

# 2024 年浙江省宁波市余姚市九年级中考一模考数学试题

学校:\_\_\_\_\_姓名:\_\_\_\_\_班级:\_\_\_\_\_考号:\_\_\_\_\_

## 一、单选题

1. 为了解某地某天的天气情况,在某气象网站查询到该地这天的最低气温为 $-2^{\circ}\text{C}$ ,最高气温为 $7^{\circ}\text{C}$ ,则该地这天的温差(最高气温与最低气温的差)为( )

- A.  $-9^{\circ}\text{C}$       B.  $-5^{\circ}\text{C}$       C.  $5^{\circ}\text{C}$       D.  $9^{\circ}\text{C}$

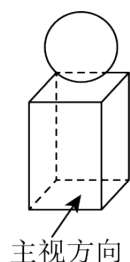
2. 下列计算正确的是( )

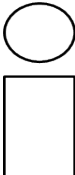
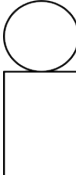
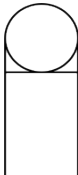
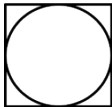
- A.  $\sqrt{(-3)^2} = -3$       B.  $\sqrt{3^2} = 3$       C.  $\sqrt{(-3)^2} = \pm 3$       D.  $\sqrt{3^2} = \pm 3$

3. 已知某快递公司的收费标准为:寄一件物品不超过 5 千克,收费 13 元;超过 5 千克的部分每千克加收 2 元.若在该快递公司寄一件 9 千克的物品,则需要付费( )

- A. 17 元      B. 19 元      C. 21 元      D. 23 元

4. 如图所示几何体是由一个四棱柱上放置一个球体得到的,它的左视图是( )



- A.       B.       C.       D. 

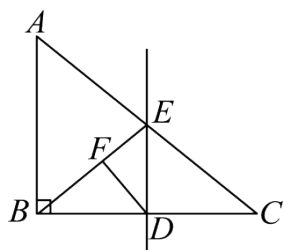
5. 一组数据  $-2, a, 5, 3, 7$  有唯一的众数 7,则这组数据的中位数是( )

- A.  $-2$       B. 3      C. 5      D. 7

6. 照相机成像应用了一个重要原理,用公式  $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$  ( $v \neq f$ ) 表示,其中  $f$  表示照相机镜头的焦距,  $u$  表示物体到镜头的距离,  $v$  表示胶片(像)到镜头的距离.已知  $f, v$ , 则  $u =$  ( )

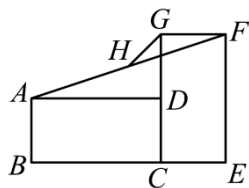
- A.  $\frac{fv}{f-v}$       B.  $\frac{f-v}{fv}$       C.  $\frac{fv}{v-f}$       D.  $\frac{v-f}{fv}$

7. 如图,在  $\text{Rt}\triangle ABC$  中,  $BC$  的中垂线与  $BC$  交于点  $D$ ,与  $AC$  交于点  $E$ ,连接  $BE$ ,  $F$  为  $BE$  的中点,若  $DF = 2$ ,则  $AE$  的长为( )



- A. 5                      B.  $2\sqrt{3}$                       C. 4                      D. 3

8. 如图，将矩形  $ABCD$  绕点  $C$  顺时针方向旋转  $90^\circ$  得到矩形  $FGCE$ ，连接  $AF$ ，点  $H$  是  $AF$  的中点，连接  $GH$ ．若  $AB=2$ ， $BC=4$ ，则  $GH$  的长为（ ）



- A. 2                      B.  $\sqrt{2}$                       C. 1                      D.  $2\sqrt{2}$

9. 已知点  $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ， $C(x_3, y_3)$ ，在二次函数  $y = -x^2 + c (c > 0)$  的图象上，点  $A$ ， $C$  是该函数图象与正比例函数  $y = kx (k \text{ 为常数且 } k > 0)$  的图象的交点．若  $x_1 < 0 < x_2 < x_3$ ，则  $y_1, y_2, y_3$  的大小关系为（ ）

- A.  $y_3 < y_2 < y_1$                       B.  $y_1 < y_2 < y_3$   
C.  $y_2 < y_1 < y_3$                       D.  $y_1 < y_3 < y_2$

10. 将正六边形  $ABCDEF$  折叠成三角形后（如图 1）用剪刀剪下一个角，展开后得到如图 2 所示的图形，图 2 中虚线为折叠时产生的折痕，折痕  $AG + BH = AB$ ，若剪完后所得阴影图形的面积为原正六边形面积的  $\frac{5}{6}$ ，则  $\frac{GH}{AB}$  的值为（ ）

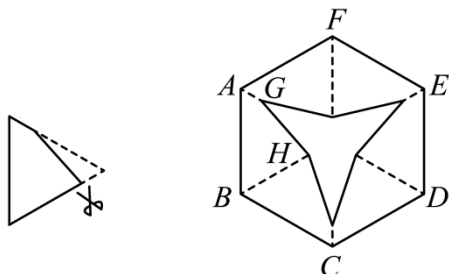


图1

图2

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $\frac{2}{3}$

## 二、填空题

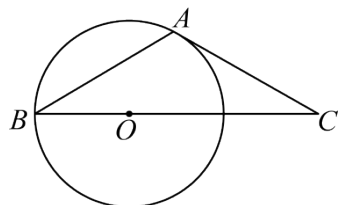
11. 分解因式： $9-x^2=$ \_\_\_\_\_

12. 请写出一个小于 3 的无理数\_\_\_\_\_；

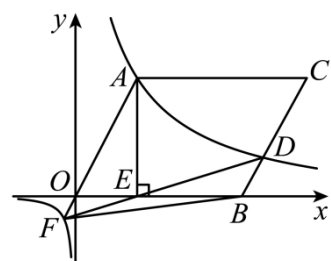
13. 一个仅装有球的不透明布袋里只有 6 个红球和  $n$  个白球（仅有颜色不同），若从中任意摸出一个球是红球的概率为  $\frac{2}{3}$ ，则  $n=$ \_\_\_\_\_.

14. 已知一次函数  $y=2x-3$  与  $y=kx$  ( $k$  是常数,  $k \neq 0$ ) 的图象的交点坐标是  $(2,1)$ ，则方程组  $\begin{cases} y=2x-3 \\ y=kx \end{cases}$  的解是\_\_\_\_\_.

15. 如图，在  $\triangle ABC$  中， $AB=AC=3$ ，点  $O$  在  $BC$  上，以  $OB$  为半径的圆与  $AC$  相切于点  $A$ ， $OC=2OB$ ， $D$  是  $BC$  边上  $B$  的动点(不与  $B$ ， $C$  重合)，当  $\triangle ACD$  为等腰三角形时， $BD$  的长为\_\_\_\_\_.



16. 如图，直角坐标系中，平行四边形  $AOBC$  的顶点  $B$  在  $x$  轴的正半轴上， $A$ 、 $C$  在第一象限，反比例函数  $y=\frac{25}{x}$  ( $x>0$ ) 的图象经过点  $A$ ，与  $BC$  交于点  $D$ ， $AE \perp x$  轴于点  $E$ ，连结  $DE$  并延长交  $AO$  的延长线于点  $F$ ，反比例函数  $y=\frac{1}{x}$  ( $x>0$ ) 的图象经过点  $F$ ，连结  $BF$ ，则  $\triangle BDF$  的面积为\_\_\_\_\_.



## 三、解答题

17. 小明在计算  $a(2+a)-(a-2)^2$  时，解答过程如下：

$$\begin{aligned}
 & a(2+a)-(a-2)^2 \\
 &= 2a+a^2-(a^2-4) \quad \dots\dots\dots \text{第一步} \\
 &= 2a+a^2-a^2-4 \quad \dots\dots\dots \text{第二步} \\
 &= 2a-4 \quad \dots\dots\dots \text{第三步}
 \end{aligned}$$

小明的解答从第\_\_\_\_\_步开始出错，请写出正确的解答过程.

18. 图 1，图 2 都是由边长为 1 的小等边三角形构成的网格，每个小等边三角形的顶点称为格点，线段  $AB$  的端点均在格点上，分别按要求画出图形.

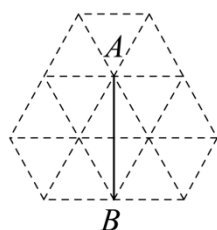


图1

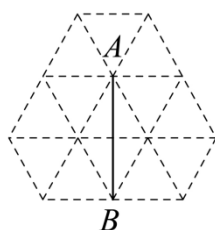
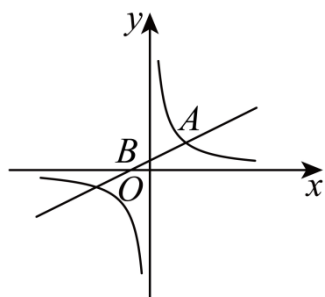


图2

(1)在图 1 中画出一个以  $AB$  为边的  $\square ABCD$ ，且点  $C$  和点  $D$  均在格点上；

(2)在图 2 中画出一个以  $AB$  为对角线的菱形  $AEBF$ ，且点  $E$  和点  $F$  均在格点上.

19. 如图，一次函数  $y = \frac{1}{2}x + 1$  的图象与反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象交于点  $A(a, 3)$ ，与  $y$  轴交于点  $B$ .



(1)求点  $A$  的坐标和反比例函数的表达式；

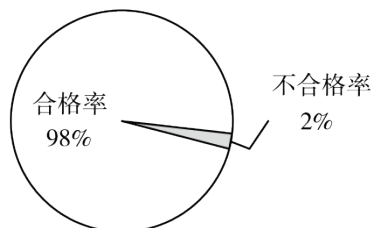
(2)若点  $P$  在  $y$  轴上， $\triangle ABP$  的面积为 6，求点  $P$  的坐标.

20. 某工厂生产某种产品，3 月份的产量为 5000 件，4 月份的产量为 10000 件. 用简单随机抽样的方法分别抽取这两个月生产的该产品若干件进行检测，并将检测结果分别绘制成如图所示的扇形统计图和频数直方图（每组不含前一个边界值，含后一个边界值）. 已知检测综合得分大于 70 分的产品为合格产品.

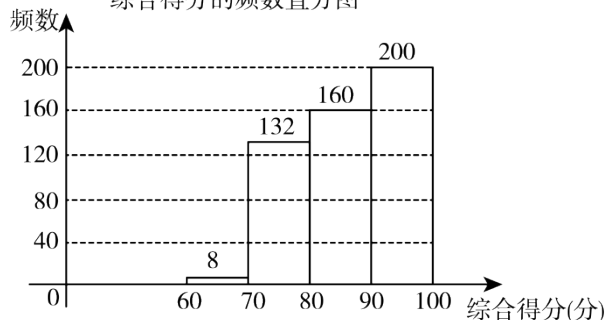
(1) 求 4 月份生产的该产品抽样检测的合格率；

(2) 在 3 月份和 4 月份生产的产品中，估计哪个月的不合格件数最多？为什么？

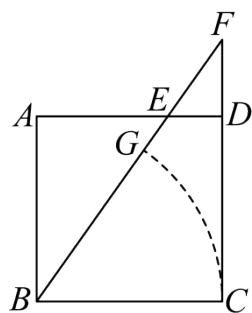
某工厂3月份生产的某种产品检测情况的扇形统计图



某工厂4月份生产的某种产品检测综合得分的频数直方图



21. 在边长为 3 的正方形  $ABCD$  中，点  $E$  在边  $AD$  上（不与点  $A, D$  重合），射线  $BE$  与射线  $CD$  交于点  $F$ .



(1) 若  $ED=1$ ，求  $DF$  的长.

(2) 求证:  $AE \cdot CF=9$ .

(3) 以点  $B$  为圆心， $BC$  长为半径画弧，交线段  $BE$  于点  $G$ . 若  $EG=ED$ ，求  $ED$  的长.

22. 根据以下素材，探索完成任务.

如何制作简易风筝？		
素材 1	图 1 是简易“箬形”风筝的结构图，现以两条线段 $AC$ 、 $BD$ 作为骨架， $AC$ 垂直平分 $BD$ 且 $AC > BD$ ，并按 $AO:OC=3:5$ 的比例固定骨架，骨架 $AC$ 与 $BD$ 共消耗竹条 60cm，四边形 $ABCD$ 的面积为 $400\text{cm}^2$ .	<p>图1</p>
素材 2	考虑到实际需要，蒙面（风筝面）边缘离骨架的端点要留出一定距离. 如图 2，现 $BD$ 以上部分的蒙面设计为抛物线形状，过距离 $A, B, D$ 三点分别为 5cm, 2cm, 2cm 的 $E, F, G$ 三点绘制抛物线（建立如图的直角坐标系）. $BD$ 以下部分的蒙面设计为 $\triangle FGH$ ，点 $H$ 在 $OC$ 延长线上且 $FH \parallel BC$ .	

素材 3	从一张长方形纸片中裁剪无拼接的风筝蒙面（包括 $BD$ 以上抛物线部分及 $BD$ 以下三角形部分），长方形各边均与骨架平行（或垂直）.	
------	--	--

问题解决，完成以下任务：

(1)确定骨架长度：求骨架  $AC$  和  $BD$  的长度.

(2)确定蒙面形状：求抛物线的函数表达式.

(3)选择纸张大小：至少选择面积为多少的长方形纸片？

23. 在平面直角坐标系中，设二次函数  $y = ax^2 + bx - 4a$  ( $a, b$  是常数,  $a \neq 0$ ).

(1)判断该函数图像与  $x$  轴的交点个数，并说明理由；

(2)若该函数图像的对称轴为直线  $x = 2$ ,  $A(x_1, m)$ ,  $B(x_2, m)$  为该函数图像上的任意两点，

其中  $x_1 < x_2$ ，求当  $x_1, x_2$  为何值时， $m = 8a$ ；

(3)若该函数图像的顶点在第二象限，且过点  $(1, 2)$ ，当  $a < b$  时求  $3a + b$  的取值范围.

24. 如图 1，四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ，对角线  $AC$  交  $BD$  于点  $G$ ， $\widehat{AB} = \widehat{AC}$ ，点  $F$  在线段  $BD$  上，且  $AF = AD$ .

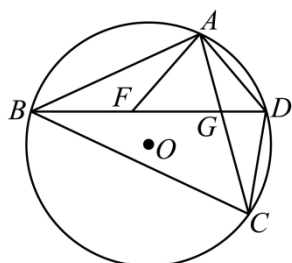


图1

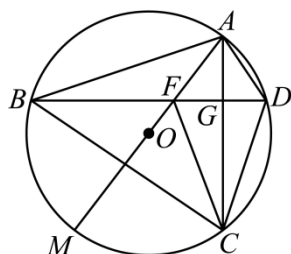


图2

(1)若  $\angle ADB = \alpha$ ，请用  $\alpha$  的代数式表示  $\angle ADC$ ；

(2)求证：  $BF = CD$ ；

(3)如图 2，延长  $AF$  交  $\odot O$  于点  $M$ ，连结  $FC$ .

①若  $AM$  为  $\odot O$  的直径， $AM = 13$ ， $\tan \angle DAC = \frac{2}{3}$ ，求  $AF$  的长；

②若  $FG = 2GD$ ，猜想  $\angle AFC$  的度数，并证明你的结论.

**参考答案：**

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	C	B	C	C	C	B	D	A

1. D

【分析】本题主要考查有理数的减法的应用．这天的温差就是最高气温减去最低气温的差，由此列式得出答案即可．

【详解】解：这天最高温度与最低温度的温差为  $7 - (-2) = 9^{\circ}\text{C}$ ，

故选：D．

2. B

【分析】此题主要考查了二次根式的性质，根据二次根式的性质求解即可．

【详解】解：A、 $\sqrt{(-3)^2} = 3 \neq -3$ ，故错误，不符合题意；

B、 $\sqrt{3^2} = 3$ ，故正确，符合题意；

C、 $\sqrt{(-3)^2} = 3 \neq \pm 3$ ，故错误，不符合题意；

D、 $\sqrt{3^2} = 3 \neq \pm 3$ ，故错误，不符合题意；

故选：B．

3. C

【分析】本题考查有理数的混合运算，根据题意和题目中的数据，可以列出算式  $13 + (9 - 5) \times 2$ ，然后计算即可．

【详解】解：由题意可得，

$$13 + (9 - 5) \times 2$$

$$= 13 + 4 \times 2$$

$$= 13 + 8$$

$$= 21 \text{（元）},$$

故选：C．

4. B

【分析】本题考查了简单组合体的三视图，从左边看得到的图形是左视图．根据左视图的意义和画法可以得出答案．

【详解】解： $\because$  球的左视图是一个圆，长方体的左视图是一个长方形，

∴该几何体的左视图是一个圆与一个长方形，

故选：B.

5. C

【分析】本题主要考查了众数和中位数的知识，根据众数的定义先求出  $a$  的值，再根据中位数的定义把这组数据从小到大排列，找出最中间的数或中间两个数的平均数即可得出答案.

【详解】解：∵数据  $-2, a, 5, 3, 7$  有唯一的众数  $7$ ，

∴  $a = 7$ ，

把这些数从小到大排列为  $-2, 3, 5, 7, 7$ ，

则这组数据的中位数是  $5$ .

故选：C.

6. C

【分析】利用分式的基本性质，把等式  $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} (v \neq f)$  恒等变形，用含  $f, v$  的代数式表示

$u$ .

【详解】解：∵  $\frac{1}{f} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} (v \neq f)$ ，

$$\therefore \frac{1}{u} = \frac{1}{f} - \frac{1}{v}$$

$$\therefore \frac{1}{u} = \frac{v-f}{fv},$$

$$\therefore u = \frac{fv}{v-f},$$

故选：C.

【点睛】本题考查分式的加、减法运算，关键是异分母通分，掌握通分法则.

7. C

【分析】此题考查了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，中垂线的性质，等角对等边等性质，

首先根据中垂线的性质得到  $DE \perp BC$ ， $BE = EC$ ，然后利用直角三角形的性质得到

$BE = 2DF = 4$ ，进而证明出  $\angle A = \angle ABE$ ，即可得到  $AE = BE = 4$ .

【详解】∵  $BC$  的中垂线与  $BC$  交于点  $D$ ，

∴  $DE \perp BC$ ， $BE = EC$

∵  $F$  为  $BE$  的中点，



$$\therefore BE = 2DF = 4$$

$$\because BE = EC$$

$$\therefore \angle EBC = \angle C$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABE + \angle CBE = 90^\circ, \quad \angle A + \angle C = 90^\circ$$

$$\therefore \angle A = \angle ABE$$

$$\therefore AE = BE = 4.$$

故选：C.

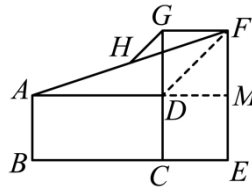
8. B

【分析】本题考查了矩形中的旋转问题，相似三角形的判定与性质，勾股定理，解题的关键是掌握相似三角形的判定与性质. 连接  $DF$ ，延长  $AD$  交  $EF$  于点  $M$ ，根据旋转的性质可得  $\angle AMF = 90^\circ$ ， $GF = AB = DM = EM = 2$ ， $EF = BC = 4$ ， $GF \parallel AM$ ，推出  $DG = 2$ ，

$\angle GFH = \angle DAF$ ，由勾股定理得  $DF = 2\sqrt{2}$ ，由点  $H$  是  $AF$  的中点，可得  $\frac{HF}{AF} = \frac{1}{2}$ ，可证明

$\triangle GFH \sim \triangle DAF$ ，根据相似三角形的性质即可求解.

【详解】如图，连接  $DF$ ，延长  $AD$  交  $EF$  于点  $M$ ，



$\because$  矩形  $ABCD$  绕点  $C$  顺时针方向旋转  $90^\circ$  得到矩形  $FGCE$ ， $AB = 2$ ，

$$BC = 4,$$

$$\therefore \angle AMF = 90^\circ, \quad GF = AB = DM = EM = 2, \quad EF = BC = 4, \quad GF \parallel AM,$$

$$\therefore DG = FM = EF - EM = 4 - 2 = 2, \quad \angle GFH = \angle DAF,$$

$$\text{在 Rt}\triangle GDF \text{ 中, 由勾股定理得: } DF = \sqrt{GF^2 + DG^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$\because$  点  $H$  是  $AF$  的中点,

$$\therefore HF = \frac{1}{2} AF, \quad \text{即 } \frac{HF}{AF} = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } \because \frac{GF}{AD} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \angle GFH = \angle DAF,$$

$$\therefore \triangle GFH \sim \triangle DAF,$$

$$\therefore \frac{GH}{DF} = \frac{GF}{AD},$$

$$\therefore \frac{GH}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore GH = \sqrt{2},$$

故选：B.

9. D

【分析】此题主要考查了二次函数的性质，正比例函数的性质，二次函数图象上点的坐标特征．首先确定A在第三象限，B、C在第一象限，利用正比例函数的性质以及二次函数的性质判断即可．

【详解】解： $\because k > 0$ ,

$\therefore$  正比例函数  $y = kx$  的图象经过一、三象限，

$\therefore$  点A，C是该函数图象与正比例函数  $y = kx$  ( $k$  为常数且  $k > 0$ ) 的图象的交点，且

$$x_1 < 0 < x_2 < x_3,$$

$\therefore$  A在第三象限，C在第一象限，

由二次函数  $y = -x^2 + c$  ( $c > 0$ ) 可知抛物线开口向下，对称轴为  $y$  轴，

$\therefore$  当  $x > 0$  时， $y$  随  $x$  的增大而减小，

$\therefore$  B在第一象限，

$$\therefore y_1 < 0, \quad 0 < y_3 < y_2,$$

$$\therefore y_1 < y_3 < y_2.$$

故选：D.

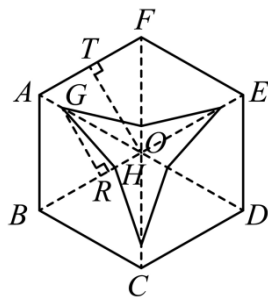
10. A

【分析】本题考查了折叠的性质，正多边形的性质，锐角三角函数等知识，解题的关键是灵活运用这些性质．过点G作  $GR \perp OB$  于点R，过点O作  $OT \perp AF$  于点T，根据题意得：每个被剪掉的小三角形（如  $\triangle OGH$ ）的面积占大三角形（如  $\triangle AOF$ ）面积的  $\frac{1}{6}$ ，设

$AB = AF = OB = OA = OF = 1$ ，可得  $OT = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $GR = \frac{\sqrt{3}}{2} OG$ ，由  $AG + BH = AB$ ，可推出

$OH = 1 - OG$ ，根据三角形的面积关系求出  $OG$ ，进而求出  $HR$ 、 $OR$ ，最后根据勾股定理求出  $GH$ ，即可求解．

【详解】解：如图，过点G作  $GR \perp OB$  于点R，过点O作  $OT \perp AF$  于点T，



由折叠的性质知，被剪掉的6个小三角形完全相同，

$\therefore$  剪完后所得阴影图形的面积为原正六边形面积的  $\frac{5}{6}$ ，

$\therefore$  每个被剪掉的小三角形（如  $\triangle OGH$ ）的面积占大三角形（如  $\triangle AOF$ ）面积的  $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$ ，

设  $AB = AF = OB = OA = OF = 1$ ，

则  $OT = OF \cdot \sin 60^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $GR = OG \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} OG$ ，

$\therefore AG + BH = AB$ ， $AB = OB = OA$ ，

$\therefore OH = AG = OA - OG = 1 - OG$ ，

$\therefore S_{\triangle AOF} = \frac{1}{2} AF \cdot OT = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，

$S_{\triangle GOH} = \frac{1}{2} GR \cdot OH = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} OG \times (1 - OG) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot OG \cdot (1 - OG)$ ，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (1 - OG) \cdot OG = \frac{1}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{4}$ ，

$\therefore OG = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$  或  $OG = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ （舍去），

$\therefore OH = 1 - OG = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$ ， $OR = \frac{1}{2} OG = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}$ ，

$\therefore HR = OR - OH = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$ ， $GR = \sqrt{3} OR = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}$ ，

由勾股定理得： $GH^2 = GR^2 + HR^2$ ，即  $GH^2 = \left( \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2 + \left( -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2 = \frac{1}{2}$ ，

$\therefore GH = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

$\therefore \frac{GH}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

故选：A.

11.  $(3+x)(3-x)$

【详解】由平方差公式，分解得： $9 - x^2 = (3+x)(3-x)$ .

故答案为 $(3+x)(3-x)$ .

12.  $\sqrt{2}$

【分析】此题是一道开放型的题目，答案不唯一，如 $\sqrt{2}$ ， $\sqrt{3}$ 等.

【详解】小于3的无理数有 $\sqrt{2}$ ,

故答案为： $\sqrt{2}$ .

【点睛】本题考查了无理数和估算无理数的大小的应用，题目比较好，难度不大.

13. 3

【分析】由红球的个数及任意摸出一个球是红球的概率求得袋中球的总个数，继而可得答案. 本题主要考查概率公式，解题的关键是掌握随机事件 $A$ 的概率 $P(A)=\frac{\text{事件}A\text{可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$ .

【详解】解：由题意知，袋中球的总个数为 $6 \div \frac{2}{3} = 9$ （个），

所以 $n = 9 - 6 = 3$ ,

故答案为：3.

14.  $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

【分析】本题考查了一次函数与二元一次方程组，根据一次函数的交点坐标即可确定以两个一次函数解析式组成的二元一次方程组的解.

【详解】解： $\because$ 一次函数 $y = 2x - 3$ 与 $y = kx$ （ $k$ 是常数， $k \neq 0$ ）的图象的交点坐标是 $(2, 1)$ ,

$\therefore$ 方程组 $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = kx \end{cases}$ 的解是 $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ .

故答案为： $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ .

15.  $3\sqrt{3} - 3$ 或 $2\sqrt{3}$

【分析】本题考查了圆的切线性质，勾股定理，三角函数等知识，解题的关键是分类讨论. 连接 $OA$ ，分为两种情况讨论：当 $AD = DC$ 时，当 $AC = DC = 3$ 时，结合圆的切线性质，三角函数等知识即可求解.

【详解】解：如图1，当 $AD = DC$ 时，连接 $OA$ ,

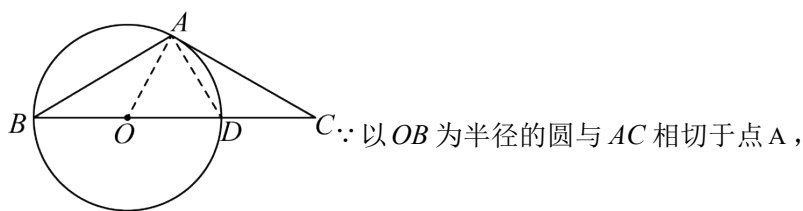


图1

$$\therefore \angle OAC = 90^\circ,$$

$$\because OC = 2OB, \quad OA = OB,$$

$$\therefore OC = 2OA, \quad \text{即} \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2},$$

$$\because \sin \angle C = \frac{OA}{OC} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle C = \angle DAC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle ADO = \angle OAD = 60^\circ,$$

$$\therefore OD = OA = AD,$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 在以 } OB \text{ 为半径的圆上},$$

$$\therefore BD \text{ 为圆 } O \text{ 的直径},$$

$$\therefore \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\because AB = AC = 3,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle C = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = \frac{AB}{\cos \angle ABD} = \frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3};$$

如图 2, 当  $AC = DC = 3$  时, 连接  $OA$ ,

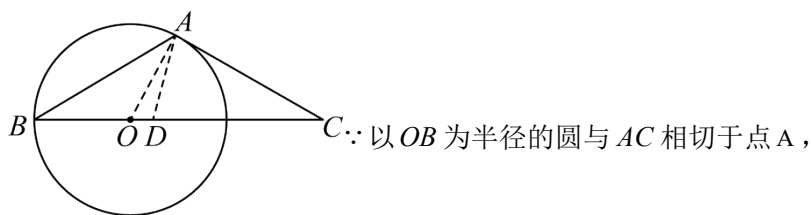


图2

$$\therefore \angle OAC = 90^\circ,$$

$$\because OC = 2OB, \quad OA = OB,$$

$$\therefore \text{设 } OA = OB = r, \quad \text{则 } OC = 2r,$$

在  $\triangle AOC$  中, 由勾股定理得:  $OC^2 - OA^2 = AC^2$ , 即  $(2r)^2 - r^2 = 3^2$ ,

解得：  $r = \sqrt{3}$ ，

$$\therefore OB = \sqrt{3}, \quad OC = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore BD = OB + OC - CD = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} - 3,$$

综上所述，  $BD$  的长为  $3\sqrt{3} - 3$  或  $2\sqrt{3}$ ，

故答案为：  $3\sqrt{3} - 3$  或  $2\sqrt{3}$ 。

16.  $\frac{100}{9}$

【分析】根据  $k$  的几何意义，得出  $mn = 25$ ， $x^2 = \frac{m}{n}$ ，结合点  $F$  在第三象限，故  $F\left(-\frac{5}{n}, -\frac{m}{5}\right)$ ，再设  $EF$  的解析式为  $y = kx + b$ ，运用待定系数法求  $y = \frac{n}{6m}x - \frac{n}{6}$ ，得出  $D\left(3m, \frac{n}{3}\right)$ ，根据平行四边形的性质以及相似三角形的性质，得出  $B\left(\frac{8}{3}m, 0\right)$ ，结合

$$S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BEF} + S_{\triangle BDE} = EB \times |y_D - y_F| \times \frac{1}{2}, \text{ 代入数值进行化简，即可作答。}$$

【详解】解：设  $A(m, n)$ ，

$\therefore$  反比例函数  $y = \frac{25}{x} (x > 0)$  的图象经过点  $A$ ，

$$\therefore mn = 25,$$

$\therefore$  连结  $DE$  并延长交  $AO$  的延长线于点  $F$ ，反比例函数  $y = \frac{1}{x} (x > 0)$  的图象经过点  $F$ ，

$$\text{设 } y_{AF} = k_0 x$$

$$\text{把 } A(m, n) \text{ 代入，解得 } k_0 = \frac{n}{m}$$

$$\therefore y_{AF} = \frac{n}{m} x,$$

$$\therefore \frac{n}{m} x = \frac{1}{x},$$

$$\text{则 } x^2 = \frac{m}{n},$$

$$\text{解得 } x = \pm \sqrt{\frac{m}{n}},$$

$\therefore$  点  $F$  在第三象限，

$$\therefore x = -\sqrt{\frac{m}{n}} = -\frac{\sqrt{mn}}{n} = -\frac{5}{n} \quad (\text{正值已舍去}),$$

$$\therefore F\left(-\frac{5}{n}, -\frac{m}{5}\right), \text{ 或 } \left(-\frac{m}{5}, -\frac{5}{n}\right),$$

$\because AE \perp x$  轴于点  $E$ ,

$\therefore$  点  $E$  的坐标为  $(m, 0)$ ,

设  $EF$  的解析式为  $y = kx + b$

把  $F\left(-\frac{5}{n}, -\frac{m}{5}\right)$  和  $(m, 0)$  代入  $y = kx + b$ ,

$$\text{得} \begin{cases} 0 = mk + b \\ -\frac{m}{5} = -\frac{5}{n}k + b \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = \frac{n}{6m} \\ b = -\frac{n}{6} \end{cases}$$

$\therefore EF$  的解析式为  $y = \frac{n}{6m}x - \frac{n}{6}$ ,

$\because$  点  $D$  在  $EF$  上, 且在  $y = \frac{25}{x} (x > 0)$  上

$$\therefore y = \frac{n}{6m}x - \frac{n}{6} = \frac{25}{x}$$

整理得  $x^2 - mx - 6m^2 = 0$

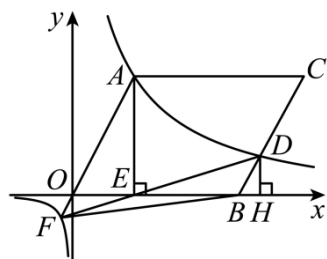
$$\text{即} (x - 3m)(x + 2m) = 0$$

$$\therefore x_1 = 3m, \quad x_2 = -2m$$

$\because$  点  $D$  在第一象限

$$\therefore D\left(3m, \frac{n}{3}\right)$$

如图: 过点  $D$  作  $DH \perp x$  轴



$\because$  四边形  $AOBC$  是平行四边形

$\therefore AO \parallel CB$

$\therefore \angle AOE = \angle DBH$

$\because \angle AEO = \angle DHB = 90^\circ$

$\therefore \triangle AEO \sim \triangle DHB$

$$\text{则 } \frac{AE}{DH} = \frac{OE}{BH},$$

$$\text{即 } \frac{\frac{n}{3}}{\frac{n}{3}} = \frac{m}{BH},$$

$$\therefore BH = \frac{m}{3},$$

$$\text{则 } OB = 3m - \frac{m}{3} = \frac{8}{3}m,$$

$$\therefore B\left(\frac{8}{3}m, 0\right),$$

$$\because S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BEF} + S_{\triangle BDE} = EB \times |y_D - y_F| \times \frac{1}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BDF} = \frac{5}{3}m \cdot \left| \frac{n}{3} + \frac{n}{5} \right| \times \frac{1}{2} = \frac{5}{3}m \cdot \frac{8}{15}n \times \frac{1}{2} = \frac{4}{9}mn = \frac{4}{9} \times 25 = \frac{100}{9}.$$

$$\text{故答案为: } \frac{100}{9}.$$

【点睛】本题考查了反比例函数的几何综合，一次函数的性质，相似三角形的判定与性质，平行四边形的性质，难度较大，综合性较强，正确掌握相关性质内容是解题的关键。

17. 一；过程见解析

【分析】本题考查了单项式乘以多项式、完全平方公式、整式的加减，熟练掌握整式的运算法则和完全平方公式是解题关键。

小红的解答从第一步计算完全平方公式开始出错，先计算单项式乘以多项式、完全平方公式，再去括号，计算整式的加减即可得。

【详解】解：明的解答从第一步开始出错，

正确解答过程如下：

$$\begin{aligned} & a(2+a) - (a-2)^2 \\ &= 2a + a^2 - (a^2 - 4a + 4) \\ &= 2a + a^2 - a^2 + 4a - 4 \\ &= 6a - 4. \end{aligned}$$

18. (1)见解析

(2)见解析

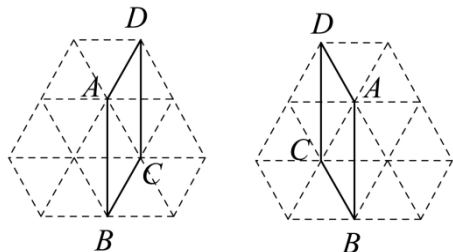
【分析】本题考查了作图的应用与设计，掌握等边三角形的性质、平行四边形的性质及菱形的性质是解题的关键。



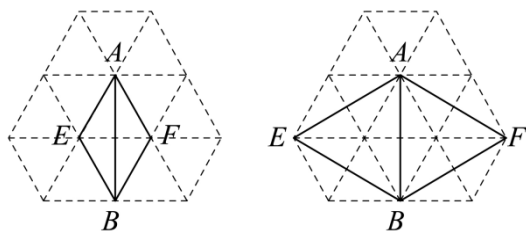
(1) 根据等边三角形的性质及平行四边形的性质作图；

(2) 根据等边三角形的性质及菱形的性质作图．

【详解】(1) 如图所示， $\square ABCD$  即为所求；



(2) 如图所示，菱形  $AEBF$  即为所求；



19. (1)  $A(4,3)$ ;  $y = \frac{12}{x}$

(2)  $(0,4)$  或  $(0,-2)$

【分析】本题考查了求反比例函数的解析式，反比例函数与一次函数的综合，几何图形面积问题，正确掌握各知识点是解题的关键．

(1) 把  $A(a,3)$  代入  $y = \frac{1}{2}x + 1$ ，求得  $a = 4$ ，所以  $A(4,3)$ ，把  $A(4,3)$  代入  $y = \frac{k}{x}$ ，可求得  $k$  的值，即得答案；

(2) 先求出点  $B$  的坐标，再利用三角形面积公式计算，即得答案．

【详解】(1) 把  $A(a,3)$  代入  $y = \frac{1}{2}x + 1$ ，

得  $3 = \frac{1}{2}a + 1$ ，解得  $a = 4$ ，

$\therefore A(4,3)$ ，

把  $A(4,3)$  代入  $y = \frac{k}{x}$ ，得  $k = 12$ ，

$\therefore$  反比例函数的表达式为  $y = \frac{12}{x}$ ．

(2) 当  $x = 0$  时， $y = 1$ ， $B(0,1)$ ，

$$\therefore S_{\triangle ABP} = \frac{BP \times 4}{2} = 6,$$

$$\therefore BP = 3,$$

$$\therefore P(0,4) \text{ 或 } (0,-2).$$

20. (1) 98.4%; (2) 估计 4 月份生产的产品中, 不合格的件数多, 理由见解析

【分析】(1) 根据题意列式计算即可;

(2) 分别求得 3 月份生产的产品中, 不合格的件数和 4 月份生产的产品中, 不合格的件数比较即可得到结论.

【详解】解: (1)  $(132+160+200) \div (8+132+160+200) \times 100\% = 98.4\%$ ,

答: 4 月份生产的该产品抽样检测的合格率为 98.4%;

(2) 估计 4 月份生产的产品中, 不合格的件数多,

理由: 3 月份生产的产品中, 不合格的件数为  $5000 \times 2\% = 100$ ,

4 月份生产的产品中, 不合格的件数为  $10000 \times (1 - 98.4\%) = 160$ ,

$$\therefore 100 < 160,$$

$\therefore$  估计 4 月份生产的产品中, 不合格的件数多.

【点睛】此题主要考查统计调查的应用, 解题的关键是熟知合格率的定义.

21. (1)  $DF = 1.5$

(2) 见解析

$$(3) ED = \frac{3}{4}$$

【分析】本题考查了正方形的性质, 相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 灵活运用这些性质解决问题是解题的关键.

(1) 通过证明  $\triangle DEF \sim \triangle CBF$ , 由相似三角形的性质可求解;

(2) 通过证明  $\triangle ABE \sim \triangle CFB$ , 可得  $\frac{AB}{CF} = \frac{AE}{BC}$ , 可得结论;

(3) 设  $EG = ED = x$ , 则  $AE = 3 - x$ ,  $BE = 3 + x$ , 由勾股定理可求解.

【详解】(1) 解:  $\because$  四边形  $ABCD$  是正方形,

$$\therefore AD \parallel BC, AB = AD = BC = CD = 3,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle CBF,$$

$$\therefore \frac{DE}{BC} = \frac{DF}{CF},$$

$$\therefore \frac{1}{3} = \frac{DF}{DF+3},$$

$$\therefore DF = 1.5;$$

(2) 证明:  $\because AB \parallel CD,$

$$\therefore \angle ABE = \angle F,$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle BCD = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle CFB,$$

$$\therefore \frac{AB}{CF} = \frac{AE}{BC},$$

$$\therefore AE \cdot CF = AB \cdot BC = 9;$$

(3) 解: 设  $EG = ED = x$ , 则  $AE = AD - DE = 3 - x$ ,  $BE = BG + GE = BC + GE = 3 + x$ ,

在  $\text{Rt}\triangle ABE$  中,  $AB^2 + AE^2 = BE^2$ ,

$$\therefore 1 + (3 - x)^2 = (3 + x)^2,$$

$$\therefore x = \frac{3}{4},$$

$$\therefore DE = \frac{3}{4}.$$

22. (1)  $BD = 20\text{cm}$ ,  $AC = 40\text{cm}$

$$(2) y = -\frac{5}{36}x^2 + 20$$

$$(3) 1200\text{cm}^2$$

【分析】本题考查了一元二次方程的应用, 求二次函数的解析式, 平行线分线段成比例, 正确掌握相关性质内容是解题的关键.

(1) 设  $BD$  的长为  $x\text{cm}$ , 则  $AC$  的长为  $(60-x)\text{cm}$ . 列式  $\frac{1}{2}x(60-x) = 400$ , 解出即可作答.

(2) 先得出  $AO = 15\text{cm}$ ,  $OC = 25\text{cm}$ , 结合“过距离  $A, B, D$  三点分别为  $5\text{cm}, 2\text{cm}, 2\text{cm}$  的  $E, F, G$  三点绘制抛物线”, 得出  $E(0, 20)$ ,  $F(-12, 0)$ ,  $G(12, 0)$ , 根据图象性质, 设  $y = ax^2 + 20$ , 再运用待定系数法求解, 即可作答.

(3) 先由平行线分线段成比例, 得出  $\frac{OB}{OF} = \frac{OC}{OH}$ , 代入数值进行计算, 得出  $OH = 30\text{cm}$ ,  $EH = 50\text{cm}$ , 即可作答.

【详解】(1) 解：设  $BD$  的长为  $x\text{cm}$ ，则  $AC$  的长为  $(60-x)\text{cm}$ 。

由题意，得  $\frac{1}{2}x(60-x)=400$ ，

解得  $x_1=20$ ， $x_2=40$ 。

$\because AC > BD$ ，

$\therefore BD=20\text{cm}$ ， $AC=40\text{cm}$ ；

(2) 解： $\because AO:OC=3:5$ ， $AC=40\text{cm}$ ，

$\therefore AO=15\text{cm}$ ， $OC=25\text{cm}$ ，

$\therefore A(0,15)$ ， $B(-10,0)$ ， $D(10,0)$ 。

$\because$ 过距离  $A$ ， $B$ ， $D$  三点分别为  $5\text{cm}$ ， $2\text{cm}$ ， $2\text{cm}$  的  $E$ ， $F$ ， $G$  三点绘制抛物线

$\therefore E(0,20)$ ， $F(-12,0)$ ， $G(12,0)$ ，

设所求抛物线表达式为  $y=ax^2+20$ 。

把  $F(-12,0)$  代入  $y=ax^2+20$ ，得  $0=144a+20$ ，

解得  $a=-\frac{5}{36}$ ，

$\therefore$  抛物线的函数表达式是  $y=-\frac{5}{36}x^2+20$ 。

(3) 解： $\because FH \parallel BC$ ，

$\therefore \frac{OB}{OF} = \frac{OC}{OH}$ ，

即  $\frac{10}{12} = \frac{25}{OH}$ ，

$\therefore OH=30\text{cm}$ ，

$\because AO:OC=3:5$

$\therefore EH=50\text{cm}$ ，

$\therefore$  所求长方形面积为  $EH \times FG = 50 \times 24 = 1200(\text{cm}^2)$ 。

23. (1) 2 个；理由见解析

(2)  $x_1=-2$ ， $x_2=6$

(3)  $-4 < 3a+b < -2$

【分析】考查了抛物线与  $x$  轴的交点，二次函数的性质等知识点，熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

(1) 根据  $\Delta = b^2 - 4a(-4a) = b^2 + 16a^2$ ，即可求解；

(2) 由对称轴为直线  $x = 2$  得  $b = -4a$ ，代入函数解析式结合得一元二次方程，求解即可；

(3) 根据函数图像的顶点在第二象限，且过点  $(1, 2)$  列出不等式组求解即可.

【详解】(1) 解：  $\Delta = b^2 - 4a(-4a) = b^2 + 16a^2$ ，

$\because a \neq 0$ ，

$\therefore \Delta > 0$ ，

故函数图像与  $x$  轴的交点个数为 2 个；

(2)  $\because$  函数图像的对称轴为直线  $x = 2$ ，

$\therefore -\frac{b}{2a} = 2$ ，则  $b = -4a$ ，

则函数表达式为  $y = ax^2 - 4ax - 4a$ ，

当  $m = 8a$  时，有  $ax^2 - 4ax - 4a = 8a$ ，

解得  $x = 6$  或  $x = -2$ ，

$\because x_1 < x_2$ ，

$\therefore x_1 = -2$ ， $x_2 = 6$ ；

(3) 将  $(1, 2)$  代入函数表达式得  $2 = a + b - 4a$ ，则  $b = 3a + 2$ ，

$\because a < b$ ，故  $a < 3a + 2$ ，解得  $a > -1$ ，

则函数表达式为  $y = ax^2 + (3a + 2)x - 4a$ ，

由 (1) 知，函数图像与  $x$  轴的交点个数为 2 个且图像的顶点在第二象限，则抛物线开口向下，即  $a < 0$ ，

则函数图像的对称轴  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3a+2}{2a} < 0$ ，

解得  $a < -\frac{2}{3}$ ，

$\therefore -1 < a < -\frac{2}{3}$ ，

$\because 3a + b = 3a + 3a + 2 = 6a + 2$ ，

$\therefore -4 < 6a + 2 < -2$ ，

即  $3a+b$  的取值范围为  $-4 < 3a+b < -2$ .

24. (1)  $180^\circ - \alpha$

(2) 见解析

(3) ① 5; ②  $90^\circ$

【分析】(1) 根据等弧所对圆周角相等得  $\angle ABC = \angle ADB = \alpha$ , 再由圆内接四边形的性质可得结论;

(2) 分别证明  $\angle AFB = \angle ADC$ ,  $\angle ABD = \angle ACD$ , 再根据 AAS 证明  $\triangle ABF \cong \triangle ACD$  即可得到结论;

(3) ① 连结  $BM$ ,  $MC$ ,  $\text{Rt}\triangle ABM \cong \text{Rt}\triangle ACM$  (HL), 得  $\angle DAC = \angle BAM = \angle CAM = \angle CBM$ ,

由  $\tan \angle DAC = \frac{2}{3}$  得  $\frac{MP}{BP} = \frac{2}{3}$ ,  $\frac{BP}{PA} = \frac{2}{3}$ , 求得  $BP = 6$ ,  $MP = 4$ ,  $AP = 9$ ,  $PF = MP = 4$ ,

$AF = 5$ . ② 连结  $BM$ ,  $CM$ , 过点  $F$  作  $FQ \parallel BM$  交  $MC$  于点  $Q$ , 证明

$\triangle ADG \sim \triangle BFP$ ,  $\triangle AFG \sim \triangle BMP$ , 得  $\frac{DG}{PF} = \frac{AG}{BP}$ ,  $\frac{AG}{BP} = \frac{DG}{MP}$ , 求得  $MP = 2PF$ , 证明

$\triangle BFP \sim \triangle CMP$ , 四边形  $BMOF$  是平行四边形, 可得四边形  $BMOF$  是菱形, 进一步可求出结论

【详解】(1) 解:  $\because \widehat{AB} = \widehat{AC}$ ,

$\therefore \angle ABC = \angle ADB = \alpha$ .

$\because$  四边形  $ABCD$  内接于  $\odot O$ ,

$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ ,

$\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \alpha$ .

(2) 证明:  $\because AF = AD$ ,

$\therefore \angle AFD = \angle ADB = \alpha$ ,

$\therefore \angle AFB = 180^\circ - \angle AFD = 180^\circ - \alpha$ ,

$\therefore \angle AFB = \angle ADC$ ,

$\because \angle ABD, \angle ACD$  是  $\widehat{AD}$  所对圆周角,

$\therefore \angle ABD = \angle ACD$ .

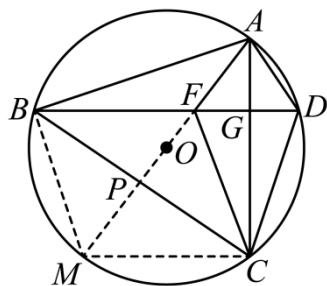
在  $\triangle ABF$  与  $\triangle ACD$  中,

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle ACD \\ \angle AFB = \angle ADC, \\ AF = AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACD \text{ (AAS)}$$

$$\therefore BF = CD .$$

(3) 解: ①连结  $BM$ ,  $MC$ ,



$\because AM$  是直径,

$$\therefore \angle ABM = 90^\circ, \angle ACM = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle ACD,$$

$$\therefore \angle BAM = \angle DAC, AB = AC,$$

又  $AM = AM$ ,

$$\therefore \text{Rt}_{\Delta}ABM \cong \text{Rt}_{\Delta}ACM \text{ (HL)},$$

$$\therefore BM = CM, \angle BAM = \angle CAM,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAM = \angle CAM = \angle CBM,$$

$$\because AB = AC,$$

$$\therefore AM \perp BC \text{ 且 } AM \text{ 平分 } BC,$$

$$\therefore \tan \angle DAC = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{MP}{BP} = \frac{2}{3}, \quad \frac{BP}{PA} = \frac{2}{3},$$

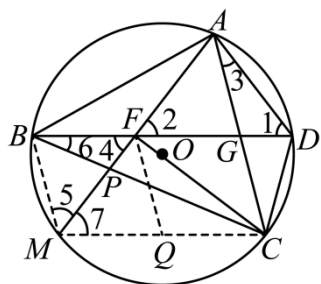
$$\therefore BP = 6, \quad MP = 4, \quad AP = 9,$$

$$\therefore PF = MP = 4,$$

$$\therefore AF = AP - PF = 9 - 4 = 5.$$

②猜想  $\angle AFC = 90^\circ$ .

连结  $BM, CM$ ，过点  $F$  作  $FQ \parallel BM$  交  $MC$  于点  $Q$ 。



$$\because AB = AC, AF = AD,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 4 = \angle 5 = \angle 7,$$

$$\because \angle 3, \angle 6 \text{ 是 } \widehat{CD} \text{ 所对的圆周角,}$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 6,$$

$$\therefore \triangle ADG \sim \triangle BFP, \triangle AFG \sim \triangle BMP,$$

$$\therefore \frac{DG}{PF} = \frac{AG}{BP}, \quad \frac{AG}{BP} = \frac{DG}{MP},$$

$$\therefore FG = 2GD,$$

$$\therefore MP = 2PF,$$

$$\because \angle 2 = \angle 7,$$

$$\therefore BD \parallel MC,$$

$$\therefore \triangle BFP \sim \triangle CMP, \text{ 四边形 } BMOF \text{ 是平行四边形.}$$

$$\therefore \frac{BF}{MC} = \frac{PF}{MP} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 5,$$

$$\therefore BM = BF,$$

$$\therefore \text{ 四边形 } BMOF \text{ 是菱形.}$$

$$\therefore BF = MO = FQ,$$

$$\therefore MO = FQ = QC,$$

$$\therefore \angle 7 = \angle MFO, \quad \angle MCF = \angle OFC,$$

$$\because \angle 7 + \angle MFP + \angle MCF + \angle PFC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle MFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFC = 90^\circ.$$

【点睛】本题主要考查了圆内接四边形，圆周角定理，全等三角形的判定与性质，平行四边形的判定与性质，菱形的判定与性质，相似三角形的判定与性质，锐角三角形函数的意义等知识，正确作辅助线是解答本题的关键



