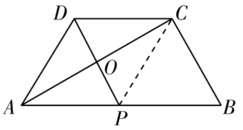
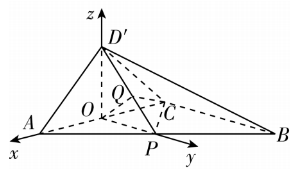
因为 $AC\cap DP=O$,所以 O 为 AC 的中点,所以 $OP/\!/BC$.
因为 $OP\subset$ 平面 POD',$BC\not\subset$ 平面 POD',所以 $BC/\!/$ 平面 POD'.



图①

(2)【解】在平行四边形 $APCD$ 中,因为 $AP=AD=2$,
所以四边形 $APCD$ 为菱形,所以 $AC\perp DP$,
所以在三棱锥 $D'-ABC$ 中,$AC\perp OD'$,$AC\perp OP$.
因为 $OD'\subset$ 平面 ACD',$OP\subset$ 平面 ACB,所以 $\angle D'OP$ 即为二面角 $B-AC-D'$ 的平面角,
所以 $\angle D'OP=\frac{\pi}{2}$,即 $OP\perp OD'$.
如图②所示,以 O 为坐标原点,分别以 OA,OP,OD' 所在直线为 x,y,z 轴,建立空间直角坐标系,



图②

则 $B(-\sqrt{3},2,0)$,$A(\sqrt{3},0,0)$,$C(-\sqrt{3},0,0)$,$D'(0,0,1)$,所以 $\overrightarrow{BD'}=(\sqrt{3},-2,1)$,$\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$.
设平面 BCD' 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,
则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD'}=\sqrt{3}x-2y+z=0,\end{cases}$
令 $x=1$,得 $\boldsymbol{n}=(1,0,-\sqrt{3})$.
易知平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,
所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{-\sqrt{3}}{1\times2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,
所以平面 ABC 与平面 BCD' 夹角的大小为 $\frac{\pi}{6}$.

(3)【解】假设在线段 PD' 上存在点 Q,使得平面 $OCQ\perp$ 平面 ABD',
设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PD'}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,因为 $P(0,1,0)$,
所以 $\overrightarrow{CP}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{PD'}=(0,-1,1)$,
所以 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CP}+\lambda\overrightarrow{PD'}=(\sqrt{3},1-\lambda,\lambda)$,
易知 $\overrightarrow{OC}=(-\sqrt{3},0,0)$,$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{3},2,0)$.
设平面 OCQ 的法向量为 $\boldsymbol{t}=(x_1,y_1,z_1)$,
则 $\begin{cases}\boldsymbol{t}\cdot\overrightarrow{OC}=-\sqrt{3}x_1=0,\\ \boldsymbol{t}\cdot\overrightarrow{CQ}=\sqrt{3}x_1+(1-\lambda)y_1+\lambda z_1=0,\end{cases}$
令 $y_1=\lambda$,得 $\boldsymbol{t}=(0,\lambda,\lambda-1)$.
设平面 ABD' 的法向量为 $\boldsymbol{s}=(x_2,y_2,z_2)$,
则 $\begin{cases}\boldsymbol{s}\cdot\overrightarrow{AB}=-2\sqrt{3}x_2+2y_2=0,\\ \boldsymbol{s}\cdot\overrightarrow{BD'}=\sqrt{3}x_2-2y_2+z_2=0,\end{cases}$
令 $x_2=1$,得 $\boldsymbol{s}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$.
由 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{s}=(0,\lambda,\lambda-1)\cdot(1,\sqrt{3},\sqrt{3})=\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}=0$,解得 $\lambda=\frac{1}{2}$,
所以当 Q 为线段 PD' 的中点时,平面 $OCQ\perp$ 平面 ABD',此时 $\frac{PQ}{PD'}=\frac{1}{2}$.

专题 11　直线与圆

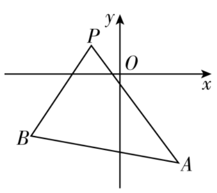
考向 41　直线的方程、圆的方程

刷考点

1. D　【解析】由直线 $x+\sqrt{3}y+1=0$,可得直线的斜率 $k=-\frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,
设其倾斜角为 $\theta(0°\leqslant\theta<180°)$,可得 $\tan\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\theta=150°$.
故选 D.

2. A　【解析】设 $K(x,y)$,则直线 KM 的斜率为 $k_{KM}=\frac{y}{x+2}$,直线 KN 的斜率为 $k_{KN}=\frac{y}{x-2}$,
依据题意可知,$k_{KM}+k_{KN}=\frac{y}{x+2}+\frac{y}{x-2}=3$,
化简得 $3x^2-2xy-12=0$,
因为直线 KM,KN 的斜率存在,
所以 $x\neq\pm2$,
所以点 K 的轨迹方程为 $3x^2-2xy-12=0$ $(x\neq\pm2)$.故选 A.

3. B　【解析】由题意,
$k_{PA}=\frac{-3-1}{2+1}=-\frac{4}{3}$,
$k_{PB}=\frac{-2-1}{-3+1}=\frac{3}{2}$,



因为过点 $P(-1,1)$ 的直线与线段 AB 相交,
结合图象可知,该直线的斜率的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{3}{2},+\infty\right)$.故选 B.

易错警示　用 α 表示直线的倾斜角,则当 $0°\leqslant\alpha<90°$ 时,随着 α 的增大,直线的斜率 k 为非负值,且逐渐变大,当 $90°<\alpha<180°$ 时,随着 α 的增大,直线的斜率 k 为负值且逐渐变大.

4. A　【解析】$(3a-1)x-(a-2)y-1=0\Rightarrow(3x-y)a-x+2y-1=0$,
由 $\begin{cases}3x-y=0,\\ -x+2y-1=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{1}{5},\\ y=\frac{3}{5},\end{cases}$ 直线 l 过定点 $\left(\frac{1}{5},\frac{3}{5}\right)$,该定点在第一象限,则直线 l 一定经过第一象限.故选 A.

5. B　【解析】设所求直线 l 的方程为 $x-2y+4+\lambda(x+y-2)=0$,即 $(1+\lambda)x+(\lambda-2)y+4-2\lambda=0$.
因为直线 l 与 l_3:$3x-4y+5=0$ 垂直,
所以 $3(1+\lambda)-4(\lambda-2)=0$,
解得 $\lambda=11$,
所以直线 l 的方程为 $12x+9y-18=0$,即 $4x+3y-6=0$.故选 B.

6. $y=\frac{3}{2}x$ 或 $x+y-5=0$　【解析】当直线过原点时,设其方程为 $y=kx$,因为直线过点 $P(2,3)$,所以 $3=2k$,解得 $k=\frac{3}{2}$,
易错点
故直线方程为 $y=\frac{3}{2}x$.
当直线不过原点时,
设其方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1(a\neq0)$,

提示:已知直线在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a,b,$a\neq0$,$b\neq0$,则直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

因为直线过点 $P(2,3)$,所以 $\frac{2}{a}+\frac{3}{a}=1$,
解得 $a=5$,即直线方程为 $x+y-5=0$.综上,直线方程为 $y=\frac{3}{2}x$ 或 $x+y-5=0$.

易错警示　**忽视对截距为 0 时情况的讨论而致错**
直线在两坐标轴上的截距相等,应分为直线过原点(即截距都为 0)与直线不过原点(即截距都不为 0)两种情况讨论,分别求出直线方程,过原点的情况最容易被忽略.

7. $3x-2y-5=0$　【解析】由题意可知,角 A 的平分线所在直线方程为 $y=x$,所以点 B 关于直线 $y=x$ 的对称点 B' 在直线 AC 上,设 $B'(a,b)$,即 $\begin{cases}\frac{b-1}{a+1}=-1,\\ \frac{b+1}{2}=\frac{a-1}{2},\end{cases}$ 解得 $a=1$,$b=-1$,
所以 $B'(1,-1)$,直线 $B'C$ 即为边 AC 所在的直线,其方程为 $y-2=\frac{2+1}{3-1}(x-3)$,整理得 $3x-2y-5=0$.

8. A　【解析】若直线 $(m-2)x+(m+1)y+3=0$ 与直线 $(2m+2)x-my+2=0$ 垂直,

则$(m-2)(2m+2)-m(m+1)=0$，解得$m=-1$或$m=4$.
所以由$m=4$能够推出两直线垂直，故充分性成立；
由两直线垂直得到$m=-1$或$m=4$，故必要性不成立.
故“$m=4$”是“直线$(m-2)x+(m+1)y+3=0$与直线$(2m+2)x-my+2=0$垂直”的充分不必要条件. 故选A.

归纳总结　判断两直线垂直的一般方法

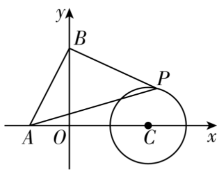
①$l_1:a_1x+b_1y+c_1=0$与$l_2:a_2x+b_2y+c_2=0$垂直的充要条件为$a_1a_2+b_1b_2=0$；
②$l_1:y=k_1x+b_1$与$l_2:y=k_2x+b_2$垂直的充要条件为$k_1\cdot k_2=-1$. 特别注意对斜率不存在情况的判断.

9. BD 【解析】对于A，若$l_1\parallel l_2$，则$\begin{cases}-\frac{1}{a+1}=-\frac{1}{2},\\ 1-a\neq0,\end{cases}$该方程组无解，A错误；
对于B，若$l_1\perp l_2$，则$-\frac{1}{1+a}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，解得$a=-\frac{3}{2}$，B正确；
对于C，当$a=1$时，直线l_1的方程为$x+2y=0$，即$y=-\frac{1}{2}x$，此时，l_1,l_2重合，C错误；
对于D，直线l_1的方程为$x+(a+1)y+a-1=0$，若$\exists a\in\mathbf{R}$，使得原点到l_1的距离为2，则$\frac{|a-1|}{\sqrt{1+(a+1)^2}}=2$，整理可得$3a^2+10a+7=0$，方程根的判别式$\Delta=100-4\times3\times7=16>0$，方程$3a^2+10a+7=0$有解，D正确.
故选BD.

10. 1 【解析】依题意得$a+b-2=0$，即$2=a+b\geq2\sqrt{ab}$，得$ab\leq1$，当且仅当$a=b=1$时，等号成立，故ab的最大值为1.

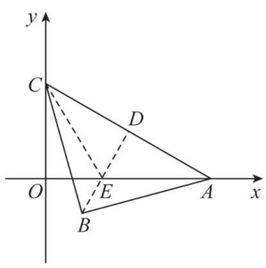
11. D 【解析】圆$x^2+y^2-2x+6y=0$的标准方程为$(x-1)^2+(y+3)^2=10$，圆心坐标为$(1,-3)$，因此圆心到直线$x-y+2=0$的距离$d=\frac{|1+3+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=3\sqrt{2}$，故选D.

12. D 【解析】两点$A(-1,0)$，$B(0,3)$，则$|AB|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$，直线$AB$方程为$y=3x+3$，

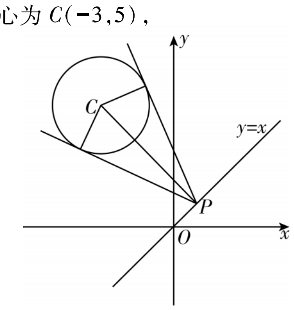


圆$(x-3)^2+y^2=1$的圆心$C(3,0)$，半径$r=1$，
点C到直线$AB:3x-y+3=0$的距离$d=\frac{12}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{6\sqrt{10}}{5}$，
因此点P到直线AB距离的最小值为$d-r=\frac{6\sqrt{10}}{5}-1$，
所以$\triangle PAB$面积的最小值是$\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\left(\frac{6\sqrt{10}}{5}-1\right)=6-\frac{\sqrt{10}}{2}$.
故选D.

13. B 【解析】由题意得，$F(x,y)$的几何意义为点$E(x,y)$到点$A(2\sqrt{3},0)$，$B(\sqrt{3}-1,1-\sqrt{3})$，$C(0,2)$的距离之和.
提示：数形结合思想的应用
因为$|AB|=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=2\sqrt{2}$，
$|CB|=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2+(-\sqrt{3}-1)^2}=2\sqrt{2}$，
$|AC|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=4$，所以$|AB|^2+|CB|^2=|AC|^2$，故$\triangle ABC$为等腰直角三角形. 在平面直角坐标系中，$O$为坐标原点，取线段$AC$的中点$D$，连接$BD$，与$AO$交于点$E$，连接$CE$，如图所示，
故$|BD|=\frac{1}{2}|AC|=2$，$|AE|=|CE|$. 因为$\frac{|CO|}{|AO|}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以$\angle CAO=30°$，故$\angle AEC=120°$，则$\angle BEC=\angle AEB=120°$，
提示：确定E为费马点
故点E到三角形三个顶点距离之和最小，此时$F(x,y)$取得最小值. 因为$|AE|=\frac{|AD|}{\cos 30°}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以$|AE|=|CE|=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，
$|DE|=|AE|\sin 30°=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$|BE|=|BD|-|DE|=2-\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故$F(x,y)$的最小值为$|AE|+|CE|+|BE|=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}+2-\frac{2\sqrt{3}}{3}=2+2\sqrt{3}$. 故选B.



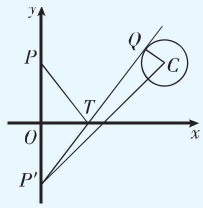
14. A 【解析】圆$C:(x+3)^2+(y-5)^2=4$的圆心为$C(-3,5)$，



直线l_1,l_2关于直线$y=x$对称时，CP与直线$y=x$垂直，
所以直线CP的方程为$y-5=-(x+3)$，即$x+y-2=0$，
由$\begin{cases}x+y-2=0,\\ y=x\end{cases}$解得$\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$所以$P(1,1)$.
故选A.

15. A 【解析】作点P关于x轴的对称点$P'\left(0,-\frac{5}{2}\right)$，则直线$P'T$与圆$C$有交点.
又$T(t,0)$，且易知$t=0$时，直线$P'T$与圆C无交点，故$t\neq0$，所以直线$P'T$的方程为$y=\frac{5}{2t}x-\frac{5}{2}$，即$\frac{5}{2t}x-y-\frac{5}{2}=0$.
由题知圆C的圆心为$C\left(5,\frac{5}{2}\right)$，半径为1，
直线$P'T$与圆C有交点，即圆心C到直线$P'T$的距离小于或等于1，
所以$\frac{\left|\frac{25}{2t}-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{\left(\frac{5}{2t}\right)^2+1}}\leq1$，解得$\frac{15}{8}\leq t\leq\frac{10}{3}$.
故选A.

一题多解　作点P关于x轴的对称点$P'\left(0,-\frac{5}{2}\right)$，则直线$P'T$与圆$C$有交点，临界情况为直线$P'T$与圆$C$相切. 设切点为$Q$，令$k_2=\tan\angle QP'C$，易得$|P'C|=\sqrt{(0-5)^2+\left(-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}\right)^2}=5\sqrt{2}$，



所以$k_2=\tan\angle QP'C=\frac{|QC|}{|P'Q|}=\frac{1}{\sqrt{(5\sqrt{2})^2-1^2}}=\frac{1}{7}$. 因为直线$P'C$的斜率$k_1=1$，
所以直线$P'T$的斜率$k\in\left[\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2},\frac{k_1+k_2}{1-k_1k_2}\right]$，即$k\in\left[\frac{3}{4},\frac{4}{3}\right]$.
易得直线$P'T$的斜率存在，且其方程为$y=kx-\frac{5}{2}$，其中$k=\frac{5}{2t}$，$t\neq0$，所以$t\in\left[\frac{15}{8},\frac{10}{3}\right]$. 故选A.

16. $\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$ 【解析】由题意知点$A(-2,3)$关于直线$y=a$的对称点为$A'(-2,2a-3)$，
提示：点(x_0,y_0)关于直线$y=a$的对称点为$(x_0,2a-y_0)$
所以$k_{A'B}=\frac{3-a}{2}$，所以直线$A'B$的方程为$y=\frac{3-a}{2}x+a$，即$(3-a)x-2y+2a=0$. 由题意

知圆$(x+3)^2+(y+2)^2=1$的圆心为$(-3,-2)$，半径为1，又直线$(3-a)x-2y+2a=0$与圆$(x+3)^2+(y+2)^2=1$有公共点，所以圆心到直线$A'B$的距离$d=\frac{|-3(3-a)+2\times2+2a|}{\sqrt{(3-a)^2+(-2)^2}}\le1$，

易错点：公共点个数可能是1或2，易漏“=”

整理得$6a^2-11a+3\le0$，解得$\frac{1}{3}\le a\le\frac{3}{2}$，

所以实数a的取值范围是$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$.

一题多解 因为直线AB关于直线$y=a$对称的直线也与直线AB关于y轴对称，圆$(x+3)^2+(y+2)^2=1$关于y轴对称的圆的方程为$(x-3)^2+(y+2)^2=1$，由题意知该圆与直线AB有公共点. 直线AB的方程为$y=\frac{a-3}{2}x+a$，即$(a-3)x-2y+2a=0$. 又圆$(x-3)^2+(y+2)^2=1$的圆心为$(3,-2)$，半径为1，所以圆心到直线AB的距离$d=\frac{|3(a-3)+2\times2+2a|}{\sqrt{(a-3)^2+(-2)^2}}\le1$，整理得$6a^2-11a+3\le0$，解得$\frac{1}{3}\le a\le\frac{3}{2}$，所以实数$a$的取值范围是$\left[\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right]$.

17. 4 【解析】由于$M(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$是圆O上的两个动点，

点M，M_1关于原点对称，点M，M_2关于x轴对称，

可得$M_1(-x_1,-y_1)$，$M_2(x_1,-y_1)$，

且$x_1^2+y_1^2=4$，$x_2^2+y_2^2=4$. 直线PM_1的方程为$\frac{y+y_1}{y_2+y_1}=\frac{x+x_1}{x_2+x_1}$，

令$x=0$，得$y=m=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{x_2+x_1}$，直线$PM_2$的方程为$\frac{y+y_1}{y_2+y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，

令$x=0$，得$y=n=\frac{-x_1y_2-x_2y_1}{x_2-x_1}$，

所以$m\cdot n=\frac{x_2^2y_1^2-x_1^2y_2^2}{x_2^2-x_1^2}=\frac{x_2^2(4-x_1^2)-x_1^2(4-x_2^2)}{x_2^2-x_1^2}=4$.

18. D 【解析】设$A(x_0,y_0)$，$P(x,y)$，则$x=\frac{x_0}{2}$，$y=\frac{y_0}{2}$，即$x_0=2x$，$y_0=2y$①.

因为点A在圆$(x-2)^2+(y-2)^2=1$上运动，所以满足$(x_0-2)^2+(y_0-2)^2=1$②.

把①代入②，得$(2x-2)^2+(2y-2)^2=1$，即$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$.

故线段OA的中点P的轨迹方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{4}$.

故选D.

19. $(x-3)^2+(y+1)^2=16$ 【解析】由题意设圆的方程为$x^2+y^2-4x-6+\lambda(x^2+y^2-4y-6)=0(\lambda\ne-1)$，

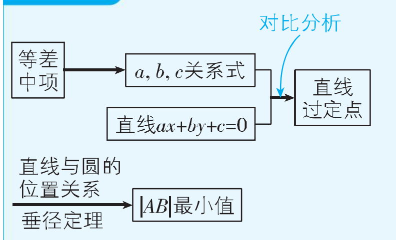
整理得$x^2+y^2-\frac{4}{1+\lambda}x-\frac{4\lambda}{1+\lambda}y-6=0$，圆心坐标为$\left(\frac{2}{1+\lambda},\frac{2\lambda}{1+\lambda}\right)$，

所以$\frac{2}{1+\lambda}-\frac{2\lambda}{1+\lambda}-4=0$，解得$\lambda=-\frac{1}{3}$，

所以圆的方程为$x^2+y^2-6x+2y-6=0$，即$(x-3)^2+(y+1)^2=16$.

20. C

思路导引



【解析】因为a,b,c成等差数列，所以$a-2b+c=0$，所以直线$ax+by+c=0$恒过点$P(1,-2)$. $x^2+y^2+4y-1=0$化为标准方程得$x^2+(y+2)^2=5$，则圆心为$C(0,-2)$，半径$r=\sqrt{5}$，则$|PC|=1$，当$PC\perp AB$时，$|AB|$取得最小值，此时$|AB|=2\sqrt{5-|PC|^2}=4$，故选C.

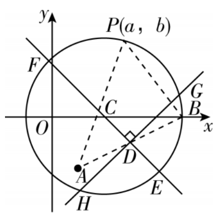
21. ABD 【解析】由题可知，圆C的圆心为$C(2,0)$，半径为$r=3$，

对于A，显然圆心$C(2,0)$满足$x-3y-2=0$，故直线$x-3y-2=0$穿过圆心，

所以圆C关于直线$x-3y-2=0$对称，故A正确；

对于B，$|PA|^2+|PB|^2=(a-1)^2+(b+2)^2+(a-5)^2+(b-0)^2=2(a^2+b^2)-12a+4b+30=2[(a-3)^2+(b+1)^2]+10$，

设$D(3,-1)$，如图①，



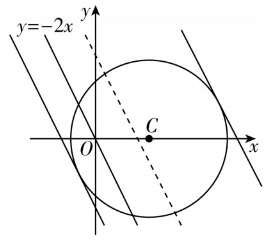
图①

所以根据代数式的几何意义可知$|PA|^2+|PB|^2$的最小值为$2|DE|^2+10=2\times(3-\sqrt{2})^2+10=32-12\sqrt{2}$，故B正确；

对于C，设$z=2x+y$，即$y=-2x+z$，动点(x,y)在圆C上，

则z取得最小值时，直线$y=-2x+z$在y轴上截距最小，

如图②，在圆C所在平面作直线$y=-2x$，直线$y=-2x+z$与直线$y=-2x$平行，



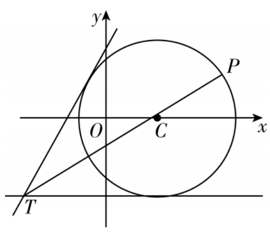
图②

由图②可知，当直线$y=-2x+z$与圆C相切时其在y轴上截距取得最大值或最小值，

此时圆心C到直线$y=-2x+z$的距离等于半径，即$\frac{|-2\times2+z|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}}=3\Rightarrow z=4+3\sqrt{5}$或$z=4-3\sqrt{5}$，故$2a+b$的最小值为$4-3\sqrt{5}$，故C错误；

对于D，因为$\frac{a+2b+9}{a+3}=1+2\times\frac{b+3}{a+3}$，设$T(-3,-3)$，

则根据几何意义可知，当圆上的点$P(a,b)$与定点$T(-3,-3)$所在直线的斜率最大时，$\frac{a+2b+9}{a+3}=1+2\times\frac{b+3}{a+3}$的值最大，



图③

如图③，显然当过点T的直线与圆相切时其斜率最大或最小，

设切线为$y=k(x+3)-3$，即$kx-y+3k-3=0$，

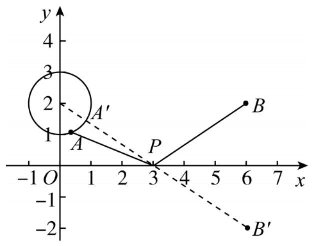
则圆心C到切线的距离$d=\frac{|5k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，

解得$k=0$或$k=\frac{15}{8}$，

所以$\left(\frac{a+2b+9}{a+3}\right)_{max}=1+2\times\frac{15}{8}=\frac{19}{4}$，故D正确.

故选ABD.

22. $2\sqrt{13}-1$ 【解析】根据题意画出圆$x^2+(y-2)^2=1$，以及点$B(6,2)$，如图，作B关于x轴的对称点B'，连接圆心$(0,2)$与B'，设圆心与B'连线与圆的交点为A'，则$|A'B'|$为$|PA|+|PB|$的最小值，$|A'B'|$为点$(0,2)$到点$B'(6,-2)$的距离减去圆的半径，即$|PA|+|PB|$的最小值为$\sqrt{(6-0)^2+(-2-2)^2}-1=2\sqrt{13}-1$.



刷上分

1. C 【解析】当直线经过原点时,直线方程为 $y=kx(k\neq0)$,

此时 $P(3,4)$ 到直线 l 的距离为 $\frac{|3k-4|}{\sqrt{1+k^2}}=5$,化简得 $(4k+3)^2=0$,解得 $k=-\frac{3}{4}$.

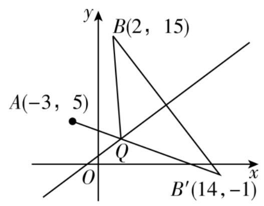
当直线不经过原点时,设直线方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1(a\neq0)$,即 $x+y-a=0$,

此时 $P(3,4)$ 到直线 l 的距离为 $\frac{|7-a|}{\sqrt{2}}=5$,

解得 $a=7\pm5\sqrt{2}$.

故符合条件的直线有 3 条,故选 C.

2. C 【解析】设 $B'(m,n)$ 为点 B 关于直线 l 的对称点,则 BB' 的中点为 $\left(\frac{m+2}{2},\frac{n+15}{2}\right)$.



由轴对称的性质,可得 $\begin{cases}3\cdot\frac{m+2}{2}-4\cdot\frac{n+15}{2}+4=0,\\ \frac{15-n}{2-m}\cdot\frac{3}{4}=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=14,\\ n=-1,\end{cases}$ 即 $B'(14,-1)$.

直线 AB' 的方程为 $\frac{y-5}{-1-5}=\frac{x+3}{14+3}$,

即 $y=-\frac{6}{17}x+\frac{67}{17}$,

由 $\begin{cases}y=-\frac{6}{17}x+\frac{67}{17},\\ 3x-4y+4=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{8}{3},\\ y=3,\end{cases}$

即直线 AB' 与 l 交于点 $Q\left(\frac{8}{3},3\right)$.

$|PA|+|PB|=|PA|+|PB'|\geqslant|AB'|$,当 A,P,B' 三点共线,即直线 l 上的点 P 与 $Q\left(\frac{8}{3},3\right)$ 重合时,$|PA|+|PB|$ 取得最小值,

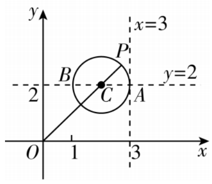
故满足条件的 P 点坐标为 $\left(\frac{8}{3},3\right)$. 故选 C.

3. B 【解析】因为 $k\cdot1+(-1)\cdot k=0$,所以两直线垂直,

又直线 $kx-y-3k+2=0$ 过定点 $A(3,2)$,直线 $x+ky-2k-1=0$ 过定点 $B(1,2)$,

所以 $PA\perp PB$,

故交点 P 的轨迹是以 AB 为直径的圆 C(挖去点 $A(3,2)$),如图所示,其中圆心 $C(2,2)$,半径为 1,



所以 $|OP|$ 的最大值为 $|OC|+1=2\sqrt{2}+1$. 故选 B.

关键点拨 本题是隐形圆问题,根据题意得到直线分别过定点 $A(3,2)$ 和 $B(1,2)$ 且垂直,推断出 P 的轨迹是以 AB 为直径的圆 C(挖去点 $A(3,2)$)是解决本题的关键.

4. C 【解析】由点 $P(x,y)$ 满足到直线 $x-\sqrt{3}y-1=0$ 的距离为 1,得 $\frac{|x-\sqrt{3}y-1|}{2}=1$,

即 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 或 $x-\sqrt{3}y-3=0$,此时点 P 在直线 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 或 $x-\sqrt{3}y-3=0$ 上.

由 $|PA|=2|PO|$,得 $(x-3)^2+y^2=4(x^2+y^2)$,则 $(x+1)^2+y^2=4$,此时点 P 在以 $(-1,0)$ 为圆心,2 为半径的圆上,

点 $(-1,0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y+1=0$ 的距离为 0,该直线与圆有 2 个公共点;

点 $(-1,0)$ 到直线 $x-\sqrt{3}y-3=0$ 的距离为 $\frac{|-1-3|}{2}=2$,该直线与圆有 1 个公共点,

所以符合要求的点 P 的个数为 3. 故选 C.

5. D 【解析】在平面直角坐标系中,不妨设 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,$P(x,y)$.

因为 $|PA|=2|PB|$,所以 $\sqrt{(x+2)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$,

化简得 $\left(x-\frac{10}{3}\right)^2+y^2=\frac{64}{9}$,

所以点 P 在以 $\left(\frac{10}{3},0\right)$ 为圆心,半径 $r=\frac{8}{3}$ 的圆上,

所以 $\triangle PAB$ 面积的最大值是 $\frac{1}{2}|AB|r=\frac{16}{3}$. 故选 D.

6. A 【解析】由 $M:x^2+y^2-4y+3=0$ 可得 $x^2+(y-2)^2=1$,则圆心 $M(0,2)$,半径为 1,$y\in[1,3]$.

设 $C(x,y)$,且直线 $l:ax-y+2=0$ 过定点 $M(0,2)$,

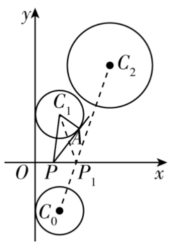
所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PM}$,$\overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CM}$,

$\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{CM}=(0,3)+(-x,2-y)=(-x,5-y)$,

所以 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|=|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{CM}|=\sqrt{(-x)^2+(5-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2-10y+25}=\sqrt{22-6y}\in[2,4]$.

故选 A.

7. BD 【解析】圆 C_1 的圆心 $C_1(1,2)$,半径 $r_1=1$,圆 C_2 的圆心 $C_2(3,4)$,半径 $r_2=\sqrt{3}$.



对于 A,圆 C_2 的半径为 $\sqrt{3}$,A 错误;

对于 B,$|C_1C_2|=2\sqrt{2}>1+\sqrt{3}$,圆 C_1 和圆 C_2 相离,B 正确;

对于 C,圆 C_1 关于 x 轴对称的圆为 $C_0:(x-1)^2+(y+2)^2=1$,$C_0(1,-2)$,连接 C_0C_2 交 x 轴于点 P_1,连接 P_1C_1,

由圆的性质得,$|PM|+|PN|\geqslant|PC_1|-1+|PC_2|-\sqrt{3}=|PC_0|+|PC_2|-1-\sqrt{3}\geqslant|C_0C_2|-1-\sqrt{3}=2\sqrt{10}-1-\sqrt{3}$,当且仅当点 P 与 P_1 重合,且 M,N 是线段 P_1C_1,P_1C_2 分别与圆 C_1 和圆 C_2 的交点时取等号,C 错误;

对于 D,设点 $P(t,0)$,过点 P 的圆 C_1 的切线长 $|PA|=\sqrt{|PC_1|^2-|AC_1|^2}=\sqrt{(t-1)^2+2^2-1}\geqslant\sqrt{3}$,当且仅当 $t=1$,即 $P(1,0)$ 时取等号,D 正确. 故选 BD.

8. ABD 【解析】对于 A,圆 $C_1:(x-1)^2+y^2=2$ 的圆心为 $(1,0)$,半径为 $\sqrt{2}$,圆 $C_2:(x-a)^2+(y-\sqrt{2})^2=8$ 的圆心为 $(a,\sqrt{2})$,半径为 $2\sqrt{2}$,

当圆 C_1 和圆 C_2 存在公共点时,$2\sqrt{2}-\sqrt{2}\leqslant|C_1C_2|\leqslant2\sqrt{2}+\sqrt{2}$,

所以 $(\sqrt{2})^2\leqslant(a-1)^2+(\sqrt{2})^2\leqslant(3\sqrt{2})^2$,

解得 $-3\leqslant a\leqslant5$,所以实数 a 的取值范围为 $[-3,5]$,A 正确;

对于 B,$\triangle ABC_1$ 的面积为 $S_{\triangle ABC_1}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sin\angle AC_1B=\sin\angle AC_1B\leqslant1$,当 $\angle AC_1B=\frac{\pi}{2}$ 时,$\triangle ABC_1$ 的面积取得最大值 1,B 正确;

对于 C,当弦 AB 垂直于 x 轴时,$A(0,-1)$,$B(0,1)$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0+1\times(-1)=-1$,

当弦 AB 不垂直于 x 轴时,设弦 AB 所在直线方程为 $y=kx$,

与圆 $C_1:(x-1)^2+y^2=2$ 联立,得 $(1+k^2)\cdot x^2-2x-1=0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $x_1x_2=\frac{-1}{1+k^2}$,$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+k^2x_1x_2=(1+k^2)x_1x_2=(1+k^2)\cdot\frac{-1}{1+k^2}=-1$,

综上 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-1$,恒为定值,C 错误;

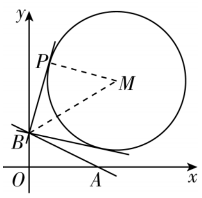
对于 D,设 $P(x_0,y_0)$,线段 OP 的中点为 $D\left(\frac{x_0}{2},\frac{y_0}{2}\right)$,则点 D 也是线段 AB 的中点,

且 $|AB|=|OP|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$,

又 $|AB|=2\sqrt{|C_1A|^2-|C_1D|^2}=2\sqrt{2-\left[\left(\frac{x_0}{2}-1\right)^2+\frac{y_0^2}{4}\right]}$,

所以 $2\sqrt{2-\left[\left(\frac{x_0}{2}-1\right)^2+\frac{y_0^2}{4}\right]}=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$,
化简得 $(x_0-1)^2+y_0^2=3$,所以点 P 的轨迹为以 $(1,0)$ 为圆心,$\sqrt{3}$ 为半径的圆,其周长为 $2\sqrt{3}\pi$,D 正确. 故选 ABD.

9. $\frac{11\sqrt{5}}{5}+4$　$3\sqrt{2}$　【解析】圆 $(x-5)^2+(y-5)^2=16$ 的圆心为 $M(5,5)$,半径为 4,
直线 AB 的方程为 $\frac{x}{4}+\frac{y}{2}=1$,即 $x+2y-4=0$,
圆心 M 到直线 AB 的距离为 $\frac{|5+2\times5-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{11\sqrt{5}}{5}$,
所以点 P 到直线 AB 的距离的最小值为 $\frac{11\sqrt{5}}{5}-4$,最大值为 $\frac{11\sqrt{5}}{5}+4$.
如图所示:



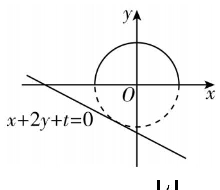
当 $\angle PBA$ 最大或最小时,直线 PB 与圆 M 相切,连接 MP,BM,可知 $PM\perp PB$,
$|BM|=\sqrt{(0-5)^2+(2-5)^2}=\sqrt{34}$,$|MP|=4$,由勾股定理可得 $|BP|=\sqrt{|BM|^2-|MP|^2}=3\sqrt{2}$.

考向 42　直线与圆、圆与圆的位置关系

刷考点

1. A　【解析】圆 $(x-1)^2+(y+1)^2=9$ 的圆心为 $(1,-1)$,半径 $r=3$,
因为 $3\times1+4\times(-1)+1=0$,所以直线 $3x+4y+1=0$ 过圆心,
所以直线与圆相交且过圆心. 故选 A.

2. D　【解析】易知曲线 $C:y=\sqrt{4-x^2}$ 可化为 $x^2+y^2=4(y\geqslant0)$,表示圆心为 $(0,0)$,半径 $r=2$ 的上半圆;易知直线 $x+2y+t=0$ 可化为 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{t}{2}$.
当 $t=2\sqrt{5}$ 时,圆心 $(0,0)$ 到直线 $x+2y+2\sqrt{5}=0$ 的距离为 $d=\frac{|2\sqrt{5}|}{\sqrt{1+4}}=2=r$,
此时 l 与下半圆相切,如图所示,不合题意,即必要性不成立;



若 l 与 C 相切,可知 $d=\frac{|t|}{\sqrt{1+4}}=r=2$,解得 $t=2\sqrt{5}$ 或 $t=-2\sqrt{5}$,
检验可知只有当 $t=-2\sqrt{5}$ 时,直线 l 与 C 相切,即可得 $t=-2\sqrt{5}$,所以充分性不成立.
所以"l 与 C 相切"是"$t=2\sqrt{5}$"的既不充分也不必要条件.
故选 D.

3. ACD　【解析】对于 A,由 $l:mx-y-m+3=0$,即 $m(x-1)+3-y=0$,
由 $\begin{cases}x-1=0,\\3-y=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$ 所以直线 l 过定点 $M(1,3)$,故 A 正确;
对于 B,因为 $(1-2)^2+(3-4)^2<3$,即点 $M(1,3)$ 在圆 C 内,所以直线 l 与圆 C 一定相交,故 B 错误;
对于 C,当直线 l 过圆心 C 时,满足题意,此时 $2m-4-m+3=0$,解得 $m=1$,故 C 正确.
对于 D,由圆的标准方程可得圆心为 $C(2,4)$,半径 $r=\sqrt{3}$,直线 l 过的定点 $M(1,3)$,当 $l\perp CM$ 时,直线 l 截圆 C 所得弦长最短,易得 $|CM|=\sqrt{2}$,
则最短弦长为 $2\sqrt{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2}=2$,故 D 正确. 故选 ACD.

4. D　【解析】当直线 l 的斜率不存在时,直线方程为 $x=2$,此时与圆不相切,
则直线 l 的斜率 k 一定存在,设直线方程为 $y-1=k(x-2)$,化简得 $kx-y+1-2k=0$,
依题意,圆心 $(0,0)$ 到直线 l 的距离为 1,
即 $\frac{|1-2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1$,解得 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$,
所以直线 l 的方程为 $4x-3y-5=0$ 或 $y=1$.
故选 D.

易错警示　求过某点的圆的切线问题时,先确定该点与圆的位置关系,再求直线方程. 若点在圆内,则过该点的切线不存在;若点在圆上,则过该点的切线有一条;若点在圆外,则过该点的切线有两条,此时应考虑切线斜率不存在的情况.

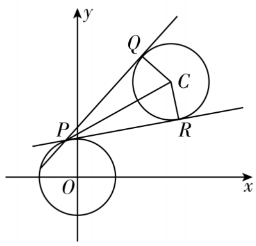
5. D　【解析】由题设,圆 $C:(x-2)^2+(y-3)^2=1$ 的圆心为 $C(2,3)$,半径为 1,
又 $|PA|^2=|CP|^2-|CA|^2=|CP|^2-1$,故当 $|CP|$ 最小时,$|PA|$ 最小,
圆心 $C(2,3)$ 到直线 $l:x-y-3=0$ 的距离 $d=\frac{|2-3-3|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,
当 $CP\perp l$ 时,$|CP|_{\min}=d=2\sqrt{2}$,所以 $|PA|_{\min}=\sqrt{7}$. 故选 D.

6. C　【解析】将圆的一般方程化为标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$,令 $x-y=z$,则直线 $x-y=z$ 与圆有公共点,且当直线与圆相切时,z 取得最大或最小值. 设直线 $x-y=z$ 与圆相切,则有 $\frac{|2-1-z|}{\sqrt{2}}=3$,整理得 $|1-z|=3\sqrt{2}$,解得 $z=1+3\sqrt{2}$ 或 $z=1-3\sqrt{2}$,所以 $x-y$ 的最大值为 $1+3\sqrt{2}$. 故选 C.

一题多解　将圆的一般方程化为标准方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=9$,令 $x=2+3\cos\theta$,$y=1+3\sin\theta$,θ 为参数,$\theta\in[0,2\pi)$,(关键点) 所以 $x-y=1+3(\cos\theta-\sin\theta)=1-3\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$,当且仅当 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ 时,$x-y$ 取得最大值,最大值为 $1+3\sqrt{2}$,故选 C.

7. D　【解析】圆的方程 $x^2+y^2-4x=0$,即为 $(x-2)^2+y^2=4$,圆心 $C(2,0)$,
易知四边形 $PACB$ 的外接圆的直径为 PC,
$|PC|$ 的最小值为圆心 C 到直线 $x-2y+6=0$ 的距离,即 $d=\frac{8}{\sqrt{5}}$,
此时四边形 $PACB$ 的外接圆的半径为 $r=\frac{4}{\sqrt{5}}$,
所以四边形 $PACB$ 的外接圆的面积的最小值为 $S=\pi r^2=\frac{16\pi}{5}$.
故选 D.

8. $\frac{4\sqrt{2}}{9}$　【解析】

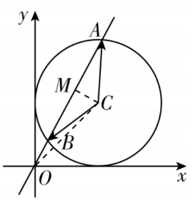


如图,由题意可得 $|PQ|=|PR|$,$\angle CPQ=\angle CPR=\frac{\theta}{2}$,$CQ\perp PQ$,$CR\perp PR$,圆 O 的圆心为 $O(0,0)$,半径 $r_1=\sqrt{2}$,圆 C 的圆心为 $C(4,4)$,半径 $r_2=\sqrt{2}$,
则 $|PQ|+|PR|=2|PQ|=2\sqrt{|PC|^2-|CQ|^2}=2\sqrt{|PC|^2-2}$,
当 $|PQ|+|PR|$ 取最小值时,$|PC|$ 取得最小值,
$|PC|_{\min}=|OC|-r_1=\sqrt{16+16}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$,
此时 $\sin\frac{\theta}{2}=\sin\angle CPQ=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$.
因为 $\frac{\theta}{2}$ 为锐角,所以 $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,所以
$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$,
即当 $|PQ|+|PR|$ 取最小值时,$\sin\theta=\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

9. D　【解析】因为圆 $C:(x-\sqrt{2})^2+y^2=\frac{11}{3}$,
所以圆心 $C(\sqrt{2},0)$,半径 $r=\sqrt{\frac{11}{3}}$.
圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$,所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{3}$.
故选 D.

10. D 【解析】圆 C 的标准方程是 $(x-2)^2+(y-1)^2=4$，圆心为 $C(2,1)$，半径为 2，
易知直线 l 过定点 $P(1,2)$，且 $(1-2)^2+(2-1)^2=2<4$，则 P 在圆 C 内部，
所以直线 l 与圆 C 相交所得弦长最短时，$PC\perp l$，
$k_{PC}=\frac{2-1}{1-2}=-1$，所以 $k=1$，
则 l 的方程为 $y=x+1$，即 $x-y+1=0$. 故选 D.

11. C 【解析】如图，设 M 为线段 AB 的中点，连接 MC，OC. 对于选项 A，圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 的圆心坐标为 $C(1,1)$，半径为 $r=1$，直线 $y=2x$，圆心 C 到直线的距离为 $d=|CM|=\frac{|1-2|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，



则 $|AB|=2|AM|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$，故 A 错误；
对于选项 B，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{CB}|\cdot\cos\angle ACB=\cos\angle ACB$，
因为点 A，B 不重合，所以 $\cos\angle ACB<1$，故 B 错误；
对于选项 C，$|OA||OB|=(|OM|+|MA|)\cdot(|OM|-|MA|)=|OM|^2-|MA|^2=|OC|^2-d^2-(r^2-d^2)=|OC|^2-r^2=1$，故 C 正确；
对于选项 D，线段 AB 中点 M 满足 $OM\perp CM$，M 的轨迹是以 OC 为直径的圆（圆 C 内部部分），所以轨迹长度为 $\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$，故 D 错误. 故选 C.

12. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】圆 $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ 的圆心坐标为 $(1,3)$，半径 $r=2$，圆心 $(1,3)$ 到直线 $x-my-1=0$ 的距离 $d=\frac{|3m|}{\sqrt{1+m^2}}$，
依题意得 $2\sqrt{r^2-d^2}=2$，即 $4-\frac{9m^2}{1+m^2}=1$，
解得 $m=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. C 【解析】圆 $M:x^2+y^2-2ax=0(a>0)$，即圆 $M:(x-a)^2+y^2=a^2(a>0)$ 的圆心为 $M(a,0)$，半径为 $r_1=a$，
圆 $N:(x-2)^2+(y+1)^2=1$ 的圆心为 $N(2,-1)$，半径 $r_2=1$，
因为圆 M 的圆心到直线 $2x+y=2$ 的距离 $d=\frac{|2a-2|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，解得 $a=\frac{7}{2}$ 或 $a=-\frac{3}{2}$（舍去），从而 $M\left(\frac{7}{2},0\right)$，
所以 $|MN|=\sqrt{\frac{9}{4}+1}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，
因为 $|MN|=\frac{\sqrt{13}}{2}<r_1-r_2=\frac{5}{2}$，
所以圆 M 与圆 $N:(x-2)^2+(y+1)^2=1$ 的位置关系是内含.
故选 C.

14. A 【解析】圆 $C_1:(x+4)^2+(y-1)^2=8$，圆心 $C_1(-4,1)$，半径 $r_1=2\sqrt{2}$，
圆 $C_2:(x+3)^2+(y-2)^2=2$，圆心 $C_2(-3,2)$，半径 $r_2=\sqrt{2}$，
因为 $|C_1C_2|=\sqrt{2}=r_1-r_2$，
所以两圆内切，公共切线只有一条，
因为圆心连线与切线相互垂直，$k_{C_1C_2}=1$，
所以切线斜率为 -1，
由方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+8x-2y+9=0,\\x^2+y^2+6x-4y+11=0,\end{cases}$
解得 $\begin{cases}x=-2,\\y=3,\end{cases}$
故圆 C_1 与圆 C_2 的切点坐标为 $(-2,3)$，
故公切线方程为 $y-3=-(x+2)$，
即 $y=-x+1$.
故选 A.

> **易错警示** 求两圆的公切线方程时，需要先判断两圆的位置关系，根据位置关系判断出公切线的条数，若求得的直线条数少于确定的条数，则一定有斜率不存在的直线.

15. D 【解析】设圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 与圆 $x^2+y^2+6y-28=0$ 的交点为 A，B.
联立两圆方程，得 $\begin{cases}x^2+y^2+6x-4=0,\\x^2+y^2+6y-28=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1,\\y=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-6,\\y=-2.\end{cases}$
不妨记 $A(-1,3)$，$B(-6,-2)$，
于是 AB 的中点为 $\left(-\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)$，
$k_{AB}=\frac{3+2}{-1+6}=1$，
从而可得 AB 的垂直平分线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\left(x+\frac{7}{2}\right)$，即 $x+y+3=0$，
联立 $\begin{cases}x-y-5=0,\\x+y+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=-4,\end{cases}$
即圆心坐标为 $(1,-4)$. 故选 D.

16. C 【解析】根据题意，可知圆 $C_1:x^2+y^2+2x-6y+10-m=0$，
即 $(x+1)^2+(y-3)^2=m$，圆心为 $C_1(-1,3)$，半径 $r=\sqrt{m}$，
令 $y=0$，则 $x^2+2x+10-m=0$，设圆 C_1 与 x 轴交点的横坐标分别为 x_1，x_2，则 $x_1+x_2=-2$，$x_1x_2=10-m$，所以 $|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{4-4(10-m)}=2\sqrt{7}$，所以 $m=16$，故 $r=4$，
故圆 $C_1:x^2+y^2+2x-6y-6=0$，又因为圆 $C_2:x^2+y^2+8y-30=0$，
设 AB 为两圆的公共弦所在的直线，则由 $\begin{cases}x^2+y^2+8y-30=0,\\x^2+y^2+2x-6y-6=0,\end{cases}$
作差变形可得 $x-7y+12=0$，即直线 AB 的方程为 $x-7y+12=0$.
故选 C.

17. B

> **思路导引** 首先明确蒙日圆的方程是根据椭圆方程得出，对于椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，其蒙日圆方程为 $x^2+y^2=a^2+b^2$. 本题中先求出椭圆的蒙日圆方程，再根据圆与圆的位置关系，即两圆有且仅有一个公共点时的情况来求解 n 的值.

【解析】对于椭圆 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$，其中 $a^2=6$，$b^2=3$，根据蒙日圆方程 $x^2+y^2=a^2+b^2$，可得该椭圆的蒙日圆方程为 $x^2+y^2=6+3=9$，其圆心坐标为 $(0,0)$，半径 $r_1=3$.
圆 $(x-4)^2+(y-n)^2=16$，其圆心坐标为 $(4,n)$，半径 $r_2=4$.
因为两圆有且仅有一个公共点，所以两圆内切或外切.
当两圆外切时，两圆的圆心距等于两圆半径之和，两圆的圆心距 $d=\sqrt{(4-0)^2+(n-0)^2}=\sqrt{16+n^2}$，由 $d=r_1+r_2$，即 $\sqrt{16+n^2}=7$，两边平方得 $16+n^2=49$，解得 $n=\pm\sqrt{33}$.
当两圆内切时，两圆的圆心距等于两圆半径之差的绝对值，由 $d=|r_1-r_2|$，即 $\sqrt{16+n^2}=|3-4|=1$，两边平方得 $16+n^2=1$，得 $n^2=-15$（无解）.
所以 n 的值为 $\pm\sqrt{33}$. 故选 B.

18. BC 【解析】易知圆 $C_1:x^2+y^2=1$ 的圆心为 $C_1(0,0)$，半径 $r_1=1$，
将 $C_2:x^2+y^2-6x+8y+24=0$ 化为 $(x-3)^2+(y+4)^2=1$，可知圆心为 $C_2(3,-4)$，半径 $r_2=1$.
对于 A，易知两圆的圆心距 $|C_1C_2|=5>r_1+r_2$，可知两圆外离，所以两个圆的公切线有 4 条，A 错误；
对于 B，易知 $|PQ|$ 的最小值为 $|C_1C_2|-r_1-r_2=3$，最大值为 $|C_1C_2|+r_1+r_2=7$，所以 $|PQ|$ 的取值范围为 $[3,7]$，B 正确；
对于 C，显然两圆圆心 $C_1(0,0)$，$C_2(3,-4)$ 都在直线 $4x+3y=0$ 上，
因此直线 $4x+3y=0$ 即为两圆对称轴，C 正确；
对于 D，由选项 A 可知两圆外离，即不存在公共弦，D 错误. 故选 BC.

19. BC 【解析】设 $M(x,y)$，由 $|MA|^2+$

$|MB|^2=12$,得$(x-2)^2+y^2+x^2+(y-2)^2=12$,整理得$(x-1)^2+(y-1)^2=4$,所以点$M$的轨迹是以$D(1,1)$为圆心,半径$r_1=2$的圆. 圆$C:(x-a)^2+y^2=1$的圆心为$C(a,0)$,半径$r_2=1$,因为点$M$存在,所以两圆有公共点,所以$2-1\leqslant|CD|\leqslant2+1$,即$1\leqslant\sqrt{(a-1)^2+1}\leqslant3$,$1\leqslant(a-1)^2+1\leqslant9$,其中$1\leqslant(a-1)^2+1$恒成立,由$(a-1)^2+1\leqslant9$得$(a-1)^2\leqslant8$,$|a-1|\leqslant2\sqrt{2}$,则$-2\sqrt{2}\leqslant a-1\leqslant2\sqrt{2}$,解得$1-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant1+2\sqrt{2}$,所以实数$a$的值可以是B,C选项,故选BC.

刷上分

1. C 【解析】因为直线$l:x+(1+a)y=2-a$,

即$x+y-2+a(y+1)=0$,

当$y+1=0$时,$x+y-2=0$,解得$\begin{cases}x=3,\\y=-1,\end{cases}$

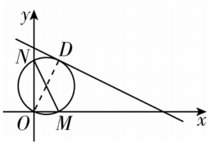
所以直线l表示过定点$A(3,-1)$,且除去$y=-1$的直线.

将圆C的方程化为标准方程为$(x-3)^2+(y+2)^2=1$,则$C(3,-2)$,因为$|AC|=1$,点A在圆上,

所以直线l与圆C可能相交或相切,相切时直线l的方程为$y=-1$,不合题意,

所以直线l与圆C相交. 故选C.

2. B 【解析】因为MN是直径,$\angle MON=90°$,所以原点O在圆上,



如图,过O作OD垂直于直线$3x+4y-10=0$,垂足为点D,

因为以MN为直径的圆与直线$3x+4y-10=0$相切,

所以要使该圆的半径最小,此时OD为该圆的直径,

点O到直线$3x+4y-10=0$的距离$|OD|=\frac{|0+0-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$,

所以圆的半径的最小值为1. 故选B.

3. B 【解析】设$P(x,y)$,则$\overrightarrow{PA}=(2-x,-y)$,$\overrightarrow{PB}=(10-x,-y)$,

因为$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,所以$(2-x)(10-x)+(-y)^2=0$,

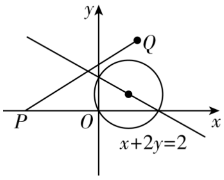
即$(x-6)^2+y^2=16$,所以点P在以$(6,0)$为圆心,4为半径的圆上.

又点P在直线$tx-4y+2=0$上,

所以直线$tx-4y+2=0$与圆$(x-6)^2+y^2=16$有公共点,

则$\frac{|6t+2|}{\sqrt{t^2+16}}\leqslant4$,解得$-\frac{21}{5}\leqslant t\leqslant3$. 故选B.

4. B 【解析】由题意可得,$a^2+b^2=r^2$,$a+2b=2$,直线PQ的斜率为$k_{PQ}=\frac{ab}{2a+b}$.



因为$\frac{2a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)(a+2b)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{2b}{a}+\frac{2a}{b}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(5+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{2a}{b}}\right)=\frac{9}{2}$,

当且仅当$\frac{2b}{a}=\frac{2a}{b}$,即$a=b=\frac{2}{3}$时,等号成立,所以$\frac{ab}{2a+b}\leqslant\frac{2}{9}$,

即当直线PQ的斜率取最大值时,$a=b=\frac{2}{3}$,所以$r^2=a^2+b^2=\frac{8}{9}$,故$r=\frac{2\sqrt{2}}{3}$. 故选B.

5. ABD 【解析】圆$C:(x-1)^2+y^2=1$的圆心为$C(1,0)$,半径$r=1$,点$A(3,1)$在圆C外.

对于A,$|AP|_{\max}=|AC|+r=\sqrt{5}+1$,A正确;

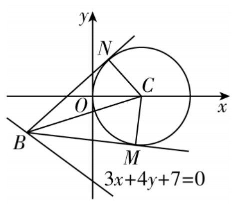
对于B,显然直线AP的斜率存在,设直线AP的方程为$y=k(x-3)+1$,

点C到直线AP的距离$\frac{|1-2k|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant1$,解得$0\leqslant k\leqslant\frac{4}{3}$,B正确;

对于C,线段AC的中点坐标为$\left(2,\frac{1}{2}\right)$,则以线段$AC$为直径的圆的方程为$(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$,

即$x^2+y^2-4x-y+3=0$,与圆C的方程相减得两圆公共弦所在直线方程为$2x+y-3=0$,C错误;

对于D,点C到直线$3x+4y+7=0$的距离$d=\frac{10}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$,则$|BC|\geqslant d=2$,



四边形$BMCN$的面积$S=2S_{\triangle BCM}=2\times\frac{1}{2}\cdot|BM|\cdot|CM|=|BM|=\sqrt{|BC|^2-r^2}\geqslant\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$,D正确. 故选ABD.

6. 6 【解析】设圆心为C,直线l与圆C相切于点B,根据对称性,不妨设点B位于第三象限,$\sin\angle COB=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

提示:圆的切线的性质的应用

则直线AO的斜率为$\sqrt{3}$,所以直线AO的方程为$y=\sqrt{3}x$. 设点$A(a,\sqrt{3}a)$,$a>0$,则$|OA|^2=a^2+(\sqrt{3}a)^2=8^2$,解得$a=4$,所以$A(4,4\sqrt{3})$,代入抛物线方程得$(4\sqrt{3})^2=2p\cdot4$,解得$p=6$.

> **一题多解** 设直线方程为$y=kx$,与圆的方程联立可得,$(k^2+1)x^2+4x+1=0$,因为直线与圆相切,所以$\Delta=16-4(k^2+1)=0$,解得$k^2=3$. 直线$y=kx$与抛物线$y^2=2px(p>0)$联立可得$k^2x^2=2px$,解得$x=\frac{2p}{k^2}$,所以$|OA|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2p}{k^2}=\sqrt{1+3}\cdot\frac{2p}{3}=8$,解得$p=6$.

7. $\left[\frac{3\sqrt{82}}{5},6\right]$ 【解析】由题意可知,圆C_1的圆心为$C_1(-2,1)$,半径$r_1=3$,圆C_2的圆心为$C_2(3,-1)$,半径$r_2=2$. 因为$|AB|=2\sqrt{2}$,所以$|C_2D|=\sqrt{2}$,即点D在以C_2为圆心,$\sqrt{2}$为半径的圆上. 设直线OD的方程为$y=kx$,则C_2到直线OD的距离$\frac{|3k+1|}{\sqrt{k^2+1}}\leqslant\sqrt{2}$,即$7k^2+6k-1\leqslant0$,解得$-1\leqslant k\leqslant\frac{1}{7}$. 圆心$C_1(-2,1)$到直线$OD$的距离为$\frac{|2k+1|}{\sqrt{k^2+1}}$,直线$OD$被圆$C_1$截得的弦长为$2\sqrt{9-\frac{(2k+1)^2}{k^2+1}}$. 令$f(x)=\frac{(2x+1)^2}{x^2+1}\left(-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{7}\right)$,

提示:由于不是常规代数式,可考虑构造函数,利用导数法求最值

则$f'(x)=\frac{(2x+1)(4-2x)}{(x^2+1)^2}$,当$-1\leqslant x<-\frac{1}{2}$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,当$-\frac{1}{2}<x\leqslant\frac{1}{7}$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,故$f(x)_{\min}=f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$,$f(-1)=\frac{1}{2}$,$f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{81}{50}$,$f(x)_{\max}=\frac{81}{50}$. 当$k=-\frac{1}{2}$时,直线$OD$经过$C_1$,此时直线$OD$被圆$C_1$截得的弦长最长,最长的弦长是圆$C_1$的直径,为6. 当$k=\frac{1}{7}$时,直线$OD$被圆$C_1$截得的弦长最短,最短弦长为$2\sqrt{9-\frac{81}{50}}=\frac{3\sqrt{82}}{5}$. 综上,直线$OD$被圆$C_1$截得的弦长的取值范围是$\left[\frac{3\sqrt{82}}{5},6\right]$.

8. 【解】(1)圆$O:x^2+y^2=4$的圆心为$O(0,0)$,半径$r=2$,

依题意,直线l与圆O相交,则点O到直线l的距离$\frac{|3m|}{\sqrt{m^2+1}}<2$,

解得$-\frac{2\sqrt{5}}{5}<m<\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

又$m\neq0$,所以m的取值范围是$\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5},\right.$

$0\Big)\cup\Big(0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\Big)$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=mx-3m,\\x^2+y^2=4\end{cases}$ 消去 y 得 $(1+m^2)x^2-6m^2x+9m^2-4=0$，则 $\Delta=4(4-5m^2)>0$，

$x_1+x_2=\frac{6m^2}{1+m^2}$，$x_1x_2=\frac{9m^2-4}{1+m^2}$，$y_1y_2=m^2(x_1-3)(x_2-3)=m^2[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9]$，

所以 $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}$

$=\frac{m^2[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$=\frac{m^2\left(\frac{9m^2-4}{1+m^2}-\frac{18m^2}{1+m^2}+9\right)}{\frac{9m^2-4}{1+m^2}-\frac{12m^2}{1+m^2}+4}=\frac{5m^2}{m^2}=5$.

(3)依题意，直线 l_1 不垂直于 y 轴，设其方程为 $x=ty+1$，设 $G(x_3,y_3)$，$H(x_4,y_4)$，

由 $\begin{cases}x=ty+1,\\x^2+y^2-4=0\end{cases}$ 消去 x 得 $(1+t^2)y^2+2ty-3=0$，显然 $\Delta'>0$，

$y_3+y_4=\frac{-2t}{1+t^2}$，$y_3y_4=\frac{-3}{1+t^2}$，$2ty_3y_4=3(y_3+y_4)$，而点 $A(2,0)$，$B(-2,0)$，

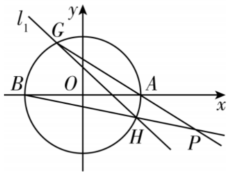
直线 AG 的方程为 $y=\frac{y_3}{x_3-2}(x-2)$，直线 BH 的方程为 $y=\frac{y_4}{x_4+2}(x+2)$，

由 $\begin{cases}y=\frac{y_3}{x_3-2}(x-2),\\y=\frac{y_4}{x_4+2}(x+2)\end{cases}$ 消去 y 得

$\frac{y_3}{x_3-2}(x-2)=\frac{y_4}{x_4+2}(x+2)$，

即 $\frac{y_3}{ty_3-1}(x-2)=\frac{y_4}{ty_4+3}(x+2)$，解得 $x=\frac{4ty_3y_4+6y_3-2y_4}{3y_3+y_4}=\frac{6(y_3+y_4)+6y_3-2y_4}{3y_3+y_4}=4$，

所以点 P 在定直线 $x=4$ 上.



方法技巧 求定值问题常见的方法：①从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关. ②直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

专题 12　圆锥曲线

考向 43　椭圆

刷考点

1. B 【解析】由题意得 $\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}}{|x-4|}=\frac{1}{2}$，整理得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，所以点 P 的轨迹为椭圆. 故选 B.

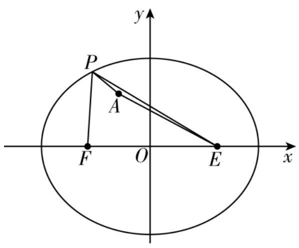
2. B 【解析】如图，将点 A 坐标代入椭圆 C 的方程中，得 $\frac{(-1)^2}{12}+\frac{(\sqrt{3})^2}{8}=\frac{11}{24}<1$，则点 A 在椭圆 C 的内部. 记椭圆 C 的右焦点为 E，由椭圆 C 的方程得 $E(2,0)$，设椭圆 C 的长轴长为 $2a$，则 $a=2\sqrt{3}$，因为 P 在椭圆 C 上，

所以 $|PF|+|PE|=2a=4\sqrt{3}$，即 $|PF|=4\sqrt{3}-|PE|$，

所以 $|PF|+|PA|=4\sqrt{3}-|PE|+|PA|\leqslant 4\sqrt{3}+|AE|$，当 P 是 AE 的延长线与椭圆的交点时取等号，

提示：根据三角形三边关系得到

所以 $|PF|+|PA|$ 的最大值为 $4\sqrt{3}+\sqrt{(-1-2)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=6\sqrt{3}$，故选 B.



3. B 【解析】如图，由题意知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，以 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$ 为焦点的椭圆的半焦距 $c=1$，点 P 是直线 l 与椭圆的交点，

设点 $F_2(1,0)$ 关于直线 $l:x-y+4=0$ 对称的点为 $F'(m,n)$，

则 $\begin{cases}\frac{n}{m-1}=-1,\\\frac{n}{2}=\frac{m+1}{2}+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-4,\\n=5,\end{cases}$

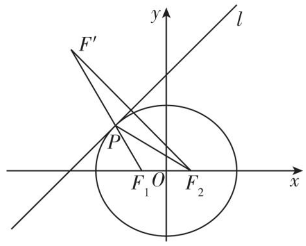
即 $F'(-4,5)$，

则椭圆的长轴长 $2a=|PF_1|+|PF_2|=|PF_1|+|PF'|\geqslant|F_1F'|=\sqrt{(-4+1)^2+5^2}=\sqrt{34}$，

所以该椭圆长轴长的最小值为 $\sqrt{34}$.

易错点：椭圆的长轴长为 $2a$，而不是 a

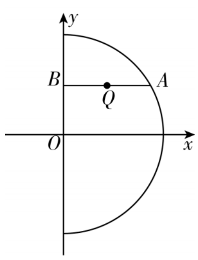
故选 B.



4. C 【解析】因为方程 $(m+1)x^2+(1-m)\cdot y^2=1-m^2$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，所以 $1-m^2\neq0$，该方程可化为 $\frac{x^2}{1-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$，

所以 $\begin{cases}1-m>m+1,\\m+1>0,\end{cases}$ 解得 $-1<m<0$. 故选 C.

5. D 【解析】如图，设 $A(x_0,y_0)$，$x_0>0$，$Q(x,y)$，则 $B(0,y_0)$，由题意可知，$\begin{cases}x=\frac{x_0}{2},\\y=y_0,\end{cases}$



即 $\begin{cases}x_0=2x,\\y_0=y,\end{cases}$

将点 $A(x_0,y_0)$ 代入 $x^2+y^2=12(x>0)$ 中，

得 $4x^2+y^2=12(x>0)$，即 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1(x>0)$.

故选 D.

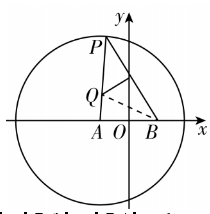
6. B 【解析】因为 $|OP|=|PF|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，线段 AF 的中点为 P，所以 $\triangle AOF$ 是以 O 为直角的直角三角形，$|AF|=\sqrt{3}$，

所以 $|AF|=a=\sqrt{3}$，

所以椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. 故选 B.

7. $\sqrt{14}$ 【解析】如图，连接 QB，

因为点 Q 在线段 PB 的垂直平分线上，



所以 $|PQ|=|QB|$，

故 $|QA|+|QB|=|QA|+|PQ|=|PA|=6$，

所以点 Q 的轨迹是以 A，B 为焦点的椭圆，

设其方程为 $\frac{x_Q^2}{a^2}+\frac{y_Q^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则 $2a=6$，$a=3$，$c=2$，$b^2=a^2-c^2=9-4=5$，

故点 Q 的轨迹方程为 $\frac{x_Q^2}{9}+\frac{y_Q^2}{5}=1$.

设 $x_Q+y_Q=t$，联立 $\begin{cases}\frac{x_Q^2}{9}+\frac{y_Q^2}{5}=1,\\x_Q+y_Q=t,\end{cases}$

消去 y_Q 得 $14x_Q^2-18tx_Q+9t^2-45=0$，则判别式 $\Delta=(-18t)^2-4\times14\times(9t^2-45)\geqslant0$，即 $t^2\leqslant14$，解得 $-\sqrt{14}\leqslant t\leqslant\sqrt{14}$，

故 x_Q+y_Q 的最大值为 $\sqrt{14}$.

8. C 【解析】由题意得 $a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{5}$，所以 $|F_1F_2|=2c=2\sqrt{5}$，$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$.

因为 $|PF_1|-|PF_2|=2$，所以 $|PF_1|=4$，$|PF_2|=2$，

而 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=16+4=20=|F_1F_2|^2$，

所以 $PF_1\perp PF_2$，

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot$