只有选项 D 满足$\{a|a\leqslant 1\}$是$\{a|a<2\}$的真子集,所以命题"$\forall x\in(1,2),x^2-a>0$"为真命题的一个必要不充分条件是"$a<2$",故选 D.

11. A 【解析】由 $x>1,y>0,\frac{2}{x-1}+\frac{1}{y}=1$,

看到 1,想到基本不等式"1"的妙用

得 $x+2y=(x-1)+2y+1=[(x-1)+2y]\cdot\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{y}\right)+1=5+\frac{4y}{x-1}+\frac{x-1}{y}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4y}{x-1}\cdot\frac{x-1}{y}}=9$,当且仅当$\frac{4y}{x-1}=\frac{x-1}{y}$,即 $x-1=2y=4$ 时取等号,即当 $x=5,y=2$ 时,$(x+2y)_{\min}=9$. 依题意,$m^2+2m+1<9$,解得$-4<m<2$,即命题 P:$-4<m<2$. 又 $x+1+m\geqslant 0\Leftrightarrow m\geqslant -x-1$,当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$-3\leqslant -x-1\leqslant -2$,依题意,命题 Q:$m\geqslant -3$.
由命题 P 为真命题,命题 Q 为假命题,得$-4<m<-3$,
所以实数 m 的取值范围是$\{m|-4<m<-3\}$. 故选 A.

热点考向 1　新定义

1. B 【解析】因为 $A=\{2,3,5\},B=\{3,5,8\}$,所以 $A-B=\{2\}$,所以 $A-(A-B)=\{3,5\}$,有两个元素,则 $A-(A-B)$的子集个数是 $2^2=4$. 故选 B.

2. C 【解析】因为 $A=\{1,4\},B=\{-1,2\}$,
所以当 $a=1,b=-1$ 时,$x=b^2-a=0$;
当 $a=1,b=2$ 时,$x=b^2-a=3$;
当 $a=4,b=-1$ 时,$x=b^2-a=-3$;
当 $a=4,b=2$ 时,$x=b^2-a=0$.
所以 $A\otimes B=\{0,-3,3\}$,
故 $A\otimes B$ 中的元素个数为 3. 故选 C.

3. C 【解析】A 选项,$2\ 023=5\times 404+3$,故 $2\ 023\in[3]$,A 正确;
B 选项,全体整数被 5 除的余数只能是 0,1,2,3,4,
故 $\mathbf{Z}=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]\cup[4]$,B 正确;
C 选项,$-2=5\times(-1)+3$,故$-2\in[3]$,C 错误;
D 选项,由题意可知 $a-b$ 能被 5 整除,故 a,b 分别被 5 除的余数相同,故整数 a,b 属同一类,D 正确.
故选 C.

4. ABD 【解析】因为 $A=(-1,4],B=[0,7)$,所以 $A\cup B=(-1,7)$,所以 $A\cdot B=(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$,A 正确;
又 $A\cap B=[0,4]$,所以 $A^\circ B=(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$,B 正确;
又$\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,0)\cup[7,+\infty)$,则 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=(-\infty,4]\cup[7,+\infty)$,所以 $A\cdot(\complement_{\mathbf{R}}B)=(4,7)$,C 错误;
又$\complement_{\mathbf{R}}A=(-\infty,-1]\cup(4,+\infty)$,则$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=(4,7)$,所以$(\complement_{\mathbf{R}}A)^\circ B=(-\infty,4]\cup[7,+\infty)$,D 正确.
故选 ABD.

5. BD 【解析】对于 A,因为 $E\cup F=\{x\in\mathbf{Q}|x\neq 1\}\neq\mathbf{Q}$,所以 A 错误.
对于 B,设 $E=\{x\in\mathbf{Q}|x\leqslant 1\},F=\{x\in\mathbf{Q}|x>1\}$,满足戴德金分割,则 E 有一个最大元素 1,F 没有最小元素,所以 B 正确.
对于 C,若 E 有一个最大元素,F 有一个最小元素,则不能同时满足 $E\cup F=\mathbf{Q},E\cap F=\varnothing$,所以 C 错误.
对于 D,设 $E=\{x\in\mathbf{Q}|x\leqslant\sqrt{3}\},F=\{x\in\mathbf{Q}|x>\sqrt{3}\}$,满足戴德金分割,此时 E 中没有最大元素,F 中也没有最小元素,所以 D 正确.
故选 BD.

6. 12 【解析】因为 A_1,A_2,A_3 满足:①每个集合都恰有 4 个元素;②$A_1\cup A_2\cup A_3=M$,
所以 A_1,A_2,A_3 一定各包含 4 个不同的数值.
当集合 A_1,A_2,A_3 中元素的最小值分别是 1,2,3,最大值分别是 12,9,6,
特征数的和 $X_1+X_2+X_3$ 最小,如:$A_1=\{1,10,11,12\}$,特征数为 13;$A_2=\{2,7,8,9\}$,特征数为 11;$A_3=\{3,4,5,6\}$,特征数为 9,
则 $X_1+X_2+X_3$ 的最小值为 $13+11+9=33$.
当集合 A_1,A_2,A_3 中元素的最小值分别是 1,4,7,最大值分别是 12,11,10 时,
特征数的和 $X_1+X_2+X_3$ 最大,如:$A_1=\{1,2,3,12\}$,特征数为 13;
$A_2=\{4,5,6,11\}$,特征数为 15;$A_3=\{7,8,9,10\}$,特征数为 17,
则 $X_1+X_2+X_3$ 的最大值为 $13+15+17=45$,
故 $X_1+X_2+X_3$ 的最大值与最小值的差为 $45-33=12$.

7. (1)【解】设一个 2 元"复活集"为$\{x,y\}(x\neq y)$,则 $x+y=xy$.
由于$\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}\times 3=\frac{9}{2}$,所以一个 2 元"复活集"可为$\left\{\frac{3}{2},3\right\}$(答案不唯一).
(2)【证明】由(1)分析可知,2 元"复活集"$\{x,y\}(x\neq y)$满足 $x+y=xy$.
若 $x>0,y>0$,则 $xy>2\sqrt{xy}$,即$\sqrt{xy}(\sqrt{xy}-2)>0$,
所以$\sqrt{xy}<0$(舍去)或$\sqrt{xy}>2$,所以 $xy>4$,
所以对任意一个 2 元"复活集",若其元素均为正数,则其元素之积一定大于 4.
(3)【解】设 3 元"复活集"$\{x,y,z\}$,其

巧思:先求得一个 3 元"复活集",然后证明这个"复活集"是唯一的

中 x,y,z 都是正整数,且两两不相等,
根据集合中元素的互异性和无序性,不妨设 $x<y<z$,
根据"复活集"可得 $x+y+z=xyz$.
因为 $1+2+3=1\times 2\times 3$,所以存在元素均为正整数的 3 元"复活集".
设 $x=1$,则 $1<y<z$,由 $x+y+z=xyz$,

先假设一个元素等于 1,利用因式分解,找出了满足条件的所有正整数解,并证明了这个解的唯一性

得 $1+y+z=yz$,整理得$(y-1)(z-1)=2$.
由于 $1<y<z$ 且 y,z 都是正整数,所以$\begin{cases}y-1=1,\\z-1=2,\end{cases}$
所以$\begin{cases}y=2,\\z=3,\end{cases}$此时 3 元"复活集"为$\{1,2,3\}$.
当 $x\geqslant 2$ 时,由 $x<y<z$,得 $xyz=x+y+z<3z$,所

再假设 $x\geqslant 2$,由"复活集"定义和不等式的性质得 $xy<3$,从而再由正整数性质进一步可求解

以 $xy<3$,
由于 $x<y$ 且 x,y 都是正整数,所以只有 $x=1,y=2$ 满足,
但与 $x\geqslant 2$ 矛盾,所以当 $x\geqslant 2$ 时,不存在元素均为正整数的 3 元"复活集".
综上所述,存在某个 3 元"复活集",所有符合条件的 3 元"复活集"为$\{1,2,3\}$.

专题 2　不等式

考向 3　不等式的性质

刷考点

1. D 【解析】对于 A,$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}$,
因为 $a>b>c>0$,所以 $a-b>0,b(b+c)>0$,
所以$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}>0$,即$\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$,故 A 错误;
对于 B,因为 $a>b>0$,所以$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$,
又 $c<0$,所以$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$,故 B 错误;
对于 C,当 $c=0$ 时,$ac^2=bc^2=0$,故 C 错误;
对于 D,若 $a>b$,则 $2a>a+b,a+b>2b$,
所以 $a>\frac{a+b}{2}>b$,故 D 正确.
故选 D.

2. D 【解析】对于 A,根据 $e^{a-b}>0$,得 $a-b$ 为任意实数,故 A 错误.
对于 B,由 $\ln\frac{a}{b}>0=\ln 1$,得$\frac{a}{b}>1$,当 $a>0$ 且 $b>0$ 时,有 $a>b$;当 $a<0$ 且 $b<0$ 时,有 $a<b$,不满足题意,故 B 错误.
对于 C,因为 $a=2>b=1$ 满足 $a^a>b^b$,$a=-\frac{2}{3}<b=1$ 也满足 $a^a>b^b$,不满足题意,故 C 错误.
对于 D,因为$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$,所以 $0>a>b$,所以

能推出 $a>b$,满足题意,故 D 正确.
故选 D.

3. D 【解析】对于 A,若 $a=0,b=-1$,满足 $a>b$,但 $a^2>b^2$ 不成立,故 A 错误.
对于 B,若 $a=-2\ 023,b=-2\ 025$,满足 $a>b$,但 $\frac{a}{b}=\frac{2\ 023}{2\ 025},\frac{a+2\ 023}{b+2\ 024}=0,\frac{a}{b}<\frac{a+2\ 023}{b+2\ 024}$ 不成立,故 B 错误.
对于 C,当 $a>0>b$ 时,$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ 不成立,故 C 错误.
对于 D,当 $a>b\geqslant 0$ 时,$a|a|=a^2,b|b|=b^2$,显然 $a|a|>b|b|$ 成立;当 $0\geqslant a>b$ 时,$a^2<b^2$,又 $a|a|=-a^2,b|b|=-b^2$,故 $a|a|>b|b|$ 成立;当 $a>0>b$ 时,$a|a|>0,b|b|<0$,显然 $a|a|>b|b|$ 成立. 故当 $a>b$ 时,总有 $a|a|>b|b|$ 成立,故 D 正确.

4. D 【解析】因为 $M-N=(2a^2+5a+3)-(a+1)(a+2)=a^2+2a+1=(a+1)^2\geqslant 0$,所以 $M\geqslant N$. 故选 D.

5. B 【解析】$a=0.1e^{0.2}=\frac{1}{10}e^{0.2}>\frac{1}{10}e^{0}=\frac{1}{10}=b$,
$c=0.2e^{0.1}=\frac{1}{5}e^{0.1}>\frac{1}{5}e^{0}=\frac{1}{5}>\frac{1}{10}=b$,
关键点:找中间值 $\frac{1}{5}e^0$
而 $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}e^{0.1}$,因为 $e<2^{10}$,所以 $e^{0.1}<2$,
所以 $\frac{a}{c}=\frac{1}{2}e^{0.1}<\frac{1}{2}\times 2=1$,故 $a<c$,
所以 $b<a<c$. 故选 B.

6. C 【解析】对于 A,$\frac{b}{a}-\frac{b+1}{a+1}=\frac{b-a}{a(a+1)}$,因为 $a>b>0$,所以 $b-a<0,a+1>0$,所以 $\frac{b-a}{a(a+1)}<0$,即 $\frac{b}{a}-\frac{b+1}{a+1}<0$,即 $\frac{b}{a}<\frac{b+1}{a+1}$,故 A 错误;
对于 B,$a+\frac{1}{a}-\left(b+\frac{1}{b}\right)=\frac{a^2+1}{a}-\frac{b^2+1}{b}=\frac{a^2b+b-ab^2-a}{ab}=\frac{(a-b)(ab-1)}{ab}$,因为 $a>b>0$,所以 $a-b>0,ab>0$,但 ab 与 1 的大小不确定,故 B 不一定成立,故 B 错误;
对于 C,$a+\frac{a}{b}-\left(b+\frac{b}{a}\right)=\frac{ab+a}{b}-\frac{ab+b}{a}=\frac{a^2b+a^2-ab^2-b^2}{ab}=\frac{(a-b)(ab+a+b)}{ab}$,因为 $a>b>0$,所以 $a-b>0,ab>0,ab+a+b>0$,所以 $\frac{(a-b)(ab+a+b)}{ab}>0$,即 $a+\frac{a}{b}-\left(b+\frac{b}{a}\right)>0$,于是有 $a+\frac{a}{b}>b+\frac{b}{a}$,故 C 正确;
对于 D,$\frac{2a+b}{a+2b}-\frac{a}{b}=\frac{(2a+b)b-a(a+2b)}{b(a+2b)}=\frac{(b-a)(b+a)}{b(a+2b)}$,因为 $a>b>0$,所以 $b-a<0,b+a>0,a+2b>0$,所以 $\frac{(b-a)(b+a)}{b(a+2b)}<0$,即 $\frac{2a+b}{a+2b}-\frac{a}{b}<0$,于是有 $\frac{2a+b}{a+2b}<\frac{a}{b}$,故 D 错误.
故选 C.

7. BD 【解析】对于 A,当 $a=0.5,c=-0.5$ 时,$\ln(a-c)=\ln 1=0$,故 A 错误;
对于 B,因为 $a>b>0,d<0$,所以 $ad<bd$,
易错点:当不等式两边同时乘一个负数时,注意不等号方向要发生改变
又 $b>0,d<c<0$,故 $bd<bc$,从而 $ad<bd<bc$,故 B 正确;
对于 C,$\frac{c}{a}-\frac{c+b}{a+b}=\frac{ac+bc-ac-ab}{a(a+b)}=\frac{b(c-a)}{a(a+b)}$,
因为 $a>b>0>c>d$,所以 $c-a<0,a+b>0$,故 $\frac{c}{a}-\frac{c+b}{a+b}=\frac{b(c-a)}{a(a+b)}<0$,即 $\frac{c}{a}<\frac{c+b}{a+b}$,故 C 错误;
对于 D,$a^3+b^3-(a^2b+ab^2)=(a^3-a^2b)+(b^3-ab^2)=a^2(a-b)+b^2(b-a)=(a-b)\cdot(a^2-b^2)=(a-b)^2(a+b)$,
敲黑板:利用作差法比较大小的关键是变形,常采用配方、因式分解、分母有理化等方法把差式变成积式或者完全平方式
因为 $a>b>0$,故 $a+b>0,(a-b)^2>0$,所以 $a^3+b^3-(a^2b+ab^2)=(a-b)^2(a+b)>0$,即 $a^3+b^3>a^2b+ab^2$,故 D 正确.
综上,故选 BD.

8. C 【解析】因为 $2<a<3,-2<b<-1$,所以 $4<2a<6,1<-b<2$,则 $5<2a-b<8$,故选 C.

关键点拨 利用不等式的性质求某些代数式的取值范围时,一般是利用整体思想,通过一次不等关系的运算求得整体范围,是避免错误的有效途径.

9. B 【解析】设 $4a-2b=m(a-b)+n(a+b)=(m+n)a-(m-n)b$,则有 $\begin{cases}m+n=4,\\m-n=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n=1,\end{cases}$
点悟:设参,根据等式的性质建立方程组求出参数的值
所以 $4a-2b=3(a-b)+(a+b)$. 因为 $a-b\in[0,1],a+b\in[2,4]$,所以 $3(a-b)\in[0,3]$,所以 $4a-2b\in[2,7]$,故选 B.

易错警示 同向不等式的两边可以相加,但是这种转化不是等价变形,如果在解题过程中多次使用这种转化,就有可能扩大了所求代数式的取值范围.

10. B 【解析】因为 $b<a<-3b$,所以 $b<0$,则有 $\frac{1}{b}<0$,所以 $-3b\cdot\frac{1}{b}<a\cdot\frac{1}{b}<b\cdot\frac{1}{b}$,
敲黑板:根据不等式性质 4 得到
即 $-3<\frac{a}{b}<1$,所以 $0\leqslant\left|\frac{a}{b}\right|<3$. 故选 B.

11. BCD 【解析】对于 A,$1\leqslant x\leqslant 2$,则 $2\leqslant 2x\leqslant 4$,又 $3\leqslant y\leqslant 4$,
所以 $5\leqslant 2x+y\leqslant 8$,所以 $2x+y$ 的最小值是 5,故 A 错误;
对于 B,$1\leqslant x\leqslant 2$,则 $-2\leqslant -x\leqslant -1$,又 $3\leqslant y\leqslant 4$,
所以 $1\leqslant y-x\leqslant 3$,所以 $y-x$ 的最小值是 1,故 B 正确;
对于 C,因为 $1\leqslant x\leqslant 2,3\leqslant y\leqslant 4$,所以 $1\times 3\leqslant xy\leqslant 2\times 4$,即 $3\leqslant xy\leqslant 8$,
所以 xy 的最大值是 8,故 C 正确;
对于 D,$3\leqslant y\leqslant 4$,则 $\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{y}\leqslant\frac{1}{3}$,又 $1\leqslant x\leqslant 2$,所以 $\frac{1}{4}\times 1\leqslant\frac{x}{y}\leqslant\frac{1}{3}\times 2$,
所以 $\frac{1}{4}\leqslant\frac{x}{y}\leqslant\frac{2}{3}$,所以 $\frac{x}{y}$ 的最大值是 $\frac{2}{3}$,故 D 正确.
故选 BCD.

12. $\frac{3}{4}$ 【解析】因为 $f(a)=f(b+1)$,则 $|a-1|=|b|$,所以 $a-1=b$ 或 $a-1=-b$,即 $a=b+1$ 或 $a=1-b$. 因为 $a\leqslant b$,所以 $a=1-b$,且 $a=1-b\leqslant b$,可得 $b\geqslant\frac{1}{2}$,所以 $a\cdot(b+1)=(1-b)(1+b)=1-b^2\leqslant\frac{3}{4}$,当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时,等号成立,故 $a\cdot(b+1)$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$.

考向 4　基本不等式

刷考点

1. D 【解析】因为 $x\in\left(\frac{1}{2},1\right]$,
所以 $2x-1\in(0,1]$,
易错点:在应用基本不等式时,注意相关式中的相关项必须是正数,如果不是正数,则需要通过构造转化为正数
所以 $2x+\frac{1}{2x-1}=\left[(2x-1)+\frac{1}{2x-1}\right]+1\geqslant 2\sqrt{(2x-1)\cdot\frac{1}{2x-1}}+1=3$,当且仅当 $2x-1=\frac{1}{2x-1}$,即 $x=1$ 时,等号成立,故选 D.

2. B 【解析】因为 $a>0,b>0$,所以 $\frac{4}{b}+\frac{b}{a^2}+2a\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{b}\cdot\frac{b}{a^2}}+2a=\frac{4}{a}+2a$,当且仅当 $\frac{4}{b}=\frac{b}{a^2}$,即 $b=2a$ 时等号成立. 又 $\frac{4}{a}+2a\geqslant 2\sqrt{\frac{4}{a}\cdot 2a}=4\sqrt{2}$,当且仅当 $\frac{4}{a}=2a$ 时等号成立,故当且仅当 $\frac{4}{b}=\frac{b}{a^2}$ 且 $\frac{4}{a}=2a$,即 $a=\sqrt{2},b=2\sqrt{2}$ 时取等号,即 $\frac{4}{b}+\frac{b}{a^2}+2a$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$. 故选 B.

3. A 【解析】由 $x>0,y>0$,得 $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$,所以 $x+y+xy=3\geqslant 2\sqrt{xy}+xy$,当且仅当 $x=y$ 时等号成立. 令 $\sqrt{xy}=t(t>0)$,则 $t^2+2t-3\leqslant 0$,解得 $0<t\leqslant 1$,即 $0<\sqrt{xy}\leqslant 1$,故 $0<$

$xy\leqslant 1$，当且仅当 $x=y=1$ 时等号成立，故 xy 的最大值为 1，故选 A.

一题多解 由 $x+y+xy=3$，得 $y=\frac{3-x}{x+1}$，则 $xy=\frac{x(3-x)}{x+1}=\frac{-x^2+3x}{x+1}$. 因为 $x>0,y>0$，所以 $\frac{3-x}{x+1}>0$ 且 $x>0$，解得 $0<x<3$. 设 $t=x+1\in(1,4)$，则 $x=t-1$，所以 $xy=\frac{-x^2+3x}{x+1}=\frac{-(t-1)^2+3(t-1)}{t}=\frac{-t^2+5t-4}{t}=-t-\frac{4}{t}+5=-\left(t+\frac{4}{t}\right)+5\leqslant -2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}+5=1$，当且仅当 $t=\frac{4}{t}$，即 $t=2$ 时等号成立，所以 xy 的最大值为 1，故选 A.

4. B

思路导引 多元问题一元化，依题意可得 $b=\frac{a^2}{4}+1,a>0$，则 $\frac{3a+2b}{a+b}=2+\frac{1}{\frac{a}{4}+\frac{1}{a}+1}$，再利用基本不等式即可求得最大值.

【解析】∵ 关于 x 的方程 $x^2-ax+b-1=0$ 有两个相等的正根，

∴ $\begin{cases}a>0,\\b-1>0,\\\Delta=a^2-4(b-1)=0,\end{cases}$ ∴ $b=\frac{a^2}{4}+1,a>0$，

∴ $\frac{3a+2b}{a+b}=2+\frac{a}{a+b}=2+\frac{a}{\frac{a^2}{4}+a+1}=2+$

点悟：分子、分母同时除以 a 构造积为定值的条件

$\frac{1}{\frac{a}{4}+\frac{1}{a}+1}\leqslant 2+\frac{1}{2\sqrt{\frac{a}{4}\cdot\frac{1}{a}}+1}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，当且仅当 $a=b=2$ 时取等号，所以 $\frac{3a+2b}{a+b}$ 有最大值 $\frac{5}{2}$. 故选 B.

5. C 【解析】A 选项：若 $a>0,b>0$，则 $a+4b=1\geqslant 2\sqrt{4ab}$，解得 $ab\leqslant\frac{1}{16}$，

当且仅当 $a=4b=\frac{1}{2}$ 时取"="，故 A 错误；

B 选项：因为正实数 a,b 满足 $ab=a+b+3$，则 $ab-3=a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，

解得 $ab\geqslant 9$（负舍），当且仅当 $a=b=3$ 时取"="，则 ab 的最小值为 9，故 B 错误；

C 选项：因为 $a>0,b>0,a+2b=2$，所以 $4=2a+4b$，

所以 $\frac{4}{a}+\frac{a}{b}=\frac{2a+4b}{a}+\frac{a}{b}=2+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geqslant 2+2\sqrt{\frac{4b}{a}\cdot\frac{a}{b}}=6$，

当且仅当 $a=2b=1$ 时取"="，故 C 正确；

D 选项：$\frac{a^4+4b^4+1}{ab}\geqslant\frac{4a^2b^2+1}{ab}=4ab+\frac{1}{ab}\geqslant 4$，

当且仅当 $\begin{cases}a^2=2b^2,\\4ab=\frac{1}{ab},\end{cases}$ 即 $a^2=\frac{\sqrt2}{2},b^2=\frac{\sqrt2}{4}$ 时取"="，故 D 错误.

故选 C.

6. $-\frac{\sqrt2}{4}$ 【解析】因为 $\cos 2B+\cos B=1-\cos(A-C)$，所以 $1-\cos 2B=\cos B+\cos(A-C)$，

可得 $2\sin^2B=-\cos(A+C)+\cos(A-C)=2\sin A\sin C$，即 $\sin^2B=\sin A\sin C$，

由正弦定理可得 $b^2=ac=4$，

又因为 $2a+c\geqslant 2\sqrt{2a\cdot c}=4\sqrt2$，当且仅当 $c=2a=2\sqrt2$ 时，等号成立，

关键点

所以当 $2a+c$ 取得最小值时，$c=2\sqrt2,b=2,a=\sqrt2$，

此时最大角为角 C，$\cos C=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}=\frac{4+2-8}{2\times2\times\sqrt2}=-\frac{\sqrt2}{4}$，

所以当 $2a+c$ 取得最小值时，$\triangle ABC$ 的最大内角的余弦值是 $-\frac{\sqrt2}{4}$.

7. C 【解析】设 $a=x+1,b=x+2y$，

题干中等于 1 的式子是分式的形式，考虑换元

且 $a>1,b>0$，则 $x=a-1,y=\frac{b-a+1}{2}$，且 $\frac1a+\frac1b=1$，

所以 $3x+y=3a-3+\frac{b-a+1}{2}=\frac{5a+b-5}{2}$，

问题转化为已知 $\frac1a+\frac1b=1$，求 $\frac{5a+b-5}{2}$ 的最小值

$5a+b=(5a+b)\cdot\left(\frac1a+\frac1b\right)=6+\frac{5a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 6+2\sqrt{\frac{5a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=6+2\sqrt5$，

当且仅当 $\frac{5a}{b}=\frac{b}{a}$，即 $a=\frac{\sqrt5+1}{\sqrt5},b=\sqrt5+1$ 时等号成立，

则 $\frac{5a+b-5}{2}\geqslant\frac{6+2\sqrt5-5}{2}=\frac12+\sqrt5$，

即 $3x+y$ 的最小值为 $\frac12+\sqrt5$，故选 C.

8. B 【解析】由题意知，A,B,C,D 四点共面，又 $\overrightarrow{DO}=x\overrightarrow{OA}+2y\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC}$，

则 $\overrightarrow{OD}=-x\overrightarrow{OA}-2y\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC}$，

所以 $-x-2y+3=1$，即 $x+2y=2$，

利用空间向量共面定理的推论得到

因为 $x>0,y>0$，

所以 $\frac1x+\frac2y=\frac12(x+2y)\left(\frac1x+\frac2y\right)=\frac12\left(5+\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}\right)\geqslant\frac12\left(5+2\sqrt{\frac{2x}{y}\cdot\frac{2y}{x}}\right)=\frac92$，

当且仅当 $\frac{2x}{y}=\frac{2y}{x}$，即 $x=y=\frac23$ 时等号成立，

所以 $\frac1x+\frac2y$ 的最小值为 $\frac92$.

故选 B.

9. 4 【解析】因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x+3)=\frac{1}{f(x)}$，则 $f(x+6)=\frac{1}{f(x+3)}=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 的一个周期为 6.

又因为 $f(2\,024)=2$，

所以 $f(6\times337+2)=f(2)=2$.

因为当 $0<x<3$ 时，$f(x)=ax+2b(a>0,b>0)$，

则有 $2a+2b=2$，即 $a+b=1$，

所以 $\frac1a+\frac1b=\left(\frac1a+\frac1b\right)(a+b)=2+\frac ba+\frac ab\geqslant 2+2\sqrt{\frac ba\cdot\frac ab}=4$，

当且仅当 $\frac ba=\frac ab$，即 $a=\frac12,b=\frac12$ 时取等号.

10. 16 【解析】因为 $a>0,b>2$，且 $\frac{1}{a+1}+\frac{2}{b-2}=\frac12$，所以 $\frac{2}{a+1}+\frac{4}{b-2}=1$，所以 $2a+b=[2(a+1)+(b-2)]\left(\frac{2}{a+1}+\frac{4}{b-2}\right)=4+4+\frac{2(b-2)}{a+1}+\frac{8(a+1)}{b-2}\geqslant 8+2\sqrt{\frac{2(b-2)}{a+1}\cdot\frac{8(a+1)}{b-2}}=16$，

敲黑板：当两个变量为正实数，有一个代数式的值已知，求另一个代数式的最值问题时，根据任意数乘 1 数值不变的性质，将已知式和所求式相乘，转化成互为倒数式之和的形式，然后再使用基本不等式求最值

当且仅当 $\frac{2(b-2)}{a+1}=\frac{8(a+1)}{b-2}$，即 $b-2=2(a+1)$，即 $a=3,b=10$ 时，等号成立，故 $2a+b$ 的最小值是 16.

11. D 【解析】因为 $a>0,b>0$，且 $a+b=1$，

所以由基本不等式可得 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac14$ $\left(\text{当且仅当 } a=b=\frac12 \text{ 时取等号}\right)$，A 正确；

由基本不等式知 $\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，则 $\frac12\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，即 $a^2+b^2\geqslant\frac12$（当且仅当 $a=$

$b=\frac{1}{2}$时取等号$\Big)$，B 正确；

由题得$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{1-b}+\frac{1}{b+1}=\frac{2}{1-b^2}$.

由已知得 $0<b<1$，故 $1-b^2\in(0,1)$，所以 $\frac{2}{1-b^2}>2$，故$\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}>2$，C 正确；

由基本不等式可得$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\le\sqrt{\frac{a+b}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$，即$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2}$$\left(当且仅当 a=b=\frac{1}{2}时取等号\right)$，D 错误.

故选 D.

12. CD 【解析】因为$(\sqrt{m}+\sqrt{n})^2=m+n+2\sqrt{mn}\le m+n+(m+n)=4$，

当且仅当 $m=n=1$ 时，等号成立，所以 $\sqrt{m}+\sqrt{n}\le 2$，

所以$\sqrt{m}+\sqrt{n}$的最大值为 2，故 A 错误；

$m^2+n^2=(m+n)^2-2mn=4-2mn\ge 4-2\times\left(\frac{m+n}{2}\right)^2=2$，

当且仅当 $m=n=1$ 时取等号，此时取得最小值 2，故 B 错误.

$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{n}\right)(m+n)=\frac{1}{2}\left(3+\frac{n}{m}+\frac{2m}{n}\right)$

$\ge\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times2\sqrt{\frac{n}{m}\cdot\frac{2m}{n}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{n}{m}=\frac{2m}{n}$，即 $m=2\sqrt{2}-2$，$n=4-2\sqrt{2}$时，等号成立，

故$\frac{1}{m}+\frac{2}{n}$的最小值为$\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，故 C 正确；

因为 m,n 为正实数，$m+n=2$，

所以 $\sqrt{mn}\le\frac{m+n}{2}=1$，当且仅当 $m=n=1$ 时，等号成立，

故 $\sqrt{mn}$ 的最大值为 1，所以$\frac{\sqrt{mn}}{2}$的最大值为$\frac{1}{2}$，则 D 正确.

故选 CD.

13. AD 【解析】函数$f(x)=x+\frac{a^2}{x}(a>0)$在$(0,a)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增，

根据对勾函数的单调性，对 a 进行分类讨论

当 $0<a\le2$ 时，函数 $f(x)$ 在$[2,4]$上单调递增，所以$f(x)_{\max}=f(4)=4+\frac{a^2}{4}$，

$f(x)_{\min}=f(2)=2+\frac{a^2}{2}$，所以 $4+\frac{a^2}{4}-2-\frac{a^2}{2}=1$，解得 $a=2$ 或 $a=-2$（舍去）.

当 $a\ge4$ 时，函数 $f(x)$ 在$[2,4]$上单调递减，所以$f(x)_{\min}=f(4)=4+\frac{a^2}{4}$，

$f(x)_{\max}=f(2)=2+\frac{a^2}{2}$，所以 $2+\frac{a^2}{2}-4-\frac{a^2}{4}=1$，解得 $a=\pm2\sqrt{3}$（舍去）.

当 $2<a<4$ 时，函数 $f(x)$ 在$[2,a]$上单调递减，在$[a,4]$上单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(a)=2a$，且 $f(2)=2+\frac{a^2}{2}$，$f(4)=4+\frac{a^2}{4}$.

若 $4+\frac{a^2}{4}>2+\frac{a^2}{2}$，即 $2<a<2\sqrt{2}$，则 $4+\frac{a^2}{4}-2a=1$，解得 $a=2$（舍去）或 $a=6$（舍去）；

若 $4+\frac{a^2}{4}\le2+\frac{a^2}{2}$，即 $2\sqrt{2}\le a<4$，则 $2+\frac{a^2}{2}-2a=1$，解得 $a=2+\sqrt{2}$ 或 $a=2-\sqrt{2}$（舍去）.

综上所述，$a=2+\sqrt{2}$ 或 $a=2$.

故选 AD.

14. B 【解析】对于 A，因为 $0<|\cos x|\le1$，且函数 $y=x+\frac{2}{x}$在$(0,1]$上单调递减，

所以当$|\cos x|=1$时，$y_{\min}=3$，故 A 错误；

对于 B，将 $y=\sqrt{x}+\sqrt{8-x}$两边分别平方得 $y^2=8+2\sqrt{-x^2+8x}$，且 $0\le x\le8$.

所以 $y^2\ge8$（当 $x=0$ 或 $x=8$ 时等号成立），又 $y>0$，所以 $y_{\min}=2\sqrt{2}$，故 B 正确；

对于 C，因为 $2^x>0$，$2^{2-x}>0$，所以 $y=2^x+2^{2-x}\ge2\sqrt{2^x\cdot2^{2-x}}=4$，当且仅当 $2^x=2^{2-x}$，即 $x=1$ 时取等号，故 C 错误；

对于 D，$y=\frac{2x^4+8x^2+10}{x^2+2}=\frac{2[(x^2+2)^2+1]}{x^2+2}=2\left(x^2+2+\frac{1}{x^2+2}\right)$，因为 $x^2+2\ge2$，函数 $y=x+\frac{1}{x}$在$[2,+\infty)$上单调递增，

所以当 $x^2+2=2$，即 $x=0$ 时，$y_{\min}=5$，故 D 错误.

故选 B.

15. BD 【解析】对于 A，当 $x=-1$ 时，$y=\frac{x+1}{x}=0<2$，即 $y=\frac{x+1}{x}$的最小值为 2 错误，

特值法，举反例判断

故 A 错误；

对于 B，当 $x>1$ 时，$x-1>0$，则 $y=2x+\frac{4}{x-1}-1=2(x-1)+\frac{4}{x-1}+1\ge2\sqrt{2(x-1)\cdot\frac{4}{x-1}}+1=4\sqrt{2}+1$，

当且仅当 $2(x-1)=\frac{4}{x-1}$，即 $x=\sqrt{2}+1$ 时取等号，

则 $y=2x+\frac{4}{x-1}-1$ 的最小值为 $4\sqrt{2}+1$，B 正确；

对于 C，$y=\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+4}}=\frac{x^2+4+1}{\sqrt{x^2+4}}=\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$，

令 $t=\sqrt{x^2+4}$，$t\ge2$，则 $y=t+\frac{1}{t}$在$[2,+\infty)$上单调递增，

故 $y=t+\frac{1}{t}$的最小值为 $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$，C 错误；

对于 D，正数 x,y 满足 $x+2y=3xy$，即$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=3$，

则 $2x+y=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)(2x+y)=\frac{1}{3}\left(\frac{2y}{x}+\frac{2x}{y}+5\right)\ge\frac{1}{3}\left(2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{2x}{y}}+5\right)=3$，当且仅当 $x=y=1$ 时取等号，D 正确.

故选 BD.

16. $(-\infty,5)$ 【解析】若命题“对于任意 $x\in(1,3)$，$a\ge x+\frac{4}{x}$”为真命题，则 $a\ge\left(x+\frac{4}{x}\right)_{\max}$，

设 $f(x)=x+\frac{4}{x}$，$x\in[1,3]$，

由对勾函数的性质可知，当 $x\in[1,2)$时，函数单调递减，当 $x\in[2,3]$时，函数单调递增，

因为 $f(1)=5$，$f(3)=3+\frac{4}{3}<5$，所以 $a\ge5$，

所以命题“对于任意 $x\in(1,3)$，$a\ge x+\frac{4}{x}$”为假命题，则实数 a 的取值范围为$(-\infty,5)$.

17. B 【解析】根据柯西不等式可得$(x^2+y^2+z^2)(1+4+9)\ge(x+2y+3z)^2=1$，即 $x^2+y^2+z^2\ge\frac{1}{14}$，

当且仅当 $x=\frac{1}{14}$，$y=\frac{1}{7}$，$z=\frac{3}{14}$时等号成立. 故选 B.

18. A 【解析】由柯西不等式可知，$(2\sqrt{5-x}+\sqrt{x-4})^2\le(2^2+1^2)\cdot[(\sqrt{5-x})^2+(\sqrt{x-4})^2]=5$，

所以 $2\sqrt{5-x}+\sqrt{x-4}\le\sqrt{5}$，当且仅当 $2\sqrt{x-4}=\sqrt{5-x}$，即 $x=\frac{21}{5}$时取等号，

故函数 $f(x)=2\sqrt{5-x}+\sqrt{x-4}$的最大值及取得最大值时 x 的值分别为$\sqrt{5}$，$\frac{21}{5}$.

故选 A.

19. B 【解析】若 $a,b,x,y>0$，则$\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}\ge$

$\frac{(a+b)^2}{x+y}$，当且仅当$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}$时等号成立，

又 $0<x<\frac{1}{2}$，即 $1-2x>0$，

于是得 $f(x)=\frac{2^2}{2x}+\frac{3^2}{1-2x}\geqslant\frac{(2+3)^2}{2x+(1-2x)}=25$，当且仅当$\frac{2}{2x}=\frac{3}{1-2x}$，即 $x=\frac{1}{5}$时取"="，

所以函数 $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{9}{1-2x}\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$的最小值为 25.

故选 B.

20. $\frac{25}{18}$ 【解析】设 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 的夹角为 α，由题易得 $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，所以$|\overrightarrow{AM}|^2=\frac{8}{9}+\frac{8}{9}\cos\alpha$，由余弦定理得$|\overrightarrow{BC}|^2=5-4\cos\alpha$，

所以 $\frac{1}{|\overrightarrow{AM}|^2}+\frac{2}{|\overrightarrow{BC}|^2}=\frac{1}{\frac{8}{9}+\frac{8}{9}\cos\alpha}+\frac{2}{5-4\cos\alpha}=\frac{\frac{9}{8}}{1+\cos\alpha}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{4}-\cos\alpha}\geqslant\frac{\left(\sqrt{\frac{9}{8}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}{(1+\cos\alpha)+\left(\frac{5}{4}-\cos\alpha\right)}=\frac{25}{18}$，

提示：配凑系数并使用权方和不等式，且 $\alpha\in(0,\pi)$，$1+\cos\alpha>0$，$\frac{5}{4}-\cos\alpha>0$

当且仅当 $\frac{\sqrt{\frac{9}{8}}}{1+\cos\alpha}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{5}{4}-\cos\alpha}$，即 $\cos\alpha=\frac{7}{20}$时等号成立.

21. $\frac{\sqrt{30}}{6}$ 【解析】由柯西不等式可知，$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\leqslant\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]\cdot[(\sqrt{3a})^2+(\sqrt{2b})^2]=\frac{5}{6}(3a+2b)=\frac{5}{6}$，即 $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\frac{\sqrt{30}}{6}$，当且仅当$\frac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{2b}=\sqrt{3a}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $4b=9a=\frac{6}{5}$时取等号，故$\sqrt{a}+\sqrt{b}$的最大值为$\frac{\sqrt{30}}{6}$.

刷上分

1. D 【解析】$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+y)=\frac{1}{2}\left(5+\frac{x}{y}+\frac{4y}{x}\right)\geqslant\frac{9}{2}$，

当且仅当 $x=\frac{4}{3}$，$y=\frac{2}{3}$时等号成立，故$\frac{4}{x}+\frac{1}{y}$的最小值为$\frac{9}{2}$，故选 D.

2. D 【解析】因为 $x>0$，$y>0$，

所以$\frac{(x+y)^2}{xy}=\frac{x^2+y^2+2xy}{xy}=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+2\geqslant 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}+2=4$，

当且仅当$\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$，即 $x=y$ 时取得等号.

故选 D.

3. D 【解析】设 $g(x)=x+f(x)$，则 $g(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant0,\\x+\frac{1}{x},x>0.\end{cases}$

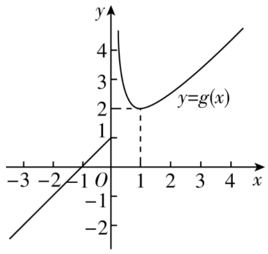
方程 $x+f(x)=m$ 有解，

即 $y=g(x)$ 的图象与 $y=m$ 的图象有交点

当 $x>0$ 时，$g(x)=x+\frac{1}{x}$，

根据对勾函数的性质可得 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $g(x)_{\min}=g(1)=2$.

作出函数 $y=g(x)$ 的图象如图所示：



则 $m\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$.

故选 D.

4. B 【解析】令 $g(x)=x^3+2x$，则 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)=g(x)+1$，

又 $g(-x)=(-x)^3+2(-x)=-(x^3+2x)=-g(x)$，所以 $g(x)$ 为奇函数，

又 $y=x^3$，$y=2x$ 都在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

敲黑板：若 $f(x)$，$g(x)$ 均为增函数，则 $F(x)=f(x)+g(x)$ 也是增函数

又 $f(m^2)+f(2n^2-4)=2$，所以 $g(m^2)+1+g(2n^2-4)+1=2$，

所以 $g(m^2)=-g(2n^2-4)=g(4-2n^2)$，则 $m^2=4-2n^2$，即 $m^2+2n^2=4$.

所以 $m\sqrt{n^2+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot m\cdot\sqrt{2n^2+2}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{m^2+(\sqrt{2n^2+2})^2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{m^2+2n^2+2}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4+2}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 $m=\sqrt{2n^2+2}$，即 $m=\sqrt{3}$，$n^2=\frac{1}{2}$时，等号成立，

所以 $m\sqrt{n^2+1}$的最大值为$\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 故选 B.

5. AC 【解析】对于 A：$y=x+\frac{2}{x}\geqslant2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $x=\frac{2}{x}$，即 $x=\sqrt{2}$时取等号，此时取得最小值 $2\sqrt{2}$，故 A 符合题意；

对于 B：由 $0<x<\pi$ 可得 $0<\sin x\leqslant1$，

令 $t=\sin x\in(0,1]$，则 $y=t+\frac{2}{t}$在 $(0,1]$ 上单调递减，

所以当 $t=1$ 时取得最小值 3，故 B 不符合题意；

对于 C：令 $t=e^x$，则 $t>0$，则 $y=t+\frac{2}{t}\geqslant2\sqrt{t\cdot\frac{2}{t}}=2\sqrt{2}$，

当且仅当 $t=\frac{2}{t}$，即 $t=\sqrt{2}$时取等号，此时取得最小值 $2\sqrt{2}$，C 符合题意；

对于 D，由于$\log_2x\in\mathbf{R}$，所以设$\log_2x=t$，

当 $t>0$ 时，$y=\log_2x+2\log_x2=\log_2x+\frac{2}{\log_2x}=t+\frac{2}{t}\geqslant2\sqrt{2}$，

当且仅当 $t=\frac{2}{t}$，即 $t=\sqrt{2}$时取等号，此时取得最小值 $2\sqrt{2}$；

当 $t<0$ 时，$y=\log_2x+2\log_x2=-\left[-t+\left(-\frac{2}{t}\right)\right]\leqslant-2\sqrt{2}$，

当且仅当 $t=\frac{2}{t}$，即 $t=-\sqrt{2}$时取等号，此时取得最大值$-2\sqrt{2}$.

综上，$y\leqslant-2\sqrt{2}$ 或 $y\geqslant2\sqrt{2}$，故 D 不符合题意.

故选 AC.

6. 8 6 【解析】设安排男员工 x 名，女员工 y 名，由题意$\frac{1}{12}x+\frac{1}{18}y=1$，平均损耗蔬菜量之和为$\frac{80}{x}+\frac{30}{y}$，

则$\frac{80}{x}+\frac{30}{y}=\left(\frac{80}{x}+\frac{30}{y}\right)\cdot\left(\frac{1}{12}x+\frac{1}{18}y\right)=\frac{40y}{9x}+\frac{5x}{2y}+\frac{25}{3}\geqslant2\sqrt{\frac{40y}{9x}\cdot\frac{5x}{2y}}+\frac{25}{3}=\frac{20}{3}+\frac{25}{3}=15$，

当且仅当$\frac{40y}{9x}=\frac{5x}{2y}$，即 $x=8$，$y=6$ 时等号成立，

所以公司应安排 8 名男员工，6 名女员工共同分装这批蔬菜.

7. 4 【解析】因为 $f(0)=-1$，所以 $b=-1$，

又因为 $f(x)\leqslant0$ 有且仅有两个正整数解，所以两个正整数解为 1 和 2，

所以 $\begin{cases} f(2)\le 0,\\ f(3)>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}3-2a\le 0,\\ 8-3a>0,\end{cases}$ 所以 $\frac{3}{2}\le a<\frac{8}{3}$.

因为 $f(x)\le -\frac{5}{4}-\frac{a^2}{16}$，即 $x^2-ax+\frac{1}{4}+\frac{a^2}{16}\le 0$，

因为不等式的解集为 $\{x|m\le x\le n\}$，

所以 m,n 为 $x^2-ax+\frac{1}{4}+\frac{a^2}{16}=0$ 的两根，

所以 $\begin{cases} m+n=a,\\ mn=\frac{1}{4}+\frac{a^2}{16},\end{cases}$

所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=\frac{a}{\frac{1}{4}+\frac{a^2}{16}}=\frac{16a}{a^2+4}=\frac{16}{a+\frac{4}{a}}$.

因为 $a+\frac{4}{a}\ge 2\sqrt{4}=4$，

当且仅当 $a=\frac{4}{a}$，即 $a=2$ 时，等号成立，

所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\le\frac{16}{4}=4$，

所以 $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ 的最大值为 4.

8.【解】(1) $\frac{y}{x}+\frac{3}{y}=\frac{y+x}{x}+\frac{3}{y}-1=3\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)-1=\frac{1}{2}(x+y)\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\right)-1=\frac{1}{2}\left(3+\frac{2y}{x}+\frac{x}{y}\right)-1\ge\frac{1}{2}\left(3+2\sqrt{\frac{2y}{x}\cdot\frac{x}{y}}\right)-1=\frac{1}{2}+\sqrt{2}$，

当且仅当 $\frac{2y}{x}=\frac{x}{y}$，即 $x=6(2-\sqrt{2})$，$y=6(\sqrt{2}-1)$ 时取等号，

即 $\frac{y}{x}+\frac{3}{y}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}+\sqrt{2}$.

(2) 由 $x>0,y>0,x+y=6$，得 $x=6-y>0$，即 $0<y<6$.

不等式 $x^2+4y^2\ge m(x+4y)$ 恒成立，

即 $m\le\frac{x^2+4y^2}{x+4y}$ 恒成立，

参变分离

$\frac{x^2+4y^2}{x+4y}=\frac{(6-y)^2+4y^2}{3y+6}=\frac{5y^2-12y+36}{3(y+2)}=\frac{5(y+2)^2-32(y+2)+80}{3(y+2)}=\frac{5}{3}\left[(y+2)+\frac{16}{y+2}\right]-\frac{32}{3}\ge\frac{5}{3}\cdot 2\sqrt{(y+2)\cdot\frac{16}{y+2}}-\frac{32}{3}=\frac{8}{3}$，

当且仅当 $y+2=\frac{16}{y+2}$，即 $y=2$ 时取等号，

因此当 $x=4,y=2$ 时，$\frac{x^2+4y^2}{x+4y}$ 取得最小值 $\frac{8}{3}$，则 $m\le\frac{8}{3}$，

所以 m 的取值范围是 $\left\{m\,\middle|\,m\le\frac{8}{3}\right\}$.

考向5　二次函数与一元二次不等式

刷考点

1. B 【解析】不等式 $4[x]^2-16[x]+7\le 0$，即为 $(2[x]-1)(2[x]-7)\le 0$，

提示：利用十字相乘法分解因式

解得 $\frac{1}{2}\le[x]\le\frac{7}{2}$，故选 B.

2. C 【解析】由题可知，原不等式可转化为 $[2x-(a+1)][2x-(a-1)]<0$. 因为 $\frac{a+1}{2}>\frac{a-1}{2}$，所以不等式的解为 $\frac{a-1}{2}<x<\frac{a+1}{2}$. 故选 C.

3. B 【解析】因为关于 x 的不等式 $x^2+px+q<0$ 的解集是 $\{x|-1<x<2\}$，所以 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 $-1,2$，由根与系数的关系可得 $p=-1,q=-2$，所以 $\frac{x^2+px-12}{x+q}>0$ 可转化为 $\frac{(x-4)(x+3)}{x-2}>0$，解得 $-3<x<2$ 或 $x>4$. 所以原不等式的解集为 $(-3,2)\cup(4,+\infty)$. 故选 B.

4. AB 【解析】由题意可得 $a<0$，$a(x-1)(x+3)-2=a(x-x_1)(x-x_2)$，

即 $ax^2+2ax-3a-2=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$，

则 $\begin{cases}2a=-a(x_1+x_2),\\ -3a-2=ax_1x_2,\end{cases}$ 即 $x_1+x_2+2=0$，$x_1x_2+3=-\frac{2}{a}>0$，

故 A 正确，D 错误；

令 $a(x-1)(x+3)=0$，其根为 $x_3=-3$，$x_4=1$，

结合二次函数的图象可得 $-3<x_1<x_2<1$，

$0<x_2-x_1<1-(-3)=4$，即 $|x_1-x_2|<4$，故 B 正确，C 错误.

故选 AB.

5. -2 或 -1　-10 或 0 【解析】若 $a=0$，则原不等式为 $8x+16\ge 0$，即 $x\ge -2$，显然原不等式的整数解有无数个，不符合题意，故 $a\ne 0$. 设 $y=ax^2+8(a+1)x+7a+16(a\ne 0)$，其图象为抛物线，对于任意一个给定的 a 值，其抛物线只有在开口向下的情况下才能满足 $y\ge 0$ 的整数解是有限个，所以 $a<0$.

因为 0 为其中一个解，所以 $7a+16\ge 0$，即 $a\ge -\frac{16}{7}$，所以 $-\frac{16}{7}\le a<0$，又 $a\in\mathbf{Z}$，所以 $a=-2$ 或 $a=-1$. 若 $a=-2$，则不等式为 $-2x^2-8x+2\ge 0$，解得 $-2-\sqrt{5}\le x\le\sqrt{5}-2$. 因为 x 为整数，所以 $x=-4,-3,-2,-1,0$；若 $a=-1$，则不等式为 $-x^2+9\ge 0$，解得 $-3\le x\le 3$，因为 x 为整数，所以 $x=-3,-2,-1,0,1,2,3$. 所以不等式的全部整数解的和为 -10 或 0.

6. C 【解析】因为"$\forall x\in[1,4]$，$x^2-6x-a\le 0$"为假命题，

所以"$\exists x\in[1,4]$，$x^2-6x-a>0$"为真命题，

则 $a<x^2-6x$ 在区间 $[1,4]$ 上有解.

设 $f(x)=x^2-6x=(x-3)^2-9$，则 $f(x)$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=3$，

又 $x\in[1,4]$，则当 $x=1$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值为 $f(1)=(1-3)^2-9=-5$，

所以 $a<-5$，即 a 的取值范围是 $(-\infty,-5)$.

故选 C.

7. B 【解析】由题意得，一元二次方程 $ax^2-10x+6a=0$ 的两根分别为 2，3，

由根与系数的关系，可得 $\begin{cases}2+3=\frac{10}{a},\\ 2\times 3=6,\end{cases}$ 解得 $a=2$，

则不等式 $(m^2-2m-3)x^2+(m+1)x+a>0$，

即 $(m^2-2m-3)x^2+(m+1)x+2>0$ 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，

等价于 $\begin{cases}m^2-2m-3=0,\\ m+1=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m^2-2m-3>0,\\ (m+1)^2-4\times 2(m^2-2m-3)<0,\end{cases}$

解得 $m\le -1$ 或 $m>\frac{25}{7}$，

则实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup\left(\frac{25}{7},+\infty\right)$.

故选 B.

归纳总结　解含参的一元二次不等式的注意事项

(1) 若二次项系数含有参数，则应对二次项系数与 0 的大小关系进行讨论；

(2) 若求对应的一元二次方程的根需用求根公式，则应对判别式 Δ 进行讨论；

(3) 若求出的根含有参数，则应对两根的大小进行讨论.

8. ABC 【解析】因为函数 $y=f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，即 $f(x)$ 为偶函数. 又当 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1\ne x_2$ 时，$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_2-x_1}<0$ 恒成立，即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}>0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减. 若 $f(2ax)<f(2x^2+1)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，即 $|2ax|<2x^2+1$ 恒成立，即 $-2x^2-1<2ax<2x^2+1$ 恒成立，即 $\begin{cases}2x^2-2ax+1>0,\\ 2x^2+2ax+1>0\end{cases}$ 恒成立，即 $4a^2-8<0$，解得 $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$，即实数 a 的取值范围为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，故选 ABC.

9. B 【解析】若不等式 $|f(x)|\le 2$ 在 $[1,5]$ 上恒成立，则必须满足 $\begin{cases}-2\le f(1)\le 2,\\ -2\le f(3)\le 2,\\ -2\le f(5)\le 2,\end{cases}$ 即

$\begin{cases}-2\leqslant 1+a+b\leqslant 2,\\ -2\leqslant 9+3a+b\leqslant 2,\\ -2\leqslant 25+5a+b\leqslant 2.\end{cases}$ 由 $\begin{cases}-2\leqslant -1-a-b\leqslant 2,\\ -2\leqslant 9+3a+b\leqslant 2,\end{cases}$ 两式相加得 $-4\leqslant 8+2a\leqslant 4$，解得 $-6\leqslant a\leqslant -2$. 再由 $\begin{cases}-2\leqslant -9-3a-b\leqslant 2,\\ -2\leqslant 25+5a+b\leqslant 2,\end{cases}$ 两式相加得 $-4\leqslant 16+2a\leqslant 4$，解得 $-10\leqslant a\leqslant -6$. 故 $a=-6$，代入不等式组得 $\begin{cases}-2\leqslant -5+b\leqslant 2,\\ -2\leqslant -9+b\leqslant 2,\\ -2\leqslant -5+b\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $b=7$. 经检验，当 $a=-6,b=7$ 时，$f(x)=x^2-6x+7=(x-3)^2-2$，有 $f(x)_{\max}=f(1)=f(5)=2$，$f(x)_{\min}=f(3)=-2$，满足 $|f(x)|\leqslant 2$ 在 $[1,5]$ 上恒成立. 综上，满足要求的有序数对 (a,b) 为 $(-6,7)$，共 1 个，故选 B.

10. $\left\{k\,\middle|\,k\leqslant\frac{7}{12}\right\}$ 【解析】由 $x^2+xy+y^2\geqslant 2y+ky-1$ 得 $x^2+xy+y^2-2y-ky+1\geqslant 0$.

因为对任意实数 x，不等式成立，所以 $\Delta=y^2-4(y^2-2y-ky+1)\leqslant 0$，

即 $-3y^2+8y+4ky-4\leqslant 0$，即存在 $y\in\left[\frac{3}{2},3\right]$，使 $4k\leqslant 3y-8+\frac{4}{y}$ 成立.

因为 $f(y)=3y-8+\frac{4}{y}=3\left(y+\frac{\frac{4}{3}}{y}\right)-8$ 在 $\left[\frac{3}{2},3\right]$ 上单调递增，

所以 $f(y)_{\max}=3\times3-8+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$，所以 $4k\leqslant\frac{7}{3}$，解得 $k\leqslant\frac{7}{12}$，

即实数 k 的取值范围是 $\left\{k\,\middle|\,k\leqslant\frac{7}{12}\right\}$.

专题 3 函数及其性质

考向 6 函数的概念

刷考点

1. C 【解析】要使 $f(x)=\sqrt{2x+8}+\frac{1}{x^2-16}$ 有意义，须使 $\begin{cases}2x+8\geqslant 0,\\ x^2-16\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x>-4$ 且 $x\neq 4$，则 $f(x)$ 的定义域是 $(-4,4)\cup(4,+\infty)$. 故选 C.

2. D 【解析】函数 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $g(x)=f(x-1)+\frac{1}{x-2}=\sqrt{x-1}+\frac{1}{x-2}$，

要使 $g(x)$ 有意义，须使 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-2\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq 2$，所以函数 $g(x)$ 的定义域为 $[1,2)\cup(2,+\infty)$. 故选 D.

3. B 【解析】对于 A，$f(x)$，$g(x)$ 一个为指数函数、一个为对数函数，对应法则不同，因此不是相同函数，A 不符合题意；对于 B，$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|=f(x)$，是相同函数，B 符合题意；对于 C，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，因此不是相同函数，C 不符合题意；对于 D，$g(x)=\lg(2x)=\lg 2+\lg x$ 与函数 $f(x)=2\lg x$ 对应法则不同，因此不是相同函数，D不符合题意. 故选 B.

4. AB 【解析】由“$[a,b]$ 交汇函数”的定义可知“$[0,1]$ 交汇函数”表示函数的定义域与其值域的交集为 $[0,1]$.

对于选项 A，$y=\sqrt{1-x}$ 的定义域 $A=(-\infty,1]$，值域 $B=[0,+\infty)$，则 $A\cap B=[0,1]$，A 正确；

对于选项 B，$y=2\sqrt{x}-x$ 的定义域 $A=[0,+\infty)$，令 $t=\sqrt{x}\geqslant 0$，则 $y=2t-t^2=-(t-1)^2+1\leqslant 1$，值域 $B=(-\infty,1]$，则 $A\cap B=[0,1]$，B 正确；

对于选项 C，$y=\frac{1}{x^2-2x+2}=\frac{1}{(x-1)^2+1}$，

$\because (x-1)^2\geqslant 0$，$\therefore (x-1)^2+1\geqslant 1$，$\therefore 0<\frac{1}{(x-1)^2+1}\leqslant 1$，定义域 $A=\mathbf{R}$，值域 $B=(0,1]$，则 $A\cap B=(0,1]$，C 错误；

对于选项 D，$y=\sqrt{1-x^2}-|x|$ 的定义域 $A=[-1,1]$，由题可得 $y^2=1-x^2+x^2-2|x|\sqrt{1-x^2}=1-2\sqrt{x^2(1-x^2)}$，$\because -1\leqslant x\leqslant 1$，$\therefore 0\leqslant x^2(1-x^2)\leqslant\frac{1}{4}$，即 $0\leqslant y^2\leqslant 1$，

点悟：$0\leqslant x^2\leqslant 1$，利用 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，得 $x^2(1-x^2)\leqslant\left(\frac{x^2+1-x^2}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，当且仅当 $x^2=\frac{1}{2}$ 时等号成立

$\therefore -1\leqslant y\leqslant 1$，即值域 $B=[-1,1]$，则 $A\cap B=[-1,1]$，D 错误. 故选 AB.

归纳总结 求函数的定义域，主要包括：偶次根式中被开方数不小于 0、分母不为 0、自变量的实际意义等；求函数的值域实际上就是求函数的最值问题（如无最值则为无穷大或无穷小），但要注意值域是否连续.

5. -3 $(-\infty,3)$ 【解析】因为函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x+a}}{x-b}$ 的定义域为 $\begin{cases}x+a\geqslant 0,\\ x-b\neq 0,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x\geqslant -a,\\ x\neq b,\end{cases}$

而函数 $f(x)=\frac{\sqrt{x+a}}{x-b}$ 的定义域为 $[3,+\infty)$，所以 $-a=3$，$b<3$，即 $a=-3$，$b<3$.

6. $[2,14]$ 【解析】由 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 81\\ 1\leqslant x^2\leqslant 81\end{cases}$ 得 $1\leqslant x\leqslant 9$，即 $g(x)$ 的定义域为 $[1,9]$，

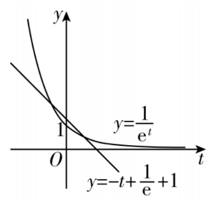
方法：一般地，若已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$，求函数 $f(g(x))$ 的定义域时，由于在 $f(x)$ 中的 x 和 $f(g(x))$ 中的 $g(x)$ 受同一个对应法则的作用，所以范围相同，因此 $f(g(x))$ 的定义域即为满足条件 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的 x 的取值范围

$g(x)=[f(x)]^2+f(x^2)=(1+\log_3 x)^2+1+\log_3 x^2=(\log_3 x)^2+4\log_3 x+2$，令 $\log_3 x=t$，则 $t\in[0,2]$，令 $h(t)=t^2+4t+2=(t+2)^2-2$，则 $h(t)_{\min}=h(0)=2$，$h(t)_{\max}=h(2)=14$，所以 $h(t)\in[2,14]$，即函数 $y=g(x)$ 的值域为 $[2,14]$.

7. A 【解析】在 $f(x)+2f(-x)=4x$ ①中令 $x=-x$，得 $f(-x)+2f(x)=-4x$ ②，联立①②得 $f(x)=-4x$，所以 $f(2)=-4\times2=-8$，故选 A.

一题多解 因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f(-x)=4x$，所以分别令 $x=2,x=-2$，可得 $\begin{cases}f(2)+2f(-2)=8,\\ f(-2)+2f(2)=-8,\end{cases}$ 解不等式组可得 $f(2)=-8$，故选 A.

8. B 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的单调函数，且 $f\left(f(x)-\frac{1}{e^x}\right)=\frac{1}{e}+1$，所以在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一一个实数 t 使得 $f(t)=\frac{1}{e}+1$，且 $f(x)-\frac{1}{e^x}=t$.



易错点：已知复合函数的解析式 $y=f(g(x))$，可用换元法，令 $t=g(x)$，$y=f(t)$，但要注意新元的取值范围，即 $g(x)$ 的值域

令 $x=t$，得 $\frac{1}{e}+1-\frac{1}{e^t}=t$，即 $-t+\frac{1}{e}+1=\frac{1}{e^t}$. 画出 $y=-t+\frac{1}{e}+1$ 与 $y=\frac{1}{e^t}$ 的大致图象如图所示.

由图象可知，函数 $y=-t+\frac{1}{e}+1$ 与 $y=\frac{1}{e^t}$ 的图象在 $(0,+\infty)$ 上只有 1 个交点，且 $t=1$ 是方程 $-t+\frac{1}{e}+1=\frac{1}{e^t}$ 的解，

关键点：根据函数的单调性以及等式恒成立，求出 t 的值

所以 $f(x)=\frac{1}{e^x}+1$，故 $f(\ln 3)=\frac{1}{e^{\ln 3}}+1=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$，故选 B.

9. $f(x)=x$（答案不唯一） 【解析】若设 $f(x)=ax$，

方法：可以用待定系数法，首先把函数设出来，再结合条件列出方程组确定系数的值

则由 $f(x+2)=f(x)+2$，得 $a(x+2)=ax+2$，