位长度，得到 $g(x)=\sqrt{2}\cdot\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{24}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，

将函数 $g(x)$ 图象上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$（$\omega>0$，纵坐标不变），得到函数 $h(x)=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

令 $h(x)=0$，得 $2\omega x-\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{2\omega}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上没有零点，所以 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2\omega}$，得 $0<\omega<2$，且

$$\begin{cases}\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{2\omega}<\frac{\pi}{4},\\ \frac{\pi}{6\omega}+\frac{(k+1)\pi}{2\omega}>\frac{\pi}{2}\end{cases}(k\in\mathbf{Z}),$$

解得 $\frac{2}{3}+2k<\omega<\frac{4}{3}+k,k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\omega<2$，

所以当 $k=-1$ 时，$0<\omega<\frac{1}{3}$；

当 $k=0$ 时，$\frac{2}{3}<\omega<\frac{4}{3}$，

即 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

专题 6　解三角形

考向 22　利用正、余弦定理解三角形

刷考点

1. B　【解析】由 $bc=3a^2,b+c=\frac{7}{2}a$，

敲黑板：已知三边关系，用余弦定理可求角的三角函数值

得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}=\frac{\frac{49}{4}a^2-6a^2-a^2}{6a^2}=\frac{7}{8}$，

又 A 为△ABC 的内角，所以 $\sin A>0$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{\sqrt{15}}{8}$. 故选 B.

2. A　【解析】因为 $\frac{c}{\sin C}=2R$，所以 $c=2R\sin C=\frac{1}{2}\sin C$，则 $\sin^2A+\sin^2B+\sin A\sin B=\sin^2C$，

点悟：利用正弦定理进行边角互化

所以 $a^2+b^2+ab=c^2$，

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$.

因为 $0°<C<180°$，所以 $C=120°$.

所以 $c=\frac{1}{2}\sin C=\frac{1}{2}\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

故选 A.

3. BC　【解析】对于 A，因为 $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=7$，所以 $\sin C=7\cos C>0$. 因为 $\sin^2C+\cos^2C=1$，所以 $\sin C=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{10}$. 因为 $\sin A=\frac{4}{5}=\frac{8}{10}<\frac{7\sqrt{2}}{10}=\sin C$，所以由正弦定理得 $a<c$，故 $A<C$，所以 $\cos A>0$，则 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{3}{5}$，故 A 错误.

对于 B，$\cos B=\cos[\pi-(A+C)]=-\cos(A+C)=-\cos A\cos C+\sin A\sin C=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{4}{5}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$，故 B 正确.

对于 C，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{4\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确.

对于 D，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=7$，故 D 错误. 故选 BC.

4. $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$　【解析】设 $AC=x,BC=y(x>0,y>0)$，在△ADC 和△BDC 中，$\frac{\sqrt{2}}{\sin\angle BAC}=\frac{x}{\sin\angle ADC},\frac{1}{\sin\angle BCD}=\frac{y}{\sin\angle BDC}$，

由 $\sin\angle ADC=\sin\angle BDC$，

得 $\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BCD}=\frac{\sqrt{2}y}{x}$.

在△BDC 中，$\cos\angle BCD=\frac{y^2+2-1}{2\sqrt{2}y}$，

由 $\angle BAC=2\angle BCD$，得 $\sin\angle BAC=2\sin\angle BCD\cos\angle BCD$，

所以 $\frac{\sqrt{2}y}{x}=2\cos\angle BCD=2\cdot\frac{y^2+2-1}{2\sqrt{2}y}$，整理得 $2y^2=x(y^2+1)$，①

又 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$，即 $\frac{1+2-x^2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1+2-y^2}{2\sqrt{2}}$，整理得 $x^2+y^2=6$，②

联立①②得 $x^3-2x^2-7x+12=0$，即 $(x-3)\cdot(x^2+x-4)=0$，解得 $x=3$ 或 $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$（负值舍去）.

由△ADC 的三边关系知 $\sqrt{2}-1<x<\sqrt{2}+1$，故 $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$，即 $AC=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

5. A　【解析】设三个内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，由正弦定理可知 $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6=a:b:c$，

不妨设 $a=4k,b=5k,c=6k,k>0$，

见比设 k 法

显然 $c>b>a$，则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{8}>0$，所以 $\frac{\pi}{2}>C>B>A$. 故选 A.

6. B　【解析】由题意，向量 $\boldsymbol{m}=(a,b)$，$\boldsymbol{n}=(\sin B,\sin A)$，$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $b\sin B-a\sin A=0$，由正弦定理可得 $b^2=a^2$，即 $b=a$. 又由 $(2a-c)\cos B=b\cos C$，可得 $2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$，

即 $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$.

$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A\neq0$，$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$.

$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，

又 $b=a$，$\therefore A=B=C=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore$ △ABC 是等边三角形. 故选 B.

7. 【解】(1) 由正弦定理知 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin B-\sin C=0$，而 $\sin B=\sin(\pi-A-C)=\sin(A+C)$，

$\therefore \sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin(A+C)-\sin C=0$，即 $\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C-\sin C=0$，

又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C\neq0$，

$\therefore \sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

即 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

又 $0<A<\pi$，$\therefore A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由题意得 $\begin{cases}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3},\\ \cos A=\frac{b^2+c^2-4}{2bc}=\frac{1}{2},\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}bc=4,\\ b^2+c^2=8,\end{cases}$

将 $b=\frac{4}{c}$ 代入 $b^2+c^2=8$，整理得 $c^4-8c^2+16=0$，

则 $c^2=4$，即 $c=2$（$c=-2$ 舍去），则 $b=2$，

$\therefore a=b=c=2$，

$\therefore$ △ABC 为等边三角形.

8. C 【解析】由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{\sin B}$，解得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $a<b$，所以 $A<B$. 又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$ 或 $B=\frac{3\pi}{4}$，故此三角形有两解. 故选 C.

9. BC 【解析】对于 A，因为 $b=10$，$A=45°$，$C=60°$，所以 $B=75°$，所以 $\triangle ABC$ 只有一解，故 A 错误；

对于 B，因为 $b=\sqrt{15}$，$c=4$，$B=60°$，

所以由正弦定理得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{2\sqrt{5}}{5}<1$，因为 $b<c$，所以 $B<C$，所以 $C>60°$，所以 $\triangle ABC$ 有两解（$60°<C_1<90°$，$90°<C_2<120°$），故 B 正确；

对于 C，因为 $a=\sqrt{3}$，$b=2$，$A=45°$，所以由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

因为$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a<b$，所以 $\triangle ABC$ 有两解（$45°<B_1<60°$，$120°<B_2<135°$），故 C 正确；

对于 D，因为 $a=8$，$b=4$，$A=80°$，

所以 $b<a$，$B<80°$，所以 $\triangle ABC$ 只有一解，故 D 错误. 故选 BC.

方法技巧　已知 $\triangle ABC$ 的两边 a,b 及角 A，判断三角形个数的一般步骤

(1) 由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得到 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$.

(2) 当 $\sin B>1$ 时，无解；当 $\sin B=1$，且 $a<b$ 时，$B=90°$，有唯一解；当 $\sin B<1$ 时，若 $a\geqslant b$，则有唯一解，若 $a<b$，$\sin A<\sin B$，则有两个解.

10. A 【解析】因为 $b=2c$，所以根据正弦定理得 $\sin B=2\sin C$.

因为 $9\sin B-2\sin C=2\sqrt{15}$，

所以 $9\sin B-2\sin C=8\sin B=2\sqrt{15}$，即 $\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

当 B 为钝角时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{4}$，

即 $2c^2-c-6=0$，解得 $c=2$（负值舍去），则 $b=2c=4$，$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=9$；

当 B 为锐角时，C 也为锐角，则 A 为钝角，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{9-3c^2}{6c}=\frac{1}{4}$，即 $2c^2+c-6=0$，解得 $c=\frac{3}{2}$（负值舍去），$b=2c=3=a$，与 A 为钝角时，$b<a$ 矛盾，故不成立.

综上，$\triangle ABC$ 的周长为 9. 故选 A.

11. A 【解析】由 $(3a+b)\cos C+c\cos B=0$ 及正弦定理，得 $(3\sin A+\sin B)\cos C+\sin C\cos B=0$，

则 $3\sin A\cos C+\sin B\cos C+\sin C\cos B=0$，

即 $3\sin A\cos C+\sin(B+C)=0$，

即 $3\sin A\cos C+\sin A=0$.

因为 $A\in(0,\pi)$，则 $\sin A\neq 0$，

所以 $3\cos C+1=0$，解得 $\cos C=-\frac{1}{3}$，

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{3}$.

又 $c^2-a^2-b^2=2$，

所以 $\cos C=\frac{-2}{2ab}=-\frac{1}{ab}=-\frac{1}{3}$，即 $ab=3$.

又 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$. 故选 A.

12. 【解】(1) 若选①，由 $\tan A=3$ 得 $\sin A=3\cos A>0$，故 A 是锐角. 又 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，

解得 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

若选②，由 $b^2+c^2-a^2=2c$，可得 $2bc\cos A=2c$，解得 $b\cos A=1$.

又 $b=\sqrt{10}$，解得 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 又 $0<A<\pi$，故 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，下面同选①.

若选③，由 $3b=\sqrt{5}c$，可得 $c=3\sqrt{2}$，由正弦定理可得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2) 若选①或②，由(1)得 $\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，由正弦定理得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4$，

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times 4\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6$.

若选③，由余弦定理可得 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，即 $a^2+18-10=2a\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $a=2$ 或 $a=4$.

当 $a=2$ 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$；

当 $a=4$ 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 4\times 3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积是 3 或 6.

13. 【解】(1) $\because b\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B=a$，

$\therefore \sin B\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B=\sin A$，

$\therefore \sin B\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B=\cos B\sin C$.

$\because \sin C\neq 0$，$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B=\cos B$，

$\therefore \tan B=-\sqrt{3}$.

又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$.

(2) $\because BD$ 为 $\angle ABC$ 的平分线，$B=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore \angle ABD=\angle CBD=\frac{\pi}{3}$.

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$，$BD=\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}ac\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}$，即 $ac=\sqrt{3}(a+c)$，①

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{2\pi}{3}$，即 $(a+c)^2-ac=36$，②

联立①②可得 $a+c=4\sqrt{3}$（负值舍去），

$\therefore ac=12$，

$\therefore a,c$ 是关于 x 的方程 $x^2-4\sqrt{3}x+12=0$ 的两个实数根，解得 $a=c=2\sqrt{3}$.

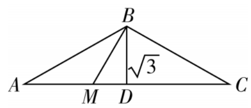
又 BD 为 $\angle ABC$ 的平分线，

$\therefore BD\perp AC$.

$\because AM=\frac{1}{2}MC$，$AC=6$，

$\therefore DM=AD-AM=3-2=1$，$BM=\sqrt{BD^2+DM^2}=2$，

$\therefore \triangle BDM$ 的周长为 $3+\sqrt{3}$.



14. D 【解析】因为 $\sin(A-C)+\sin C=\sin B=\sin(A+C)$，

所以 $\sin A\cos C-\cos A\sin C+\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

化简得 $2\cos A\sin C=\sin C$.

因为 C 为三角形内角，则 $\sin C\neq 0$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

设△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，BC 边的高为 h.

由三角形面积公式可得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah$，

点悟：已知 BC 边上的高，结合三角形面积公式求解

又 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $bc=a$.

又 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

所以 $a^2=b^2+c^2-bc\geqslant bc=a$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，则 $a\geqslant 1$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$，故选 D.

15. $\frac{3}{4}$ 【解析】在△ABC 中，由射影定理 $a=b\cos C+c\cos B$ 及 $a=-3b\cos C$，得 $c\cos B=-4b\cos C$. 由正弦定理得 $\sin C\cos B=-4\sin B\cos C$，则 $\tan C=-4\tan B$.

由 $a=-3b\cos C>0$，得 $\cos C<0$，即 C 是钝角，则 $\tan B>0$，

$\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\frac{3\tan B}{1+4\tan^2 B}=\frac{3}{\frac{1}{\tan B}+4\tan B}\leqslant\frac{3}{4}$，

当且仅当 $\frac{1}{\tan B}=4\tan B$，即 $\tan B=\frac{1}{2}$ 时等号成立，

所以 $\tan A$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$.

16. 【解】已知 $(c-2b)\cos A+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}=0$，由余弦定理得 $(c-2b)\cos A+a\cos C=0$，

由正弦定理得 $(\sin C-2\sin B)\cos A+\sin A\cos C=0$.

因为 $\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$，

所以 $\sin B(1-2\cos A)=0$，

又 $0<B<\pi$，$\sin B>0$，则 $\cos A=\frac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(1)由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $b^2+c^2-bc=16$，则 $(b+c)^2-3bc=16$，

又 $b+c=8$，得 $bc=16$，

故△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$.

(2)由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，可得 $\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$，又 $C=\frac{2\pi}{3}-B$，

则 $\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\frac{1}{2}$.

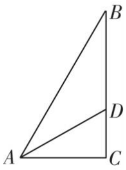
因为 C 为钝角，所以 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\ \frac{2\pi}{3}-B>\frac{\pi}{2},\end{cases}$

解得 $0<B<\frac{\pi}{6}$，

则 $0<\tan B<\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2\tan B}>\frac{3}{2}$，即 $\frac{c}{b}>2$，

故 $\frac{c}{b}$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

17. D 【解析】如图所示，在△ABC 中，由 $BD=2CD$，



得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

由 $AD=BD$，得 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BD}|=\frac{2}{3}a$，

所以 $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2$，

即 $\frac{4}{9}a^2=\frac{1}{9}c^2+\frac{4}{9}b^2+\frac{2}{9}bc$，

化简得 $4a^2=c^2+4b^2+2bc$. ①

在△ABC 中，由余弦定理得 $b^2+c^2-bc=a^2$，②

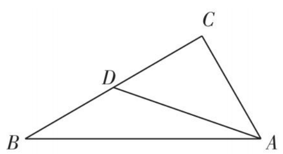
由①②解得 $c=2b$.

由 $BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $a=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

将其代入②式，得 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2=b^2+c^2-bc=3b^2$，解得 $b^2=\frac{9}{16}$，

故△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{2}b^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{9}{16}=\frac{9\sqrt{3}}{32}$. 故选 D.

18. A 【解析】如图所示，设 $AC=x$，$BC=2y$ $(x>0,y>0)$，由 AD 为 BC 边上的中线得 $CD=BD=y$.



在△ACD 中，由余弦定理得 $x^2=\frac{7}{4}+y^2-2\times\frac{\sqrt{7}}{2}y\cdot\cos\angle ADC$.

在△ABD 中，由余弦定理得 $4=\frac{7}{4}+y^2-2\times\frac{\sqrt{7}}{2}y\cdot\cos\angle ADB$.

因为 $\cos\angle ADC=-\cos\angle ADB$，所以 $x^2+4=\frac{7}{2}+2y^2$，即 $2y^2=x^2+\frac{1}{2}$. 在△ABC 中，由余弦定理得 $(2y)^2=x^2+4-2\times 2x\cdot\cos\frac{\pi}{3}$，

则有 $x^2+2x-3=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-3$（舍去），即 $AC=1$. 故选 A.

19. 【解】(1)由题意及正弦定理可得 $\cos B\cdot(\sin C\cos B+\sin B\cos C)+\frac{1}{2}\sin A=0$，

则 $\cos B\sin(B+C)+\frac{1}{2}\sin A=0$，

即 $\cos B\sin A+\frac{1}{2}\sin A=0$.

又 $\sin A>0$，所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$.

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$.

(2)由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-49}{2ac}=-\frac{1}{2}$，

整理得 $(a+c)^2-ac=49$，

又 $a+c=8$，解得 $ac=15$，

又 $a<c$，得 $a=3$，$c=5$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

可得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{3}{7}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

因为 $a<c$，所以 $A<C$，则 $A\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，

敲黑板：在三角形中，大边对大角，小边对小角

所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\frac{13}{14}$.

因为 $A+C=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\sin(2A+C)=\sin(A+A+C)$

$=\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin A\cos\frac{\pi}{3}+\cos A\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{14}\times\frac{1}{2}+\frac{13}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

(3)因为 BD 是角平分线，

所以 $\sin\angle CBD=\sin\angle ABD$，

又 $2AD=CD$，所以 $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\frac{1}{2}CD\cdot h}{\frac{1}{2}AD\cdot h}=2=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin\angle CBD}{\frac{1}{2}AB\cdot BD\sin\angle ABD}=\frac{BC}{AB}$（$h$ 为 AC 边上的高），即 $a=2c$，

结合正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{\frac{a}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)}$,

所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A=\frac{1}{2}\sin A$,

整理可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$,

又因为 $\sin^2A+\cos^2A=1$,且 $\cos A>0$,

所以$\frac{3}{4}\cos^2A+\cos^2A=1$,解得 $\cos A=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

刷上分

1. B 【解析】因为在锐角三角形 ABC 中,$b=2$,$c=\sqrt{6}$,$B=\frac{\pi}{4}$,所以由$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

得$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{\sin C}$,解得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又△ABC 是锐角三角形,则 $0<C<\frac{\pi}{2}$,

所以 $C=\frac{\pi}{3}$,

所以 $\sin A=\sin(\pi-A)=\sin(B+C)$

$=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

所以 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=2\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}+1$.

故选 B.

2. C 【解析】设 $\angle ADB=\theta$,在△ACD 中,$b^2=4+3-2\times2\times\sqrt{3}\cos(\pi-\theta)=7+4\sqrt{3}\cos\theta$,

在△ABD 中,$c^2=1+3-2\times\sqrt{3}\cos\theta=4-2\sqrt{3}\cos\theta$,

所以$\frac{b^2}{c^2}=\frac{7+4\sqrt{3}\cos\theta}{4-2\sqrt{3}\cos\theta}=13$,

解得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\theta\in(0,\pi)$,所以 $\sin\theta=\frac{1}{2}$,

所以△ABC 的面积为$\frac{1}{2}\times(BD+DC)\times AD\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

故选 C.

3. D 【解析】设 D 是 BC 边的中点,如图,连接 AD.

依题意,在△ABC 中,$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=8:7:3$,

设 $a=8k$,$b=7k$,$c=3k$,$k>0$,由余弦定理得

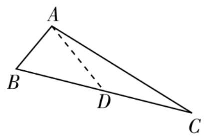
$\cos\angle BAC=\frac{49+9-64}{2\times7\times3}=-\frac{1}{7}$,

所以 $\angle BAC$ 为钝角,$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3k\times7k\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=12\sqrt{3}$,解得 $k^2=2$,则 $AB=3\sqrt{2}$,$AC=7\sqrt{2}$.由点 D 为 BC 的中点可得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

点悟:中线长度可利用向量求解

两边平方得 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\times\left(18+98-2\times3\sqrt{2}\times7\sqrt{2}\times\frac{1}{7}\right)=26$,所以$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{26}$.故选 D.



4. C 【解析】由$\frac{2b-c}{\cos C}=\frac{3}{\cos A}$及 $a=3$,可得$\frac{2b-c}{\cos C}=\frac{a}{\cos A}$,

由正弦定理得$\frac{2\sin B-\sin C}{\cos C}=\frac{\sin A}{\cos A}$,

则 $2\sin B\cos A=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$,即 $\sin B(2\cos A-1)=0$,

因为△ABC 是锐角三角形,所以 $\sin B>0$,

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$,

又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$,

得 $b=2\sqrt{3}\sin B$,$c=2\sqrt{3}\sin C$,

所以 $b+c=2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin C$

$=2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$

$=3\sqrt{3}\sin B+3\cos B$

$=6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$.

由$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$可得$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$,

则$\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$,故$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$,

所以 $b+c$ 的取值范围为$(3\sqrt{3},6]$.

故选 C.

5. ABC 【解析】对于 A,若 $A>B>C$,则 $a>b>c$,

由正弦定理可得 $\sin A>\sin B>\sin C$,故 A 正确;

对于 B,若 $a=60$,$b=30$,$B=28°$,

则 $60\sin28°<60\sin30°=30$,

因此满足条件的△ABC 有两个,故 B 正确;

对于 C,若 $0<\tan A\tan B<1$,

则$-\tan C=\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}>0$,

所以 $\tan C<0$,则 $C\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

所以△ABC 是钝角三角形,故 C 正确;

对于 D,因为在非直角三角形 ABC 中,

$-\tan C=\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$,

所以 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$,

在直角三角形 ABC 中,直角所在角的正切值不存在,故 D 不正确.

故选 ABC.

6. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】根据余弦定理可得

$c\cos B+b\cos C=c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2a}=a$.

因为 $c\cos B+b\cos C-2a\cos A=0$,

所以 $a-2a\cos A=0$,即 $1-2\cos A=0$,

解得 $\cos A=\frac{1}{2}$.

又 $A\in(0,\pi)$,可知 $A=\frac{\pi}{3}$.

7. 【解】(1)已知 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$,则有 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{4}$.

又 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$,所以 $\cos B=\frac{\sin C}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)可得 $C=\frac{\pi}{4}$,$B=\frac{\pi}{3}$,由正弦定理,不妨令$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=k(k>0)$,则有 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}k$,$b=\frac{\sqrt{3}}{2}k$.

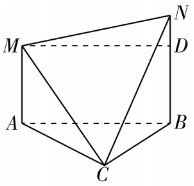
又 $S_{\triangle ABC}=3+\sqrt{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sin(B+C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}k(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=\frac{\sqrt{6}}{8}k^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{8}k^2\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=3+\sqrt{3}$,解得 $k=4$(负值舍去),故 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}k=2\sqrt{2}$.

考向 23　解三角形的实际应用

刷考点

1. D　【解析】由题意,过点 M 作 $MD\perp BN$ 于点 D,如图所示,则 $MD=AB$.



在$\triangle ACM$ 中,$AM=15$,$\angle ACM=30°$,

$\therefore AC=\sqrt{3}AM=15\sqrt{3}$.

在$\triangle BCN$ 中,$BN=21$,$\angle BCN=60°$,

$\therefore BC=\dfrac{BN}{\sqrt{3}}=7\sqrt{3}$. 由 $BD=AM=15$,得 $DN=BN-BD=6$.

在$\triangle ACB$ 中,$\angle ACB=120°$,由余弦定理得

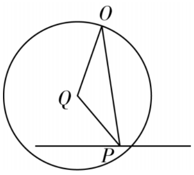
$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB}=\sqrt{(15\sqrt{3})^2+(7\sqrt{3})^2-2\times15\sqrt{3}\times7\sqrt{3}\cos\angle120°}=\sqrt{1\ 137}$,

$\therefore DM=AB=\sqrt{1\ 137}$.

在 Rt$\triangle DMN$ 中,$\angle MDN=90°$,则由勾股定理得 $MN=\sqrt{DM^2+DN^2}=\sqrt{(\sqrt{1\ 137})^2+6^2}=\sqrt{1\ 173}$. 故选 D.

2. 8　【解析】设在 t h 后,该海滨城市开始受到台风侵袭,此时台风中心位于点 Q,

则 $OQ=130+10t$, $OP=350$, $PQ=20t$, 且$\angle OPQ=\theta-60°$.



因为 $\cos\theta=\dfrac{1}{7}$,$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$,

则 $\cos\angle OPQ=\cos(\theta-60°)=\cos\theta\cos60°+\sin\theta\sin60°=\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{13}{14}$.

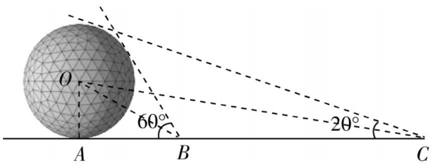
在$\triangle OPQ$ 中,由余弦定理可得 $OQ^2=PQ^2+OP^2-2PQ\cdot OP\cos\angle OPQ$,

即 $(130+10t)^2=(20t)^2+350^2-2\times20t\times350\times\dfrac{13}{14}$,整理可得 $t^2-52t+352=0$,

解得 $t=8$ 或 $t=44$,故 8 h 后该海滨城市开始受到台风侵袭.

3. B　【解析】设该球体建筑物的半径为 R,球心为 O,如图,连接 OA,OB,OC,易知$\angle OBA=30°$,$\angle OCA=10°$,故 $AB=\sqrt{3}R$,$AC=\dfrac{R}{\tan10°}$,所以$\dfrac{R}{\tan10°}-\sqrt{3}R=100$,解得

$R=\dfrac{100}{\dfrac{1}{\tan10°}-\sqrt{3}}=\dfrac{100\sin10°}{\cos10°-\sqrt{3}\sin10°}=\dfrac{100\sin10°}{2\sin(30°-10°)}=\dfrac{50\sin10°}{\sin20°}=\dfrac{50\sin10°}{2\sin10°\cos10°}=\dfrac{25}{\cos10°}\approx\dfrac{25}{0.985}$,则 $2R\approx50.76$. 故选 B.



4. B　【解析】设 $D_1E=h$,因为 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,$\tan\beta=2$,$\tan\gamma=\sqrt{3}$,

所以 $A_1D_1=\dfrac{h}{\tan\alpha}=\dfrac{\sqrt{6}h}{3}$,$B_1D_1=\dfrac{h}{\tan\beta}=\dfrac{h}{2}$,$C_1D_1=\dfrac{h}{\tan\gamma}=\dfrac{\sqrt{3}h}{3}$.

因为 $AC=20$,B 为 AC 的中点,

所以 $A_1C_1=20$,B_1 为 A_1C_1 的中点,

故 $A_1B_1=B_1C_1=10$.

在$\triangle A_1B_1D_1$ 中,由余弦定理得

$\cos\angle A_1B_1D_1=\dfrac{100+\dfrac{h^2}{4}-\dfrac{2h^2}{3}}{2\times10\times\dfrac{h}{2}}=\dfrac{100-\dfrac{5h^2}{12}}{10h}$,

在$\triangle C_1B_1D_1$ 中,由余弦定理得

$\cos\angle C_1B_1D_1=\dfrac{100+\dfrac{h^2}{4}-\dfrac{h^2}{3}}{2\times10\times\dfrac{h}{2}}=\dfrac{100-\dfrac{h^2}{12}}{10h}$,

由于$\angle A_1B_1D_1+\angle C_1B_1D_1=\pi$,

故 $\cos\angle A_1B_1D_1+\cos\angle C_1B_1D_1=0$,

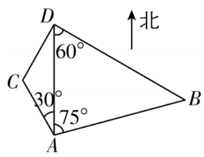
即$\dfrac{100-\dfrac{5h^2}{12}}{10h}+\dfrac{100-\dfrac{h^2}{12}}{10h}=0$,解得 $h=20$(负值舍去),

故建筑物的高度 $DE=h+2=22$(米).

故选 B.

5. AC　【解析】在$\triangle ABD$ 中,由已知得$\angle ADB=60°$,$\angle DAB=75°$,$AB=12\sqrt{6}$,

则 $B=45°$,由正弦定理得 $AD=\dfrac{AB\sin B}{\sin\angle ADB}=\dfrac{12\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=24$,所以



A 处与 D 处之间的距离为 24 n mile,故 A 正确;

在$\triangle ADC$ 中,由余弦定理得 $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos30°$,且 $AC=8\sqrt{3}$,$AD=24$,解得 $CD=8\sqrt{3}$,所以灯塔 C 与 D 处之间的距离为 $8\sqrt{3}$ n mile,故 B 错误;

因为 $AC=CD=8\sqrt{3}$,所以$\angle CDA=\angle CAD=30°$,灯塔 C 在 D 处的西偏南 60°方向上,故 C 正确;

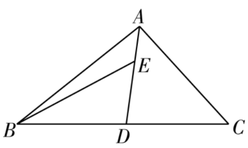
灯塔 B 在 D 处的南偏东 60°方向上,即 D 处在灯塔 B 的北偏西 60°方向上,故 D 错误. 故选 AC.

专题 7　平面向量

考向 24　平面向量的线性运算、基本定理及坐标运算

刷考点

1. A　【解析】因为 $2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$,所以 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

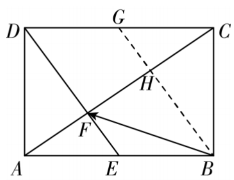


又 AD 为 BC 边上的中线,由平行四边形法则可得 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

所以 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}=-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

2. D　【解析】如图,取 CD 边的中点 G,连接 BG 交 AC 于点 H.



$\because BE/\!/DG$,$BE=DG$,$\therefore$ 四边形 $BEDG$ 为平行四边形,$\therefore BG/\!/DE$.

又$\because E$ 为 AB 边的中点,$\therefore AF=FH$,同理可得 $CH=FH$,

$\therefore \overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$.

$\therefore \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. 故选 D.

3. B　【解析】因为 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 共线,所以 $\lambda(2\lambda+1)-1=0$,解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

若 $\lambda=-1$,则 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{c}$,所以 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 方向相反,不符合题意;

若 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,则 $\boldsymbol{c}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{c}$,所以 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 方向相同,故 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

故选 B.

4. C　【解析】对于 A，因为 $\overrightarrow{AB}=e_1+2e_2$，$\overrightarrow{BC}=-3e_1+2e_2$，所以不存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$，故 A,B,C 三点不共线，故 A 错误；

对于 B，因为 $\overrightarrow{AB}=e_1+2e_2$，$\overrightarrow{DA}=3e_1-6e_2$，所以不存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{DA}$，故 A,B,D 三点不共线，故 B 错误；

对于 C，因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-2e_1+4e_2$，$\overrightarrow{DA}=3e_1-6e_2$，所以 $\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$，又因为有公共点 A，所以 A,C,D 三点共线，故 C 正确；

对于 D，因为 $\overrightarrow{BC}=-3e_1+2e_2$，$\overrightarrow{BD}=-\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}=-3e_1+6e_2-e_1-2e_2=-4e_1+4e_2$，所以不存在实数 λ 使得 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{BD}$，故 B,C,D 三点不共线，故 D 错误.

故选 C.

5. 2　【解析】由题图可得 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$.

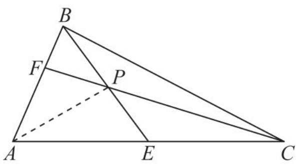
因为向量 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 共线，所以存在唯一实数 μ，使 $\boldsymbol{c}=\mu(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，

即 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\mu\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$，

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}2=\mu\lambda,\\1=\mu,\end{cases}$ 解得 $\lambda=2$.

6. B　【解析】因为在平行四边形 $ABCD$ 中，M 为 BC 的中点，AC 与 MD 相交于点 P，所以 $\frac{AP}{PC}=\frac{AD}{CM}=2$，所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$. 又 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，所以 $x=y=\frac{2}{3}$，$x+y=\frac{4}{3}$. 故选 B.

7. B　【解析】如图，连接 AP，设 $\overrightarrow{FP}=x\overrightarrow{FC}(0<x<1)$.



因为 E 为 AC 的中点，$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AF}$，

所以 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FP}=\overrightarrow{AF}+x\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AF}+x(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AF})=(1-x)\overrightarrow{AF}+x\overrightarrow{AC}(0<x<1)$，又 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AE}=\frac{3(1-\lambda)}{2}\overrightarrow{AF}+\frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AC}$，所以

$\begin{cases}\frac{3(1-\lambda)}{2}=1-x,\\\frac{\lambda}{2}=x,\end{cases}$ 即 $\frac{3(1-\lambda)}{2}+\frac{\lambda}{2}=\frac{3-2\lambda}{2}=1$，

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$. 故选 B.

易错警示　对于向量的分解问题，求解的一个重要方法是待定系数法，然后利用向量相等求解参数. 若不能正确设出向量分解式，则难以求解.

8. -4　【解析】设 MC 交 AB 于点 E，

$\because\ \angle ABC=120°$，$AB=BC$，$\therefore\ \angle BCA=\angle BAC=30°$. 设 $AB=a$，则易知 $AC=\sqrt{3}a$.

$\because\ M$ 为正三角形 ABD 的中心，$\therefore\ \angle DAM=\angle MAB=\angle BAC=30°$，$AM=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，$\therefore\ AB$ 是 $\angle MAC$ 的角平分线，$\therefore\ \frac{AM}{AC}=\frac{ME}{EC}=\frac{1}{3}$，

提示：角平分线定理

则 $\overrightarrow{ME}=\frac{1}{4}\overrightarrow{MC}$. 设 $\overrightarrow{ME}=m\overrightarrow{MA}+n\overrightarrow{MB}(m,n\in\mathbf{R})$，则 $\overrightarrow{MC}=4m\overrightarrow{MA}+4n\overrightarrow{MB}$.

$\because\ E,A,B$ 三点共线，$\therefore\ m+n=1$.

由 $x\overrightarrow{MA}+y\overrightarrow{MB}+z\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$，

得 $\overrightarrow{MC}=-\frac{x}{z}\overrightarrow{MA}-\frac{y}{z}\overrightarrow{MB}$，

$\therefore\ 4m=-\frac{x}{z}$，$4n=-\frac{y}{z}$，$\therefore\ \frac{x+y}{z}=-4$.

9. B　【解析】因为 $A(1,0)$，$B(2,1)$，$C(4,3)$，所以 $\overrightarrow{AB}=(1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(2,2)$，所以 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{BC}=-2\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=4$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}=-4$，则 A，C，D 错误，B 正确. 故选 B.

10. C　【解析】若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x(x+1)+2x=x^2+3x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-3$，

所以"$x=-3$"是"$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$"的充分条件，不是必要条件，"$x=0$"是"$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$"的充分条件，故 A 错误，C 正确.

若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $2(x+1)=x^2$，即 $x^2-2x-2=0$，

解得 $x=1\pm\sqrt{3}$，

所以"$x=-3$"不是"$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$"的必要条件，"$x=-1+\sqrt{3}$"不是"$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$"的充要条件，

故 B，D 错误.

故选 C.

11. ACD　【解析】对于 B，C，由题意可知点 $A(2,1)$，点 $B(2+t,1-t)$，故 $\overrightarrow{AB}=(t,-t)$.

因为 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{2}$，所以 $t^2+(-t)^2=8$，所以 $t^2=4$，

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}>0$，即 $(t,-t)\cdot(2,1)>0$，化简得 $t>0$，故 $t=2$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(2,-2)$，$B(4,-1)$，故 B 错误，C 正确.

对于 D，因为点 B 绕点 A 沿逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 得到点 P，所以 $\overrightarrow{AP}=\left(2\cos\frac{\pi}{3}+2\sin\frac{\pi}{3},2\sin\frac{\pi}{3}-2\cos\frac{\pi}{3}\right)=(1+\sqrt{3},\sqrt{3}-1)$，

则 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=(2,1)+(1+\sqrt{3},\sqrt{3}-1)=(3+\sqrt{3},\sqrt{3})$，可得点 P 的坐标为 $(3+\sqrt{3},\sqrt{3})$，故 D 正确.

对于 A，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3}-1,\sqrt{3}+1)$，则 $|\overrightarrow{BP}|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+1)^2}=2\sqrt{2}$，故 A 正确. 故选 ACD.

12. 2　$\sqrt{2}+\frac{3}{2}$　【解析】由 $\overrightarrow{OA}=(-2,4)$，$\overrightarrow{OB}=(-a,2)$，$\overrightarrow{OC}=(b,0)$，可得 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-a+2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(b+2,-4)$.

因为 A,B,C 三点共线，

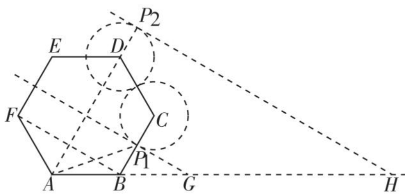
所以向量 $\overrightarrow{AB}=(-a+2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(b+2,-4)$ 共线，

所以 $(-a+2)\times(-4)-(-2)\times(b+2)=0$，

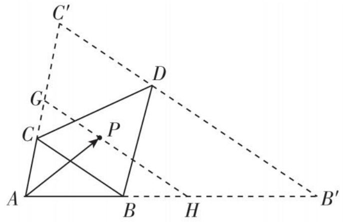
化简得 $2a+b=2$，

则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(2a+b)=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{2a}{b}+3\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}+3\right)=\sqrt{2}+\frac{3}{2}$，当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{2a}{b}$，即 $a=2-\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{2}-2$ 时取等号，所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值为 $\sqrt{2}+\frac{3}{2}$.

13. C　【解析】连接 BF，过线段 BC 的中点 P_1 作 BF 的平行线，交 AB 的延长线于点 G，分别以 D,C 为圆心，1 为半径作圆，过 AB 延长线上点 H 作平行于 BF 的直线 HP_2，且与圆 D 相切于点 P_2，连接 AP_1，AP_2，如图所示. 设 $\overrightarrow{AP_1}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AF}$，由等和线定理可知 $m+n=\frac{AG}{AB}=\frac{2AB}{AB}=2$，此时 $m+n$ 取最小值，点 P 位于点 P_1 处；同理，设 $\overrightarrow{AP_2}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AF}$，由等和线定理可知 $m+n=\frac{AH}{AB}=5$，此时 $m+n$ 取最大值，点 P 位于点 P_2 处. 综上可知，$m+n\in[2,5]$.



14. C　【解析】过点 P 作 $GH/\!/BC$，分别交 AC,AB 的延长线于点 G,H，过点 D 作 $C'B'/\!/GH$，分别交 AC,AB 的延长线于点 C',B'，则 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AG}+y\overrightarrow{AH}$，且 $x+y=1$.



当点 P 位于点 D 处时,G,H 分别位于 C',B'处,

∵ $\triangle BCD$ 与$\triangle ABC$ 的面积之比为 2,

∴ $AC'=3AC,AB'=3AB$,

∴ $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AG}+y\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AC'}+y\overrightarrow{AB'}=x\cdot 3\overrightarrow{AC}+y\cdot 3\overrightarrow{AB}=\mu\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AB}$,

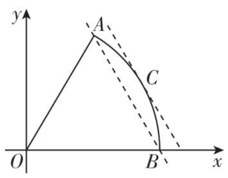
∴ $\mu=3x,\lambda=3y$,即 $\lambda+\mu=3x+3y=3$.

当点 P 位于点 A 处时,显然有 $\lambda+\mu=0$,

∴ $\lambda+\mu$ 的取值范围是$[0,3]$.故选 C.

15. $\left[1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ 【解析】方法一:设 $\lambda+\mu=k$,如图,当 C 位于点 A 或点 B 时,A,B,C 三点共线,所以 $k=\lambda+\mu=1$;

由等和线定理可知,当点 C 运动到 $\widehat{AB}$ 的中点时,$\lambda+\mu$ 最大,$k=\lambda+\mu=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,所以 $\lambda+\mu\in\left[1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.



方法二:设圆 O 的半径为 1,由已知可设 O 为坐标原点,OB 所在直线为 x 轴,过 O 点作 x 轴的垂线为 y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系,

其中 $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$B(1,0)$,$C(\cos\theta,\sin\theta)$,其中$\angle BOC=\theta,\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$.

点悟:由点 C 在弧 AB 上可知 $OC=1$,坐标设为三角形式更易求解

由 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}(\lambda,\mu\in\mathbf{R})$,可得

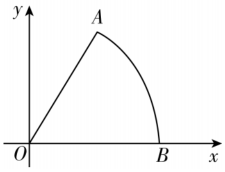
$(\cos\theta,\sin\theta)=\lambda\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mu(1,0)$,整理得$\frac{1}{2}\lambda+\mu=\cos\theta,\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda=\sin\theta$,

解得 $\lambda=\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{3}},\mu=\cos\theta-\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$,

则 $\lambda+\mu=\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}+\cos\theta-\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$. 又 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$,

所以 $\theta+\frac{\pi}{3}\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]$,$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\in\left[\frac{\sqrt{3}}{2},1\right]$,当且仅当 $\theta=\frac{\pi}{6}$时取到最大值 1,当 $\theta=0$ 或 $\theta=\frac{\pi}{3}$时,取到最小值$\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\lambda+\mu\in\left[1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$.



16. D 【解析】因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$,所以 $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$,

所以 $AD\perp CB$,即直线 AD 一定经过三角形 ABC 的垂心.

故选 D.

17. B 【解析】由 $\overrightarrow{QR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{QB}$ 可得 $\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PQ})$,

整理可得 $\overrightarrow{PR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{PA}$.

由 $\overrightarrow{RP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{RC}$ 可得 $\overrightarrow{RP}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PR})$,整理可得 $\overrightarrow{PR}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}$,

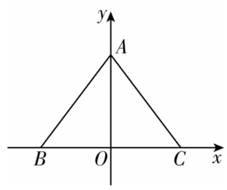
所以$-\frac{1}{2}\overrightarrow{PC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{PA}$,整理得 $4\overrightarrow{PA}+6\overrightarrow{PB}+9\overrightarrow{PC}=\mathbf{0}$.

由奔驰定理可得 $S_{\triangle PBC}:S_{\triangle PAC}:S_{\triangle PAB}=4:6:9$,故 $S_{\triangle ABC}:S_{\triangle PBC}=(4+6+9):4=19:4$.

方法技巧 已知 O 是$\triangle ABC$ 内的一点,若$\triangle BOC$,$\triangle AOC$,$\triangle AOB$ 的面积分别记为 S_1,S_2,S_3,则 $S_1\cdot\overrightarrow{OA}+S_2\cdot\overrightarrow{OB}+S_3\cdot\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$,这个定理被形象地称为“奔驰定理”.

18. BCD 【解析】在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC=5$,$BC=6$,P 为$\triangle ABC$ 内的一点,

取 BC 的中点 O 为坐标原点,连接 OA,分别以 BC,OA 所在直线为 x,y 轴建立如图所示的平面直角坐标系,



则 $A(0,4),B(-3,0),C(3,0)$.

对于选项 A,若 P 为$\triangle ABC$ 的重心,则 $x_P=\dfrac{0-3+3}{3}=0,y_P=\dfrac{4+0+0}{3}=\dfrac{4}{3}$,

则 $P\left(0,\frac{4}{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{AP}=\left(0,-\frac{8}{3}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(-3,-4)$,$\overrightarrow{AC}=(3,-4)$,

若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,则$\begin{cases}-3x+3y=0,\\-4x-4y=-\frac{8}{3},\end{cases}$

解得 $x=y=\frac{1}{3}$,则 $x+y=\frac{2}{3}$,故 A 不正确;

对于选项 B,若 P 为$\triangle ABC$ 的外心,则点 P 必在直线 AO 上,

所以 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{BC}=(-3,0)\cdot(6,0)=-18$,故 B 正确;

对于选项 C,若 P 为$\triangle ABC$ 的垂心,则点 P 必在直线 AO 上,设 $P(0,m)$,

则 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AB}=(-3,m)\cdot(-3,-4)=9-4m=0$,解得 $m=\frac{9}{4}$,

此时 $\overrightarrow{AP}=\left(0,-\frac{7}{4}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(-3,-4)$,$\overrightarrow{AC}=(3,-4)$,

若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,则$\begin{cases}-3x+3y=0,\\-4x-4y=-\frac{7}{4},\end{cases}$

解得 $x=y=\frac{7}{32}$,则 $x+y=\frac{7}{16}$,故 C 正确;

对于选项 D,若 P 为$\triangle ABC$ 的内心,设内切圆半径为 r,

则$\frac{1}{2}\times6\times4=\frac{1}{2}\times r\times(5+5+6)$,

敲黑板:利用内切圆半径与三边长及面积之间的关系求解

解得 $r=\frac{3}{2}$,则 $P\left(0,\frac{3}{2}\right)$,

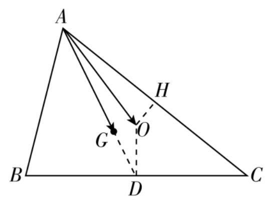
此时 $\overrightarrow{AP}=\left(0,-\frac{5}{2}\right)$,$\overrightarrow{AB}=(-3,-4)$,$\overrightarrow{AC}=(3,-4)$,

若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$,则$\begin{cases}-3x+3y=0,\\-4x-4y=-\frac{5}{2},\end{cases}$

解得 $x=y=\frac{5}{16}$,则 $x+y=\frac{5}{8}$,故 D 正确.

故选 BCD.

19. $2\sqrt{3}$ 【解析】延长 AG 交 BC 于点 D,连接 OD,作 $OH\perp AC$ 于点 H,则 D,H 分别为 BC,CA 的中点,如图所示.



易知 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AO}=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AO}|\cos\angle OAC=|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$,

同理可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$.

由重心的性质可知 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AO}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2)=4$,

即 $\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2=24$.

又 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{3}{2}|\overrightarrow{AG}|=3$, 且 $|\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=3$, 可得 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=6$,

所以 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=36$, 可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6$.

因此 $|\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$, 即 $|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{3}$.

刷上分

1. A 【解析】对于 A, $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=-5\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{AB}$,

则 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BD}$ 共线, 又因为有公共点 B, 所以 A,B,D 三点共线, 故 A 正确;

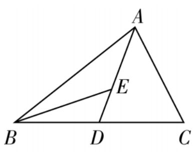
对于 B, 因为 $\frac{1}{-5}\neq\frac{2}{6}$, 所以 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ 不共线, 则 A,B,C 三点不共线, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $\frac{-5}{7}\neq\frac{6}{-2}$, 所以 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ 不共线, 则 B,C,D 三点不共线, 故 C 错误;

对于 D, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-4\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$, 因为 $\frac{-4}{7}\neq\frac{8}{-2}$, 所以 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD}$ 不共线, 则 A,C,D 三点不共线, 故 D 错误.

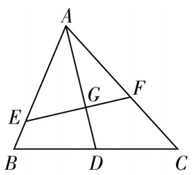
故选 A.

2. D 【解析】$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.



故选 D.

3. B 【解析】如图,



取 BC 的中点 D, 则 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

故 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=$

敲黑板: 三角形重心到顶点的距离为所在中线长的$\frac{2}{3}$

$\frac{x}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{y}{3}\overrightarrow{AF}$.

$\because E,G,F$ 三点共线,

$\therefore \frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1$, 即 $x+y=3$,

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\geqslant\frac{1}{3}\times(2+2)=\frac{4}{3}$,

当且仅当 $x=y=\frac{3}{2}$ 时, 取等号.

故选 B.

4. B 【解析】以 O 为坐标原点, 过点 O 且以向量 $\boldsymbol{b}$ 的方向为 x 轴的正方向, 建立平面直角坐标系, 则 $\boldsymbol{b}=(2,0)$, 设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}=(x,y)$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}=1$,

可得 $(x+2)^2+y^2=1$, 所以点 A 的轨迹方程为 $(x+2)^2+y^2=1$,

所以点 A 的轨迹是以点 $(-2,0)$ 为圆心, 1 为半径的圆, 且 $-1\leqslant x+2\leqslant 1$,

解得 $-3\leqslant x\leqslant -1$.

因为 $\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$, 所以 $\boldsymbol{c}=\lambda(x,y)+\mu(2,0)=(\lambda x+2\mu,\lambda y)$.

因为 $\lambda+2\mu=1$,

所以 $|\boldsymbol{c}|^2=(\lambda x+2\mu)^2+(\lambda y)^2$

$=(\lambda x+1-\lambda)^2+(\lambda y)^2$

$=\lambda^2[(x-1)^2+y^2]+2\lambda(x-1)+1$

$=-(6x+2)\lambda^2+2\lambda(x-1)+1$.

因为 $-3\leqslant x\leqslant -1$, 则 $4\leqslant -(6x+2)\leqslant 16$,

所以当 $\lambda=\frac{2(x-1)}{2(6x+2)}=\frac{x-1}{6x+2}$ 时, $|\boldsymbol{c}|^2$ 取得最小值,

且 $m^2=-(6x+2)\cdot\frac{(x-1)^2}{(6x+2)^2}+\frac{2(x-1)^2}{6x+2}+1=1-\frac{(x-1)^2}{-6x-2}$,

令 $t=-6x-2\in[4,16]$, 可得 $x=-\frac{t+2}{6}$, 所以

$$m^2=1-\frac{\left(-\frac{t+2}{6}-1\right)^2}{t}=\frac{5}{9}-\frac{1}{36}\left(t+\frac{64}{t}\right),$$

令 $g(t)=t+\frac{64}{t}$, 其中 $t\in[4,16]$, 由对勾函数的图象及性质可知, 函数 $g(t)$ 在 $[4,8)$ 上单调递减, 在 $(8,16]$ 上单调递增,

令 $f(t)=\frac{5}{9}-\frac{1}{36}\left(t+\frac{64}{t}\right)$, 其中 $4\leqslant t\leqslant 16$,

则函数 $f(t)$ 在 $[4,8)$ 上单调递增, 在 $(8,16]$ 上单调递减,

所以 $f(t)_{\max}=f(8)=\frac{5}{9}-\frac{1}{36}\times 16=\frac{1}{9}$,

又 $f(4)=f(16)=0$, 即 $f(t)_{\min}=0$, 所以 $m^2\in\left[0,\frac{1}{9}\right]$, 即 $0\leqslant m\leqslant\frac{1}{3}$.

故 P 为错误结论, Q 为正确结论.

故选 B.

5. ABD 【解析】因为 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EB}$, 所以 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, 又因为 D 是边 AC 的三等分点且靠近点 C, 所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, 故 A 正确;

设 $\overrightarrow{CO}=\lambda\overrightarrow{CE}$, 则 $\overrightarrow{CO}=\lambda(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE})=\lambda\overrightarrow{CA}+\frac{\lambda}{4}\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{CA}+\frac{\lambda}{4}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})=\frac{9\lambda}{4}\overrightarrow{CD}+\frac{\lambda}{4}\overrightarrow{CB}$,

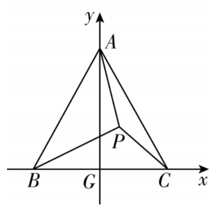
因为 B,O,D 三点共线, 所以 $\frac{9\lambda}{4}+\frac{\lambda}{4}=1$, 解得 $\lambda=\frac{2}{5}$, 所以 $S_{\triangle BOC}=\frac{2}{5}S_{\triangle BCE}=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\cdot S_{\triangle ABC}=\frac{3}{10}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=\frac{6\sqrt{3}}{5}$, 故 B 正确;

因为 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{OE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$,

所以 $2\overrightarrow{OE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$,

又 $\overrightarrow{CO}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CE}$, 所以 $\overrightarrow{OC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{OE}$, 所以

$\left|\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}\right|=|2\overrightarrow{OE}+3\overrightarrow{OC}|=0$, 故 C 错误;



以线段 BC 的中点 G 为坐标原点, BC 所在直线为 x 轴, 线段 BC 的垂直平分线 AG 为 y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系,

则点 $A(0,2\sqrt{3})$, $B(-2,0)$, $C(2,0)$,

设点 $P(x,y)$, 则 $\overrightarrow{PA}=(-x,2\sqrt{3}-y)$, $\overrightarrow{PB}=(-2-x,-y)$, $\overrightarrow{PC}=(2-x,-y)$, 故 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(-2-2x,2\sqrt{3}-2y)$, $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}=-(2+2x)(2-x)-y(2\sqrt{3}-2y)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-6$,

所以当 $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时取得最小值 -6, 故 D 正确. 故选 ABD.

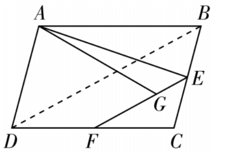
6. $\frac{5}{9}$ 【解析】如图, 连接 BD, 结合题设易知

$EF/\!/BD$ 且 $EF=\frac{1}{2}BD$,

则 $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{6}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=\frac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,



所以 $\lambda=\frac{5}{6}$, $\mu=\frac{2}{3}$, 则 $\lambda\mu=\frac{5}{9}$.

7.【解】(1)∵ E,F 分别为 AB,AD 的中点,

∴ $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}$.

(2)设 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$,

∵ E,F 分别为 AB,AD 的中点,

∴ $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}=2x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+2y\overrightarrow{AF}$.

∵ M,E,D 三点共线, M,B,F 三点共线,

∴ $\begin{cases}2x+y=1,\\ x+2y=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{3},\\ y=\frac{1}{3},\end{cases}$

即 $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

由题易知 CD 与 BE 平行且相等,∴ 四边形 $CDEB$ 是平行四边形,

∴ $DE=CB=AD=AE=3$, $\triangle ADE$ 是等边三角形,

∴ $|\overrightarrow{AM}|^2=\overrightarrow{AM}^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)^2$

$=\frac{1}{9}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2)$

$=\frac{1}{9}\times(6^2+2\times6\times3\cos60^\circ+3^2)=7$,

则 $AM=\sqrt{7}$.

考向25 平面向量的数量积及其应用

刷考点

1. B 【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2]=\frac{1}{4}\times(19-11)=2$. 故选 B.

2. A 【解析】因为 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

所以 $\overrightarrow{DF}^2=\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)^2=\overrightarrow{AB}^2-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AD}^2$, 即 $13=16-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+1$,

解得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=6$.

又 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$,

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DF}=\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\frac{2}{9}\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{2}\times4^2+\frac{1}{2}\times6-\frac{2}{9}\times3^2=9$, 故选 A.

3. A 【解析】连接 AB,CD, 设 AB 的中点为 E, CD 的中点为 F, 连接 OE,OF, 则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OF}$.

由 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}$, 可知 $|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|\cdot\cos\angle COD=\cos\angle COD=\frac{1}{2}$,

所以 $\angle COD=\frac{\pi}{3}$,

故 $\triangle OCD$ 为等边三角形, 则 $|\overrightarrow{OF}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

同理可得, $|\overrightarrow{OE}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

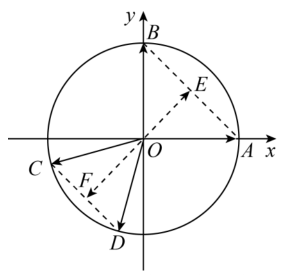
所以 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})$

提示:将 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$ 转化为以点 O 为起点的向量表示的形式

$=2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}^2+\overrightarrow{OD}^2-(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$

$=-4\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}+2$.

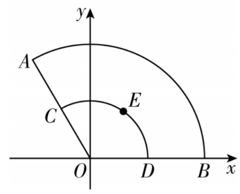
如图,当 $\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF}$ 方向相反时, $-4\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}+2$ 有最大值,为 $-4|\overrightarrow{OE}|\cdot|\overrightarrow{OF}|\cos\pi+2=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+2=2+\sqrt{6}$, 即 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB}$ 的最大值是 $2+\sqrt{6}$. 故选 A.



4. 24 【解析】因为 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, 所以 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$, 即 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AC}$,

故 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AB}|\cdot\cos60^\circ=16+8=24$.

5. -8 $[-12,-8]$ 【解析】以 O 为坐标原点, OB 为 x 轴建立平面直角坐标系,如图,



由 $\angle AOB=120^\circ$, $OA=2OC=2OD=4$, 得 $A(-2,2\sqrt{3})$, $B(4,0)$, $D(2,0)$, $C(-1,\sqrt{3})$,

则 $\overrightarrow{OD}=(2,0)$, $\overrightarrow{DA}=(-4,2\sqrt{3})$,

所以 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{DA}=-8$.

设 $E(2\cos\theta,2\sin\theta)$, $0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$, 则 $\overrightarrow{EA}=(-2-2\cos\theta,2\sqrt{3}-2\sin\theta)$, $\overrightarrow{EB}=(4-2\cos\theta,-2\sin\theta)$,

故 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}=(-2-2\cos\theta)(4-2\cos\theta)+(2\sqrt{3}-2\sin\theta)(-2\sin\theta)$

$=-8-4\cos\theta+4\cos^2\theta-4\sqrt{3}\sin\theta+4\sin^2\theta$

$=-4-4\sqrt{3}\sin\theta-4\cos\theta$

$=-4-8\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$,

由 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{2\pi}{3}$, 得 $\frac{\pi}{6}\leqslant\theta+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$, $\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$, $-12\leqslant-4-8\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant-8$,

所以 $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ 的取值范围是 $[-12,-8]$.

6.【解】(1)∵ $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$, ∴ $\cos x\cdot\sin x=\sqrt{3}\sin^2x$.

∵ $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, ∴ $\sin x\neq0$,

∴ $\cos x=\sqrt{3}\sin x$, 即 $\tan x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, ∴ $x=\frac{\pi}{6}$.

(2)由题意得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(\cos x-1,\sin x+\sqrt{3})$,

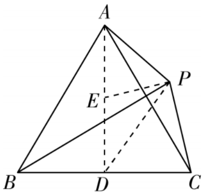
则 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x(\cos x-1)+2\sin x(\sqrt{3}+\sin x)-4=2\sqrt{3}\sin x\cos x+2\sin^2x-4=\sqrt{3}\sin2x+1-\cos2x-4=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-3$.

∵ $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, ∴ $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$,

故当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$, 即 $x=\frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)$ 取最大值 -1,

∴ $f(x)$ 的最大值为 -1, 此时 $x=\frac{\pi}{3}$.

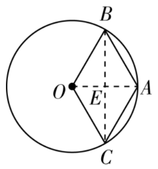
7. B 【解析】如图，取 BC 中点 D，连接 AD，PD.



可知 $AD=2\sqrt{3}$，由平行四边形法则知 $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PD}$，则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}$.

在△PAD 中，取 AD 的中点 E，连接 PE，则 $AE=\sqrt{3}$，由极化恒等式得，$2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PD}=2(\overrightarrow{PE}^2-\overrightarrow{AE}^2)=2(\overrightarrow{PE}^2-3)$. 因为 P 为△ABC 所在平面内一点，所以当点 P 与点 E 重合时，即 $PE=0$ 时，有最小值，最小值为 -6. 故选 B.

8. A 【解析】由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}$ 得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AO}$，



在平行四边形 $ABOC$ 中，$OB=OC$，故易知平行四边形 $ABOC$ 是菱形，且 $BC=2\sqrt{3}$.

设菱形 $ABOC$ 对角线的交点为 E，

由极化恒等式得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}=\overrightarrow{PE}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{AO}^2=\overrightarrow{PE}^2-1$，$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PE}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2=\overrightarrow{PE}^2-3$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PE}^2-4$.

因为 P 是圆内一点，所以 $0\leqslant|\overrightarrow{PE}|<3$，

所以 $-4\leqslant 2\overrightarrow{PE}^2-4<14$，即 $-4\leqslant\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}<14$. 故选 A.

9. 9 【解析】由极化恒等式可得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}^2-\frac{\overrightarrow{BD}^2}{4}=-7$，解得 $|\overrightarrow{BD}|=8$，故由极化恒等式可得 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}^2-\frac{\overrightarrow{BD}^2}{4}=9$.

一题多解 在平面四边形 $ABCD$ 中，O 为 BD 的中点，且 $OA=3$，$OC=5$，∴ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$. 若 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-7$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{AO}^2+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AO}^2-\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{OB}^2=3^2-\overrightarrow{OB}^2=-7$，∴ $\overrightarrow{OB}^2=16$，∴ $|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OD}|=4$，∴ $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OC})=\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{BO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{DO}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}^2=-\overrightarrow{BO}^2+\overrightarrow{OC}\cdot[-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})]+\overrightarrow{OC}^2=-4^2+0+5^2=9$.

10. A 【解析】由 $\boldsymbol{a}=(3,4)$，$\boldsymbol{b}=(2,-1)$ 得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times2+4\times(-1)=2$，$|\boldsymbol{a}|=5$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 在向量 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{2}{5}\cdot\frac{(3,4)}{5}=\frac{2}{25}(3,4)=\left(\frac{6}{25},\frac{8}{25}\right)$. 故选 A.

11. A 【解析】∵ $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=-\boldsymbol{a}$，∴ $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|^2$.

∴ $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{-|\boldsymbol{a}|^2}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}=-\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$，故选 A.

12. A 【解析】因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $2(m+1)-m=0$，解得 $m=-2$，所以 $\boldsymbol{a}=(2,-2)$，

则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{c}$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}\cdot\frac{\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|}=\frac{2\times2-2\times1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}=\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$. 故选 A.

13. ABD 【解析】对于选项 A，因为 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，若 $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0$，故 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，所以 A 正确；

对于选项 B，若 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2=0$，故 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$，所以 B 正确；

对于选项 C，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$，得 $|\boldsymbol{a}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle$，不能确定 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$，所以 C 错误；

对于选项 D，$[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}]\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=0$，

故 $[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}]\perp\boldsymbol{a}$，所以 D 正确.

故选 ABD.

14. 1 【解析】∵ $\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，∴ $(\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{b}^2=0$，即 $6+4-\lambda\times10=0$，解得 $\lambda=1$.

15. (4,3)(答案不唯一) 【解析】根据题意，得 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(-3,4)$，又 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{c}$，则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-3m+4n=0$，即 $m=\frac{4}{3}n$，当 $n=3$ 时，$m=4$，则 $\boldsymbol{c}=(4,3)$(答案不唯一).

16. 【解】(1)由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

即 $4\cos\theta\sin\theta-1=0$，化简得 $\sin2\theta=\frac{1}{2}$.

因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $2\theta\in(0,\pi)$，所以 $2\theta=\frac{\pi}{6}$ 或 $2\theta=\frac{5\pi}{6}$，解得 $\theta=\frac{\pi}{12}$ 或 $\theta=\frac{5\pi}{12}$.

(2)由题意得，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=4|\boldsymbol{b}|^2$，化简得 $|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3|\boldsymbol{b}|^2$，

即 $4\cos^2\theta+1-2(4\sin\theta\cos\theta-1)=3(4\sin^2\theta+1)$，

整理得 $4\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta=3$①.

点悟：等号左边除以 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$，进而化简

因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\theta\neq0$，对①齐次化后得 $\frac{4-2\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=3$，即 $3\tan^2\theta+2\tan\theta-1=0$，

即 $(3\tan\theta-1)(\tan\theta+1)=0$，

解得 $\tan\theta=\frac{1}{3}$ 或 $\tan\theta=-1$.

因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\tan\theta=\frac{1}{3}$.

17. C 【解析】$|3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|=\sqrt{(3\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2}=\sqrt{9\boldsymbol{b}^2+\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}=\sqrt{9\times2+1-6\times1\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{13}$.

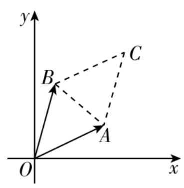
故选 C.

18. B 【解析】由已知得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e})^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+|\boldsymbol{e}|^2}=2\sqrt{3}$，又 $||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|-|\boldsymbol{e}||\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{e}|\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{e}|$，∴ $2\sqrt{3}-1\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant2\sqrt{3}+1$.

当 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 同向时，$2\sqrt{3}+1=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，当 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{e}$ 反向时，$2\sqrt{3}-1=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，又 ∵ $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=2(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2)=26$，

∴ $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|_{\min}=\sqrt{26-|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2_{\max}}=\sqrt{26-(2\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{13-4\sqrt{3}}$. 故选 B.

19. C 【解析】以 OA，OB 为邻边作平行四边形 $OACB$，如图，连接 AB，由题意得 $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，所以四边形 $OACB$ 为菱形，且 $\angle AOB\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，由两边之和大于第三边，可得 $|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|>|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，A 正确；



因为 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos\theta>0$，故 $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=1+1-2\cos\theta<2$，所以 $|\overrightarrow{AB}|<\sqrt{2}$，B 正确；

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=\overrightarrow{OA}^2+2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta+\overrightarrow{OB}^2=2+2\cos\theta>2$，则 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|>\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2=\overrightarrow{OA}^2-2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cdot\cos\theta+\overrightarrow{OB}^2=$

$2-2\cos\theta\in(0,2)$，则 $|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|\in(0,\sqrt{2})$，故 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|>|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，C 错误；

$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})=\overrightarrow{OA}^2-\overrightarrow{OB}^2=0$，故 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\perp(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$，D 正确. 故选 C.

20. $\sqrt{6}$ 【解析】$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+4|\boldsymbol{c}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为单位向量，得 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|=1$，由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

由 $\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\langle\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\rangle=\dfrac{3\pi}{4}$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

则 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|^2=1+1+4-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6$，即 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|=\sqrt{6}$.

21. $\dfrac{2}{5}$ 【解析】设向量 $\boldsymbol{n}=\lambda\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{c}$，

则 $|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}-(1-\lambda)\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{n}|$，

所以 $||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{n}||\leqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{n}|$.

$|\boldsymbol{n}|^2=|\lambda\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{c}|^2=\lambda^2|\boldsymbol{b}|^2+(1-\lambda)^2\cdot|\boldsymbol{c}|^2+2\lambda(1-\lambda)\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=9\lambda^2+16(1-\lambda)^2=25\lambda^2-32\lambda+16(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，

由二次函数性质可得，$\dfrac{144}{25}\leqslant|\boldsymbol{n}|^2\leqslant16$，即 $\dfrac{12}{5}\leqslant|\boldsymbol{n}|\leqslant4$，所以 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{n}|\geqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{n}||\geqslant\left|2-\dfrac{12}{5}\right|=\dfrac{2}{5}$，所以 $|\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}-(1-\lambda)\boldsymbol{c}|$ 的最小值为 $\dfrac{2}{5}$.

22. 【解】(1)因为 $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，$|\boldsymbol{a}|=3\sqrt{2}$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=18$.

又 $|\boldsymbol{b}|=6$，所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{18}{36}\boldsymbol{b}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

(2)由(1)知 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=18$，

所以 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+9\boldsymbol{b}^2=4\times18-12\times18+9\times36=180$，

解得 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=6\sqrt{5}$.

23. B 【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(2,1)$，所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=9$，

整理得 $\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4$①.

又 $\boldsymbol{b}\perp(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})$，所以 $\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})=\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$②.

联立①②解得 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$.

故选 B.

24. C 【解析】设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ.

因为 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$，

则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})^2=(-\boldsymbol{c})^2$，

所以 $\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}^2$，

即 $|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2+4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cdot\cos\theta=|\boldsymbol{c}|^2$.

又 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{c}|=\sqrt{7}$，

所以 $1+4+4\cos\theta=7$，解得 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$.

又 $\theta\in[0,\pi]$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

易错点

即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$. 故选 C.

25. $\dfrac{\pi}{4}$ 【解析】设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 α，

由 $\boldsymbol{a}=(-1,\sqrt{2})$，得 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$.

因为 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{6}$，

所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2=3$，

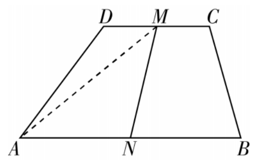
即 $3-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}\cdot\cos\alpha+6=3$，

解得 $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $\alpha\in[0,\pi]$，所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

26. $\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$　$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 【解析】如图，连接 AM，

由已知得 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. $\therefore\ \overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.



设 $\angle DAB=\theta$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

若 $\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{BC}$，则 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，

$\therefore\left(\dfrac{1}{4}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)=-\dfrac{1}{8}\boldsymbol{a}^2+\dfrac{3}{4}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=-\dfrac{1}{8}|\boldsymbol{a}|^2+\dfrac{3}{4}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta-|\boldsymbol{b}|^2=0$. 又 $\because|\boldsymbol{a}|>0$，$|\boldsymbol{b}|>0$，

$\therefore\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{a}|^2+8|\boldsymbol{b}|^2}{6|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{6|\boldsymbol{b}|}+\dfrac{4|\boldsymbol{b}|}{3|\boldsymbol{a}|}\geqslant2\sqrt{\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{6|\boldsymbol{b}|}\cdot\dfrac{4|\boldsymbol{b}|}{3|\boldsymbol{a}|}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，

当且仅当 $\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{6|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{4|\boldsymbol{b}|}{3|\boldsymbol{a}|}$，即 $|\boldsymbol{a}|=2\sqrt{2}|\boldsymbol{b}|$ 时，等号成立.

$\therefore\cos\angle DAB$ 的最小值为 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

27. 【解】(1)设 $BD=CD=\dfrac{a}{2}$，

在△ABD 中，$\cos B=\dfrac{AB}{BD}=\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{a}{2}}$，

在△ABC 中，由余弦定理可得

$\cos B=\dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\dfrac{(\sqrt{3})^2+a^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{3}\cdot a}$，

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{\frac{a}{2}}=\dfrac{(\sqrt{3})^2+a^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times\sqrt{3}\cdot a}$，

解得 $a=\sqrt{21}$，所以 $BC=\sqrt{21}$.

(2)由已知得 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\cos\dfrac{\pi}{3}=3$，

则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB})=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2+\dfrac{1}{6}|\overrightarrow{AC}|^2=-\dfrac{1}{3}\times3-\dfrac{1}{2}\times3+\dfrac{1}{6}\times(2\sqrt{3})^2=-\dfrac{1}{2}$.

又 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})^2}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2)}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{4}\times(3+2\times3+12)}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$，

$|\overrightarrow{BE}|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}^2}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{9}\times12-\dfrac{2}{3}\times3+3}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}$，

所以 $\cos\angle AMB=\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE}\rangle$

$=\dfrac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BE}|}=\dfrac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{21}}{2}\times\frac{\sqrt{21}}{3}}=-\dfrac{1}{7}$.

刷上分

1. D 【解析】由 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$，得 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

又 $\boldsymbol{a}=(0,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,x)$，

所以 $2^2+x^2-2\cdot2x=0$，即 $x^2-4x+4=0$，

解得 $x=2$. 故选 D.

2. B 【解析】因为 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$, 即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=-\frac{1}{2}$,

所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$. 故选 B.

3. B 【解析】因为 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\lambda\overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\lambda\overrightarrow{AD}$.

因为点 P 在 CD 上, 所以 $\frac{1}{3}+\frac{3}{2}\lambda=1$, 解得 $\lambda=\frac{4}{9}$, 则 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}$.

又 $|AC|=1$, $|AB|=3$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$,

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$,

则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}^2$

$=\frac{1}{3}\times1+\frac{1}{9}\times\frac{3}{2}-\frac{4}{9}\times9=-\frac{7}{2}$.

故选 B.

4. BCD 【解析】由题意得 $|\boldsymbol{e}_1|=|\boldsymbol{e}_2|=1$, $\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=1\times1\times\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

对于 A, $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)\cdot(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)=|\boldsymbol{e}_1|^2+\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2-2|\boldsymbol{e}_2|^2=1-\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $|\boldsymbol{a}|^2=(\boldsymbol{e}_1+2\boldsymbol{e}_2)^2=|\boldsymbol{e}_1|^2+4\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+4|\boldsymbol{e}_2|^2=1-2+4=3$, 所以 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{3}$, 故 B 正确;

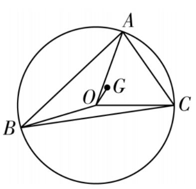
对于 C, 向量 $\boldsymbol{e}_1$ 在 $\boldsymbol{e}_2$ 上的投影向量为 $\frac{\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_2|}\cdot\frac{\boldsymbol{e}_2}{|\boldsymbol{e}_2|}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $|\boldsymbol{b}|^2=(\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2)^2=|\boldsymbol{e}_1|^2-2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2+|\boldsymbol{e}_2|^2=1+1+1=3$, 所以 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$,

所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$, 所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$, 故 D 正确.

故选 BCD.

5. D 【解析】设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r, 则根据重心向量公式有 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$,



则 $|\overrightarrow{OG}|^2=\frac{1}{9}(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})$

$=\frac{1}{9}[r^2+r^2+r^2+2r^2(\cos2\angle ACB+\cos2\angle BAC+\cos2\angle CBA)]$

$=\frac{1}{9}\{3r^2+2r^2[3-2(\sin^2\angle ACB+\sin^2\angle BAC+\sin^2\angle CBA)]\}$

$=\frac{1}{9}[3r^2+2r^2(3-2r)]=\frac{1}{9}(9r^2-4r^3)$.

令 $f(r)=\frac{1}{9}(9r^2-4r^3)$,

则 $f'(r)=\frac{2}{3}r(3-2r)$,

当 $0<r<\frac{3}{2}$ 时, $f'(r)>0$, 此时 $f(r)$ 单调递增;

当 $r>\frac{3}{2}$ 时, $f'(r)<0$, 此时 $f(r)$ 单调递减.

故当 $|OG|$ 最大时, $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $r=\frac{3}{2}$.

故选 D.

6. ACD 【解析】由题意, 设 $Q(x,y)$,

因为 $|\overrightarrow{QN}|=2|\overrightarrow{QM}|$,

所以 $\sqrt{(x-4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$,

整理得 $x^2+y^2=4$,

所以曲线 C 是以 $(0,0)$ 为圆心, 半径 $r=2$ 的圆.

对于 A, 因为 P 为 l 上的动点, Q 是曲线 C 上的动点,

所以 $|PQ|$ 最小时, O,P,Q 三点共线, 且点 Q 是线段 OP 上的点, $OP\perp l$,

因为 $|OP|=\frac{|-4|}{\sqrt{1+1}}=2\sqrt{2}$, $|OQ|=2$,

所以 $|PQ|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$, 故 A 正确;

对于 B, 设 $P(m,4-m)$, 则 $|PO|=\sqrt{m^2+(4-m)^2}$,

又 $|AO|=2$, $|PA|=|PB|$,

所以 $|PA|=\sqrt{|PO|^2-|AO|^2}=\sqrt{m^2+(4-m)^2-4}=\sqrt{2m^2-8m+12}$,

则以 P 为圆心, 以 PA 为半径的圆的方程为 $(x-m)^2+(y-4+m)^2=2m^2-8m+12$①,

又曲线 C 为 $x^2+y^2=4$②,

由①②相减, 得直线 AB: $mx+(4-m)y-4=0$, 即 $(x-y)m+4(y-1)=0$,

由 $\begin{cases}x-y=0,\\4(y-1)=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$

所以直线 AB 恒过定点 $(1,1)$,

所以 $|AB|$ 最小时, OP 过点 $(1,1)$,

点悟: 利用垂径定理分析

此时 O 与定点 $(1,1)$ 的距离为 $\sqrt{2}$,

则 $|AB|=2\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $|OP|$ 最小为 $2\sqrt{2}$,

所以 $|PA|_{\min}=|PB|_{\min}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-2^2}=2=r$, 此时 $\triangle APO$, $\triangle BPO$ 为全等的等腰直角三角形,

所以 $\angle APB=2\angle APO\leqslant90°$,

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PA}|\cdot|\overrightarrow{PB}|\cdot\cos\angle APB\geqslant0$,

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 的最小值为 0, 故 C 正确;

对于 D, 因为四边形 $PAOB$ 的面积

$S=\frac{1}{2}|PO|\cdot|AB|=2S_{\triangle APO}$

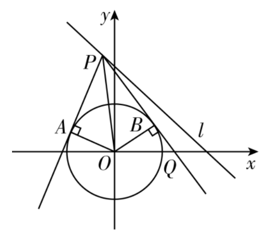
$=2\cdot\frac{1}{2}|AO|\cdot|PA|=2\sqrt{|PO|^2-4}$

$\geqslant2\sqrt{|PO|_{\min}^2-4}=4$,

所以 $|PO|\cdot|AB|$ 最小时, 四边形 $PAOB$ 为正方形,

此时 $A(0,2)$, $B(2,0)$, 或 $A(2,0)$, $B(0,2)$,

所以直线 AB 的方程为 $x+y-2=0$, 故 D 正确.



故选 ACD.

7. 【解】(1) 由 $\cos2A-\cos2B=2\sin C(\sin B-\sin C)$, 得 $1-2\sin^2A-1+2\sin^2B=2\sin C\sin B-2\sin^2C$,

$\therefore \sin^2B+\sin^2C-\sin^2A=\sin B\sin C$,

由正弦定理得 $b^2+c^2-a^2=bc$,

整理得 $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$,

即 $\cos A=\frac{1}{2}$,

又锐角三角形 ABC 中, $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$,

由圆周角定理可得 $\angle BOC=2\angle BAC=\frac{2\pi}{3}$,

又 $OB=OC=1$,

$\therefore \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\angle BOC=-\frac{1}{2}$.

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}^2$

$=\cos\angle AOB-1=\cos 2\angle ACB-1$.

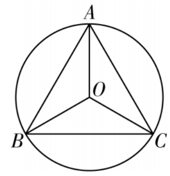
∵ $\triangle ABC$ 是锐角三角形,

$\therefore \begin{cases}0<\angle ACB<\frac{\pi}{2},\\ \frac{\pi}{2}<\angle ACB+\angle BAC<\pi\end{cases}\Rightarrow \frac{\pi}{6}<\angle ACB<\frac{\pi}{2}$,

$\therefore \frac{\pi}{3}<2\angle ACB<\pi$. 又 $y=\cos x$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ 上单调递减,$\therefore -1<\cos 2\angle ACB<\frac{1}{2}$,

即 $-2<\cos 2\angle ACB-1<-\frac{1}{2}$.

故 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的取值范围是 $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.



专题 8　复数

考向 26　复数的概念及其运算

刷考点

1. A 【解析】$\because a-2i=(b-i)i=1+bi$,

$\therefore \begin{cases}a=1,\\ b=-2,\end{cases}$ $\therefore z=1-2i$,

提示：复数相等，即实部相等且虚部相等

$\therefore \bar{z}=1+2i$, $\therefore \bar{z}$ 的虚部是 2. 故选 A.

2. D 【解析】由题意可得 $z=\frac{2+i}{m-i}=\frac{(m+i)(2+i)}{(m+i)(m-i)}=\frac{2m-1+(m+2)i}{m^2+1}$,

故 $\frac{2m-1}{m^2+1}=\frac{m+2}{m^2+1}$,解得 $m=3$. 故选 D.

3. D 【解析】设复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,因为 $z\bar{z}-i\bar{z}=3-i$,即 $a^2+b^2-ai-b=3-i$,所以 $\begin{cases}a^2+b^2-b=3,\\ a=1,\end{cases}$ 解得 $b=-1$ 或 $b=2$,所以 z 的虚部为 -1 或 2,故选 D.

4. D 【解析】由题意知 $\frac{z-2}{1+i}=i$,故 $z=i(1+i)+2=1+i$,故 $\bar{z}=1-i$,则复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $(1,-1)$,该点在第四象限,故选 D.

5. B 【解析】由复数 $z=1+2i$,则 $\bar{z}=1-2i$,

$\frac{\bar{z}-1+3i}{4i-1}=\frac{1-2i-1+3i}{4i-1}=\frac{i(4i+1)}{(4i-1)(4i+1)}=\frac{4-i}{17}$,

故复数 $\frac{\bar{z}-1+3i}{4i-1}$ 在复平面内对应的点的坐标为 $\left(\frac{4}{17},-\frac{1}{17}\right)$. 故选 B.

6. ABD 【解析】对于 A,复数 z_1 在复平面内对应的点的坐标为 $(-2,1)$,该点位于第二象限,故 A 正确;

对于 B, $\frac{1}{z_1}=\frac{1}{-2+i}=\frac{-2-i}{(-2+i)(-2-i)}=-\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i$,故 B 正确;

对于 C,由题意可得 $z_2-1+2i=(x-1)+(y+2)i$,因为 $|z_2-1+2i|=2$,所以 $(x-1)^2+(y+2)^2=4$,故 C 错误;

对于 D, $z_1-1+2i=-3+3i$,则 $|z_1-1+2i|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$,所以 $|z_2-z_1|=|(z_2-1+2i)-(z_1-1+2i)|\leq|z_2-1+2i|+|z_1-1+2i|=2+3\sqrt{2}$,故 D 正确. 故选 ABD.

7. 3π 【解析】不妨设复数 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$,则 $|z-1+i|\leq\sqrt{3}$,即 $|(x-1)+(y+1)i|\leq\sqrt{3}$,则 $(x-1)^2+(y+1)^2\leq3$,其表示以 $(1,-1)$ 为圆心且半径 $r=\sqrt{3}$ 的圆的内部以及圆上的点,则这些点构成的图形的面积为 $\pi r^2=3\pi$.

8. A 【解析】$(1+i)^2(1-2i)=2i(1-2i)=4+2i$.

9. A 【解析】已知 $i^{4n-3}+i^{4n-2}+i^{4n-1}+i^{4n}=0$, $n\in\mathbf{N}^*$,则 $i+i^2+i^3+\cdots+i^{2\,021}=505\times0+i=i$,故选 A.

10. ABD 【解析】因为 $z_1=1-i$,复数 z_2 是复数 z_1 的共轭复数,所以 $z_2=1+i$,所以 $z_1+z_2=1-i+1+i=2$,故 A 正确; $z_1\cdot z_2=(1-i)\cdot(1+i)=1-i^2=2$,故 B 正确;由于虚数不能比较大小,故 C 错误; $\frac{z_1}{z_2}=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=-i$,故 D 正确. 故选 ABD.

11. $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$ 【解析】$\frac{2i-1}{2i+1}=\frac{(-1+2i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3+4i}{5}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$.

12. $7+\sqrt{5}i$ 【解析】$(\sqrt{5}-i)\cdot(\sqrt{5}+2i)=5+2\sqrt{5}i-\sqrt{5}i+2=7+\sqrt{5}i$.

13. D 【解析】依题意得,$\bar{z}=-\sqrt{2}i$,故 $z\cdot\bar{z}=-2i^2=2$. 故选 D.

14. A 【解析】因为 $(2z+3)i=3z$,所以 $2zi+3i=3z$,即 $(3-2i)z=3i$,所以 $z=\frac{3i}{3-2i}=\frac{3i(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-6+9i}{13}=-\frac{6}{13}+\frac{9}{13}i$,所以 $\bar{z}=-\frac{6}{13}-\frac{9}{13}i$. 故选 A.

15. A 【解析】由题知, $e^{-\frac{\pi i}{3}}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$,故其共轭复数为 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. 故选 A.

16. D 【解析】依题意, $z=\frac{i}{\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}-2i}=\frac{i}{2-2i}=\frac{i(1+i)}{2(1-i)(1+i)}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$,则 z 的共轭复数 $\bar{z}=-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$.

17. C 【解析】$z=\frac{3-i}{1+2i}=\frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{3-2-i-6i}{5}=\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$,

故 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{7}{5}\right)^2}=\sqrt{2}$.

故选 C.

18. C 【解析】因为 $z=1-i$,则 $z^2+\bar{z}=(1-i)^2+1+i=-2i+1+i=1-i$,

所以 $|z^2+\bar{z}|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$.

故选 C.

19. C 【解析】$\because$ 复数 z_1,z_2 是关于 x 的方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个根,$\therefore z_1+z_2=2$,$\therefore z_2=2-z_1=2-(1+i)=1-i$,$\therefore |z_2|=|1-i|=\sqrt{2}$. 故选 C.

一题多解　由复数 z_1,z_2 是关于 x 的方程 $x^2-2x+2=0$ 的两个根,得 $z_1\cdot z_2=2$,$\therefore z_2=\frac{2}{z_1}=\frac{2}{1+i}$,$\therefore |z_2|=\left|\frac{2}{1+i}\right|=\frac{2}{|1+i|}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$. 故选 C.