位长度，得到 $g(x)=\sqrt{2}\cdot\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{24}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sqrt{2}\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，

将函数 $g(x)$ 图象上各点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{\omega}$ $(\omega>0$，纵坐标不变)，得到函数 $h(x)=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

令 $h(x)=0$，得 $2\omega x-\frac{\pi}{3}=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得 $x=\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{2\omega}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上没有零点，所以 $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2\omega}$，得 $0<\omega<2$，且

$$\begin{cases}\frac{\pi}{6\omega}+\frac{k\pi}{2\omega}<\frac{\pi}{4},\\ \frac{\pi}{6\omega}+\frac{(k+1)\pi}{2\omega}>\frac{\pi}{2}\end{cases}(k\in\mathbf{Z}),$$

解得 $\frac{2}{3}+2k<\omega<\frac{4}{3}+k$，$k\in\mathbf{Z}$，又 $0<\omega<2$，

所以当 $k=-1$ 时，$0<\omega<\frac{1}{3}$；

当 $k=0$ 时，$\frac{2}{3}<\omega<\frac{4}{3}$，

即 ω 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$.

专题 6　解三角形

考向 22　利用正、余弦定理解三角形

刷考点

1. B　【解析】由 $bc=3a^2$，$b+c=\frac{7}{2}a$，

敲黑板：已知三边关系，用余弦定理可求角的三角函数值

得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-2bc-a^2}{2bc}=\frac{\frac{49}{4}a^2-6a^2-a^2}{6a^2}=\frac{7}{8}$，

又 A 为 $\triangle ABC$ 的内角，所以 $\sin A>0$，

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2A}=\frac{\sqrt{15}}{8}$. 故选 B.

2. A　【解析】因为 $\frac{c}{\sin C}=2R$，所以 $c=2R\sin C=\frac{1}{2}\sin C$，则 $\sin^2A+\sin^2B+\sin A\sin B=\sin^2C$，

点悟：利用正弦定理进行边角互化

所以 $a^2+b^2+ab=c^2$，

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$.

因为 $0°<C<180°$，所以 $C=120°$.

所以 $c=\frac{1}{2}\sin C=\frac{1}{2}\sin 120°=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

故选 A.

3. BC　【解析】对于 A，因为 $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=7$，所以 $\sin C=7\cos C>0$. 因为 $\sin^2C+\cos^2C=1$，所以 $\sin C=\frac{7\sqrt{2}}{10}$，$\cos C=\frac{\sqrt{2}}{10}$. 因为 $\sin A=\frac{4}{5}=\frac{8}{10}<\frac{7\sqrt{2}}{10}=\sin C$，所以由正弦定理得 $a<c$，故 $A<C$，所以 $\cos A>0$，则 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2A}=\frac{3}{5}$，故 A 错误.

对于 B，$\cos B=\cos[\pi-(A+C)]=-\cos(A+C)=-\cos A\cos C+\sin A\sin C=-\frac{3}{5}\times\frac{\sqrt{2}}{10}+\frac{4}{5}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$，故 B 正确.

对于 C，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{4\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{4}{5}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确.

对于 D，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times4\times\frac{5\sqrt{2}}{2}\times\frac{7\sqrt{2}}{10}=7$，故 D 错误. 故选 BC.

4. $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$　【解析】设 $AC=x$，$BC=y(x>0,y>0)$，在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$ 中，$\frac{\sqrt{2}}{\sin\angle BAC}=\frac{x}{\sin\angle ADC}$，$\frac{1}{\sin\angle BCD}=\frac{y}{\sin\angle BDC}$，

由 $\sin\angle ADC=\sin\angle BDC$，

得 $\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle BCD}=\frac{\sqrt{2}y}{x}$.

在 $\triangle BDC$ 中，$\cos\angle BCD=\frac{y^2+2-1}{2\sqrt{2}y}$，

由 $\angle BAC=2\angle BCD$，得 $\sin\angle BAC=2\sin\angle BCD\cos\angle BCD$，

所以 $\frac{\sqrt{2}y}{x}=2\cos\angle BCD=2\cdot\frac{y^2+2-1}{2\sqrt{2}y}$，整理得 $2y^2=x(y^2+1)$，①

又 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$，即 $\frac{1+2-x^2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1+2-y^2}{2\sqrt{2}}$，整理得 $x^2+y^2=6$，②

联立①②得 $x^3-2x^2-7x+12=0$，即 $(x-3)\cdot(x^2+x-4)=0$，解得 $x=3$ 或 $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$（负值舍去）.

由 $\triangle ADC$ 的三边关系知 $\sqrt{2}-1<x<\sqrt{2}+1$，故 $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$，即 $AC=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$.

5. A　【解析】设三个内角 A,B,C 所对的边分别是 a,b,c，由正弦定理可知 $\sin A:\sin B:\sin C=4:5:6=a:b:c$，

不妨设 $a=4k,b=5k,c=6k,k>0$，

见比设 k 法

显然 $c>b>a$，则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{8}>0$，所以 $\frac{\pi}{2}>C>B>A$. 故选 A.

6. B　【解析】由题意，向量 $\boldsymbol{m}=(a,b)$，$\boldsymbol{n}=(\sin B,\sin A)$，$\boldsymbol{m}/\!/\boldsymbol{n}$，则 $b\sin B-a\sin A=0$，由正弦定理可得 $b^2=a^2$，即 $b=a$. 又由 $(2a-c)\cos B=b\cos C$，可得 $2\sin A\cos B-\sin C\cos B=\sin B\cos C$，

即 $2\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$.

$\because 0<A<\pi$，$\therefore \sin A\neq0$，$\therefore \cos B=\frac{1}{2}$.

$\because 0<B<\pi$，$\therefore B=\frac{\pi}{3}$，

又 $b=a$，$\therefore A=B=C=\frac{\pi}{3}$，

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形. 故选 B.

7. 【解】(1) 由正弦定理知 $\sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin B-\sin C=0$，而 $\sin B=\sin(\pi-A-C)=\sin(A+C)$，

$\therefore \sin A\cos C+\sqrt{3}\sin A\sin C-\sin(A+C)-\sin C=0$，即 $\sqrt{3}\sin A\sin C-\cos A\sin C-\sin C=0$，

又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C\neq0$，

$\therefore \sqrt{3}\sin A-\cos A=2\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=1$，

即 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

又 $0<A<\pi$，$\therefore A-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$，

$\therefore A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，则 $A=\frac{\pi}{3}$.

(2) 由题意得 $\begin{cases}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{\sqrt{3}}{4}bc=\sqrt{3},\\ \cos A=\frac{b^2+c^2-4}{2bc}=\frac{1}{2},\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}bc=4,\\ b^2+c^2=8,\end{cases}$

将 $b=\frac{4}{c}$ 代入 $b^2+c^2=8$，整理得 $c^4-8c^2+16=0$，

则 $c^2=4$，即 $c=2(c=-2$ 舍去$)$，则 $b=2$，

$\therefore a=b=c=2$，

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形.

8. C　【解析】由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得$\frac{2\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{4}{\sin B}$，解得 $\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $a<b$，所以 $A<B$. 又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{4}$ 或 $B=\frac{3\pi}{4}$，故此三角形有两解. 故选 C.

9. BC　【解析】对于 A，因为 $b=10$，$A=45°$，$C=60°$，所以 $B=75°$，所以 $\triangle ABC$ 只有一解，故 A 错误；

对于 B，因为 $b=\sqrt{15}$，$c=4$，$B=60°$，

所以由正弦定理得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{4\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{2\sqrt{5}}{5}<1$，因为 $b<c$，所以 $B<C$，所以 $C>60°$，所以 $\triangle ABC$ 有两解（$60°<C_1<90°$，$90°<C_2<120°$），故 B 正确；

对于 C，因为 $a=\sqrt{3}$，$b=2$，$A=45°$，所以由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

因为$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，$a<b$，所以 $\triangle ABC$ 有两解（$45°<B_1<60°$，$120°<B_2<135°$），故 C 正确；

对于 D，因为 $a=8$，$b=4$，$A=80°$，

所以 $b<a$，$B<80°$，所以 $\triangle ABC$ 只有一解，故 D 错误. 故选 BC.

方法技巧　**已知 $\triangle ABC$ 的两边 a,b 及角 A，判断三角形个数的一般步骤**

(1) 由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得到 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}$.

(2) 当 $\sin B>1$ 时，无解；当 $\sin B=1$，且 $a<b$ 时，$B=90°$，有唯一解；当 $\sin B<1$ 时，若 $a\geqslant b$，则有唯一解，若 $a<b$，$\sin A<\sin B$，则有两个解.

10. A　【解析】因为 $b=2c$，所以根据正弦定理得 $\sin B=2\sin C$.

因为 $9\sin B-2\sin C=2\sqrt{15}$，

所以 $9\sin B-2\sin C=8\sin B=2\sqrt{15}$，即 $\sin B=\frac{\sqrt{15}}{4}$.

当 B 为钝角时，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\frac{1}{4}$，

即 $2c^2-c-6=0$，解得 $c=2$（负值舍去），则 $b=2c=4$，$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c=9$；

当 B 为锐角时，C 也为锐角，则 A 为钝角，$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{9-3c^2}{6c}=\frac{1}{4}$，即 $2c^2+c-6=0$，解得 $c=\frac{3}{2}$（负值舍去），$b=2c=3=a$，与 A 为钝角时，$b<a$ 矛盾，故不成立.

综上，$\triangle ABC$ 的周长为 9. 故选 A.

11. A　【解析】由 $(3a+b)\cos C+c\cos B=0$ 及正弦定理，得 $(3\sin A+\sin B)\cos C+\sin C\cos B=0$，

则 $3\sin A\cos C+\sin B\cos C+\sin C\cos B=0$，

即 $3\sin A\cos C+\sin(B+C)=0$，

即 $3\sin A\cos C+\sin A=0$.

因为 $A\in(0,\pi)$，则 $\sin A\neq0$，

所以 $3\cos C+1=0$，解得 $\cos C=-\frac{1}{3}$，

则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{3}$.

又 $c^2-a^2-b^2=2$，

所以 $\cos C=\frac{-2}{2ab}=-\frac{1}{ab}=-\frac{1}{3}$，即 $ab=3$.

又 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$. 故选 A.

12.【解】(1) 若选①，由 $\tan A=3$ 得 $\sin A=3\cos A>0$，故 A 是锐角. 又 $\sin^2A+\cos^2A=1$，

解得 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

所以 $\sin C=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

若选②，由 $b^2+c^2-a^2=2c$，可得 $2bc\cos A=2c$，解得 $b\cos A=1$.

又 $b=\sqrt{10}$，解得 $\cos A=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 又 $0<A<\pi$，故 $\sin A=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，下面同选①.

若选③，由 $3b=\sqrt{5}c$，可得 $c=3\sqrt{2}$，由正弦定理可得 $\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

(2) 若选①或②，由(1)得 $\sin C=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，由正弦定理得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{10}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=4$，

则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times4\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=6$.

若选③，由余弦定理可得 $a^2+c^2-b^2=2ac\cos B$，即 $a^2+18-10=2a\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得 $a=2$ 或 $a=4$.

当 $a=2$ 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$；

当 $a=4$ 时，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=6$.

所以 $\triangle ABC$ 的面积是 3 或 6.

13.【解】(1) $\because b\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}c\sin B=a$，

$\therefore \sin B\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B=\sin A$，

$\therefore \sin B\cos C-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，

$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin C\sin B=\cos B\sin C$.

$\because \sin C\neq0$，$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin B=\cos B$，

$\therefore \tan B=-\sqrt{3}$.

又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{2\pi}{3}$.

(2) $\because BD$ 为 $\angle ABC$ 的平分线，$B=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore \angle ABD=\angle CBD=\frac{\pi}{3}$.

又 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle CBD}$，$BD=\sqrt{3}$，

$\therefore \frac{1}{2}ac\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}c\cdot\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}a\cdot\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}$，即 $ac=\sqrt{3}(a+c)$，①

由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\frac{2\pi}{3}$，即 $(a+c)^2-ac=36$，②

联立①②可得 $a+c=4\sqrt{3}$（负值舍去），

$\therefore ac=12$，

$\therefore a,c$ 是关于 x 的方程 $x^2-4\sqrt{3}x+12=0$ 的两个实数根，解得 $a=c=2\sqrt{3}$.

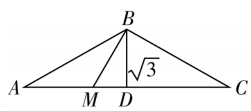
又 BD 为 $\angle ABC$ 的平分线，

$\therefore BD\perp AC$.

$\because AM=\frac{1}{2}MC$，$AC=6$，

$\therefore DM=AD-AM=3-2=1$，$BM=\sqrt{BD^2+DM^2}=2$，

$\therefore \triangle BDM$ 的周长为 $3+\sqrt{3}$.



14. D　【解析】因为 $\sin(A-C)+\sin C=\sin B=\sin(A+C)$，

所以 $\sin A\cos C-\cos A\sin C+\sin C=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

化简得 $2\cos A\sin C=\sin C$.

因为 C 为三角形内角，则 $\sin C\neq0$，

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$，

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

设△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，BC 边上的高为 h.

由三角形面积公式可得 $\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah$，

点悟：已知 BC 边上的高，结合三角形面积公式求解

又 $h=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $bc=a$.

又 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1}{2}$，

所以 $a^2=b^2+c^2-bc\geqslant bc=a$，当且仅当 $b=c$ 时取等号，则 $a\geqslant 1$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah\geqslant\frac{\sqrt{3}}{4}$，故选 D.

15. $\frac{3}{4}$ 【解析】在△ABC 中，由射影定理 $a=b\cos C+c\cos B$ 及 $a=-3b\cos C$，得 $c\cos B=-4b\cos C$. 由正弦定理得 $\sin C\cos B=-4\sin B\cos C$，则 $\tan C=-4\tan B$.

由 $a=-3b\cos C>0$，得 $\cos C<0$，即 C 是钝角，则 $\tan B>0$，

$\tan A=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}=\frac{3\tan B}{1+4\tan^2 B}=\frac{3}{\frac{1}{\tan B}+4\tan B}\leqslant\frac{3}{4}$，

当且仅当 $\frac{1}{\tan B}=4\tan B$，即 $\tan B=\frac{1}{2}$ 时等号成立，

所以 $\tan A$ 的最大值为 $\frac{3}{4}$.

16.【解】已知 $(c-2b)\cos A+\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}=0$，由余弦定理得 $(c-2b)\cos A+a\cos C=0$，

由正弦定理得 $(\sin C-2\sin B)\cos A+\sin A\cos C=0$.

因为 $\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$，

所以 $\sin B(1-2\cos A)=0$，

又 $0<B<\pi$，$\sin B>0$，则 $\cos A=\frac{1}{2}$.

因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

(1) 由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $b^2+c^2-bc=16$，则 $(b+c)^2-3bc=16$，

又 $b+c=8$，得 $bc=16$，

故△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times16\times\frac{\sqrt{3}}{2}=4\sqrt{3}$.

(2) 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，可得 $\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}$，又 $C=\frac{2\pi}{3}-B$，

则 $\frac{c}{b}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-B\right)}{\sin B}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan B}+\frac{1}{2}$.

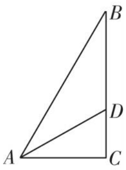
因为 C 为钝角，所以 $\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\ \frac{2\pi}{3}-B>\frac{\pi}{2},\end{cases}$

解得 $0<B<\frac{\pi}{6}$，

则 $0<\tan B<\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{2\tan B}>\frac{3}{2}$，即 $\frac{c}{b}>2$，

故 $\frac{c}{b}$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

17. D 【解析】如图所示，在△ABC 中，由 $BD=2CD$，



得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

由 $AD=BD$，得 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BD}|=\frac{2}{3}a$，

所以 $\overrightarrow{AD}^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2$，

即 $\frac{4}{9}a^2=\frac{1}{9}c^2+\frac{4}{9}b^2+\frac{2}{9}bc$，

化简得 $4a^2=c^2+4b^2+2bc$. ①

在△ABC 中，由余弦定理得 $b^2+c^2-bc=a^2$，②

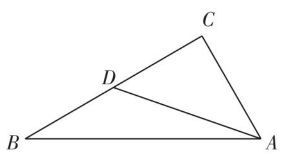
由①②解得 $c=2b$.

由 $BD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $a=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

将其代入②式，得 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2=b^2+c^2-bc=3b^2$，解得 $b^2=\frac{9}{16}$，

故△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\angle BAC=\frac{\sqrt{3}}{2}b^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{9}{16}=\frac{9\sqrt{3}}{32}$. 故选 D.

18. A 【解析】如图所示，设 $AC=x$，$BC=2y$ $(x>0,y>0)$，由 AD 为 BC 边上的中线得 $CD=BD=y$.



在△ACD 中，由余弦定理得 $x^2=\frac{7}{4}+y^2-2\times\frac{\sqrt{7}}{2}y\cdot\cos\angle ADC$.

在△ABD 中，由余弦定理得 $4=\frac{7}{4}+y^2-2\times\frac{\sqrt{7}}{2}y\cdot\cos\angle ADB$.

因为 $\cos\angle ADC=-\cos\angle ADB$，所以 $x^2+4=\frac{7}{2}+2y^2$，即 $2y^2=x^2+\frac{1}{2}$. 在△ABC 中，由余弦定理得 $(2y)^2=x^2+4-2\times2x\cdot\cos\frac{\pi}{3}$，

则有 $x^2+2x-3=0$，解得 $x=1$ 或 $x=-3$（舍去），即 $AC=1$. 故选 A.

19.【解】(1) 由题意及正弦定理可得 $\cos B\cdot(\sin C\cos B+\sin B\cos C)+\frac{1}{2}\sin A=0$，

则 $\cos B\sin(B+C)+\frac{1}{2}\sin A=0$，

即 $\cos B\sin A+\frac{1}{2}\sin A=0$.

又 $\sin A>0$，所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$.

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$.

(2) 由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-49}{2ac}=-\frac{1}{2}$，

整理得 $(a+c)^2-ac=49$，

又 $a+c=8$，解得 $ac=15$，

又 $a<c$，得 $a=3$，$c=5$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

可得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{3}{7}\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

因为 $a<c$，所以 $A<C$，则 $A\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，

敲黑板：在三角形中，大边对大角，小边对小角

所以 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{3}}{14}\right)^2}=\frac{13}{14}$.

因为 $A+C=\frac{\pi}{3}$，

所以 $\sin(2A+C)=\sin(A+A+C)$

$=\sin\left(A+\frac{\pi}{3}\right)$

$=\sin A\cos\frac{\pi}{3}+\cos A\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{3\sqrt{3}}{14}\times\frac{1}{2}+\frac{13}{14}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

(3) 因为 BD 是角平分线，

所以 $\sin\angle CBD=\sin\angle ABD$，

又 $2AD=CD$，所以 $\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABD}}=\frac{\frac{1}{2}CD\cdot h}{\frac{1}{2}AD\cdot h}=2=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot BD\sin\angle CBD}{\frac{1}{2}AB\cdot BD\sin\angle ABD}=\frac{BC}{AB}$（$h$ 为 AC 边上的高），即 $a=2c$，

结合正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

可得$\frac{a}{\sin A}=\frac{\frac{a}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-A\right)}$,

所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A=\frac{1}{2}\sin A$,

整理可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$,

又因为 $\sin^2A+\cos^2A=1$,且 $\cos A>0$,

所以$\frac{3}{4}\cos^2A+\cos^2A=1$,解得 $\cos A=\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

刷上分

1. B 【解析】因为在锐角三角形 ABC 中,$b=2,c=\sqrt{6},B=\frac{\pi}{4}$,所以由$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

得$\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{\sin C}$,解得 $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又△ABC 是锐角三角形,则 $0<C<\frac{\pi}{2}$,

所以 $C=\frac{\pi}{3}$,

所以 $\sin A=\sin(\pi-A)=\sin(B+C)$

$=\sin B\cos C+\cos B\sin C$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$,

所以 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=2\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}+1$.

故选 B.

2. C 【解析】设∠$ADB=\theta$,在△ACD 中,$b^2=4+3-2\times2\times\sqrt{3}\cos(\pi-\theta)=7+4\sqrt{3}\cos\theta$,

在△ABD 中,$c^2=1+3-2\times\sqrt{3}\cos\theta=4-2\sqrt{3}\cos\theta$,

所以$\frac{b^2}{c^2}=\frac{7+4\sqrt{3}\cos\theta}{4-2\sqrt{3}\cos\theta}=13$,

解得 $\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $\theta\in(0,\pi)$,所以 $\sin\theta=\frac{1}{2}$,

所以△ABC 的面积为$\frac{1}{2}\times(BD+DC)\times AD\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times3\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

故选 C.

3. D 【解析】设 D 是 BC 边的中点,如图,连接 AD.

依题意,在△ABC 中,$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=8:7:3$,

设 $a=8k,b=7k,c=3k,k>0$,由余弦定理得

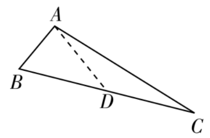
$\cos\angle BAC=\frac{49+9-64}{2\times7\times3}=-\frac{1}{7}$,

所以∠BAC 为钝角,$\sin\angle BAC=\sqrt{1-\cos^2\angle BAC}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3k\times7k\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=12\sqrt{3}$,解得 $k^2=2$,则 $AB=3\sqrt{2},AC=7\sqrt{2}$.由点 D 为 BC 的中点可得 $\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

点悟:中线长度可利用向量求解

两边平方得 $\overrightarrow{AD}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\times\left(18+98-2\times3\sqrt{2}\times7\sqrt{2}\times\frac{1}{7}\right)=26$,所以$|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{26}$.故选 D.



4. C 【解析】由$\frac{2b-c}{\cos C}=\frac{3}{\cos A}$及 $a=3$,可得$\frac{2b-c}{\cos C}=\frac{a}{\cos A}$,

由正弦定理得$\frac{2\sin B-\sin C}{\cos C}=\frac{\sin A}{\cos A}$,

则 $2\sin B\cos A=\sin C\cos A+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$,即 $\sin B(2\cos A-1)=0$,

因为△ABC 是锐角三角形,所以 $\sin B>0$,

所以 $\cos A=\frac{1}{2}$,

又 $A\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

由正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\sqrt{3}$,

得 $b=2\sqrt{3}\sin B,c=2\sqrt{3}\sin C$,

所以 $b+c=2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin C$

$=2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)$

$=2\sqrt{3}\sin B+2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)$

$=3\sqrt{3}\sin B+3\cos B$

$=6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)$.

由$\begin{cases}0<B<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-B<\frac{\pi}{2},\end{cases}$可得$\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{2}$,

则$\frac{\pi}{3}<B+\frac{\pi}{6}<\frac{2\pi}{3}$,故$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant1$,

所以 $b+c$ 的取值范围为$(3\sqrt{3},6]$.

故选 C.

5. ABC 【解析】对于 A,若 $A>B>C$,则 $a>b>c$,

由正弦定理可得 $\sin A>\sin B>\sin C$,故 A 正确;

对于 B,若 $a=60,b=30,B=28°$,

则 $60\sin28°<60\sin30°=30$,

因此满足条件的△ABC 有两个,故 B 正确;

对于 C,若 $0<\tan A\tan B<1$,

则$-\tan C=\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}>0$,

所以 $\tan C<0$,则 $C\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$,

所以△ABC 是钝角三角形,故 C 正确;

对于 D,因为在非直角三角形 ABC 中,

$-\tan C=\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$,

所以 $\tan A\tan B\tan C=\tan A+\tan B+\tan C$,

在直角三角形 ABC 中,直角所在角的正切值不存在,故 D 不正确.

故选 ABC.

6. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】根据余弦定理可得

$c\cos B+b\cos C=c\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+c^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{2a}=a$.

因为 $c\cos B+b\cos C-2a\cos A=0$,

所以 $a-2a\cos A=0$,即 $1-2\cos A=0$,

解得 $\cos A=\frac{1}{2}$.

又 $A\in(0,\pi)$,可知 $A=\frac{\pi}{3}$.

7. 【解】(1)已知 $a^2+b^2-c^2=\sqrt{2}ab$,则有 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{4}$.

又 $\sin C=\sqrt{2}\cos B$,所以 $\cos B=\frac{\sin C}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

又 $B\in(0,\pi)$,所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

(2)由(1)可得 $C=\frac{\pi}{4},B=\frac{\pi}{3}$,由正弦定理,不妨令$\frac{c}{\sin C}=\frac{b}{\sin B}=k(k>0)$,则有 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}k,b=\frac{\sqrt{3}}{2}k$.

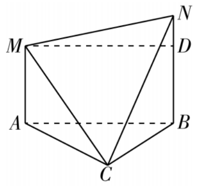
又 $S_{\triangle ABC}=3+\sqrt{3}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sin(B+C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}k\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}k(\sin B\cos C+\cos B\sin C)=\frac{\sqrt{6}}{8}k^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{8}k^2\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=3+\sqrt{3}$,解得 $k=4$(负值舍去),故 $c=\frac{\sqrt{2}}{2}k=2\sqrt{2}$.

考向 23 解三角形的实际应用

刷考点

1. D 【解析】由题意,过点 M 作 $MD\perp BN$ 于点 D,如图所示,则 $MD=AB$.



在$\triangle ACM$ 中,$AM=15$,$\angle ACM=30°$,

$\therefore AC=\sqrt{3}AM=15\sqrt{3}$.

在$\triangle BCN$ 中,$BN=21$,$\angle BCN=60°$,

$\therefore BC=\dfrac{BN}{\sqrt{3}}=7\sqrt{3}$. 由 $BD=AM=15$,得 $DN=BN-BD=6$.

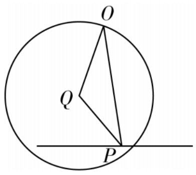
在$\triangle ACB$ 中,$\angle ACB=120°$,由余弦定理得

$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB}=\sqrt{(15\sqrt{3})^2+(7\sqrt{3})^2-2\times15\sqrt{3}\times7\sqrt{3}\cos\angle120°}=\sqrt{1\ 137}$,

$\therefore DM=AB=\sqrt{1\ 137}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle DMN$ 中,$\angle MDN=90°$,则由勾股定理得 $MN=\sqrt{DM^2+DN^2}=\sqrt{(\sqrt{1\ 137})^2+6^2}=\sqrt{1\ 173}$. 故选 D.

2. 8 【解析】设在 t h 后,该海滨城市开始受到台风侵袭,此时台风中心位于点 Q,则 $OQ=130+10t$,$OP=350$,$PQ=20t$,且$\angle OPQ=\theta-60°$.



因为 $\cos\theta=\dfrac{1}{7}$,$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$,

则 $\cos\angle OPQ=\cos(\theta-60°)=\cos\theta\cos60°+\sin\theta\sin60°=\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{13}{14}$.

在$\triangle OPQ$ 中,由余弦定理可得 $OQ^2=PQ^2+OP^2-2PQ\cdot OP\cos\angle OPQ$,

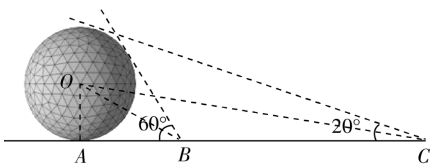
即 $(130+10t)^2=(20t)^2+350^2-2\times20t\times350\times\dfrac{13}{14}$,整理可得 $t^2-52t+352=0$,

解得 $t=8$ 或 $t=44$,故 8 h 后该海滨城市开始受到台风侵袭.

3. B 【解析】设该球体建筑物的半径为 R,球心为 O,如图,连接 OA,OB,OC,易知$\angle OBA=30°$,$\angle OCA=10°$,故 $AB=\sqrt{3}R$,

$AC=\dfrac{R}{\tan10°}$,所以$\dfrac{R}{\tan10°}-\sqrt{3}R=100$,解得

$R=\dfrac{100}{\dfrac{1}{\tan10°}-\sqrt{3}}=\dfrac{100\sin10°}{\cos10°-\sqrt{3}\sin10°}=\dfrac{100\sin10°}{2\sin(30°-10°)}=\dfrac{50\sin10°}{\sin20°}=\dfrac{50\sin10°}{2\sin10°\cos10°}=\dfrac{25}{\cos10°}\approx\dfrac{25}{0.985}$,则 $2R\approx50.76$. 故选 B.



4. B 【解析】设 $D_1E=h$,因为 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$,$\tan\beta=2$,$\tan\gamma=\sqrt{3}$,

所以 $A_1D_1=\dfrac{h}{\tan\alpha}=\dfrac{\sqrt{6}h}{3}$,$B_1D_1=\dfrac{h}{\tan\beta}=\dfrac{h}{2}$,

$C_1D_1=\dfrac{h}{\tan\gamma}=\dfrac{\sqrt{3}h}{3}$.

因为 $AC=20$,B 为 AC 的中点,

所以 $A_1C_1=20$,B_1 为 A_1C_1 的中点,

故 $A_1B_1=B_1C_1=10$.

在$\triangle A_1B_1D_1$ 中,由余弦定理得

$\cos\angle A_1B_1D_1=\dfrac{100+\dfrac{h^2}{4}-\dfrac{2h^2}{3}}{2\times10\times\dfrac{h}{2}}=\dfrac{100-\dfrac{5h^2}{12}}{10h}$,

在$\triangle C_1B_1D_1$ 中,由余弦定理得

$\cos\angle C_1B_1D_1=\dfrac{100+\dfrac{h^2}{4}-\dfrac{h^2}{3}}{2\times10\times\dfrac{h}{2}}=\dfrac{100-\dfrac{h^2}{12}}{10h}$,

由于$\angle A_1B_1D_1+\angle C_1B_1D_1=\pi$,

故 $\cos\angle A_1B_1D_1+\cos\angle C_1B_1D_1=0$,

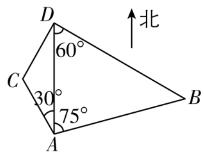
即$\dfrac{100-\dfrac{5h^2}{12}}{10h}+\dfrac{100-\dfrac{h^2}{12}}{10h}=0$,解得 $h=20$(负值舍去),

故建筑物的高度 $DE=h+2=22$(米).

故选 B.

5. AC 【解析】在$\triangle ABD$ 中,由已知得$\angle ADB=60°$,$\angle DAB=75°$,$AB=12\sqrt{6}$,

则 $B=45°$,由正弦定理得 $AD=\dfrac{AB\sin B}{\sin\angle ADB}=\dfrac{12\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=24$,所以



A 处与 D 处之间的距离为 24 n mile,故 A 正确;

在$\triangle ADC$ 中,由余弦定理得 $CD^2=AD^2+AC^2-2AD\cdot AC\cos30°$,且 $AC=8\sqrt{3}$,$AD=24$,解得 $CD=8\sqrt{3}$,所以灯塔 C 与 D 处之间的距离为 $8\sqrt{3}$ n mile,故 B 错误;

因为 $AC=CD=8\sqrt{3}$,所以$\angle CDA=\angle CAD=30°$,灯塔 C 在 D 处的西偏南 60°方向上,故 C 正确;

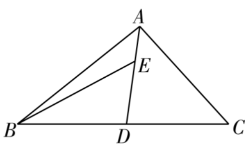
灯塔 B 在 D 处的南偏东 60°方向上,即 D 处在灯塔 B 的北偏西 60°方向上,故 D 错误. 故选 AC.

专题 7 平面向量

考向 24 平面向量的线性运算、基本定理及坐标运算

刷考点

1. A 【解析】因为 $2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}$,所以 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,

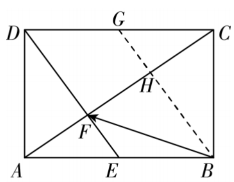


又 AD 为 BC 边上的中线,由平行四边形法则可得 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

所以 $\overrightarrow{AE}=\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,

所以 $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{6}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\overrightarrow{AB}=-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

2. D 【解析】如图,取 CD 边的中点 G,连接 BG 交 AC 于点 H.



$\because BE/\!/DG$,$BE=DG$,$\therefore$ 四边形 $BEDG$ 为平行四边形,$\therefore BG/\!/DE$.

又$\because E$ 为 AB 边的中点,$\therefore AF=FH$,同理可得 $CH=FH$,

$\therefore \overrightarrow{AF}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$.

$\therefore \overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$. 故选 D.

3. B 【解析】因为 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 共线,所以 $\lambda(2\lambda+1)-1=0$,解得 $\lambda=-1$ 或 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

若 $\lambda=-1$,则 $\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{c}$,所以 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 方向相反,不符合题意;

若 $\lambda=\dfrac{1}{2}$,则 $\boldsymbol{c}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$,所以 $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{c}$,所以 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{d}$ 方向相同,故 $\lambda=\dfrac{1}{2}$.

故选 B.