F 三点共线, 且仰角为 45° ; 从点 D 处退行到点 G , 观察山顶 A , 发现 A 、 E 、 G 三点共线, 且仰角为 30° . (点 F 、 G 都在直线 HB 上)



(1)求 FG 的长 (结果保留根号);

(2)山峰高度 AH 的长 (结果精确到0.1米).

(参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.41$, $\sqrt{3} \approx 1.73$)

22. 某个农场有一个花卉大棚, 是利用部分墙体建造的. 其横截面顶部为抛物线型, 大棚的一端固定在墙体 OA 上, 另一端固定在墙体 BC 上, 其横截面有2根支架 DE , FG , 相关数据如图1所示, 其中支架 $DE = BC$, $OF = DF = BD$, 这个大棚用了400根支架.

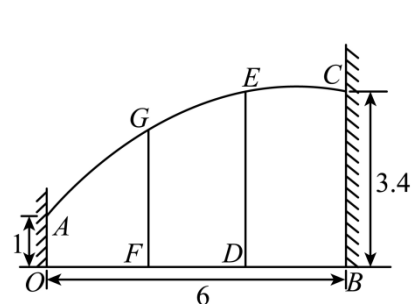


图1

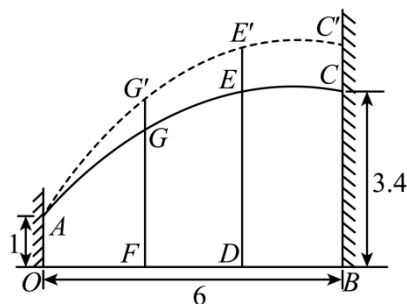


图2

为增加棚内空间, 农场决定将图1中棚顶向上调整, 支架总数不变, 对应支架的长度变化, 如图2所示, 调整后 C 与 E 上升相同的高度, 增加的支架单价为60元/米 (接口忽略不计),

需要增加经费 32000 元.

(1) 分别以 OB 和 OA 所在的直线为 x 轴和 y 轴建立平面直角坐标系.

① 求出改造前的函数解析式.

② 当 $CC' = 1$ 米, 求 GG' 的长度.

(2) 只考虑经费情况下, 求出 CC' 的最大值.

23. 综合与实践

问题情境:

“综合与实践”课上, 老师提出如下问题: 如图 1, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是对角线 BD 上的动点 (与点 B, D 不重合), 连结 AE , 过点 E 作 $EF \perp AE$, $EG \perp BD$, 分别交直线 BC 于点 F, G . 请说明 $\triangle ABE \cong \triangle FGE$, 并求 $\frac{EF}{AE}$ 的值.

数学思考:

(1) 请你解答老师提出的问题.

深入探究:

(2) 如图 2, 老师将图 1 中的“正方形 $ABCD$ ”改为“矩形 $ABCD$ ”, 其他条件均不变, 并让同学们提出新的问题.

① “聪聪小组”提出问题: 如图 2, 当 $AB = 3$, $BC = 4$ 时, 求 $\frac{EF}{AE}$ 的值; 进一步, 当 $AB = m \cdot BC$ 时, 直线写出 $\frac{EF}{AE}$ 的值 (用含 m 的代数式表示).

② “慧慧小组”提出问题: 如图 3, 连结 CE , 当 $AB = 2$, $BC = 4$, $CE = CD$ 时, 求 EF 的长.

请解答这两个问题:

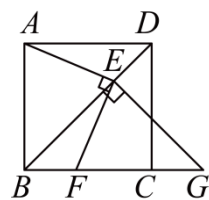


图1

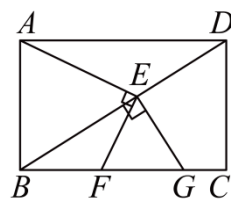


图2

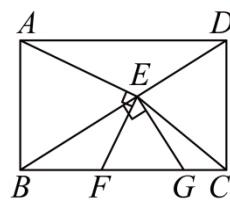
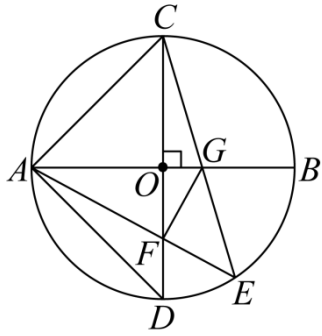


图3

24. 如图, AB, CD 是 $\odot O$ 的两条直径, $AB \perp CD$, 点 E 是 \widehat{BD} 上一点, 连接 AE, CE , 分别交 OD, OB 于点 F, G , 连接 AC, AD, FG .



(1)若 $\angle AFO = 60^\circ$ ，求 $\angle CGO$ 的度数.

(2)求证: $AC^2 = AG \cdot CF$.

(3)设 $\angle AFO = \alpha$ ， $\triangle CFG$ 的面积为 S_1 ， $\triangle AOF$ 的面积为 S_2 ，求证: $\frac{S_1}{S_2} = \tan \alpha - 1$.

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	A	D	D	C	D	A	B	B	D

1. A

【分析】本题主要考查了有理数减法的实际应用，用最高气温减去最低气温即可求出答案.

【详解】解： $19^{\circ}\text{C} - (-14)^{\circ}\text{C} = 33^{\circ}\text{C}$ ，

故选：A.

2. A

【分析】本题主要考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq a < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同.

【详解】解： $9460000000000 = 9.46 \times 10^{12}$ ，

故选：A.

3. D

【分析】根据同底数幂乘法法则、积的乘方及幂的乘方法则逐一计算即可得答案.

【详解】A. $a^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故该选项计算错误，不符合题意，

B. $(-a^3b)^2 = a^6b^2$ ，故该选项计算错误，不符合题意，

C. $a^6 \div a^3 = a^3$ ，故该选项计算错误，不符合题意，

D. $(a^2)^3 = a^6$ ，故该选项计算正确，符合题意，

故选：D.

【点睛】本题考查同底数幂乘法、积的乘方及幂的乘方，熟练掌握运算是解题关键.

4. D

【分析】利用数轴比较数的大小逐个判断即可.

【详解】解：由图可知： $-2 < a < -1 < 0 < b < 1$ ，

$\therefore a < b$ ，故 A 选项错误，不符合题意；

$a > -2$ ，故 B 选项错误，不符合题意；

$a + b < 0$ ，故 C 选项错误，不符合题意；

$-a > b$ ，故 D 选项正确，符合题意；

故选：D.

【点睛】本题考查利用数轴比较数的大小．熟练掌握数轴上左边点表示的数总大于右边点表示的数是解题的关键．

5. C

【分析】由平行线分线段成比例定理即可求解．

【详解】解： $\because DE:DF = 3:5$ ， $EF = DF - DE$ ，

$$\therefore EF:DF = 2:5.$$

$$\because l_1 \parallel l_2 \parallel l_3,$$

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{EF}{DF},$$

$$\therefore \frac{BC}{12} = \frac{2}{5},$$

$$\therefore BC = \frac{24}{5}.$$

故选：C.

【点睛】本题考查了平行线分线段成比例定理，掌握这一定理是关键，注意定理中要求线段是对应的．

6. D

【分析】计算出原数据与新数据的平均数、中位数、众数与方差，然后进行比较即可得出结果．

【详解】解：原数据 3，4，4，5 的平均数为 $\frac{3+4+4+5}{4} = 4$ ，中位数为 4，众数为 4，方差

$$\text{为 } \frac{1}{4} \times [(3-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2] = 0.5,$$

新数据 3，4，4，4，5 的平均数为 $\frac{3+4+4+4+5}{4} = 4$ ，中位数为 4，众数为 4，方差为

$$\frac{1}{5} \times [(3-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2] = 0.4,$$

综合可得：平均数、中位数、众数均未发生变化，方差发生变化，

故选：D.

【点睛】题目主要考查求数据的平均数、中位数、众数与方差，熟练掌握各个统计量的求法是解题关键．

7. A

【分析】本题主要考查了平行线的性质，有平行线的性质可得出 $\angle 1 + \angle A = 180^\circ$ ， $\angle 2 = \angle B$ ，即可求出 $\angle A$ ，进一步即可求出 $\angle 2$ 。

【详解】解： $\because l \parallel AB$ ，

$$\therefore \angle 1 + \angle A = 180^\circ, \quad \angle 2 = \angle B,$$

$$\because \angle 1 = 118^\circ, \quad \angle A = 2\angle B,$$

$$\therefore \angle A = 62^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \frac{1}{2}\angle A = 31^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle B = 31^\circ.$$

故选：A.

8. B

【分析】根据切线长定理、等腰三角形的性质以及三角形的内角和即可求解。

【详解】解： $\because AB, AC$ 分别切 $\odot O$ 于 B, C 两点，

$$\therefore AB = AC, \quad OB \perp AB,$$

$$\text{则：} \angle ABO = 90^\circ, \quad \angle ABC = \angle ACB$$

$$\because \angle OBC = 26^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABO - \angle OBC = 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 64^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 52^\circ,$$

故答案为：B.

【点睛】本题考查了切线长定理以及三角形的内角和，等腰三角形的性质，掌握切线长定理是解题的关键。

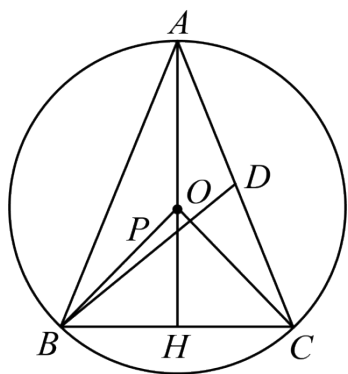
9. B

【分析】本题主要考查的是解直角三角形，三角形的重心以及垂径定理。根据题意作出对应的图形，连接 OC, BO ，得 $AH \perp BC$ ，由垂径定理得 $BH = \frac{1}{2}BC = 3$ ，再由 $\tan \theta = \frac{BH}{OH}$ ，

$$OH = \frac{3}{\tan \theta}, \quad \sin \theta = \frac{BH}{OB}, \quad BO = \frac{3}{\sin \theta}, \quad \text{半径相等}, \quad AO = \frac{3}{\sin \theta}, \quad \text{再由点 } P \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 的重心,}$$

$$\text{可知 } AP = \frac{2}{3}AH, \quad \text{得 } AP = \frac{2}{\tan \theta} + \frac{2}{\sin \theta}, \quad \text{最后列式 } OP = AP - AO \text{ 即可.}$$

【详解】解：如图所示，连接 AO ，过点 O 作 $OH \perp BC$ 于 H ，连接 OC, BO ，如图所示，设点 A 到 BC 的距离为 h ：



$$\because h \leq OA + OH,$$

\therefore 当点 A 到 BC 的距离最大时, A, O, H 三点共线,

$$\therefore AH \perp BC, \quad BH = \frac{1}{2}BC = 3,$$

设 $\angle BAC = \theta (0 < \theta < 60^\circ)$,

$$\therefore \angle BOC = 2\theta, \quad \angle BOH = \theta, \quad BH = \frac{1}{2}BC = 3,$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle BOH, \quad \tan \theta = \frac{BH}{OH}, \quad \sin \theta = \frac{BH}{OB},$$

$$\therefore OH = \frac{3}{\tan \theta}, \quad BO = \frac{3}{\sin \theta},$$

$$\because AO = BO,$$

$$\therefore AO = \frac{3}{\sin \theta}, \quad AH = AO + OH = \frac{3}{\sin \theta} + \frac{3}{\tan \theta},$$

\therefore 点 P 为 $\triangle ABC$ 的重心,

$$\therefore AP = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3}(AO + OH) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{3}{\sin \theta} + \frac{3}{\tan \theta} \right) = \frac{2}{\sin \theta} + \frac{2}{\tan \theta},$$

$$\therefore OP = AP - AO = \frac{2}{\tan \theta} + \frac{2}{\sin \theta} - \frac{3}{\sin \theta} = \frac{2}{\tan \theta} - \frac{1}{\sin \theta},$$

$$\text{即 } PO = \frac{2}{\tan \angle BAC} - \frac{1}{\sin \angle BAC};$$

故选: B.

10. D

【分析】本题考查旋转的性质, 相似三角形的判定和性质以及黄金分割点的性质, 全等三角形的判定和性质等综合知识, 由 $\triangle FDE$ 是 $\triangle ADC$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到的, 得到

$\triangle FDE \cong \triangle ADC$, 再由矩形的性质得出, $\angle DAC + \angle DEF = 90^\circ$ 从而判断①; 由 $AC \perp BE$ 可得

$\angle BGC = 90^\circ$, 从而判断②; 由 $\text{Rt}\triangle FCB \sim \text{Rt}\triangle FDE$ 及 $BC = AD = DF, DE = DC$, 得出 $\frac{FC}{BC} = \frac{DF}{DE}$

可判断③; 在线段 EF 上作 $BG' = CG$, 连接 DG' , 通过 $\triangle DCG \cong \triangle DEG'$, 得出 $\triangle GDG'$ 是等腰直

角三角形，可以判断④，关键是根据已知比例式确定两个三角形相似。

【详解】解：∵ $\triangle FDE$ 是 $\triangle ADC$ 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到的，

$$\therefore \triangle FDE \cong \triangle ADC,$$

$$\therefore AD = DF, DC = DE, \angle DEF = \angle DCA,$$

又∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC + \angle DCA = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle DAG + \angle DEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AGE = 90^\circ,$$

即 $AC \perp BE$ ，故①符合题意；

$$\therefore AC \perp BE,$$

$$\therefore \angle BGC = 90^\circ,$$

即 $\triangle BGC$ 是直角三角形，而 $\triangle AGD$ 显然不是直角三角形，故②不符合题意；

在 $\text{Rt}\triangle FCB$ 和 $\text{Rt}\triangle FDE$ 中，

$$\therefore \angle BFC = \angle EFC,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle FCB \sim \text{Rt}\triangle FDE,$$

$$\therefore \frac{FC}{DF} = \frac{BC}{DE},$$

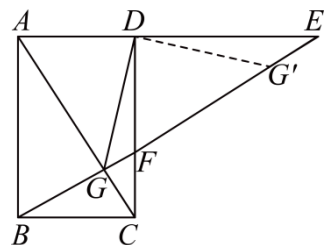
$$\therefore BC = AD = DF, DE = DC,$$

$$\therefore \frac{FC}{DF} = \frac{DF}{DC},$$

$$\text{即 } DF^2 = FC \cdot DC,$$

∴点 F 是线段 CD 的黄金分割点，故③符合题意；

在线段 EF 上取 $EG' = CG$ 并连接 DG' ，如图，



$$\therefore DC = DE, \angle DEF = \angle DCA,$$

$$\therefore \angle DEG' = \angle DCG,$$

在 $\triangle DCG$ 和 $\triangle DEG'$ 中，

$$\begin{cases} DC = DE \\ \angle DCG = \angle DEG', \\ CG = EG' \end{cases}$$

$\therefore \triangle DCG \cong \triangle DEG' \text{ (SAS)},$

$\therefore DG = DG', \angle CDG = \angle EDG'$

$\therefore \angle CDG = \angle GDA = 90^\circ, \angle EDG' + \angle GAD = 90^\circ,$

$\therefore \angle GDG' = 90^\circ,$

$\therefore \triangle GDG'$ 是等腰直角三角形,

$\therefore GG' = \sqrt{2}DG,$

$\therefore EC' = CG,$

$\therefore EG = EG' + GG' = CG + \sqrt{2}DG$, 故④符合题意;

故选: D.

11. $m(a+b)(a-b)$.

【详解】试题分析: 原式 $= m(a^2 - b^2) = m(a+b)(a-b)$.

考点: 提公因式法与公式法的综合运用.

12. 5

【分析】本题考查二次根式的化简运算, 根据题意建立等式求解, 即可解题.

【详解】解: 由题知, $\sqrt{3x+1} = 4$,

$3x+1=16$,

$3x=15$,

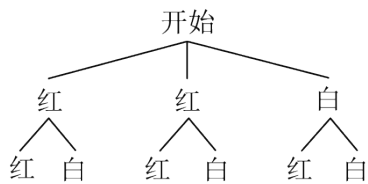
$x=5$.

故答案为: 5.

13. $\frac{2}{3}$

【分析】本题主要考查了用树状图或列表法求概率, 画出树状图, 共有 6 种等可能的结果, 其中恰好为一个红球一个白球的结果有 4 种, 用概率公式求概率即可.

【详解】解: 画树状图如下:



共有 6 种等可能的结果，其中恰好为一个红球一个白球的结果有 4 种，

∴ 随机摸取两个球，恰好为一个红球一个白球的概率是 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ ，

故答案为： $\frac{2}{3}$.

14. 8

【分析】此题考查了整式的化简求值，先利用单项式乘以多项式和完全平方公式展开，合并同类项后整体代入即可.

【详解】解： ∵ $2x^2 - x - 7 = 0$ ，

$$\therefore 2x^2 - x = 7$$

$$\therefore x(x-3) + (x+1)^2 = x^2 - 3x + x^2 + 2x + 1 = 2x^2 - x + 1 = 7 + 1 = 8,$$

故答案为： 8

15. $M = 7t + 1$

【分析】本题考查了利用二次函数的性质求最值，由二次函数的性质得 $-3 \leq \frac{1}{2}(a+b) \leq -2$ ，从而可得函数的最大值是 $x = -1$ 时所对应的函数值；理解二次函数的性质，能找出 $x = -1$ 取最大值是解题的关键.

【详解】解： ∵ 二次函数 $y = x^2 - 4tx + 3t$ 的图象与 x 轴交于 $A(a, 0)$ ， $B(b, 0)$ 两点，

∴ 图象开口向上，对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}(a+b)$ ，

$$\therefore -6 \leq a+b \leq -4,$$

$$\therefore -3 \leq \frac{1}{2}(a+b) \leq -2,$$

∴ 对称轴在 -3 和 -2 之间，

∴ 当 $-3 \leq x \leq -1$ 时，

函数的最大值是 $x = -1$ 时所对应的函数值，

$$\therefore M = 1 + 4t + 3t$$

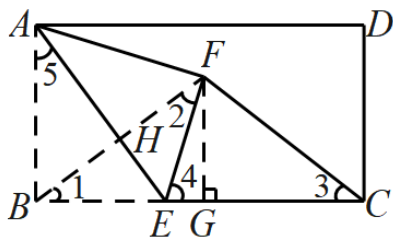
$$= 7t + 1,$$

故答案为： $M = 7t + 1$.

16. 4 $\frac{12\sqrt{7}}{7}$

【分析】连接 BF ，过点 F 作 $FG \perp BC$ 于点 G ，设 BF, AE 交于点 H ，根据已知条件得出 $\angle 1 = \angle 3$ ，进而得出 $BF = FC$ ，在 $\text{Rt}\triangle FGC$ ， $\text{Rt}\triangle EFG$ 中勾股定理求得 FG, BE ，进而证明 $\angle 1 = \angle 5$ ，在 $\text{Rt}\triangle FGC$ 中，得出 $\sin \angle 3 = \frac{FG}{FC} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ， $\cos \angle 3 = \frac{CG}{CF} = \frac{3}{4}$ ，进而在 $\text{Rt}\triangle BHE$ ， $\text{Rt}\triangle ABH$ 中，求得 BH, AB ，即可求解。

【详解】解：如图所示，连接 BF ，过点 F 作 $FG \perp BC$ 于点 G ，设 BF, AE 交于点 H ，



\because 将 ABE 沿着 AE 翻折得到 $\triangle AFE$ ，

$\therefore EB = EF$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 2$ ，

$\therefore \angle 4 = 2\angle 1$

$\because \angle FEC = 2\angle FCE$ ，即 $\angle 4 = 2\angle 3$ ，

$\therefore \angle 1 = \angle 3$

$\therefore BF = FC$

$\because FG \perp BC$ ， $BC = 9$ ，

$\therefore BG = GC = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2}$ ，

$\because CF = 6$ ，

在 $\text{Rt}\triangle FGC$ 中， $FG = \sqrt{FC^2 - CG^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{2}$

设 $BE = EF = x$ ，则 $EG = BG - BE = \frac{9}{2} - x$

在 $\text{Rt}\triangle EFG$ 中， $FG^2 + EG^2 = EF^2$ ，

$$\therefore \left(\frac{3\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2} - x\right)^2 = x^2,$$

解得： $x = 4$

即 $BE = 4$ ，

∵折叠,

∴ $AE \perp BF$,

∴ $\angle 1 + \angle AEB = \angle 5 + \angle AEB$

∴ $\angle 1 = \angle 5$

在 $\text{Rt}\triangle FGC$ 中, $FG = \frac{3\sqrt{7}}{2}, GC = \frac{9}{2}, CF = 6$,

∴ $\sin \angle 3 = \frac{FG}{FC} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos \angle 3 = \frac{CG}{CF} = \frac{3}{4}$

∴ $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5$

∴ 在 $\text{Rt}\triangle BHE$ 中, $BH = BE \times \cos \angle 1 = 4 \times \frac{3}{4} = 3$

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $AB = \frac{BH}{\sin \angle 5} = \frac{3}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{12\sqrt{7}}{7}$,

故答案为: $4, \frac{12\sqrt{7}}{7}$.

【点睛】本题考查了矩形的折叠问题,解直角三角形,熟练掌握折叠的性质以及三角函数的定义是解题的关键.

17. -36

【分析】根据有理数的混合运算顺序,先算括号里面的,再根据除法法则进行计算即可.

【详解】解:方方的计算过程不正确,

正确的计算过程是:

$$\text{原式} = 6 \div \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{6} \right)$$

$$= 6 \div \left(-\frac{1}{6} \right)$$

$$= 6 \times (-6)$$

$$= -36$$

【点睛】本题考查有理数的混合运算,解答本题的关键是掌握乘法分配律.

18. (1)1,8

(2)2,3

(3)优秀率高的年级不是平均成绩也高,理由见解析

【分析】(1)根据扇形统计图得出七年级活动成绩为7分的学生数的占比为10%,即可得出七年级活动成绩为7分的学生数,根据扇形统计图结合众数的定义,即可求解;

(2) 根据中位数的定义，得出第5名学生为8分，第6名学生为9分，进而求得 a ， b 的值，即可求解；

(3) 分别求得七年级与八年级的优秀率与平均成绩，即可求解.

【详解】(1) 解：根据扇形统计图，七年级活动成绩为7分的学生数的占比为

$$1-50\%-20\%-20\%=10\%$$

∴样本中，七年级活动成绩为7分的学生数是 $10 \times 10\% = 1$ ，

根据扇形统计图，七年级活动成绩的众数为8分，

故答案为：1,8.

(2) ∵八年级10名学生活动成绩的中位数为8.5分，

∴第5名学生为8分，第6名学生为9分，

$$\therefore a = 5 - 1 - 2 = 2,$$

$$b = 10 - 1 - 2 - 2 - 2 = 3,$$

故答案为：2,3.

(3) 优秀率高的年级不是平均成绩也高，理由如下，

七年级优秀率为 $20\% + 20\% = 40\%$ ，平均成绩为： $7 \times 10\% + 8 \times 50\% + 9 \times 20\% + 10 \times 20\% = 8.5$ ，

八年级优秀率为 $\frac{3+2}{10} \times 100\% = 50\% > 40\%$ ，平均成绩为：

$$\frac{1}{10} \times (6 + 7 \times 2 + 2 \times 8 + 3 \times 9 + 2 \times 10) = 8.3 < 8.5,$$

∴优秀率高的年级为八年级，但平均成绩七年级更高，

∴优秀率高的年级不是平均成绩也高

【点睛】本题考查了扇形统计图，统计表，中位数，众数，求一组数据的平均数，从统计图表获取信息是解题的关键.

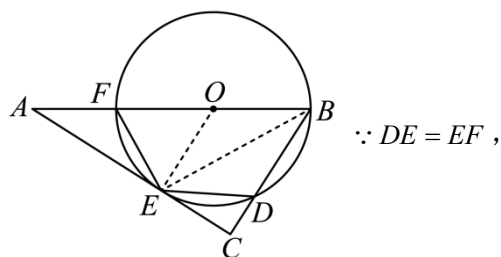
19. (1) 证明见解析

$$(2) AF = \frac{5}{4}$$

【分析】(1) 连接 OE ， BE ，因为 $DE = EF$ ，所以 $\widehat{DE} = \widehat{EF}$ ，从而易证 $\angle OEB = \angle DBE$ ，所以 $OE \parallel BC$ ，继而可证明 $BC \perp AC$ ；

(2) 首先根据题意求出 $\sin A$ ，然后设 $\odot O$ 的半径为 r ，则 $AO = 5 - r$ ，在 $\text{Rt}\triangle AOE$ 中，利用 $\sin A = \frac{OE}{OA}$ ，从而可求出 r 的值，再作差求解即可.

【详解】(1) 证：如图所示，连接 OE ， BE ，



$$\therefore \widehat{DE} = \widehat{EF},$$

$$\therefore \angle OBE = \angle DBE,$$

$$\therefore OE = OB,$$

$$\therefore \angle OEB = \angle OBE,$$

$$\therefore \angle OEB = \angle DBE,$$

$$\therefore OE \parallel BC,$$

$$\therefore \odot O \text{ 与边 } AC \text{ 相切于点 } E,$$

$$\therefore OE \perp AC,$$

$$\therefore BC \perp AC,$$

$$\therefore \angle C = 90^\circ;$$

$$(2) \text{ 解：在 Rt}\triangle ABC \text{ 中，} \cos A = \frac{4}{5},$$

设 $AC = 4x$ ，则 $AB = 5x$ ，根据勾股定理 $BC = 3x$ ，

$$\therefore BC = 3,$$

$$\therefore x = 1, \text{ 即 } AC = 4, \quad AB = 5,$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5},$$

设 $\odot O$ 的半径为 r ，则 $AO = 5 - r$ ，

$$\text{在 Rt}\triangle AOE \text{ 中，} \sin A = \frac{OE}{OA} = \frac{r}{5-r} = \frac{3}{5},$$

$$\therefore r = \frac{15}{8}, \text{ 经检验，} r = \frac{15}{8} \text{ 是上述分式方程的解，}$$

$$\therefore AF = AB - 2r = 5 - 2 \times \frac{15}{8} = \frac{5}{4},$$

$$\therefore AF = \frac{5}{4}.$$

【点睛】本题考查了圆中弧、弦之间的关系，圆周角定理的推论，切线的性质和解直角三角形等知识，属于常考题型，熟练掌握上述基本知识是解答的关键。

20. (1)3

(2)①(1,3); ② $-3 < x_2 < 0$

【分析】(1) 根据反比例函数图象与性质，利用待定系数法列方程求解即可得到答案；

(2) ①利用反比例函数图象与性质，结合题意求出 $B(x_2, 3)$ ，利用待定系数法列方程求解即可得到答案；②利用反比例函数图象与性质，利用待定系数法求出 $A(x_1, y_1)$ ，列不等式求解即可得到答案.

【详解】(1) 解： \because 反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ ，点 $(3, a), (1, 2a+1)$ 都在该反比例函数图象上，

$$\therefore k = 3a = 2a + 1, \text{ 解得 } a = 1,$$

$$\therefore k = 3a = 3;$$

(2) 解：点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 都在该反比例函数图象上，且点A和点B关于原点中心对称，

$$\therefore y_1 + y_2 = 0,$$

$$\because y_2 = y_1 + 6, \text{ 则 } y_1 + (y_1 + 6) = 0, \text{ 解得 } y_1 = -3,$$

$$\therefore y_2 = 3,$$

将 $B(x_2, 3)$ 代入 $y = \frac{3}{x}$ 得 $3 = \frac{3}{x_2}$ ，解得 $x_2 = 1$ ，

$$\therefore B(1, 3);$$

$$\textcircled{2} \because x_1 = 3, \text{ 则 } y_1 = \frac{3}{3} = 1,$$

$$\because y_1 + y_2 < 0,$$

$$\therefore y_2 < -1,$$

$$\therefore \frac{3}{x_2} < -1,$$

$$\therefore -3 < x_2 < 0.$$

【点睛】本题考查反比例函数图象与性质，涉及待定系数法确定 k 、点的对称性质、解不等式等知识，熟练掌握反比例函数图象与性质是解决问题的关键.

21. (1) $(4 + 2\sqrt{3})$ 米

(2)山峰高度 AH 的长约为10.2米

【分析】(1) 根据题意可得： $CB \perp FH$ ， $ED \perp HG$ ，然后分别在 $\text{Rt}\triangle FBC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEG$ 中，利用锐角三角函数的定义求出 BF 和 DG 的长，从而利用线段的和差关系进行计算，即可解答；

(2) 设 $AH = x$ 米，在 $\text{Rt}\triangle AHF$ 中，利用锐角三角函数的定义求出 HF 的长，从而求出 HG 的长，再在 $\text{Rt}\triangle AHG$ 中，利用锐角三角函数的定义可得 $HG = \sqrt{3}AH$ ，从而列出关于 x 的方程，进行计算即可解答．

【详解】(1) 解：由题意得： $CB \perp FH$ ， $ED \perp HG$ ，

在 $\text{Rt}\triangle FBC$ 中， $\angle BFC = 45^\circ$ ， $BC = 2$ ，

$$\therefore BF = \frac{BC}{\tan 45^\circ} = 2 \text{ (米)},$$

在 $\text{Rt}\triangle DEG$ 中， $\angle G = 30^\circ$ ， $DE = 2$ ，

$$\therefore DG = \frac{DE}{\tan 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3} \text{ (米)},$$

$\therefore BD = 6$ 米，

$$\therefore FG = BD + DG - BF = 6 + 2\sqrt{3} - 2 = (4 + 2\sqrt{3}) \text{ 米},$$

$\therefore FG$ 的长为 $(4 + 2\sqrt{3})$ 米；

(2) 解：设 $AH = x$ 米，

在 $\text{Rt}\triangle AHF$ 中， $\angle AFH = 45^\circ$ ，

$$\therefore FH = \frac{AH}{\tan 45^\circ} = x \text{ (米)},$$

$$\therefore FG = (4 + 2\sqrt{3}) \text{ 米},$$

$$\therefore HG = HF + FG = (x + 4 + 2\sqrt{3}) \text{ 米},$$

在 $\text{Rt}\triangle AHG$ 中， $\angle G = 30^\circ$ ，

$$\therefore HG = \frac{AH}{\tan 30^\circ} = \frac{AH}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}AH,$$

$$\therefore x + 4 + 2\sqrt{3} = \sqrt{3}x,$$

$$\text{解得： } x = 5 + 3\sqrt{3} \approx 10.2,$$

$$\therefore AH = 10.2 \text{ 米},$$

\therefore 山峰高度 AH 的长约为 10.2 米．

【点睛】本题考查了解直角三角形的应用-仰角俯角问题，相似三角形的应用，熟练掌握锐角三角函数的定义，以及A字模型相似三角形是解题的关键.

22. (1)① $y = -\frac{1}{10}x^2 + x + 1$; ② $\frac{2}{3}$ 米

(2) 1.6 米

【分析】(1) ① 设改造前的函数解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，根据所建立的平面直角坐标系得到 $A(0,1)$ ， $E(4,3.4)$ ， $C(6,3.4)$ ，然后代入解析式得到关于 a 、 b 、 c 的方程组，求解即可；

② 根据已知条件得到函数的解析式，再利用函数解析式得到 C' 、 E' 的坐标即可得到结论；

(2) 根据已知条件表示出 G' 、 E' 的坐标得到 a 的不等式，进而得到 CC' 的最大值.

【详解】(1) 解：① 如图，以 O 为原点，分别以 OB 和 OA 所在的直线为 x 轴和 y 轴建立如图所示的平面直角坐标系，

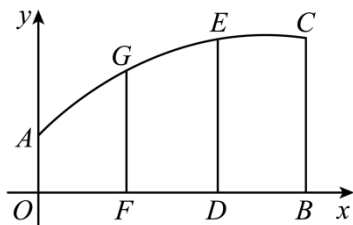
由题意可知： $A(0,1)$ ， $E(4,3.4)$ ， $C(6,3.4)$ ，

设改造前的抛物线解析式为 $y = ax^2 + bx + c$ ，

$$\therefore \begin{cases} c = 1 \\ 16a + 4b + c = 3.4 \\ 36a + 6b + c = 3.4 \end{cases}$$

$$\text{解得：} \begin{cases} a = -\frac{1}{10} \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases},$$

\therefore 改造前的抛物线的函数表达式为 $y = -\frac{1}{10}x^2 + x + 1$ ；



② 如图，建立与 (1) 相同的平面直角坐标系，

由①知改造前抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{10}x^2 + x + 1$ ，

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = -\frac{1}{2 \times \left(-\frac{1}{10}\right)} = 5,$$

$$\text{设改造后抛物线解析式为: } y_2 = cx^2 + dx + 1,$$

\therefore 调整后 C 与 E 上升相同的高度, 且 $CC' = 1$,

$$\therefore \text{对称轴为直线 } x = 5, \text{ 则有 } -\frac{d}{2c} = 5,$$

$$\text{当 } x = 6 \text{ 时, } y = 4.4,$$

$$\therefore 36c + 6d + 1 = 4.4,$$

$$\therefore c = -\frac{17}{120}, \quad d = \frac{17}{12},$$

$$\therefore \text{改造后抛物线解析式为: } y_2 = -\frac{17}{120}x^2 + \frac{17}{12}x + 1,$$

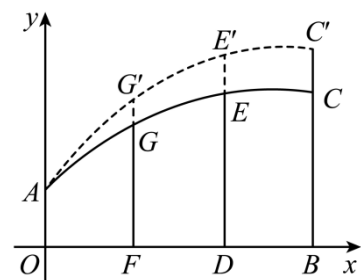
当 $x = 2$ 时,

$$\text{改造前: } y_1 = -\frac{1}{10} \times 2^2 + 2 + 1 = \frac{13}{5},$$

$$\text{改造后: } y_2 = -\frac{17}{120} \times 2^2 + \frac{17}{12} \times 2 + 1 = \frac{49}{15},$$

$$\therefore GG' = y_2 - y_1 = \frac{49}{15} - \frac{13}{5} = \frac{2}{3} \text{ (米)},$$

$\therefore GG'$ 的长度为 $\frac{2}{3}$ 米;



(2) 如 (2) 题图, 设改造后抛物线解析式为 $y = ax^2 - 10ax + 1$,

$$\therefore \text{当 } x = 2 \text{ 时, } y = a \times 2^2 - 10a \times 2 + 1 = -16a + 1,$$

$$\text{当 } x = 4 \text{ 时, } y = a \times 4^2 - 10a \times 4 + 1 = -24a + 1,$$

$$\therefore G'(2, -16a + 1), \quad E'(4, -24a + 1),$$

$$\therefore EE' + GG' = -24a + 1 - 16a + 1 - \left(3.4 + \frac{13}{5}\right) = -40a - 4,$$

由题意可列不等式: $(-40a - 4) \times 200 \times 60 \leq 32000$,

解得： $a \geq -\frac{1}{6}$ ，

$$\therefore CC' = EE' = -24a + 1 - 3.4,$$

要使最大，需 a 最小，

\therefore 当 $a = -\frac{1}{6}$ 时， CC' 的值最大，最大值为 1.6 米.

【点睛】本题考查用待定系数法求二次函数的解析式，二次函数的对称轴，二次函数的实际应用，一元一次不等式的实际应用等知识点. 掌握二次函数的性质及是一元一次不等式的应用解题的关键.

23. (1) 证明见解析，1；(2) ① $\frac{3}{4}$ ， m ；② $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

【分析】(1) 利用正方形性质得到 $\angle ABE = \angle GBE = 45^\circ$ ，利用垂直的定义推出 $\angle AEB = \angle FEG$ ， $\angle G = 45^\circ$ ，进而得到 $BE = EG$ ，即可利用“ASA”证明 $\triangle ABE \cong \triangle FGE$ ，再由全等三角形的性质可得 $\frac{EF}{AE}$ 的值，即可求解；

(2) ① 根据 (1) 得到 $\angle AEB = \angle FEG$ ，利用矩形的性质和等量代换得到 $\angle EFG = \angle BAE$ ，证明 $\triangle ABE \sim \triangle FGE$ ，得到 $\frac{EF}{AE} = \frac{EG}{BE}$ ，再证明 $\triangle BEG \sim \triangle BCD$ ，利用相似的性质即可得到 $\frac{EF}{AE}$ 的值，根据前面同理可得，当 $AB = m \cdot BC$ 时， $\frac{EF}{AE}$ 的值，即可解题；

② 过点 C 作 $CH \perp BD$ 于点 H ，过点 E 作 $EQ \perp AB$ 于点 Q . 利用锐角三角函数和等腰三角形的性质可求的 BE 长，由相似三角形的性质可求 AQ 和 QE 的长，由勾股定理可求 AE 的长，即可求解.

【详解】(1) 解： \because 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ, \angle ABE = \angle GBE = 45^\circ,$$

$$\because EF \perp AE, EG \perp BD,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BEG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF - \angle BEF = \angle BEG - \angle BEF, \angle G = 90^\circ - \angle EBG = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle FEG, \angle ABE = \angle EBG = \angle G,$$

$$\therefore BE = EG,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FGE$ 中

$$\therefore \angle ABE = \angle G, BE = GE, \angle AEB = \angle FEG,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle FGE (\text{ASA}),$$

$$\therefore AE = EF,$$

$$\therefore \frac{EF}{AE} = 1;$$

(2) 解: ① \because 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore CD = AB, \angle C = 90^\circ,$$

由 (1), 得 $\angle AEB = \angle FEG$,

$$\because \angle ABC = \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle AEF = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE + \angle BFE = 180^\circ,$$

$$\because \angle BFE + \angle EFG = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EFG = \angle BAE,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle FGE,$$

$$\therefore \frac{EF}{AE} = \frac{EG}{BE},$$

$$\because \angle BEG = \angle C = 90^\circ, \angle CBD = \angle EBG,$$

$$\therefore \triangle BEG \sim \triangle BCD,$$

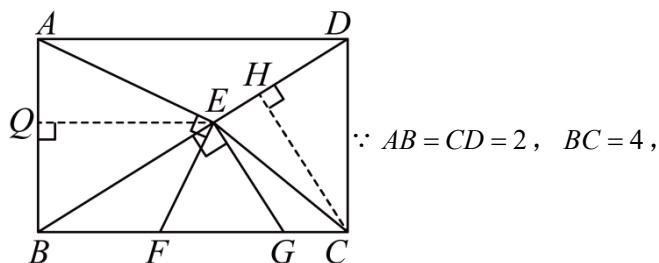
$$\therefore \frac{EG}{CD} = \frac{BE}{BC},$$

$$\therefore \frac{EG}{BE} = \frac{CD}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{EF}{AE} = \frac{EG}{BE} = \frac{3}{4},$$

$$\text{当 } AB = m \cdot BC \text{ 时, } \frac{EF}{AE} = \frac{EG}{BE} = \frac{AB}{BC} = m,$$

② 如答图, 过点 C 作 $CH \perp BD$ 于点 H , 过点 E 作 $EQ \perp AB$ 于点 Q .



$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5},$$

$$\text{又} \because \sin \angle DBC = \frac{CH}{BC} = \frac{CD}{BD},$$

$$\therefore \frac{CH}{4} = \frac{2}{2\sqrt{5}},$$

$$\begin{aligned}
&\therefore CH = \frac{4\sqrt{5}}{5}, \\
&\therefore DH = \sqrt{CD^2 - CH^2} = \sqrt{4 - \frac{16}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \\
&\because CE = CD, CH \perp BD, \\
&\therefore DE = 2DH = \frac{4\sqrt{5}}{5}, \\
&\therefore BE = \frac{6\sqrt{5}}{5}, \\
&\because QE \perp AB, \\
&\therefore \angle BQE = \angle BAD = 90^\circ, \\
&\text{又} \because \angle ABD = \angle QBE, \\
&\therefore \triangle BQE \sim \triangle BAD, \\
&\therefore \frac{BE}{BD} = \frac{QE}{AD} = \frac{BQ}{AB}, \\
&\therefore \frac{\frac{6\sqrt{5}}{5}}{\frac{6\sqrt{5}}{5}} = \frac{QE}{4} = \frac{BQ}{2}, \\
&\therefore QE = \frac{12}{5}, BQ = \frac{6}{5}, \\
&\therefore AQ = \frac{4}{5}, \\
&\therefore AE = \sqrt{AQ^2 + QE^2} = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{144}{25}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}.
\end{aligned}$$

由 (2) 可知 $\frac{EF}{AE} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$,

$$\therefore EF = \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

【点睛】本题主要考查了正方形性质，矩形的性质，等腰三角形性质，全等三角形判定和性质，勾股定理，相似三角形判定和性质等知识，锐角三角函数，解决问题的关键是作辅助线，构造相似三角形.

24. (1) $\angle CGO = 75^\circ$

(2) 见解析

(3) 见解析

【分析】(1) 根据已知条件得出 $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD = 45^\circ$ ，根据等弧所对的圆周角得出 $\angle DAE = \angle DCE$ ，进而在 $\text{Rt}\triangle CGO$ 中，根据直角三角形的两锐角互余即可求解；

(2)根据(1)的方法,得出 $\angle DAE = \angle DCE$, 设 $\angle DAE = \angle DCE = \beta$, 进而证明 $\angle ACG = \angle AFC$, $\angle CAG = \angle ACF = 45^\circ$, 即可证明 $\triangle ACG \sim \triangle CFA$, 根据相似三角形的性质即可求解;

(3) 分别表示出 S_1, S_2 , 根据 (2) 的结论, 结合 $AO = CO$, 进行恒等式的变形, 得出

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO^2 - AO \times OF}{AO \times OF} = \frac{AO}{OF} - 1, \text{ 进而根据正切的定义得出 } \tan \alpha = \frac{AO}{OF}, \text{ 即可得证.}$$

【详解】(1) 解: $\because AB, CD$ 是 $\odot O$ 的两条直径, $AB \perp CD$,

$$\therefore \angle BOD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD = 45^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle AOF$ 中, $\therefore \angle AFO = 60^\circ$,

$$\therefore \angle OAF = 30^\circ,$$

$$\because \widehat{DE} = \widehat{DE},$$

$$\therefore \angle DAE = \angle DCE = \angle DAB - \angle OAF = 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle CGO$ 中, $\angle CGO = 90^\circ - \angle OCG = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$,

$$\therefore \angle CGO = 75^\circ;$$

(2) 解: $\because \widehat{DE} = \widehat{DE}$,

$$\therefore \angle DAE = \angle DCE,$$

设 $\angle DAE = \angle DCE = \beta$

$$\because \angle ACD = \frac{1}{2} \angle AOD = 45^\circ = \angle ADO, \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ACG = 45^\circ + \beta, \angle AFC = \angle DAF + \angle ADF = 45^\circ + \beta,$$

$$\therefore \angle ACG = \angle AFC, \angle CAG = \angle ACF = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACG \sim \triangle CFA,$$

$$\therefore \frac{AC}{CF} = \frac{AG}{AC},$$

$$\therefore AC^2 = AG \cdot CF;$$

$$\begin{aligned} (3) \text{ 解: } \because S_1 &= S_{\triangle CFG} = \frac{1}{2} \times CF \times OG = \frac{1}{2} (CO + OF) \times OG \\ &= \frac{1}{2} (AO + OF) \times OG, \end{aligned}$$

$$S_2 = S_{\triangle AOF} = \frac{1}{2} AO \times OF,$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}(AO+OF) \times OG}{\frac{1}{2}AO \times OF} = \frac{AO \times OG + OF \times OG}{AO \times OF}$$

由 (2) 得 $AC^2 = AG \cdot CF$;

$$\because AG = AO + OG, CF = CO + OF,$$

$$\text{又 } AO = CO, AC = \sqrt{2}AO,$$

$$\therefore 2AO^2 = (AO + OG)(CO + OF),$$

$$\text{即 } 2AO^2 = (AO \times OG)(AO + OF),$$

$$\therefore AO^2 = AO \times OF + OG \times OF + OG \times AO,$$

$$\therefore AO^2 - AO \times OF = AO \times GO + OG \times OF,$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{AO^2 - AO \times OF}{AO \times OF} = \frac{AO}{OF} - 1,$$

$$\because \angle AFO = \alpha, \text{ 在 Rt}\triangle AFO \text{ 中, } \tan \alpha = \frac{AO}{OF},$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \tan \alpha - 1$$

【点睛】 本题考查了圆周角定理，相似三角形的性质与判定，正切的定义，熟练掌握以上知识是解题的关键.