又 $OB=OC=1$,

$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle BOC=-\frac{1}{2}$.

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}^2$

$=\cos\angle AOB-1=\cos 2\angle ACB-1$.

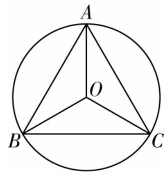
∵ $\triangle ABC$ 是锐角三角形,

$\therefore \begin{cases}0<\angle ACB<\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}<\angle ACB+\angle BAC<\pi\end{cases}\Rightarrow \frac{\pi}{6}<\angle ACB<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \frac{\pi}{3}<2\angle ACB<\pi$. 又 $y=\cos x$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ 上单调递减, $\therefore -1<\cos 2\angle ACB<\frac{1}{2}$,

即 $-2<\cos 2\angle ACB-1<-\frac{1}{2}$.

故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.



专题8　复数

考向26　复数的概念及其运算

刷考点

1. A 【解析】∵ $a-2i=(b-i)i=1+bi$,

$\therefore \begin{cases}a=1,\\ b=-2,\end{cases} \therefore z=1-2i$,

提示: 复数相等, 即实部相等且虚部相等

$\therefore \bar{z}=1+2i$, $\therefore \bar{z}$ 的虚部是 2. 故选 A.

2. D 【解析】由题意可得 $z=\frac{2+i}{m-i}=\frac{(m+i)(2+i)}{(m+i)(m-i)}=\frac{2m-1+(m+2)i}{m^2+1}$,

故 $\frac{2m-1}{m^2+1}=\frac{m+2}{m^2+1}$, 解得 $m=3$. 故选 D.

3. D 【解析】设复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$, 因为 $z\bar{z}-i\bar{z}=3-i$, 即 $a^2+b^2-ai-b=3-i$, 所以 $\begin{cases}a^2+b^2-b=3,\\ a=1,\end{cases}$ 解得 $b=-1$ 或 $b=2$, 所以 z 的虚部为 -1 或 2, 故选 D.

4. D 【解析】由题意知 $\frac{z-2}{1+i}=i$, 故 $z=i(1+i)+2=1+i$, 故 $\bar{z}=1-i$, 则复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $(1,-1)$, 该点在第四象限, 故选 D.

5. B 【解析】由复数 $z=1+2i$, 则 $\bar{z}=1-2i$, $\frac{\bar{z}-1+3i}{4i-1}=\frac{1-2i-1+3i}{4i-1}=\frac{i(4i+1)}{(4i-1)(4i+1)}=\frac{4-i}{17}$,

故复数 $\frac{\bar{z}-1+3i}{4i-1}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $\left(\frac{4}{17},-\frac{1}{17}\right)$. 故选 B.

6. ABD 【解析】对于 A, 复数 z_1 在复平面内对应的点的坐标为 $(-2,1)$, 该点位于第二象限, 故 A 正确;

对于 B, $\frac{1}{z_1}=\frac{1}{-2+i}=\frac{-2-i}{(-2+i)(-2-i)}=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$, 故 B 正确;

对于 C, 由题意可得 $z_2-1+2i=(x-1)+(y+2)i$, 因为 $|z_2-1+2i|=2$, 所以 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$, 故 C 错误;

对于 D, $z_1-1+2i=-3+3i$, 则 $|z_1-1+2i|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$, 所以 $|z_2-z_1|=|(z_2-1+2i)-(z_1-1+2i)|\leqslant|z_2-1+2i|+|z_1-1+2i|=2+3\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

7. 3π 【解析】不妨设复数 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$, 则 $|z-1+i|\leqslant\sqrt{3}$, 即 $|(x-1)+(y+1)i|\leqslant\sqrt{3}$, 则 $(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 3$, 其表示以 $(1,-1)$ 为圆心且半径 $r=\sqrt{3}$ 的圆的内部以及圆上的点, 则这些点构成的图形的面积为 $\pi r^2=3\pi$.

8. A 【解析】$(1+i)^2(1-2i)=2i(1-2i)=4+2i$.

9. A 【解析】已知 $i^{4n-3}+i^{4n-2}+i^{4n-1}+i^{4n}=0$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{2021}=505\times0+i=i$, 故选 A.

10. ABD 【解析】因为 $z_1=1-i$, 复数 z_2 是复数 z_1 的共轭复数, 所以 $z_2=1+i$, 所以 $z_1+z_2=1-i+1+i=2$, 故 A 正确; $z_1\cdot z_2=(1-i)\cdot(1+i)=1-i^2=2$, 故 B 正确; 由于虚数不能比较大小, 故 C 错误;

$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ 【解析】$\frac{2i-1}{2i+1}=\frac{(-1+2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3+4i}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$.

12. $7+\sqrt{5}i$ 【解析】$(\sqrt{5}-i)\cdot(\sqrt{5}+2i)=5+2\sqrt{5}i-\sqrt{5}i+2=7+\sqrt{5}i$.

13. D 【解析】依题意得, $\bar{z}=-\sqrt{2}i$, 故 $z\cdot\bar{z}=-2i^2=2$. 故选 D.

14. A 【解析】因为 $(2z+3)i=3z$, 所以 $2zi+3i=3z$, 即 $(3-2i)z=3i$,

所以 $z=\frac{3i}{3-2i}=\frac{3i(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-6+9i}{13}=-\frac{6}{13}+\frac{9}{13}i$, 所以 $\bar{z}=-\frac{6}{13}-\frac{9}{13}i$. 故选 A.

15. A 【解析】由题知, $e^{-\frac{\pi i}{3}}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 故其共轭复数为 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 故选 A.

16. D 【解析】依题意, $z=\frac{i}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}-2i}=\frac{i}{2-2i}=\frac{i(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$, 则 z 的共轭复数 $\bar{z}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$.

17. C 【解析】$z=\frac{3-i}{1+2i}=\frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3-2-i-6i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$,

故 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{7}{5}\right)^2}=\sqrt{2}$.

故选 C.

18. C 【解析】因为 $z=1-i$, 则 $z^2+\bar{z}=(1-i)^2+1+i=-2i+1+i=1-i$,

所以 $|z^2+\bar{z}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

故选 C.

19. C 【解析】∵ 复数 z_1,z_2 是关于 x 的方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个根, $\therefore z_1+z_2=2$, $\therefore z_2=2-z_1=2-(1+i)=1-i$, $\therefore |z_2|=|1-i|=\sqrt{2}$. 故选 C.

一题多解　由复数 z_1,z_2 是关于 x 的方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个根, 得 $z_1\cdot z_2=2$, $\therefore z_2=\frac{2}{z_1}=\frac{2}{1+i}$, $\therefore |z_2|=\left|\frac{2}{1+i}\right|=\frac{2}{|1+i|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. 故选 C.

20. 1　【解析】因为复数 z_1,z_2,z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$,

所以 $z_1\cdot\overline{z_1}=1,z_2\cdot\overline{z_2}=1,z_3\cdot\overline{z_3}=1$,

所以 $\left|\dfrac{\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|$

$=\left|\dfrac{\dfrac{z_1\cdot\overline{z_1}}{z_1}+\dfrac{z_2\cdot\overline{z_2}}{z_2}+\dfrac{z_3\cdot\overline{z_3}}{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|$

$=\left|\dfrac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=\dfrac{|\overline{z_1+z_2+z_3}|}{|z_1+z_2+z_3|}=1.$

21. 2　【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $\bar{z}=a-bi$.

对于甲:$|z+\bar{z}|=|2a|=2\sqrt{5}$,则 $a^2=5$;

对于乙:$|z-\bar{z}|=|2bi|=\sqrt{0^2+4b^2}=2|b|=2$,则 $b^2=1$;

对于丙:$z\cdot\bar{z}=a^2+b^2=6$;

对于丁:$\dfrac{z}{\bar{z}}=\dfrac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=\dfrac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}=\dfrac{z^2}{4}=\dfrac{a^2-b^2+2abi}{4}$,则 $a^2+b^2=4$.

综上,甲、乙、丙中任意两个都可推出第三个正确,甲与丁矛盾,丙与丁矛盾.因为四人的陈述中,有且只有两个人的陈述正确,所以乙和丁的陈述正确,即 $b^2=1,a^2+b^2=4$,故 $|\bar{z}|=\sqrt{a^2+b^2}=2$.

22. C　【解析】由题意得 $\bar{z}=2+i$,则代入 $\bar{z}-az+b=i$ 得 $2+i-a(2-i)+b=i$,

即 $(2-2a+b)+(1+a)i=i$,所以 $\begin{cases}2-2a+b=0,\\1+a=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\b=-2,\end{cases}$ 所以 $a-b=2$.

故选 C.

23. D　【解析】因为 $1+i$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+b=0$ 的一个根,$a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}$,

所以 $1-i$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+b=0$ 的另一个根,

敲黑板:若实系数的一元二次方程有两个虚数根,则两根互为共轭复数,在选填题中直接应用可快速解题

于是 $\begin{cases}1+i+1-i=a,\\(1+i)(1-i)=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=2,\end{cases}$

故 $a+b=4$. 故选 D.

24. A　【解析】因为 $z=3+2i-n(n\in\mathbf{R})$,$|z|=\sqrt{13}$,所以 $\sqrt{(3-n)^2+4}=\sqrt{13}$,即 $n-3=3$ 或 $n-3=-3$,解得 $n=0$ 或 6. 因此 n 的取值集合为 $\{0,6\}$. 故选 A.

25. C　【解析】依题意知,$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,由棣莫弗公式,得 $\omega^4=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^4=\cos\dfrac{8\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{8\pi}{3}=\cos\left(3\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(3\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,

所以 $\omega^4=\omega$. 易知 $-\omega=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\dfrac{1}{\omega}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\bar{\omega}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 都与 ω^4 不相等. 故选 C.

26. BCD　【解析】对于 A,当 $z_1=1+i,z_2=1-i$ 时,$|z_1+z_2|=2=|z_1-z_2|$,而 $z_1z_2=2\neq0$,A 错误;

对于 B,令 $z_1=r(\cos\theta+i\sin\theta),r\geqslant0,\theta\in\mathbf{R}$,则 $z_1^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$,于是 $|z_1^n|=r^n|\cos n\theta+i\sin n\theta|=r^n$,而 $|z_1|=r$,即有 $|z_1|^n=r^n$,因此 $|z_1^n|=|z_1|^n$ 成立,B 正确;

对于 C,设复数 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}),z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$,

因为 $z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$,

所以 $|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$,

又因为 $|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$,

所以 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$,C 正确;

对于 D,设复数 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}),z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$,

$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$,则 $\overline{z_1\cdot z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i$,

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$,因此 $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$,D 正确.

故选 BCD.

专题 9　数列

考向 27　数列的概念及其表示法

刷考点

1. D　【解析】当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2a_1-1$,

$\therefore a_1=1$.

当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$,则 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$,$\therefore a_n=2a_{n-1}$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$,公比 $q=2$ 的等比数列,

$\therefore\dfrac{a_7+a_9}{a_{10}+a_{12}}=\dfrac{a_7(1+q^2)}{a_{10}(1+q^2)}=\dfrac{1}{q^3}=\dfrac{1}{8}$. 故选 D.

2. A　【解析】由 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ 得 $a_1=S_1=2^{1+1}+1-2=3$,

又当 $n\geqslant2$ 时,$S_n-S_{n-1}=2^{n+1}+n-2-2^n-n+1+2=2^n+1$,

则 $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\2^n+1,n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$

又 $n=1$ 时,$a_1=2^1+1=3$,

则 $a_n=2^n+1$. 则 $\dfrac{2^n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$,

则 $T_m=\dfrac{1}{2^1+1}-\dfrac{1}{2^2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}-\dfrac{1}{2^3+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^m+1}-\dfrac{1}{2^{m+1}+1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^{m+1}+1}$.

令 $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^{m+1}+1}=\dfrac{170}{513}$,则 $2^{m+1}=512$,解得 $m=8$. 故选 A.

3. C　【解析】由题意可得 $\sqrt{S_{n+1}}=3\sqrt{S_n}$,则 $S_{n+1}=9S_n,S_1=a_1=1$,

所以数列 $\{S_n\}$ 是首项为 1,公比为 9 的等比数列,即 $S_n=9^{n-1}$.

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=9^{n-1}-9^{n-2}=8\times9^{n-2}$,且 $n=1$ 时,不满足上式,

故 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\8\times9^{n-2},n\geqslant2.\end{cases}$

故 $\sum\limits_{n=1}^{66}\sqrt{a_n}=1+2\sqrt{2}\times(1+3+9+\cdots+3^{64})=1+2\sqrt{2}\times\dfrac{1-3^{65}}{1-3}=\sqrt{2}(3^{65}-1)+1$. 故选 C.

易错警示　本题易忽视公式 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 的适用条件 $n\geqslant2$ 而导致错误. 利用此公式求得 a_n 后,一定要验证 $n=1$ 时是否满足所求出的 a_n,若不满足,则要用分段形式来表示.

4. C

思路导引　根据 a_n 与 S_n 的关系,先得到数列 a_n 的递推关系式,再根据累加法求 a_8 的值.

【解析】由 $S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+\log_2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,得 $S_{n+1}-S_n=S_n-S_{n-1}+\log_2\dfrac{n+1}{n}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $a_{n+1}-a_n=\log_2(n+1)-\log_2n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $a_3-a_2=\log_23-\log_22,a_4-a_3=\log_24-\log_23,\cdots,a_8-a_7=\log_28-\log_27$,

各式相加得 $a_8-a_2=\log_28-\log_22$,则 $a_8=\log_28-\log_22+a_2=3-1+2=4$.

故选 C.

5. A

思路导引　由递推关系得 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项 $a_1=1$,公差为 3 的等差数列,再利用分组求和以及等差数列的求和公式求解即可.