20. 1 【解析】因为复数 z_1,z_2,z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$,

所以 $z_1\cdot\overline{z_1}=1,z_2\cdot\overline{z_2}=1,z_3\cdot\overline{z_3}=1$,

所以 $\left|\dfrac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=\left|\dfrac{\frac{z_1\cdot\overline{z_1}}{z_1}+\frac{z_2\cdot\overline{z_2}}{z_2}+\frac{z_3\cdot\overline{z_3}}{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=\left|\dfrac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=\dfrac{|\overline{z_1+z_2+z_3}|}{|z_1+z_2+z_3|}=1.$

21. 2 【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $\overline{z}=a-bi$.

对于甲:$|z+\overline{z}|=|2a|=2\sqrt{5}$,则 $a^2=5$;

对于乙:$|z-\overline{z}|=|2bi|=\sqrt{0^2+4b^2}=2|b|=2$,则 $b^2=1$;

对于丙:$z\cdot\overline{z}=a^2+b^2=6$;

对于丁:$\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}=\dfrac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}=\dfrac{z^2}{4}=\dfrac{a^2-b^2+2abi}{4}$,则 $a^2+b^2=4$.

综上,甲、乙、丙中任意两个都可推出第三个正确,甲与丁矛盾,丙与丁矛盾.因为四人的陈述中,有且只有两个人的陈述正确,所以乙和丁的陈述正确,即 $b^2=1,a^2+b^2=4$,故 $|\overline{z}|=\sqrt{a^2+b^2}=2$.

22. C 【解析】由题意得 $\overline{z}=2+i$,则代入 $\overline{z}-az+b=i$ 得 $2+i-a(2-i)+b=i$,

即 $(2-2a+b)+(1+a)i=i$,所以 $\begin{cases}2-2a+b=0,\\1+a=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=0,\\b=-2,\end{cases}$ 所以 $a-b=2$.

故选 C.

23. D 【解析】因为 $1+i$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+b=0$ 的一个根,$a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R}$,

所以 $1-i$ 是关于 x 的方程 $x^2-ax+b=0$ 的另一个根,

敲黑板:若实系数的一元二次方程有两个虚数根,则两根互为共轭复数,在选填题中直接应用可快速解题

于是 $\begin{cases}1+i+1-i=a,\\(1+i)(1-i)=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=2,\end{cases}$

故 $a+b=4$.故选 D.

24. A 【解析】因为 $z=3+2i-n(n\in\mathbf{R})$,$|z|=\sqrt{13}$,所以 $\sqrt{(3-n)^2+4}=\sqrt{13}$,即 $n-3=3$ 或 $n-3=-3$,解得 $n=0$ 或 6.因此 n 的取值集合为 $\{0,6\}$.故选 A.

25. C 【解析】依题意知,$\omega=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,由棣莫弗公式,得 $\omega^4=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^4=\cos\dfrac{8\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{8\pi}{3}=\cos\left(3\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(3\pi-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\cos\dfrac{\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,

所以 $\omega^4=\omega$.易知 $-\omega=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\dfrac{1}{\omega}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\overline{\omega}=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ 都与 ω^4 不相等.故选 C.

26. BCD 【解析】对于 A,当 $z_1=1+i,z_2=1-i$ 时,$|z_1+z_2|=2=|z_1-z_2|$,而 $z_1z_2=2\neq0$,A 错误;

对于 B,令 $z_1=r(\cos\theta+i\sin\theta),r\geqslant0,\theta\in\mathbf{R}$,则 $z_1^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$,于是 $|z_1^n|=r^n|\cos n\theta+i\sin n\theta|=r^n$,而 $|z_1|=r$,即有 $|z_1|^n=r^n$,因此 $|z_1^n|=|z_1|^n$ 成立,B 正确;

对于 C,设复数 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}),z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$,

因为 $z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$,

所以 $|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$,

又因为 $|z_1|\cdot|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$,

所以 $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$,C 正确;

对于 D,设复数 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R}),z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$,

$z_1\cdot z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$,则 $\overline{z_1\cdot z_2}=(ac-bd)-(ad+bc)i$,

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=(a-bi)(c-di)=(ac-bd)-(ad+bc)i$,因此 $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$,D 正确.

故选 BCD.

专题 9　数列

考向 27　数列的概念及其表示法

刷考点

1. D 【解析】当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=2a_1-1$,

$\therefore a_1=1$.

当 $n\geqslant2$ 时,$S_{n-1}=2a_{n-1}-1$,则 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$,$\therefore a_n=2a_{n-1}$,

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=1$,公比 $q=2$ 的等比数列,

$\therefore \dfrac{a_7+a_9}{a_{10}+a_{12}}=\dfrac{a_7(1+q^2)}{a_{10}(1+q^2)}=\dfrac{1}{q^3}=\dfrac{1}{8}$.故选 D.

2. A 【解析】由 $a_n=\begin{cases}S_1,n=1,\\S_n-S_{n-1},n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*,\end{cases}$ 得 $a_1=S_1=2^{1+1}+1-2=3$,

又当 $n\geqslant2$ 时,$S_n-S_{n-1}=2^{n+1}+n-2-2^n-n+1+2=2^n+1$,

则 $a_n=\begin{cases}3,n=1,\\2^n+1,n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$

又 $n=1$ 时,$a_1=2^1+1=3$,

则 $a_n=2^n+1$.则 $\dfrac{2^n}{a_na_{n+1}}=\dfrac{2^n}{(2^n+1)(2^{n+1}+1)}=\dfrac{1}{2^n+1}-\dfrac{1}{2^{n+1}+1}$,

则 $T_m=\dfrac{1}{2^1+1}-\dfrac{1}{2^2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}-\dfrac{1}{2^3+1}+\cdots+\dfrac{1}{2^m+1}-\dfrac{1}{2^{m+1}+1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^{m+1}+1}$.

令 $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2^{m+1}+1}=\dfrac{170}{513}$,则 $2^{m+1}=512$,解得 $m=8$.故选 A.

3. C 【解析】由题意可得 $\sqrt{S_{n+1}}=3\sqrt{S_n}$,则 $S_{n+1}=9S_n,S_1=a_1=1$,

所以数列 $\{S_n\}$ 是首项为 1,公比为 9 的等比数列,即 $S_n=9^{n-1}$.

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=9^{n-1}-9^{n-2}=8\times9^{n-2}$,且 $n=1$ 时,不满足上式,

故 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\8\times9^{n-2},n\geqslant2.\end{cases}$

故 $\sum\limits_{n=1}^{66}\sqrt{a_n}=1+2\sqrt{2}\times(1+3+9+\cdots+3^{64})=1+2\sqrt{2}\times\dfrac{1-3^{65}}{1-3}=\sqrt{2}(3^{65}-1)+1$.故选 C.

易错警示 本题易忽视公式 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 的适用条件 $n\geqslant2$ 而导致错误.利用此公式求得 a_n 后,一定要验证 $n=1$ 时是否满足所求出的 a_n,若不满足,则要用分段形式来表示.

4. C

思路导引 根据 a_n 与 S_n 的关系,先得到数列 a_n 的递推关系式,再根据累加法求 a_8 的值.

【解析】由 $S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+\log_2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,得 $S_{n+1}-S_n=S_n-S_{n-1}+\log_2\dfrac{n+1}{n}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $a_{n+1}-a_n=\log_2(n+1)-\log_2 n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $a_3-a_2=\log_2 3-\log_2 2,a_4-a_3=\log_2 4-\log_2 3,\cdots,\ a_8-a_7=\log_2 8-\log_2 7$,

各式相加得 $a_8-a_2=\log_2 8-\log_2 2$,则 $a_8=\log_2 8-\log_2 2+a_2=3-1+2=4$.

故选 C.

5. A

思路导引 由递推关系得 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项 $a_1=1$,公差为 3 的等差数列,再利用分组求和以及等差数列的求和公式求解即可.

【解析】若 n 为奇数,则 $n+1$ 是偶数,$n+2$ 是奇数,则 $a_{n+1}=a_n+1$, ①

$a_{n+2}=a_{n+1}+2$, ②

①+②得 $a_{n+2}=a_n+3$,

所以 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项 $a_1=1$,公差为 3 的等差数列.

所以 $S_{20}=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20})$

$=(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})+(a_1+1+a_3+1+a_5+1+\cdots+a_{19}+1)$

$=2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19})+10$

$=2\left(10\times1+\frac{10\times9}{2}\times3\right)+10=300$. 故选 A.

6. A 【解析】∵ $2a_{n+1}=a_n+3b_n+4$, $2b_{n+1}=3a_n+b_n-4$, ∴ $2(a_{n+1}+b_{n+1})=4(a_n+b_n)$,

即 $a_{n+1}+b_{n+1}=2(a_n+b_n)$, 又 $a_1+b_1=2\neq0$,

∴ $\{a_n+b_n\}$ 是以 2 为首项,2 为公比的等比数列,∴ $a_n+b_n=2^n$,

又∵ $2b_{n+1}=3a_n+b_n-4$,

∴ $b_{n+1}=\frac{3}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n-2$,

∴ $b_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n-2=2^{n-1}-2$,

∴ $b_{2\,025}-a_{2\,024}=2^{2\,023}-2$.

故选 A.

7. B 【解析】由 $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,得 $a_n=a_{n+2}-a_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以 $a_1=a_3-a_2$,

$a_2=a_4-a_3$,

$a_3=a_5-a_4$,

……

$a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$,

将这 n 个式子左右两边分别相加可得前 n 项和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=a_{n+2}-a_2=a_{n+2}-1$,

所以 $S_n+1=a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $a_m=2(a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{174})+1=(a_3+a_3+a_6+a_6+a_9+a_9+\cdots+a_{174}+a_{174})+1=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+\cdots+a_{172}+a_{173}+a_{174}+1=S_{174}+1=a_{176}$,即 $m=176$.

8. 759 【解析】因为 $a_n+a_{n+1}=n^2\cdot\cos\frac{n\pi}{2}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$, $a_1=1$,

所以当 $n=2$ 时, $a_2+a_3=2^2\cdot\cos\pi=-2^2$,

当 $n=4$ 时, $a_4+a_5=4^2\cdot\cos2\pi=4^2$,

当 $n=6$ 时, $a_6+a_7=6^2\cdot\cos3\pi=-6^2$,

……

当 $n=36$ 时, $a_{36}+a_{37}=36^2\cdot\cos18\pi=36^2$,

当 $n=38$ 时, $a_{38}+a_{39}=38^2\cos19\pi=-38^2$,

所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{39}$

$=1+(-2^2+4^2-6^2+8^2-10^2+12^2+\cdots-34^2+36^2)-38^2$

$=1+2(2+4+6+8+10+12+\cdots+34+36)-38^2$

$=1+2\times\frac{(2+36)\times18}{2}-38^2=-759$.

又 $a_n+a_{n+1}=n^2\cdot\cos\frac{n\pi}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$,

所以当 $n=1$ 时, $a_1+a_2=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{2}=0$,

当 $n=3$ 时, $a_3+a_4=3^2\cdot\cos\frac{3\pi}{2}=0$,

当 $n=5$ 时, $a_5+a_6=5^2\cdot\cos\frac{5\pi}{2}=0$,

……

当 $n=37$ 时, $a_{37}+a_{38}=37^2\cdot\cos\frac{37\pi}{2}=0$,

当 $n=39$ 时, $a_{39}+a_{40}=39^2\cdot\cos\frac{39\pi}{2}=0$,

所以 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{39}+a_{40}=0$.

所以 $a_{40}=759$.

9. C 【解析】依题意可知 $a>0$ 且 $a\neq1$,由于 $\{a_n\}$ 为递减数列,

所以 $\begin{cases}1-3a<0,\\0<a<1,\\a_5>a_6,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{1}{3}<a<1,\\5(1-3a)+3>a,\end{cases}$

敲黑板: 分析分段数列的单调性时,需要注意连接处的大小关系

解得 $\frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}$. 故选 C.

10. C 【解析】任意 $n\in\{1,2,3\}$ 都有 $a_n>a_{n+1}$,且对任意 $n\in\{n|n\geqslant7,n\in\mathbf{N}\}$ 都有 $a_n<a_{n+1}$,

所以 $\lambda>0$,

点悟: 数列通项公式符合二次函数形式,且单调性是先减后增,故二次项系数大于 0

因为对任意 $n\in\{1,2,3\}$ 都有 $a_n>a_{n+1}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 在 $n\leqslant3$ 时是递减数列,则 $a_1>a_2>a_3>a_4$, 即 $\lambda-1>4\lambda-2>9\lambda-3>16\lambda-4$,解得 $\lambda<\frac{1}{7}$.

因为对任意 $n\in\{n|n\geqslant7,n\in\mathbf{N}\}$ 都有 $a_n<a_{n+1}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 在 $n\geqslant7$ 时是递增数列,即当 $n\geqslant7$ 时, $\lambda n^2-n<\lambda(n+1)^2-n-1$ 恒成立,则 $\lambda>\frac{1}{2n+1}$. 因为 $n\geqslant7$,所以 $\lambda>\frac{1}{15}$.

综上可得 $\frac{1}{15}<\lambda<\frac{1}{7}$,所以实数 λ 的取值范围是 $\left(\frac{1}{15},\frac{1}{7}\right)$. 故选 C.

11. ACD 【解析】对于 A,由已知得 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n+1}}+1$,又对于任意的 $n\in\mathbf{N}^*$,都有 $a_n>0$,则 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_{n+1}}+1>1$,即对任意的 $n\geqslant2$,都有 $a_n>1$,故 A 正确.

对于 B,由 $a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n$,若 $\{a_n\}$ 为常数列且 $a_n>0$,则 $a_n=2$,满足 $a_1>0$,故 B 错误.

对于 C,由 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=a_{n+1}-1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$,当 $1<a_{n+1}<2$ 时, $0<\frac{a_n}{a_{n+1}}<1$,即 $a_n<a_{n+1}$,此时 $a_1=a_2(a_2-1)\in(0,2)$, $a_1-a_2=a_2^2-2a_2<0$,故 $a_1<a_2$,则数列 $\{a_n\}$ 为递增数列;当 $a_{n+1}>2$ 时, $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$,此时 $a_1=a_2\cdot(a_2-1)>a_2>2$,则数列 $\{a_n\}$ 为递减数列. 所以当 $0<a_1<2$ 时,数列 $\{a_n\}$ 为递增数列,故 C 正确.

对于 D,由 C 的分析知,当 $a_1>2$ 时, $a_{n+1}>2$ 且数列 $\{a_n\}$ 为递减数列,即当 $n\geqslant2$ 时, $2<a_n<a_1$,故 D 正确.

12. $\left(-\infty,\frac{18}{5}\right)$ 【解析】由 $2^na_n(4-\lambda)>(a_n-1)^2$,得 $2^n(2n-1)(4-\lambda)>(2n-2)^2$,

所以 $4-\lambda>\frac{(n-1)^2}{2^{n-2}(2n-1)}$.

设 $b_n=\frac{(n-1)^2}{(2n-1)\cdot2^{n-2}}(n\in\mathbf{N}^*)$,

则 $b_{n+1}-b_n=\frac{n^2}{(2n+1)\cdot2^{n-1}}-\frac{(n-1)^2}{(2n-1)\cdot2^{n-2}}=\frac{-2n^3+5n^2-2}{(4n^2-1)\cdot2^{n-1}}$.

设 $f(x)=-2x^3+5x^2-2(x\geqslant1)$,

则 $f'(x)=-6x^2+10x=-2x(3x-5)$,

令 $f'(x)>0$,解得 $1\leqslant x<\frac{5}{3}$,即 $f(x)$ 在 $\left[1,\frac{5}{3}\right)$ 上单调递增,

令 $f'(x)<0$,解得 $x>\frac{5}{3}$,即 $f(x)$ 在 $\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$ 上单调递减,

又 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=-11$,

所以当 $x\geqslant3$ 时, $f(x)\leqslant f(3)<0$,

即 $b_{n+1}-b_n<0$,

所以 $b_3>b_4>b_5>\cdots$,

当 $x=1,2$ 时, $f(x)>0$,即 $b_{n+1}-b_n>0$,所以 $b_1<b_2<b_3$.

综上, $b_n\leqslant b_3=\frac{2}{5}$,所以 $4-\lambda>\frac{2}{5}$,即 $\lambda<\frac{18}{5}$,所以 λ 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{18}{5}\right)$.

13. C 【解析】∵数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积 $T_n=1-\frac{2}{15}n$,

∴ 当 $n=1$ 时, $a_1=\frac{13}{15}$,

当 $n\geqslant2$ 时, $T_{n-1}=1-\frac{2}{15}(n-1)$,

$a_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{1-\frac{2}{15}n}{1-\frac{2}{15}(n-1)}=\frac{2n-15}{2n-17}=1+\frac{2}{2n-17}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,

经检验, $n=1$ 时也满足上式,

∴ $a_n=1+\frac{2}{2n-17}(n\in\mathbf{N}^*)$.

当 $n\leqslant8$ 时,数列 $\{a_n\}$ 单调递减,且 $a_n<1$,

当 $n\geqslant9$ 时,数列 $\{a_n\}$ 单调递减,且 $a_n>1$,

∴ a_n 的最大值为 $a_9=3$,最小值为 $a_8=$

-1,

$\therefore a_n$ 的最大值与最小值之和为2.

14. BCD 【解析】设第 n 项为 $\{a_n\}$ 的最大项，则$\begin{cases}a_n\geqslant a_{n-1},\\a_n\geqslant a_{n+1},\end{cases}$

即$\begin{cases}(n+2)\cdot\left(\dfrac{6}{7}\right)^n\geqslant(n+1)\cdot\left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1},\\(n+2)\cdot\left(\dfrac{6}{7}\right)^n\geqslant(n+3)\cdot\left(\dfrac{6}{7}\right)^{n+1},\end{cases}$

解得 $4\leqslant n\leqslant5$.

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n=4$ 或 $n=5$，故数列 $\{a_n\}$ 中 a_4 与 a_5 均为最大项，且 $a_4=a_5=\dfrac{6^5}{7^4}$，

由上述知当 $n\geqslant5$ 时，$a_n\geqslant a_{n+1}$，数列 $\{a_n\}$ 递减，故 B，C，D 正确；

当 n 趋向正无穷大时，$a_n=(n+2)\cdot\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$ 无限趋向于0且大于0，

又 $a_1=\dfrac{18}{7}>0$，

所以 a_1 不是数列 $\{a_n\}$ 的最小项，且数列 $\{a_n\}$ 无最小项，故 A 错误. 故选 BCD.

易错警示 在利用函数的单调性研究数列中的最大（小）项问题时，需要注意数列通项公式中的 $n\in\mathbf{N}^*$，可能存在两项同时为最大（小）项的情况.

15. C 【解析】因为 $b_n=a_na_{n+2}a_{n+4}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

令 $a_n=100-3n>0$，得 $n<\dfrac{100}{3}$，所以当 $n\leqslant33$ 时，$a_n>0$，当 $n\geqslant34$ 时，$a_n<0$，

则 $b_{29}=a_{29}\cdot a_{31}\cdot a_{33}>0$，$b_{30}=a_{30}\cdot a_{32}\cdot a_{34}<0$，$b_{31}=a_{31}\cdot a_{33}\cdot a_{35}<0$，$b_{32}=a_{32}\cdot a_{34}\cdot a_{36}>0$，$b_{33}=a_{33}\cdot a_{35}\cdot a_{37}>0$，$b_{34}=a_{34}\cdot a_{36}\cdot a_{38}<0$，故当 $n\leqslant29$ 时，$b_n>0$，当 $n\geqslant34$ 时，$b_n<0$，所以只需要考虑 S_{29}，S_{32}，S_{33}，S_{34} 的大小即可.

$S_{32}-S_{29}=b_{30}+b_{31}+b_{32}=10\times4\times(-2)+7\times1\times(-5)+4\times(-2)\times(-8)=-51<0$，则 $S_{32}<S_{29}$，

$S_{33}-S_{29}=b_{30}+b_{31}+b_{32}+b_{33}=-51+1\times(-5)\times(-11)=4>0$，则 $S_{29}<S_{33}$，

$S_{34}-S_{29}=b_{30}+b_{31}+b_{32}+b_{33}+b_{34}=4+(-2)\times(-8)\times(-14)<0$，则 $S_{34}<S_{29}$，

所以当 $n=33$ 时，S_n 取最大值.

16. C 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

当 $q>0$ 时，$a_n>0$，$\{S_n\}$ 存在最小项，$S_2>0$；

当 $-1<q<0$ 时，$a_{2n}<0$，$a_{2n-1}>0$，$a_{2n}+a_{2n-1}>0$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $\{S_n\}$ 存在最小项 S_2，$S_2>0$；

当 $q=-1$ 时，$S_{2n}=0$，$S_{2n-1}=a_1>0$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以 $\{S_n\}$ 存在最小项，$S_2=0$；

当 $q<-1$ 时，$S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，所以 $\{S_n\}$ 不存在最小项，$S_2<0$.

所以当 $\{S_n\}$ 存在最小项时，$S_2\geqslant0$；当 $S_2\geqslant0$ 时，$\{S_n\}$ 存在最小项.

所以"$\{S_n\}$ 存在最小项"是"$S_2\geqslant0$"的充分必要条件.

故选 C.

17. A 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}a_n=a_n-1$，

所以 $a_{n+1}=1-\dfrac{1}{a_n}$，所以 $a_2=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

$a_3=1-2=-1$，$a_4=1-(-1)=2$，$a_5=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\{a_n\}$ 是周期为3的周期数列，又 $32=3\times10+2$，所以 $a_{32}=a_2=\dfrac{1}{2}$. 故选 A.

18. B

思路导引 首先结合 $f(x)=x^3+x$ 的奇偶性和单调性，由 $f(a_1+a_2)+f(a_3+a_4)=0$ 可得 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$，又 $a_{n+4}=a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，知数列 $\{a_n\}$ 是以4为周期的周期数列，故求出 $\sum\limits_{i=1}^{2\,025}a_i=1$.

【解析】由 $f(x)=x^3+x$，可得 $f(-x)=-x^3-x$，则 $f(x)+f(-x)=0$，即 $f(x)$ 是奇函数.

又 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，

且 $f(a_1+a_2)+f(a_3+a_4)=0$，所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=0$.

由 $a_{n+4}=a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，可得数列 $\{a_n\}$ 是周期为4的周期函数，

所以 $a_1+a_2+a_3+a_4=a_5+a_6+a_7+a_8=a_9+a_{10}+a_{11}+a_{12}=\cdots=a_{4n-3}+a_{4n-2}+a_{4n-1}+a_{4n}=0$，

所以 $\sum\limits_{i=1}^{2\,025}a_i=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)+\cdots+(a_{2\,021}+a_{2\,022}+a_{2\,023}+a_{2\,024})+a_{2\,025}=a_{2\,025}=a_1=1$. 故选 B.

19. B 【解析】由题知 $a_na_{n+3}-a_{n+1}a_{n+2}=c$，

又 $a_{n+3}=a_n$，所以 $a_n^2-a_{n+1}a_{n+2}=c$，$\{a_n\}$ 是周期为3的周期数列.

对于 A，若 $a_1=1$，$c=1$，则 $a_2a_3=0$，则 $a_2=0$ 或 $a_3=0$，

若 $a_2=0$，则 $a_2^2-a_3a_4=-a_3a_1=1$，得 $a_3=-1$，又 $a_3^2-a_4a_5=(-1)^2-a_1a_2=1$，

由周期性可知，当 $a_1=1$，$a_2=0$，$a_3=-1$ 时，满足 $\begin{vmatrix}a_n&a_{n+1}\\a_{n+2}&a_{n+3}\end{vmatrix}=1$，A 不满足题意；

对于 B，若 $a_1=2$，$c=2$，则 $4-a_2a_3=2$，即 $a_2a_3=2$，

又$\begin{cases}a_2^2-a_3a_4=a_2^2-2a_3=2,\\a_3^2-a_4a_5=a_3^2-2a_2=2,\end{cases}$消元整理得 $a_3^2+2a_3+2=0$，即 $(a_3+1)^2=-1$，无实数解，故 B 满足题意；

对于 C，若 $a_1=1$，$c=0$，

则$\begin{cases}a_1^2-a_2a_3=1-a_2a_3=0,\\a_2^2-a_3a_4=a_2^2-a_3=0,\end{cases}$

解得 $a_2=a_3=1$，显然 $\begin{vmatrix}a_n&a_{n+1}\\a_{n+2}&a_{n+3}\end{vmatrix}=0$ 恒成立，C 不满足题意；

对于 D，若 $a_1=2$，$c=0$，

则$\begin{cases}a_1^2-a_2a_3=4-a_2a_3=0,\\a_2^2-a_3a_4=a_2^2-2a_3=0,\end{cases}$

解得 $a_2=a_3=2$，显然 $\begin{vmatrix}a_n&a_{n+1}\\a_{n+2}&a_{n+3}\end{vmatrix}=0$ 恒成立，D 不满足题意.

故选 B.

关键点拨 本题的解题关键是根据定义列方程组，判断 a_2，a_3 是否有实数解，当有解时，结合周期性即可判断.

20. 99 $\quad \dfrac{11}{3}-\dfrac{1}{3^{k-1}}+6k$ 【解析】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+1,a_n<3,\\\dfrac{a_n}{3},a_n\geqslant3,\end{cases}$ 记 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，

若 $a_1=1$，$a_2=a_1+1=1+1=2$，$a_3=a_2+1=2+1=3$，则 $a_4=\dfrac{a_3}{3}=1$，$a_5=a_4+1=1+1=2$，$a_6=a_5+1=2+1=3$，

可以发现数列 $\{a_n\}$ 是以3为周期的周期数列，一个周期内的项的和为 $1+2+3=6$，

所以 $S_{50}=16(a_1+a_2+a_3)+a_1+a_2=16\times6+1+2=99$.

当 $0<a_1<1$ 时，$a_2=a_1+1$，$a_3=a_1+2$，$a_4=a_1+3>3$，$a_5=\dfrac{a_4}{3}=\dfrac{a_1}{3}+1<3$，$a_6=a_5+1=\dfrac{a_1}{3}+2<3$，$a_7=\dfrac{a_1}{3}+3>3$，$\cdots$，$a_{3k-1}=\dfrac{a_1}{3^{k-1}}+1$，

$a_{3k}=\dfrac{a_1}{3^{k-1}}+2$，$a_{3k+1}=\dfrac{a_1}{3^{k-1}}+3$，$\cdots$，

又因为 $0<a_1<1$，可得 $0<\dfrac{a_1}{3^{k-1}}<1$，则以三项为一组循环，且 $a_{3k-1}+a_{3k}+a_{3k+1}=3\times\dfrac{a_1}{3^{k-1}}+1+2+3=\dfrac{a_1}{3^{k-2}}+6$，

则 $S_{3k+1}=a_1+(a_2+a_3+a_4)+\cdots+(a_{3k-1}+a_{3k}+a_{3k+1})$

$=a_1+(3a_1+6)+(a_1+6)+\cdots+\left(\dfrac{a_1}{3^{k-2}}+6\right)$

$=\left(1+3+1+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{3^{k-2}}\right)a_1+6k$

$=\left\{1+\dfrac{3\left[1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^k\right]}{1-\dfrac{1}{3}}\right\}a_1+6k$

$=\dfrac{11}{3}-\dfrac{1}{3^{k-1}}+6k.$

考向28 等差数列及其前 n 项和

刷考点

1. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则 $2a_1+3a_{11}=5a_1+30d=20$，即 $a_1+6d=4$，得 $a_7=4$. 故选 B.

2. A 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，因为$S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=5a_3=35$，所以$a_3=7$，又$a_4+a_5=a_3+a_6=23$，所以$a_6=16$，则$d=\frac{a_6-a_3}{6-3}=3$，故选A.

3. B 【解析】因为$\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}=2$，所以$\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{2}{a_{n+1}}$，可知数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为等差数列.

敲黑板：依据$a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$判断等差数列，但此法只可在小题中应用

又由$a_2=\frac{a_1}{2a_1+1}$，即$\frac{1}{a_2}=\frac{2a_1+1}{a_1}=2+\frac{1}{a_1}$，即$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=2$，

可知$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以2为公差的等差数列，且$a_3=\frac{1}{7}$，则$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_3}-2\times2=7-4=3$，

可得$\frac{1}{a_n}=3+2(n-1)=2n+1$，即$a_n=\frac{1}{2n+1}$，

所以$3a_{100}=\frac{3}{201}=\frac{1}{67}$.

故选B.

4. 95 【解析】设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，

$\because a_3+a_4=7,3a_2+a_5=5$，

$\therefore \begin{cases}2a_1+5d=7,\\4a_1+7d=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=-4,\\d=3.\end{cases}$ $\therefore a_n=3n-7$，

$\therefore S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10\times(-4+23)}{2}=95$.

一题多解 $\because\{a_n\}$为等差数列，且$a_3+a_4=7$，

$\therefore \begin{cases}a_2+a_5=7,\\3a_2+a_5=5,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a_2=-1,\\a_5=8.\end{cases}$

$\therefore$公差$d=\frac{8-(-1)}{3}=3$，

$\therefore a_n=a_2+(n-2)d=-1+3(n-2)=3n-7$，

$\therefore S_{10}=\frac{10(a_1+a_{10})}{2}=\frac{10\times(-4+23)}{2}=95$.

5. $a_n=n+1$　1 086 【解析】因为a_1,a_3,a_7成等比数列，所以$a_3^2=a_1\cdot a_7$，

因为$\{a_n\}$是各项均为正数，公差不为0的等差数列，设其公差为d，

所以$\begin{cases}a_2=a_1+d=3,\\(a_1+2d)^2=a_1\cdot(a_1+6d),\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\d=1,\end{cases}$所以$a_n=a_1+(n-1)d=n+1$.

设$b_n=\log_3(a_n+1)$，所以$a_n=3^{b_n}-1$，

令$1\leqslant a_n\leqslant 2\ 024$，且$b_n$为整数，

又$3^6=729,3^7=2\ 187,3^6<2\ 024<3^7$，

所以b_n可以取1,2,3,4,5,6，此时a_n分别为$3^1-1,3^2-1,3^3-1,3^4-1,3^5-1,3^6-1$，

所以区间$[1,2\ 024]$内所有"调和数"之和

$T_n=(3^1-1)+(3^2-1)+(3^3-1)+(3^4-1)+(3^5-1)+(3^6-1)=(3^1+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6)-6=\frac{3(1-3^6)}{1-3}-6=1\ 086$.

6. A 【解析】若数列$\{a_n\}$是等差数列，可设其首项为a_1，公差为d，

则$a_n=a_1+(n-1)d$，则$a_n+a_{n+1}=2a_1+(2n-1)d=(2a_1+d)+(n-1)\cdot2d$，

即数列$\{a_n+a_{n+1}\}$是以$2a_1+d$为首项，$2d$为公差的等差数列；

若数列$\{a_n+a_{n+1}\}$是等差数列，取$a_n=(-1)^n$，则$a_n+a_{n+1}=0$，符合题意，

但数列$\{a_n\}$不为等差数列.

综上，"数列$\{a_n\}$是等差数列"是"数列$\{a_n+a_{n+1}\}$是等差数列"的充分不必要条件. 故选A.

7. BD 【解析】由$a_{n+1}+a_n=2n$，得$a_{n+2}+a_{n+1}=2(n+1)$，两式相减得$a_{n+2}-a_n=2$①.

当$n\geqslant2$时，$a_{n+1}-a_{n-1}=2$②，①+②得当$n\geqslant2$时，$(a_{n+2}+a_{n+1})-(a_n+a_{n-1})=4$，

则$a_1+a_2,a_3+a_4,a_5+a_6,\cdots$是公差为4的等差数列，A错误；

①−②得当$n\geqslant2$时，$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_n-a_{n-1})=0$，

则$a_2-a_1,a_4-a_3,a_6-a_5,\cdots$为常数列，B正确；

因为$a_2=1,a_{n+2}-a_n=2$，所以数列$\{a_{2n}\}$是首项为1，公差为2的等差数列，

即$a_{2n}=1+(n-1)\cdot2=2n-1$，C错误；

数列$\{b_n\}$的前101项和$S_{101}=-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots-a_{99}+a_{100}-a_{101}=(a_2-a_1)+\cdots+(a_{100}-a_{99})-a_{101}$，由B可知，数列$a_2-a_1,a_4-a_3,a_6-a_5,\cdots$是常数列，$a_2-a_1=0$，

所以$S_{101}=50\times0-101=-101$，D正确. 故选BD.

关键点拨 结合选项可利用条件给出的递推关系去判定数列$\{a_n+a_{n-1}\}$，$\{a_n-a_{n-1}\}(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$的性质，结合等差数列的通项公式、分组求和法分析几个选项即可.

8. **思路导引** (1)根据递推公式求数列的项.

(2)假设存在实数λ，使数列$\left\{\frac{a_n+\lambda}{2^n}\right\}$为等差数列，根据$\frac{a_n+\lambda}{2^n}-\frac{a_{n-1}+\lambda}{2^{n-1}}$的结果为与$n$无关的常数，可求$\lambda$的值.

(3)根据(2)的结果，明确数列$\{a_n\}$的通项公式，进而确定数列$\{b_n\}$的通项公式，再利用分组求和的方法求S_{62}.

【解】(1)由$a_n=2a_{n-1}+2^n-1(n\geqslant2)$，得$a_4=2a_3+2^4-1=81$，解得$a_3=33$，

同理可得$a_2=13,a_1=5$.

(2)假设存在实数λ符合题意，

则$\frac{a_n+\lambda}{2^n}-\frac{a_{n-1}+\lambda}{2^{n-1}}=\frac{a_n-2a_{n-1}-\lambda}{2^n}=\frac{2^n-1-\lambda}{2^n}=1-\frac{1+\lambda}{2^n}$，结果必是与$n$无关的常数，则$\frac{1+\lambda}{2^n}=0$，解得$\lambda=-1$.

故存在实数$\lambda=-1$，使得数列$\left\{\frac{a_n+\lambda}{2^n}\right\}$为等差数列.

(3)由(2)知数列$\left\{\frac{a_n-1}{2^n}\right\}$是公差$d=1$的等差数列，

所以$\frac{a_n-1}{2^n}=\frac{a_1-1}{2}+(n-1)\times1=n+1$，即$a_n=(n+1)\cdot2^n+1$，

$b_n=\log_2\left(\frac{n+1}{n+2}\times2^n\right)=n+\log_2\frac{n+1}{n+2}$，

所以$S_{62}=\frac{62\times(1+62)}{2}+\log_2\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\cdots\times\frac{62}{63}\times\frac{63}{64}\right)=31\times63+\log_2\frac{1}{32}=1\ 953-5=1\ 948$.

9. C 【解析】由题意知$a_1+a_2+a_3=12,a_m+a_{m-1}+a_{m-2}=288$，由等差数列的性质可得$a_1+a_m=a_2+a_{m-1}=a_3+a_{m-2}$，所以$3(a_1+a_m)=300$，所以$a_1+a_m=100$.

因为$S_m=\frac{m(a_1+a_m)}{2}=950$，所以$m=19$. 故选C.

10. D 【解析】由数列$\{a_n\}$为等差数列，得$S_4,S_8-S_4,S_{12}-S_8,S_{16}-S_{12},S_{20}-S_{16}$亦为等差数列，

易错点：注意不要记成S_4，S_8，S_{12}，S_{16}，…成等差数列

由$S_4=2,S_8=12$，得$S_8-S_4=10$，

故$S_{12}-S_8=18,S_{16}-S_{12}=26,S_{20}-S_{16}=34$，

即有$S_{12}=18+S_8=30,S_{16}=26+S_{12}=56,S_{20}=34+S_{16}=90$.

故选D.

11. B 【解析】因为等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n,T_n，满足$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n+4}{n+2}$，

所以$\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{3\times11+4}{11+2}=\frac{37}{13}$. 故$\frac{2a_6}{b_2+b_{10}}=\frac{2a_6}{2b_6}=\frac{a_6}{b_6}=\frac{\frac{11(a_1+a_{11})}{2}}{\frac{11(b_1+b_{11})}{2}}=\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{37}{13}$. 故选B.

12. ABD 【解析】等差数列$\{a_n\}$中，$a_1>0$，设公差为d，

若$a_3+a_7=4$，则$S_9=\frac{9(a_1+a_9)}{2}=\frac{9(a_3+a_7)}{2}=18$，A正确；

若$a_1+a_2=5,a_3+a_4=9$，则$(a_3+a_4)-(a_1+a_2)=9-5=4d$，得$d=1$，

则 $a_7+a_8=a_1+a_2+12d=5+12=17$，B 正确；

若 $S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=15a_8>0$，$S_{25}=\frac{25(a_1+a_{25})}{2}=25a_{13}<0$，则公差 $d<0$，

当 $a_9>0$ 时，有 $a_1>a_9>0$，则有 $a_1^2>a_9^2$，

当 $a_9<0$ 时，有 $a_7+a_9=2a_8>0$，得 $a_7>-a_9>0$，

所以 $a_1>a_7>-a_9>0$，则有 $a_1^2>a_9^2$，C 错误；

若 $S_9=S_{10}$，则 $a_{10}=0$，

因为 $a_1>0$，所以 $S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=11a_6>0$，D 正确.

故选 ABD.

13. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1，公差为 d，

则 $\begin{cases}a_1-2(a_1+d)=6,\\ 3a_1+\frac{3\times(3-1)}{2}d=-27,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=-12,\\ d=3,\end{cases}$

则 $a_n=3n-15$，

所以 $S_n=\frac{n(-12+3n-15)}{2}=\frac{3}{2}n^2-\frac{27}{2}n=\frac{3}{2}\left(n-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{243}{8}$，由于 $n\in\mathbf{N}^*$，故当 n 取 4 或 5 时，S_n 取得最小值，故选 A.

方法技巧　利用函数性质求等差数列前 n 项和的最值问题的方法

公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 可整理成关于 n 的二次函数 $S_n=An^2+Bn\ (A\neq 0)$，若 $-\frac{B}{2A}\in\mathbf{N}^*$，则当 $n=-\frac{B}{2A}$ 时，S_n 取得最值；若 $-\frac{B}{2A}\notin\mathbf{N}^*$，则当 n 为距离 $-\frac{B}{2A}$ 最近的正整数(可能有两个)时，S_n 取得最值. 与二次函数类似，当 $A>0$ 时，S_n 有最小值；当 $A<0$ 时，S_n 有最大值.

14. ABD 【解析】由 $\begin{cases}S_8<S_9,\\ S_{10}<S_9,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}S_9-S_8=a_9>0,\\ S_{10}-S_9=a_{10}<0,\end{cases}$ 当 $n=9$ 时，S_n 最大，故 A 正确.

由 $S_{10}<S_8$，可得 $a_9+a_{10}<0<a_9$，所以 $a_8+a_{11}<0$，则 $a_{10}+a_{11}+a_8+a_9<0$，

即 $0<a_8+a_9<-(a_{10}+a_{11})$，所以 $|a_8+a_9|<|a_{10}+a_{11}|$，故 C 错误.

由以上可得 $a_1>a_2>a_3>\cdots>a_9>0>a_{10}>a_{11}>\cdots$，

$S_{17}=\frac{17(a_1+a_{17})}{2}=17a_9>0$，$S_{18}=\frac{18(a_1+a_{18})}{2}=9(a_9+a_{10})<0$，

当 $n\leqslant 17$ 时，$S_n>0$；当 $n\geqslant 18$ 时，$S_n<0$，

所以使得 $S_n<0$ 成立的最小自然数 $n=18$，故 B 正确.

当 $1\leqslant n\leqslant 9$ 或 $n\geqslant 18$ 时，$\frac{S_n}{a_n}>0$；当 $9<n<18$ 时，$\frac{S_n}{a_n}<0$，

由 $0>a_{10}>a_{11}>\cdots>a_{17}$，$S_9>S_{10}>S_{11}>S_{12}>\cdots>S_{17}>0>S_{18}>\cdots$，

所以 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 中最小项为 $\frac{S_{10}}{a_{10}}$，故 D 正确.

故选 ABD.

15. 【解】(1) 设 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 d，

则 $\frac{S_1}{1}=a_1=-7$，$\frac{S_3}{3}=-7+2d$，

又 $a_2+a_3=-8$，故 $\frac{-7-8}{3}=-7+2d$，解得 $d=1$，

所以 $\frac{S_7}{7}=-7+6d=-1$，故 $S_7=-7$.

(2) 由(1)可得 $\frac{S_n}{n}=-7+(n-1)\times 1=n-8$，

故 $S_n=n^2-8n$，

所以 $S_n-n=n^2-9n=\left(n-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{81}{4}$，

敲黑板： 配成完全平方式的形式，判断 S_n-n 的最值

因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以当 $n=4$ 或 5 时，S_n-n 取得最小值，最小值为 -20.

刷上分

1. C 【解析】因为 $a_1=2$，$a_{n+1}-a_n=2$，所以 $a_n=2+(n-1)\times 2=2n$，

$a_k+a_{k+1}+\cdots+a_{k+9}=\frac{10(a_k+a_{k+9})}{2}=\frac{10(2k+2k+18)}{2}=(2k+9)\times 10=270$，解得 $k=9$. 故选 C.

2. C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

则 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$.

所以 $\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d$，$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}$（常数），

则 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也为等差数列.

由 $\frac{S_{10}}{10}-\frac{S_8}{8}=2$，得数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的公差为 1.

所以 $\frac{S_n}{n}=\frac{S_1}{1}+(n-1)\times 1=-2\ 024+n-1=n-2\ 025$，所以 $\frac{S_{2\,024}}{2\ 024}=2\ 024-2\ 025=-1$，

所以 $S_{2\,024}=-2\ 024$. 故选 C.

3. C 【解析】$\because a_{n+1}+a_n=2n+5$①，$\therefore$ 当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n+a_{n-1}=2(n-1)+5$②，

①－②，得当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}-a_{n-1}=2$，

$\therefore \{a_n\}$ 中奇数项成等差数列，偶数项成等差数列，公差均为 2.

$\because a_1=1$，$\therefore$ 当 n 为奇数时，$a_n=a_1+\frac{n-1}{2}\times 2=n$；当 n 为偶数时，$a_n=2n+5-a_{n+1}=n+4$.

$\therefore S_8=(a_1+a_3+a_5+a_7)+(a_2+a_4+a_6+a_8)=\frac{4\times(1+7)}{2}+\frac{4\times(6+12)}{2}=52$. 故选 C.

一题多解 $\because a_n+a_{n+1}=2n+5$，$\therefore a_{n+2}+a_{n+3}=2(n+2)+5$，$a_1+a_2=7$，

$\therefore$ 数列 $\{a_{2n-1}+a_{2n}\}$ 是以 7 为首项，4 为公差的等差数列，

$\therefore S_8=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_7+a_8)=4\times 7+\frac{4\times 3}{2}\times 4=52$. 故选 C.

4. C 【解析】由 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{5n-2}{3n}$，可得 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{n(5n-2)}{n\cdot 3n}=\frac{5n^2-2n}{3n^2}$，

因为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是等差数列，

所以不妨令 $S_n=(5n^2-2n)t$，$T_n=3n^2t$，

所以 $a_7=S_7-S_6=(5\times 7^2-2\times 7-5\times 6^2+2\times 6)\cdot t=63t$，

$b_5=T_5-T_4=(3\times 5^2-3\times 4^2)t=27t$，

所以 $\frac{a_7}{b_5}=\frac{63t}{27t}=\frac{7}{3}$.

故选 C.

5. B 【解析】设各层的小球个数构成数列 $\{a_n\}$，

由题意得 $a_1=ab$，$a_2=(a+1)(b+1)$，$a_3=(a+2)(b+2)$，$\cdots$，$a_n=(a+n-1)(b+n-1)$，

因为 $a=b+1$，可得 $a_1=b(b+1)=b^2+b$，$a_2=(b+1)(b+2)=b^2+3b+1\times 2$，

$a_3=(b+2)(b+3)=b^2+5b+2\times 3$，$\cdots$，$a_7=(b+6)(b+7)=b^2+13b+6\times 7$，

则 $S_7=7b^2+49b+(1\times 2+2\times 3+\cdots+6\times 7)=7b^2+49b+112$.

因为前 7 层小球总个数为 168，所以 $7b^2+49b+112=168$，即 $b^2+7b-8=0$，

解得 $b=1$ 或 $b=-8$（舍去），

所以 $a=b+1=2$，可得 $ab=2$，即该垛积的第一层的小球个数为 2. 故选 B.

6. B 【解析】当 $k\geqslant 2$ 时，$a_k=2\ 023=(a_k-a_{k-1})+(a_{k-1}-a_{k-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1$，因为数列 $\{a_n\}$ 为"速增数列"，

所以 $a_k-a_{k-1}>a_{k-1}-a_{k-2}>\cdots>a_3-a_2>a_2-a_1=2$，又 $a_n\in\mathbf{Z}$，

所以 $(a_k-a_{k-1})+(a_{k-1}-a_{k-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1\geqslant k+k-1+\cdots+3+2+1$，即 $2\ 023\geqslant\frac{k(k+1)}{2}$，$k\in\mathbf{N}^*$，当 $k=63$ 时，$\frac{k(k+1)}{2}=2\ 016$，当 $k=64$ 时，$\frac{k(k+1)}{2}=2\ 080$，故正整数 k 的最大值为 63. 故选 B.

7. $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

思路导引 根据给定条件，求出 S_n 及 $\sqrt{S_n+t}$，再利用等差数列通项的特征分析求解即可.

【解析】依题意，$S_n=an+\frac{n(n-1)}{2}$，

则 $\sqrt{S_n+t}=\sqrt{\frac{1}{2}[n^2+(2a-1)n+2t]}$，

由数列 $\{\sqrt{S_n+t}\}$ 为等差数列，得 $2t=\left(\frac{2a-1}{2}\right)^2$，且 $\sqrt{S_n+t}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(n+\frac{2a-1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left|n+\frac{2a-1}{2}\right|$ 是 n 的一次式，

而对任意正整数 n，$n+\frac{2a-1}{2}\leqslant 0$ 不能恒成立，因此 $n+\frac{2a-1}{2}\geqslant 0$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，

点悟：若要含有绝对值的式子为一次式，则绝对值中的数必恒非负或者恒非正

即 $1+\frac{2a-1}{2}\geqslant 0$，解得 $a\geqslant-\frac{1}{2}$，所以实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$.

8.【解】(1) 因为 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $4S_n=a_na_{n+1}+1$，$a_n\neq 0$，$n\in\mathbf{N}^*$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，有 $4S_{n-1}=a_{n-1}a_n+1$，

两式相减，得 $4a_n=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})=2da_n$（$d$ 为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差），解得 $d=2$.

当 $n=1$ 时，有 $4S_1=a_1a_2+1$，即 $4a_1=a_1a_2+1$，$4a_1=a_1(a_1+2)+1$，解得 $a_1=1$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$.

(2) 由 (1) 知 $a_n=2n-1$，所以 $S_n=\frac{(1+2n-1)n}{2}=n^2$，所以 $b_n=\frac{S_n^2}{2^{a_n}}=\frac{n^4}{2^{2n-1}}$.

当 b_n 取得最大值时，有 $\begin{cases}b_n\geqslant b_{n-1},\\ b_n\geqslant b_{n+1},\end{cases}$

即 $\begin{cases}\frac{n^4}{2^{2n-1}}\geqslant\frac{(n-1)^4}{2^{2n-3}},\\ \frac{n^4}{2^{2n-1}}\geqslant\frac{(n+1)^4}{2^{2n+1}},\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}n^4\geqslant 4(n-1)^4,\\ 4n^4\geqslant(n+1)^4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n\leqslant 2+\sqrt{2},\\ n\geqslant 1+\sqrt{2},\end{cases}$ 所以 $1+\sqrt{2}\leqslant n\leqslant 2+\sqrt{2}$.

又因为 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $n=3$，所以 b_3 最大，

且 $b_3=\frac{81}{32}$，所以当 b_n 取得最大值时，$n=3$.

考向 29 等比数列及其前 n 项和

刷考点

1. D 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，

因为 $a_1+a_3=2$，$a_4+a_6=16$，

所以 $a_1+a_1q^2=2$，$a_1q^3+a_1q^5=16$，

由 $(a_1+a_1q^2)q^3=16$，得 $q^3=8$，即 $q=2$，

解得 $a_1=\frac{2}{5}$，

所以 $a_{10}+a_{12}=a_1q^9+a_1q^{11}=\frac{2}{5}(2^9+2^{11})=1\ 024$. 故选 D.

2. C 【解析】由 $\{a_n\}$ 是等比数列得 $a_2^2=a_1a_3$，又 $a_2=a_1a_3$，所以 $a_2^2=a_2$，又 $a_2\neq 0$，所以 $a_2=1$，设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $a_1=\frac{1}{q}$. 因为 $\{a_n\}$ 是递增数列，且 $a_2=1$，所以 $q>1$. 因为 $S_3+T_3=12$，$b_n=\frac{n}{a_n}$，所以 $\frac{1}{q}+1+q+q+2+\frac{3}{q}=12$，则 $2q+\frac{4}{q}-9=0$，即 $2q^2-9q+4=0$，

解得 $q=4$ 或 $q=\frac{1}{2}$（舍去），所以 $a_1=\frac{1}{4}$.

则 $S_n=\frac{\frac{1}{4}(1-4^n)}{1-4}=\frac{1}{12}(4^n-1)$. 故选 C.

3. B 【解析】设这女子第 n 天织布 a_n 尺，则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比 $q=2$. 故 $\frac{a_1(1-2^5)}{1-2}=5$，解得 $a_1=\frac{5}{31}$. 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{5}{31}\times 2^{n-1}$.

令 $\frac{5}{31}\times 2^{n-1}>1$，得 $2^{n-1}>\frac{31}{5}>6$，又 n 的最大值为 5，所以 $n-1=3$ 或 $n-1=4$，即 $n=4$ 或 $n=5$，

故超过 1 尺的天数为 2. 故选 B.

4. D 【解析】设该等比数列的公比为 q，前 n 项积为 T_n，

因为 $S_6\neq 2(a_1+a_3+a_5)$，所以 $q\neq 1$.

由 $\begin{cases}S_6=\frac{63}{4},\\ a_1+a_3+a_5=\frac{21}{2},\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\frac{a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{63}{4}①,\\ a_1+a_1q^2+a_1q^4=\frac{21}{2}②,\end{cases}$

①÷② 得 $\frac{1-q^6}{(1-q)(1+q^2+q^4)}=\frac{3}{2}$，整理得 $\frac{(1-q^2)(1+q^2+q^4)}{(1-q)(1+q^2+q^4)}=\frac{3}{2}$，即 $\frac{(1+q)(1-q)}{1-q}=\frac{3}{2}$，解得 $q=\frac{1}{2}$，则 $a_1=8$.

故 $T_n=a_1a_2\cdots a_n=a_1(a_1q)\cdots(a_1q^{n-1})=a_1^n\cdot q^{1+2+3+\cdots+n-1}=a_1^n\cdot q^{\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}}=8^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}=2^{-\frac{1}{2}n^2+\frac{7}{2}n}=2^{-\frac{1}{2}\left(n-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{49}{8}}$，

显然当 $n=3$ 或 $n=4$ 时，T_n 最大，最大值为 $T_3=T_4=2^6=64$，故选 D.

5. C

思路导引 由等边三角形及相似三角形可知数列 $\{S_n\}$ 为等比数列，根据等比数列求和公式化简解不等式即可.

【解析】由已知正三角形 ABC 的边长为 1，

则 $S_1=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

取大正三角形的一边的中点作小正三角形，可得 $S_n=\frac{1}{4}S_{n-1}$，所以数列 $\{S_n\}$ 是以 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 为首项，$\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列，

即 $S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n$. 所以 $S_1+S_2+\cdots+S_n=\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]$，

即 $\frac{\sqrt{3}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\geqslant\frac{675\sqrt{3}}{2\ 026}$，化简可得 $4^n\geqslant 2\ 026$，$n\in\mathbf{N}^*$，

又函数 $f(n)=4^n$ 单调递增，且 $4^5=1\ 024<2\ 026$，$4^6=4\ 096>2\ 026$，

所以满足 $4^n\geqslant 2\ 026$ 的 n 的最小值为 6.

故选 C.

6. D 【解析】由 $S_n=\frac{1}{2}a_{n+1}+1$，得 $S_n=\frac{1}{2}(S_{n+1}-S_n)+1$，即 $S_{n+1}-1=3(S_n-1)$，

又 $a_2=6$，$\therefore S_1=\frac{1}{2}a_2+1=4$，$S_1-1=3\neq 0$，

$\therefore$ 数列 $\{S_n-1\}$ 是首项为 3，公比为 3 的等比数列，即 $S_n-1=3^n$，

$\therefore S_n=3^n+1$，因为 $\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{3^{n+1}+1}{3^n+1}$ 不是常数，故数列 $\{S_n\}$ 不是等比数列，即 D 正确，B 错误；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n+1)-(3^{n-1}+1)=2\cdot 3^{n-1}$，

又当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=4$，不满足上式，

易错点

$\therefore a_n=\begin{cases}4, n=1,\\ 2\cdot 3^{n-1}, n\geqslant 2,\end{cases}$ 数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列，故 A，C 均错误. 故选 D.

7. BC 【解析】因为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是正项等比数列，

所以设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的公比分别为 q_1，q_2，且 $q_1>0$，$q_2>0$，对任意的正整数 n 有 $a_n>0$，$b_n>0$ 成立；

对于 A，不妨设 $a_n=2^n$，$b_n=3^n$，满足 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是正项等比数列，

此时 $a_n+b_n=2^n+3^n$，因为 $\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}=\frac{4+9}{2+3}=\frac{13}{5}$，$\frac{a_3+b_3}{a_2+b_2}=\frac{8+27}{4+9}=\frac{35}{13}$，

所以 $\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}\neq\frac{a_3+b_3}{a_2+b_2}$，此时 $\{a_n+b_n\}$ 不是等比数列，故 A 不正确；

对于 B，因为 $\frac{a_{n+1}\cdot b_{n+1}}{a_n\cdot b_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{b_{n+1}}{b_n}=q_1\cdot$

q_2,所以数列$\{a_n\cdot b_n\}$是等比数列,故B正确;

对于C,因为$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\div\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\cdot\frac{b_n}{a_n}=\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{q_1}{q_2}$,所以数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$是等比数列,故C正确;

对于D,设$a_n=2^n,b_n=3^n$,满足$\{a_n\},\{b_n\}$都是正项等比数列,

此时$a_1^{b_1}=2^3,a_2^{b_2}=4^9=2^{18},a_3^{b_3}=8^{27}=2^{81}$,

所以$\frac{a_2^{b_2}}{a_1^{b_1}}=\frac{2^{18}}{2^3}=2^{15},\frac{a_3^{b_3}}{a_2^{b_2}}=\frac{2^{81}}{2^{18}}=2^{63}$,所以$\frac{a_2^{b_2}}{a_1^{b_1}}\neq\frac{a_3^{b_3}}{a_2^{b_2}}$,此时数列$\{a_n^{b_n}\}$不是等比数列,故D不正确. 故选BC.

8. (1)【证明】设数列$\{a_n\},\{b_n\}$的公比分别为$p,q(p\neq q)$,

要证$\{c_n\}$不是等比数列,只需证$c_2^2\neq c_1c_3$.

$c_2^2-c_1c_3=(a_1p+b_1q)^2-(a_1+b_1)(a_1p^2+b_1q^2)=-a_1b_1(p-q)^2$,

由于$p\neq q$,且a_1,b_1不为零,

因此$c_2^2\neq c_1c_3$,故数列$\{c_n\}$不是等比数列.

(2)【解】假设存在常数k,使得数列$\{c_{n+1}+kc_n\}$为等比数列,

则有$(c_{n+1}+kc_n)^2=(c_{n+2}+kc_{n+1})(c_n+kc_{n-1})$,$n\geqslant2$,①

将$c_n=2^n+3^n$代入①式,得$[2^{n+1}+3^{n+1}+k(2^n+3^n)]^2=[2^{n+2}+3^{n+2}+k(2^{n+1}+3^{n+1})]\cdot[2^n+3^n+k(2^{n-1}+3^{n-1})]$,

即$[(2+k)2^n+(3+k)3^n]^2=[(2+k)2^{n+1}+(3+k)3^{n+1}]\cdot[(2+k)2^{n-1}+(3+k)3^{n-1}]$,

整理得$12(2+k)(3+k)=13(2+k)(3+k)$,

解得$k=-2$或$k=-3$.

经检验,当$k=-2$时,$c_{n+1}+kc_n=2^{n+1}+3^{n+1}+(-2)\cdot(2^n+3^n)=3^n$,

此时数列$\{c_{n+1}+kc_n\}$为等比数列;

当$k=-3$时,$c_{n+1}+kc_n=2^{n+1}+3^{n+1}+(-3)\cdot(2^n+3^n)=-2^n$,

此时数列$\{c_{n+1}+kc_n\}$为等比数列,

所以存在常数$k=-2$或$k=-3$,使得数列$\{c_{n+1}+kc_n\}$为等比数列.

9. A 【解析】由等比数列的性质可得$a_3^2=a_2a_4=16$,

又$a_3=a_1q^2=2q^2>0$,所以$a_3=4$. 故选A.

10. B 【解析】由$a_4a_5a_6=64$,得$a_5^3=64$,解得$a_5=4$,

$\therefore a_2a_4+a_6a_8=a_3^2+a_7^2\geqslant2a_3a_7=2a_5^2=32$,当且仅当$a_3=a_7=4$时等号成立. 故选B.

11. A 【解析】若$q>0$,由$a_1>0$,得$S_{n+1}-S_n=a_{n+1}=a_1q^n>0$,

故S_n必有最小值$S_1=a_1$,故"$q>0$"是"S_n存在最小值"的充分条件;

当$a_1=1,q=-\frac{1}{2}$时,有$S_n=\frac{1\times\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^n$,

则S_n有最小值$S_2=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$,故"$q>0$"不是"$S_n$存在最小值"的必要条件;

即"$q>0$"是"S_n存在最小值"的充分不必要条件. 故选A.

12. A 【解析】易知$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{2x^2}{1+x^2}=2$,

又$a_2a_{2\,023}=1$,所以$f(a_2)+f(a_{2\,023})=f(a_2)+f\left(\frac{1}{a_2}\right)=2$,

因为$\{a_n\}$为等比数列,所以$a_1a_{2\,024}=a_2a_{2\,023}=\cdots=a_{1\,012}a_{1\,013}=1$,

所以$f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2\,024})=1\,012\times[f(a_2)+f(a_{2\,023})]=1\,012\times2=2\,024$. 故选A.

13. AB 【解析】由数列$\{a_n\}$为正项等比数列,得$a_1>0,q>0,T_n>0$,

对于A,$S_9=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=S_4+q^4(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=S_4+q^4S_5$,即$S_9=S_4+q^4S_5$,A正确;

对于B,由$T_{2\,025}=T_{2\,020}$,得$\frac{T_{2\,025}}{T_{2\,020}}=a_{2\,021}\cdot a_{2\,022}\cdot a_{2\,023}\cdot a_{2\,024}\cdot a_{2\,025}=a_{2\,023}^5=1$,则$a_{2\,023}=1$,B正确;

对于C,由$a_1a_9=a_4a_6=4$,得$a_4^2+a_6^2\geqslant2a_4\cdot a_6=8$,当且仅当$a_4=a_6=2$时取等号,

即若$a_4^2+a_6^2$取得最小值,则$a_4=a_6=2$,即$\begin{cases}a_4=a_1q^3=2,\\a_6=a_1q^5=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_1=2,\\q=1,\end{cases}$C错误;

对于D,例如$a_1=1,q=2$,则$a_n=2^{n-1}$,$T_n=a_1a_2\cdots a_n=2^0\times2^1\times\cdots\times2^{n-1}=2^{1+2+\cdots+n-1}=2^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

得$a_{n+1}^n=(2^n)^n=2^{n^2}$,

$T_n^2=[2^{\frac{n(n-1)}{2}}]^2=2^{n^2-n}$,

而$n\in\mathbf{N}^*$,$n^2>n^2-n$,则$2^{n^2}>2^{n^2-n}$,即$a_{n+1}^n>T_n^2$,符合题意,但$a_1=1$,D错误.

故选AB.

14. ABC

思路导引 根据条件$a_{2\,024}a_{2\,025}>1$判断$q>0$,分$q\geqslant1$和$0<q<1$两种情况讨论$\frac{a_{2\,024}-1}{a_{2\,025}-1}<0$是否成立,得出$0<q<1$,即可判断A;对于B,利用A的结论和等比数列项的性质即可判定;对于C,D,由前面推得的$a_{2\,024}>1,0<a_{2\,025}<1$即可判断.

【解析】对于A,由$\frac{a_{2\,024}-1}{a_{2\,025}-1}<0$可得,$(a_{2\,024}-1)(a_{2\,025}-1)<0(*)$,

由$a_{2\,024}a_{2\,025}=a_{2\,024}^2q>1$,可得$q>0$.

当$q\geqslant1$时,因$a_1>1$,故$a_{2\,024}>1,a_{2\,025}>1$,即$(*)$不成立;

当$0<q<1$时,$a_{2\,024}>1,0<a_{2\,025}<1$,$(*)$成立,故$S_{2\,024}<S_{2\,025}$,故A正确;

对于B,由上述可知$a_{2\,024}a_{2\,026}-1=a_{2\,025}^2-1<0$,故B正确;

对于C,D,由上述分析$a_{2\,024}>1,0<a_{2\,025}<1$,且$0<q<1$,则$T_{2\,024}$是数列$\{T_n\}$中的最大值,故C正确,D错误. 故选ABC.

15. 1

思路导引 利用等比数列的通项公式与前n项和的性质可知S_6-S_4,S_4-S_2,S_2为等比数列,由此列式求解即可.

【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q,由$a_5+a_6=16,S_6=21$可知$S_4=5$,

因为$\frac{S_6-S_4}{S_4-S_2}=\frac{a_6+a_5}{a_4+a_3}=q^2,\frac{S_4-S_2}{S_2}=\frac{a_4+a_3}{a_2+a_1}=q^2$,所以$\frac{21-5}{5-S_2}=\frac{5-S_2}{S_2}$,且$\frac{5-S_2}{S_2}>0$,解得$S_2=1$.

16. 思路导引 (1)先根据题意结合等比数列的性质求出a_3,a_5,进而可求出公比及通项公式;(2)分$b_n\geqslant0$和$b_n<0$两种情况讨论,结合等差数列的前n项和公式即可得解.

【解】(1)因为$a_1a_5+2a_3a_5+a_2a_8=25$,

所以$a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=(a_3+a_5)^2=25$,

又$a_n>0(n\in\mathbf{N}^*)$,所以$a_3+a_5=5$.

因为2为a_3与a_5的等比中项,

所以$a_3a_5=4$,

则$\begin{cases}a_3+a_5=5,\\a_3a_5=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a_3=4,\\a_5=1\end{cases}$或$\begin{cases}a_3=1,\\a_5=4\end{cases}$(舍去),

所以$q^2=\frac{a_5}{a_3}=\frac{1}{4}$,所以$q=\frac{1}{2}$或$q=-\frac{1}{2}$(舍去).

所以$a_n=a_5\cdot q^{n-5}=\frac{1}{2^{n-5}}$.

(2)由(1)得$b_n=\log_2a_n=-n+5$,令$b_n\geqslant0$,则$1\leqslant n\leqslant5$,令$b_n<0$,则$n\geqslant6$.

当$1\leqslant n\leqslant5$时,$T_n=|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{(4-n+5)n}{2}=\frac{-n^2+9n}{2}$;

当$n\geqslant6$时,$T_n=|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|=(b_1+b_2+\cdots+b_5)-(b_6+b_7+\cdots+b_n)=10-\frac{(-1-n+5)(n-5)}{2}=\frac{n^2-9n+40}{2}$,

综上,$T_n=\begin{cases}\frac{-n^2+9n}{2},1\leqslant n\leqslant5,\\\frac{n^2-9n+40}{2},n\geqslant6.\end{cases}$

刷上分

1. B 【解析】当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1+1$，解得 $a_1=-1$.

当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=2a_n+1=2(S_n-S_{n-1})+1$，即 $S_n=2S_{n-1}-1$，

则 $S_n-1=2(S_{n-1}-1)$，且 $S_1-1=a_1-1=-2\neq 0$，

故$\{S_n-1\}$是以-2为首项，2为公比的等比数列. 则 $S_n-1=(-2)\times 2^{n-1}=-2^n$，

所以 $S_n=1-2^n$，则 $S_7=1-2^7=-127$. 故选 B.

2. B 【解析】设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，

$\begin{cases}a_1q=6,\\ a_1+a_1q+a_1q^2=26,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\ q=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=18,\\ q=\dfrac{1}{3}\end{cases}$（舍去），

所以 $a_n=2\cdot 3^{n-1}$，$S_n=\dfrac{2(1-3^n)}{1-3}=3^n-1$.

由 $S_n+a_n=3^n-1+2\cdot 3^{n-1}=5\cdot 3^{n-1}-1>2\ 024$，可得 $3^{n-1}>405$，

又 $3^5=243<405<729=3^6$，所以 n 的最小值为 7. 故选 B.

3. C 【解析】等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 为关于 n 的二次函数，当等比数列$\{b_n\}$的公比 $q\neq 1$ 时，$T_n=\dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$，显然不符合题意；

所以 $q=1$，即等比数列$\{b_n\}$为常数列，故可设 $S_n=kn(2n+1)$，$T_n=kn$，$k\neq 0$，

所以可得 $\dfrac{a_3}{b_5}=\dfrac{S_3-S_2}{T_5-T_4}=\dfrac{21k-10k}{5k-4k}=11$，故 C 正确. 故选 C.

4. D 【解析】由题意可知，$a_1=1$，$a_2=q$，$a_3=q^2$，

若$\{a_n\}$为常数列，则 $S_1+1=2$，$S_2+1=3$，$S_3+1=4$，不为等比数列，与题意不符；

若 $q\neq 1$，则 $S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}=\dfrac{q^n-1}{q-1}$，

若$\{S_n+1\}$也是等比数列，则 $(S_n+1)^2=(S_{n-1}+1)(S_{n+1}+1)$，$n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N}^*$，

即 $\left(\dfrac{q^n+q-2}{q-1}\right)^2=\dfrac{q^{n-1}+q-2}{q-1}\cdot\dfrac{q^{n+1}+q-2}{q-1}\Rightarrow 2q^n(q-2)=(q-2)(q^{n-1}+q^{n+1})\Rightarrow q^{n-1}(q-2)\cdot(q-1)^2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=1$（舍去）.

故选 D.

5. B 【解析】由题意得 $a_1\cdot a_2=2\cdot\cos\pi=-2$，即 $a_2=-2$，且 $a_{n+1}\cdot a_{n+2}=2^{n+1}\cdot\cos[(n+1)\pi]$，

所以 $\dfrac{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{2^{n+1}\cdot\cos[(n+1)\pi]}{2^n\cdot\cos(n\pi)}=\dfrac{2\cos[(n+1)\pi]}{\cos(n\pi)}$.

当 $n=2k-1$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时，$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{2\cos 2k\pi}{\cos[(2k-1)\pi]}=-2$，

即数列$\{a_n\}$的奇数项是首项为 1，公比为-2的等比数列，则 $a_{2k-1}=a_1q^{k-1}=(-2)^{k-1}$；

当 $n=2k$，$k\in\mathbf{N}^*$ 时，$\dfrac{a_{n+2}}{a_n}=\dfrac{2\cos(2k+1)\pi}{\cos 2k\pi}=-2$，

即数列$\{a_n\}$的偶数项是首项为-2，公比为-2的等比数列，则 $a_{2k}=a_1q^{k-1}=(-2)^k$.

所以 $S_{2\,025}=(a_1+a_3+\cdots+a_{2\,025})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2\,024})=\dfrac{1-(-2)^{1\,013}}{1-(-2)}+\dfrac{-2[1-(-2)^{1\,012}]}{1-(-2)}=\dfrac{1}{3}\times 2^{1\,014}-\dfrac{1}{3}$. 故选 B.

6. ACD 【解析】由题意，因为对任意 $s,t\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_{s+t}=a_sa_t$，

令 $s=n$，$t=1$，则 $a_{n+1}=a_na_1$，因为 $a_1=2$，所以 $a_{n+1}=2a_n$，所以数列$\{a_n\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，所以 $a_n=2^n$，

对于 A，$a_{n+1}^2=(2^{n+1})^2=2^{2n+2}$，$a_n(2a_n+a_{n+1})=2^n(2\times 2^n+2^{n+1})=2^n(2^{n+1}+2^{n+1})=2^{2n+2}$，故 $a_{n+1}^2=a_n(2a_n+a_{n+1})$，故 A 正确；

对于 B，由题意，数列$\{b_m\}$的前 5 项为 2，4，6，8，12，所以 $b_5=12$，故 B 错误；

对于 C，假设 a_i,a_j,a_k 成等差数列，不妨设 $i<j<k$，

因为 $a_n=2^n$，所以 $2a_j=a_i+a_k$，即 $2^{j+1}=2^i+2^k$，方程两边同时除以 2^i，得 $2^{j-i+1}=1+2^{k-i}$，

由于方程左边为偶数，右边为奇数，故上式不成立，故 C 正确；

对于 D，由题意，数列$\{b_m\}$的前 15 项为 2，4，6，8，12，14，16，24，28，30，32，48，56，60，62，所以$\{b_m\}$的前 15 项的和为

$2+4+6+8+12+14+16+24+28+30+32+48+56+60+62=402$，故 D 正确. 故选 ACD.

7. $\dfrac{4}{27}$ 【解析】由 $a_{n+1}=3a_n+4$，得 $a_{n+1}+2=3(a_n+2)$，又 $a_1+2=1+2=3$，

故数列$\{a_n+2\}$是首项为 3，公比为 3 的等比数列，

所以 $a_n+2=3\times 3^{n-1}=3^n$，

则不等式 $k(a_n+2)\geqslant 3n-5$ 可化为 $k\geqslant\dfrac{3n-5}{3^n}$，令 $f(n)=\dfrac{3n-5}{3^n}(n\in\mathbf{N}^*)$，

当 $n=1$ 时，$f(1)<0$；当 $n\geqslant 2$ 时，$f(n)>0$.

又 $f(n+1)-f(n)=\dfrac{3n-2}{3^{n+1}}-\dfrac{3n-5}{3^n}=\dfrac{13-6n}{3^{n+1}}$，

则当 $n=2$ 时，$f(3)>f(2)$，当 $n\geqslant 3$ 时，$f(n+1)<f(n)$，

所以 $f(n)\leqslant f(3)=\dfrac{3\times 3-5}{3^3}=\dfrac{4}{27}$，则 $k\geqslant\dfrac{4}{27}$，

即实数 k 的最小值为 $\dfrac{4}{27}$.

8. 思路导引 (1)根据给定条件，求出 a_1，再利用构造法，结合等比数列定义推理即可.

(2)由(1)求出 a_n，再利用分组求和法及错位相减法求解即可.

(3)利用(2)的信息求出 b_n，再利用不等式的性质，结合等比数列求和公式推理得证.

(1)【证明】在数列$\{a_n\}$中，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\dfrac{1}{4}a_{n-1}+\dfrac{3}{8}$，则 $a_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}\left(a_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$，

故 $a_2=\dfrac{1}{4}a_1+\dfrac{3}{8}$，又 $a_1-a_2=\dfrac{3}{32}$，解得 $a_1=\dfrac{5}{8}$，$a_1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$，

所以数列$\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\right\}$是以$\dfrac{1}{8}$为首项，$\dfrac{1}{4}$为公比的等比数列.

(2)【解】由(1)知，$a_n-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$，

即 $a_n=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\dfrac{1}{2}$，$na_n=\dfrac{n}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\dfrac{n}{2}$，

则 $H_n=\dfrac{1}{2}\left[1\times\dfrac{1}{4}+2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\cdots+n\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right]+\dfrac{n(n+1)}{4}$，

令 $A_n=1\times\dfrac{1}{4}+2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\cdots+n\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$，

则$\dfrac{1}{4}A_n=1\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^3+\cdots+(n-1)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+n\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$，

两式相减得 $\dfrac{3}{4}A_n=\dfrac{1}{4}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^2+\cdots+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n-n\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}=\dfrac{\frac{1}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}}-n\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{3n+4}{12}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$，

则 $A_n=\dfrac{4}{9}-\dfrac{3n+4}{9}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$，

所以 $H_n=\dfrac{2}{9}-\dfrac{3n+4}{18}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\dfrac{n(n+1)}{4}$.

(3)【证明】由(2)知，$a_n=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\dfrac{1}{2}$，$b_n=\dfrac{2a_n}{8a_n-3}=\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}{4\left(\frac{1}{4}\right)^n+1}=\dfrac{4^n+1}{4^n+4}$，显然 $b_n<1$，则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n<n$.

又 $b_n=1-\dfrac{3}{4^n+4}>1-\dfrac{3}{4^n}$，

于是 $T_n > n - \left(\frac{3}{4}+\frac{3}{4^2}+\cdots+\frac{3}{4^n}\right) = n - \dfrac{\frac{3}{4}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{4}} = n-1+\left(\frac{1}{4}\right)^n$,

所以 $n-1+\frac{1}{4^n}<T_n<n$.

考向 30　求数列通项公式的方法

刷考点

1. A 【解析】令 $m=1$, 依题意得 $S_{n+1}=S_n+a_1+a_n$, 即 $S_{n+1}-S_n=a_1+a_n$, 则 $a_{n+1}=a_n+a_1$
即 $a_{n+1}-a_n=a_1=1$,
所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列.
所以 $a_n=1+(n-1)=n$.
故 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,
则 $T_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}$. 故选 A.

2. D 【解析】当 $n=1$ 时, $a_1=3$; 当 $n\geqslant2$ 时, $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$, 又 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2n+1$,
两式相减可得 $na_n=2$, 所以 $a_n=\frac{2}{n}$. 又 $n=1$ 时, $a_1=3$ 不满足上式,
所以 $a_n=\begin{cases}3, n=1,\\ \frac{2}{n}, n\geqslant2.\end{cases}$ 设 $b_n=\frac{a_n}{n+1}$, 数列 $\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n,
则 $b_n=\begin{cases}\frac{3}{2}, n=1,\\ \frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right), n\geqslant2,\end{cases}$
数列 $\left\{\frac{a_n}{n+1}\right\}$ 的前 5 项和 $T_5=\frac{3}{2}+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{2}+2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)=\frac{13}{6}$. 故选 D.

3. 31 【解析】已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_n=2a_n+n-3$,
当 $n=1$ 时, $a_1=S_1=2a_1-2$, 所以 $a_1=2$,
当 $n\geqslant2$ 时, $S_{n-1}=2a_{n-1}+n-4$,
所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}+1$, 即 $a_n=2a_{n-1}-1$,
所以 $a_n-1=2(a_{n-1}-1)$.
又 $a_1-1=1$, 所以数列 $\{a_n-1\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 故 $a_n-1=2^{n-1}$, 所以 $a_n=2^{n-1}+1$.
则 $b_n=\log_4(a_n-1)=\frac{1}{2}\log_2 2^{n-1}=\frac{1}{2}(n-1)$,
故 $b_{n+1}-b_n=\frac{1}{2}(n+1-1)-\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}$, $b_1=0$,
所以数列 $\{b_n\}$ 是以 0 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公差的等差数列, 则 $\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{125}}{125}=\frac{1}{125}\times\frac{125\times\left[0+\frac{1}{2}\times(125-1)\right]}{2}=31$.

4. A 【解析】设该数列为 $\{a_n\}$, 则由题意可知 $a_2-a_1=2, a_3-a_2=3, \cdots, a_8-a_7=8$,
即从第二项开始后一项与前一项之差构成等差数列, 所以 $a_{50}-a_{49}=50$,
利用累加法可得 $(a_{50}-a_{49})+(a_{49}-a_{48})+\cdots+(a_2-a_1)=\frac{50+2}{2}\times49=1\ 274$,
所以 $a_{50}=1\ 275$. 故选 A.

5. B 【解析】因为 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}+2(n\in\mathbf{N}^*)$, 所以 $(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=2$, 又 $a_2-a_1=3$,
所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 3 为首项, 2 为公差的等差数列,
所以 $a_{n+1}-a_n=3+2(n-1)=2n+1$,
所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(2n-1)+(2n-3)+\cdots+3+1=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2(n\geqslant2)$,
当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 也符合上式, 故 $a_n=n^2$,
则数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n=\left[\frac{n(n+1)}{a_n}\right]=\left[\frac{n(n+1)}{n^2}\right]=\left[1+\frac{1}{n}\right]$,
则数列 $\{b_n\}$ 的前 2 022 项和为 $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2\,022}=[1+1]+\left[1+\frac{1}{2}\right]+\left[1+\frac{1}{3}\right]+\cdots+\left[1+\frac{1}{2\,022}\right]=3+2+2+\cdots+2=3+2\times2\,021=4\,045$.

6. B 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 是“等比差”数列,
所以 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=d(n\in\mathbf{N}^*)$.
因为 $a_1=a_2=1, a_3=3$, 所以 $d=\frac{a_3}{a_2}-\frac{a_2}{a_1}=2$,
所以有 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=2, \frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_n}{a_{n-1}}=2, \cdots, \frac{a_3}{a_2}-\frac{a_2}{a_1}=2$,
累加得 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_2}{a_1}=2n$, 即 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=2n+1$, 即 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2n-3(n\geqslant2, n\in\mathbf{N}^*)$,
因此有 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=2n-3, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=2n-5, \cdots, \frac{a_2}{a_1}=1$,
累乘得 $\frac{a_n}{a_1}=(2n-3)\times(2n-5)\times\cdots\times1$, 所以 $a_n=1\times3\times5\times\cdots\times(2n-3)(n\geqslant2, n\in\mathbf{N}^*)$,
所以 $\frac{a_{24}}{a_{22}}=\frac{1\times3\times5\times\cdots\times41\times43\times45}{1\times3\times5\times\cdots\times41}=1\ 935$.

7. $(n+1)\cdot2^{n-2}$ 【解析】当 $n\geqslant2$ 时, $(n-1)\cdot a_n=(n+1)S_{n-1}$, 则 $S_n=\frac{n}{n+2}a_{n+1}$, $S_{n-1}=\frac{n-1}{n+1}\cdot a_n$,
故当 $n\geqslant2$ 时, $S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+2}a_{n+1}-\frac{n-1}{n+1}a_n=a_n$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+2)}{n+1}$,
则有 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{2(n+1)}{n}, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=\frac{2n}{n-1}, \cdots, \frac{a_2}{a_1}=\frac{2\times3}{2}$,
则 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\frac{a_2}{a_1}\times a_1=(n+1)\cdot2^{n-2}$, 当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 符合上式,
故 $a_n=(n+1)\cdot2^{n-2}$.

8. 【解】(1) 当 $n=1$ 时, $a_1=a_2-1$, 得 $a_2=a_1+1=2$,
当 $n\geqslant2$ 时, $a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n}a_n=a_{n+1}-1$, 又 $a_1+\frac{1}{2}a_2+\frac{1}{3}a_3+\cdots+\frac{1}{n-1}a_{n-1}=a_n-1$.
两式相减得 $\frac{1}{n}a_n=a_{n+1}-a_n\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{n}(n\geqslant2)$.
所以 $\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_4}{a_3}\cdot\frac{a_5}{a_4}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}$, 即 $\frac{a_n}{a_2}=\frac{n}{2}$, 故 $a_n=n(n\geqslant2)$,
当 $n=1$ 时, 上式也成立.
所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n$.
(2) $b_n=n\cdot2^n$, 因为 $T_n=1\times2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\cdot2^n$,
$2T_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$,
两式相减得 $-T_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=2^{n+1}-2-n\cdot2^{n+1}=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$,
所以 $T_n=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$.

9. D 【解析】$a_{n+1}=2a_n+3\times5^n$ 的两边同时除以 5^{n+1},
得 $\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{2}{5}\times\frac{a_n}{5^n}+\frac{3}{5}$①.
令 $b_n=\frac{a_n}{5^n}$, 则①式变为 $b_{n+1}=\frac{2}{5}b_n+\frac{3}{5}$, 即 $b_{n+1}-1=\frac{2}{5}(b_n-1)$,
所以数列 $\{b_n-1\}$ 是等比数列, 其首项为 $b_1-1=\frac{a_1}{5}-1=-\frac{3}{5}$, 公比为 $\frac{2}{5}$, 所以 $b_n-1=-\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$, 即 $b_n=1-\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$,

$n\in\mathbf{N}^*$，所以 $\frac{a_n}{5^n}=1-\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}=1-\frac{3\times2^{n-1}}{5^n}$，

所以 $a_n=5^n-3\times2^{n-1}$.

一题多解 设 $a_{n+1}+k\times5^{n+1}=2(a_n+k\times5^n)$，则 $a_{n+1}=2a_n-3k\times5^n$，与 $a_{n+1}=2a_n+3\times5^n$ 比较可得 $k=-1$，
所以 $a_{n+1}-5^{n+1}=2(a_n-5^n)$，
所以数列 $\{a_n-5^n\}$ 是首项为 $a_1-5=-3$，公比为 2 的等比数列，
所以 $a_n-5^n=-3\times2^{n-1}$，所以 $a_n=5^n-3\times2^{n-1}$.

10. C

思路导引 根据给定条件，利用 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$，结合已知变形构造数列，求出 S_n，进而求出 a_n 即可判断得解.

【解析】数列 $\{a_n\}$ 中，由 $a_{n+1}=2\sqrt{S_n}+1$，得 $S_{n+1}-S_n=2\sqrt{S_n}+1$，整理得 $S_{n+1}=(\sqrt{S_n}+1)^2$，则 $\sqrt{S_{n+1}}=\sqrt{S_n}+1$，数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是以 $\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$ 为首项，1 为公差的等差数列，故 $\sqrt{S_n}=n$. 所以 $a_{n+1}=2n+1$，所以 $S_n=n^2$，$a_n=2n-1$，则 $a_5=9$，$S_{100}=10\,000$，A，B，D 错误，C 正确.
故选 C.

11. C 【解析】设 $a_{n+1}+x=\frac{2}{3}(a_n+x)$，即 $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n-\frac{1}{3}x$，所以 $-\frac{1}{3}x=4$，解得 $x=-12$，则 $a_{n+1}-12=\frac{2}{3}(a_n-12)$，
故 $\{a_n-12\}$ 是首项为 $a_1-12=-11$，公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列.
所以 $a_n-12=-11\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，即 $a_n=12-11\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$. 故选 C.

方法技巧 形如 $a_{n+1}=pa_n+q(p\neq0,1)$ 的递推公式，可用构造法求通项公式，步骤如下：
(1) 令 $a_{n+1}+\lambda=p(a_n+\lambda)$，整理得 $a_{n+1}=pa_n+(p-1)\lambda$；
(2) 由 $(p-1)\lambda=q$，解得 $\lambda=\frac{q}{p-1}$；
(3) 由等比数列的定义知数列 $\left\{a_n+\frac{q}{p-1}\right\}$ 是公比为 p 的等比数列.

12. AD 【解析】因为 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2+3a_n}$，且 $a_1=1\neq0$，可知 $a_n\neq0$，所以 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2+3a_n}{a_n}=\frac{2}{a_n}+3$，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}+3=2\left(\frac{1}{a_n}+3\right)$，

又 $\frac{1}{a_1}+3=4$，所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+3\right\}$ 是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，故 A 正确；

则 $\frac{1}{a_n}+3=4\cdot2^{n-1}=2^{n+1}$，所以 $a_n=\frac{1}{2^{n+1}-3}$，

故 B 错误；

因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2^{n+2}-3}-\frac{1}{2^{n+1}-3}=\frac{(2^{n+1}-3)-(2^{n+2}-3)}{(2^{n+2}-3)(2^{n+1}-3)}=\frac{-2^{n+1}}{(2^{n+2}-3)(2^{n+1}-3)}$，

又 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $2^{n+1}>0$，$2^{n+2}-3>0$，$2^{n+1}-3>0$，

所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{-2^{n+1}}{(2^{n+2}-3)(2^{n+1}-3)}<0$，所以 $\{a_n\}$ 为递减数列，故 C 错误；

由上述得 $\frac{1}{a_n}=2^{n+1}-3$，所以 $T_n=2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}-3n=\frac{2^2(1-2^n)}{1-2}-3n=2^{n+2}-3n-4$，

故 D 正确. 故选 AD.

方法技巧 形如 $a_{n+1}=\frac{xa_n}{ya_n+z}\left(\frac{z}{x}>0, y\neq0\right)$ 的递推公式，可用倒数法求通项公式，步骤如下：

(1) 取倒数，得 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{ya_n+z}{xa_n}=\frac{z}{x}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{y}{x}(a_n\neq0, a_{n+1}\neq0)$.

(2) 若 $\frac{z}{x}=1$，则移项，得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{y}{x}$，即数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{y}{x}$ 的等差数列，利用等差数列的通项公式求得 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的表达式，再取倒数即可求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；若 $\frac{z}{x}\neq1$，则令 $\frac{1}{a_{n+1}}+\lambda=\frac{z}{x}\left(\frac{1}{a_n}+\lambda\right)$，则 $\lambda=\frac{y}{z-x}$，即数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+\frac{y}{z-x}\right\}$ 是公比为 $\frac{z}{x}$ 的等比数列，利用等比数列的通项公式求得 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的表达式，再取倒数即可求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

13. $a_n=\frac{1}{n!}$ 【解析】由 $a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^2}{a_n+a_{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}$，

即 $\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}=\frac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+1}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}+1$. 又 $a_1=1$，$a_2=\frac{1}{2}$，则 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$，

故数列 $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ 是以 2 为首项，1 为公差的等差数列，

即 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=2+(n-1)=n+1$，

则有 $\frac{a_{n-1}}{a_n}=n$，$\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}=n-1$，…，$\frac{a_1}{a_2}=2$，且 $n\geqslant3$，

故 $\frac{a_{n-1}}{a_n}\times\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}\times\cdots\times\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_1}{a_n}=n!$，即 $a_n=\frac{a_1}{n!}=\frac{1}{n!}$，显然 $n=1,2$ 均满足.

14. $\frac{2}{29}$ 【解析】由 $\log_4 3\cdot a_n-\frac{a_{n+1}}{\log_{\sqrt{3}}2}=\log_2 5\cdot\log_5 3\cdot a_{n+1}a_n$ 可得 $\frac{1}{2}\log_2 3\cdot a_n-\log_2\sqrt{3}\cdot a_{n+1}=\log_2 5\cdot\frac{\log_2 3}{\log_2 5}\cdot a_{n+1}a_n$，

即 $\frac{1}{2}\log_2 3\cdot a_n-\frac{1}{2}\log_2 3\cdot a_{n+1}=\log_2 3\cdot a_{n+1}a_n$，$\therefore a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，结合 $a_1=2$ 可知 $a_na_{n+1}\neq0$，$\therefore \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2$，则 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是公差为 2 的等差数列，且 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$，$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}+(n-1)\cdot2=2n-\frac{3}{2}=\frac{4n-3}{2}$，则 $a_n=\frac{2}{4n-3}(n\in\mathbf{N}^*)$，故 $a_8=\frac{2}{29}$.

方法技巧 形如 $a_n-a_{n+1}=f(n)\cdot a_na_{n+1}(a_na_{n+1}\neq0)$ 的递推公式，可通过等式两边同时除以 a_na_{n+1}，构造新数列求通项公式，步骤如下：
(1) 等式两边同时除以 $a_na_{n+1}(a_na_{n+1}\neq0)$，得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=f(n)$.
(2) 若 $f(n)$ 是非零常数，则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列；若 $f(n)$ 不是常数，则可用累加法求出数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的通项公式，进而求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

15. (1)【解】由 $S_{n+1}=S_n+4a_n-3$，得 $S_{n+1}-S_n=4a_n-3$，$\therefore a_{n+1}=4a_n-3$，则 $a_{n+1}-1=4(a_n-1)$. $\because a_1-1=2-1=1$，$\therefore$ 数列 $\{a_n-1\}$ 是以 1 为首项，4 为公比的等比数列，
$\therefore a_n-1=4^{n-1}=2^{2n-2}(n\in\mathbf{N}^*)$. $\because b_n=\log_2(a_n-1)+3$，$\therefore b_n=\log_2 2^{2n-2}+3=2n+1(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)【证明】$\because c_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{b_n+1}{b_nb_{n+1}}$，

$\therefore c_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2n+2}{(2n+1)(2n+3)}=$

$(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$,

$\therefore T_n=c_1+c_2+c_3+\cdots+c_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)-\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}\right)\right]$.

当 n 为奇数时，$T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2n+3}\right)>\frac{1}{6}>\frac{2}{21}$；当 n 为偶数时，$T_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)$，此时$\{T_n\}$是递增数列，

$\therefore T_n\geq T_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)=\frac{2}{21}$.

综上，$T_n\geq\frac{2}{21}$.

刷上分

1. C 【解析】由题意得 $a_2-a_1=3$，$a_3-a_2=3$，$a_4-a_3=5$，$a_5-a_4=5$，$a_6-a_5=7$，$a_7-a_6=7$，…，所以 $a_{2n}-a_{2n-1}=2n+1$，$a_{2n+1}-a_{2n}=2n+1$.
因此 $a_{10}=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{10}-a_9)=61$.
故选 C.

2. B 【解析】在数列$\{a_n\}$中，由 $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n$，得数列$\{a_n\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，$a_n=2^n$.

则 $b_{n+1}=2b_n-2^n$，即$\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{b_n}{2^n}=-\frac{1}{2}$，因此数列$\left\{\frac{b_n}{2^n}\right\}$是以$\frac{b_1}{2}=3$为首项，$-\frac{1}{2}$为公差的等差数列，

则$\frac{b_n}{2^n}=3+(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)$，即 $b_n=(7-n)\cdot2^{n-1}$. 由 $a_m=b_m$，得 $2^m=(7-m)2^{m-1}$，解得 $m=5$. 故选 B.

3. A 【解析】因为 $a_1=\frac{1}{3}$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，易知 $a_n\neq0$，

所以$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4a_n+1}{a_n}=4+\frac{1}{a_n}$，即$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=4$，

又 $a_1=\frac{1}{3}$，所以$\frac{1}{a_1}=3$，

故$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以 3 为首项，4 为公差的等差数列.

则$\frac{1}{a_n}=3+4(n-1)=4n-1$，故 $a_n=\frac{1}{4n-1}$.

所以 $a_{20}=\frac{1}{4\times20-1}=\frac{1}{79}$. 故选 A.

4. C 【解析】因为 $S_n=n^2a_n$，所以 $S_{n-1}=(n-1)^2a_{n-1}(n\geq2)$，

两式相减得 $a_n=n^2a_n-(n-1)^2a_{n-1}$，

所以$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n+1}(n\geq2)$，则$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\frac{a_2}{a_1}=\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{3-1}{3+1}\cdot\frac{2-1}{2+1}=\frac{2}{n(n+1)}$，即$\frac{a_n}{a_1}=\frac{2}{n(n+1)}(n\geq2)$，

故 $a_n=\frac{4\,050}{n(n+1)}(n\geq2)$，

所以 $a_{2\,024}=\frac{1}{1\,012}$. 故选 C.

5. B 【解析】依题意，$a_{n+1}=2a_n+b_n$，$b_{n+1}=2b_n+a_n$，则 $a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$，而 $a_1+b_1=1$，
因此数列$\{a_n+b_n\}$是首项为 1，公比为 3 的等比数列，$a_n+b_n=3^{n-1}$.
又 $a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$，因此 $a_n-b_n=a_1-b_1=1$，于是 $a_n=\frac{3^{n-1}+1}{2}$，$b_n=\frac{3^{n-1}-1}{2}$.

对于 A，$a_4=\frac{3^3+1}{2}=14$，A 错误；

对于 B，$\frac{b_n}{a_n}=\frac{3^{n-1}-1}{3^{n-1}+1}=1-\frac{2}{3^{n-1}+1}$，显然数列$\left\{\frac{2}{3^{n-1}+1}\right\}$是递减数列，因此$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$为递增数列，B 正确；

对于 C，$\sum_{n=1}^{5}b_n=0+1+4+13+40=58$，C 错误；
对于 D，$a_1+\lambda b_1=1$，$a_2+\lambda b_2=2+\lambda$，$a_3+\lambda b_3=5+4\lambda$，由$\{a_n+\lambda b_n\}$为等比数列，
得$(2+\lambda)^2=5+4\lambda$，解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$，
当 $\lambda=1$ 时，$a_n+\lambda b_n=3^{n-1}$，显然数列$\{a_n+\lambda b_n\}$是等比数列，
当 $\lambda=-1$ 时，$a_n+\lambda b_n=1$，显然数列$\{a_n+\lambda b_n\}$也是等比数列，
因此当数列$\{a_n+\lambda b_n\}$是等比数列时，$\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$，D 错误.
故选 B.

6. BCD 【解析】对于 A，当 $n=1$ 时，$(a_1-1)^2=4(100-a_1)$，解得 $a_1=19$ 或 $a_1=-21$，
因为 $a_1>0$，所以 $a_1=19$.
当 $n\geq2$ 时，由$(a_n-1)^2=4(100-S_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$ 得$(a_{n-1}-1)^2=4(100-S_{n-1})$，$n\in\mathbf{N}^*$，
所以$(a_n-1)^2-(a_{n-1}-1)^2=4(100-S_n)-4(100-S_{n-1})$，
整理得$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}+2)=0$，
因为 $a_n+a_{n-1}\neq0$，所以 $a_n-a_{n-1}+2=0$，即 $a_n-a_{n-1}=-2$，
所以数列$\{a_n\}$是首项为 19，公差为-2的等差数列，
所以 $a_n=19+(n-1)\times(-2)=-2n+21$，故 A 错误；

对于 B，由 A 可知，$S_n=19n+\frac{n(n-1)}{2}\times(-2)=-n^2+20n$，

所以$\frac{S_n}{n}=\frac{-n^2+20n}{n}=-n+20$，

所以$\frac{S_{n+1}}{n+1}-\frac{S_n}{n}=-(n+1)+20-(-n+20)=-1$，

所以数列$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$是首项为 19，公差为$-1$的等差数列，故 B 正确；
对于 C，因为 $S_n=-n^2+20n=-(n-10)^2+100$，$n\in\mathbf{N}^*$，
所以当 $n=10$ 时，S_n 取得最大值，故 C 正确；
对于 D，由 $a_n=-2n+21>0$，得 $1\leq n\leq10$，$n\in\mathbf{N}^*$，
由 $a_n=-2n+21<0$，得 $n\geq11$，$n\in\mathbf{N}^*$，
所以当 $1\leq n\leq8$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_n=a_na_{n+1}\cdot a_{n+2}>0$，
当 $n=9$ 时，$b_9=a_9a_{10}a_{11}<0$，
当 $n=10$ 时，$b_{10}=a_{10}a_{11}a_{12}>0$，
当 $n\geq11$，$n\in\mathbf{N}^*$ 时，$b_n=a_na_{n+1}a_{n+2}<0$，
因为 $b_9=a_9a_{10}a_{11}=3\times1\times(-1)=-3$，$b_{10}=a_{10}a_{11}a_{12}=1\times(-1)\times(-3)=3$，
所以当 $n=8$ 或 $n=10$ 时，数列$\{b_n\}$的前 n 项和取最大值. 故 D 正确.
故选 BCD.

7. 16 【解析】当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=2a_1-1$，
$\therefore a_1=1$，
当 $n\geq2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，$\therefore a_n=2a_{n-1}$，$\therefore$ 数列$\{a_n\}$是首项为 1，公比 $q=2$ 的等比数列，

$\therefore \frac{a_6+a_9}{a_2+a_5}=\frac{a_6(1+q^3)}{a_2(1+q^3)}=q^4=16$.

8. 【解】(1) 因为 $S_n+S_{n+1}=3a_{n+1}-4$，①
所以当 $n=1$ 时，$a_1+a_1+a_2=3a_2-4$，
又 $a_1=2$，所以 $a_2=4$. 当 $n\geq2$ 时，$S_{n-1}+S_n=3a_n-4$，②
①−②，得 $a_n+a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n$，所以 $a_{n+1}=2a_n$. 又 $a_1=2$，$a_2=4=2a_1$，

所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$，

所以$\{a_n\}$是以 2 为首项，2 为公比的等比数列，所以 $a_n=2^n$.
设等差数列$\{b_n\}$的公差为 d，
因为 $b_2+b_4=6$，$T_4=10$，所以
$\begin{cases}2b_1+4d=6,\\4b_1+6d=10,\end{cases}$ 解得 $b_1=d=1$，
所以 $b_n=1+(n-1)\times1=n$，即$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=n$.

(2) 因为 $c_n=\begin{cases}b_n, n\text{为奇数},\\a_n\cdot b_n, n\text{为偶数}\end{cases}=\begin{cases}n, n\text{为奇数},\\n\cdot2^n, n\text{为偶数},\end{cases}$

则数列$\{c_n\}$的前 $2n$ 项和 $M_{2n}=(1+3+\cdots+2n-1)+(2\cdot2^2+4\cdot2^4+\cdots+2n\cdot2^{2n})$，

令 $A_n=1+3+\cdots+(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，

$B_n=2\cdot2^2+4\cdot2^4+\cdots+2n\cdot2^{2n}=1\cdot2^3+2\cdot2^5+\cdots+n\cdot2^{2n+1}$，

则 $2^2\cdot B_n=1\cdot2^5+2\cdot2^7+\cdots+n\cdot2^{2n+3}$，

所以两式相减得 $-3B_n=2^3+2^5+2^7+\cdots+2^{2n+1}-n\cdot2^{2n+3}=\frac{2^3(1-2^{2n})}{-3}-n\cdot2^{2n+3}=$

$\left(\frac{1}{3}-n\right)2^{2n+3}-\frac{8}{3}$,

则 $B_n=\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{9}\right)\cdot 2^{2n+3}+\frac{8}{9}$,故 $M_{2n}=n^2+\left(\frac{n}{3}-\frac{1}{9}\right)\cdot 2^{2n+3}+\frac{8}{9}$.

考向 31　数列求和的方法

刷考点

1. B 【解析】根据等比数列的性质,由 $a_1\cdot a_{2\,023}=1$ 可得 $a_n\cdot a_{2\,024-n}=1$,

$\because$ 函数 $f(x)=\frac{4}{1+x^2}$,

$\therefore f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{1+x^2}+\frac{4}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{4+4x^2}{1+x^2}=4$,

令 $T=f(a_1)+f(a_2)+\cdots+f(a_{2\,023})$,则 $T=f(a_{2\,023})+f(a_{2\,022})+\cdots+f(a_1)$,

$\therefore 2T=f(a_1)+f(a_{2\,023})+f(a_2)+f(a_{2\,022})+\cdots+f(a_{2\,023})+f(a_1)=4\times2\,023$,$\therefore T=4\,046$.

归纳总结　若在数列$\{a_n\}$中,与首末项等距的两项之和等于首末两项之和,则求数列$\{a_n\}$的前 n 项和可用倒序相加法,步骤如下:

(1)分别写出"正序和"$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$,以及"倒序和"$S_n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1$;

(2)将"正序和"与"倒序和"对应相加,化简,即得数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

2.【解】(1)当 $n=1$ 时,$a_1=2$;

由题知 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}=n$①,

当 $n\geqslant2$ 时,$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=n-1$②,

由①-②得 $\frac{a_n}{2^n}=1$,$\therefore a_n=2^n$,

易错点

又 $a_1=2$ 满足上式,$\therefore a_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)$\because b_n=\frac{1}{2^n+2^{50}}$,

$\therefore b_n+b_{100-n}=\frac{1}{2^n+2^{50}}+\frac{1}{2^{100-n}+2^{50}}=\frac{1}{2^n+2^{50}}+\frac{2^n}{2^{100}+2^{50}\cdot2^n}=\frac{1}{2^n+2^{50}}+\frac{2^n}{(2^n+2^{50})2^{50}}=\frac{2^{50}+2^n}{(2^n+2^{50})2^{50}}=\frac{1}{2^{50}}$,

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_{99}=\frac{1}{2^1+2^{50}}+\frac{1}{2^2+2^{50}}+\cdots+\frac{1}{2^{99}+2^{50}}$③,

$b_{99}+b_{98}+\cdots+b_1=\frac{1}{2^{99}+2^{50}}+\frac{1}{2^{98}+2^{50}}+\cdots+\frac{1}{2^1+2^{50}}$④,

又$\because b_n+b_{100-n}=\frac{1}{2^{50}}$,$\therefore$ ③+④得 $2(b_1+b_2+\cdots+b_{99})=\frac{99}{2^{50}}$,

$\therefore b_1+b_2+\cdots+b_{99}=\frac{99}{2^{51}}$.

3. B 【解析】$S_n=\frac{3}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{n+2}{2^n}$,

$\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots+\frac{n+2}{2^{n+1}}$,

两式相减可得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{3}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+2}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}+\frac{\frac{1}{2^2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+2}{2^{n+1}}=2-\frac{n+4}{2^{n+1}}$,所以 $S_n=4-\frac{n+4}{2^n}$.

因为 $\frac{n+4}{2^n}>0$,所以 $4-\frac{n+4}{2^n}<4$,即 $S_n<4$ 恒成立,故 $k\geqslant4$.

4. ABD 【解析】对于 A,因为 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n=n+1-n=1$,

所以 $\Delta^2a_n=\Delta a_{n+1}-\Delta a_n=1-1=0$,故 A 正确;

对于 B,因为 $\Delta a_n=(n+1)^2-n^2=2n+1$,$\Delta a_{n+1}=(n+2)^2-(n+1)^2=2n+3$,所以 $\Delta a_{n+1}>\Delta a_n$,故 B 正确;

对于 C,因为 $\Delta a_n=(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$,

所以 $b_1=\Delta a_1=7$,又 $n\geqslant2$ 时,$b_n=\Delta a_n-\Delta a_{n-1}=6n$,所以 $b_n=\begin{cases}7,n=1,\\6n,n\geqslant2,\end{cases}$ 故 C 错误;

对于 D,因为 $\Delta a_n=a_{n+1}-a_n=(n+2)\cdot2^n$,

所以 $a_2-a_1=3\cdot2^1$,$a_3-a_2=4\cdot2^2$,$\cdots$,$a_n-a_{n-1}=(n+1)\cdot2^{n-1}$,$n\geqslant2$,

所以 $a_n-a_1=3\cdot2^1+4\cdot2^2+\cdots+(n+1)\cdot2^{n-1}$,

所以 $2(a_n-a_1)=3\cdot2^2+4\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^{n-1}+(n+1)\cdot2^n$,

则 $-(a_n-a_1)=3\cdot2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}-(n+1)\cdot2^n=6+\frac{2^2\cdot(1-2^{n-2})}{1-2}-(n+1)\cdot2^n=6+2^n-4-(n+1)\cdot2^n$,

所以 $-a_n+a_1=-n\cdot2^n+2$,则 $a_n=n\cdot2^n$,$n\geqslant2$. 又 $n=1$ 时也成立,

所以 $a_n=n\cdot2^n$,$n\in\mathbf{N}^*$.

又 $\Delta^2a_n=\Delta a_{n+1}-\Delta a_n=(n+3)\cdot2^{n+1}-(n+2)\cdot2^n=(n+4)\cdot2^n$,

所以 $a_n+\Delta^2a_n=n\cdot2^n+(n+4)\cdot2^n=(2n+4)\cdot2^n=2\cdot(n+2)\cdot2^n=2\Delta a_n$,故 D 正确.

故选 ABD.

5.【解】(1)因为 $4S_n=3a_n+4$,所以 $4S_{n+1}=3a_{n+1}+4$,两式相减得 $4a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n$,即 $a_{n+1}=-3a_n$.

又因为 $4S_1=3a_1+4$,所以 $a_1=4$,故数列$\{a_n\}$是首项为 4,公比为-3 的等比数列.

所以 $a_n=4\cdot(-3)^{n-1}$.

(2)方法一:由(1)及题意得,$b_n=(-1)^{n-1}na_n=4n\cdot3^{n-1}$,所以 $T_n=4(1\cdot3^0+2\cdot3^1+3\cdot3^2+\cdots+n\cdot3^{n-1})$,

$3T_n=4(1\cdot3^1+2\cdot3^2+3\cdot3^3+\cdots+n\cdot3^n)$,

两式相减可得 $-2T_n=4(1+3^1+3^2+\cdots+3^{n-1}-n\cdot3^n)=4\left(\frac{1-3^n}{1-3}-n\cdot3^n\right)=(2-4n)3^n-2$,

所以 $T_n=(2n-1)3^n+1$.

方法二:由(1)及题意,得 $b_n=(-1)^{n-1}na_n=4n\cdot3^{n-1}$,所以当 $n\geqslant2$ 时,$T_n=T_{n-1}+4n\cdot3^{n-1}$,两边同时减去$(2n-1)3^n$,得 $T_n-(2n-1)3^n=T_{n-1}-(2n-3)3^{n-1}$,故$\{T_n-(2n-1)\cdot3^n\}$为常数列.

所以 $T_n-(2n-1)3^n=T_1-(2\times1-1)\cdot3=1$,所以 $T_n=(2n-1)3^n+1$,$n\geqslant2$. 当 $n=1$ 时,$T_1=b_1=4$,满足上式,所以 $T_n=(2n-1)3^n+1$.

6. A

思路导引　利用等差数列前 n 项和公式,联立方程组,可求出通项公式,再利用裂项相消法,求出数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n,即可求得 T_{10}.

【解析】因为$\{a_n\}$是等差数列,可设公差为 d,由 $S_6=S_5+25=90$,

可得 $\begin{cases}6a_1+\frac{6\times5}{2}d=90,\\5a_1+\frac{5\times4}{2}d=65,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=5,\\d=4,\end{cases}$ 所以 $a_n=5+(n-1)4=4n+1$.

再由 $a_nb_na_{n+1}=1$ 得 $b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(4n+1)(4n+5)}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right)$,

又数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n,

则 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=\frac{1}{4}\cdot\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+5}\right)\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4n+5}\right)$,

所以 $T_{10}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{45}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{8}{45}=\frac{2}{45}$.

故选 A.

方法技巧　**常见裂项公式**

(1)$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$,

$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$;

(2)若数列$\{a_n\}$是公差 $d\neq0$ 的等差数列(不含 0 项),则 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$;

(3)$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

7. D 【解析】因为 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n}=\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+2}}\Leftrightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}-1=1-\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}\Leftrightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}}=2$，所以 $\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{2}{a_{n+1}}\Leftrightarrow\frac{1}{a_{n+2}}-\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}$，

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 为等差数列，公差 $d=\frac{\frac{1}{a_{2\,024}}-\frac{1}{a_1}}{2\,024-1}=\frac{\frac{2\,025}{2}-1}{2\,023}=\frac{1}{2}$，首项 $\frac{1}{a_1}=1$，

所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)d=1+(n-1)\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2}$，所以 $a_n=\frac{2}{n+1}$，

所以 $a_na_{n+1}=\frac{4}{(n+1)(n+2)}=4\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$，

所以 $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_na_{n+1}=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{2n}{n+2}$.

故选 D.

8.【解】(1)因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，则 $a_1+a_3=2a_2=10$，即 $a_2=5$，

又因为 a_1,a_2-1,a_3 成等比数列，则 $a_1a_3=(a_2-1)^2=16$，

联立方程 $\begin{cases}a_1+a_3=10,\\a_1a_3=16,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=2,\\a_3=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=8,\\a_3=2,\end{cases}$

且 $a_3>a_1$，则 $\begin{cases}a_1=2,\\a_3=8,\end{cases}$ 可知公差 $d=a_2-a_1=3$，

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=2+3(n-1)=3n-1$.

(2)由(1)可得 $b_n=\frac{a_n}{3^n}=\frac{3n-1}{3^n}=\frac{1}{4}\left[\frac{6n+1}{3^{n-1}}-\frac{6(n+1)+1}{3^n}\right]$，

所以 $T_n=\frac{1}{4}\left[7-\frac{13}{3}+\frac{13}{3}-\frac{19}{9}+\cdots+\frac{6n+1}{3^{n-1}}-\frac{6(n+1)+1}{3^n}\right]=\frac{1}{4}\left(7-\frac{6n+7}{3^n}\right)$.

9. C 【解析】根据递推公式可知：数列的奇数项依次为 $2,2^2,2^3,\cdots$，为等比数列；数列的偶数项依次为 $1,3,5,\cdots$，为等差数列.

所以 $S_{20}=10\times1+\frac{10\times9}{2}\times2+\frac{2(1-2^{10})}{1-2}=100+2^{11}-2=2\,146$. 故选 C.

10. A 【解析】已知 $(1-2x)^{2\,025}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2\,025}x^{2\,025}$，令 $x=0$ 得 $a_0=1$.

令 $x=\frac{1}{2}$ 得 $\left(1-2\times\frac{1}{2}\right)^{2\,025}=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2\,025}}{2^{2\,025}}$，即

$a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2\,025}}{2^{2\,025}}=0$，

所以 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2\,025}}{2^{2\,025}}=-a_0=-1$，即 $b_1=-1$.

又 $b_{n+1}\cdot b_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$，可得 $b_2=-2$，且 $b_{n+2}\cdot b_{n+1}=2^{n+1}$，则 $\frac{b_{n+2}}{b_n}=2$，

所以当 n 为奇数时，$b_n=b_1\cdot2^{\frac{n-1}{2}}=-2^{\frac{n-1}{2}}$，

当 n 为偶数时，$b_n=b_2\cdot2^{\frac{n-2}{2}}=-2^{\frac{n}{2}}$，

则 $S_{2\,024}=b_1+b_2+b_3+b_4+\cdots+b_{2\,023}+b_{2\,024}$

$=(-2^0)+(-2^1)+(-2^1)+(-2^2)+\cdots+(-2^{1\,011})+(-2^{1\,012})$

$=-[(2^0+2^1+\cdots+2^{1\,011})+(2^1+2^2+\cdots+2^{1\,012})]$

$=-\left[\frac{1\cdot(1-2^{1\,012})}{1-2}+\frac{2\cdot(1-2^{1\,012})}{1-2}\right]$

$=3-3\cdot2^{1\,012}$.

故选 A.

11. (1)【证明】因为数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是等差数列，

$a_2=2a_1$，

所以公差为 $\frac{S_2}{a_2}-\frac{S_1}{a_1}=\frac{a_1+a_2}{a_2}-1=\frac{a_1+2a_1}{2a_1}-1=\frac{1}{2}$，首项为 $\frac{S_1}{a_1}=1$，

所以 $\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{n+1}{2}$，所以 $2S_n=(n+1)a_n$.

则当 $n\geqslant2$ 时，$2S_n=(n+1)a_n$，$2S_{n-1}=na_{n-1}$，

两式相减并化简得 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n-1}(n\geqslant2)$，

所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}\times\cdots\times\frac{a_2}{a_1}=\frac{n}{n-1}\times\frac{n-1}{n-2}\times\cdots\times\frac{2}{1}$，

即 $\frac{a_n}{a_1}=n$，所以 $a_n=na_1(n\geqslant2)$，又当 $n=1$ 时上式也符合，

所以 $a_n=na_1$，则 $a_{n+1}-a_n=(n+1)a_1-na_1=a_1$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，得证.

(2)【解】$a_1=1$，由(1)得 $a_n=n$，$a_{2n}=2n$，$2^{a_n}=2^n$，

当数列 $\{b_n\}$ 取前 20 项时，设在数列 $\{a_{2n}\}$ 中取 x 项，去掉属于数列 $\{2^{a_n}\}$ 的 y 项，

则有 $\begin{cases}x-y=20,\\2^{y+1}>2x\geqslant2^y,\end{cases}$ 其中 x,y 为正整数，

则当 $x=25,y=5$ 时，$2\times25=50\in[2^5,2^6)$，不等式组成立；

当 $x=26,y=6$ 时，$2\times26=52<64=2^6$，不等式组不成立，

所以取 $x=25,y=5$. 设数列 $\{b_n\}$ 的前 20 项和为 T_{20}，

则 $T_{20}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{50}-(2^1+2^2+2^3+2^4+2^5)$

$=2+4+6+\cdots+50-(2^1+2^2+2^3+2^4+2^5)$

$=\frac{25(2+50)}{2}-\frac{2(1-2^5)}{1-2}=650-62=588$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 20 项和是 588.

刷上分

1. C 【解析】因为 $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=2$，$2\,024=3\times674+2$，

所以 $a_3+a_4+a_5=2$，$a_6+a_7+a_8=2$，$a_9+a_{10}+a_{11}=2$，$\cdots$，$a_{2\,022}+a_{2\,023}+a_{2\,024}=2$，

又 $S_{2\,024}=a_1+a_2+(a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8)+\cdots+a_{2\,022}+a_{2\,023}+a_{2\,024}$，$a_1=2$，$a_2=4$，所以 $S_{2\,024}=2+4+674\times2=1\,354$.

故选 C.

2. C 【解析】因为 $\{a_n\}$ 是正项等比数列，所以 $a_1>0$，公比 $q>0$.

因为 $3S_2=a_1+2a_3$，所以 $3(a_1+a_2)=a_1+2a_3$，则 $2a_3-3a_2-2a_1=0$，

即 $2a_1q^2-3a_1q-2a_1=0$，则 $2q^2-3q-2=0$，解得 $q=2$ 或 $q=-\frac{1}{2}$（舍），

又因为 $a_3=a_1q^2=4a_1=8$，

所以 $a_1=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^n$，

所以 $a_n+2n-1=2^n+2n-1$，设数列 $\{a_n+2n-1\}$ 的前 n 项和为 T_n，

则 $T_n=(2^1+1)+(2^2+3)+(2^3+5)+\cdots+(2^n+2n-1)$

$=(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)+(1+3+5+\cdots+2n-1)$

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{n(1+2n-1)}{2}=2^{n+1}+n^2-2$，

所以 $T_5=2^6+5^2-2=87$，

故选 C.

3. D 【解析】由题意可得 $a_1=1,a_2=3,a_3=6,a_4=10,\cdots$，

于是有 $a_n-a_{n-1}=n(n\in\mathbf{N}^*,n\geqslant2)$，

所以 $a_1=1,a_2-a_1=2,a_3-a_2=3,a_4-a_3=4,\cdots,a_n-a_{n-1}=n$，

将以上 n 个式子相加，得 $a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，

所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，

所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{2\,021}}=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2\,021}-\frac{1}{2\,022}\right)=2\left(1-\frac{1}{2\,022}\right)=\frac{2\,021}{1\,011}$. 故选 D.

4. A 【解析】因为 3 为质数，所以在不超过 3^n 的正整数中，所有能被 3 整除的正整数的个数为 3^{n-1}，

则 $\varphi(3^n)=3^n-3^{n-1}=2\times3^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $\varphi(3^{n+1})=3^{n+1}-3^n=2\times3^n(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $b_n=\frac{2n}{\varphi(3^{n+1})}=\frac{2n}{2\times3^n}=\frac{n}{3^n}$，

所以 $T_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{n-1}+b_n$,

$T_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$,

$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$,

两式相减可得 $\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{n}{3}\right)$,

所以 $T_n=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{3}{4}+\frac{n}{2}\right)<\frac{3}{4}$,

因为 $b_n=\frac{n}{3^n}>0$,所以 T_n 在 $n\in\mathbf{N}^*$ 时单调递增,又 $T_n<M$ 恒成立,所以 $M\geqslant\frac{3}{4}$,

所以 M 的最小值为 $\frac{3}{4}$. 故选 A.

5.【解】(1)当 $n=1$ 时,$a_1=S_1=3+8=11$,

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(3n^2+8n)-[3(n-1)^2+8(n-1)]=6n+5$.

因为 $n=1$ 时,上式也成立,所以 $a_n=6n+5$,$n\in\mathbf{N}^*$.

又 $\{b_n\}$ 是等差数列,且 $b_n+b_{n+1}=6n+5$,

所以 $\begin{cases}b_1+b_2=11,\\ b_2+b_3=17,\end{cases}$ 两式相减得 $d=3$,所以 $b_1=4$,所以 $b_n=3n+1$.

(2)由(1)得 $2^{b_n}=2^{3n+1}$,$2^{b_1}=2^4$,所以数列 $\{2^{b_n}\}$ 是以 $2^{b_1}=2^4$ 为首项,2^3 为公比的等比数列,

所以 $\{2^{b_n}\}$ 的前 n 项和为 $\frac{2^4(1-8^n)}{1-8}=\frac{16(8^n-1)}{7}$,已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3n^2+8n$,则数列 $\{a_n+2^{b_n}\}$ 的前 n 项和为 $3n^2+8n+\frac{16(8^n-1)}{7}$.

(3)由(1)可知 $c_n=\frac{(6n+2)^{n+1}}{(3n+1)^n}=(3n+1)\cdot2^{n+1}$,

则 $T_n=4\times2^2+7\times2^3+10\times2^4+\cdots+(3n+1)\cdot2^{n+1}$,

$2T_n=4\times2^3+7\times2^4+\cdots+(3n-2)\cdot2^{n+1}+(3n+1)\cdot2^{n+2}$,

两式相减得 $-T_n=4\times2^2+3\times(2^3+2^4+\cdots+2^{n+1})-(3n+1)\cdot2^{n+2}$

$=4+12\times(2^n-1)-(12n+4)\cdot2^n$

$=(8-12n)\cdot2^n-8$,

所以 $T_n=(12n-8)\cdot2^n+8$.

6.【解】(1)因为 $a_n=n^2$,所以 $a_1=1$,$a_2=4$,$a_3=9$,$a_4=16$,$a_5=25$,

所以 $B_1=\{i\in\mathbf{N}^*|a_i<1\}=\varnothing$,$B_2=\{i\in\mathbf{N}^*|a_i<2\}=\{1\}$,

$B_{17}=\{i\in\mathbf{N}^*|a_i<17\}=\{1,2,3,4\}$,

故 $b_1=0$,$b_2=1$,$b_{17}=4$.

(2)因为 $a_n=2^n$,所以 $a_1=2$,$a_2=4$,$a_3=8$,$a_4=16$,$a_5=32$,$\cdots$,

则 $B_1=\{i\in\mathbf{N}^*|a_i<1\}=\varnothing$,$b_1=0$,

$B_2=\{i\in\mathbf{N}^*|a_i<2\}=\varnothing$,$b_2=0$,

$B_3=\{i\in\mathbf{N}^*|a_i<3\}=\{1\}$,$b_3=1$,

$B_4=\{i\in\mathbf{N}^*|a_i<4\}=\{1\}$,$b_4=1$,

$B_5=\{i\in\mathbf{N}^*|a_i<5\}=\{1,2\}$,$b_5=2$,

$B_6=\{i\in\mathbf{N}^*|a_i<6\}=\{1,2\}$,$b_6=2$,

$B_7=\{i\in\mathbf{N}^*|a_i<7\}=\{1,2\}$,$b_7=2$,

$B_8=\{i\in\mathbf{N}^*|a_i<8\}=\{1,2\}$,$b_8=2$,

……

当 $2^i<k\leqslant2^{i+1}$ 时,满足 $a_i<k$ 的元素个数为 i,

故 $\underbrace{b_{2^i+1}=b_{2^i+2}=\cdots=b_{2^{i+1}}}_{2^i\text{个}}=i$,

所以 $S_{2^{n+1}}=b_1+b_2+(b_3+b_4)+(b_5+b_6+b_7+b_8)+\cdots+(b_{2^n+1}+b_{2^n+2}+\cdots+b_{2^{n+1}})=1\times2^1+2\times2^2+\cdots+n\times2^n$,

注意到 $n\times2^n=(n-1)\times2^{n+1}-(n-2)\times2^n$,

所以 $S_{2^{n+1}}=0\times2^2-(-1)\times2^1+1\times2^3-0\times2^2+\cdots+(n-1)\times2^{n+1}-(n-2)\times2^n=(n-1)\times2^{n+1}+2$.

(3)由题可知 $a_1\geqslant1$,所以 $B_1=\varnothing$,所以 $b_1=0$,

若 $a_1=m\geqslant2$,则 $B_2=\varnothing$,$B_{m+1}=\{1\}$,

所以 $b_2=0$,$b_{m+1}=1$,与 $\{b_n\}$ 是等差数列矛盾,所以 $a_1=1$.

设 $d_n=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,

因为 $\{a_n\}$ 是各项均为正整数的递增数列,

所以 $d_n\in\mathbf{N}^*$,

假设存在 $k\in\mathbf{N}^*$ 使得 $d_k\geqslant2$,设 $a_k=t$,由 $a_{k+1}-a_k\geqslant2$ 得 $a_{k+1}\geqslant t+2$,

由 $a_k=t<t+1<t+2\leqslant a_{k+1}$ 得 $b_t<k$,$b_{t+1}=b_{t+2}=k$,与 $\{b_n\}$ 是等差数列矛盾,

所以对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $d_n=1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,$a_n=1+(n-1)=n$.

考向 32 数列不等式

刷考点

1. B 【解析】由已知得 $\begin{cases}6-t>0,\\ t>1,\\ 4(6-t)+8<t^2,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}t<6,\\ t>1,\\ t>4\text{ 或 }t<-8,\end{cases}$ 解得 $4<t<6$. 故选 B.

2. C 【解析】数列 $\{a_n\}$ 中,$3S_n=2a_n+1$,当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}$,则 $3S_n=2S_n-2S_{n-1}+1$,

整理得 $S_n=-2S_{n-1}+1$,即 $S_n-\frac{1}{3}=-2\left(S_{n-1}-\frac{1}{3}\right)$,而 $3S_1=2a_1+1=2S_1+1$,解得 $S_1=1$,

所以数列 $\left\{S_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是以 $S_1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 为首项,-2 为公比的等比数列,可得 $S_n-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\cdot(-2)^{n-1}$,则 $S_n=\frac{1-(-2)^n}{3}$,由 $S_k\geqslant2\,024$ 知 k 为奇数,此时 $S_k=\frac{1+2^k}{3}$ 是递增的,

而 $S_{11}=\frac{1+2^{11}}{3}=\frac{2\,049}{3}=683<2\,024$,$S_{13}=\frac{1+2^{13}}{3}=\frac{8\,193}{3}=2\,731>2\,024$,

所以正整数 k 的最小值为 13.

故选 C.

3. A

思路导引 将 $\frac{n+1}{n}a_{n+1}=\frac{a_n}{na_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$ 两边取倒数,可得 $\left\{\frac{1}{na_n}\right\}$ 是首项为 2,公差为 1 的等差数列,求得 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$,进而将不等式 $\frac{9}{n^2}+\frac{1}{n}+\lambda a_n\geqslant0$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立转化为 $\lambda\geqslant-\frac{(9+n)(n+1)}{n}$ 恒成立,利用基本不等式求得 $-\frac{(9+n)(n+1)}{n}$ 的最值,可得答案.

【解析】由数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2}$,$\frac{n+1}{n}a_{n+1}=\frac{a_n}{na_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,可得 $a_2=\frac{1}{6}$,可知 $a_n\neq0$,

因为 $\frac{n+1}{n}a_{n+1}=\frac{a_n}{na_n+1}$,所以 $\frac{n}{(n+1)a_{n+1}}=\frac{na_n+1}{a_n}$,所以 $\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}-\frac{1}{na_n}=1$,

因为 $a_1=\frac{1}{2}$,所以 $\left\{\frac{1}{na_n}\right\}$ 是首项为 2,公差为 1 的等差数列,所以 $\frac{1}{na_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)=n+1$,所以 $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$ 且 $a_n>0$.

因为不等式 $\frac{9}{n^2}+\frac{1}{n}+\lambda a_n\geqslant0$ 恒成立,所以 $\lambda\geqslant-\frac{(9+n)(n+1)}{n}$ 恒成立,

又 $-\frac{(9+n)(n+1)}{n}=-\left(n+\frac{9}{n}+10\right)\leqslant-\left(2\sqrt{n\cdot\frac{9}{n}}+10\right)=-16$,当且仅当 $n=3$ 时取等号,

所以 $\lambda\geqslant-16$,即实数 λ 的取值范围是 $[-16,+\infty)$,

故选 A.

4. ABC 【解析】显然 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1=\left(a_n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$,且 $a_1=2$,所以对于 $\forall n\in\mathbf{N}^*$,$a_n>0$,

又 $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$，所以 $a_{n+1}-1$ 与 a_n-1 同号，且 $a_1-1>0$，则 $a_n>1$.

对于 A，$a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2>0$，即 $a_{n+1}>a_n$，所以$\{a_n\}$为递增数列，故 A 正确；

对于 B，$a_n\geqslant a_1=2$，则 $a_{n+1}-a_n=(a_n-1)^2\geqslant 1$，

因此 $a_n=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})+a_1\geqslant 1+1+\cdots+1+2=n+1$，故 B 正确；

对于 C，由 $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$，得 $\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$，

即 $\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n}$，

因此 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{99}}=\left(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1}\right)+\left(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{99}-1}-\frac{1}{a_{100}-1}\right)=1-\frac{1}{a_{100}-1}<1$，故 C 正确；

对于 D，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+\frac{1}{a_n}-1\geqslant\frac{3}{2}$，因此 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\cdot 2$（当且仅当 $n=1,2$ 时取等号），所以 $a_1+a_2+\cdots+a_{99}>\frac{2\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{99}\right]}{1-\frac{3}{2}}=4\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{99}-4$，故 D 错误. 故选 ABC.

5. BCD 【解析】对 A，由题意可知 $a_1=\frac{a_1}{2}+\frac{1}{2a_1}\Rightarrow a_1^2=1$，所以 $a_1=1$，

则 $a_1+a_2=\frac{a_2}{2}+\frac{1}{2a_2}\Rightarrow a_2^2+2a_2-1=0$，所以 $a_2=\sqrt{2}-1<a_1$，故 A 错误；

对 C，由 $S_n=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{2a_n}\Rightarrow S_n=\frac{S_n-S_{n-1}}{2}+\frac{1}{2(S_n-S_{n-1})}(n\geqslant 2)\Rightarrow S_n^2-S_{n-1}^2=1(n\geqslant 2)$，

所以 S_n^2 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，故 C 正确；

对 B，由选项 C 可得 $S_n^2=1+(n-1)=n\Rightarrow S_n=\sqrt{n}$，

则 $S_n+S_{n+2}=\sqrt{n}+\sqrt{n+2}<2\sqrt{\frac{n+n+2}{2}}=2S_{n+1}$，故 B 正确；

对 D，易知 $S_n-\frac{1}{S_n}=\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}$，令 $f(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x(x\geqslant 1)$，

则 $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\left(\frac{1}{x}-1\right)^2\geqslant 0$（$f'(x)$ 不恒等于 0），则 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)\geqslant f(1)=0\Rightarrow\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\ln n$，即 $S_n-\frac{1}{S_n}\geqslant\ln n$，故 D 正确.

故选 BCD.

6. ACD 【解析】A 选项，$2a_2=\frac{a_1}{a_1+1}=\frac{1}{3}$，得 $a_2=\frac{1}{6}$，故 A 正确；

B 选项，由 $\frac{a_n}{a_n+1}=2a_{n+1}$，得 $a_n-2a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，变形得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{2}{a_n}=2$，

即 $\frac{1}{a_{n+1}}+2=2\left(\frac{1}{a_n}+2\right)$，又 $\frac{1}{a_1}+2=4$，

所以$\left\{\frac{1}{a_n}+2\right\}$是以 4 为首项，2 为公比的等比数列，故 B 错误；

C 选项，由 B 选项可得 $\frac{1}{a_n}+2=4\times 2^{n-1}$，即 $\frac{1}{a_n}=2^{n+1}-2$，

所以 $T_n=2^2-2+2^3-2+\cdots+2^{n+1}-2=2^2+2^3+\cdots+2^{n+1}-2n=\frac{4(1-2^n)}{1-2}-2n=2^{n+2}-2n-4$，故 C 正确；

D 选项，$a_n=\frac{1}{2^{n+1}-2}$，则 $\frac{1}{2^{n+1}}<a_n\leqslant\frac{1}{2^n}$，

所以 $S_n\leqslant\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$，$S_n>\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}$，

即 $\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}<S_n\leqslant 1-\frac{1}{2^n}$，故 D 正确.

故选 ACD.

7. 【证明】(1) 由 $a_{n+1}=3a_n+1$ 得 $a_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(a_n+\frac{1}{2}\right)$，所以 $\frac{a_{n+1}+\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{2}}=3$，所以 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列，首项为 $a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，公比为 3，所以 $a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}$，解得 $a_n=\frac{3^n-1}{2}$.

(2) 由(1)知 $a_n=\frac{3^n-1}{2}$，所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$，

因为当 $n\geqslant 1$ 时，$3^n-1\geqslant 2\cdot 3^{n-1}$，所以 $\frac{1}{3^n-1}\leqslant\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$，则 $\frac{2}{3^n-1}\leqslant\frac{1}{3^{n-1}}$，即 $\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{1}{3^{n-1}}$，

于是 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{3}{2}$，所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

归纳总结 此题也是先求出数列的通项，再对通项进行放缩构成数列不等式求和，求和后再放缩得证. 在放缩时，对通项公式的变形若放缩后求和发现太大或者太小，则与所证矛盾，通常有两种解决方案：一是微调，看能否让数列中的一些项不变，其余项放缩；二是选择放缩程度更小的方式进行尝试. 要向可求和的通项公式靠拢，常见的是向等比数列或可裂项相消求和的数列进行靠拢.

刷上分

1. B 【解析】由于 $S_n=2a_n-3n+4$，故 $a_1=S_1=2a_1-3\times 1+4$，解得 $a_1=-1$. 又有 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=[2a_{n+1}-3(n+1)+4]-(2a_n-3n+4)=2a_{n+1}-2a_n-3$. 所以 $a_{n+1}=2a_n+3$，故 $a_{n+1}+3=2(a_n+3)$，而 $a_1+3=-1+3=2$，故 $\{a_n+3\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，则有 $a_n+3=2^n$.

则 $\lambda\cdot 2^n-3n+2>0$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，

若 $\lambda\leqslant 1$，则取 $n=2$，得 $\lambda\cdot 2^2-3\times 2+2=4\lambda-4\leqslant 4-4=0$，从而原不等式对 $n=2$ 不成立，不满足题意；

若 $\lambda>1$，可以直接验证 $2^n-3n+2\geqslant 0$ 在 $n=1$ 和 $n=2$ 时成立，且对 $n>2,n\in\mathbf{N}^*$ 有 $2^n-3n+2=2^n-2^2-3(n-2)=\sum_{k=3}^{n}(2^k-2^{k-1})-\sum_{k=3}^{n}3=\sum_{k=3}^{n}(2^{k-1}-3)\geqslant\sum_{k=3}^{n}(2^2-3)>0$，故 $2^n-3n+2\geqslant 0$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立.

而此时由 $\lambda>1$ 可得 $\lambda\cdot 2^n-3n+2>2^n-3n+2\geqslant 0$，故 $\lambda\cdot 2^n-3n+2>0$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立，满足题意，所以 λ 的取值范围是 $(1,+\infty)$.

故选 B.

2. D 【解析】由 $(n+1)S_{n+1}=(n+1)S_n+(n+2)a_n$ 得 $(n+1)a_{n+1}=(n+1)S_{n+1}-(n+1)S_n=(n+2)a_n$，

则有 $\frac{a_{n+1}}{n+2}=\frac{a_n}{n+1}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立，

又 $a_2=3$，则 $\frac{a_n}{n+1}=\frac{a_2}{3}=1$，

故 $a_n=n+1$，则数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项，1 为公差的等差数列，

则 $S_n=\frac{n(2+n+1)}{2}=\frac{n(n+3)}{2}$.

由 $2S_n+22\leqslant ka_n$，得 $n(n+3)+22\leqslant k(n+1)$，则 $k\geqslant\frac{n(n+3)+22}{n+1}=g(n)(n\in\mathbf{N}^*)$，

令 $n+1=t(t\geqslant 2,t\in\mathbf{N}^*)$，

则 $g(t)=\frac{t^2+t+20}{t}=t+\frac{20}{t}+1$，

令 $g(x)=x+\frac{20}{x}+1(x>0)$，

则 $g'(x)=1-\frac{20}{x^2}=\frac{x^2-20}{x^2}$，

当 $x\in(0,2\sqrt{5})$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调

递减；

当 $x\in(2\sqrt{5},+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

又 $t\geqslant 2$，$t\in\mathbf{N}^*$，则当 $t\leqslant 4$ 时，$g(2)\geqslant g(3)\geqslant g(4)$，

当 $t\geqslant 5$ 时，恒有 $g(t)\leqslant g(t+1)$，

又 $g(4)=g(5)=10$，故 $g(t)$ 的最小值为 10.

若存在 $n\in\mathbf{N}^*$，使得 $2S_n+22\leqslant ka_n$ 成立，则 $k\geqslant g(t)_{\min}$，

则有 $k\geqslant 10$，即实数 k 的最小值为 10.

故选 D.

3. 15 【解析】因为 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$，

所以 $S_n=(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})+(\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2})+\cdots+(\sqrt{1}-\sqrt{0})=\sqrt{n}$，

因为 $(2^{b_n}-1)S_n=a_{n+1}$，所以 $(2^{b_n}-1)\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，

整理得 $2^{b_n}=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}+1=\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}$，所以 $b_n=\log_2\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}=\log_2\sqrt{n+1}-\log_2\sqrt{n}$，

所以 $T_n=(\log_2\sqrt{n+1}-\log_2\sqrt{n})+(\log_2\sqrt{n}-\log_2\sqrt{n-1})+\cdots+(\log_2\sqrt{2}-\log_2\sqrt{1})=\log_2\sqrt{n+1}$.

令 $\log_2\sqrt{n+1}\geqslant 2$，解得 $n\geqslant 15$，所以正整数 n 的最小值为 15.

4.

> **思路导引** (1) 利用 S_n，a_n 间的关系及等比数列的通项公式求解；
> (2) 由条件求出 b_n，c_n，利用错位相减法求出 T_n，进而可求 λ 的取值范围.

【解】(1) 由 $2S_{n+1}-S_n=2$，令 $n=1$，得 $2S_2-S_1=2$，即 $2(a_2+a_1)-a_1=2$，又 $a_1=1$，得 $a_2=\dfrac{1}{2}$.

又由 $\begin{cases}2S_{n+1}-S_n=2,\\2S_n-S_{n-1}=2(n\geqslant 2)\end{cases}$ 可得 $2S_{n+1}-2S_n=S_n-S_{n-1}$，则有 $2a_{n+1}=a_n$，即 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n$，又 $a_2=\dfrac{1}{2}a_1$，符合上式，所以 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，$\dfrac{1}{2}$ 为公比的等比数列，

故 $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 由 (1) 得 $b_n=-2\log_2a_n=-2\log_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=2n-2$，

$c_n=\dfrac{b_n+2}{a_n}=\dfrac{2n-2+2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=n\cdot 2^n$，

所以 $T_n=1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+n\times 2^n$ ①，

$2T_n=1\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+(n-1)\times 2^n+n\times 2^{n+1}$ ②，

②−①得

$T_n=-1\times 2^1-(2^2+2^3+\cdots+2^n)+n\times 2^{n+1}=-2-\dfrac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2}+n\times 2^{n+1}=2+(n-1)2^{n+1}$，

所以 $T_n-2=(n-1)2^{n+1}$，

又不等式 $T_n-2\geqslant\lambda c_n$ 对一切正整数 n 恒成立，

即不等式 $(n-1)2^{n+1}\geqslant\lambda n\cdot 2^n$ 对一切正整数 n 恒成立，

所以 $\lambda\leqslant 2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$，

又 $n\in\mathbf{N}^*$，$2\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\geqslant 0$，所以 $\lambda\leqslant 0$，即 λ 的取值范围是 $(-\infty,0]$.

5. (1)【解】由题意得 $a_2^2=a_1a_5$，即 $(a_1+d)^2=a_1(a_1+4d)$，

整理得 $d^2=2a_1d$，因为 $d\neq 0$，所以 $d=2a_1$，

又 $S_{11}=11a_1+55d=121$，即 $11a_1+55\times 2a_1=121$，解得 $a_1=1$，

故 $d=2a_1=2$，$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$.

(2)【解】存在正整数 $m,n(3<m<n)$，使得 $\dfrac{1}{a_3},\dfrac{1}{a_m},\dfrac{1}{a_n}$ 成等差数列，理由如下：

假设存在正整数 $m,n(3<m<n)$，使得 $\dfrac{1}{a_3},\dfrac{1}{a_m},\dfrac{1}{a_n}$ 成等差数列，

$\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{a_m}=\dfrac{1}{2m-1},\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2n-1}$，

则有 $\dfrac{2}{2m-1}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{2n-1}$，

整理得 $2m-1=10-\dfrac{25}{n+2}$，

故 $n+2=5$ 或 $n+2=25$，

故 $n=3$（舍）或 $n=23$，$m=5$.

综上，存在正整数 $m=5$，$n=23$，使得 $\dfrac{1}{a_3},\dfrac{1}{a_m},\dfrac{1}{a_n}$ 成等差数列.

(3)【证明】由等差数列求和公式得 $S_i=\dfrac{i(1+2i-1)}{2}=i^2$，

当 $i\geqslant 2$ 时，$\dfrac{1}{S_i}=\dfrac{1}{i^2}=\dfrac{4}{4i^2}<\dfrac{4}{4i^2-1}=2\left(\dfrac{1}{2i-1}-\dfrac{1}{2i+1}\right)$，

所以 $\sum\limits_{i=2}^{n+1}\dfrac{1}{S_i}<2\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n+1}-\dfrac{1}{2n+3}\right)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{2n+3}<\dfrac{2}{3}$.

热点考向 3　新素养

1. B 【解析】依题意，由 $a_1=1$，$a_2=2$ 及 $a_na_{n+1}a_{n+2}=8$，

可得当 $n=1$ 时，$a_1a_2a_3=1\cdot 2\cdot a_3=8$，解得 $a_3=4$；

当 $n=2$ 时，$a_2a_3a_4=2\cdot 4\cdot a_4=8$，解得 $a_4=1$；

当 $n=3$ 时，$a_3a_4a_5=4\cdot 1\cdot a_5=8$，解得 $a_5=2$；

当 $n=4$ 时，$a_4a_5a_6=1\cdot 2\cdot a_6=8$，解得 $a_6=4$，…

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是以 3 为最小正周期的周期数列，

$\therefore a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=7$，$n\in\mathbf{N}^*$，

又 $2\,024\div 3=674\cdots 2$，

$\therefore a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2\,024}$

$=a_1+a_2+(a_3+a_4+a_5)+(a_6+a_7+a_8)+\cdots+(a_{2\,022}+a_{2\,023}+a_{2\,024})$

$=1+2+7\times 674=4\,721$.

故选 B.

2. B 【解析】数列 $\{a_n\}(n\in\mathbf{N}^*)$ 是“$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$&2”数列，则 $\lambda=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$k=2$，

即有 $\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{a_{n+1}}$，易知 $a_n>0$，

$\therefore S_{n+1}>S_n$，

$\therefore S_{n+1}-2\sqrt{S_nS_{n+1}}+S_n=\dfrac{1}{3}a_{n+1}=\dfrac{1}{3}(S_{n+1}-S_n)$，

$\therefore 3\sqrt{S_{n+1}S_n}=S_{n+1}+2S_n$，

$\therefore S_{n+1}^2-5S_{n+1}S_n+4S_n^2=0$，解得 $S_{n+1}=4S_n$，

又 $S_1=1$，所以 $\{S_n\}$ 是首项为 1，公比为 4 的等比数列，

$\therefore S_n=4^{n-1}$.

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=4^{n-1}-4^{n-2}=3\cdot 4^{n-2}(n\geqslant 2)$，

经检验，$n=1$ 时不符合上式，

$\therefore a_n=\begin{cases}1,n=1,\\3\times 4^{n-2},n\geqslant 2\text{ 且 }n\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$

故选 B.

3. BC 【解析】若 $\{a_n\}$ 是等差数列，公差为 d，则 $S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$.

对于 A，由 $d=0$ 可得 $S_n=na_1$，若 $a_1\neq 0$，则当 $n\to+\infty$ 时，

$|S_n|\to+\infty$，故 $\{a_n\}$ 不是“和有界数列”，故 A 错误；

对于 B，若 $\{a_n\}$ 是“和有界数列”，则 $|S_n|=\left|\dfrac{d}{2}n^2+\left(a_1-\dfrac{d}{2}\right)n\right|<t$，

当 $d\neq 0$ 时，S_n 是关于 n 的二次函数，故不存在符合题意的实数 t，当 $d=0$，$a_1=0$ 时，存在符合题意的实数 t，故 B 正确；

对于 C，若 $\{a_n\}$ 是公比为 $q(q\neq 1)$ 的等比数列，则 $S_n=\dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$，

若 $|q|<1$，则 $|q^n|<1$，则有 $|1-q^n|<2$，$|S_n|=\left|\dfrac{a_1}{1-q}\right|\cdot|1-q^n|<2\left|\dfrac{a_1}{1-q}\right|$，即存在符合题

意的实数 t，使数列 $\{a_n\}$ 为"和有界数列"，故 C 正确；

对于 D，若等比数列 $\{a_n\}$ 是"和有界数列"，当 $q=-1$ 时，若 n 为偶数，则 $S_n=0$，若 n 是奇数，则 $S_n=a_1$，即 $|S_n|=|a_1|$，即此时存在符合题意的实数 t，故 D 错误.

故选 BC.

4. 211　【解析】设二阶等差数列为 $\{a_n\}$，根据题意得 $a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=4$，$\cdots$，$a_n-a_{n-1}=2(n-1)$，$n\geqslant 2$，

则累加可得 $a_n-a_1=2+4+\cdots+2(n-1)=\frac{(n-1)(2+2n-2)}{2}=n(n-1)$，所以 $a_n=n^2-n+1(n\geqslant 2)$，故 $a_{15}=211$.

5. ABD　【解析】依题意 $a_1=\frac{1}{5}$，$a_2=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\times 0=\frac{4}{25}$，

第 n 次传球之后球在乙手中，则当 $n\geqslant 2$ 时，第 $n-1$ 次传球之后球不在乙手中，其概率为 $1-a_{n-1}$，

第 n 次传球有 $\frac{1}{5}$ 的可能传给乙，因此 $a_n=\frac{1}{5}(1-a_{n-1})(n\geqslant 2)$，

于是 $a_n-\frac{1}{6}=-\frac{1}{5}\left(a_{n-1}-\frac{1}{6}\right)(n\geqslant 2)$，而 $a_1-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$，则 $\left\{a_n-\frac{1}{6}\right\}$ 是以 $\frac{1}{30}$ 为首项，公比为 $-\frac{1}{5}$ 的等比数列，

所以 $a_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{30}\times\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$，则 $a_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\times\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left[1-\left(-\frac{1}{5}\right)^n\right]$，又 $a_2=\frac{4}{25}$，故 A，B，D 正确；

由题意可得 $b_1=0$，$b_2=\frac{1}{5}$，

当 $n\geqslant 2$ 时 $b_n=\frac{1}{5}(1-b_{n-1})$，

则 $b_n-\frac{1}{6}=-\frac{1}{5}\left(b_{n-1}-\frac{1}{6}\right)(n\geqslant 2)$，

又 $b_1-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$，

所以 $\left\{b_n-\frac{1}{6}\right\}$ 是以 $-\frac{1}{6}$ 为首项，公比为 $-\frac{1}{5}$ 的等比数列，

所以 $b_n-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$，

所以 $b_n=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}$，

则 $a_{10}=\frac{1}{6}+\frac{1}{30}\times\left(-\frac{1}{5}\right)^9=\frac{1}{6}-\frac{1}{30}\times\left(\frac{1}{5}\right)^9$，$b_{10}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times\left(-\frac{1}{5}\right)^9=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{5}\right)^9$，

所以 $a_{10}-b_{10}=\frac{1}{6}-\frac{1}{30}\times\left(\frac{1}{5}\right)^9-\left[\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{5}\right)^9\right]=-\frac{1}{30}\times\left(\frac{1}{5}\right)^9-\frac{1}{6}\times\left(\frac{1}{5}\right)^9<0$，所以 $a_{10}<b_{10}$，故 C 错误.

故选 ABD.

6. 【解】(1)由题意，$\bar{t}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3$，

则 $\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}t_iy_i-n\bar{t}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{n}t_i^2-n\bar{t}^2}=\frac{3\,464-5\times 3\times 228}{55-5\times 3^2}=4.4$，

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=228-4.4\times 3=214.8$.

所以 y 关于 t 的经验回归方程为 $\hat{y}=4.4t+214.8$.

(2)(ⅰ)由题意，可知 $P_1=\frac{2}{3}$，$P_2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$，

$P_3=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{20}{27}$

$\left(\text{求解 } P_3 \text{ 另一种方法：} P_3=\frac{1}{3}P_1+\frac{2}{3}P_2=\frac{2}{9}+\frac{14}{27}=\frac{20}{27}\right)$.

(ⅱ)当 $n\geqslant 3$ 时，$P_n=\frac{2}{3}P_{n-1}+\frac{1}{3}P_{n-2}$，即 $P_n+\frac{1}{3}P_{n-1}=P_{n-1}+\frac{1}{3}P_{n-2}$，

又 $P_2+\frac{1}{3}P_1=\frac{7}{9}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=1$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，数列 $\left\{P_n+\frac{1}{3}P_{n-1}\right\}$ 为各项都为 1 的常数列，即 $P_n+\frac{1}{3}P_{n-1}=1(n\geqslant 2)$，

所以 $P_n-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\left(P_{n-1}-\frac{3}{4}\right)$，$n\geqslant 2$，又 $P_1-\frac{3}{4}=\frac{2}{3}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{12}$，

所以数列 $\left\{P_n-\frac{3}{4}\right\}$ 为首项为 $-\frac{1}{12}$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，

所以 $P_n-\frac{3}{4}=-\frac{1}{12}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，即 $P_n=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

当 n 为偶数时，$P_n=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n>\frac{3}{4}$，且 P_n 随 n 的增大而减小，因此 P_n 的最大值为 $P_2=\frac{7}{9}$；

当 n 为奇数时，$P_n=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{3}{4}$，且 P_n 随 n 的增大而增大，因此 P_n 的最小值为 $P_1=\frac{2}{3}$.

综上所述，P_n 的最大值为 $\frac{7}{9}$，最小值为 $\frac{2}{3}$.

7. (1)【证明】由题意得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(a_n,f(a_n))$ 处的切线方程为 $y-f(a_n)=f'(a_n)(x-a_n)$，即 $y-e^{a_n}=e^{a_n}(x-a_n)$，

令 $y=0$，解得 $x=a_n-1$，则 $a_{n+1}=a_n-1$，即 $a_{n+1}-a_n=-1(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 a_1 为首项，-1 为公差的等差数列.

(2)【解】由(1)可得 $a_{n+1}-a_n=-1(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)}=e^{a_{n+1}-a_n}=\frac{1}{e}$，

所以数列 $\{f(a_n)\}$ 是以 $f(a_1)$ 为首项，$\frac{1}{e}$ 为公比的等比数列，

其前 4 项的和为 $\frac{e^{a_1-3}(e^4-1)}{e-1}=e^{a_1-3}(e^2+1)\cdot(e+1)=(e^2+1)(e+1)$，

所以实数 $a_1=3$.

(3)【解】原不等式等价于 $m\geqslant\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

令 $h(x)=\frac{\frac{1}{2}x^3+x+1-e^x}{x^2}$，$x>0$，则 $h'(x)=\frac{(x-2)(x^2+2x+2-2e^x)}{2x^3}$，

令 $t(x)=x^2+2x+2-2e^x$，$x>0$，

则 $t'(x)=2(x+1-e^x)<0$，

所以 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $t(x)<t(0)=0$，

令 $h'(x)<0$，则 $x>2$；

令 $h'(x)>0$，则 $0<x<2$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，在 $(2,+\infty)$ 上单调递减，

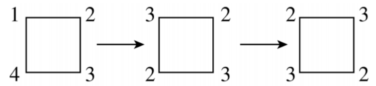
所以 $h(x)\leqslant h(2)=\frac{7-e^2}{4}$，

所以实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{7-e^2}{4},+\infty\right)$.

热点考向4　数列创新题

1. **思路导引** (1)涉及根据给定的变换规则进行多次变换的计算,按照变换公式逐步计算即可.
(2)利用已知条件和变换公式进行推导,结合等差数列的性质,证明所有数相等.
(3)运用反证法,要结合整数整除的性质来证明存在这样的 m.

(1)【解】当 $n=4$ 时,$T^2(a_i)$ 的变换如下:



所以 $T^2(a_1)=2$,$T^2(a_2)=3$,$T^2(a_3)=2$,$T^2(a_4)=3$.

(2)【证明】∵ $T(a_i)=a_i$,∴ $\frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}=a_i$ $(2\leqslant i\leqslant n-1)$,

∴ $\{a_n\}$ 成等差数列,设公差为 d,

又∵ $T(a_1)=a_1=\frac{a_n+a_2}{2}$,则 $2a_1=a_1+(n-1)\cdot d+a_1+d$,

∴ $d=0$,则 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=a_n$.

(3)【证明】(反证法)假设对任意 $m\in \mathbf{N}^*$,$T^m(a_i)(i=1,2\cdots,n)$ 均为整数.

由于 $T(a_i)=\frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{2}(2\leqslant i\leqslant n-1)$,$T(a_i)$ 为整数,故 a_{i-1} 与 a_{i+1} 的奇偶性相同,故 $a_1,a_3,\cdots,a_{4k+1}$ 同奇偶,$a_2,a_4,\cdots,a_{4k+2}$ 同奇偶,而 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{4k+2}\}=\{1,2,\cdots,4k+2\}$,$a_1,a_2,\cdots,a_{4k+2}$ 中有 $(2k+1)$ 个奇数,$(2k+1)$ 个偶数,

故不妨设 $a_1,a_3,\cdots,a_{4k+1}$ 为奇数,$a_2,a_4,\cdots,a_{4k+2}$ 为偶数.

∵ $T^2(a_3)=\frac{T(a_2)+T(a_4)}{2}=\frac{\frac{a_1+a_3}{2}+\frac{a_3+a_5}{2}}{2}=\frac{a_1+2a_3+a_5}{4}$,

又∵ $T^2(a_3)$ 为整数,且 $a_3=4k+1$ 或 $4k+3$ $(k\in \mathbf{N})$,

∴ a_1 和 a_5 除 4 的余数相同. 同理,

∵ $T^2(a_7)=\frac{T(a_6)+T(a_8)}{2}=\frac{\frac{a_5+a_7}{2}+\frac{a_7+a_9}{2}}{2}=\frac{a_5+2a_7+a_9}{4}$,

∴ a_5 和 a_9 除 4 的余数相同.

∵ $T^2(a_{4k-1})=\frac{T(a_{4k-2})+T(a_{4k})}{2}=\frac{\frac{a_{4k-3}+a_{4k-1}}{2}+\frac{a_{4k-1}+a_{4k+1}}{2}}{2}=\frac{a_{4k-3}+2a_{4k-1}+a_{4k+1}}{4}$,

∴ a_{4k-3} 和 a_{4k+1} 除 4 的余数相同,

∴ $a_1,a_5,a_9,\cdots,a_{4k+1}$ 除 4 的余数相同.

∵ $T^2(a_1)=\frac{T(a_{4k+2})+T(a_2)}{2}=\frac{\frac{a_{4k+1}+a_1}{2}+\frac{a_1+a_3}{2}}{2}=\frac{a_{4k+1}+2a_1+a_3}{4}$,

∴ a_{4k+1} 和 a_3 除 4 的余数相同.

∵ $T^2(a_5)=\frac{T(a_4)+T(a_6)}{2}=\frac{\frac{a_3+a_5}{2}+\frac{a_5+a_7}{2}}{2}=\frac{a_3+2a_5+a_7}{4}$,

∴ a_3 和 a_7 除 4 的余数相同.

∵ $T^2(a_{4k-3})=\frac{a_{4k-5}+2a_{4k-3}+a_{4k-1}}{4}$,

∴ a_{4k-5} 和 a_{4k-1} 除 4 的余数相同,

∴ $a_{4k+1},a_3,a_7,a_{11},\cdots,a_{4k-1}$ 除 4 的余数相同.

综上,$a_1,a_3,\cdots,a_{4k+1}$ 除 4 的余数都相同,而 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{4k+2}\}=\{1,2,\cdots,4k+2\}$,矛盾.

假设不成立,所以存在 $m\in \mathbf{N}^*$,使 $T^m(a_i)(i=1,2\cdots,n)$ 不全为整数.

2.【解】(1)当 $x=1$ 时,$\begin{cases}1+y>2,\\1+7>2y,\end{cases}$ 所以 $y=2$ 或 $y=3$;

当 $x=2$ 时,$\begin{cases}1+y>4,\\2+7>2y,\end{cases}$ 所以 $y=4$;

当 $x\geqslant 3$ 时,$\begin{cases}1+y>2x,\\x+7>2y,\end{cases}$ 无整数解,

故所有可能的 x,y 为 $\begin{cases}x=1,\\y=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=2,\\y=4.\end{cases}$

(2)一方面,注意到 $a_{k+1}+a_{k-1}>2a_k\Leftrightarrow a_{k+1}-a_k>a_k-a_{k-1}$,

对任意的 $1\leqslant i\leqslant n-1$,令 $b_i=a_{i+1}-a_i$,

则 $b_i\in \mathbf{Z}$ 且 $b_k>b_{k-1}(2\leqslant k\leqslant n-1)$,故 $b_k\geqslant b_{k-1}+1$ 对任意的 $2\leqslant k\leqslant n-1$ 恒成立(★),

当 $a_1=1,a_2=1,a_n=2\ 017$ 时,注意到 $b_1=a_2-a_1=1-1=0$,

得 $b_i=(b_i-b_{i-1})+(b_{i-1}-b_{i-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1\geqslant \underbrace{1+1+\cdots+1}_{i-1\text{个}}+0=i-1(2\leqslant i\leqslant n-1)$,

此时 $a_n-a_1=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}\geqslant 0+1+2+\cdots+n-2=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$(★★),

即 $\frac{1}{2}(n-1)\cdot(n-2)\leqslant 2\ 017-1$,解得 $-62\leqslant n\leqslant 65$,故 $n\leqslant 65$.

另一方面,为使(★★)式取到等号,所以取 $b_i=i-1(1\leqslant i\leqslant 64)$,

则对任意的 $2\leqslant k\leqslant 64$,$b_k>b_{k-1}$,故数列 $\{a_n\}$ 为"U-数列",

此时由(★★)式得 $a_{65}=1+0+1+2+\cdots+63=1+\frac{(1+63)\times 63}{2}=2\ 017$,即 $n=65$ 符合题意.

综上,n 的最大值为 65.

(3)当 $n_0=2m(m\geqslant 2,m\in \mathbf{N}^*)$ 时,

一方面:由(★)式,得 $b_{k+1}-b_k\geqslant 1$,

则 $b_{m+k}-b_k=(b_{m+k}-b_{m+k-1})+(b_{m+k-1}-b_{m+k-2})+\cdots+(b_{k+1}-b_k)\geqslant m$,

此时有 $(a_1+a_{2m})-(a_m+a_{m+1})=(a_{2m}-a_m)-(a_{m+1}-a_1)$

$=(b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{2m-1})-(b_1+b_2+\cdots+b_{m-1})$

$=(b_{m+1}-b_1)+(b_{m+2}-b_2)+\cdots+(b_{2m-1}-b_{m-1})\geqslant m(m-1)$,

故 $M\geqslant\frac{a_1+a_{2m}}{2}\geqslant\frac{a_m+a_{m+1}+m(m-1)}{2}\geqslant\frac{m^2-m+2}{2}=\frac{\left(\frac{n_0}{2}\right)^2-\frac{n_0}{2}+2}{2}=\frac{n_0^2-2n_0+8}{8}$.

另一方面,当 $b_1=1-m,b_2=2-m,\cdots,b_{m-1}=-1,b_m=0,b_{m+1}=1,\cdots,b_{2m-1}=m-1$ 时,

$a_{k+1}+a_{k-1}-2a_k=(a_{k+1}-a_k)-(a_k-a_{k-1})=b_k-b_{k-1}=1>0$,

取 $a_m=1$,则 $a_{m+1}=1$,$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_m$,$a_{m+1}<a_{m+2}<\cdots<a_{2m}$,

且 $a_1=a_m-(b_1+b_2+\cdots+b_{m-1})=\frac{1}{2}m(m-1)+1$,

$a_{2m}=a_{m+1}+(b_{m+1}+b_{m+2}+\cdots+b_{2m-1})=\frac{1}{2}m(m-1)+1$,

此时 $M=a_1=a_{2m}=\frac{1}{2}m(m-1)+1=\frac{1}{2}\times\frac{n_0}{2}\times\left(\frac{n_0}{2}-1\right)+1=\frac{n_0^2-2n_0+8}{8}$.

综上,M 的最小值为 $\frac{n_0^2-2n_0+8}{8}$.