$2\ 023a_{2\,023}x^{2\,022}+2\ 024a_{2\,024}x^{2\,023}$,

巧思：运用导数使 $a_n(n=1,2,\cdots,2\ 024)$前出现对应的系数 n

令 $x=1$,得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+2\ 023a_{2\,023}+2\ 024a_{2\,024}=6\ 072$,故 D 正确.

故选 ACD.

17. B 【解析】由题知 $T_6=C_n^5(2x)^5$, $T_7=C_n^6(2x)^6$,所以 $C_n^5\cdot 2^5=C_n^6\cdot 2^6$,所以 $C_n^5=2C_n^6$,即 $\dfrac{n!}{(n-5)!\ 5!}=\dfrac{2\cdot n!}{6!\ (n-6)!}$,所以 $6=2(n-5)$,解得 $n=8$,所以二项式系数最大的项为 $T_5=C_8^4(2x)^4=1\ 120x^4$. 故选 B.

18. D 【解析】因为二项展开式中只有第 5 项是二项式系数最大的项,即二项式系数 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$ 中第 5 个即 C_n^4 最大,所以由二项式系数的性质可知,展开式中共 9 项,$n=8$.

又 $\left(3\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^8=(3x^{\frac{1}{2}}-x^{-1})^8$,

所以 $(3x^{\frac{1}{2}}-x^{-1})^8$ 的二项展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r(3x^{\frac{1}{2}})^{8-r}(-x^{-1})^r=C_8^r(-1)^r3^{8-r}x^{\frac{8-3r}{2}}$, $r=0,1,2,\cdots,8$.

令 $\dfrac{8-3r}{2}=-5$,得 $r=6$,所以 $\dfrac{1}{x^5}$ 的系数为 $C_8^6\cdot(-1)^6 3^2=9C_8^2=252$.

故选 D.

19. AD 【解析】$\left(x-\dfrac{1}{y}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\cdot\left(-\dfrac{1}{y}\right)^r=(-1)^rC_6^rx^{6-r}y^{-r}$,

对于 A,取 $6-r=4$,则 $r=2$,故 x^4y^{-2} 的系数为 $(-1)^2C_6^2=15$,故 A 正确;

对于 B,因为 $\left(x-\dfrac{1}{y}\right)^6=\sum\limits_{r=0}^{6}(-1)^rC_6^rx^{6-r}y^{-r}$,所以令 $x=y=1$,得各项系数之和为 $\left(1-\dfrac{1}{1}\right)^6=0$,故 B 错误;

对于 C,$\left(x-\dfrac{1}{y}\right)^6$ 的二项式系数最大的项是第 4 项,故 C 错误;

对于 D,由展开式的通项可得,展开式中各项的系数依次为 $1,-6,15,-20,15,-6,1$,故系数最大项是第 3 项和第 5 项,故 D 正确. 故选 AD.

20. AD 【解析】对于 A,因为 $\left(x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中共有 8 项,所以 $n=7$,

故所有项的二项式系数和为 $2^7=128$,故 A 正确;

对于 B,令 $x=1$,可得所有项的系数和为 $\left(1+\dfrac{1}{2}\right)^7\neq\left(\dfrac{3}{2}\right)^8$,故 B 错误;

对于 C,因为二项展开式的通项为 $T_{r+1}=C_7^r\cdot x^{7-r}\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=\left(\dfrac{1}{2}\right)^r\cdot C_7^r\cdot x^{7-\frac{3r}{2}}$,

$r=0,1,2,\cdots,7$,

所以当 $r\in\mathbf{N}^*$,$1\leqslant r\leqslant 6$ 时,设 T_{r+1} 项系数最大,

由 $\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^r\cdot C_7^r\geqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{r-1}\cdot C_7^{r-1},\\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^r\cdot C_7^r\geqslant\left(\dfrac{1}{2}\right)^{r+1}\cdot C_7^{r+1},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r\leqslant\dfrac{8}{3},\\ r\geqslant\dfrac{5}{3},\end{cases}$ 则 $r=2$,

故第 3 项的系数最大,故 C 错误.

对于 D,由 $7-\dfrac{3r}{2}$ 为整数,且 $r=0,1,2,\cdots,7$ 可知,r 的值可以为 $0,2,4,6$,所以二项展开式中,有理项共有 4 项,故 D 正确.

故选 AD.

21. A 【解析】$a=C_{20}^0+C_{20}^1\cdot 2+C_{20}^2\cdot 2^2+\cdots+C_{20}^{20}\cdot 2^{20}=(1+2)^{20}=3^{20}=9^{10}=(10-1)^{10}$

$=C_{10}^0\cdot 10^{10}+C_{10}^1\cdot 10^9\cdot(-1)+C_{10}^2\cdot 10^8\cdot(-1)^2+\cdots+C_{10}^{10}\cdot(-1)^{10}$

$=10[C_{10}^0\cdot 10^9+C_{10}^1\cdot 10^8\cdot(-1)+C_{10}^2\cdot 10^7\cdot(-1)^2+\cdots+C_{10}^9\cdot(-1)^9]+1$,

即 a 被 10 除得的余数为 1,结合选项可知只有 4 021 被 10 除得的余数为 1. 故选 A.

22. D 【解析】令 $x=0$,得 $a_0=1$,令 $x=1$,得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2\,024}=2^{2\,024}$,

两式相减得 $a_1+a_2+\cdots+a_{2\,024}=2^{2\,024}-1=4^{1\,012}-1$,

因为 $4^{1\,012}=(3+1)^{1\,012}=C_{1\,012}^0 3^{1\,012}+C_{1\,012}^1 3^{1\,011}+\cdots+C_{1\,012}^{1\,011}3+C_{1\,012}^{1\,012}$,

其中 $C_{1\,012}^0 3^{1\,012}+C_{1\,012}^1 3^{1\,011}+\cdots+C_{1\,012}^{1\,011}3$ 能被 3 整除,

所以 $4^{1\,012}$ 被 3 除的余数为 1,

综上,$a_1+a_2+\cdots+a_{2\,024}$ 能被 3 整除.

故选 D.

专题 14　概率与统计

考向 50　随机事件的概率及古典概型

刷考点

1. C 【解析】因为 $[-12,-4)$,$[-4,4)$,$[4,12)$ 内的频数和为 $25+35+20=80$,因此误差在 $[-12,12)$ 内的占 80%,结合题意知 $m=12$.

2. D 【解析】对于 A,试验中,出现的某种事件的频率总在一个固定的值的附近波动,并不是一个确定的值,一批产品次品率为 0.05,则从中任取 200 件,次品的件数在 10 件左右,而不一定是 10 件,故 A 错误;

对于 B,100 次并不是无穷多次,只能说明这 100 次试验中出现正面朝上的频率为 $\dfrac{51}{100}$,故 B 错误;

对于 C,根据定义,随机事件的频率只是概率的近似值,它并不等于概率,故 C 错误;

对于 D,频率为出现的次数与重复试验的次数的比值,抛掷骰子 100 次,得点数是 6 的结果有 20 次,则出现 6 点的频率是 $\dfrac{20}{100}=0.2$,故 D 正确.

故选 D.

3. B 【解析】设 3 个红球为 A,B,C,2 个黑球为 a,b.

因为试验为"从中依次不放回地随机抽取出 2 个球",

所以试验的样本空间 $\Omega=\{AB,BA,AC,CA,Aa,aA,Ab,bA,BC,CB,Ba,aB,Bb,bB,Ca,aC,Cb,bC,ab,ba\}$,

记事件 D 为"两次取到的球颜色相同",则 $D=\{AB,BA,AC,CA,BC,CB,ab,ba\}$,由古典概型概率公式,可得 $P(D)=\dfrac{n(D)}{n(\Omega)}=\dfrac{8}{20}=\dfrac{2}{5}$. 故选 B.

4. D 【解析】10 个绳头,每个绳头只打一次结,且每个结仅含两个绳头,所有的打结方式有 $\dfrac{C_{10}^2C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{A_5^5}=945$(种).

其中恰好能围成一个圈的打结方式有 $C_8^1C_6^1C_4^1C_2^1=384$(种).

所以 5 根绳子恰好能围成一个圈的概率为 $P=\dfrac{384}{945}=\dfrac{128}{315}$.

故选 D.

5. $\dfrac{64}{81}$ 【解析】用算筹随机摆出一个不含数字 0 的两位数,个位用纵式,十位用横式,共可以摆出 $9\times 9=81$(个)两位数,

其中个位和十位上的算筹都为 1,有 $1\times 1=1$(个);

个位和十位上的算筹都为 2,有 $2\times 2=4$(个);

个位和十位上的算筹都为 3,有 $2\times 2=4$(个);

个位和十位上的算筹都为 4,有 $2\times 2=4$(个);

个位和十位上的算筹都为 5,有 $2\times 2=4$(个).

故个位和十位上的算筹同样多的共有 $4+4+4+4+1=17$(个).

所以个位和十位上算筹不一样多的概率为 $1-\dfrac{17}{81}=\dfrac{64}{81}$.

关键点拨 先求出一共摆出的两位数的个数,然后根据正难则反思想求出个位和十位上的算筹一样多的两位数,最后即可求得个位和十位上算筹不一样多的概率.

6. D 【解析】顾客未砸出奖券的概率为$\frac{C_6^2}{C_9^2}=\frac{5}{12}$,故所求概率为$1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$. 故选 D.

7. D 【解析】对于 A,举例:掷一枚骰子,掷得点数为奇数为事件 A,则 $P(A)=\frac{1}{2}$,掷得点数大于 3 为事件 B,则 $P(B)=\frac{1}{2}$,所以 $P(A)+P(B)=1$,

但事件 A 与事件 B 不是对立事件,故 A 错误;

对于 B,举例:抛一枚硬币,正面向上为事件 A,反面向上为事件 B,事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的概率为 1,A 与 B 中恰有一个发生的概率也为 1,故 B 错误;

对于 C,从长度为 1,3,5,7,9 的 5 条线段中任取 3 条,共有(1,3,5),(1,3,7),(1,3,9),(1,5,7),(1,5,9),(1,7,9),(3,5,7),(3,5,9),(3,7,9),(5,7,9),共 10 种情况,其中能构成三角形的有(3,5,7),(3,7,9),(5,7,9),共 3 种情况,所以从长度为 1,3,5,7,9 的 5 条线段中任取 3 条,则这三条线段能构成一个三角形的概率为$\frac{3}{10}$,故 C 错误;

对于 D,因为事件 A 与事件 B 互斥,

所以 $P(AB)=0$,

因为 $P(A)>0$,所以 $P(AB)<P(A)$,故 D 正确.

故选 D.

考向 51　条件概率、全概率公式及相互独立事件的概率

刷考点

1. B 【解析】因为某新生三个社团考核都通过的概率为$\frac{1}{30}$,所以$\frac{1}{3}mn=\frac{1}{30}$,即 $mn=\frac{1}{10}$. 又因为三个社团考核都没有通过的概率为$\frac{4}{15}$,所以$\left(1-\frac{1}{3}\right)(1-m)(1-n)=\frac{4}{15}$,

整理可得 $1-(m+n)+mn=\frac{2}{5}$,所以 $m+n=1+mn-\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$. 故选 B.

2. C 【解析】由题可知,$P(A)=\frac{A_2^2A_5^5}{A_6^6}=\frac{1}{3}$,

$P(B)=\frac{A_3^3A_4^3}{A_6^6}=\frac{1}{5}$,$P(C)=\frac{2A_3^3A_3^3}{A_6^6}=\frac{1}{10}$,

$P(D)=\frac{\frac{A_6^6}{A_3^3}}{A_6^6}=\frac{1}{A_3^3}=\frac{1}{6}$.

对于 A,$P(AB)=\frac{A_2^2A_3^3A_2^2}{A_6^6}=\frac{1}{10}\neq P(A)P(B)$,故 A 错误;

对于 B,$P(AC)=\frac{A_2^2C_5^1A_2^2A_2^2}{A_6^6}=\frac{1}{18}\neq P(A)P(C)$,故 B 错误;

对于 C,$P(AD)=\frac{A_2^2C_4^1C_5^1}{A_6^6}=\frac{1}{18}=P(A)P(D)$,故 C 正确;

对于 D,$P(BC)=P(C)\neq P(B)P(C)$,故 D 错误.

3. AD 【解析】对于 A 选项,已知 $P(A)=\frac{1}{2}$,$P(B)=\frac{1}{3}$,$P(AB)=\frac{1}{6}$,而$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,即 $P(AB)=P(A)P(B)$,所以 A,B 是相互独立事件,A 选项正确.

对于 B 选项,若 A,B 互斥,则 $AB=\varnothing$,$P(AB)=0$.

若 A,B 相互独立,则 $P(AB)=P(A)\cdot P(B)>0$(因为 $P(A)>0,P(B)>0$),所以事件 A,B 相互独立与 A,B 互斥不可能同时成立,B 选项错误.

对于 C 选项,设样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4\}$,每个样本点的概率为$\frac{1}{4}$,定义 $A=\{1,2\}$,$P(A)=\frac{1}{2}$;$B=\{1,3\}$,$P(B)=\frac{1}{2}$;$C=\{1,4\}$,$P(C)=\frac{1}{2}$. $AB=\{1\}$,$P(AB)=\frac{1}{4}=P(A)P(B)$;$AC=\{1\}$,$P(AC)=\frac{1}{4}=P(A)P(C)$;$BC=\{1\}$,$P(BC)=\frac{1}{4}=P(B)P(C)$,所以 A,B,C 两两相互独立. 而 $ABC=\{1\}$,$P(ABC)=\frac{1}{4}$,$P(A)P(B)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,此时 $P(ABC)\neq P(A)P(B)P(C)$,C 选项错误.

对于 D 选项,因为 A,B 相互独立,所以 A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B 也相互独立,

所以 $P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.4\times(1-0.2)=0.32$,

$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B)=(1-0.4)\times0.2=0.12$.

又 $A\overline{B}$ 与 $\overline{A}B$ 互斥,所以 $P(A\overline{B}\cup\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=0.32+0.12=0.44$,D 选项正确.

故选 AD.

4. $\frac{13}{30}$ 【解析】设这位同学在物理、化学、政治科目考试中达 A^+ 的事件分别为 A,B,C.

因为这位同学在物理、化学、政治科目考试中达 A^+ 的概率分别为$\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5}$,所以 $P(A)=\frac{2}{3}$,$P(B)=\frac{3}{4}$,$P(C)=\frac{4}{5}$.

这三门科目考试成绩的结果互不影响,则这位同学恰好得 2 个 A^+ 的概率 $P=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{13}{30}$.

5. D 【解析】由题可知,"三好学生"人数是$\frac{1}{5}\times50=10$,男生人数为 $50-30=20$,

$\because$"三好学生"中女生占一半,$\therefore$ 女"三好学生"与男"三好学生"各是 5 人.

$\therefore$ 现从该班学生中任选 1 人参加座谈会,则在已知没有选上女生的条件下,选上的学生是"三好学生"的概率为$\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$,故选 D.

6. A 【解析】"运动员甲不是第一个出场,运动员乙不是最后一个出场"可分为甲最后一个出场或甲在中间出场,方法数为 $A_4^4+C_3^1C_3^1A_3^3=78$.

在"运动员甲不是第一个出场,运动员乙不是最后一个出场"的前提下,"运动员丙第一个出场",即"运动员丙第一个出场,运动员乙不是最后一个出场",方法数为 $C_3^1A_3^3=18$.

因此所求概率为 $P=\frac{18}{78}=\frac{3}{13}$. 故选 A.

7. $\frac{1}{28}$ 【解析】设事件 A 为第一轮甲、乙都未中奖,事件 B 为第二轮甲、乙都中奖,则 $P(A)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{28}{45}$,$P(AB)=\frac{8}{10}\times\frac{7}{9}\times\frac{2}{8}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{45}$,所以 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{1}{45}\times\frac{45}{28}=\frac{1}{28}$.

8. 【解】(1)由题意可知,第一轮队伍 A 和队伍 D 对阵,则获胜队伍需要赢得比赛 3 的胜利,失败队伍需要赢得比赛 4 和比赛 5 的胜利,他们才能在决赛中对阵,所以所求的概率为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

(2)设 W_i 表示队伍 B 在比赛 i 中胜利,L_i 表示队伍 B 在比赛 i 中失败.

设事件 E:队伍 B 获得亚军,事件 F:队伍 B 所参加的所有比赛中败了两场,则事件 $F=\{L_2L_4,L_2W_4L_5,W_2L_3L_5,W_2L_3W_5L_6,L_2W_4W_5L_6\}$,且这五种情况彼此互斥,进而 $P(F)=P(L_2L_4)+P(L_2W_4L_5)+P(W_2L_3L_5)+P(W_2L_3W_5L_6)+P(L_2W_4W_5L_6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$.

事件 $E\cap F=\{W_2L_3W_5L_6,L_2W_4W_5L_6\}$,

进而 $P(E\cap F)=P(W_2L_3W_5L_6)+P(L_2W_4W_5L_6)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

所以所求事件的概率为 $P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{1}{5}$.

9. AC 【解析】由 $P(B)=\frac{1}{3}$，$P(\bar{B}|A)=\frac{5}{6}$，$P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{1}{2}$，得 $P(B|A)=\frac{1}{6}$，$P(B|\bar{A})=\frac{1}{2}$.

对于B，由 $P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})\cdot P(B|\bar{A})$，得 $\frac{1}{3}=\frac{1}{6}P(A)+\frac{1}{2}P(\bar{A})=\frac{1}{6}P(A)+\frac{1}{2}(1-P(A))$，解得 $P(A)=\frac{1}{2}$，B 错误；

对于D，$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$，D 错误；

对于A，$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{3}{4}$，A 正确；

对于C，$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{4}$，则 $P(\bar{A}|B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$，C 正确.

故选 AC.

10. AD 【解析】记第一次取得 $i(i=1,2,3)$ 号球为事件 A_i，则 $P(A_1)=\frac{1}{2}$，$P(A_2)=\frac{1}{4}$，$P(A_3)=\frac{1}{4}$.

对于A，在第一次抽到2号球的条件下，第二次抽到1号球的概率 $P_1=\frac{2}{3+1}=\frac{1}{2}$，故 A 正确；

对于B，第一次抽到2号球且第二次抽到1号球的概率 $P_2=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$，故 B 错误；

对于C，记第二次在第 i 号盒子内抽到3号球的事件分别为 $B_i(i=1,2,3)$，且 A_1,A_2,A_3 两两互斥，和为样本空间 Ω，

则 $P(B_1|A_1)=\frac{1}{4}$，$P(B_2|A_2)=\frac{1}{4}$，$P(B_3|A_3)=\frac{1}{6}$，

记第二次抽到3号球的事件为 B，则 $P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_iB_i)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_i|A_i)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{11}{48}$，故 C 错误；

对于D，第二次的球取自盒子的编号与第一次取的球的号码相同，由C项分析可知，$P(A_1|B_1)=\frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}}{\frac{11}{48}}=\frac{6}{11}$，

敲黑板：贝叶斯公式的应用

$P(A_2|B_2)=\frac{P(A_2)P(B_2|A_2)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}{\frac{11}{48}}=\frac{3}{11}$，

$P(A_3|B_3)=\frac{P(A_3)P(B_3|A_3)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}}{\frac{11}{48}}=\frac{2}{11}$，显然 $P(A_1|B_1)$ 最大，即若第二次抽到的是3号球，则它来自1号盒子的概率最大，故 D 正确. 故选 AD.

11. 0.06 【解析】设 B="任取一个零件为次品"，A_i="零件为第 $i(i=1,2,3)$ 台车床加工的"，

则 $\Omega=A_1\cup A_2\cup A_3$，且 A_1,A_2,A_3 两两互斥，

根据题意得 $P(A_1)=0.2$，$P(A_2)=0.4$，$P(A_3)=0.4$，

$P(B|A_1)=0.1$，$P(B|A_2)=P(B|A_3)=0.05$，

由全概率公式得 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=0.2\times0.1+0.4\times0.05+0.4\times0.05=0.06$.

故任取一个零件，它是次品的概率为 0.06.

考向 52　离散型随机变量及其分布列、期望与方差

刷考点

1. C 【解析】$P(|X|=1)=a+c=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$.

2. AC 【解析】由 $m+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}+n+\frac{3}{10}=1$，可得 $m+n=\frac{2}{5}$①，

又 $E(X)=m+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{5}+4n+5\times\frac{3}{10}=3$，

则 $m+4n=\frac{7}{10}$②，所以由①②可得 $n=\frac{1}{10}$，$m=\frac{3}{10}$，故 A 正确.

$P(1\leqslant X\leqslant 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$，B 错误.

$E(Y)=E(3X+1)=3E(X)+1=10$，故 C 正确.

$D(X)=(1-3)^2\times\frac{3}{10}+(2-3)^2\times\frac{1}{10}+(3-3)^2\times\frac{1}{5}+(4-3)^2\times\frac{1}{10}+(5-3)^2\times\frac{3}{10}=4\times\frac{3}{10}+1\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{10}+4\times\frac{3}{10}=\frac{13}{5}$，

故 $D(Y)=D(3X+1)=9D(X)=9\times\frac{13}{5}=\frac{117}{5}$，故 D 错误.

故选 AC.

3. D 【解析】摸到一红球一白球的概率 $P_1=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$，

摸到2白球的概率 $P_2=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$，摸到2红球的概率 $P_3=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10}$，

设可获得百元代金券数额为变量 X，则 X 可取 a,b,ab，X 的分布列如下：

X	a	b	ab
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

$E(X)=a\times\frac{3}{5}+b\times\frac{3}{10}+ab\times\frac{1}{10}=5.4$，$a,b\in\mathbf{Z}$，

手气最好者获得 ab 百元代金券，即 $6a+3b+ab=54$，$b=\frac{54-6a}{a+3}$，

则 $ab=\frac{54a-6a^2}{a+3}=-6\left(a+3+\frac{36}{a+3}\right)+90\leqslant-12\sqrt{(a+3)\times\frac{36}{a+3}}+90=18$，当且仅当 $a+3=\frac{36}{a+3}$，即 $a=3$，$b=6$ 时等号成立，所以 ab 的最大值为18. 估计手气最好者至多获得18个百元代金券. 故选 D.

4. C 【解析】$E(\xi_1)=0.2\times x_1+0.2\times x_2+\cdots+0.2\times x_5=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i$，

$E(\xi_2)=0.2\times\frac{x_1+2x_2}{3}+0.2\times\frac{x_2+2x_3}{3}+0.2\times\frac{x_3+2x_4}{3}+0.2\times\frac{x_4+2x_5}{3}+0.2\times\frac{x_5+2x_1}{3}=\frac{1}{5}\times\frac{3(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)}{3}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i$，故 $E(\xi_1)=E(\xi_2)$，故 A，B 错误；

设 $E(\xi_1)=E(\xi_2)=m$，则 $D(\xi_1)=0.2\times\sum_{i=1}^{5}(x_i-m)^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i^2-2mx_i+m^2)=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i^2-\frac{2}{5}m\sum_{i=1}^{5}x_i+m^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i^2-\frac{2}{5}m\times5m+m^2=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i^2-m^2=\frac{1}{5}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-5m^2)$，

同理 $D(\xi_2)=\frac{1}{5}\left[\left(\frac{x_1+2x_2}{3}\right)^2+\left(\frac{x_2+2x_3}{3}\right)^2+\left(\frac{x_3+2x_4}{3}\right)^2+\left(\frac{x_4+2x_5}{3}\right)^2+\left(\frac{x_5+2x_1}{3}\right)^2-5m^2\right]=$

$\frac{1}{5}\left[\frac{1}{9}\times(5x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+5x_5^2+4x_1x_2+4x_2x_3+4x_3x_4+4x_4x_5+4x_5x_1)-5m^2\right]$，

由 $x_1<x_2$，得 $(x_1-x_2)^2=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2>0$，故 $4x_1x_2<2(x_1^2+x_2^2)$，

同理，则有 $D(\xi_2)<\frac{1}{5}\left[\frac{1}{9}\times(5x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+5x_5^2+4x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+4x_4^2+4x_5^2)-5m^2\right]=\frac{1}{5}(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2-5m^2)=D(\xi_1)$，

即 $D(\xi_1)>D(\xi_2)$，故 C 正确，D 错误. 故选 C.

5. 4　【解析】设黑球有 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个，

当 $n=1$ 时，X 可取 1，2，则 $P(X=1)=\frac{C_3^1C_1^1}{C_4^2}=\frac{1}{2}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{2}$，则 $E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\neq\frac{6}{7}$，故 $n=1$ 与题意矛盾，所以 $n\geqslant 2$.

当 $n\geqslant 2$ 时，X 可取 0，1，2，则 $P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_{n+3}^2}=\frac{6}{(n+3)(n+2)}$，

$P(X=1)=\frac{C_3^1C_n^1}{C_{n+3}^2}=\frac{6n}{(n+3)(n+2)}$，

$P(X=0)=\frac{C_n^2}{C_{n+3}^2}=\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$，则 $E(X)=2\times\frac{6}{(n+3)(n+2)}+1\times\frac{6n}{(n+3)(n+2)}+0\times\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}=\frac{6}{7}$，

解得 $n=4$，故口袋中共有黑球 4 个.

6.【解】(1) 由题知随机变量 X 的可能取值为 0，10，20，30，

则 $P(X=0)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$，$P(X=10)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$，

$P(X=20)=\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$，$P(X=30)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$，

所以 X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{24}$

所以数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{120}+10\times\frac{7}{40}+20\times\frac{21}{40}+30\times\frac{7}{24}=21$.

(2) 记"该同学仅答对 1 道题"为事件 M.

由题可知他答对 A 类试题的概率为 $\frac{7}{10}$，所以 $P(M)=\frac{7}{10}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{3}{10}\times C_2^1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{19}{90}$，

所以这次竞赛中该同学仅答对 1 道题的概率为 $\frac{19}{90}$.

考向 53　超几何分布、二项分布和正态分布

刷考点

1. ACD　【解析】设甲、乙、丙三个社团分别需抽取 x,y,z 人，则

$\frac{x}{14}=\frac{y}{21}=\frac{z}{14}=\frac{7}{14+21+14}$，所以 $x=2$，$y=3$，$z=2$，

所以从甲、乙、丙三个社团抽取的人数分别为 2，3，2，A 正确；

随机变量 X 的取值有 1，2，3，

$P(X=1)=\frac{C_5^1C_2^2}{C_7^3}=\frac{1}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_5^2C_2^1}{C_7^3}=\frac{4}{7}$，$P(X=3)=\frac{C_5^3C_2^0}{C_7^3}=\frac{2}{7}$，

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

所以 B 错误；

由期望公式可得随机变量 X 的数学期望

$E(X)=1\times\frac{1}{7}+2\times\frac{4}{7}+3\times\frac{2}{7}=\frac{15}{7}$，C 正确；

因为 $P(A)=P(X=3)=\frac{2}{7}$，所以 D 正确.

提示：$X=3$ 表示抽取的 3 人都感兴趣

故选 ACD.

2.【解】(1) 由题知 $100\times(0.0010\times2+0.0035+a+0.0020)=1$，

解得 $a=0.0025$.

分数在区间[450，550)内的频率为 0.1，在区间[550，650)内的频率为 0.35，在区间[650，750)内的频率为 0.25，设中位数为 x，则 $x\in[650,750)$.

由 $0.1+0.35+(x-650)\times0.0025=0.5$，得 $x=670$.

故频率分布直方图中 a 的值为 0.0025，估计该校学生分数的中位数为 670 分.

(2) 由题意知从分数落在[650，750)内的学生中抽取 5 名学生，

从分数落在[850，950]内的学生中抽取 2 名学生，随机变量 X 的所有可能取值为 0，1，2，则 $P(X=0)=\frac{C_5^3}{C_7^3}=\frac{2}{7}$，$P(X=1)=\frac{C_2^1C_5^2}{C_7^3}=\frac{4}{7}$，$P(X=2)=\frac{C_2^2C_5^1}{C_7^3}=\frac{1}{7}$，

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

数学期望 $E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$.

3. $\frac{32}{81}$　【解析】一次掷两枚骰子，两枚骰子点数之和为 4 的情况有 3 种，两枚骰子点数之和为 5 的情况有 4 种，两枚骰子点数之和为 6 的情况有 5 种，

在一次试验中，出现成功试验的概率 $P=\frac{3+4+5}{36}=\frac{1}{3}$.

设出现成功试验的次数为 X，则 $X\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$，

所以进行四次试验，恰好出现一次成功试验的概率 $P(X=1)=C_4^1\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$.

4.【解】(1) 从 A 类 6 道题中任选 3 道，其中 1 道会做，2 道不会做，则被终止比赛，所以该同学被终止比赛的概率为 $\frac{C_4^1C_2^2}{C_6^3}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$.

(2) 记该同学答对第二轮 B 类题目的数量为 Y，则 $Y\sim\left(3,\frac{2}{3}\right)$，且 $X=30Y$，

故 X 的所有可能取值为 90，60，30，0，则

$P(X=90)=P(Y=3)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，

$P(X=60)=P(Y=2)=C_3^2\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{12}{27}=\frac{4}{9}$，

$P(X=30)=P(Y=1)=C_3^1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$，

$P(X=0)=P(Y=0)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，

所以 X 的分布列为

X	90	60	30	0
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

所以 $E(X)=90\times\frac{8}{27}+60\times\frac{4}{9}+30\times\frac{2}{9}+0\times\frac{1}{27}=60$.

(3) 该同学获得三等奖，共有两种情况：

①第一轮得 20 分(答对 2 道)，则第二轮得 60 分(答对 2 道)，概率为 $\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}\cdot C_3^2\cdot$

$\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$；

②第一轮得 30 分(答对 3 道)，则第二轮得 60 分(答对 2 道)，概率为$\frac{C_4^3}{C_6^3}\cdot C_3^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}$，

所以该同学获得三等奖的概率为$\frac{C_4^2C_2^1}{C_6^3}\cdot C_3^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}+\frac{C_4^3}{C_6^3}\cdot C_3^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{16}{45}$.

5. A 【解析】因为 $X\sim N(30,2^2)$，所以 $\mu=30,\sigma=2$，

所以 $P(26\leqslant X\leqslant 34)\approx 0.955$，根据正态曲线的对称性可得，

$p_0=P(X\geqslant 26)=P(26\leqslant X\leqslant 34)+P(X>34)\approx 0.955+\frac{1-0.955}{2}=0.9775$.

故选 A.

6.【解】(1)由题意可知，$\bar{x}=\frac{1}{100}\times(54\times5+57\times21+60\times46+63\times25+66\times3)=60$，

则 $X\sim N(60,4)$，所以 $P(62<X\leqslant 64)=P(60+2<X\leqslant 60+4)=\frac{1}{2}[P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)]\approx\frac{1}{2}\times(0.9545-0.6827)=0.1359$.

(2)①设事件 A 表示“随机抽取一件该企业生产的汽车零件为废品”，

设事件 B_1 表示“随机抽取一件零件为第 1 条生产线生产”，

设事件 B_2 表示“随机抽取一件零件为第 2 条生产线生产”，

则 $P(B_1)=\frac{3}{4},P(B_2)=\frac{1}{4},P(A|B_1)=0.012,P(A|B_2)=0.008$，

所以 $P(A)=\frac{3}{4}\times0.012+\frac{1}{4}\times0.008=0.011$.

②因为 $P(A|B_1)=\frac{P(AB_1)}{P(B_1)}$，所以 $P(AB_1)=P(B_1)P(A|B_1)=\frac{3}{4}\times0.012=0.009$，

所以 $P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{0.009}{0.011}=\frac{9}{11}$.

7.【解】(1)若乙得 6 分，则需乙前 3 个投球点投中，第 4 个投球点未中，其概率为 $p^3\cdot(1-p)$，

故 $p^3\cdot(1-p)=\frac{1-p}{8}$，又 $0<p<1$，所以 $p=\frac{1}{2}$.

(2)设 X 为甲累计获得的分数，则 $X\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$，所以 $E(X)=np=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

敲黑板：二项分布期望公式的应用

设 Y 为乙累计获得的分数，则 Y 的可能取值为 0,2,4,6,8,10，

$P(Y=0)=\frac{1}{2}$，$P(Y=2)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$，

$P(Y=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$，

$P(Y=6)=\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$，

$P(Y=8)=\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{32}$，$P(Y=10)=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$，

所以 Y 的分布列为

Y	0	2	4	6	8	10
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$

所以 $E(Y)=0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{16}+8\times\frac{1}{32}+10\times\frac{1}{32}=\frac{31}{16}$.

因为 $E(X)>E(Y)$，所以甲获胜的可能性大.

考向 54 随机抽样与用样本估计总体

刷考点

1. C 【解析】根据按比例分配的分层随机抽样可知低能量密度锂电池的总产量为 $400\times\frac{80-35}{80}=225$(个). 故选 C.

2. A 【解析】由初一、初二、初三年级分别有 800 名、600 名、600 名学生可知，抽样比为 $\frac{100}{800+600+600}=\frac{1}{20}$，

按年级用按比例分配的分层随机抽样的方法随机抽取初一学生 40 名，初二、初三学生各 30 名，

根据分步乘法计数原理可知，不同的抽样结果共有 $C_{800}^{40}\cdot(C_{600}^{30})^2$.

故选 A.

3. BC 【解析】选项 A，若是按照比例分配的分层随机抽样法，则甲班应抽取 $13\times\frac{40}{40+50+40}=4$(人)，但是用简单随机抽样法抽取甲班人数不一定为 4，故 A 错误；

选项 B，用比例分配的分层随机抽样法，丙班应抽取 $26\times\frac{40}{40+50+40}=8$(人)，故 B 正确；

选项 C，该高中一年级数学月考的平均及格率为$\frac{40\times50\%+50\times60\%+40\times70\%}{40+50+40}=60\%$，故 C 正确；

选项 D，甲班及格的有 20 人，乙班及格的有 30 人，丙班及格的有 28 人，从这次该高中一年级数学月考及格的学生中随机抽取 1 人，则该学生来自甲班的概率为$\frac{20}{78}=\frac{10}{39}$，来自乙班的概率为$\frac{30}{78}=\frac{5}{13}$，来自丙班的概率为$\frac{28}{78}=\frac{14}{39}$，所以该学生来自乙班的概率最大，故 D 错误.

故选 BC.

4. BCD 【解析】对于 C，由题图②可知食品的开支为 $30+40+100+80+50=300$(元)，

由题图①可知食品开支占 30%，所以总开支为 $300\div30\%=1000$(元)，

则娱乐开支为 $1000\times10\%=100$(元)，故 C 正确；

对于 A，通讯开支为 $1000\times5\%=50$(元)，则娱乐开支比通讯开支多 50 元，故 A 错误；

对于 B，日常开支为 $1000\times20\%=200$(元)，肉类为 100 元，则日常开支比肉类开支多 100 元，故 B 正确；

对于 D，储蓄为 $1000\times30\%=300$(元)，则肉类开支占储蓄的$\frac{1}{3}$，故 D 正确.

故选 BCD.

5. C 【解析】由直方图可得出，从第一组至第七组的频率依次是 0.02，0.09，0.22，0.33，0.24，0.08，0.02，

对于选项 A，指标值在区间[195,205)内的产品约有 $100\times0.33=33$(件)，A 选项正确；

对于选项 B，指标值的极差满足：$225-175<$极差$\leqslant 235-165$，即 $50<$极差$\leqslant 70$，B 选项正确；

对于选项 C，因为 $0.02+0.09+0.22=0.33<0.6$，$0.02+0.09+0.22+0.33=0.66>0.6$，所以指标值的第 60 百分位数在[195,205)内，小于 205，C 选项不正确；

对于选项 D，抽取的产品的质量指标值的样本平均数和样本方差的估计值分别为 $\bar{x}=170\times0.02+180\times0.09+190\times0.22+200\times0.33+210\times0.24+220\times0.08+230\times0.02=200$，

$s^2=(-30)^2\times0.02+(-20)^2\times0.09+(-10)^2\times0.22+0\times0.33+10^2\times0.24+20^2\times0.08+30^2\times0.02=150$，D 选项正确. 故选 C.

6. ACD 【解析】由题图知，早睡人群占比与晚睡人群占比都是以早睡与晚睡各自的总人数为基数的，所以早睡人数与晚睡人数不能用各自所占的百分比来判断，故 A 错误；

早睡人群睡眠指数主要集中在[80,90)，晚睡人群睡眠指数主要集中在[50,60)，故 B 正确，D 错误；

早睡人群睡眠指数的极差和晚睡人群睡眠

眠指数的极差的大小无法确定，故 C 错误.

故选 ACD.

7. B 【解析】由题意得总人数为 500+700+800=2 000(人)，故三所学校学生数学成绩的总平均数约为 $\frac{500}{2\ 000}\times92+\frac{700}{2\ 000}\times100+\frac{800}{2\ 000}\times105=100$，故选 B.

8. ABD 【解析】对于 A 项，抽取的样本里男生有 $100\times\frac{3}{5}=60$(人)，所以 A 项正确；

对于 B 项，由题可知，每一位学生被抽中的可能性为 $\frac{100}{4\ 000}=\frac{1}{40}$，所以 B 项正确；

对于 C 项，估计该校学生身高的平均值为 $\bar{x}=175\times\frac{3}{5}+160\times\frac{2}{5}=169$，所以 C 项错误；

对于 D，估计该校学生身高的方差为 $s^2=\frac{3}{5}\times[184+(175-169)^2]+\frac{2}{5}\times[179+(160-169)^2]=236$，所以 D 项正确.

故选 ABD.

9. A 【解析】对于 A，显然这组样本数据的极差大于或等于 $5-1=4$，故 A 正确；

对于 B，若 $a=b=0$，则这组数据的平均数为 $\frac{1+2+3+3+4+5}{8}=\frac{9}{4}<4$，故 B 错误；

对于 C，若 $a=b=0$，则这组数据 0，0，1，2，3，3，4，5 的中位数为 $\frac{2+3}{2}=\frac{5}{2}<3$，故 C 错误；

对于 D，若 $a=b=1$，则这组数据 1，1，1，2，3，3，4，5 的众数为 1，故 D 错误. 故选 A.

10. C 【解析】依题意不妨设这 5 次的分数从小到大分别为 $a,a+d,a+2d,a+3d,a+4d(a>0,d>0)$，

所以 $\bar{x}=\frac{1}{5}(a+a+d+a+2d+a+3d+a+4d)=a+2d$.

又 $5\times60\%=3$，所以第 60 百分位数为 $m=\frac{a+2d+a+3d}{2}=a+\frac{5}{2}d$.

要使 4 次成绩的平均分数为 $\bar{y}$ 且 $\bar{y}=\bar{x}$，则去掉的数据一定是 $a+2d$，即还剩下 $a,a+d,a+3d,a+4d(a>0,d>0)$，

又 $4\times60\%=2.4$，所以第 60 百分位数为 $n=a+3d$，

因为 $d>0$，所以 $n>m$. 故选 C.

11. AD 【解析】对于 A，由方差的公式可知，该组数据的平均数是 3，则这组样本数据的总和为 $3\times20=60$，A 正确；

对于 B，数据 13，27，24，12，14，30，15，17，19，23 共 10 个数，从小到大排列为 12，13，14，15，17，19，23，24，27，30，由于 $10\times0.7=7$，故第 7 和第 8 个数的平均数为第 70 百分位数，即 $\frac{23+24}{2}=23.5$，所以第 70 百分位数是 23.5，故 B 错误；

对于 C，某 8 个数的平均数为 5，方差为 2，现又加入一个新数据 5，设此时这 9 个数的平均数为 $\bar{x}$，方差为 s^2，则 $\bar{x}=\frac{8\times5+5}{9}=5$，$s^2=\frac{8\times2+(5-5)^2}{9}=\frac{16}{9}<2$，故 C 错误；

对于 D，样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 的标准差为 8，故数据 $2x_1-1,2x_2-1,\cdots,2x_{10}-1$ 的标准差为 $\sqrt{2^2\times8^2}=16$，故 D 正确.

故选 AD.

考向 55　成对数据的统计分析

刷考点

1. ABD 【解析】对于 A，因为 $|-0.9|>0.8$，所以 N 组数据比 M 组数据的线性相关性更强，故 A 正确；

敲黑板：$|r|$ 越接近 1，成对样本数据的线性相关程度越强

对于 B，根据决定系数的含义知 R^2 越大，则相应模型的拟合效果越好，故 B 正确；

对于 C，回归直线一定经过样本点的中心，但不一定经过样本点，故 C 错误；

对于 D，样本相关系数 r 的符号反映了相关关系的正、负性，当 $r>0$ 时，成对样本数据正相关，当 $r<0$ 时，成对样本数据负相关，故 D 正确.

故选 ABD.

2. 0.99 【解析】由题意，知 $\bar{x}=\frac{1+2+3+4+5+6+7}{7}=4$，

$\sum_{i=1}^{7}(x_i-\bar{x})^2=(1-4)^2+(2-4)^2+(3-4)^2+(4-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2=28.$

所以样本相关系数 $r=\frac{14.00}{\sqrt{28\times7.08}}=\frac{14.00}{\sqrt{198.24}}\approx\frac{14.00}{14.08}\approx0.99.$

3. AC 【解析】散点图的特点是单调递增，增长速度越来越慢，且 $y<25$.

对于 A，符合散点图的特点；

对于 B，$y=25+\sqrt{c_1x+c_2}\geqslant25$，不符合散点图的特点；

对于 C，符合散点图的特点；

对于 D，$y=c_1(x-25)+c_2$ 的增长速度不变，不符合散点图的特点.

故选 AC.

4.【解】(1)由题意知 $\bar{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}x_i=26$，$\bar{y}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}y_i=33$，

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{557}{84}\approx6.6$，则 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=33-6.6\times26=-138.6$，

故 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=6.6x-138.6$.

(2)(ⅰ)对于线性回归模型，$\sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2=3\ 930$，$\sum_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2=236.64$，

相关指数为 $1-\frac{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{6}(y_i-\bar{y})^2}=1-\frac{236.64}{3\ 930}\approx1-0.060\ 2=0.939\ 8$，

因为 $0.939\ 8<0.952\ 2$，所以用非线性回归模型拟合效果更好.

(ⅱ)当 $x=35$ 时，$\hat{y}=0.06e^{0.230\ 3\times35}=0.06\times e^{8.060\ 5}\approx0.06\times316\ 7=190.02\approx190$(个)，

所以温度为 35 ℃时，该种药用昆虫的产卵数估计为 190 个.

5.【解】(1)零假设 H_0：周平均锻炼时长与年龄无关.

由 2×2 列联表中的数据，可得 $\chi^2=\frac{200\times(40\times75-25\times60)^2}{100\times100\times65\times135}\approx5.128$，

所以 $\chi^2\approx5.128>x_{0.05}=3.841$.

敲黑板：依据小概率值 $\alpha=0.05$ 的 χ^2 独立性检验认为有关联，则 χ^2 的值必须大于 0.05 对应的临界值

根据小概率值 $\alpha=0.05$ 的独立性检验，我们推断 H_0 不成立，

即认为周平均锻炼时长与年龄有关，此推断犯错误的概率不大于 0.05.

(2)抽取的 5 人中，周平均锻炼时长少于 4 小时的有 $5\times\frac{40}{100}=2$(人)，不少于 4 小时的有 $5\times\frac{60}{100}=3$(人)，所以 X 的所有可能取值为 1，2，3，

所以 $P(X=1)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$，$P(X=2)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}$，$P(X=3)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$.

①$P(X\leqslant2)=P(X=1)+P(X=2)=\frac{3}{10}+\frac{3}{5}=\frac{9}{10}$.

②随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$.