所以 $F(x)\geqslant F(1)=1$,

因为 $a_1\in(0,1)$,所以 $a_2=F(a_1)>1$,$a_3=F(a_2)>1$,…,$a_{n+1}=F(a_n)>1$.

令 $m(x)=F(x)-x=\frac{1}{x}+\ln x-x(x\geqslant 1)$,

则 $m'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{-x^2+x-1}{x^2}=\frac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}{x^2}<0$,

所以 $m(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减,且 $m(x)\leqslant m(1)=0$.

因为 $a_{n+2}-a_{n+1}=F(a_{n+1})-a_{n+1}=m(a_{n+1})$,

又 $a_{n+1}>1$,

所以 $m(a_{n+1})<0$,

所以 $1<a_{n+2}<a_{n+1}$,

所以 $m(a_{n+2})>m(a_{n+1})$,

即 $F(a_{n+2})-a_{n+2}>F(a_{n+1})-a_{n+1}$,

所以 $a_{n+3}-a_{n+2}>a_{n+2}-a_{n+1}$,

故 $a_{n+3}+a_{n+1}>2a_{n+2}$,

又 $a_{n+1}>1$,所以 $a_{n+3}+2a_{n+1}>2a_{n+2}+1$,即 $2a_{n+1}+a_{n+3}-1>2a_{n+2}$,证毕.

4.【解】(1)设样本平均数的估计值为 $\bar{x}$,则 $\bar{x}=10\times(40\times0.01+50\times0.02+60\times0.03+70\times0.024+80\times0.012+90\times0.004)=62$,

所以样本平均数的估计值为62.

设第40百分位数为 x,则 $0.03(x-55)+10\times(0.01+0.02)=0.4$,$\therefore x=\frac{175}{3}$.

点悟: 根据频率分布直方图得出第40百分位数位于区间[55, 65).

(2)因为学生的初试成绩 X 近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 $\mu=62$,$\sigma\approx14$,

所以 $\mu+2\sigma\approx62+2\times14=90$,所以 $P(X\geqslant90)=P(X\geqslant\mu+2\sigma)\approx\frac{1}{2}\times(1-0.9545)=0.02275$.

所以估计能参加复试的人数为 $0.02275\times8000=182$.

(3)由该生获一等奖的概率为 $\frac{1}{8}$ 可知,$a^2b=\frac{1}{8}$,

则 $P=a^2(1-b)+C_2^1a(1-a)b=a^2+2ab-\frac{3}{8}=a^2+\frac{1}{4a}-\frac{3}{8}$.

令 $P=f(a)=a^2+\frac{1}{4a}-\frac{3}{8}$,$0<a<1$,

则 $f'(a)=2a-\frac{1}{4a^2}=\frac{8a^3-1}{4a^2}$,

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时,$f'(a)<0$;当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时,$f'(a)>0$,

所以 $f(a)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减,在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增,

所以 $f(a)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$,

所以 P 的最小值为 $\frac{3}{8}$.

专题5　三角函数

考向18　三角函数的概念与诱导公式

刷考点

1. ACD　【解析】若角 x 是第二象限角,则 $0<\sin x<1<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{2}<-1<\cos x<0$,

则 $\sin(\cos x)<0$,$\cos(\sin x)>0$,故A,C,D正确,B错误.

故选ACD.

2. C　【解析】由 $\sin(\pi-\theta)<0$,$\cos(\pi+\theta)>0$,可得 $\sin\theta<0$,$\cos\theta<0$,故 θ 为第三象限角,故选C.

3. BD　【解析】由题得,$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,故 $k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$,

当 $k=2n$,$n\in\mathbf{Z}$ 时,$2n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{\pi}{2}$,$n\in\mathbf{Z}$,则角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限左上部分(不含边界);

当 $k=2n+1$,$n\in\mathbf{Z}$ 时,$2n\pi+\frac{5\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{3\pi}{2}$,$n\in\mathbf{Z}$,则角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第三象限右下部分(不含边界).所以角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限左上部分或第三象限右下部分(不含边界),

故 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的符号不确定且与 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 的大小关系不确定,$\tan\frac{\alpha}{2}>0$,$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|>\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$.故A,C错误,B,D正确.故选BD.

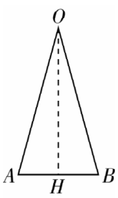
4. C　【解析】由大轮有25个齿,小轮有15个齿,大轮每分钟转3圈,可得到小轮每分钟转的圈数为 $\frac{3\times25}{15}=5$,

因此小轮每秒钟转的弧度数为 $\frac{5\times2\pi}{60}=\frac{\pi}{6}$,

所以小轮每秒钟转过的弧长是 $\frac{\pi}{6}\times2=\frac{\pi}{3}$ cm.

故选C.

5. A　【解析】因为圆的半径为 r,且圆的内接正十二边形被分成12个如图所示的等腰三角形,其顶角为30°,即 $\angle AOB=30°$,作 $OH\perp AB$ 交 AB 于点 H,则 H 为 AB 的中点,且 $\angle AOH=15°$.



因为 $OA=OB=r$,在 Rt△AOH 中,$\sin\angle AOH=\frac{AH}{OA}$,即 $\sin15°=\frac{AH}{r}$,所以 $AH=r\sin15°$,则 $AB=2AH=2r\sin15°$,

所以正十二边形的周长 $L=12\times2r\times\sin15°=24r\sin15°$,

所以 $\pi\approx\frac{L}{2r}=\frac{24r\sin15°}{2r}=12\sin15°$.故选A.

6. B　【解析】根据题意可知 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$,

所以 $\frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2}{5}$,

敲黑板: 转化为齐次式后,弦切互化

若 $\cos\theta=0$,则 $\sin^2\theta=\frac{2}{5}$,与 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 矛盾,故 $\cos\theta\neq0$,

等式左边分子分母同时除以 $\cos^2\theta$,

可得 $\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2}{5}$,

化简可得 $3\tan^2\theta+5\tan\theta-2=0$,

解得 $\tan\theta=-2$ 或 $\tan\theta=\frac{1}{3}$.

故选B.

7. D　【解析】由 $\sin5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$,

令 $\alpha=72°$,可得 $\sin360°=5\sin72°-20\sin^372°+16\sin^572°=0$.

设 $t=\sin72°$,则 $16t^5-20t^3+5t=0$,

由 $\sin90°=1>t=\sin72°>\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

得 $\frac{3}{4}<t^2<1$,

由 $16t^5-20t^3+5t=t(16t^4-20t^2+5)=0$,

解得 $t=0$(舍去)或 $t^2=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$(舍去)或 $t^2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$,所以 $\sin72°\cos18°=\sin^272°=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$.故选D.

8. D　【解析】因为 $b=\frac{1}{\cos48°}-\sin42°=\frac{1-\cos48°\sin42°}{\cos48°}=\frac{1-\cos^248°}{\cos48°}=\frac{\sin^248°}{\cos48°}$,$0<\cos48°<1$,所以 $b>\sin^248°=a$.

因为 $c=\frac{\tan48°}{1+\tan^248°}=\frac{\sin48°\cos48°}{\sin^248°+\cos^248°}=\sin48°\cos48°$,

$\sin48°>\sin45°=\cos45°>\cos48°>0$,

所以 $\sin^248°>\sin48°\cos48°$,所以 $a>c$,所以 $c<a<b$.故选D.

9. AB 【解析】对于 A，$\frac{\cos\theta}{\sin\theta+2\cos\theta}=\frac{1}{\tan\theta+2}=\frac{1}{3+2}=\frac{1}{5}$，故 A 正确；

对于 B，$\tan\left(\theta-\frac{5\pi}{4}\right)=\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{3-1}{1+3}=\frac{1}{2}$，故 B 正确；

对于 C，$\sin^2\theta+\frac{1}{10}=\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}+\frac{1}{10}=\frac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta+1}+\frac{1}{10}=\frac{3^2}{3^2+1}+\frac{1}{10}=1$，故 C 错误；

对于 D，$\frac{1+\cos2\theta}{\sin2\theta}=\frac{2\cos^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{3}$，故 D 错误. 故选 AB.

10. $\sqrt{3}$ 【解析】由 $\frac{\sin x}{1-\cos x}=\sqrt{3}$ 知 $1-\cos x\neq0$，$\sin x\neq0$，又 $x\in(0,\pi)$，所以 $\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{1-\cos^2x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{\sin^2x}{\sin x(1-\cos x)}=\frac{\sin x}{1-\cos x}=\sqrt{3}$. 故 $\frac{1+\cos x}{\sin x}=\sqrt{3}$.

考向 19　三角恒等变换

刷考点

1. C 【解析】原式 $=\sin^2(41°-30°)+\cos^2 41°+\sin(41°-30°)\cos 41°$

$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin41°-\frac{1}{2}\cos41°\right)^2+\cos^2 41°+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin41°-\frac{1}{2}\cos41°\right)\cos41°$

$=\frac{3}{4}\sin^2 41°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin41°\cos41°+\frac{1}{4}\cos^2 41°+\cos^2 41°+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin41°\cos41°-\frac{1}{2}\cos^2 41°$

$=\frac{3}{4}\sin^2 41°+\frac{3}{4}\cos^2 41°=\frac{3}{4}$，故选 C.

2. C 【解析】因为 $\tan60°=\tan(21°+39°)=\frac{\tan21°+\tan39°}{1-\tan21°\tan39°}$，所以 $\tan21°+\tan39°=\sqrt{3}(1-\tan21°\tan39°)$，所以 $\tan21°+\tan39°+\sqrt{3}\tan21°\cdot\tan39°=\sqrt{3}$. 故选 C.

3. BCD 【解析】对于 A，$\cos^2 75°-\sin^2 75°=\cos150°=\cos(180°-30°)=-\cos30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 A 不符合题意；

对于 B，$\frac{\tan15°}{1+\tan^2 15°}=\frac{\frac{\sin15°}{\cos15°}}{1+\frac{\sin^2 15°}{\cos^2 15°}}=\frac{\sin15°\cos15°}{\cos^2 15°+\sin^2 15°}=\frac{1}{2}\sin30°=\frac{1}{4}$，故 B 符合题意；

对于 C，$\cos36°\cos72°=\frac{\sin36°\cos36°\cos72°}{\sin36°}=\frac{\frac{1}{2}\sin72°\cos72°}{\sin(180°-144°)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin144°}{\sin144°}=\frac{1}{4}$，故 C 符合题意；

对于 D，$2\cos20°\cos40°\cos80°=\frac{2\cos20°\sin20°\cos40°\cos80°}{\sin20°}=\frac{\sin40°\cos40°\cos80°}{\sin20°}=\frac{\frac{1}{2}\sin80°\cos80°}{\sin(180°-160°)}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin160°}{\sin160°}=\frac{1}{4}$，故 D 符合题意. 故选 BCD.

4. A 【解析】$\sin(\alpha-2\beta)=\sin[(\alpha-\beta)-\beta]=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta-\cos(\alpha-\beta)\sin\beta=\frac{16}{65}$①，

$\sin\alpha=\sin[(\alpha-\beta)+\beta]=\sin(\alpha-\beta)\cos\beta+\cos(\alpha-\beta)\sin\beta=\frac{56}{65}$②，

由①②相加，得 $2\sin(\alpha-\beta)\cos\beta=\frac{72}{65}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)\cos\beta=\frac{36}{65}$.

故选 A.

5. AC 【解析】$\cos^2\alpha-\cos2\alpha=\cos^2\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin^2\alpha=\frac{1}{5}$，

因为 $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{1}{2}$，$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha=\frac{3}{5}$，

$\tan2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=-\frac{4}{3}$. 故选 AC.

6. C 【解析】因为 $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{14}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{11}{14}$，所以 $\sin\alpha\sin\beta=\frac{6}{7}$，所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{13}{14}$，所以 $\cos(2\alpha-2\beta)=\cos[2(\alpha-\beta)]=2\cos^2(\alpha-\beta)-1=2\times\left(\frac{13}{14}\right)^2-1=\frac{71}{98}$. 故选 C.

7. A 【解析】由题意可得，$\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\cos\left[\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{6}\right]$

$=\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

$=\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right)$

$=\sin\left(x-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$，

所以 $x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $\cos2x=\cos\left(\frac{\pi}{2}+4k\pi\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$，$k\in\mathbf{Z}$. 故选 A.

易错警示 本题中角之间的特殊关系不易发现，需先化简再构造. 总之，解决给值求值问题，首先要探寻条件角与问题角之间的关系，便于直接利用公式整体求解.

8. $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$ 【解析】因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，

所以 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$，

由 $\sin(\alpha-\beta)>0$，$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)>0$ 可得 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{6}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\sin^2(\alpha-\beta)}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{1-\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sqrt{5}}{3}$，

所以 $\cos\left(\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-(\alpha-\beta)\right]=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\cos(\alpha-\beta)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin(\alpha-\beta)=\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{5}}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$.

方法技巧 角的变换是三角变换中最基本的变换，本质是恒等变形，根据题目中所给的已知角与所求角之间的特征，将所求角写在等号左边，将已知角写在等号右边，通过观察，寻找其中使得等号成立的数量关系即可，常见的如下：

$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\alpha=\beta-(\beta-\alpha)$，$\alpha=(2\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)$，$\alpha=\frac{1}{2}[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]$，$\alpha=\frac{1}{2}[(\beta+\alpha)-(\beta-\alpha)]$等.

9. A 【解析】因为 $\alpha,\beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以

$\sin\alpha\neq0$.

由$(1-\cos 2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta$，可得$2\sin^2\alpha(1+\sin\beta)=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta$，即$\sin\alpha(1+\sin\beta)=\cos\alpha\cos\beta$.

所以$\sin\alpha=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha+\beta)$，

所以$\cos(\alpha+\beta)=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$，

因为$\alpha,\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\pi<\alpha+\beta<2\pi$，且$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}-\alpha<0$，

根据函数$y=\cos x$的图象易知$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha+2\pi$，则$2\alpha+\beta=\dfrac{5\pi}{2}$. 根据已知条件无法得

敲黑板： $y=\cos x$在$(\pi,2\pi)$上单调递增，在$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$上单调递增，所以有$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$

到$2\alpha-\beta,\alpha+\beta,\alpha-\beta$的值，故选A.

10. B 【解析】由题可知，$x^2+2p\sqrt{3}x+2p+1=0$，$\Delta=12p^2-4(2p+1)\geqslant0$，解得$p\leqslant-\dfrac{1}{3}$或$p\geqslant1$，

由一元二次方程根与系数的关系得，$\tan A+\tan B=-2p\sqrt{3}$，$\tan A\cdot\tan B=2p+1$，

所以$1-\tan A\cdot\tan B=-2p\neq0$，

所以$\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\dfrac{-2p\sqrt{3}}{-2p}=\sqrt{3}$，

所以$\tan C=\tan(\pi-A-B)=-\tan(A+B)=-\sqrt{3}$.

因为$C\in(0,\pi)$，所以$C=\dfrac{2\pi}{3}$.

故选B.

11. $\dfrac{3\pi}{4}$ 【解析】因为$\dfrac{\pi}{4}<\beta<\pi$，所以$\dfrac{\pi}{2}<2\beta<2\pi$.

又因为$\sin 2\beta=\dfrac{4}{5}>0$，所以$\dfrac{\pi}{2}<2\beta<\pi$，

所以$\dfrac{\pi}{4}<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，所以$-\dfrac{\pi}{2}<-\beta<-\dfrac{\pi}{4}$.

因为$\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$，所以$\dfrac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\dfrac{5\pi}{4}$，$\dfrac{5\pi}{4}<\alpha+\beta<2\pi$.

因为$\dfrac{\pi}{2}<2\beta<\pi$，$\sin 2\beta=\dfrac{4}{5}$，所以$\cos 2\beta=-\dfrac{3}{5}$.

因为$\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$，所以$\sin(\alpha+\beta)=-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$.

所以$\sin(\alpha-\beta)=\sin[(\alpha+\beta)-2\beta]=\sin(\alpha+\beta)\cos 2\beta-\cos(\alpha+\beta)\sin 2\beta=-\dfrac{7\sqrt{2}}{10}\times\left(-\dfrac{3}{5}\right)-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$\alpha-\beta=\dfrac{3\pi}{4}$.

刷上分

1. D 【解析】令$\alpha-\dfrac{\pi}{6}=\beta$，则$\alpha=\beta+\dfrac{\pi}{6}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{4}$，

$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sin\left(2\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)+\cos^2\dfrac{\beta}{2}=2\cos^2\beta-1+\dfrac{1+\cos\beta}{2}=1$.

故选D.

2. A 【解析】由$\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\tan 2\theta=-4\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$，

得$\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{-4(\tan\theta+1)}{1-\tan\theta}\Rightarrow-4(\tan\theta+1)^2=2\tan\theta$，

则$(2\tan\theta+1)(\tan\theta+2)=0\Rightarrow\tan\theta=-2$或$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$.

因为$\theta\in\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$，$\tan\theta\in(-1,0)$，所以$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$，

故$\dfrac{1+\sin 2\theta}{2\cos^2\theta+\sin 2\theta}=\dfrac{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{\tan^2\theta+1+2\tan\theta}{2+2\tan\theta}=\dfrac{\frac{1}{4}+1-1}{2-1}=\dfrac{1}{4}$.

故选A.

3. C 【解析】因为$\cos\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)}$，由诱导公式可得$-\sin 2\alpha=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\tan\beta$，

所以$\dfrac{5-\cos^2\alpha}{\tan\beta}=\dfrac{4+\sin^2\alpha}{-2\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{5\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha}{-2\sin\alpha\cos\alpha}=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{4\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$，

提示： 见到此种形式，可考虑利用基本不等式求最值

由$\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$知，$\dfrac{5\sin\alpha}{\cos\alpha}>0$，$\dfrac{4\cos\alpha}{\sin\alpha}>0$，

所以$\dfrac{5-\cos^2\alpha}{\tan\beta}\leqslant-\dfrac{1}{2}\times2\cdot\sqrt{\dfrac{5\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{4\cos\alpha}{\sin\alpha}}=-2\sqrt{5}$，当且仅当$\dfrac{5\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{4\cos\alpha}{\sin\alpha}$，即$\tan\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$时，等号成立.

所以$\dfrac{5-\cos^2\alpha}{\tan\beta}$的最大值为$-2\sqrt{5}$.

故选C.

4. B 【解析】由题图可知，$CD=1$，$AC=\sqrt{2}$，$AD=\sqrt{3}$，$AE=\sqrt{5}$，则$DE=\sqrt{2}$，

所以$\sin\angle CAD=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\angle CAD=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，

$\sin\angle DAE=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$，$\cos\angle DAE=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$，

所以$\sin\angle CAE=\sin(\angle CAD+\angle DAE)=\sin\angle CAD\cos\angle DAE+\cos\angle CAD\sin\angle DAE=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{15}}=\dfrac{2\sqrt{15}+3\sqrt{5}}{15}$.

故选B.

5. AD 【解析】因为$\tan(25°+35°)=\dfrac{\tan 25°+\tan 35°}{1-\tan 25°\tan 35°}=\sqrt{3}$，

所以$\tan 25°+\tan 35°=\sqrt{3}(1-\tan 25°\times\tan 35°)=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan 25°\tan 35°$，

所以$\tan 25°+\tan 35°+\sqrt{3}\tan 25°\tan 35°=\sqrt{3}$，故A正确；

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 15°-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 15°=\sin 45°\cos 15°-\cos 45°\sin 15°=\sin(45°-15°)=\sin 30°=\dfrac{1}{2}$，故B错误；

$\dfrac{2\cos 10°-\sin 20°}{\cos 20°}=\dfrac{2\cos(30°-20°)-\sin 20°}{\cos 20°}=\dfrac{\sqrt{3}\cos 20°+\sin 20°-\sin 20°}{\cos 20°}=\sqrt{3}$，

故C错误；

$\dfrac{1}{\sin 10°}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10°}=\dfrac{\cos 10°-\sqrt{3}\sin 10°}{\sin 10°\cos 10°}=\dfrac{2\left(\frac{1}{2}\cos 10°-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 10°\right)}{\sin 10°\cos 10°}=\dfrac{2(\sin 30°\cos 10°-\cos 30°\sin 10°)}{\frac{1}{2}\times2\sin 10°\cos 10°}=\dfrac{2\sin 20°}{\frac{1}{2}\sin 20°}=4$，故D正确.

故选AD.

6. ACD 【解析】因为$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$，

所以$\cos(\alpha+\beta)=\pm\sqrt{1-\sin^2(\alpha+\beta)}=\pm\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，

所以$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\pm(2+\sqrt{3})$，故B错误；

又$\tan\alpha-\sqrt{3}\tan\beta=0$，即$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\sqrt{3}\sin\beta}{\cos\beta}$，即

$\sin\alpha\cos\beta=\sqrt{3}\sin\beta\cos\alpha$,

所以 $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$,

解得 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{6}}{4}$,

所以 $\sin\beta\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sqrt{2}}{4}$,故 A 正确;

$\sin 2\alpha\sin 2\beta=4\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$

$=4(\sin\alpha\cos\beta)(\cos\alpha\sin\beta)=4\times\frac{\sqrt{6}}{4}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,故 C 正确;

因为 $\cos(\alpha+\beta)=\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$,

$\cos^2(\alpha-\beta)-\cos^2(\alpha+\beta)=(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)^2-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)^2$

$=4\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta=\sin 2\alpha\sin 2\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $\cos^2(\alpha-\beta)=\cos^2(\alpha+\beta)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$,

所以 $\cos(\alpha-\beta)=\pm\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$,故 D 正确. 故选 ACD.

7. $-\frac{\pi}{3}$　0(答案不唯一)

【解析】$\because\begin{cases}1+2\cos\alpha=2\cos\beta,\\ \sqrt{3}+2\sin\alpha=2\sin\beta,\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}(1+2\cos\alpha)^2=(2\cos\beta)^2①,\\ (\sqrt{3}+2\sin\alpha)^2=(2\sin\beta)^2②.\end{cases}$

①+②并化简得,$1+\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha=0$,根据辅助角公式得,$2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=-1$,

$\therefore \alpha+\frac{\pi}{6}=2k\pi-\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$ 或 $\alpha+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{7\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$,

即 $\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$ 或 $\alpha=2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$,

$\because \alpha\in[-\pi,\pi]$,$\therefore \alpha=-\frac{\pi}{3}$ 或 $\alpha=\pm\pi$. 当 $\alpha=-\frac{\pi}{3}$ 时,$2\cos\beta=1+2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2$,

$\therefore \beta=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又$\because \beta\in[-\pi,\pi]$,$\therefore \beta=0$.

当 $\alpha=\pm\pi$ 时,$\begin{cases}\cos\beta=-\frac{1}{2},\\ \sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2},\end{cases}$ 由 $\beta\in[-\pi,\pi]$,得 $\beta=\frac{2\pi}{3}$.

8.【解】(1)由 $f(x)=\frac{\sin^2x+\cos^2x+2\sin(\pi-x)\cos(\pi+x)}{\sin\left(\frac{9\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{13\pi}{2}+x\right)}$

$=\frac{\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x}{\cos x-\sin x}$

$=\frac{(\cos x-\sin x)^2}{\cos x-\sin x}=\cos x-\sin x$,

故 $f\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\cos\frac{5\pi}{12}-\sin\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)由 $f(\alpha)=\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}$,

可得 $\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$,

即 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$,

则有 $\alpha+\frac{\pi}{4}=2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即 $\alpha=-\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

于是 $\sin\alpha=\sin\left(-\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2},k\in\mathbf{Z}$.

归纳总结 三角恒等变换的常用变换形式

(1)$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)$ $\left(其中\ \tan\varphi=\frac{b}{a}\right)$.

(2)$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha\Rightarrow\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$;$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$;$1\pm\sin 2\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$.

(3)$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

(4)三倍角公式:$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$;$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$;$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$.

考向 20　三角函数的图象与性质

刷考点

1. C 【解析】$y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到 $y=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,再将曲线 C_1 上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍得到 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象. 故 C_2 的解析式为 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

易错警示 x 轴上的平移变换遵循"左加右减,只针对 x 而言"的原则.

2. A 【解析】$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$,

所以将函数 $y=2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,

得到函数 $y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

故选 A.

归纳总结 三角函数图象变换中应注意的问题

(1)变换前后,函数的名称要一致,若不一致,应先利用诱导公式转化为同名函数;

(2)要弄清变换的方向,即变换的是哪个函数的图象,得到的是哪个函数的图象;

(3)要弄准变换量的大小,特别是平移变换中,函数 $y=A\sin x$ 的图象到 $y=A\sin(x+\varphi)$ 的图象的变换量是$|\varphi|$个单位长度,而函数 $y=A\sin\omega x$ 的图象到 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象的变换量是 $\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$ 个单位长度.

3. A 【解析】由函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期为 π,可得 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$,

由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=1$,可得 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=1$,可得 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

解得 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,当 $k=0$ 时,$\varphi=-\frac{\pi}{6}$,

所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$,

则将 $f(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)\right]$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,即可得到函数 $g(x)=\sin 2x$ 的图象.

故选 A.

4. A 【解析】观察题图可得函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=2\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\pi$,

所以 $\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$,故 $\omega=2$ 或 $\omega=-2$,B 错误;

易错点: 未限定 $\omega>0$,所以此处 ω 应为两个值

观察题图可得,当 $x=\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}}{2}=\frac{5\pi}{12}$ 时,函数取得最小值,

当 $\omega=2$ 时,$2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=2k\pi+\frac{3\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\varphi=2k\pi+\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$, C 错误;

当 $\omega=-2$ 时, $-2\times\frac{5\pi}{12}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$,

所以 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}$,

取 $k=0$, 可得 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,

故函数的解析式可能为 $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$,

A 正确;

$y=\cos\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}-2x\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$, D 错误.

故选 A.

5. D 【解析】由题图可知,从题图①到题图②,先将 $f(x)$ 图象上每个点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$,得到 $f(2x)$ 的图象,再将 $f(2x)$ 的图象向右平移 $\frac{1}{2}$ 个单位长度,得到 $y=f\left[2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$,即 $y=f(2x-1)$ 的图象. 故选 D.

6. A 【解析】因为 $|AB|=\pi$, $|BC|=2\pi$,

所以相邻两条对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}+\pi=\frac{3\pi}{2}$,即最小正周期 $T=3\pi$,所以 $\omega=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$,故 B, D 错误. 把 $x=0$ 代入 $f(x)=2\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$,可得 $f(0)=\sqrt{3}>1$,满足题意,把 $x=0$ 代入 $f(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{3}\right)$,可得 $f(0)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$,不符合题意,故 A 正确,C 错误.

7. B 【解析】由题图可知 $A=2$, $\frac{3}{4}T=\frac{7\pi}{12}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)$,即 $\frac{3}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{3\pi}{4}$,又 $\omega>0$,解得 $\omega=2$,

由 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right)=2\sin\left(2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)=2$,得 $\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,

故 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,由于 $|\varphi|<\pi$,故 $\varphi=-\frac{2\pi}{3}$,

所以 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}\right)$,

故选 B.

方法技巧　根据图象求函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B(A>0,\omega>0)$ 的解析式

(1) $A=\frac{y_{\max}-y_{\min}}{2}$: A 可以利用图象最高点与最低点纵坐标的差来求.

(2) $B=\frac{y_{\max}+y_{\min}}{2}$: B 可以利用图象最高点与最低点纵坐标的和(或对称中心的纵坐标)来求.

(3) $\omega=\frac{2\pi}{T}$: ω 可以利用周期 T 来求,周期 T 的求法(观察图象):①相邻对称轴(最值)之间相距 $\frac{T}{2}$;②相邻对称中心之间相距 $\frac{T}{2}$;③相邻对称轴与对称中心之间相距 $\frac{T}{4}$;④相邻最大(小)值之间相距 T.

(4) φ: φ 可以通过特殊值(最大值、最小值、零点等)来求.

8. A 【解析】已知 $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$,

令 $2k\pi\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\pi, k\in\mathbf{Z}$,得 $2k\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{7\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$,

所以函数 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{6},2k\pi+\frac{7\pi}{6}\right], k\in\mathbf{Z}$.

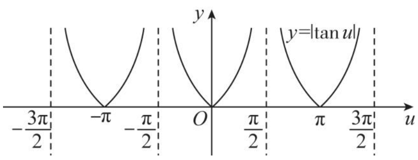
故选 A.

方法技巧　求三角函数单调区间的两种方法

(1)代换法:就是将比较复杂的三角函数处理后的整体当作一个角 u(或 t),利用简单的三角函数的单调性来求所要求的复杂的三角函数的单调区间;

(2)图象法:函数的单调性表现在图象上是从左到右,图象上升趋势的区间为单调递增区间,图象下降趋势的区间为单调递减区间,画出三角函数的图象,结合图象易求其单调区间.

9. C 【解析】作出函数 $y=|\tan u|$ 的大致图象如图所示.



由图可知,函数 $y=|\tan u|$ 的最小正周期为 π,且其单调递增区间为 $\left(k\pi,k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$.

对于函数 $f(x)$,其最小正周期 $T=\frac{\pi}{\omega}=4$,

可得 $\omega=\frac{\pi}{4}$,

则 $f(x)=\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

由 $k\pi<\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}<k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,解得 $4k+1<x<4k+3$,其中 $k\in\mathbf{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(4k+1,4k+3)(k\in\mathbf{Z})$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-1,\frac{1}{3}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)$ 上不单调,在 $\left(\frac{5}{3},3\right)$ 上单调递增,在 $(3,4)$ 上单调递减.

故选 C.

10. C 【解析】将函数 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,得到函数 $f\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,

然后将所得函数图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得到函数 $y=g(x)=\sin\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi<4x-\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$,解得 $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}<x<\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$,

令 $k=0$,得 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right)$,所以 $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right)\subsetneqq\left(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{12}\right)$,故选 C.

11. C 【解析】由题可知,函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象相邻两条对称轴之间的距离为最小正周期 T 的一半, $\therefore \frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$,即 $T=\pi$, $\therefore \frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$,又 $\omega>0$, $\therefore \omega=2$, $\therefore f(x)=\sin(2x+\varphi)$.

$\because$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)\geqslant f\left(\frac{7\pi}{12}\right)$, $\therefore$ 当 $x=\frac{7\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最小值, $\therefore 2\times\frac{7\pi}{12}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,解得 $\varphi=2k\pi+\frac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

又 $|\varphi|<\pi$, $\therefore \varphi=\frac{\pi}{3}$, $\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

解得 $\frac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{7\pi}{12}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

$\therefore f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的单调递减区间为

$\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{7\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$.

对于A，$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增，在$\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递减，所以在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上，函数$f(x)$不单调，故A错误；

对于B，$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{12}\right]$上单调递增，在$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$上单调递减，所以在区间$\left[0,\frac{7\pi}{12}\right]$上，函数$f(x)$不单调，故B错误；

对于C，$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$上单调递减，故C正确；

对于D，$f(x)$在区间$\left[\frac{7\pi}{12},\pi\right]$上单调递增，故D错误.

故选C.

12. B 【解析】$f(x)=\sqrt{3}\sin^2x+\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，

敲黑板：此处利用辅助角公式化为$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的形式易求周期

故函数$f(x)$的最小正周期$T=\frac{2\pi}{2}=\pi$. 故选B.

13. C 【解析】对于A，$f(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}$，∴最小正周期$T_1=\pi$.

对于B，$\sin x\neq 0$且$\cos x\neq 0$，$f(x)=\frac{1-(1-2\sin^2x)}{2\sin x\cos x}=\frac{2\sin^2x}{2\sin x\cos x}=\tan x$，∴最小正周期$T_2=\pi$.

对于C，$f(x)=\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x=\cos x$，

∴最小正周期$T_3=2\pi$.

对于D，$f(x)=\frac{1}{2}\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$，∴最小正周期$T_4=\pi$.

故选C.

14. CD 【解析】对于A，B，因为$y=\sin|x|$为偶函数，但不是周期函数，所以$g(x)$不是周期函数，

例如$g\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\neq g\left(-\frac{7\pi}{6}+2\pi\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，$g\left(-\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\neq g\left(-\frac{7\pi}{6}+\pi\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$，故A，B错误；

对于C，因为$y=\cos|x|=\cos x$，周期为2π，$y=|\sin x|$周期为π，所以$f(x)=\cos x+|\sin x|$是周期为2π的周期函数，

所以当$x\in[0,\pi]$时，$f(x)=\cos x+\sin x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，

因为$x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right]$，所以$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\in[-1,\sqrt{2}]$.

当$x\in(\pi,2\pi]$时，$f(x)=\cos x-\sin x=-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

因为$x-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right]$，

所以$-\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\in(-1,\sqrt{2}]$，

所以$f(x)\in[-1,\sqrt{2}]$，故C正确；

对于D，当$x\geqslant 0$时，$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left|x-\frac{\pi}{2}\right|+\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\cos\left|x-\frac{\pi}{2}\right|+|-\cos x|$
$=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+|\cos x|=\sin x+|\cos x|$，

$g(x)=\sin|x|+|\cos x|=\sin x+|\cos x|$，即$g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$，故D正确.

故选CD.

15. $f(x)=\sin 2x$（答案不唯一）

【解析】函数$f(x)=\sin 2x$满足题目中所给的函数的三个性质（答案不唯一）.

16. C 【解析】因为$f(x)=\sin\left(3\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{3}$，

所以$\frac{2\pi}{3\omega}=\frac{2\pi}{3}$，解得$\omega=1$，

所以$f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.

当$x\in\left[-\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{6}\right]$时，$3x+\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{2\pi}{3}\right]$，

所以$f(x)=\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\in[0,1]$，

所以$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{6}\right]$上的最小值为0.

故选C.

17. CD 【解析】$f(x)=\sin 2\omega x+\cos 2\omega x=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$.

当$x\in\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$时，$2\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{4},\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$，

因为函数$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{3}\right)$上有最大值，无最小值，

所以存在$k\in\mathbf{Z}$，使得$-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+2k\pi<\frac{2\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，（关键点）

整理得$\begin{cases}-\frac{9}{2}+12k\leqslant\omega<\frac{3}{2}+12k,\\ \frac{3}{8}+3k<\omega\leqslant\frac{15}{8}+3k,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$，

所以$\begin{cases}-\frac{9}{2}\leqslant\omega<\frac{3}{2},\\ \frac{3}{8}<\omega\leqslant\frac{15}{8},\end{cases}$解得$\frac{3}{8}<\omega<\frac{3}{2}$.

又因为$\omega\in\mathbf{N}^*$，所以$\omega=1$，

所以$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$.

对于A，函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，且$f(0)=1\neq 0$，所以函数$f(x)$不是奇函数，故A错误；

对于B，当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$时，$2x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，所以函数$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减，故B错误；

对于C，令$2x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则$x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以离$y$轴距离最近的对称轴方程为$x=\frac{\pi}{8}$，故C正确；

对于D，$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{2}=\pi$，故D正确.

故选CD.

18. $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ 【解析】由题可知$g(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，

$h(x)=f(x)g(x)=\sin x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}\sin 2x\right)=\frac{\sqrt{2}-2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{4}$，

所以当$2x+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，即$x=-\frac{3\pi}{8}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$时，$h(x)$取到最大值，最大值为$\frac{2+\sqrt{2}}{4}$.

19. B 【解析】$y=4\cos\left(x+\frac{7\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\cos\left(x+2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$=4\left(\frac{1}{2}\cos^2x-\frac{1}{2}\sin^2x\right)=2\cos 2x$.

令 $2x=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，即函数图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，当 $k=0$ 时，函数图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{4},0\right)$．故选 B.

20. D 【解析】因为 $f(x)=2\tan(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，由 $f(0)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 可得 $2\tan\varphi=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，则 $\tan\varphi=\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$. 又因为点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心，故 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=3k-1$，$k\in\mathbf{Z}$，

且 $T\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，即 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{\omega}<\frac{3\pi}{4}$，则 $\frac{4}{3}<\omega<4$，

所以当 $k=1$ 时，$\omega=2$，即 $f(x)=2\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

所以 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\tan\left(2\times\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故选 D.

21. ABD 【解析】$f(x)=(\sin x+\cos x)^2-1=1+2\sin x\cos x-1=\sin 2x$.

对于选项 A，函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 正确；

对于选项 B，因为 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$ 为最大值，

所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称，故 B 正确；

对于选项 C，因为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\neq 0$，

所以函数 $f(x)$ 的图象不关于点 $\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，故 C 错误；

对于选项 D，当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 时，$2x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$，

可得 $f(x)=\sin 2x\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right]$，

所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{12}\right]$ 上的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right]$，故 D 正确.

故选 ABD.

22. B 【解析】函数 $f(x)$ 的图象沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}-\theta\right)$ 的图象，因为 $g(x)$ 为偶函数，

所以 $\frac{\pi}{3}-\theta=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $|\theta|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$，

所以 $f(x)=\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$. 由 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，所以函数 $f(x)$ 的极值点为 $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$. 故选 B.

23. BC 【解析】由题意可知，$f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 不正确；

因为 $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}<\frac{T}{4}$，由 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，可知直线 $x=\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{7\pi}{24}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴，

所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\leqslant\left|f\left(\frac{7\pi}{24}\right)\right|$，故 B 正确；

因为直线 $x=\frac{7\pi}{24}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴，所以 $2\times\frac{7\pi}{24}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，则 $\varphi=-\frac{\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

又因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{12}$，故 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},t\right]$ 时，$2x-\frac{\pi}{12}\in\left(\frac{11\pi}{12},2t-\frac{\pi}{12}\right]$，

若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{2},t\right]$ 上恰有 3 个零点，则 $3\pi\leqslant 2t-\frac{\pi}{12}<4\pi$，解得 $\frac{37\pi}{24}\leqslant t<\frac{49\pi}{24}$，

所以 t 的最小值为 $\frac{37\pi}{24}$，无最大值，故 C 正确，D 不正确.

故选 BC.

24. $-\frac{19}{3}$　1　【解析】$f(x)=\tan 2x+2\tan(\pi-x)-1=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}-2\tan x-1$. 若 $\tan\alpha=2$，则 $f(\alpha)=\frac{4}{1-4}-4-1=-\frac{19}{3}$.

令 $f(x)=0$，即 $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}-2\tan x-1=0$，整理得 $2\tan^3 x+\tan^2 x-1=0$.

设 $\tan x=t$，若 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$，

则 $t\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$，

令 $g(t)=2t^3+t^2-1$，$t\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$，$g'(t)=6t^2+2t$.

当 $t\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$ 时，$g'(t)>0$.

又当 $t\to-1$ 时，$g(t)\to-2<0$，当 $t\to0$ 时，$g(t)\to-1<0$，当 $t\to1$ 时，$g(t)\to2>0$，故 $g(t)$ 在 $(0,1)$ 上存在唯一的零点.

又 $t=\tan x$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ 上的零点个数为 1.

刷上分

1. A 【解析】由题意可知，$g(x)=f(x-\varphi)=2\sin\left(x-\varphi-\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(x-\varphi-\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\cos\left(-x+\varphi+\frac{5\pi}{6}\right)$ 是偶函数，

所以 $\varphi+\frac{5\pi}{6}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=k\pi-\frac{5\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

又 $0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

故选 A.

2. A 【解析】由 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}|^2$，得 $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(180°-\angle ABC)=|\overrightarrow{AB}|^2$，

化简得 $-2\cos\angle ABC=1$，

解得 $\cos\angle ABC=-\frac{1}{2}$，故 $\angle ABC=120°$，

所以 $AD=6$，故 $f(x)$ 的周期为 12，则 $g(x)$ 的周期为 24，所以 $\frac{2\pi}{\omega}=24$，$\omega=\frac{\pi}{12}$，故选 A.

3. B 【解析】函数 $f(x)=\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$，

由图象可得 $0<x_1<\frac{\pi}{2\omega}$，令 $f(x)=0$，可得 $\omega x+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $x=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}-\varphi}{\omega}$，即 $x=\frac{2k\pi+\pi-2\varphi}{2\omega}$，又 $\omega>0$，$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，

所以 $x_1=\frac{\pi-2\varphi}{2\omega}$，$x_2=\frac{3\pi-2\varphi}{2\omega}$，

又因为 $x_2=4x_1$，所以 $\frac{3\pi-2\varphi}{2\omega}=4\times\frac{\pi-2\varphi}{2\omega}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

$\omega x_1=\omega\times\frac{\pi-2\varphi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}-\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，$\frac{\omega x_1}{\varphi}=\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}}=2$ 为定值. 故选 B.

4. A 【解析】根据函数图象变换可得 $g(x)=3\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-1$,

由 $g(x_1)g(x_2)=16$,

可知 $g(x_1)=g(x_2)=-4$,

即 $\cos\left(2x_1+\frac{\pi}{3}\right)=-1$, $\cos\left(2x_2+\frac{\pi}{3}\right)=-1$,

$x_1,x_2\in[-2\pi,2\pi]$,所以 $2x_1+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{11\pi}{3},\frac{13\pi}{3}\right]$, $2x_2+\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{11\pi}{3},\frac{13\pi}{3}\right]$,

$2x_1+\frac{\pi}{3}$的最大值为3π, $2x_2+\frac{\pi}{3}$的最小值为-3π,

则 $2x_1$ 的最大值为 $\frac{8\pi}{3}$, x_2 的最小值为 $-\frac{5\pi}{3}$,

所以 $2x_1-x_2$ 的最大值为 $\frac{8\pi}{3}-\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{13\pi}{3}$,故选 A.

5. C 【解析】因为 $\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta>2\cos\alpha\cos\beta$,

两边同时除以 $\cos\alpha\cos\beta$ 得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}>2$,因为 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,

若 $\alpha+\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$,则 $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$, $\sin\alpha\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$,

则 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\leqslant1$,同理 $\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\leqslant1$,则 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\leqslant2$ 与 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}>2$ 矛盾,

所以 $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$,

点悟: 通过缩小 $\alpha+\beta$ 的范围, 进而确定 t 的取值范围

则 $\frac{\pi}{2}>\alpha>\frac{\pi}{2}-\beta>0$, $\sin\alpha>\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$,则 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}>1$,同理 $\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}>1$,

所以 $t=\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}>1$,

又 $f(x)=\frac{1-t^{2x}}{t^x}=\left(\frac{1}{t}\right)^x-t^x$, $t>1$,

因为函数 $y=\left(\frac{1}{t}\right)^x$, $t>1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, $y=t^x$, $t>1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

所以 $f(x)=\frac{1-t^{2x}}{t^x}=\left(\frac{1}{t}\right)^x-t^x$, $t>1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

对于A,B,由于 $\sin\alpha$ 与 $\sin\beta$, $\cos\alpha$ 与 $\cos\beta$ 的大小关系不确定,故 $f(\sin\alpha)$ 与 $f(\sin\beta)$, $f(\cos\alpha)$ 与 $f(\cos\beta)$ 的大小关系不确定,A,B错误;

对于C,D,由于 $\sin\alpha>\cos\beta$, $\sin\beta>\cos\alpha$,所以 $f(\sin\alpha)<f(\cos\beta)$, $f(\cos\alpha)>f(\sin\beta)$,故C正确,D错误.

故选 C.

6. D 【解析】当 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 时,因为 $\omega>0$,

所以 $-\frac{\pi}{6}<\omega x-\frac{\pi}{6}<\frac{\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$,

由函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ 上存在最值,可得 $\frac{\omega\pi}{3}-\frac{\pi}{6}>\frac{\pi}{2}$,解得 $\omega>2$.

当 $\frac{2\pi}{3}<x<\pi$ 时, $\frac{2\pi\omega}{3}-\frac{\pi}{6}<\omega x-\frac{\pi}{6}<\pi\omega-\frac{\pi}{6}$,

因为函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$ 上单调,所以 $\left(\frac{2\pi\omega}{3}-\frac{\pi}{6},\pi\omega-\frac{\pi}{6}\right)\subseteq\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $\begin{cases}\frac{2\pi\omega}{3}-\frac{\pi}{6}\geqslant k\pi-\frac{\pi}{2},\\ \pi\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant k\pi+\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 其中 $k\in\mathbf{Z}$,解得

$\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}\leqslant\omega\leqslant k+\frac{2}{3}(k\in\mathbf{Z})$,

所以 $\frac{3}{2}k-\frac{1}{2}\leqslant k+\frac{2}{3}$,解得 $k\leqslant\frac{7}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$,

又 $\omega>2$,则 $\frac{4}{3}<k\leqslant\frac{7}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$,所以 $k=2$,所以 $\frac{5}{2}\leqslant\omega\leqslant\frac{8}{3}$,

故 ω 的取值范围是 $\left[\frac{5}{2},\frac{8}{3}\right]$.

故选 D.

方法技巧　已知单调性,求 ω 取值范围的解题步骤

已知三角函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A\neq0,\omega>0)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调递增(或单调递减):

(1)区间 $[a,b]$ 是函数 $f(x)$ 的单调递增(或单调递减)区间的子集;

(2)利用集合的包含关系得出 $\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}\geqslant(b-a)$,其中 T 为 $f(x)$ 的最小正周期;

(3)由 $x\in[a,b]$ 可得 $\omega x+\varphi\in[\omega a+\varphi,\omega b+\varphi]$,由单调递增(或单调递减)得 $\begin{cases}\omega a+\varphi\geqslant2k\pi-\frac{\pi}{2},\\ \omega b+\varphi\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}(k\in\mathbf{Z})$ $\left(或\begin{cases}\omega a+\varphi\geqslant2k\pi+\frac{\pi}{2},\\ \omega b+\varphi\leqslant2k\pi+\frac{3\pi}{2}\end{cases}(k\in\mathbf{Z})\right)$,解不等式组即可.

7. B 【解析】将函数 $f(x)=\sin x$ 的图象先向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,可得函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象,

再把所得函数图象的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}(\omega>0)$,纵坐标不变,可得函数 $g(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

又 $\omega>0$,最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$,函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上没有零点,

则 $\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$,所以 $0<\omega\leqslant1$.

因为 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$,所以 $\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{3}<\omega x-\frac{\pi}{3}<\frac{3\pi\omega}{2}-\frac{\pi}{3}$,

又函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 上没有零点,

所以 $\begin{cases}\frac{\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\geqslant k\pi,\\ \frac{3\omega\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant k\pi+\pi,\end{cases}$ $k\in\mathbf{Z}$,

解得 $2k+\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{2k}{3}+\frac{8}{9}$, $k\in\mathbf{Z}$,

又因为 $0<\omega\leqslant1$,当 $k=0$ 时, $\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{8}{9}$,

当 $k=-1$ 时, $-\frac{4}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{2}{9}$,

所以 $0<\omega\leqslant\frac{2}{9}$ 或 $\frac{2}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{8}{9}$.

故选 B.

8. D 【解析】由题意,得 $\left(\frac{1}{4}+\frac{k}{2}\right)T=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$, $\therefore T=\frac{2\pi}{2k+1}(k\in\mathbf{Z})$,

又 $T=\frac{2\pi}{\omega}$, $\therefore\omega=2k+1(k\in\mathbf{Z})$.

$\because f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调,

点悟: 由单调区间确定 T 的取值范围, 进而得到 k 的取值范围

$\therefore\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{9}\leqslant\frac{1}{2}T$,即 $T\geqslant\frac{\pi}{9}$,

又 $T=\frac{2\pi}{2k+1}(k\in\mathbf{Z})$, $\therefore k\leqslant8.5(k\in\mathbf{Z})$.

①当 $k=8$,即 $\omega=17$ 时, $-\frac{17}{4}\pi+\varphi=t\pi$, $t\in\mathbf{Z}$, $\therefore\varphi=\frac{17\pi}{4}+t\pi$, $t\in\mathbf{Z}$.

$\because|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, $\therefore\varphi=\frac{\pi}{4}$,此时 $f(x)=A\sin\left(17x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{6}\right)$ 上不单调,

$\therefore\omega=17$ 不符合题意;

②当 $k=7$,即 $\omega=15$ 时, $-\frac{15}{4}\pi+\varphi=t\pi$, $t\in$

$\mathbf{Z}$, ∴ $\varphi=\frac{15}{4}\pi+t\pi, t\in\mathbf{Z}$.

∵ $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, ∴ $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, 此时 $f(x)=A\sin\left(15x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{6}\right)$ 上不单调,

∴ $\omega=15$ 不符合题意;

③当 $k=6$, 即 $\omega=13$ 时, $-\frac{13}{4}\pi+\varphi=t\pi, t\in\mathbf{Z}$, ∴ $\varphi=\frac{13}{4}\pi+t\pi, t\in\mathbf{Z}$.

∵ $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, ∴ $\varphi=\frac{\pi}{4}$, 此时 $f(x)=A\sin\left(13x+\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{9},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增,

∴ $\omega=13$ 符合题意,

故选 D.

9. BCD 【解析】由函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的部分图象, 可得 $A=1$, 且 $\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$,

解得 $T=\pi$, 可得 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$,

即 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$,

敲黑板: 先依据图象求出函数解析式, 再根据三角函数图象的性质逐一判断各选项

又由 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(2\times\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)=-1$, 可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbf{Z}$.

因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

对于 A, 由 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, 可得 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$,

当 $2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$, 即 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时, $f(x)_{\min}=f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-1$;

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$, 即 $x=0$ 时, $f(x)_{\max}=f(0)=\frac{1}{2}$,

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$, 故 A 正确;

对于 B, 当 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-1$,

所以点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 不是函数 $f(x)$ 图象的对称中心, 故 B 不正确;

对于 C, 由 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$, 可得 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$,

当 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{5\pi}{6},-\frac{\pi}{2}\right]$, 即 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3}\right]$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递减,

当 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right]$, 即 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 故 C 不正确;

对于 D, 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 可得 $g(x)=\sin 2x$ 的图象, 此时函数 $g(x)$ 为奇函数, 图象关于原点对称, 故 D 不正确.

故选 BCD.

10. $\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2},\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right]$ 【解析】由题意知, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\theta=4$, $2\leqslant\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\sin\theta\leqslant 2\sqrt{3}$,

所以 $1\leqslant\tan\theta\leqslant\sqrt{3}$, 所以 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$.

易错点: 先根据 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4$, $2\leqslant S\leqslant 2\sqrt{3}$ 确定角的范围, 再化简 $f(\theta)$ 的解析式

$f(\theta)=\sqrt{3}\sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\theta$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1-\cos\left(2\theta+\frac{\pi}{2}\right)\right]+\frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$=\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\theta\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$,

所以 $2\theta+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$,

所以当 $2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$, 即 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时, $f(\theta)$ 取得最小值, 最小值为 $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$;

当 $2\theta+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$, 即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时, $f(\theta)$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{1+2\sqrt{3}}{2}$,

故 $f(\theta)\in\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2},\frac{1+2\sqrt{3}}{2}\right]$.

11. $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$　$\sqrt{3}$ 【解析】因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π, 所以 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$,

将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$ 的图象,

因为 $g(x)$ 是奇函数, 所以 $-\frac{2\pi}{3}+\varphi=k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,

则 $\varphi=\frac{2\pi}{3}+k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$, 又 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi=-\frac{\pi}{3}$, 所以 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

$f(x)+f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+\sin 2x=\sin 2x\cos\frac{\pi}{3}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{3}+\sin 2x=\frac{3}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sqrt{3}\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$,

点悟: 利用辅助角公式化简即可求得最值

因为 $x\in\mathbf{R}$, 所以 $f(x)+f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最大值为 $\sqrt{3}$, 当 $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2n\pi\ (n\in\mathbf{Z})$, 即 $x=\frac{\pi}{3}+n\pi\ (n\in\mathbf{Z})$ 时取得.

12. 【解】(1) $f(x)=\cos 2\omega x+1+\sin 2\omega x=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{4}\right)+1$,

因为函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π, $\omega>0$,

所以 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$, $\omega=1$,

$f(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1$.

由 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi, k\in\mathbf{Z}$, 得 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$, $k\in\mathbf{Z}$,

故函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},1\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.

(2) $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1+\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2=-\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2+\frac{5}{2}$,

当 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, $g(x)_{\max}=\frac{5}{2}$,

此时 $2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}$ 或 $2x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{3\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}$, 即 $x=k\pi, k\in\mathbf{Z}$ 或 $x=k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}$,

所以使 $g(x)$ 取最大值时自变量 x 的集合为 $\left\{x\ \middle|\ x=k\pi, k\in\mathbf{Z}\text{ 或 }x=k\pi+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbf{Z}\right\}$, 最大值为 $\frac{5}{2}$.

13. 【解】(1) 由题图可知, $A=3$, $\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{4\omega}=\frac{7\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}=\pi\ (\omega>0)$, 则 $\omega=\frac{1}{2}$,

所以 $f(x)=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)$,

又 $f\left(\frac{7\pi}{3}\right)=3\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-3$,

所以 $\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\varphi\right)=-1$,

所以 $\frac{7\pi}{6}+\varphi=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$, 又 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$,

所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$,

所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)$.

(2)由题知函数 $g(x)=2f\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)=6\sin\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=6\sin\frac{1}{2}x$,

令 $F(x)=f(2x)-g(2x)$,

敲黑板: 由 $f(2x_1)-f(2x_2)>g(2x_1)-g(2x_2)$, 可得 $f(2x_1)-g(2x_1)>f(2x_2)-g(2x_2)$, 可构造函数, 利用函数单调性求解

则 $F(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-6\sin x$

$=\frac{3}{2}\sin x+\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos x-6\sin x$

$=-3\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x\right)$

$=-3\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

因为对于任意 $x_1,x_2\in[0,t]$, 当 $x_1<x_2$ 时, 都有 $f(2x_1)-f(2x_2)>g(2x_1)-g(2x_2)$ 成立,

所以对于任意 $x_1,x_2\in[0,t]$, 当 $x_1<x_2$ 时, 都有 $f(2x_1)-g(2x_1)>f(2x_2)-g(2x_2)$ 成立,

即对于任意 $x_1,x_2\in[0,t]$, 当 $x_1<x_2$ 时, 都有 $F(x_1)>F(x_2)$ 成立,

所以函数 $F(x)$ 在 $[0,t]$ 上单调递减,

由 $x\in[0,t]$, 得 $\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\in\left[-\frac{\pi}{6},t-\frac{\pi}{6}\right]$,

所以 $t-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$, 解得 $0<t\leqslant\frac{2\pi}{3}$,

所以 t 的最大值为 $\frac{2\pi}{3}$.

考向 21　ω 的求解

刷考点

1. B 【解析】易知 $\omega\neq0$, 因为恒有 $f(x)\leqslant f(2\pi)$, 所以当 $x=2\pi$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 所以 $2\pi\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

解得 $\omega=\frac{1}{6}+k,k\in\mathbf{Z}$.

设 $f(x)$ 的最小正周期为 T, 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 所以 $\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{T}{2}$, 即 $\frac{2\pi}{|\omega|}\geqslant\pi$, 解得 $0<|\omega|\leqslant2$.

当 $0<\omega\leqslant2$, $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时, $\omega x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\right]$. 因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增, 所以

$\begin{cases}-\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{6}\geqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\ \frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$, 解得 $\begin{cases}\omega\leqslant4-12k,\\ \omega\leqslant1+6k,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$. 所以 $4-12k>0$, 且 $1+6k>0,k\in\mathbf{Z}$, 解得 $-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{3},k\in\mathbf{Z}$. 故 $k=0,\omega=\frac{1}{6}$.

当 $-2\leqslant\omega<0$ 时, 因为 $\omega=\frac{1}{6}+k,k\in\mathbf{Z}$, 所以 $\omega=-\frac{5}{6}$ 或 $\omega=-\frac{11}{6}$. 取 $\omega=-\frac{5}{6}$, 则 $f(x)=2\sin\left(-\frac{5}{6}x+\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(\frac{5}{6}x-\frac{\pi}{6}\right)$,

当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 时, $\frac{5}{6}x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{11\pi}{36},\frac{\pi}{9}\right]$, 故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减, 不满足题意. 同理可得 $\omega=-\frac{11}{6}$ 也不满足题意, 所以 $\omega=\frac{1}{6}$, 故选 B.

2. $\frac{1}{3}$ (答案不唯一, 满足 $\omega\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$ 即可)

【解析】由题可知, 若 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 则 $\begin{cases}-\frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{3}\geqslant-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\\ \frac{\pi}{2}\omega+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi,\end{cases}$

$k\in\mathbf{Z}$, 即 $\begin{cases}\omega\leqslant\frac{5}{3}-4k,\\ \omega\leqslant\frac{1}{3}+4k,\end{cases}k\in\mathbf{Z}$,

令 $\frac{5}{3}-4k=\frac{1}{3}+4k$, 得 $k=\frac{1}{6}\notin\mathbf{Z}$.

当 $k\leqslant0,k\in\mathbf{Z}$ 时, $\frac{5}{3}-4k>\frac{1}{3}+4k$, 则 $\omega\leqslant\frac{1}{3}+4k\leqslant\frac{1}{3}$.

当 $k\geqslant1,k\in\mathbf{Z}$ 时, $\frac{1}{3}+4k>\frac{5}{3}-4k$, 则 $\omega\leqslant\frac{5}{3}-4k\leqslant-\frac{7}{3}$.

$\because\omega>0$, $\therefore0<\omega\leqslant\frac{1}{3}$, 故 ω 的值可以为 $\frac{1}{3}$ (答案不唯一, 满足 $\omega\in\left(0,\frac{1}{3}\right]$ 即可).

3. 【解】(1)当 $\varphi=\frac{2\pi}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 取到极大值 $f(x_0)$, 则 $\omega x_0+\frac{2\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,

解得 $x_0=\frac{12k\pi-\pi}{6\omega}(k\in\mathbf{Z})$,

当 $k=1$ 时, x_0 取到最小正值 $\frac{11\pi}{12}$,

即 $\frac{11\pi}{6\omega}=\frac{11\pi}{12}$, 解得 $\omega=2$.

(2)函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调, 所以函数 $f(x)$ 的最小正周期 $T\geqslant\frac{2\pi}{3}$,

则 $\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\frac{2\pi}{3}$, 可得 $0<\omega\leqslant3$.

由 $f(0)=-f\left(\frac{\pi}{3}\right)$, 且 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调, 所以 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$,

又 $f(-\pi)=f(0)$, 所以 $-\pi$ 和 0 相差最小正周期的整数倍或者 $-\frac{\pi}{2}$ 为极值点.

点悟: 根据周期情况进行分类讨论

①若 $T=4\times\left[\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{8\pi}{3}$, 则 $\omega=\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{3}}=\frac{3}{4}$;

②若 $T=0-(-\pi)=\pi$, 则 $\omega=\frac{2\pi}{\pi}=2$;

③若 $T=\frac{4}{3}\times\left[\frac{\pi}{6}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{8\pi}{9}$, 则 $\omega=\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{9}}=\frac{9}{4}$.

所以实数 ω 的取值集合为 $\left\{\frac{3}{4},2,\frac{9}{4}\right\}$.

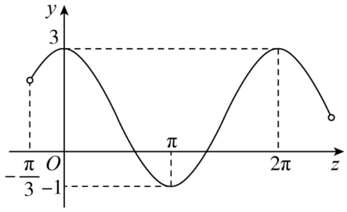
4. A 【解析】由 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称可得 $\omega\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$, 而 $\omega>0$, 故 $\omega=\frac{3}{2}+6k$, $k\in\mathbf{N}$.

若 $k\geqslant1$, 则 $\omega=\frac{3}{2}+6k>6$, 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 时, $\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\frac{\pi}{4}\omega+\frac{\pi}{4}>\frac{\pi}{4}\times6+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$, 故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$ 上有最小值, 不满足题意.

所以 $k=0,\omega=\frac{3}{2}$.

故选 A.

5. A 【解析】因为 $x\in(0,2\pi)$, $\omega>0$, 所以 $\omega x-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},2\omega\pi-\frac{\pi}{3}\right)$, 令 $z=\omega x-\frac{\pi}{3}$, 画出 $y=2\cos z+1$ 的大致图象, 如图所示.



要使$f(x)$的图象在区间$(0,2\pi)$内至多存在3条对称轴，则$2\omega\pi-\frac{\pi}{3}\in\left(-\frac{\pi}{3},3\pi\right]$，

解得$\omega\in\left(0,\frac{5}{3}\right]$．故选A．

6. D　【解析】$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x\cos\omega x-\cos^2\omega x+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x-\frac{1+\cos 2\omega x}{2}+\frac{1}{2}=\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$，

由$-\frac{1}{2}\leqslant f(x)\leqslant 1$，可得$-\frac{1}{2}\leqslant\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$．

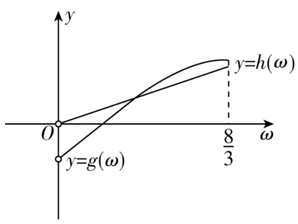
因为$0\leqslant x\leqslant\pi$，所以$-\frac{\pi}{6}\leqslant 2\omega x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2\pi\omega-\frac{\pi}{6}$，由题意可得$\frac{\pi}{2}\leqslant 2\pi\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{7\pi}{6}$，解得$\frac{1}{3}\leqslant\omega\leqslant\frac{2}{3}$．故选D．

7. B　【解析】因为函数$f(x)=\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)$$(\omega>0)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上的最大值为$\frac{\omega}{3}$，

所以$0<\frac{\omega}{3}\leqslant 1$，解得$0<\omega\leqslant 3$．因为$x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以$-\frac{\pi}{6}\leqslant\omega x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}$．

当$\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$，即$0<\omega\leqslant\frac{8}{3}$时，$f(x)_{\max}=\sin\left(\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\omega}{3}$．

令$g(\omega)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}\right)$，$h(\omega)=\frac{\omega}{3}$，在同一平面直角坐标系中作出$y=g(\omega)$与$y=h(\omega)$的大致图象如图所示．



由图可知，在$\left(0,\frac{8}{3}\right]$上存在唯一$\omega$，使得$\sin\left(\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\omega}{3}$．

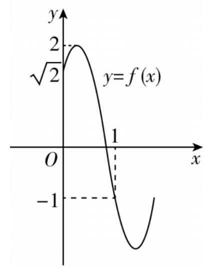
当$\frac{\pi}{4}\omega-\frac{\pi}{6}>\frac{\pi}{2}$，即$\frac{8}{3}<\omega\leqslant 3$时，$f(x)_{\max}=1$，即$\frac{\omega}{3}=1$，解得$\omega=3$，此时$x=\frac{2\pi}{9}<\frac{\pi}{4}$．

综上，实数ω的取值个数最多为2．故选B．

8. $\frac{11\pi}{12}$　【解析】当$x\in[0,1]$时，$\omega x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\omega+\frac{\pi}{4}\right]$．

因为$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在区间$[0,1]$上的值域为$[m,n]$，且$n-m=3$，

故必有$n=2$，$m=-1$．



作出$y=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$在$[0,+\infty)$上的大致图象如图所示，则$\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{6}$，故$\omega=\frac{11\pi}{12}$．

9.【解】(1)因为$T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\pi$，所以$\omega=\pm 2$，

又因为$\omega>0$，所以$\omega=2$．

(2)当$x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$时，$\frac{\pi}{6}\leqslant\omega x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{6}$，

因为函数$f(x)$在区间$\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$上的值域为$[1,2]$，

所以$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi\omega}{3}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$，

解得$1\leqslant\omega\leqslant 2$，故$\omega$的取值范围为$[1,2]$．

10. B　【解析】依题意可得$\omega>0$，因为$x\in(0,\pi)$，所以$\omega x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\omega\pi+\frac{\pi}{3}\right)$，

要使函数$f(x)$在区间$(0,\pi)$上恰有三个极值点，根据函数$y=\sin x$的图象可得，

$\frac{5\pi}{2}<\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{2}$，解得$\frac{13}{6}<\omega\leqslant\frac{19}{6}$，

即$\omega\in\left(\frac{13}{6},\frac{19}{6}\right]$．故选B．

11. A　【解析】由题图可知$f(0)=2\sin\varphi=\sqrt{3}$，$\sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\because\frac{\pi}{2}<\varphi<\pi$，$\therefore\varphi=\frac{2\pi}{3}$，

$f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)$．令$g(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)+1=0$，得$\sin\left(\omega x+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$，由$\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\pi$，得$\frac{\pi}{6}\omega+\frac{2\pi}{3}\leqslant\omega x+\frac{2\pi}{3}\leqslant\pi\omega+\frac{2\pi}{3}$，依题意知$g(x)=f(x)+1$在$\left[\frac{\pi}{6},\pi\right]$上有且仅有3个零点，故当$\omega$取最小值时，有$\begin{cases}\frac{2\pi}{3}<\frac{\pi}{6}\omega+\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{7\pi}{6},\\ 3\pi+\frac{\pi}{6}\leqslant\pi\omega+\frac{2\pi}{3}<4\pi-\frac{\pi}{6},\end{cases}$解得$\frac{5}{2}\leqslant\omega\leqslant 3$，$\therefore\omega$的最小值为$\frac{5}{2}$．

故选A．

12. $\left(\frac{8}{3},3\right]$　【解析】设函数$f(x)$的最小正周期为T，

因为$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上单调，所以$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{T}{2}$，解得$T\geqslant\frac{\pi}{2}$，

又$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，可得$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{T}{4}$且$\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{T}{4}$，解得$T\geqslant\frac{2\pi}{3}$．

因为$f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{3},\frac{11\pi}{6}\right)$上恰有5个零点，所以$2T<\frac{11\pi}{6}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{5T}{2}$，

敲黑板：根据零点个数确定T的范围

解得$\frac{3\pi}{5}\leqslant T<\frac{3\pi}{4}$．

综上可得$\frac{2\pi}{3}\leqslant T<\frac{3\pi}{4}$，又$\omega>0$，所以$\frac{2\pi}{3}\leqslant\frac{2\pi}{\omega}<\frac{3\pi}{4}$，解得$\frac{8}{3}<\omega\leqslant 3$，

即实数ω的取值范围为$\left(\frac{8}{3},3\right]$．

13.【解】(1)由题意知$f(x)=\sin^4x+2\sin x\cdot\cos x-\cos^4x=\sin 2x+(\sin^2x-\cos^2x)\cdot(\sin^2x+\cos^2x)=\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{2}\cdot\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$，

因为$f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$，

所以$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{3}$，令$\alpha-\frac{\pi}{4}=t$，则$\alpha=t+\frac{\pi}{4}$，$\sin t=\frac{1}{3}$，

因为$\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以$t\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$，

由$\sin^2t+\cos^2t=1$，得$\cos^2t=\frac{8}{9}$，

所以$\cos t=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{12}\right)$

$=\cos\left(t+\frac{\pi}{3}\right)=\cos t\cos\frac{\pi}{3}-\sin t\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{6}$．

(2)将函数$f(x)$的图象向右平移$\frac{\pi}{24}$个单

位长度，得到 $g(x)=\sqrt{2}\cdot\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{24}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，

将函数 $g(x)$ 图象上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$（$\omega>0$，纵坐标不变），得到函数 $h(x)=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

令 $h(x)=0$，得 $2\omega x-\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{2\omega}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上没有零点，所以 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2\omega}$，得 $0<\omega<2$，且

$$\begin{cases}\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{2\omega}<\frac{\pi}{4},\\ \frac{\pi}{6\omega}+\frac{(k+1)\pi}{2\omega}>\frac{\pi}{2}\end{cases}(k\in\mathbf{Z}),$$

解得 $\frac{2}{3}+2k<\omega<\frac{4}{3}+k$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\omega<2$，

所以当 $k=-1$ 时，$0<\omega<\frac{1}{3}$；

当 $k=0$ 时，$\frac{2}{3}<\omega<\frac{4}{3}$，

即 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

专题 6　解三角形

考向 22　利用正、余弦定理解三角形

刷考点

1. B　【解析】由 $bc=3a^2$，$b+c=\frac{7}{2}a$，

敲黑板：已知三边关系，用余弦定理可求角的三角函数值

得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}=\frac{\frac{49}{4}a^2-6a^2-a^2}{6a^2}=\frac{7}{8}$，

又 A 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $\sin A>0$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{15}}{8}$. 故选 B.

2. A　【解析】因为 $\frac{c}{\sin C}=2R$，所以 $c=2R\sin C=\frac{1}{2}\sin C$，则 $\sin^2A+\sin^2B+\sin A\sin B=\sin^2C$，

点悟：利用正弦定理进行边角互化

所以 $a^2+b^2+ab=c^2$，

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$.

因为 $0°<C<180°$，所以 $C=120°$.

所以 $c=\frac{1}{2}\sin C=\frac{1}{2}\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

故选 A.

3. BC　【解析】对于 A，因为 $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=7$，所以 $\sin C=7\cos C>0$. 因为 $\sin^2C+\cos^2C=1$，所以 $\sin C=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{10}$. 因为 $\sin A=\frac{4}{5}=\frac{8}{10}<\frac{7\sqrt{2}}{10}=\sin C$，所以由正弦定理得 $a<c$，故 $A<C$，所以 $\cos A>0$，则 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{3}{5}$，故 A 错误.

对于 B，$\cos B=\cos[\pi-(A+C)]=-\cos(A+C)=-\cos A\cos C+\sin A\sin C=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{4}{5}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$，故 B 正确.

对于 C，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{4\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确.

对于 D，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=7$，故 D 错误. 故选 BC.

4. $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$　【解析】设 $AC=x$，$BC=y(x>0,y>0)$，在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$ 中，$\frac{\sqrt{2}}{\sin\angle BAC}=\frac{x}{\sin\angle ADC}$，$\frac{1}{\sin\angle BCD}=\frac{y}{\sin\angle BDC}$，

由 $\sin\angle ADC=\sin\angle BDC$，

得 $\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BCD}=\frac{\sqrt{2}y}{x}$.

在 $\triangle BDC$ 中，$\cos\angle BCD=\frac{y^2+2-1}{2\sqrt{2}y}$，

由 $\angle BAC=2\angle BCD$，得 $\sin\angle BAC=2\sin\angle BCD\cos\angle BCD$，

所以 $\frac{\sqrt{2}y}{x}=2\cos\angle BCD=2\cdot\frac{y^2+2-1}{2\sqrt{2}y}$，整理得 $2y^2=x(y^2+1)$，①

又 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$，即 $\frac{1+2-x^2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1+2-y^2}{2\sqrt{2}}$，整理得 $x^2+y^2=6$，②

联立①②得 $x^3-2x^2-7x+12=0$，即 $(x-3)\cdot(x^2+x-4)=0$，解得 $x=3$ 或 $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$（负值舍去）.

由 $\triangle ADC$ 的三边关系知 $\sqrt{2}-1<x<\sqrt{2}+1$，故 $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$，即 $AC=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

5. A　【解析】设三个内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，由正弦定理可知 $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6=a:b:c$，

不妨设 $a=4k$，$b=5k$，$c=6k$，$k>0$，

见比设 k 法

显然 $c>b>a$，则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{8}>0$，所以 $\frac{\pi}{2}>C>B>A$. 故选 A.

6. B　【解析】由题意，向量 $\boldsymbol{m}=(a,b)$，$\boldsymbol{n}=(\sin B,\sin A)$，$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $b\sin B-a\sin A=0$，由正弦定理可得 $b^2=a^2$，即 $b=a$. 又由 $(2a-c)\cos B=b\cos C$，可得 $2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$，

即 $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$.

$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A\neq0$，$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$.

$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，

又 $b=a$，$\therefore A=B=C=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形. 故选 B.

7.【解】(1) 由正弦定理知 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin B-\sin C=0$，而 $\sin B=\sin(\pi-A-C)=\sin(A+C)$，

$\therefore \sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin(A+C)-\sin C=0$，即 $\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C-\sin C=0$，

又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C\neq0$，

$\therefore \sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

即 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

又 $0<A<\pi$，$\therefore A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由题意得 $\begin{cases}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3},\\ \cos A=\frac{b^2+c^2-4}{2bc}=\frac{1}{2},\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}bc=4,\\ b^2+c^2=8,\end{cases}$

将 $b=\frac{4}{c}$ 代入 $b^2+c^2=8$，整理得 $c^4-8c^2+16=0$，

则 $c^2=4$，即 $c=2$（$c=-2$ 舍去），则 $b=2$，

$\therefore a=b=c=2$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.