# 专题 4 导数及其应用

## 考向 13 导数的运算与几何意义

刷考点

1. C 【解析】由函数 $f(x)=ax^{a+b}$，可得 $f'(x)=a(a+b)x^{a+b-1}$，
因为 $f'(x)=12x^3$，所以 $\begin{cases}a(a+b)=12,\\ a+b-1=3,\end{cases}$ 解得 $a=3,b=1$. 故选 C.

2. C 【解析】因为 $f(x)=e^x-f'(1)x$，所以 $f'(x)=e^x-f'(1)$，
则 $f'(1)=e-f'(1)$，解得 $f'(1)=\frac{e}{2}$，所以
$f(x)=e^x-\frac{e}{2}x$，
则 $f(1)=\frac{e}{2}$，$f(2)=e^2-e$，$f'(2)=e^2-\frac{e}{2}$.
故选 C.

3. ABC 【解析】选项 A，$\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cdot x-\sin x\cdot(x)'}{x^2}=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，A 正确.
选项 B，$\left(x-\frac{1}{x}\right)'=(x)'-\left(\frac{1}{x}\right)'=1+\frac{1}{x^2}$，B 正确.
选项 C，$\log_2 3$ 为常数，求导结果为 0，C 正确.
选项 D，$(x^2e^x)'=(x^2)'\cdot e^x+x^2(e^x)'=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$，D 错误.
故选 ABC.

4. C 【解析】因为 $f(x)=xe^{2x-1}$，所以 $f'(x)=e^{2x-1}+2xe^{2x-1}=(2x+1)e^{2x-1}$. 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $P\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线斜率为 $k$，则 $k=f'\left(\frac{1}{2}\right)=2$，又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$，故所求切线方程为 $y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$，化简得 $4x-2y-1=0$. 故选 C.

5. A 【解析】由题意可得
$$f'(x)=\frac{(2e^{2x}+\cos x)(1+x^2)-2x(e^{2x}+\sin x)}{(1+x^2)^2}=\frac{(2x^2-2x+2)e^{2x}+x^2\cos x-2x\sin x+\cos x}{(1+x^2)^2},$$
所以 $f'(0)=3$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 $y=3x+1$，
令 $x=0$，则 $y=1$，令 $y=0$，则 $x=-\frac{1}{3}$，
则所求三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{6}$.
故选 A.

6. $y=0$（答案不唯一） 【解析】由题易得，直线 $l$ 的斜率一定存在，且点 $\left(\frac{3}{5},0\right)$ 不在曲线 $y=x^2(x+1)$ 上. 令 $y=f(x)=x^2(x+1)=x^3+x^2$，所以 $f'(x)=3x^2+2x$.
不妨设直线 $l$ 与曲线 $y=f(x)$ 的切点为 $(x_0,y_0)$，斜率为 $k$，
则 $\begin{cases}k=f'(x_0)=3x_0^2+2x_0,\\ k=\frac{y_0-0}{x_0-\frac{3}{5}},\\ y_0=x_0^3+x_0^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_0=0,\\ y_0=0,\\ k=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=1,\\ y_0=2,\\ k=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0=-\frac{3}{5},\\ y_0=\frac{18}{125},\\ k=-\frac{3}{25}.\end{cases}$
当 $x_0=0,y_0=0,k=0$ 时，直线 $l$ 的方程为 $y=0$；
当 $x_0=1,y_0=2,k=5$ 时，直线 $l$ 的方程为 $y-2=5(x-1)$，即 $5x-y-3=0$；
当 $x_0=-\frac{3}{5},y_0=\frac{18}{125},k=-\frac{3}{25}$ 时，直线 $l$ 的方程为 $y-\frac{18}{125}=-\frac{3}{25}\times\left(x+\frac{3}{5}\right)$，即 $15x+125y-9=0$.
综上，直线 $l$ 的方程为 $y=0$ 或 $5x-y-3=0$ 或 $15x+125y-9=0$.

7. B 【解析】由 $y=e^x$ 得 $y'=e^x$，又切点为 $(1,e)$，故切线 $l$ 的斜率为 $e$，因此切线 $l$ 的方程为 $y=ex$.
设直线 $l$ 与曲线 $y=a+\ln x$ 的切点为 $(x_0,ex_0)$，
对函数 $y=a+\ln x$ 求导得 $y'=\frac{1}{x}$，所以 $\frac{1}{x_0}=e$，可得切点为 $\left(\frac{1}{e},1\right)$，
所以 $a+\ln\frac{1}{e}=a-1=1$，解得 $a=2$.
故选 B.

8. C 【解析】设直线 $x+y+m=0$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 $(a,-a-m)$，与曲线 $y=g(x)$ 相切于点 $(b,-b-m)$，$b>0$.
由 $g(x)=x^2-3\ln x$ 知 $g'(x)=2x-\frac{3}{x}$，又两曲线的公切线斜率为 $-1$，则 $2b-\frac{3}{b}=-1$，
解得 $b=1$ 或 $b=-\frac{3}{2}$（舍去）.
所以 $1-3\ln 1=-1-m$，解得 $m=-2$.
由 $f(x)=x^3+nx-52$ 知 $f'(x)=3x^2+n$，又两曲线的公切线斜率为 $-1$，则 $3a^2+n=-1$，即 $n=-3a^2-1$，故 $a^3-(3a^2+1)a-52=-a+2$，整理得 $a^3=-27$，故 $a=-3$，所以 $n=-3a^2-1=-28$，故 $m-n=26$. 故选 C.

9. AB 【解析】对于 A，因为 $y=\ln x$，所以 $y'=\frac{1}{x}$，又 $P(x_1,\ln x_1)$，所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $P$ 处的切线的斜率 $k_1=\frac{1}{x_1}$，切线方程为 $y-\ln x_1=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，即 $y=\frac{1}{x_1}x-1+\ln x_1$.
因为 $y=e^x$，所以 $y'=e^x$，又 $Q(x_2,e^{x_2})$，所以曲线 $y=e^x$ 在点 $Q$ 处的切线的斜率 $k_2=e^{x_2}$，切线方程为 $y-e^{x_2}=e^{x_2}(x-x_2)$，即 $y=e^{x_2}x+e^{x_2}(1-x_2)$. 由题意可知两切线重合，
所以 $\begin{cases}\frac{1}{x_1}=e^{x_2},\\ \ln x_1-1=e^{x_2}(1-x_2),\end{cases}$ 所以 $x_1e^{x_2}=1$，
即 $x_1y_2=1$，故 A 正确；
对于 B，当 $x_1=1$ 时，两切线不重合，不符合题意，所以 $x_1\neq1$，
所以 $\frac{1}{x_1}(1-x_2)=e^{x_2}(1-x_2)=\ln x_1-1=\ln e^{-x_2}-1=-x_2-1$，所以 $-x_1x_2-x_1=1-x_2$，所以 $x_1x_2-x_2+x_1+1=0$，则 $\frac{x_1+1}{x_1-1}+x_2=0$，故 B 正确；
$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=x_1x_2+y_1y_2=x_1(-\ln x_1)+(\ln x_1)e^{x_2}=-x_1\ln x_1+\frac{\ln x_1}{x_1}=\left(\frac{1}{x_1}-x_1\right)\ln x_1$，
当 $0<x_1<1$ 时，$\frac{1}{x_1}-x_1>0$，$\ln x_1<0$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}<0$，当 $x_1>1$ 时，$\frac{1}{x_1}-x_1<0$，$\ln x_1>0$，则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}<0$，所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}<0$，故 C 错误；
对于 D，设 $f(x)=e^x(1-x)$，$x<0$，则 $f'(x)=-xe^x>0$，
所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，当 $x\to0^-$ 时，$f(x)\to1$，当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to0^+$，所以 $0<f(x)<1$，所以当 $x_2<0$ 时，$0<e^{x_2}(1-x_2)<1$，
所以 $0<\ln x_1-1<1$，所以 $e<x_1<e^2$，
记 $g(x)=x-\ln x\ (e<x<e^2)$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$，
所以函数 $g(x)$ 在 $(e,e^2)$ 上单调递增，当 $x\to e^2$ 时，$g(x)\to e^2-2$，则 $g(x)<e^2-2$，所以 $x_1+x_2=x_1-\ln x_1<e^2-2$，故 D 错误. 故选 AB.

10. $\ln 2$ 【解析】令 $f(x)=e^x+x$，则 $f'(x)=e^x+1$，所以曲线 $y=e^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率为 $f'(0)=2$，所以切线方程为 $y=2x+1$. 令 $g(x)=\ln(x+1)+a$，则 $g'(x)=\frac{1}{x+1}$. 因为直线 $y=2x+1$ 也是曲线 $y=g(x)$ 的切线，所以令 $\frac{1}{x+1}=2$，解得 $x=$

$-\frac{1}{2}$，则曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=2x+1$ 的切点坐标为 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$，所以 $0=a-\ln 2$，解得 $a=\ln 2$.

**11. B** 【解析】由 $f(x)=x^3-3x-2\Rightarrow f'(x)=3x^2-3$，

当点 $(2,0)$ 是切点时，此时切线的斜率为 $f'(2)=3\times2^2-3=9$，此时有一条切线；

当点 $(2,0)$ 不是切点时，设切点为 $(x_0,y_0)$，则切线的斜率为 $f'(x_0)=3x_0^2-3$，

切线方程为 $y-(x_0^3-3x_0-2)=(3x_0^2-3)\cdot(x-x_0)$，该切线过点 $(2,0)$，

于是有 $0-(x_0^3-3x_0-2)=(3x_0^2-3)(2-x_0)$

$\Rightarrow x_0^3-3x_0^2+4=0\Rightarrow x_0^3+1-3x_0^2+3=0$

$\Rightarrow (x_0+1)(x_0^2-x_0+1)-3(x_0+1)(x_0-1)=0\Rightarrow(x_0+1)(x_0-2)^2=0\Rightarrow x_0=-1$ 或 $x_0=2$（舍去），

综上所述，过点 $(2,0)$ 可作曲线 $f(x)=x^3-3x-2$ 的切线条数为 2，

故选 B.

**易错警示** 求“过某点”的切线方程时，先设出切点的坐标，然后利用导数求得切线的斜率，写出切线方程，最后利用已知点在切线上，代入方程求解；求“在某点处”的切线方程时，将已知点的横坐标代入导数公式中即可得切线的斜率，利用点斜式求得切线方程.

**12. C** 【解析】设切点的横坐标为 $x_0(x_0>0)$，切线斜率为 $k$，则 $k=f'(x_0)=1-\frac{a}{x_0}$.

点悟：切点处的导函数值即为该切线的斜率

当 $a\le0$ 时，$k=1-\frac{a}{x_0}>0$，设两条切线的斜率分别为 $k_1,k_2$，故不存在 $k_1k_2=-1$；当 $a>0$ 时，需满足 $\begin{cases}1-a<0,\\ 1-\frac{a}{6}>0,\\ (1-a)\left(1-\frac{a}{6}\right)<-1,\end{cases}$ 解得 $3<a<4$，故选 C.

**13.** $[0,e)\cup\left\{-\frac{5}{e^2}\right\}$ 【解析】设切点为 $(x_0,x_0e^{x_0})$，$f'(x)=(x+1)e^x$，

故切线方程为 $y-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(x-x_0)$，

将点 $(1,b)$ 的坐标代入切线方程得 $b-x_0e^{x_0}=(x_0+1)e^{x_0}(1-x_0)$，

化简得 $b=(x_0-x_0^2+1)e^{x_0}$.

过点 $(1,b)$ 作曲线 $y=xe^x$ 的切线有且仅有两条，则关于 $x_0$ 的方程 $b=(x_0-x_0^2+1)\cdot e^{x_0}$ 有两解，可转化为直线 $y=b$ 与函数 $y=(x-x^2+1)e^x$ 的图象有两个交点.

令 $g(x)=(x-x^2+1)e^x$，则

$g'(x)=(2-x-x^2)e^x=-(x-1)(x+2)e^x$，

当 $x<-2$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 上单调递减；

当 $-2<x<1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(-2,1)$ 上单调递增；

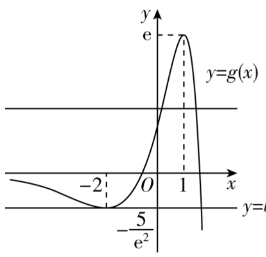
当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

故 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,-2)$，$(1,+\infty)$，单调递增区间为 $(-2,1)$.

当 $x\to-\infty$ 时，$g(x)\to0^-$，当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to-\infty$，

且 $g(1)=e$，$g(-2)=-\frac{5}{e^2}$，作出 $y=g(x)$ 的图象如图所示，

则由图象可知，当直线 $y=b$ 与 $y=g(x)$ 的图象有且仅有两个交点时，$b\in[0,e)\cup\left\{-\frac{5}{e^2}\right\}$.




## 考向 14　导数与函数的单调性、极值、最值

**刷考点**

**1. C** 【解析】$f(x)=x+2\cos x$，$x\in(0,\pi)$，则 $f'(x)=1-2\sin x$，$x\in(0,\pi)$，

令 $f'(x)>0$，即 $\sin x<\frac{1}{2}$，则由 $x\in(0,\pi)$，解得 $0<x<\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}<x<\pi$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，$\left(\frac{5\pi}{6},\pi\right)$. 故选 C.

**2. ABD** 【解析】$f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-1$，则 $f'(x)=e^x-x$，

令 $g(x)=e^x-x$，则 $g'(x)=e^x-1$.

令 $g'(x)<0$，得 $x<0$，令 $g'(x)>0$，得 $x>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x)\ge g(0)=1$，即 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $f(0)=0$.

若 $a+b>0$，则 $a>-b$，所以 $f(a)>f(-b)$，即 $f(a)-f(-b)>0$，故 B 正确；

$f(b)+f(-b)=e^b-\frac{1}{2}b^2-1+\left(e^{-b}-\frac{1}{2}b^2-1\right)=e^b+e^{-b}-b^2-2$，

令 $h(b)=e^b+e^{-b}-b^2-2$，则 $h'(b)=e^b-e^{-b}-2b$，令 $u(b)=h'(b)$，

则 $u'(b)=e^b+e^{-b}-2\ge0$，当且仅当 $e^b=e^{-b}$，即 $b=0$ 时等号成立，

所以 $h'(b)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，而 $h'(0)=0$，故 $h(b)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(b)\ge h(0)=0$，所以 $f(b)+f(-b)\ge0$，即 $f(a)+f(b)\ge f(a)-f(-b)>0$，故 A 正确；

若 $f(a)+f(b)<0$，则 $f(a)<-f(b)\le f(-b)$，所以 $a<-b$，即 $a+b<0$，故 D 正确；

设 $f(c)=-f(b)$，若 $c<a<-b$，则 $f(c)=-f(b)<f(a)$，满足 $f(a)+f(b)>0$，但 $a+b<0$，故 C 错误. 故选 ABD.

**3. B** 【解析】从题图可以看出过点 $(2,0)$ 的曲线为 $f(x)$ 的图象，过点 $(1,0)$ 的曲线为导函数 $f'(x)$ 的图象.

$g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x}$，

当 $x\in(-1,2-\sqrt{3})$ 时，$f'(x)-f(x)<0$，故 $g'(x)<0$，则 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 在 $(-1,2-\sqrt{3})$ 上单调递减；

当 $x\in[2-\sqrt{3},2]$ 时，$f'(x)-f(x)\ge0$ 且不恒为 0，故 $g'(x)\ge0$ 且不恒为 0，则 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 在 $[2-\sqrt{3},2]$ 上单调递增. 故 A，C，D 错误，B 正确.

故选 B.

**4. B** 【解析】函数 $g(x)=\ln x+\frac{1}{2}x^2-(b-1)x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且其导函数为 $g'(x)=\frac{1}{x}+x-(b-1)$. 由 $g(x)$ 存在单调递减区间知 $g'(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，即 $\frac{1}{x}+x-(b-1)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解. 因为函数 $g(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $x+\frac{1}{x}\ge2$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立. 要使 $\frac{1}{x}+x-(b-1)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解，只需 $2<b-1$，即 $b>3$，所以实数 $b$ 的取值范围是 $(3,+\infty)$.

**5. BD** 【解析】当 $a=0$ 时，$f(x)=3x^2-x+1$，显然不满足题意；

当 $a\ne0$ 时，依题意知，$f'(x)=3ax^2+6x-1$ 有两个不相等的零点，

所以 $\begin{cases}a\ne0,\\ \Delta=36+12a>0,\end{cases}$ 解得 $a>-3$ 且 $a\ne0$.

结合选项知，B，D 满足题意.

故选 BD.

**6. D** 【解析】对于函数 $y=x+\frac{a}{x}$，

若 $a\le0$，则 $y=x+\frac{a}{x}$ 在 $(0,2)$ 上单调递增，不满足题意，故 $a>0$.

由 $y=x+\frac{a}{x}$ 在 $(0,2)$ 上单调递减及对勾函数的性质可得 $2\leqslant\sqrt{a}$，解得 $a\geqslant 4$. 又根据 $y=x^2+\left(3-\frac{1}{2}a\right)x+1$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，可得 $-\frac{3-\frac{1}{2}a}{2}\leqslant 2$，解得 $a\leqslant 14$. 综上可得，实数 $a$ 的取值范围为 $[4,14]$. 故选 D.

**7.**【解】(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2+x-\ln x$，

且 $f'(x)=2x+1-\frac{1}{x}$，

令 $f'(x)=2x+1-\frac{1}{x}>0$，即 $\frac{2x^2+x-1}{x}>0$，

$\because x>0$，$\therefore 2x^2+x-1>0$，$\therefore x>\frac{1}{2}$，

令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$，

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

$\therefore$ 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 取得极小值，也是最小值，最小值为 $\frac{3}{4}+\ln 2$.

(2) $\because$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[1,3]$ 上单调递减，

$\therefore f'(x)=2ax+1-\frac{1}{x}=\frac{2ax^2+x-1}{x}\leqslant 0$ 在区间 $[1,3]$ 上恒成立.

即 $2ax^2+x-1\leqslant 0$ 在 $[1,3]$ 上恒成立，

则 $a\leqslant\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2x}$ 在 $[1,3]$ 上恒成立.

令 $h(t)=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}$，$t=\frac{1}{x}\in\left[\frac{1}{3},1\right]$，

显然 $h(t)$ 在区间 $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ 上单调递减，在区间 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上单调递增，

则 $h(t)_{\min}=h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$，所以 $a\leqslant-\frac{1}{8}$，

即实数 $a$ 的取值范围为 $\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$.

**8.**【解】(1) 由题可知 $f'(x)=(2-a)\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$，

则 $f'(0)=0$，又 $f(0)=0$，

故 $f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=0$.

(2) 令 $g(x)=f'(x)=(2-a)\sin x+4x\cos x-x^2\sin x$，

则 $g'(x)=(6-a)\cos x-6x\sin x-x^2\cos x$，$g'(0)=6-a$.

当 $a<6$ 时，$g'(0)>0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3\pi<0$，则由函数零点存在定理可知，$g'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在零点，

记其中最小的零点为 $x_0$，则 $g'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上恒为正，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，故 $f'(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，则 $f'(x)>f'(0)=0$，

故 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，不符合题意.

当 $a\geqslant 6$ 时，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有 $(6-a)\cdot\cos x\leqslant 0$，$-6x\sin x<0$，$-x^2\cos x<0$，

所以 $g'(x)<0$，故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，

即 $f'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，则 $f'(x)<f'(0)=0$，

故 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，符合题意.

综上所述，$a$ 的取值范围为 $[6,+\infty)$.

**9. A**【解析】因为 $1<m<n<2$，所以 $y=n^x$，$y=m^x$，$y=\log_n x$ 在 $(0,+\infty)$ 上均单调递增，

所以 $a=n^m>n^1>1$，$b=m^n>m^1>1$，$c=\log_n m<\log_n n=1$，即 $a>c$，$b>c$.

对于 $a$，$b$，构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

易知当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，即此时函数 $f(x)$ 单调递增，则 $f(m)<f(n)$，即 $\frac{\ln m}{m}<\frac{\ln n}{n}$，

所以 $n\ln m<m\ln n$，即 $\ln m^n<\ln n^m$，

因为 $y=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $m^n<n^m$，即 $b<a$.

综上，$a>b>c$.

故选 A.

**10. A**【解析】根据题意，$\tan x\cdot f'(x)>f(x)$，即 $\tan x\cdot f'(x)-f(x)>0$，即 $\frac{\sin x}{\cos x}\cdot f'(x)-f(x)>0$，即 $\frac{1}{\cos x}\cdot[\sin x\cdot f'(x)-\cos x\cdot f(x)]>0$，所以 $\frac{\sin^2 x}{\cos x}\cdot\left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]'>0$，分析可得，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\cos x>0$，则 $\left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]'>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$\cos x<0$，则 $\left[\frac{f(x)}{\sin x}\right]'<0$，所以函数 $g(x)=\frac{f(x)}{\sin x}$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减，所以 $\frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\frac{\pi}{6}}<\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\frac{\pi}{4}}<\frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\frac{\pi}{3}}$，即 $2f\left(\frac{\pi}{6}\right)<\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{4}\right)<\frac{2\sqrt{3}}{3}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，则 $\sqrt{6}f\left(\frac{\pi}{6}\right)<\sqrt{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right)<\sqrt{2}f\left(\frac{\pi}{3}\right)$，故 $a<b<c$，故选 A.

**11. D**【解析】因为 $2\,024^m=2\,025$，所以 $m=\log_{2\,024}2\,025>1$.

构造函数 $f(x)=x^m-x-1$，$x\in[1,2\,025]$，

关键点：逆向构造，求导之后分析单调性

则 $f'(x)=mx^{m-1}-1$.

令 $g(x)=f'(x)=mx^{m-1}-1$，$x\in[1,2\,025]$，则 $g'(x)=m(m-1)x^{m-2}>0$，

则 $g(x)=f'(x)$ 在 $[1,2\,025]$ 上单调递增，得 $f'(x)\geqslant f'(1)=m-1>0$，

则 $f(x)$ 在 $[1,2\,025]$ 上单调递增.

又注意到 $f(2\,024)=0$，$f(2\,023)=x$，$f(2\,025)=y$，则 $x<0<y$.

故选 D.

**12. B**【解析】$f'(x)=4\mathrm{e}^{2x}+2(4x-5)\mathrm{e}^{2x}=(8x-6)\mathrm{e}^{2x}$，

令 $f'(x)<0$，得 $x<\frac{3}{4}$，此时函数 $f(x)$ 单调递减；令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{3}{4}$，此时函数 $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 的极小值点为 $\frac{3}{4}$，无极大值点，

即极值点为 $\frac{3}{4}$. 故选 B.

**13. D**【解析】由题图知，当 $x\in(-\infty,-3)$ 时，$y>0$，$(x-1)^3<0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(-3,1)$ 时，$y<0$，$(x-1)^3<0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,3)$ 时，$y>0$，$(x-1)^3>0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$y<0$，$(x-1)^3>0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减. 所以函数 $f(x)$ 有极小值 $f(-3)$ 和极大值 $f(3)$. 故选 D.

**14. C**【解析】令 $g(x)=\frac{f(x)}{\mathrm{e}^x}$，

关键点：根据给出的含有导数式子的等式，利用导数的运算法则构造出相应函数

则 $g'(x)=\frac{f'(x)-f(x)}{\mathrm{e}^x}=\frac{x^2\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x}=x^2\mathrm{e}^x$，故 $f'(x)=f(x)+x^2\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^xg(x)+x^2\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^x[g(x)+x^2\mathrm{e}^x]$. 令 $h(x)=g(x)+x^2\mathrm{e}^x$，则 $h'(x)=g'(x)+(x^2+2x)\mathrm{e}^x=x^2\mathrm{e}^x+(x^2+2x)\mathrm{e}^x=2x(x+1)\mathrm{e}^x$，当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x\in(-1,0)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)$ 的极小值为 $h(0)=g(0)=\frac{f(0)}{\mathrm{e}^0}=0$，$h(x)$ 的极大值为 $h(-1)=g(-1)+\frac{1}{\mathrm{e}}>h(0)=0$，所以当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$h(x)$ 至多有一个变号零点，且在 $(-1,+\infty)$ 上无变号零点. 当 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上没有变号零点时，则 $h(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒

成立且不恒为0，即 $f'(x)=e^xh(x)\geqslant 0$ 在 **R** 上恒成立且不恒为0，则 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，$f(x)$ 无极值点. 当 $h(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 上有一个变号零点时，可设为 $x_0$，则当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$h(x)<0$，$f'(x)=e^xh(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)\geqslant 0$ 且不恒为0，$f'(x)=e^xh(x)\geqslant 0$ 且不恒为0，$f(x)$ 单调递增，所以此时 $f(x)$ 有且只有一个极小值点 $x_0$，无极大值点. 综上，$f(x)$ 最多有一个极小值点，无极大值点. 故选 C.

**15. D** 【解析】对函数 $f(x)=\frac{e^x}{x^2+bx+1}$ 求导可得 $f'(x)=\frac{e^x[x^2+(b-2)x+1-b]}{(x^2+bx+1)^2}$，

由题意可得 $f'(2)=0$，则 $4+2(b-2)+1-b=0$，解得 $b=-1$，

所以 $f(x)=\frac{e^x}{x^2-x+1}$，则 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$，$f(x)$ 的定义域为 **R**，

$f'(x)=\frac{e^x(x^2-3x+2)}{(x^2-x+1)^2}=\frac{e^x(x-1)(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$ 或 $x=2$，

可得 $f'(x)$，$f(x)$ 随 $x$ 变化的情况如下表：

| $x$ | $(-\infty,1)$ | 1 | $(1,2)$ | 2 | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | 极大值 | ↘ | 极小值 | ↗ |

则函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值，符合题意，故 $f(x)$ 的极大值为 $f(1)=\frac{e^1}{1-1+1}=e$. 故选 D.

**16. C** 【解析】$f(x)=ax^2-2x+b\ln x\ (ab\neq 0)$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$f'(x)=2ax-2+\frac{b}{x}=\frac{2ax^2-2x+b}{x}$，且 $ab\neq 0$，

因为函数 $f(x)$ 有唯一极值点，所以 $g(x)=2ax^2-2x+b=0$ 有唯一正根.

若 $\Delta=4-8ab\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在定义域内单调，不存在极值点，不符合题意；

若 $\Delta=4-8ab>0$，即 $ab<\frac{1}{2}$，则 $g(x)=2ax^2-2x+b=0$ 必有一正一负两个实数根，

根据一元二次方程根与系数的关系可知，$\frac{b}{2a}<0$，所以 $ab<0$.

故选 C.

**17.** $(0,1)\cup(1,e^{\frac{1}{e}})$ 【解析】令 $f'(x)=a^x\ln a-\ln x=0$，得 $e^{x\ln a}(x\ln a)=(\ln x)e^{\ln x}\ (x>0)$.

**关键点：** 通过对数与指数的运算转化成等式两边有相同结构的式子

令 $g(m)=me^m$，则 $g(x\ln a)=g(\ln x)$，$g'(m)=(1+m)e^m$. 当 $m<-1$ 时，$g'(m)<0$，$g(m)$ 单调递减；当 $m>-1$ 时，$g'(m)>0$，$g(m)$ 单调递增. 当 $a>1$ 时，$x\ln a>0$，又 $g(m)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且当 $m\in(0,+\infty)$ 时，$g(m)>0$，当 $m\in(-\infty,0)$ 时，$g(m)<0$，故由 $g(x\ln a)=g(\ln x)>0$，可得 $\ln x>0$，即 $x>1$，且 $x\ln a=\ln x$，即 $\ln a=\frac{\ln x}{x}\ (x>1)$ 有实数根. 令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}\ (x>1)$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}\ (x>1)$，当 $1<x<e$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，当 $x>e$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，所以当 $x=e$ 时，$h(x)$ 取得最大值 $\frac{1}{e}$，又当 $x\to 1$ 时，$h(x)\to 0$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to 0^+$，所以若 $f(x)$ 存在极大值点，则 $0<\ln a<\frac{1}{e}$，即 $1<a<e^{\frac{1}{e}}$ 符合题意. 当 $0<a<1$ 时，若 $x\to 0$，则 $f'(x)\to+\infty$，若 $x\to+\infty$，则 $f'(x)\to-\infty$，此时 $f'(x)$ 必存在一个零点，且这个零点的左边导函数值为正数，右边导函数值为负数，该零点即为极大值点，故 $0<a<1$ 符合.

**易错点：** 在判断函数的极值点时一定要注意极值点左、右的导函数值符号不同，即极值点左、右的函数单调性不同

综上，实数 $a$ 的取值范围是 $(0,1)\cup(1,e^{\frac{1}{e}})$.

**18.** 【解】(1) $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f'(x)=ae^x-2x$，由题意知 $f'(0)=0$，解得 $a=0$，

经验证，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，

此时 $g(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2$，定义域为 **R**，且 $g'(x)=3x^2-3x$，

令 $g'(x)>0$，得 $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$，

令 $g'(x)<0$，得 $x\in(0,1)$，

所以函数 $g(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,0)$，$(1,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,1)$.

(2) $f'(x)=ae^x-2x$，令 $h(x)=f'(x)=ae^x-2x$，$x\in$ **R**，则 $h'(x)=ae^x-2$.

①当 $a<0$ 时，$h'(x)<0$ 在 **R** 上恒成立，$f'(x)$ 单调递减.

又因为 $f'(a)=a(e^a-2)>0$，$f'(0)=a<0$，

所以存在 $x_0\in(a,0)$，使得 $f'(x_0)=0$，

易知 $x_0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点.

$g'(x)=3x^2-(a+3)x+a=(3x-a)(x-1)$.

令 $g'(x)=0$，解得 $x=\frac{a}{3}$ 或 $x=1$，

易知 $g(x)$ 的极大值点为 $\frac{a}{3}$，极小值点为1，

由题意可知，$x_0<\frac{a}{3}$ 成立，则有 $f'\left(\frac{a}{3}\right)<f'(x_0)=0$，解得 $3\ln\frac{2}{3}<a<0$.

②当 $a=0$ 时，由(1)及①可知，0既是函数 $f(x)$ 的极大值点，又是 $g(x)$ 的极大值点，不符合题意，所以 $a=0$ 舍去.

③当 $a>0$ 时，$h'(x)>0$ 的解集为 $\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$，$h'(x)<0$ 的解集为 $\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$，

所以 $f'(x)$ 在 $\left(\ln\frac{2}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\infty,\ln\frac{2}{a}\right)$ 上单调递减.

因为 $f(x)$ 有极值点，且当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$，当 $x\to-\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$，

所以 $f'(x)$ 有两个零点，

所以 $f'\left(\ln\frac{2}{a}\right)=2-2\ln\frac{2}{a}<0$，解得 $0<a<\frac{2}{e}$，

$f'\left(\frac{2}{a}\right)=ae^{\frac{2}{a}}-\frac{4}{a}$，令 $\frac{2}{a}=t$，$t\in(e,+\infty)$，

则 $f'\left(\frac{2}{a}\right)=\frac{2(e^t-t^2)}{t}$，令 $m(t)=e^t-t^2$，

所以 $m'(t)=e^t-2t$，

因为 $t\in(e,+\infty)$，所以 $m'(t)>0$，

即 $m(t)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递增，又因为 $m(e)>0$，所以 $m(t)>0$ 在 $(e,+\infty)$ 上恒成立，所以 $f'\left(\frac{2}{a}\right)>0$，

又因为 $f'(1)=ae-2<0$，

所以存在 $x_1\in\left(1,\frac{2}{a}\right)$，使得 $f'(x_1)=0$，

即 $x_1$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，

易知1是 $g(x)$ 的极值点，而 $x_1>1$，不符合题意，

所以 $a>0$ 舍去.

综上，实数 $a$ 的取值范围为 $\left(3\ln\frac{2}{3},0\right)$.

**19. B** 【解析】因为 $f(-x)=e^{|x|}+\cos x+1=f(x)$，且 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，所以 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=e^x+\cos x+1$，$f'(x)=e^x-\sin x$.

易知当 $x\geqslant 0$ 时，$e^x\geqslant 1$，$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，则 $f'(x)=e^x-\sin x\geqslant 0$ 且不恒为0，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增. 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)$ 在 $[-\pi,0)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\max}=f(-\pi)=f(\pi)=e^{\pi}$，$f(x)_{\min}=f(0)=3$. 故选 B.

**20. 5** 【解析】令 $t=\ln\frac{x}{2}$，则 $t\in$ **R**，则 $x=2e^t$，

令 $h(t)=(2e^t)^2+16t^2-8t+1$，所以 $h'(t)=8e^{2t}+32t-8$，

令 $g(t)=8e^{2t}+32t-8$，则 $g'(t)=16e^{2t}+32>0$，

所以 $g(t)$ 在 **R** 上为增函数，即 $h'(t)$ 在 **R** 上为增函数，又 $h'(0)=8e^0-8=0$，

则当 $t<0$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

当 $t>0$ 时,$h'(t)>0$,$h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

所以函数 $f(x)_{\min}=h(t)_{\min}=h(0)=(2e^0)^2+16\times0^2-8\times0+1=5$.

21.【解】(1)易知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=x-4+\frac{3}{x}=\frac{(x-1)(x-3)}{x}$,

令 $f'(x)>0$, 得 $0<x<1$ 或 $x>3$;

令 $f'(x)<0$, 得 $1<x<3$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$, $(3,+\infty)$, 单调递减区间为 $(1,3)$.

(2)由(1)得,当 $\frac{1}{e}<x<1$ 时,函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $1<x<e$ 时,函数 $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=-\frac{7}{2}$.

22. D 【解析】函数 $f(x)=3x^2-2\ln x+(a-1)\cdot x+3$,求导得 $f'(x)=6x-\frac{2}{x}+a-1=\frac{6x^2+(a-1)x-2}{x}$,

由 $f(x)=3x^2-2\ln x+(a-1)x+3$ 在区间 $(1,2)$ 上有最小值,

得 $f'(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上有变号零点且在零点两侧的函数值左负右正.

令 $h(x)=6x^2+(a-1)x-2$, $h(0)=-2<0$,

则 $h(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上有变号零点且在零点两侧的函数值左负右正,只需

$\begin{cases}\Delta=(a-1)^2+4\times6\times2>0,\\ h(1)=6+a-1-2<0,\\ h(2)=6\times4+2(a-1)-2>0,\end{cases}$ 解得 $-10<a<-3$,

所以实数 $a$ 的取值范围是 $(-10,-3)$.

故选 D.

23. $\frac{1}{e}$ 【解析】由题意知 $f(x)=ax+xe^{-ax}-\ln x-1=e^{\ln x-ax}+ax-\ln x-1(x>0)$. 令 $t=\ln x-ax$,则原函数变为 $y=e^t-t-1$.

令 $g(t)=e^t-t-1$,

方法：构造函数并利用其单调性解决问题时，根据函数与方程的思想，利用数形结合求参数的值或取值范围是求解此类问题常用的方法，要掌握函数构造过程中需要的变形技巧

则 $g'(t)=e^t-1$,易知当 $t<0$ 时,$g'(t)<0$;当 $t>0$ 时,$g'(t)>0$,所以 $g(t)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,即对于 $\forall t\in\mathbf{R}$, $g(t)\geqslant g(0)=0$, $g(t)_{\min}=0$,

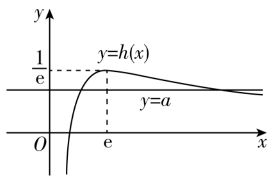
所以当 $t=\ln x-ax=0$ 时,$y$ 取得最小值 0,

即只需方程 $a=\frac{\ln x}{x}$ 有解即可,即直线 $y=a$ 与函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的图象有交点.

关键点：根据方程有解求参数的值或取值范围问题，关键是由方程向函数的转化，把方程有解问题转化为函数图象有交点问题

令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$, 则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,

当 $x\in(0,e)$ 时,$h'(x)>0$;当 $x\in(e,+\infty)$ 时,$h'(x)<0$,故 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增,在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{1}{e}$,




$x\to0^+$ 时,$h(x)\to-\infty$, $x\to+\infty$ 时,$h(x)\to0^+$,在同一平面直角坐标系中画出直线 $y=a$ 与函数 $y=h(x)$ 的大致图象如图所示.

由图可知当 $a\leqslant\frac{1}{e}$ 时满足题意,所以实数 $a$ 的最大值为 $\frac{1}{e}$.

24.【解】(1)∵ 当 $a=1$ 时 $f(x)=e^x-2x-1$,

∴ $f'(x)=e^x-2$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=\ln 2$.

当 $x\in(-1,\ln 2)$ 时,$f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;当 $x\in(\ln 2,2)$ 时,$f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

∴ 当 $x=\ln 2$ 时,$f(x)_{\min}=1-2\ln 2$.

又∵ $f(-1)=e^{-1}+1$, $f(2)=e^2-5$,∴ $f(2)>f(-1)$,

∴ $f(x)_{\max}=e^2-5$, $f(x)_{\min}=1-2\ln 2$.

(2)$f'(x)=e^x-2a$,当 $a\leqslant0$ 时, $f'(x)>0$ 恒成立,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,无最小值,不满足题意.

当 $a>0$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=\ln(2a)$.

当 $x<\ln(2a)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;当 $x>\ln(2a)$ 时,$f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增.

∴ 当 $x=\ln(2a)$ 时, $f(x)_{\min}=2a[1-\ln(2a)]-1=0$.

令 $h(x)=x(1-\ln x)-1(x>0)$, $h'(x)=-\ln x$,

令 $h'(x)=0$,得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时,$h'(x)>0$, $h(x)$ 单调递增;

当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减.

∴ $h(x)_{\max}=h(1)=0$,∴ $2a=1$,

即 $a=\frac{1}{2}$,故实数 $a$ 的值为 $\frac{1}{2}$.

## 刷上分

1. C 【解析】分析易知,函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 当 $x\leqslant0$ 时,$f(x)=ax+\cos x$,则 $f'(x)=a-\sin x\geqslant0$ 恒成立,则 $a\geqslant1$;

当 $x>0$ 时,由 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-a+4$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,得 $f'(x)=x^2+2ax\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,则 $-a\leqslant0$,即 $a\geqslant0$.

又由 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,可得 $-a+4\geqslant1$,解得 $a\leqslant3$.

综上可得,实数 $a$ 的取值范围是 $[1,3]$.

故选 C.

2. D 【解析】构造函数 $f(x)=\frac{\ln x}{ex}(x>0)$,可得 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{ex^2}$,

当 $x\in(e,+\infty)$ 时,$f'(x)<0$,因此 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

又 $a=\frac{1}{e}\cdot\frac{\ln 2}{2}=\frac{1}{e}\cdot\frac{\ln 4}{4}=f(4)$, $b=\frac{1}{e}\cdot\frac{\ln e}{e}=f(e)$, $c=\frac{1}{e}\cdot\frac{\ln(3e^2)}{3e^2}=f(3e^2)$,

则由 $e<4<3e^2$,得 $f(e)>f(4)>f(3e^2)$,即 $b>a>c$. 故选 D.

3. C 【解析】$f'(x)=(x-c)^2+2x(x-c)=(x-c)(3x-c)$,

由题意可知 $f'(1)=0$,则 $c=1$ 或 $c=3$.

当 $c=1$ 时,令 $f'(x)=(x-1)(3x-1)=0$, 得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{3}$,

令 $f'(x)>0$,得 $x<\frac{1}{3}$ 或 $x>1$,令 $f'(x)<0$, 得 $\frac{1}{3}<x<1$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$, $(1,+\infty)$,单调递减区间是 $\left(\frac{1}{3},1\right)$,

所以 1 是极小值点,故 $c\neq1$.

当 $c=3$ 时,令 $f'(x)=(x-3)(3x-3)=0$, 得 $x=1$ 或 $x=3$,

令 $f'(x)>0$,得 $x<1$ 或 $x>3$,令 $f'(x)<0$,得 $1<x<3$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,1)$, $(3,+\infty)$,单调递减区间是 $(1,3)$,

所以 1 是极大值点,故 $c=3$.

故选 C.

4. C 【解析】$f(x)=ax^2-2x+\ln x(x>0)$,求导得 $f'(x)=2ax-2+\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-2x+1}{x}$,

由函数 $f(x)$ 有两个不同的极值点 $x_1$, $x_2$, 得方程 $2ax^2-2x+1=0$ 有两个不相等的正实数根,

则 $\begin{cases}\Delta=4-8a>0,\\ x_1+x_2=\frac{1}{a}>0,\\ x_1x_2=\frac{1}{2a}>0,\end{cases}$ 解得 $0<a<\frac{1}{2}$.

$f(x_1)+f(x_2)=ax_1^2-2x_1+\ln x_1+ax_2^2-2x_2+\ln x_2=a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]-2(x_1+x_2)+\ln(x_1x_2)=-\frac{1}{a}-1-\ln(2a)$,

令 $h(a)=-\frac{1}{a}-1-\ln(2a)\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$,求导得 $h'(a)=\frac{1-a}{a^2}>0$,

则函数 $h(a)=-\frac{1}{a}-1-\ln(2a)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,当 $a\to\frac{1}{2}$ 时,$h(a)\to-3$,当 $a\to$

0 时，$h(a)\to-\infty$，则 $h(a)<-3$，

所以 $f(x_1)+f(x_2)$ 的取值范围为 $(-\infty,-3)$. 故选 C.

**5. ABD**　【解析】对于 A 选项，设三次函数 $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D(A\neq0)$，则 $f'(x)=3Ax^2+2Bx+C$，

再求导得到 $f''(x)=6Ax+2B$. 令 $f''(x)=0$，

即 $6Ax+2B=0$，解得 $x=-\dfrac{B}{3A}$，

所以任何一个三次函数均有“拐点”，A 正确.

对于 B 选项，$f(x)=2x\cos x-1$，$f'(x)=2\cos x-2x\sin x$，$f''(x)=-2\sin x-(2\sin x+2x\cos x)=-4\sin x-2x\cos x$.

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x>0$，$\cos x>0$，

$f''(x)<0$，则函数 $f'(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，所以函数 $f(x)$ 是区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的“上凸函数”，B 正确.

对于 C 选项，$f(x)=x^3-4ax^2-3a^2x+2$，$f'(x)=3x^2-8ax-3a^2$，$f''(x)=6x-8a$.

令 $f''(x)=0$，得 $x=\dfrac{4}{3}a$，因为“拐点”在 $y$ 轴右侧，所以 $\dfrac{4}{3}a>0$，即 $a>0$.

令 $f'(x)<0$ 可得 $(3x+a)(x-3a)<0$，所以 $-\dfrac{a}{3}<x<3a$，

则 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(-\dfrac{a}{3},3a\right)$，C 错误.

对于 D 选项，$f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}ax^2+ax-ax\ln x(a>0)$，

$f'(x)=-x^2+ax+a-a\ln x-a=-x^2+ax-a\ln x$，

$f''(x)=-2x+a-\dfrac{a}{x}(x>0)$.

令 $f''(x)=0$，则 $-2x+a-\dfrac{a}{x}=0$ 在 $x>0$ 上有解，即 $2x^2-ax+a=0(a>0)$ 有正实数解，

则 $\begin{cases}\Delta=a^2-8a\geqslant0,\\ \dfrac{a}{2}>0,\end{cases}$ 解得 $a\geqslant8$.

又函数 $f(x)$ 为定义域上的“上凸函数”，所以 $f'(x)$ 在定义域上单调递减，

则 $f''(x)=-2x+a-\dfrac{a}{x}\leqslant0(a\geqslant8,x>0)$ 恒成立且不恒为 0，即 $f''(x)=-\left(2x+\dfrac{a}{x}\right)+a\leqslant0(a\geqslant8,x>0)$ 恒成立，则 $-\left(2x+\dfrac{a}{x}\right)+a\leqslant-2\cdot\sqrt{2x\cdot\dfrac{a}{x}}+a\leqslant0(a\geqslant8,x>0)$，

即 $-2\sqrt{2a}+a\leqslant0$，当且仅当 $x=\dfrac{\sqrt{2a}}{2}$ 时等号成立，

即 $a^2-8a\leqslant0$，解得 $0\leqslant a\leqslant8$，由于 $a\geqslant8$ 保证“拐点”存在，则 $a=8$. D 正确.

故选 ABD.

**6. $\dfrac{31}{6}\pi-2+\sqrt{3}$**　【解析】由 $x_1<x_2<x_3$，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，

得 $-\dfrac{1}{2}x_1-1=\cos x_2=\cos x_3$，则 $-4\leqslant x_1<0$，$0\leqslant x_2<\pi<x_3\leqslant2\pi$，

故 $x_1=-2-2\cos x_2$，$x_2+x_3=2\pi$，

关键点：借助余弦函数图象的对称性，得到 $x_2+x_3=2\pi$

则 $x_1+2x_2+3x_3=-2-2\cos x_2+3(x_2+x_3)-x_2=-2\cos x_2-x_2+6\pi-2$.

令 $g(x)=-2\cos x-x+6\pi-2(0\leqslant x<\pi)$，

$g'(x)=2\sin x-1$，则当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{6},\pi\right)$ 时，$g'(x)<0$，

当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 时，$g'(x)>0$，

故 $g(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\left(\dfrac{5\pi}{6},\pi\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 上单调递增，

又 $g(0)=-2-0+6\pi-2=6\pi-4$，

$g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=-2\cos\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{5\pi}{6}+6\pi-2=\dfrac{31}{6}\pi-2+\sqrt{3}$，

$g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)-g(0)=\dfrac{31}{6}\pi-2+\sqrt{3}-(6\pi-4)=2+\sqrt{3}-\dfrac{5}{6}\pi>2+1.5-\dfrac{5}{6}\times3.6=0.5>0$，

即 $g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)>g(0)$，即 $g(x)_{\max}=g\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)=\dfrac{31}{6}\pi-2+\sqrt{3}$，

则 $x_1+2x_2+3x_3$ 的最大值为 $\dfrac{31}{6}\pi-2+\sqrt{3}$.

**7.【解】**(1) 因为 $f(x)=ax-\ln x$，$x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right]$，

所以 $f'(x)=a-\dfrac{1}{x}$，$\dfrac{1}{x}\in[1,\mathrm{e}]$.

①若 $a\leqslant1$，则 $f'(x)\leqslant0$ 且不恒为 0，函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right]$ 上单调递减，则 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=a=\dfrac{3}{2}$，不满足 $a\leqslant1$；

②若 $1<a<\mathrm{e}$，

令 $f'(x)>0$，解得 $x\in\left(\dfrac{1}{a},1\right]$，故函数 $f(x)$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},1\right]$ 上单调递增，

令 $f'(x)<0$，解得 $x\in\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\dfrac{1}{a}\right)$，故函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递减，

故 $f(x)$ 的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=1-\ln\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{2}$，即 $\ln a=\dfrac{1}{2}$，解得 $a=\sqrt{\mathrm{e}}$，满足 $1<a<\mathrm{e}$；

③若 $a\geqslant\mathrm{e}$，则 $f'(x)\geqslant0$ 且不恒为 0，函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right]$ 上单调递增，$f(x)$ 的最小值为 $f\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)=\dfrac{a}{\mathrm{e}}+1=\dfrac{3}{2}$，解得 $a=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，不满足 $a\geqslant\mathrm{e}$.

综上所述，$a=\sqrt{\mathrm{e}}$.

(2) 若 $a=0$，则 $f(x)=-\ln x$，$g(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{f(x)-1}{x}=\mathrm{e}^x-\dfrac{\ln x+1}{x}$，定义域为 $(0,+\infty)$，

$g'(x)=\mathrm{e}^x+\dfrac{\ln x}{x^2}=\dfrac{x^2\mathrm{e}^x+\ln x}{x^2}$，

令 $h(x)=x^2\mathrm{e}^x+\ln x(x>0)$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^x\cdot(x^2+2x)+\dfrac{1}{x}=x\mathrm{e}^x(x+2)+\dfrac{1}{x}>0$，

故 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}\sqrt{\mathrm{e}}-\ln2<0$，$h(1)=\mathrm{e}>0$，

故存在 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $g'(x_0)=0$，也即 $x_0^2\mathrm{e}^{x_0}+\ln x_0=0$，

且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)<0$，即 $g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，即 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)$ 的最小值为 $g(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{\ln x_0+1}{x_0}$.

又 $x_0^2\mathrm{e}^{x_0}+\ln x_0=0$，$x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，则 $x_0\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\ln\dfrac{1}{x_0}$，令 $m(x)=x\mathrm{e}^x$，$x>0$，

则 $m'(x)=\mathrm{e}^x(x+1)>0$，故 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $x_0\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}\ln\dfrac{1}{x_0}$，也即 $m(x_0)=m\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)$，

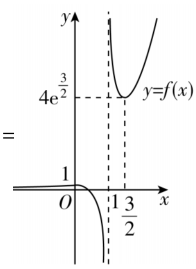
又 $x_0>0$，$\ln\dfrac{1}{x_0}>0$，故 $x_0=\ln\dfrac{1}{x_0}$，即 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，

则 $g(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{\ln x_0+1}{x_0}=\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{\ln x_0+1}{x_0}=-\dfrac{\ln x_0}{x_0}=\dfrac{\ln\dfrac{1}{x_0}}{x_0}=\dfrac{\ln\mathrm{e}^{x_0}}{x_0}=1$.

故 $g(x)$ 的最小值为 1.

## 考向 15　导数与函数的零点

**刷考点**



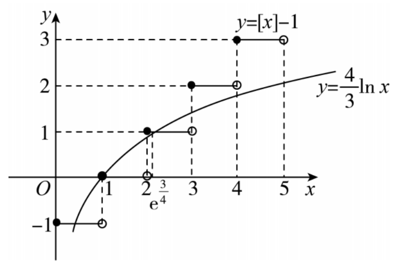

**1. A**　【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. $f'(x)=\dfrac{(2x+1)(x-1)\mathrm{e}^x-(2x-1)\mathrm{e}^x}{(x-1)^2}=\dfrac{x\mathrm{e}^x(2x-3)}{(x-1)^2}$. 令 $f'(x)>0$，可得 $x<0$ 或 $x>\dfrac{3}{2}$；

令 $f'(x)<0$，可得 $0<x<1$ 或 $1<x<\frac{3}{2}$. 因此函数 $f(x)=\frac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，且当 $x<0$ 时，$f(x)>0$，当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取极大值 $f(0)=1$，当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 取极小值 $f\left(\frac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}$. 又因为当 $x\to1^+$ 时，$y\to+\infty$；当 $x\to1^-$ 时，$y\to-\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$，故作出函数 $f(x)=\frac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 的大致图象如图所示.

因为 $1<4e<4e^{\frac{3}{2}}$，所以直线 $y=4e$ 与 $f(x)=\frac{e^x(2x-1)}{x-1}$ 的图象无交点，故方程 $f(x)=4e$ 无解，故选 A.

2. C 【解析】令 $f(x)=4\ln x-3[x]+3=0$ $(x>0)$，则 $\frac{4}{3}\ln x=[x]-1$，故函数 $f(x)$ 的零点问题转化为 $y=\frac{4}{3}\ln x$ 与 $y=[x]-1$ 的图象的交点问题，且 $e^3>16$，即 $e^{\frac{3}{4}}>2$，其大致图象如图所示.

由图可得，当 $0<x<5$ 时，$y=\frac{4}{3}\ln x$ 与 $y=[x]-1$ 的图象有 3 个交点，即当 $0<x<5$ 时，$f(x)$ 有 3 个零点；




当 $x\geq5$ 时，$f(x)=4\ln x-3[x]+3<4\ln x-3(x-1)+3=4\ln x-3x+6$. 令 $g(x)=4\ln x-3x+6(x\geq5)$，则 $g'(x)=\frac{4-3x}{x}<0$ 在 $[5,+\infty)$ 上恒成立，则 $g(x)$ 在 $[5,+\infty)$ 上单调递减，故 $g(x)\leq g(5)=4\ln5-9=\ln\frac{625}{e^9}<0$，

可得当 $x\geq5$ 时，$f(x)<g(x)<0$，即当 $x\geq5$ 时，函数 $f(x)$ 无零点.

综上所述，函数 $f(x)$ 有 3 个零点. 故选 C.

3. AC 【解析】$f(x)+f(-x)=x^3+bx^2+cx+2+(-x)^3+b(-x)^2+c(-x)+2=2bx^2+4$，

当 $b=0$ 时，有 $f(x)+f(-x)=4$，

故存在实数 $b=0$，使得 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,2)$ 对称，故 A 正确；

当 $b=0,c<0$ 时，$f'(x)=3x^2+c$，当 $x<-\sqrt{-\frac{c}{3}}$ 或 $x>\sqrt{-\frac{c}{3}}$ 时，$f'(x)>0$，

当 $-\sqrt{-\frac{c}{3}}<x<\sqrt{-\frac{c}{3}}$ 时，$f'(x)<0$，

故 $-\sqrt{-\frac{c}{3}}$，$\sqrt{-\frac{c}{3}}$ 分别是 $f(x)$ 的极大值点和极小值点，故 $f(x)$ 的所有极值之和为 $f\left(-\sqrt{-\frac{c}{3}}\right)+f\left(\sqrt{-\frac{c}{3}}\right)=\left(-\sqrt{-\frac{c}{3}}\right)^3+c\left(-\sqrt{-\frac{c}{3}}\right)+2+\left(\sqrt{-\frac{c}{3}}\right)^3+c\left(\sqrt{-\frac{c}{3}}\right)+2=4$，故 B 错误；

由于 $y=(x+1)(x-1)(x-2)=(x^2-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$，故令 $b=-2,c=-1$，

此时 $f(x)=x^3-2x^2-x+2=(x+1)(x-1)\cdot(x-2)$ 有三个零点 $-1,1,2$，故 C 正确；

$f'(x)=3x^2+2bx+c$，当 $b^2\leq3c$ 时，此时 $\Delta=4b^2-12c\leq0$，则 $f'(x)\geq0$ 且不恒为 0，

故 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，此时 $f(x)$ 至多只有一个零点，故 D 错误.

故选 AC.

4. (1)【解】由题意得，$f(1)=e$，$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，$\therefore f'(1)=0$，

$\therefore$ 切线 $l$ 的方程为 $y=e$.

(2)【证明】当 $x>0$ 时，要证 $f(x)>x$，只需证 $e^x-x^2>0$，

令 $g(x)=e^x-x^2(x>0)$，则 $g'(x)=e^x-2x$，

令 $h(x)=g'(x)=e^x-2x$，则 $h'(x)=e^x-2$，

由 $h'(x)>0$ 得，$x>\ln 2$，由 $h'(x)<0$ 得，$0<x<\ln 2$，

$\therefore h(x)$ 在 $(0,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)\geq h(\ln 2)=e^{\ln 2}-2\ln 2=2(1-\ln 2)>0$，即 $g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

当 $x\to0$ 时，$g(x)\to1$，$\therefore g(x)>1>0$，

$\therefore e^x-x^2>0$，即 $f(x)>x$.

(3)【解】由 $f(x)-bx=0$ 得，$b=\frac{e^x}{x^2}$.

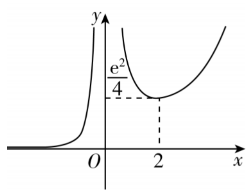
转化为直线 $y=b$ 与 $\varphi(x)=\frac{e^x}{x^2}$ 的图象的交点个数问题

令 $\varphi(x)=\frac{e^x}{x^2}$，则 $\varphi'(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$，

由 $\varphi'(x)>0$ 得 $x>2$ 或 $x<0$，由 $\varphi'(x)<0$ 得 $0<x<2$，

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

当 $x\to-\infty$ 时，$\varphi(x)\to0^+$，当 $x\to0^-$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，当 $x\to0^+$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to+\infty$，当 $x=2$ 时，$\varphi(x)$ 取极小值 $\varphi(2)=\frac{e^2}{4}$，则作出 $y=\varphi(x)$ 的大致图象如图所示.




由图可知，当 $b\in(-\infty,0]$ 时，直线 $y=b$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图象没有交点，函数无零点；

当 $b\in\left(0,\frac{e^2}{4}\right)$ 时，直线 $y=b$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图象有 1 个交点，函数有 1 个零点；

当 $b=\frac{e^2}{4}$ 时，直线 $y=b$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图象有 2 个交点，函数有 2 个零点；

当 $b\in\left(\frac{e^2}{4},+\infty\right)$ 时，直线 $y=b$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图象有 3 个交点，函数有 3 个零点.

综上所述，当 $b\in(-\infty,0]$ 时，函数无零点；当 $b\in\left(0,\frac{e^2}{4}\right)$ 时，函数有 1 个零点；当 $b=\frac{e^2}{4}$ 时，函数有 2 个零点；当 $b\in\left(\frac{e^2}{4},+\infty\right)$ 时，函数有 3 个零点.

5.【解】(1) 由函数 $f(x)=ax^2-ax-\frac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}$，可得 $f'(x)=2ax-a+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}$.

因为当 $x=1$ 时函数 $f(x)$ 取到极值，

所以 $f'(1)=0$，

方法：已知函数的极值点求参数时，通常利用函数的导数在极值点处的取值等于零来建立关于参数的方程

解得 $a=1$.

易错点：可导函数在某点处的导数值等于零只是函数在该点处取得极值的必要条件，所以必须对求出的参数值进行检验，看是否符合函数取得极值的条件

可得 $f'(x)=2x-1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}$，

令 $m(x)=f'(x)=2x-1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}$，

可得 $m'(x)=2-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+e^{1-x}>2-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3+x-2}{x^3}$.

令 $\lambda(x)=2x^3+x-2$，可得 $\lambda'(x)=6x^2+1>0$，所以 $\lambda(x)$ 在定义域上为增函数，

又因为 $\lambda\left(\frac{7}{8}\right)=\frac{55}{256}>0$，所以在 $\left(\frac{7}{8},+\infty\right)$ 上，$\lambda(x)>0$，即 $m'(x)>0$，

则 $f'(x)$ 在 $\left(\frac{7}{8},+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $x=1$ 是 $f'(x)$ 的变号零点，所以当 $x=1$ 时函数 $f(x)$ 取到极值，$a$ 的值为 1.

(2) 当 $a\geq1$ 时，因为当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$x^2-x>0$，

所以 $f(x)=ax^2-ax-\frac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}\geq x^2-x-\frac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}$.

令 $h(x)=x^2-x-\frac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}(x>1)$，则 $h'(x)=2x-1+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}>2x-2+\frac{1}{x^2}-$

$\frac{1}{x}=(x-1)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)>0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\to1$ 时，$h(x)\to0$，则 $f(x)\geqslant h(x)>0$，即 $f(x)>0$，所以当 $a\geqslant1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上没有零点.

当 $0<a<1$ 时，可得 $f'(x)=2ax-a+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}$，

令 $n(x)=f'(x)=2ax-a+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-e^{1-x}$，

可得 $n'(x)=2a-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+e^{1-x}>-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^2}+e^{1-x}=\frac{(x-2)e^{x-1}+x^3}{x^3\cdot e^{x-1}}$，

令 $\varphi(x)=(x-2)e^{x-1}+x^3$，

方法：利用导数判断函数的单调性时，如果求导后的正负不容易辨别，往往可以将导函数的一部分抽离出来，构造新的函数，研究其求导后的正负，进而可判断原函数的单调性

则当 $x>1$ 时，$\varphi'(x)=(x-1)e^{x-1}+3x^2>0$，

所以 $\varphi(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增，当 $x\to1$ 时，$\varphi(x)\to0$，则 $\varphi(x)>0$，

则 $n'(x)>0$，

所以 $f'(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为当 $x\to1$ 时，$f'(x)\to a-1<0$，$f'\left(1+\frac{1}{a}\right)=a+2+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^2}-\frac{1}{1+\frac{1}{a}}-e^{-\frac{1}{a}}>a+2-1-1>0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$，

所以存在 $x_1\in\left(1,1+\frac{1}{a}\right)$ 使得 $f'(x_1)=0$，

则 $f(x)$ 在区间 $(1,x_1)$ 上单调递减，在区间 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增，

又因为当 $x\to1$ 时，$f(x)\to0$，所以当 $x\in(1,x_1)$ 时，$f(x)<0$，故 $f(x)$ 在区间 $(1,x_1)$ 上没有零点，

因为 $f(x)$ 在区间 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(x_1)<0$，因为 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$，$e^{1-x}>0$，$\frac{1}{x}<1$，所以 $f(x)=ax^2-ax-\frac{1}{x}-\ln x+e^{1-x}>ax^2-ax-1-(x-1)$，则 $f\left(1+\frac{1}{a}\right)>a\left(1+\frac{1}{a}\right)^2-(a+1)\left(1+\frac{1}{a}\right)=0$，

所以存在唯一 $x_2\in\left(x_1,1+\frac{1}{a}\right)$，使得 $f(x_2)=0$，

敲黑板：在判断零点所在区间时，除利用函数零点存在定理外，往往还需结合函数的单调性

故 $f(x)$ 在区间 $(x_1,+\infty)$ 上存在唯一零点 $x_2$，

因此当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在唯一零点.

综上所述，当 $a\geqslant1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上没有零点；当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上存在唯一零点.

**6. A** 【解析】若 $f(x)$ 有两个零点，则 $f(x)=me^{mx}-\ln x=0$ 有两个解，

等价于 $mxe^{mx}-x\ln x=0(x>0)$ 有两个解，

令 $g(t)=te^t$，原式等价于 $g(mx)=g(\ln x)$ 有两个解. 当 $t\geqslant0$ 时，$g'(t)=e^t+te^t>0$ 恒成立，所以 $g(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

当两个式子可以构造成相同的形式时，常用同构的思想构造函数，将两个式子看成同一函数

又当 $t\geqslant0$ 时，$g(t)\geqslant0$，当 $t<0$ 时，$g(t)<0$，

因为 $mx\geqslant0$，所以 $g(mx)\geqslant0$，则 $g(\ln x)\geqslant0$，则 $\ln x\geqslant0$，即 $x\geqslant1$，

则原式等价于 $mx=\ln x(x\geqslant1)$ 有两个解.

根据 $mx=\ln x(x\geqslant1)$，可得 $m=\frac{\ln x}{x}(x\geqslant1)$，令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，

则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，当 $0<x<e$ 时，$h'(x)>0$，

当 $x>e$ 时，$h'(x)<0$，

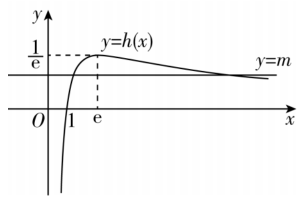
所以 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，且 $h(e)=\frac{1}{e}$，$h(1)=0$，

当 $x\to0$ 时，$h(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to0^+$，作出 $y=h(x)$ 的大致图象如图所示，由图可知，

当 $0<m<\frac{1}{e}$ 时，$m=\frac{\ln x}{x}(x\geqslant1)$ 有两个解，

即 $f(x)$ 有两个零点.

故选 A.




**7. D** 【解析】$f'(x)=\begin{cases}\ln x+1,x>0,\\-2x-2,x\leqslant0,\end{cases}$

令 $f'(x)=0$，则 $x_1=-1$，$x_2=\frac{1}{e}$，

∴当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(-1,0]$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

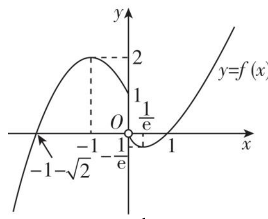
当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

∴ $f(x)$ 有极大值 $f(-1)=2$，极小值 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，且 $f(0)=1$，

又 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，$x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$，

∴ $y=f(x)$ 的大致图象如图所示.




对于选项 A，若 $a<-\frac{1}{e}$，则 $g(x)$ 恰有 1 个零点，故 A 错误.

对于选项 B，若 $g(x)$ 恰有 2 个零点，则 $a$ 的取值范围是 $\left\{-\frac{1}{e}\right\}\cup\{2\}\cup[0,1)$，故 B 错误.

对于选项 C，若 $g(x)$ 恰有 3 个零点，则 $a$ 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{e},0\right)\cup[1,2)$，故 C 错误.

对于选项 D，若 $1\leqslant a<2$，则 $g(x)$ 恰有 3 个零点，故 D 正确.

故选 D.

**8. B** 【解析】若函数 $f(x)=xe^x$ 与 $g(x)=\ln x+(a+2)x+1(a\in\mathbf{R})$ 的图象没有公共点，则 $xe^x=\ln x+(a+2)x+1(a\in\mathbf{R})$ 无解，

即 $a+2=e^x-\frac{\ln x+1}{x}$ 无解.

令 $h(x)=e^x-\frac{\ln x+1}{x}(x>0)$，则 $h'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$，

令 $s(x)=x^2e^x+\ln x(x>0)$，$s'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}>0$，

则 $s(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $s\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$，$s(1)=e>0$，故 $s(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一解 $x=x_0$，

则 $x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，$\frac{1}{e}<x_0<1$，

化简得 $x_0e^{x_0}=\frac{1}{x_0}\cdot\ln\frac{1}{x_0}$，即 $e^{x_0}\ln e^{x_0}=\frac{1}{x_0}\cdot\ln\frac{1}{x_0}$.

设 $u(x)=x\ln x$，$x>1$，则上式等价于 $u(e^{x_0})=u\left(\frac{1}{x_0}\right)$，

由 $u'(x)=1+\ln x>0$，可知 $u(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

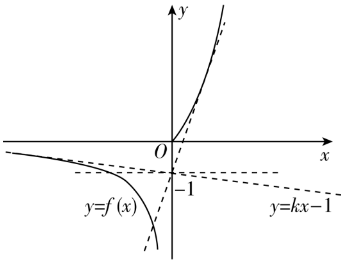
故 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以 $x_0=-\ln x_0$，

当 $0<x<x_0$ 时，$h'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)=e^{x_0}-\frac{\ln x_0+1}{x_0}=\frac{-\ln x_0}{x_0}=1$，所以 $a+2<1$，解得 $a<-1$. 即实数 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,-1)$.

**9. C** 【解析】由题知，关于 $x$ 的方程 $f(x)=g(x)$ 有 2 个不相等的实数解，
即 $y=f(x)$ 与 $y=kx-1$ 的图象有 2 个交点，
如图所示，




当 $k=0$ 时，直线 $y=-1$ 与 $y=\frac{2}{x}(x<0)$ 的图象交于点 $(-2,-1)$，
又当 $x\geqslant 0$ 时，$e^x-1\geqslant 0$，故直线 $y=-1$ 与 $y=e^x-1(x\geqslant 0)$ 的图象无交点，
故当 $k=0$ 时，$y=f(x)$ 与 $y=kx-1$ 的图象只有一个交点，不符合题意；
当 $k>0$ 时，若直线 $y=kx-1$ 与曲线 $y=e^x-1(x\geqslant 0)$ 相切，
此时 $y=f(x)$ 与 $y=kx-1$ 的图象有 2 个交点，
设切点 $P(x_0,e^{x_0}-1)$，则 $k=y'|_{x=x_0}=e^{x_0}$，又由 $y=kx-1$ 过点 $(0,-1)$，
所以 $\frac{e^{x_0}-1-(-1)}{x_0-0}=e^{x_0}$，解得 $x_0=1$，所以 $k=e$，即 $k=e$ 时，直线 $y=kx-1$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 2 个交点；
当 $k<0$ 时，若 $\frac{2}{x}=kx-1$，则 $kx^2-x-2=0$，由 $\Delta=1+8k=0$，可得 $k=-\frac{1}{8}$，
所以当 $k=-\frac{1}{8}$ 时，直线 $y=kx-1$ 与 $y=\frac{2}{x}(x<0)$ 的图象相切，
由图得，当 $-\frac{1}{8}<k<0$ 时，直线 $y=kx-1$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 2 个交点.
综上所述，实数 $k$ 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{8},0\right)\cup\{e\}$.
故选 C.

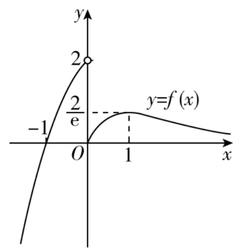
**10. BCD** 【解析】由题意可得 $f(x_1)=e^{x_1-3}+x_1-4=0$，$g(x_2)=\ln x_2-mx_2=0$，易知 $x_1=3$，则 $|3-x_2|\leqslant 1$，$2\leqslant x_2\leqslant 4$，则 $m=\frac{\ln x_2}{x_2}$ 在 $2\leqslant x_2\leqslant 4$ 时有解，等价于直线 $y=m$ 与 $y=\frac{\ln x}{x}$ 的图象在 $[2,4]$ 上有交点.
令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}(2\leqslant x\leqslant 4)$，则 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $h'(x)=0$，得 $x=e$，当 $x$ 变化时，$h(x)$，$h'(x)$ 的变化情况如表所示.

| $x$ | 2 | $(2,e)$ | $e$ | $(e,4)$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $h(x)$ | $\frac{\ln 2}{2}$ | 单调递增 | $\frac{1}{e}$ | 单调递减 | $\frac{\ln 2}{2}$ |

由表可知，当 $x=e$ 时，$h(x)$ 取得极大值也为最大值 $\frac{1}{e}$，当 $x=2$ 或 $x=4$ 时，$h(x)=\frac{\ln 2}{2}$，则 $m$ 的取值范围为 $\left[\frac{\ln 2}{2},\frac{1}{e}\right]$. 由以上分析知，函数 $y=\frac{\ln x}{x}$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\frac{\ln 5}{5}<\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}<\frac{\ln 3}{3}<\frac{1}{e}$，所以 $m$ 的值可以是 $\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3},\frac{1}{e}$，故选 BCD.

**关键点拨** “新定义”主要是指新概念、新公式、新定理、新法则、新运算五种，然后根据此新定义去解决问题，有时还需要用类比的方法去理解新的定义，这样有助于对新定义的透彻理解. 但是，透过现象看本质，它们考查的还是基础数学知识，所以说“新题”不一定是“难题”，掌握好基础知识，以不变应万变才是制胜法宝.

**11. $(4,5)$** 【解析】当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\frac{2x}{e^x}$，则 $f'(x)=\frac{2(1-x)}{e^x}$，所以当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值，$f(1)=\frac{2}{e}$，且当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$. 当 $x<0$ 时，$f(x)=-x^2+x+2$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，作出 $y=f(x)$ 的大致图象如图所示.

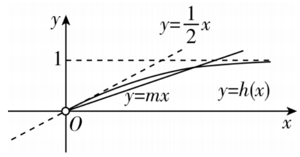



对于函数 $g(x)=2e[f(x)]^2-af(x)+\frac{2}{e}$，
令 $g(x)=0$，即 $2e[f(x)]^2-af(x)+\frac{2}{e}=0$，令 $f(x)=t$，则 $2et^2-at+\frac{2}{e}=0$，要使 $2e[f(x)]^2-af(x)+\frac{2}{e}=0$ 恰有 6 个不相等的实数根，则需关于 $t$ 的方程 $2et^2-at+\frac{2}{e}=0$ 有 2 个不相等的实数根 $t_1,t_2$，且 $0<t_1<\frac{2}{e}$，$0<t_2<\frac{2}{e}$. 令 $h(t)=2et^2-at+\frac{2}{e}$，则 $h(t)$ 有 2 个不相等的零点均位于区间 $\left(0,\frac{2}{e}\right)$ 内，

所以 $\begin{cases}\Delta=a^2-4\times 2e\times\frac{2}{e}>0,\\ 0<\frac{a}{4e}<\frac{2}{e},\\ h(0)=\frac{2}{e}>0,\\ h\left(\frac{2}{e}\right)=2e\times\left(\frac{2}{e}\right)^2-\frac{2a}{e}+\frac{2}{e}>0,\end{cases}$

解得 $4<a<5$，所以实数 $a$ 的取值范围为 $(4,5)$.

**12. $\left(0,\frac{1}{2}\right)$** 【解析】由 $f(x)=(mx-1)e^x+mx+1=0$，可得 $mx=\frac{e^x-1}{e^x+1}$，
令 $g(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}-mx$，该函数的定义域为 $\mathbf{R}$，
因为 $g(-x)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}+mx=\frac{e^x(e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}+mx=\frac{1-e^x}{1+e^x}+mx=-g(x)$，
所以函数 $g(x)$ 为奇函数，且 $g(0)=0$，
要使得函数 $f(x)$ 有三个零点，即函数 $g(x)$ 有三个零点，
只需函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有且只有一个零点，
即只需函数 $y=mx$ 与函数 $h(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象有且只有一个公共点.
当 $x>0$ 时，$h'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$，
所以函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，
$h(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}<1$，
令 $p(x)=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$，其中 $x>0$，则 $p'(x)=\frac{2e^x(1-e^x)}{(e^x+1)^3}<0$，即函数 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，
作出函数 $y=mx$ 与函数 $h(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象如图所示，




当直线 $y=mx$ 与函数 $y=h(x)$ 的图象相切于原点时，$m=h'(0)=\frac{1}{2}$，
由图可知，当 $0<m<\frac{1}{2}$ 时，直线 $y=mx$ 与函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的图象有且只有一个交点.

综上所述，实数 $m$ 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

**方法技巧** **利用导数解决函数零点问题的方法**

(1)直接法：先对函数求导，利用导数求出函数的单调区间与极值，根据函数的基本性质作出图象，然后将问题转化为函数图象与 $x$ 轴的交点问题.

(2)构造新函数法：将问题转化为研究两函数图象的交点问题；

(3)参变量分离法：由 $f(x)=0$ 分离变量得出 $a=g(x)$，将问题等价转化为直线 $y=a$ 与函数 $y=g(x)$ 的图象的交点问题.

13.【解】(1)函数 $f(x)=x^2-(2a+1)x+a\ln x$，

求导得 $f'(x)=2x-2a-1+\frac{a}{x}$，

由曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线平行于 $x$ 轴，得 $f'(1)=1-a=0$，则 $a=1$.

此时 $f(x)=x^2-3x+\ln x$，$f(1)=-2$，函数 $y=f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=-2$，符合题意，所以 $a=1$.

(2)函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，由(1)知，$f'(x)=2x-2a-1+\frac{a}{x}=\frac{(2x-1)(x-a)}{x}$，

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$ 或 $x>a$，由 $f'(x)<0$，得 $\frac{1}{2}<x<a$，

函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},a\right)$ 上单调递减；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 且不恒为0，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $0<x<a$ 或 $x>\frac{1}{2}$，由 $f'(x)<0$，得 $a<x<\frac{1}{2}$，

函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$，$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(a,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减；

当 $a\leqslant 0$ 时，由 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{2}$，由 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{2}$，

函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减.

综上，当 $a>\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},a\right)$ 上单调递减；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,a)$，$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(a,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减；

当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减.

(3)依题意，$g(x)=x^2-(2a+1)x+a\ln x-x^2-(a-1)\ln x=-(2a+1)x+\ln x$，

由 $g(x)=0$，得 $2a+1=\frac{\ln x}{x}$，记 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$，求导得 $h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $0<x<e$ 时，$h'(x)>0$，当 $x>e$ 时，$h'(x)<0$，

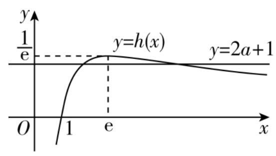
函数 $h(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，且 $h(e)=\frac{1}{e}$，当 $x>1$ 时 $h(x)>0$ 恒成立，当 $0<x<1$ 时，$h(x)<0$ 恒成立，且当 $x\to 0^+$ 时，$h(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to 0$，

作出 $y=h(x)$ 的大致图象，如图所示.

因此要使 $g(x)$ 有两个零点，即直线 $y=2a+1$ 与函数 $y=h(x)$ 的图象有两个交点，由图可知，

需满足 $0<2a+1<\frac{1}{e}$，即 $-\frac{1}{2}<a<\frac{1-e}{2e}$，

所以 $a$ 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1-e}{2e}\right)$.




## 考向 16　不等式恒成立与能成立问题

**刷考点**

1. D 【解析】当 $x=0$ 时，$1=e^0$，不等式成立.

当 $x>0$ 时，$a\leqslant\frac{e^x-x^2-1}{x}$ 恒成立，即 $a\leqslant\left(\frac{e^x-x^2-1}{x}\right)_{\min}$，令 $f(x)=\frac{e^x-x^2-1}{x}$，$x>0$，则

$f'(x)=\frac{(e^x-2x)x-(e^x-x^2-1)\cdot 1}{x^2}=\frac{(x-1)(e^x-x-1)}{x^2}$.

令 $g(x)=e^x-x-1$，则 $g'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$g'(x)=e^x-1\geqslant 0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>0$，即 $e^x-x-1>0$.

故当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(1)=\frac{e^1-1^2-1}{1}=e-2$，

则 $a\leqslant e-2$.

所以实数 $a$ 的最大值为 $e-2$.

故选 D.

2. B 【解析】设 $g(x)=x^2f(x)$，$x>0$，

则 $g'(x)=x^2f'(x)+2xf(x)$

$=x^2\left[f'(x)+\frac{2}{x}f(x)\right]>0$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

由 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ 可知 $ax>0$，故 $x>0$ 时 $a>0$，

当 $x>1$ 时，可将不等式 $\frac{ax\cdot f(ax)}{\ln x}\geqslant\frac{f(\ln x)\cdot\ln x}{ax}$ 整理为 $a^2x^2\cdot f(ax)\geqslant f(\ln x)\cdot(\ln x)^2$，即 $g(ax)\geqslant g(\ln x)$，

故 $ax\geqslant\ln x$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立，

即 $a\geqslant\frac{\ln x}{x}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 上恒成立.

令 $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}$，其中 $x>1$，所以 $a\geqslant\varphi(x)_{\max}$，

$\varphi'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=e$.

当 $x\in(1,e)$ 时，$\varphi'(x)>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)<0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减.

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi(e)=\frac{1}{e}$，即 $a\geqslant\frac{1}{e}$.

3. C 【解析】不等式 $2x_1+f(x_2)>2x_2+f(x_1)$ 等价于 $f(x_1)-2x_1<f(x_2)-2x_2$，

令 $F(x)=f(x)-2x$，$x\in(0,+\infty)$，根据题意对任意的 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，

当 $x_1>x_2$ 时，$F(x_1)<F(x_2)$，所以函数 $F(x)=f(x)-2x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $F'(x)=f'(x)-2=2\ln x-2ax\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，且等号不恒成立，

即 $\frac{\ln x}{x}\leqslant a$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

令 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，

则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

所以当 $x\in(0,e)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减. 所以 $g(x)_{\max}=g(e)=\frac{1}{e}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{e}$.

故选 C.

**归纳总结** **求解恒成立问题常用结论**

(1) $a\geqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\geqslant f(x)_{\max}$；

(2) $a\leqslant f(x)$ 恒成立 $\Leftrightarrow a\leqslant f(x)_{\min}$.

4. $\frac{40}{9}$ 【解析】因为 $f(x)$，$g(x)$ 分别是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数和奇函数，且 $f(x)+$

$g(x)=e^x$①，所以$f(-x)+g(-x)=e^{-x}$，即$f(x)-g(x)=e^{-x}$②. 联立①②解得$f(x)=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$，$g(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$.

**点悟：** 根据函数的奇偶性，利用方程组求出函数的解析式

因为函数$y=e^x$，$y=-e^{-x}$在$(0,\ln 2)$上单调递增，所以函数$y=e^x-e^{-x}$在$(0,\ln 2)$上单调递增，$e^x-e^{-x}>e^0-e^0=0$，所以$g(x)>0$，故不等式$2f(x)-a[g(x)]^2\geq 0$等价于$a\leq\frac{2f(x)}{[g(x)]^2}$，即$a\leq\frac{e^x+e^{-x}}{\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}$在$(0,\ln 2)$上恒成立.

**方法：** 已知恒成立的不等式在能够判断出参数系数正负的情况下，根据不等式的性质将参数分离出来，得到一个一端是参数，另一端是变量的不等式，只要研究变量不等式的最值就可以解决问题

令$t=e^x+e^{-x}$，因为当$x\in(0,\ln 2)$时，$t'=e^x-e^{-x}>0$，则$t=e^x+e^{-x}$单调递增，所以$2<t<\frac{5}{2}$. 又$(e^x-e^{-x})^2=(e^x+e^{-x})^2-4=t^2-4$，所以$\frac{e^x+e^{-x}}{\frac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2}=\frac{4t}{t^2-4}=\frac{4}{t-\frac{4}{t}}$. 因为函数$y=t$，$y=-\frac{4}{t}$在$\left(2,\frac{5}{2}\right)$上单调递增，所以函数$y=t-\frac{4}{t}$在$\left(2,\frac{5}{2}\right)$上单调递增，故$\frac{4}{t-\frac{4}{t}}>\frac{40}{9}$，所以$a\leq\frac{40}{9}$，即实数$a$的最大值是$\frac{40}{9}$.

5. $\frac{\sqrt{2}}{2e}$ 【解析】$a^2e^{2x+1}-\ln x+x+1+2\ln a\geq 0$，即$e^{2x+1+2\ln a}+(2x+1+2\ln a)\geq\ln x+x=e^{\ln x}+\ln x$. 设$f(t)=e^t+t(t\in\mathbf{R})$，则$f'(t)=e^t+1>0$恒成立，故$f(t)$在$\mathbf{R}$上单调递增. 原不等式转化为$f(2x+1+2\ln a)\geq f(\ln x)$，即$2x+1+2\ln a\geq\ln x$，即$2x+1-\ln x+2\ln a\geq 0$在$(0,+\infty)$上恒成立. 设$g(x)=2x+1-\ln x+2\ln a\,(x>0)$，$g'(x)=\frac{2x-1}{x}$，当$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；当$x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减，故$g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=2+\ln 2+2\ln a\geq 0$，即$2\ln a\geq -2-\ln 2=-\ln(2e^2)$，解得$a\geq\frac{\sqrt{2}}{2e}$，所以$a$的最小值是$\frac{\sqrt{2}}{2e}$.

6. 【解】(1) $f(x)=mx^2+\ln x-\frac{1}{x}(m\in\mathbf{R})$，则$f'(x)=2mx+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$，其中$x>0$，

因为函数$f(x)$在$x=1$处取得极值，则$f'(1)=2m+2=0$，解得$m=-1$，
经检验，符合题意.
因此$m=-1$.

(2)由(1)可知，$f(x)=-x^2+\ln x-\frac{1}{x}$，其中$x>0$，

则$f'(x)=-2x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-2x^3+x+1}{x^2}=\frac{-(x-1)(2x^2+2x+1)}{x^2}$，

由$f'(x)=0$，可得$x=1$，列表如下：

| $x$ | $(0,1)$ | $1$ | $(1,+\infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | 单调递增 | 极大值 | 单调递减 |

所以函数$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$，单调递减区间为$(1,+\infty)$.

(3) $g(x)-f(x)=xe^x-x^2-\frac{1}{x}-1-\left(-x^2+\ln x-\frac{1}{x}\right)=xe^x-\ln x-1$，$x>0$，

由$nx\leq g(x)-f(x)=xe^x-\ln x-1$，可得$n\leq e^x-\frac{\ln x+1}{x}$.

**点悟：** 参变分离

令$h(x)=e^x-\frac{\ln x+1}{x}$，其中$x>0$，

则$h'(x)=e^x-\frac{\frac{1}{x}\cdot x-(\ln x+1)}{x^2}=e^x+\frac{\ln x}{x^2}=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$.

令$p(x)=x^2e^x+\ln x$，其中$x>0$，

则$p'(x)=(x^2+2x)e^x+\frac{1}{x}>0$，

所以函数$p(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，

因为$p(1)=e>0$，$p\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^2}-1=e^{\frac{1}{e}-2}-1<0$，所以存在唯一的$t\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，使$p(t)=0$，

**敲黑板：** 零点存在定理，使得$t^2e^t+\ln t=0$

即$te^t=-\frac{1}{t}\ln t=\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}$，

即$e^t\ln e^t=\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}$，

令$q(x)=x\ln x$，其中$x>1$，
则$q'(x)=1+\ln x>0$，
所以函数$q(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，

因为$t\in\left(\frac{1}{e},1\right)$，所以$e^t>1$，$\frac{1}{t}>1$，

由$e^t\ln e^t=\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}$，可得$q(e^t)=q\left(\frac{1}{t}\right)$，

则$e^t=\frac{1}{t}$，所以$t=\ln\frac{1}{t}=-\ln t$.

又当$0<x<t$时，$p(x)<0$，即$h'(x)<0$，
当$x>t$时，$p(x)>0$，即$h'(x)>0$，

所以函数$h(x)$的减区间为$(0,t)$，增区间为$(t,+\infty)$，

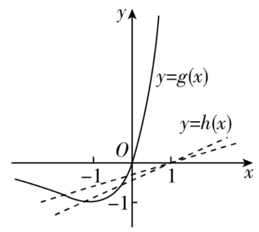
所以$h(x)_{\min}=h(t)=e^t-\frac{\ln t+1}{t}=\frac{1}{t}-\frac{1-t}{t}=1$，则$n\leq 1$，

所以实数$n$的取值范围是$(-\infty,1]$.

7. A 【解析】已知函数$f(x)=xe^{x+1}-kx+k$，则$f(x)\leq 0$等价于$xe^{x+1}\leq kx-k$有且只有一个负整数解.

**突破点：** 通过移项将不等式解的问题转化为两个函数图象的交点问题

令$g(x)=xe^{x+1}$，则$g'(x)=(x+1)e^{x+1}$. 当$x<-1$时，$g'(x)<0$，当$x>-1$时，$g'(x)>0$，所以$g(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,+\infty)$上单调递增，故当$x=-1$时，$g(x)$有极小值，也是最小值，$g(x)_{\min}=g(-1)=(-1)\times e^{-1+1}=-1$. 设$h(x)=kx-k=k(x-1)$，则函数$h(x)$的图象恒过点$(1,0)$，在同一平面直角坐标系中分别作出$y=g(x)$和$y=h(x)$的大致图象，如图所示.




显然$x_0=-1$，依题意得$\begin{cases}g(-1)\leq h(-1),\\ g(-2)>h(-2),\end{cases}$即$\begin{cases}-1\leq -2k,\\ -\frac{2}{e}>-3k,\end{cases}$解得$\frac{2}{3e}<k\leq\frac{1}{2}$，所以实数$k$的取值范围是$\left(\frac{2}{3e},\frac{1}{2}\right]$. 故选A.

8. B 【解析】$f'(x)=\ln x+1$，
$\therefore x\in[1,2]$时，$f'(x)>0$，
$\therefore f(x)$在区间$[1,2]$上单调递增，
$\therefore$当$x\in[1,2]$时，$f(x)\in[0,2\ln 2]$.
$g'(x)=e^x-2x$，令$h(x)=e^x-2x$，
则$h'(x)=e^x-2$，令$h'(x)=0$，则$x=\ln 2$，
$\because\ln 2<\ln e=1$，
$\therefore x\in[1,2]$时，$h'(x)>0$，
$\therefore g'(x)=h(x)$单调递增，
$\therefore g'(x)>g'(1)=e-2>0$，
$\therefore g(x)$在$[1,2]$上单调递增，
$\therefore g(x)\in[e-1+a,e^2-4+a]$.
又$(e^2-4+a)-(e-1+a)=e^2-e-3>2\ln 2$，
$\therefore e-1+a\leq 0\leq e^2-4+a$或$e-1+a\leq 2\ln 2\leq e^2-4+a$，
$\therefore a\in[4-e^2,\ln 4+1-e]$.
故选B.

9. A 【解析】函数$f(x)=e^x-ax^2+ax$，$f(1)=e>0$，若恰好存在两个正整数$m,n$，使得$f(m)<0$，$f(n)<0$，则$m>1$，$n>1$，当$x>1$时，$f(x)<0$等价于$a>\frac{e^x}{x^2-x}$，因此有且只有两个大于1的正整数使得$a>\frac{e^x}{x^2-x}$在$(1,$

$+\infty$)上成立. 令 $g(x)=\dfrac{e^x}{x^2-x}$, $x>1$, 则 $g'(x)=\dfrac{e^x(x^2-3x+1)}{(x^2-x)^2}$, 当 $x>1$ 时, 由 $g'(x)<0$ 得 $1<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, 由 $g'(x)>0$ 得 $x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, 因此函数 $g(x)$ 在 $\left(1,\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增, 又 $g(2)=\dfrac{e^2}{2}$, $g(3)=\dfrac{e^3}{6}=\dfrac{e^2}{2}\cdot\dfrac{e}{3}<\dfrac{e^2}{2}=g(2)$, 而 $2<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<3$, 因此符合题意的正整数只有 2 和 3 两个, 于是得 $a\leqslant g(4)=\dfrac{e^4}{12}$, 所以实数 $a$ 的取值范围是 $\left(\dfrac{e^2}{2},\dfrac{e^4}{12}\right]$.

**10.**【解】(1) 函数 $f(x)=x(x-c)^2-\dfrac{1}{e}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 求导得 $f'(x)=(x-c)(3x-c)$,
依题意, $f'(2)=(2-c)(6-c)=0$, 解得 $c=2$ 或 $c=6$.
当 $c=2$ 时, $f'(x)=(x-2)(3x-2)$, 当 $x<\dfrac{2}{3}$ 或 $x>2$ 时, $f'(x)>0$, 当 $\dfrac{2}{3}<x<2$ 时, $f'(x)<0$,
因此 $x=2$ 为函数 $f(x)=x(x-c)^2-\dfrac{1}{e}$ 的极小值点, 符合题意;
当 $c=6$ 时, $f'(x)=(x-6)(3x-6)$, 当 $x<2$ 或 $x>6$ 时, $f'(x)>0$, 当 $2<x<6$ 时, $f'(x)<0$,
因此 $x=2$ 为函数 $f(x)=x(x-c)^2-\dfrac{1}{e}$ 的极大值点, 不符合题意.
所以 $c=2$.
(2) 由 (1) 知, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{3}\right)$, $(2,+\infty)$ 上单调递增, 在 $\left(\dfrac{2}{3},2\right)$ 上单调递减, 且 $f(0)=4-\dfrac{1}{e}$, $f(2)=-\dfrac{1}{e}$, 因此 $f(x)_{\min}=f(2)=-\dfrac{1}{e}$.
①当 $k>0$ 时, $\forall x_1\in(0,+\infty)$, $\exists x_2=-\dfrac{1}{k}$, 使得 $g(x_2)=g\left(-\dfrac{1}{k}\right)=-e^{\frac{1}{k}}<-1<-\dfrac{1}{e}\leqslant f(x_1)$, 因此 $f(x_1)-g(x_2)\geqslant 0$, 符合题意.
②当 $k=0$ 时, $g(x)=0$, 取 $x_1=2$, $\forall x_2\in\mathbf{R}$, 有 $f(x_1)-g(x_2)<0$, 不符合题意.
③当 $k<0$ 时, 函数 $g(x)=\dfrac{kx}{e^x}$, 求导得 $g'(x)=k(1-x)e^{-x}$,
当 $x<1$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减;
当 $x>1$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 则 $g(x)_{\min}=g(1)=\dfrac{k}{e}$,
若 $\forall x_1\in(0,+\infty)$, $\exists x_2\in\mathbf{R}$, 使得 $f(x_1)-g(x_2)\geqslant 0$, 只需 $g(x)_{\min}\leqslant f(x)_{\min}$, 即 $\dfrac{k}{e}\leqslant-\dfrac{1}{e}$, 解得 $k\leqslant-1$.
所以 $k$ 的取值范围为 $(-\infty,-1]\cup(0,+\infty)$.

**归纳总结　求解能成立问题的常用结论**
(1) $\exists x\in D$, $m\leqslant f(x)\Leftrightarrow m\leqslant f(x)_{\max}$;
(2) $\exists x\in D$, $m\geqslant f(x)\Leftrightarrow m\geqslant f(x)_{\min}$.

**11.**【解】(1) 由题意知 $f(x)=x\ln x+ax+b$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\ln x+1+a$.
由于函数 $f(x)=x\ln x+ax+b$ 在 $x=e^{-3}$ 时取得极值, 且满足 $f(1)=1$,
故 $f'(e^{-3})=-3+1+a=0$, 且 $f(1)=a+b=1$,
解得 $a=2$, $b=-1$, 则 $f'(x)=\ln x+3$.
经验证, 函数 $f(x)$ 在 $x=e^{-3}$ 时取得极小值, 符合题意,
故 $f(x)=x\ln x+2x-1$.
(2) 由题意存在实数 $x>0$, 使得 $kx>f(x+1)$ 成立,
即 $k>\dfrac{(x+1)\ln(x+1)+2x+1}{x}$ 成立.
令 $g(x)=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)+2x+1}{x}$, $x>0$,
则 $g'(x)=\dfrac{x-1-\ln(x+1)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$,
令 $h(x)=x-1-\ln(x+1)$, 则 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x}{1+x}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,
故 $h(x)=x-1-\ln(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,
又 $h(2)=1-\ln 3<0$, $h(3)=2-\ln 4>0$,
故存在唯一的 $x_0\in(2,3)$ 使得 $h(x_0)=0$,
即 $x_0-1=\ln(x_0+1)$.
则当 $0<x<x_0$ 时, $h(x)<0$, 即 $g'(x)<0$,
当 $x>x_0$ 时, $h(x)>0$, 即 $g'(x)>0$,
所以 $g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增,
故 $g(x)_{\min}=g(x_0)=\dfrac{(x_0+1)\ln(x_0+1)+2x_0+1}{x_0}=\dfrac{(x_0+1)(x_0-1)+2x_0+1}{x_0}=x_0+2$,
故 $k>x_0+2$, 结合 $x_0\in(2,3)$, 得 $x_0+2\in(4,5)$, 故整数 $k$ 的最小值为 5.

**12. B**　【解析】$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x+x-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x+x-1)'}{(x^2+x-2)'}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\frac{1}{x}+1}{2x+1}=\dfrac{2}{3}$. 故选 B.

**13.**【解】方法一: 由已知得 $f'(x)=e^x-1-2ax$, 令 $h(x)=e^x-1-2ax\ (x\geqslant 0)$, 则 $h'(x)=e^x-2a$.
①当 $2a\leqslant 1$, 即 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时, 在区间 $[0,+\infty)$ 上, $h'(x)\geqslant 0$,
且 $h'(x)$ 不恒为 0, $h(x)$ 单调递增,
$\therefore h(x)\geqslant h(0)$,
即 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$, 且 $f'(x)$ 不恒为 0,
$\therefore f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,
$\therefore f(x)\geqslant f(0)=0$,
$\therefore a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时满足题意.
②当 $2a>1$, 即 $a>\dfrac{1}{2}$ 时, 令 $h'(x)=0$,
解得 $x=\ln(2a)$, 在区间 $[0,\ln(2a)]$ 上, $h'(x)<0$, $h(x)$ 单调递减,
$\therefore$ 当 $x\in(0,\ln(2a))$ 时, $h(x)<h(0)=0$,
即 $f'(x)<f'(0)=0$,
$f(x)$ 在 $(0,\ln(2a))$ 上单调递减,
$\therefore f(x)<f(0)=0$, 不满足题意.
综上, 实数 $a$ 的取值范围为 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.
方法二: 当 $x=0$ 时, $f(x)=0$, 对任意实数 $a$, 都有 $f(x)\geqslant 0$.
当 $x>0$ 时, 由 $f(x)\geqslant 0$ 得 $a\leqslant\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$,
设 $g(x)=\dfrac{e^x-1-x}{x^2}$, 则 $g'(x)=\dfrac{xe^x-2e^x+x+2}{x^3}$,
令 $h(x)=xe^x-2e^x+x+2\ (x>0)$,
则 $h'(x)=xe^x-e^x+1$,
记 $\varphi(x)=h'(x)$, 则 $\varphi'(x)=xe^x>0$,
$\therefore h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $h'(x)>h'(0)=0$,
$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增, $h(x)>h(0)=0$,
$\therefore g'(x)>0$, $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.
由洛必达法则知, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x}{2}=\dfrac{1}{2}$,
故 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$.
综上, 实数 $a$ 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$.

**14.**【解】(1) $f'(x)=a+e^x$,
①当 $a\geqslant 0$ 时, $f'(x)>0$ 恒成立,
$\therefore f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;
②当 $a<0$ 时,
令 $f'(x)=0$, 得 $x=\ln(-a)$,
$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-a))$ 上单调递减, 在 $(\ln(-a),+\infty)$ 上单调递增.
综上, 当 $a\geqslant 0$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $a<0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-a))$ 上单调递减, 在 $(\ln(-a),+\infty)$ 上单调递增.
(2) $f(x)\geqslant\ln\dfrac{e}{x+1}$, 即 $ax+e^x\geqslant\ln\dfrac{e}{x+1}=1-\ln(x+1)$, 即 $e^x+\ln(x+1)+ax-1\geqslant 0$, 令 $g(x)=e^x+\ln(x+1)+ax-1\ (x\geqslant 0)$, 则 $g(x)\geqslant 0$ 对 $\forall x\in[0,+\infty)$ 恒成立.
$\because g(0)=0$, $g'(x)=e^x+\dfrac{1}{x+1}+a$,
$\therefore g(x)=e^x+\ln(x+1)+ax-1\geqslant 0$ 对 $\forall x\in[0,+\infty)$ 恒成立的必要条件是 $g'(0)=1+1+a\geqslant 0$, 则 $a\geqslant-2$, $\therefore g(x)=e^x+\ln(x+1)+ax-1\geqslant e^x+\ln(x+1)-2x-1$.

下证充分性：

当 $a\geqslant -2$ 时，令 $h(x)=e^x+\ln(x+1)-2x-1(x\geqslant 0)$，

则 $h'(x)=e^x+\frac{1}{x+1}-2$，令 $t(x)=e^x+\frac{1}{x+1}-2$，则 $t'(x)=e^x-\frac{1}{(x+1)^2}$，$\therefore t'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore h'(x)=t(x)\geqslant t(0)=0$，

$\therefore h(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)\geqslant h(x)\geqslant h(0)=0$。

综上，$a$ 的取值范围为 $[-2,+\infty)$。

**方法技巧** 由不等式恒成立（或能成立）求参数时的常用方法

（1）对不等式变形，分离参数，根据分离参数后的结果，构造函数，由导数的方法求出函数的最值，进而可求出结果；

（2）根据不等式，直接构造函数，根据导数的方法，利用分类讨论求函数的最值，进而得出结果。

## 刷上分

**1.** （1）【解】$a=1$ 时，$f(x)=\ln\frac{2x-1}{x-1}+x=\ln\left(2+\frac{1}{x-1}\right)+x$，

$f'(x)=\frac{x-1}{2x-1}\cdot\left[-\frac{1}{(x-1)^2}\right]+1=-\frac{1}{(x-1)(2x-1)}+1=\frac{2x^2-3x}{(x-1)(2x-1)}$，

$f'(2)=\frac{2}{3}$，又 $f(2)=\ln 3+2$，

所以切线方程为 $y-(\ln 3+2)=\frac{2}{3}(x-2)$，

即 $2x-3y+2+3\ln 3=0$。

（2）【证明】$f'(x)=a-\frac{1}{(2x-1)(x-1)}$，

$x\in\left[\frac{3}{2},2\right]$ 时，函数 $y=(2x-1)(x-1)=2x^2-3x+1=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{8}$ 单调递增，因此 $y\in[1,3]$，$1\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{3}$。

又 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$，所以 $f'(x)\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3}{2},2\right]$ 上单调递减，

$f(x)\leqslant f\left(\frac{3}{2}\right)=2\ln 2+\frac{3}{2}a\leqslant 2\ln 2+\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=2\ln 2+\frac{1}{2}$。

因为 $e^{\frac{3}{2}}=e\cdot\sqrt{e}>2.7\times\frac{3}{2}=4.05>4$，所以 $2\ln 2=\ln 4<\frac{3}{2}$，

从而 $f(x)\leqslant 2\ln 2+\frac{1}{2}<\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$，

即 $f(x)<2$。

（3）【解】$f'(x)=a-\frac{1}{(2x-1)(x-1)}$，$x>1$。

敲黑板：对 $a$ 进行分类讨论

当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

当 $x\to+\infty$ 时，$\ln\frac{2x-1}{x-1}=\ln\left(2+\frac{1}{x-1}\right)\to\ln 2$，因此 $f(x)=\ln\frac{2x-1}{x-1}+ax\geqslant 2\ln 2+\frac{3}{2}$ 不可能恒成立。

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $2x^2-3x+1-\frac{1}{a}=0$，

记 $g(x)=2x^2-3x+1-\frac{1}{a}$，$g(1)=-\frac{1}{a}<0$，

则 $g(x)=0$ 有两个实根，一根小于 1，另一根大于 1，

大于 1 的根为 $x_0=\frac{3+\sqrt{1+\frac{8}{a}}}{4}$，易知它是关于 $a$ 的减函数，

注意到 $y=(2x-1)(x-1)=2x^2-3x+1$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $y>0$，

即 $1<x<x_0$ 时，$0<(2x-1)(x-1)<\frac{1}{a}$，$x>x_0$ 时，$(2x-1)(x-1)>\frac{1}{a}$，

所以 $1<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $x>1$ 时，$f(x)_{\min}=f(x_0)$。

当 $a=1$ 时，$x_0=\frac{3}{2}$，此时 $f(x)=\ln\frac{2x-1}{x-1}+x$，

记 $h(x)=\ln\frac{2x-1}{x-1}+x$，$x>1$，则 $h(x)$ 在 $\left(1,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，且 $h\left(\frac{3}{2}\right)=2\ln 2+\frac{3}{2}$，即 $f(x)\geqslant 2\ln 2+\frac{3}{2}$。

当 $a>1$ 时，$x_0<\frac{3}{2}$，$f(x_0)=\ln\frac{2x_0-1}{x_0-1}+ax_0>\ln\frac{2x_0-1}{x_0-1}+x_0=h(x_0)>h\left(\frac{3}{2}\right)=2\ln 2+\frac{3}{2}$。

当 $0<a<1$ 时，$x_0>\frac{3}{2}$，$f(x_0)<f\left(\frac{3}{2}\right)=2\ln 2+\frac{3}{2}a<2\ln 2+\frac{3}{2}$，不符合题意。

综上，$a\geqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 2\ln 2+\frac{3}{2}$ 恒成立，

所以 $a$ 的取值范围是 $[1,+\infty)$。

**2.** **思路导引** （1）对函数 $f(x)$ 求导，分别讨论当 $a\in(-\infty,0]$ 和 $a\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时导函数的正负，即可得到函数的单调性，从而求出极值点的个数；

（2）对 $h(x)$ 求导，确定其最小值，将问题转化成不等式 $e^{a-1}+(e-1)(a-3)-1>0$ 成立，进而构造函数 $k(a)=e^{a-1}+(e-1)\cdot(a-3)-1$，求导，利用其单调性求解。

【解】（1）$f'(x)=\ln x+1-2ax$，$x\in(0,+\infty)$，

①当 $a\in(-\infty,0]$ 时，$f'(x)$ 为增函数，

因为 $x\to 0$ 时，$f'(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$ 时，$f'(x)\to+\infty$，

所以 $f'(x)$ 有唯一的零点 $x_0(x_0>0)$，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 有一个极小值点，无极大值点。

②当 $a\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，令 $\varphi(x)=f'(x)=\ln x+1-2ax$，则 $\varphi'(x)=\frac{1}{x}-2a=\frac{1-2ax}{x}$，

令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{2a}$，

当 $x\in\left(0,\frac{1}{2a}\right)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减。

所以 $\varphi(x)_{\max}=\varphi\left(\frac{1}{2a}\right)=\ln\frac{1}{2a}\leqslant 0$，即 $f'(x)_{\max}\leqslant 0$，所以 $f(x)$ 的极值点的个数为 0。

综上所述，当 $a\in(-\infty,0]$ 时，$f(x)$ 的极值点个数为 1；

当 $a\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$f(x)$ 的极值点个数为 0。

（2）$h(x)=x\ln x-ax+1$，

由 $h'(x)=\ln x+1-a=0$，得 $x=e^{a-1}$，由 $a>1$，得 $e^{a-1}>1$。

当 $x\in(1,e^{a-1})$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $x\in(e^{a-1},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增。

所以 $h(x)_{\min}=h(e^{a-1})=1-e^{a-1}$。

因为当 $a>1$ 时，$\exists x\in(1,+\infty)$，使得 $h(x)<(e-1)a-3e+3$，

所以只需 $1-e^{a-1}<(e-1)a-3e+3$ 成立，

即不等式 $e^{a-1}+(e-1)(a-3)-1>0$ 成立。

令 $k(a)=e^{a-1}+(e-1)(a-3)-1$，$a>1$，则 $k'(a)=e^{a-1}+e-1$，当 $a\to 1$ 时，$k'(a)\to e$，

则 $k'(a)>e$，

则 $k'(a)=e^{a-1}+e-1>0$ 在 $a\in(1,+\infty)$ 上恒成立。

故 $k(a)=e^{a-1}+(e-1)(a-3)-1$ 在 $a\in(1,+\infty)$ 上单调递增，

又 $k(2)=0$，所以 $a>2$，

故实数 $a$ 的取值范围为 $(2,+\infty)$。

# 考向 17 导数与不等式

## 刷考点

**1.** （1）【解】因为 $f(x)=e^x\ln(a+x)-x$，

所以 $f'(x)=e^x\left[\ln(a+x)+\frac{1}{a+x}\right]-1$，

所以 $f'(0)=\ln a+\frac{1}{a}-1=0$。

令 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，其中 $x>0$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

令 $g'(x)<0$ 可得 $0<x<1$；令 $g'(x)>0$ 可得 $x>1$，

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$，且 $g(x)$ 的最小值 $g(1)=0$，故 $a=1$.

(2)【证明】由(1)可知，$f(x)=e^x\ln(x+1)-x$，当 $x>\ln 4$ 时，要证 $f(x)>x^2$，即证 $e^x\ln(x+1)>x^2+x$，只需证 $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}>\dfrac{x}{e^x}$. 令 $1+x=t$，$e^x=s$，则上式等价于 $\dfrac{\ln t}{t}>\dfrac{\ln s}{s}(t>0,s>0)$.

构造函数 $p(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，$x>0$，

方法：不等式的证明可构造"形似"函数，对原不等式同解变形，根据相似结构构造辅助函数

则 $p'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，

故当 $x\in(0,e)$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 单调递增；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$p'(x)<0$，$p(x)$ 单调递减.

由 $e>2.7>\dfrac{5}{2}$ 得，$e-1>\dfrac{3}{2}$，故 $e^{e-1}>e^{\frac{3}{2}}>\sqrt{2.7^3}>\sqrt{16}=4$，故 $e-1>\ln 4$.

提示：根据指数函数的单调性，利用放缩法，结合对数函数的运算得出 $e-1$ 与 $\ln 4$ 之间的大小关系

当 $\ln 4<x<e-1$ 时，$t=1+x\in(1+\ln 4,e)$，$s=e^x\in(4,e^{e-1})\subseteq(e,+\infty)$，故 $p(s)<p(4)=\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{\ln 2}{2}=p(2)$，

又 $p(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递增，而 $2<1+\ln 4<t<e$，则 $p(2)<p(t)$，

故 $p(t)>p(s)$，即 $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}>\dfrac{x}{e^x}$.

当 $x\geqslant e-1$ 时，$e^x>1+x\geqslant e$，即 $s>t\geqslant e$，

由于 $p(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递减，故 $p(t)>p(s)$，即 $\dfrac{\ln(x+1)}{x+1}>\dfrac{x}{e^x}$.

综上，原命题得证.

2.【解】(1)当 $a=e$ 时，$f(x)=x(e^x-e)-e\ln x=xe^x-xe-e\ln x$，其定义域为 $(0,+\infty)$，

则 $f'(x)=e^x+xe^x-e-\dfrac{e}{x}=\dfrac{(x+1)(xe^x-e)}{x}$，

所以显然当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，此时 $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(1)=0$，无极大值.

综上所述，$f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$，$f(x)$ 有极小值 0，无极大值.

(2) $f(x)=x(e^x-a)-a\ln x=xe^x-a(x+\ln x)=xe^x-a\ln(xe^x)$，令 $t=xe^x$，

点悟：通过换元，简化解析式

因为 $t'=(x+1)e^x>0$，所以 $t=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $t>0$，

令 $h(t)=t-a\ln t$，即 $h(t)$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上有 2 个零点 $t_1,t_2$，且 $t_1=x_1e^{x_1}$，$t_2=x_2e^{x_2}$，

因为 $h'(t)=1-\dfrac{a}{t}=\dfrac{t-a}{t}$，

当 $a\leqslant 0$ 时，$h'(t)>0$，$h(t)$ 在 $t\in(0,+\infty)$ 上单调递增，不存在 2 个零点，所以 $a>0$，

当 $t\in(0,a)$ 时，$h'(t)<0$；当 $t\in(a,+\infty)$ 时，$h'(t)>0$.

所以 $h(t)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，

则 $h(t)_{\min}=h(a)=a(1-\ln a)$.

令 $\varphi(x)=e^x-ex$，$x\in(0,+\infty)$，$\varphi'(x)=e^x-e$，

点悟：利用 $e^x\geqslant ex$ 巧放缩

当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

则 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(1)=0$，所以 $\varphi(x)\geqslant 0$ 恒成立. 即 $e^x\geqslant ex$ 恒成立.

巧思：也可画图证明

因此 $e^{2a}\geqslant 2ea>\sqrt{2}a>0$，

则 $h(e^{2a})=e^{2a}-2a^2=(e^a-\sqrt{2}a)(e^a+\sqrt{2}a)>0$，

因为 $t\to 0$ 时，$h(t)\to+\infty$，且 $h(e^{2a})>0$，

所以当 $h(t)_{\min}=a(1-\ln a)<0$，即 $a\in(e,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 有 2 个不同的零点.

又 $x_2e^{x_2}>2x_1e^{x_1}$，即 $t_2>2t_1$，$t_1,t_2\in(0,+\infty)$，$h(t)=0$ 等价于 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{\ln t}{t}$，

设 $F(t)=\dfrac{\ln t}{t}$，则 $F'(t)=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$.

当 $t\in(0,e)$ 时，$F'(t)>0$；当 $t\in(e,+\infty)$ 时，$F'(t)<0$.

则 $F(t)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，则 $F(t)_{\max}=F(e)=\dfrac{1}{e}$，

由题意得 $1<t_1<e<t_2$.

(ⅰ)当 $2t_1\leqslant e$，即 $t_1\leqslant\dfrac{e}{2}$ 时，$t_2>2t_1$ 恒成立；

(ⅱ)当 $2t_1>e$，即 $t_1>\dfrac{e}{2}$ 时，有 $F(t_1)=F(t_2)<F(2t_1)$，

令 $G(t)=F(t)-F(2t)$，$t\in\left(\dfrac{e}{2},e\right)$，

由 $G(t)<0$，即 $\dfrac{\ln t}{t}-\dfrac{\ln(2t)}{2t}=\dfrac{\ln t-\ln 2}{2t}<0$ 可得 $t<2$，所以 $t_1\in\left(\dfrac{e}{2},2\right)$.

综上，$t_1\in(1,2)$，因此 $\dfrac{1}{a}=F(t_1)\in\left(0,\dfrac{\ln 2}{2}\right)$，即 $a$ 的取值范围为 $\left(\dfrac{2}{\ln 2},+\infty\right)$.

**方法技巧**　常考结论有：①$e^x\geqslant x+1(x=0$ 时取等号$)$；②$1-\dfrac{1}{x}\leqslant\ln x\leqslant x-1(x>0$，$x=1$ 时取等号$)$；③$\ln x\leqslant\dfrac{x}{e}(x=e$ 时取等号$)$；④$x\geqslant\sin x(x\geqslant 0)$；⑤$e^x\geqslant ex(x=1$ 时取等号$)$；⑥$e^x>x^2(x\geqslant 0)$.

3.【解】(1) $f(1)=e^{1-a}-2a+1$，令 $m(x)=f'(x)=e^{x-a}+2ax-3a$，

敲黑板：将函数零点问题转化为函数的极值问题，结合零点存在定理求解

则 $f'(1)=e^{1-a}-a$，

当 $a>1$ 时，$m'(x)=e^{x-a}+2a>0$，则 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $f'(1)=e^{1-a}-a<e^{1-1}-1=0$，$f'(a)=1+2a^2-3a=(2a-1)(a-1)>0$，

所以存在唯一的 $x_0\in(1,a)$，使得 $f'(x_0)=0$.

当 $x\in[1,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $[1,x_0)$ 上单调递减；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f(1)=e^{1-a}-2a+1<e^0-2+1=0$，所以 $f(x_0)<f(1)<0$，又 $f(3)=e^{3-a}+1>0$，

所以当 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上零点的个数为 1.

(2)①当 $a>1$ 时，$f(1)=e^{1-a}-2a+1<e^0-2+1=0$，与当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 0$ 矛盾，故 $a>1$ 不满足题意.

②当 $a\leqslant 1$ 时，$f(0)=e^{-a}+1>0$，$f'(x)=e^{x-a}+2ax-3a$，

令 $m(x)=f'(x)$，则 $m'(x)=e^{x-a}+2a$，$m'(0)=e^{-a}+2a$.

记函数 $q(x)=e^{-x}+2x$，$x\leqslant 1$，则 $q'(x)=-e^{-x}+2$，

当 $x\in(-\ln 2,1)$ 时，$q'(x)>0$，所以 $q(x)$ 在 $(-\ln 2,1)$ 上单调递增；

当 $x\in(-\infty,-\ln 2)$ 时，$q'(x)<0$，所以 $q(x)$ 在 $(-\infty,-\ln 2)$ 上单调递减，

所以 $q(x)\geqslant q(-\ln 2)=2-2\ln 2>0$，所以 $m'(0)>0$.

又因为 $m'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $m'(x)\geqslant m'(0)>0$，

所以 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

点悟：根据 $f'(0)=e^{-a}-3a$ 的正负分类讨论

(ⅰ)若 $f'(0)=e^{-a}-3a\geqslant 0$，则 $\exists a_0\in(0,1)$，使得 $e^{-a_0}-3a_0=0$，即 $a\leqslant a_0$，

则 $f'(x)\geqslant f'(0)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

则 $f(x)\geqslant f(0)>0$，符合题意；

(ⅱ)若 $f'(0)=e^{-a}-3a<0$，

则 $a\in(a_0,1]$，

因为 $f'(1)=e^{1-a}-a\geqslant 0$，且 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

所以存在唯一的 $x_1\in(0,1]$，使得 $f'(x_1)=0$.

当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上单调递减，

当 $x\in(x_1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_1,+\infty)$ 上单调递增，

其中 $x_1\in(0,1]$，且 $e^{x_1-a}+2ax_1-3a=0$.

所以 $f(x)\geqslant f(x_1)=e^{x_1-a}+ax_1^2-3ax_1+1=3a-2ax_1+ax_1^2-3ax_1+1=ax_1^2-5ax_1+3a+1=a(x_1^2-5x_1+3)+1$，

因为 $x_1\in(0,1]$，所以 $x_1^2-5x_1+3\in[-1,3)$.

又因为 $a\in(a_0,1]$，所以 $a(x_1^2-5x_1+3)\geqslant -1$，

所以 $f(x)\geqslant 0$，满足题意.

结合①②可知,当 $a\leqslant 1$ 时,满足题意.
综上,$a$ 的取值范围为 $(-\infty,1]$.

4. (1)【解】函数 $f(x)=xe^x-e^x+a(a\in\mathbf{R})$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x)=xe^x$,
由 $f'(x)>0$,解得 $x>0$,故 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增;
由 $f'(x)<0$,解得 $x<0$,故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递减,
故 $f(x)$ 的最小值是 $f(0)=a-1\geqslant 0$,解得 $a\geqslant 1$,所以实数 $a$ 的取值范围为 $[1,+\infty)$.
(2)【证明】由(1)知,当 $a=1$ 时, $xe^x-e^x+1\geqslant 0$,
令 $t=e^x(t>0)$,得 $t\ln t-t+1\geqslant 0$,即 $\ln t\geqslant 1-\frac{1}{t}$,当且仅当 $t=1$ 时等号成立.
令 $t=\frac{n+k}{n+k-1}$, $k\in\{0,1,2,\cdots,n\}$,则 $t>1$,则 $\ln\frac{n+k}{n+k-1}>\frac{1}{n+k}$,
所以 $\frac{1}{n+k}<\ln\frac{n+k}{n+k-1}=\ln(n+k)-\ln(n+k-1)$,
令 $g(x)=x-\sin x(x\geqslant 0)$,则 $g'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,且 $g'(x)$ 不恒为零,所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,故当 $x>0$ 时, $g(x)>g(0)=0$,
则 $\sin x<x(x>0)$.
所以 $\sin\frac{1}{n+k}<\frac{1}{n+k}<\ln(n+k)-\ln(n+k-1)$, $k\in\{0,1,2,\cdots,n\}$,

**方法:** 利用放缩法证明不等式时，一是根据已知条件适当放缩；二是利用常见放缩结论

所以 $\sin\frac{1}{n+1}+\sin\frac{1}{n+2}+\cdots+\sin\frac{1}{2n}<[\ln(n+1)-\ln n]+[\ln(n+2)-\ln(n+1)]+\cdots+[\ln(2n)-\ln(2n-1)]=\ln(2n)-\ln n=\ln\frac{2n}{n}=\ln 2$.

5. (1)【解】$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,
当 $a=-1$ 时, $f(x)=-x-\ln x-\frac{2}{x}$,所以 $f'(x)=-1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=-\frac{x^2+x-2}{x^2}=-\frac{(x+2)(x-1)}{x^2}(x>0)$,
当 $x\in(0,1)$ 时, $f'(x)>0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时, $f'(x)<0$,
所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$,单调递减区间为 $(1,+\infty)$.
(2)【证明】由 $f(x_1)=f(x_2)$,得 $ax_1-\ln x_1-\frac{2}{x_1}=ax_2-\ln x_2-\frac{2}{x_2}$.
所以 $\ln x_2-\ln x_1=a(x_2-x_1)+\frac{2}{x_1}-\frac{2}{x_2}=a(x_2-x_1)+\frac{2(x_2-x_1)}{x_1x_2}$,
则 $\frac{1}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}=a+\frac{2}{x_1x_2}$.
要证 $(x_1+x_2)\left(a+\frac{2}{x_1x_2}\right)<\frac{a+1}{\sqrt{a}}$,
只需证 $(x_1+x_2)\cdot\frac{1}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{a+1}{\sqrt{a}}$,
即证 $\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{a+1}{\sqrt{a}}$,
需证 $\frac{1+\frac{x_2}{x_1}}{\frac{x_2}{x_1}-1}\ln\frac{x_2}{x_1}<\frac{a+1}{\sqrt{a}}$.
令 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$,

**方法:** 在题目中遇到类似 $\frac{x_1+x_2}{x_2-x_1}\ln\frac{x_2}{x_1}$ 时，常设 $t=\frac{x_2}{x_1}$，从而使双变量变为单变量

设 $g(t)=\frac{t+1}{t-1}\ln t(t>1)$,则 $g'(t)=\frac{t-\frac{1}{t}-2\ln t}{(t-1)^2}$,
设 $h(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t\geqslant 1)$,

**提示:** 由于导函数 $g'(t)$ 的分母大于0恒成立，故只需讨论 $g'(t)$ 分子的符号

则 $h'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\left(\frac{1}{t}-1\right)^2>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,
所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,
当 $t>1$ 时, $h(t)>h(1)=0$,
所以 $g'(t)>0$,所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.
由 $ax_2<x_1<x_2$,得 $\frac{1}{a}>\frac{x_2}{x_1}>1$,则 $\frac{1}{a}>1$,所以 $0<a<1$,
所以 $g\left(\frac{x_2}{x_1}\right)<g\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\frac{1}{a}+1}{\frac{1}{a}-1}\ln\frac{1}{a}=\frac{a+1}{1-a}\ln\frac{1}{a}$,
所以需证 $\frac{a+1}{1-a}\ln\frac{1}{a}<\frac{a+1}{\sqrt{a}}$,
即证 $\ln\frac{1}{a}<\frac{1-a}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}$.
令 $u=\frac{1}{\sqrt{a}}$,则 $u>1$,
即证 $2\ln u<u-\frac{1}{u}$.
设 $\varphi(u)=2\ln u-u+\frac{1}{u}$,则 $\varphi'(u)=\frac{2}{u}-1-\frac{1}{u^2}=\frac{-(u-1)^2}{u^2}<0$,
所以 $\varphi(u)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,则 $\varphi(u)<\varphi(1)=0$,
所以 $2\ln u-u+\frac{1}{u}<0$,即 $\ln\frac{1}{a}<\frac{1}{\sqrt{a}}-\sqrt{a}$ 成立,
故 $(x_1+x_2)\left(a+\frac{2}{x_1x_2}\right)<\frac{a+1}{\sqrt{a}}$.

6. (1)【解】$f(x)=a\ln x-x-a$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$.
①当 $a\leqslant 0$ 时, $x>0$, $a-x<0$,则 $f'(x)<0$,
所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.
②当 $a>0$ 时,
当 $0<x<a$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增,
当 $x>a$ 时, $f'(x)<0$,则 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递减,
所以, $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增,在 $(a,+\infty)$ 上单调递减.
综上所述,当 $a\leqslant 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;
当 $a>0$ 时, $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增,在 $(a,+\infty)$ 上单调递减.
(2)①【解】因为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 是 $f(x)$ 的两个零点,
由(1)可知 $a>0$,且 $x_1\in(0,a)$, $x_2\in(a,+\infty)$,
$f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递增,在 $(a,+\infty)$ 上单调递减,
则 $f(x)_{\max}=f(a)=a\ln a-2a>0$,解得 $a>e^2$.
而当 $a>e^2$ 时, $f(1)=-1-a<0$, $f(a^4)=4a\ln a-a^4-a<4a^2-a^4-a<-a<0$,
由 $f(1)f(a)<0$ 且 $f(a)f(a^4)<0$,得 $f(x)$ 在 $(1,a)$ 与 $(a,a^4)$ 各有一个零点.
又由 $f(x)$ 单调性可知, $f(x)$ 至多有两个零点.
故当 $a>e^2$ 时, $f(x)$ 有两个零点.
综上可知, $a$ 的取值范围是 $(e^2,+\infty)$.
②【证明】因为 $x_1,x_2(0<x_1<x_2)$ 是 $f(x)$ 的两个零点,
所以 $\begin{cases}a\ln x_1-x_1-a=0,\\ a\ln x_2-x_2-a=0,\end{cases}$ 解得 $a=\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}$,
所以 $f'\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)=\frac{a-\frac{x_2+x_1}{2}}{\frac{x_2+x_1}{2}}=\frac{\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}-\frac{x_2+x_1}{2}}{\frac{x_2+x_1}{2}}$,
令 $x_2=tx_1$,即 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$,代入上式得
$f'\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)=y=\frac{\frac{t-1}{\ln t}-\frac{t+1}{2}}{\frac{t+1}{2}}=\frac{2(t-1)-(t+1)\ln t}{(t+1)\ln t}(t>1)$.
令 $g(t)=2(t-1)-(t+1)\ln t$, $t\geqslant 1$,
则 $g'(t)=1-\frac{1}{t}-\ln t$,
令 $\varphi(t)=1-\frac{1}{t}-\ln t$, $t\geqslant 1$,
则 $\varphi'(t)=\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=\frac{1-t}{t^2}<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,
所以 $\varphi(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,且 $\varphi(1)=0$,
所以当 $t>1$ 时, $\varphi(t)<0$,即 $g'(t)<0$,

所以 $g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，且 $g(1)=0$，

所以当 $t>1$ 时，$g(t)<0$，$(t+1)\ln t>0$，

所以 $f'\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)=\frac{2(t-1)-(t+1)\ln t}{(t+1)\ln t}<0$.

由 $\left(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\right)^2-\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)^2=\frac{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}{4}=\frac{(x_1-x_2)^2}{4}>0$，且 $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}>0$，$\frac{x_2+x_1}{2}>0$，

可知 $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}>\frac{x_2+x_1}{2}$.

又因为 $a>0$，则 $f'(x)=\frac{a}{x}-1$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，

所以 $f'\left(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\right)<f'\left(\frac{x_2+x_1}{2}\right)<0$.

故 $f'\left(\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2}{2}}\right)<0$ 得证.

**归纳总结** 与零点 $x_1,x_2$ 有关的双变量问题，一般是根据 $x_1,x_2$ 是方程 $f(x)=0$ 的两个根，确定 $x_1,x_2$ 的关系，通过消元转化为只含有 $x_1$ 或 $x_2$ 的关系式，再构造函数解题，有时也可以把所给条件转化为 $x_1,x_2$ 的齐次式，然后转化为关于 $\frac{x_2}{x_1}$ 的函数.

**7.** (1)【解】因为 $f(x)=x^3-ax^2(x\in\mathbf{R})$，所以 $f'(x)=3x^2-2ax$.

若 $a=0$，则 $f'(x)=3x^2\geqslant0$，且 $f'(x)$ 不恒为0，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，没有极值，故舍去.

若 $a<0$，当 $x<\frac{2a}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $\left(-\infty,\frac{2a}{3}\right)$ 上单调递增，当 $\frac{2a}{3}<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2a}{3},0\right)$ 上单调递减，

当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f(0)=0$，不符合题意，故舍去.

若 $a>0$，当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，

当 $0<x<\frac{2a}{3}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{2a}{3}\right)$ 上单调递减，

当 $x>\frac{2a}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(\frac{2a}{3}\right)=-\frac{4}{27}a^3=-4$，

所以 $a=3$.

(2)【证明】由(1)知，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上单调递增，在区间 $(0,2)$ 上单调递减，在区间 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

所以不妨设 $0<x_1<2<x_2<3$.

下面先证 $x_1+x_2<4$：

要证 $x_1+x_2<4$，即证 $x_1<4-x_2$，因为 $0<x_1<2<x_2<3$，所以 $1<4-x_2<2$，又因为 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 上单调递减，

所以只需证 $f(x_1)>f(4-x_2)$，又因为 $f(x_1)=f(x_2)$，

所以只需证 $f(x_2)>f(4-x_2)$，即证 $f(x_2)-f(4-x_2)>0$.

设 $g(x)=f(x)-f(4-x)\ (2\leqslant x\leqslant3)$，

**突破点**

则 $g'(x)=f'(x)+f'(4-x)=3x(x-2)+3(4-x)(4-x-2)=6(x-2)^2>0$ 在 $(2,3)$ 上恒成立，

所以 $g(x)$ 在 $(2,3)$ 上单调递增，

所以当 $x\in(2,3)$ 时，$g(x)>g(2)=0$，所以 $f(x_2)-f(4-x_2)>0$，所以 $x_1<4-x_2$.

下面证 $3<x_1+x_2$：

设 $h(x)=2x^2-6x\ (0<x<3)$，因为 $f(x)-h(x)=x^3-5x^2+6x=x(x-2)(x-3)$，

当 $x\in(0,2)$ 时，$f(x)>h(x)$；当 $x\in(2,3)$ 时，$f(x)<h(x)$.

函数 $h(x)$ 的图象的对称轴方程为 $x=\frac{3}{2}$，

且 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{3}{2},3\right)$ 上单调递增.

设 $x_3\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$，使得 $f(x_1)=h(x_3)=t$，因为 $f(x_1)>h(x_1)$，

所以 $h(x_3)>h(x_1)$，所以 $x_3<x_1$.

设 $x_4\in(2,3)$，使得 $f(x_2)=h(x_4)=t$，因为 $f(x_2)<h(x_2)$，

所以 $h(x_4)<h(x_2)$，所以 $x_4<x_2$.

因为 $h(x_3)=h(x_4)=t$，所以 $x_3+x_4=3$，所以 $3=x_3+x_4<x_1+x_2$.

综上，$3<x_1+x_2<4$.

**8.** (1)【解】$g(x)=2x+\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，

对任意的 $x_1,x_2\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 且 $x_1\neq x_2$，

有 $2x_1+\frac{1}{x_1}=2x_2+\frac{1}{x_2}$，

即 $2x_1-2x_2+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=2(x_1-x_2)+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(x_1-x_2)\left(2-\frac{1}{x_1x_2}\right)=0$，

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1-x_2\neq0$，故 $\frac{1}{x_1x_2}=2$，

故 $x_1x_2=\frac{1}{2}$，故 $m=\frac{1}{2}$.

(2)(ⅰ)【解】$h(x)$ 不具有性质 $V(m)$，理由如下：

$h(x)=x-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$，

当 $x>1$ 时，$h'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$h'(x)<0$，

故 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增.

又 $x_2>x_1$，所以 $0<x_1<1<x_2$，

假设函数 $h(x)$ 具有性质 $V(m)$，即 $x_2x_1=m$，所以 $x_2=\frac{m}{x_1}$，

因为 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$，所以 $x_1-\ln x_1=\frac{m}{x_1}-\ln\frac{m}{x_1}=\frac{m}{x_1}-\ln m+\ln x_1$，

故 $x_1-\frac{m}{x_1}-2\ln x_1+\ln m=0$ 对于任意的 $x_1\in(0,1)$ 恒成立，

即 $x_1-\frac{m}{x_1}-2\ln x_1+\ln m$ 恒为0，显然不可能，故假设不成立，

故 $h(x)$ 不具有性质 $V(m)$.

(ⅱ)【证明】因为 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$，所以 $\ln x_2-\ln x_1=x_2-x_1$，所以 $\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1$，

下面证明 $\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，

即证 $\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_1x_2}}>\ln\frac{x_2}{x_1}\Rightarrow\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}>\ln\frac{x_2}{x_1}$，

令 $\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}=t>1$，则 $t-\frac{1}{t}>2\ln t\Rightarrow t-\frac{1}{t}-2\ln t>0$，

令 $p(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$，

则 $p'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{t^2-2t+1}{t^2}=\frac{(t-1)^2}{t^2}>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，

故 $p(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 上单调递增，

故当 $t>1$ 时，$p(t)>p(1)=0$，即 $t-\frac{1}{t}-2\ln t>0$，

所以 $\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}>\sqrt{x_1x_2}$，即 $1>\sqrt{x_1x_2}$，所以 $x_1x_2<1$.

当 $1<x_2\leqslant2$ 时，$x_1x_2^2=x_1x_2\cdot x_2<2$.

当 $x_2>2$ 时，令 $h(x_1)-h\left(\frac{2}{x_2^2}\right)=x_1-\ln x_1-\frac{2}{x_2^2}+\ln\frac{2}{x_2^2}=x_1-\ln x_1-\frac{2}{x_2^2}+\ln 2-2\ln x_2$

$=x_2-\ln x_2-\frac{2}{x_2^2}+\ln 2-2\ln x_2=x_2-3\ln x_2-\frac{2}{x_2^2}+\ln 2$，

令 $q(x)=x-3\ln x-\frac{2}{x^2}+\ln 2$，

则 $q'(x)=1-\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}=\frac{x^3-3x^2+4}{x^3}=$

$\frac{(x-2)^2(x+1)}{x^3}>0$ 在 $(2,+\infty)$ 上恒成立,

故 $q(x)=x-3\ln x-\frac{2}{x^2}+\ln 2$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增,

又 $q(2)=\frac{3}{2}-2\ln 2=\ln e^{\frac{3}{2}}-\ln 4$,其中 $e^3-16>0$,所以 $e^{\frac{3}{2}}>4$,

所以 $q(2)>0$,故 $h(x_1)-h\left(\frac{2}{x_2^2}\right)=x_2-3\ln x_2-\frac{2}{x_2^2}+\ln 2>0$,

所以 $h(x_1)>h\left(\frac{2}{x_2^2}\right)$,其中 $x_1\in(0,1)$,$\frac{2}{x_2^2}\in(0,1)$,而 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,

故 $x_1<\frac{2}{x_2^2}$,即 $x_1x_2^2<2$.

综上,$x_1x_2^2<2$.

**归纳总结** 对数均值不等式:$\sqrt{x_1x_2}<\frac{x_1-x_2}{\ln x_1-\ln x_2}<\frac{x_1+x_2}{2}(x_1>0,x_2>0,x_1\neq x_2)$,在处理函数极值点偏移问题上经常用到,对数均值不等式综合体现了函数构造和放缩的思想,有时也会与根与系数的关系综合应用,熟记对数均值不等式及其变形形式是解题的关键.对数均值不等式的应用一般出现在解答题中,但注意该不等式不能直接使用,需要给出证明过程.

## 刷上分

1.【解】(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,

当 $a=1$ 时,$f(x)=x-\ln x$,则 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,

$\therefore f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 1,无极大值.

(2) $h(x)=x+\frac{1+a}{x}-a\ln x$,$h'(x)=1-\frac{1+a}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax-(1+a)}{x^2}=\frac{(x+1)[x-(1+a)]}{x^2}$.

①当 $a+1>0$,即 $a>-1$ 时,在 $(0,1+a)$ 上 $h'(x)<0$,在 $(1+a,+\infty)$ 上 $h'(x)>0$,

$\therefore h(x)$ 在 $(0,1+a)$ 上单调递减,在 $(1+a,+\infty)$ 上单调递增;

②当 $a+1\leqslant 0$,即 $a\leqslant -1$ 时,在 $(0,+\infty)$ 上 $h'(x)>0$,

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

故当 $a>-1$ 时,$h(x)$ 的单调递增区间为 $(1+a,+\infty)$,单调递减区间为 $(0,1+a)$;当 $a\leqslant -1$ 时,$h(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$,无单调递减区间.

(3) 在 $[1,e]$ 上存在一点 $x_0$,使得 $f(x_0)<g(x_0)$ 成立,

即在 $[1,e]$ 上存在一点 $x_0$,使得 $h(x_0)<0$,即函数 $h(x)=x+\frac{1+a}{x}-a\ln x$ 在 $[1,e]$ 上的最小值小于零.

由(2)可知,①当 $1+a\geqslant e$,即 $a\geqslant e-1$ 时,$h(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递减,

$\therefore h(x)$ 的最小值为 $h(e)$,由 $h(e)=e+\frac{1+a}{e}-a<0$,可得 $a>\frac{e^2+1}{e-1}$,

$\because \frac{e^2+1}{e-1}>e-1$,$\therefore a>\frac{e^2+1}{e-1}$;

②当 $1+a\leqslant 1$,即 $a\leqslant 0$ 时,$h(x)$ 在 $[1,e]$ 上单调递增,

$\therefore h(x)$ 的最小值为 $h(1)$,由 $h(1)=1+1+a<0$,可得 $a<-2$;

③当 $1<1+a<e$,即 $0<a<e-1$ 时,$h(x)$ 的最小值为 $h(1+a)$,

$\because 0<\ln(1+a)<1$,$\therefore 0<a\ln(1+a)<a$,

故 $h(1+a)=2+a-a\ln(1+a)>2$,

此时 $h(1+a)<0$ 不成立.

综上 $a$ 的取值范围是 $\left\{a\,\middle|\,a>\frac{e^2+1}{e-1}\text{或}a<-2\right\}$.

2.【解】(1) $f'(x)=\frac{\lambda}{x+1}-\cos x$,则 $f'(0)=\lambda-1$,$f(0)=0$,

故切线方程为 $(\lambda-1)x-y=0$.

(2) 当 $\lambda=1$ 时,$f(x)=\ln(x+1)-\sin x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\cos x$,

当 $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时,$-\cos x\geqslant 0$,$\frac{1}{x+1}>0$,所以 $f'(x)>0$,即 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增,

又 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-1<0$,$f(\pi)=\ln(\pi+1)>0$,所以在 $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上有且仅有一个零点;

当 $x\in[\pi,+\infty)$ 时,$f(x)=\ln(x+1)-\sin x>\ln(\pi+1)-1>0$,所以在 $[\pi,+\infty)$ 上无零点.

综上,$f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{2},+\infty\right)$ 上零点的个数为 1.

(3) 由 $f(x)\geqslant 2(1-e^x)$,即 $\lambda\ln(x+1)-\sin x\geqslant 2(1-e^x)$,

整理得 $2e^x-\sin x+\lambda\ln(x+1)-2\geqslant 0$,

令 $g(x)=2e^x-\sin x+\lambda\ln(x+1)-2$,则 $g'(x)=2e^x-\cos x+\frac{\lambda}{x+1}$,

当 $\lambda\geqslant 0$ 时,对任意 $x\in[0,\pi]$ 有 $\cos x\in[-1,1]$,又 $2e^x\geqslant 2$,$\frac{\lambda}{x+1}\geqslant 0$,

所以 $g'(x)>0$,此时 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增,故 $g(x)\geqslant g(0)=0$,符合题意.

当 $\lambda<0$ 时,令 $h(x)=g'(x)$,则 $h'(x)=2e^x+\sin x-\frac{\lambda}{(x+1)^2}$,

所以,在 $x\in[0,\pi]$ 上 $h'(x)>0$ 恒成立,即 $h(x)=g'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增.

又 $g'(0)=\lambda+1$,$g'(\pi)=2e^\pi+1+\frac{\lambda}{\pi+1}$.

当 $\lambda+1\geqslant 0$,即 $-1\leqslant\lambda<0$ 时,在 $[0,\pi]$ 上有 $g'(x)\geqslant 0$,

此时 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增,$g(x)\geqslant g(0)=0$,符合题意.

当 $\lambda+1<0$,即 $\lambda<-1$ 时,若 $g'(\pi)>0$,即 $-(\pi+1)(2e^\pi+1)<\lambda<-1$,

由函数零点存在定理得存在 $x_0\in(0,\pi)$ 使 $g'(x_0)=0$,故在 $x\in(0,x_0)$ 上 $g'(x)<0$.

所以 $g(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 上单调递减,此时 $g(x_0)<g(0)=0$,不合题意;

若 $g'(\pi)\leqslant 0$,即 $\lambda\leqslant-(\pi+1)(2e^\pi+1)$,此时 $\forall x\in[0,\pi]$ 恒有 $g'(x)\leqslant 0$ 且不恒为 0,

即 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减,所以 $g(\pi)<g(0)=0$,不合题意.

综上,$\lambda$ 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

**方法技巧** **隐零点问题的处理思路**

第一步:用函数零点存在定理判断导函数零点的存在性,其中难点是通过合理赋值,敏锐捕捉零点存在的区间,有时还需结合函数单调性明确零点的个数;

第二步:虚设零点并确定取值范围,通过与零点有关的方程实施代换,如指数与对数互换,复杂函数与简单函数的替换,利用同构思想等解决,需要注意的是代换可能不止一次.

3. (1)【解】根据题意可设 $f(x)=x^\alpha$,代入 $A\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ 可得 $\alpha=\frac{1}{2}$,即 $f(x)=\sqrt{x}=y$,

则 $y^2=x$,由反函数的概念知 $g(x)=x^2$,

所以 $F(x)=\sqrt{x}-x^2(x\geqslant 0)$,则 $F'(x)=\frac{\sqrt{x}-4x^2}{2x}=\frac{1-4x^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{x}}$,

①易知 $F\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{16}$,$F'\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$,

则曲线 $y=F(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{4},F\left(\frac{1}{4}\right)\right)$ 处的切线方程为 $y-\frac{7}{16}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\right)$,

整理得 $x-2y+\frac{5}{8}=0$.

②令 $F'(x)=0\Rightarrow 1-4x^{\frac{3}{2}}=0$,即 $x=2^{-\frac{4}{3}}$,

当 $x\in(0,2^{-\frac{4}{3}})$ 时,$F'(x)>0$,此时 $F(x)$ 单调递增,

当 $x\in(2^{-\frac{4}{3}},+\infty)$ 时,$F'(x)<0$,此时 $F(x)$ 单调递减,

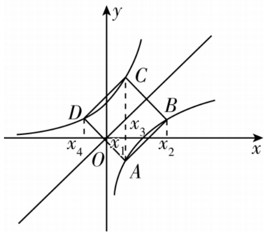
所以函数 $F(x)$ 的极大值点为 $2^{-\frac{4}{3}}$,没有极小值点.

(2)【证明】由 $f(x)=\ln x$ 得其反函数为 $g(x)=e^x$,

所以 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称,且由其性质可知 $f(x)-g(x)<0$,

根据对称性可设 $A,D$ 关于直线 $y=x$ 对称，$B,C$ 关于直线 $y=x$ 对称，则 $AB\perp AD$，

设 $A(x_1,\ln x_1)$，$B(x_2,\ln x_2)$，$C(x_3,\mathrm{e}^{x_3})$，$D(x_4,\mathrm{e}^{x_4})$，其中 $0<x_1<x_2$，$x_4<x_3$，如图，




则 $x_4=\ln x_1$，$x_3=\ln x_2$，$x_2=\mathrm{e}^{x_3}$，$x_1=\mathrm{e}^{x_4}$.

因为“关联矩形”是正方形，

所以 $k_{AB}=k_{DC}=1$，$k_{AD}=k_{BC}=-1$，且 $|AB|=|BC|$，

所以 $|AB|=\sqrt{2}(x_2-x_1)=\sqrt{2}(\ln x_2-\ln x_1)$，$|BC|=\sqrt{2}(x_2-x_3)$，

由 $|AB|=|BC|$，得 $x_1=x_3=\ln x_2$，所以 $x_2=\mathrm{e}^{x_3}=\mathrm{e}^{x_1}$，

所以由 $\ln x_2-\ln x_1=x_2-x_3$ 得 $x_1-\ln x_1=\mathrm{e}^{x_1}-x_1$，即 $\mathrm{e}^{x_1}-2x_1+\ln x_1=0$.

对于函数 $t(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，$x\geqslant 0$，则 $t'(x)=\mathrm{e}^x-1\geqslant 0$，当且仅当 $x=0$ 时取等号，

故函数 $t(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $x>0$ 时，$t(x)>t(0)=0$，即 $\mathrm{e}^x>x+1$，

令 $h(x)=\mathrm{e}^x-2x+\ln x$，$x>0$，

则 $h(x_1)=\mathrm{e}^{x_1}-2x_1+\ln x_1=0$，且 $h'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}-2>x+1+\frac{1}{x}-2\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+1-2=1>0$，当且仅当 $x=1$ 时等号成立，

则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

因为 $h\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}-1-\ln 2<0$，

所以 $x_1>\frac{1}{2}$.

因为 $S=|AB|^2=2(x_2-x_1)^2=2(\mathrm{e}^{x_1}-x_1)^2$，

令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-x$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-1$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，

则 $\varphi(x_1)=\mathrm{e}^{x_1}-x_1>\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}>0$，

从而 $S=2(\mathrm{e}^{x_1}-x_1)^2>2\left(\sqrt{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}\right)^2$.

4. **思路导引** (1)本题根据牛顿法解高次方程，结合曲线上某点处的导数即为在该点处的切线的斜率，求得切线方程，再求出该切线与 $x$ 轴的交点，采用逐步逼近的方法求得高次方程的近似解；

(2)根据(1)的条件逐步求得 $x_1,x_2,x_3,\cdots$，从而递推出 $x_n$ 与 $x_{n-1}$ 的关系式，进一步求出数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

(3)先求出 $g(x)=\frac{(x+1)^3}{x}$，然后判断 $g(x)=\frac{(x+1)^3}{x}$ 的单调性，最后得到 $0<a<\frac{1}{2}<b$，然后不妨设函数 $F(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{4x}\right)$，判断其单调性，然后得到 $F(a)<F\left(\frac{1}{2}\right)=0$，得到 $g(a)<g\left(\frac{1}{4a}\right)$，利用 $g(a)=g(b)$ 以及 $g(x)$ 的单调性，得到 $b<\frac{1}{4a}$，最后化简即可.

(1)**【解】**由题意得 $f'(x)=3(x+1)^2$，因为 $x_0=1$，所以 $f(1)=2^3=8$，$f'(1)=3\times 2^2=12$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,8)$ 处的切线方程为 $y-8=12(x-1)$，即 $12x-y-4=0$，令 $y=0$，得 $x=\frac{1}{3}$，即 $x_1=\frac{1}{3}$.

又因为 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}+1\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}$，$f'\left(\frac{1}{3}\right)=3\times\left(\frac{1}{3}+1\right)^2=\frac{16}{3}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{3},\frac{64}{27}\right)$ 处的切线方程为 $y-\frac{64}{27}=\frac{16}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)$，令 $y=0$，得 $x=-\frac{1}{9}$，即 $x_2=-\frac{1}{9}$.

综上，$x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=-\frac{1}{9}$.

(2)**【解】**在(1)的条件下，$x_n=\frac{2}{3}x_{n-1}-\frac{1}{3}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

因为 $f(x_{n-1})=(x_{n-1}+1)^3$，$f'(x_{n-1})=3(x_{n-1}+1)^2$，

所以曲线 $y=f(x)=(x+1)^3$ 在点 $(x_{n-1},f(x_{n-1}))$ 处的切线方程为 $y-(x_{n-1}+1)^3=3(x_{n-1}+1)^2(x-x_{n-1})$，

令 $y=0$，得 $x=\frac{-(x_{n-1}+1)^3}{3(x_{n-1}+1)^2}+x_{n-1}=\frac{-(x_{n-1}+1)}{3}+x_{n-1}=\frac{2}{3}x_{n-1}-\frac{1}{3}$，

即 $x_n=\frac{2}{3}x_{n-1}-\frac{1}{3}$，

所以 $x_n+1=\frac{2}{3}(x_{n-1}+1)$，即 $\frac{x_n+1}{x_{n-1}+1}=\frac{2}{3}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $\{x_{n-1}+1\}$ 是首项为 $x_0+1=2$，公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列，

所以 $x_{n-1}+1=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$，即 $x_{n-1}=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，

所以 $x_n=2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

(3)**【证明】**由题可知 $g(x)=\frac{(x+1)^3}{x}$，$x>0$，

得 $g'(x)=\frac{(x+1)^2(2x-1)}{x^2}$，

显然当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$，此时 $g(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，此时 $g(x)$ 单调递增.

又因为 $a,b$ 是两个正实数，且 $g(a)=g(b)$，

所以不妨设 $0<a<\frac{1}{2}<b$.

设函数 $F(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{4x}\right)$，故 $F'(x)=\frac{(2x-1)^2(4x^2+2x+1)}{8x^3}$，

显然当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$F'(x)>0$，此时 $F(x)=g(x)-g\left(\frac{1}{4x}\right)$ 单调递增，

所以 $F(a)<F\left(\frac{1}{2}\right)=0$，即 $g(a)-g\left(\frac{1}{4a}\right)<0$，即 $g(a)<g\left(\frac{1}{4a}\right)$.

又因为 $g(a)=g(b)$，所以 $g(b)<g\left(\frac{1}{4a}\right)$，

因为 $0<a<\frac{1}{2}<b$，所以 $b>\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4a}>\frac{1}{2}$，

因为当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$g(x)$ 单调递增，

所以 $b<\frac{1}{4a}\Rightarrow ab<\frac{1}{4}$.

又因为 $a,b$ 是两个正实数，所以 $0<ab<\frac{1}{4}$.

## 热点考向 2 新考法

1. (1)**【证明】**因为 $a,c,a+b$ 成等比数列，所以 $c^2=a(a+b)=a^2+b^2-2ab\cos C$，

化简得 $a=b-2a\cos C$，由正弦定理得 $\sin A=\sin B-2\sin A\cos C=\sin(A+C)-2\sin A\cos C$，

则 $\sin A=\sin A\cos C+\cos A\sin C-2\sin A\cdot\cos C=\cos A\sin C-\sin A\cos C$

即 $\sin A=\sin(C-A)$.

又 $\triangle ABC$ 为锐角，所以 $A=C-A$，即 $C=2A$.

(2)**【解】**由(1)知，在锐角三角形 $ABC$ 中，

$C=2A$，故 $\begin{cases}0<A<\frac{\pi}{2},\\0<2A<\frac{\pi}{2},\\0<\pi-3A<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$.

$\frac{c-a}{b}=\frac{\sin C-\sin A}{\sin B}=\frac{\sin 2A-\sin A}{\sin(A+C)}$

$=\frac{2\sin A\cos A-\sin A}{\sin(A+2A)}$

$=\frac{2\sin A\cos A-\sin A}{\sin A\cos 2A+\cos A\sin 2A}$

$=\frac{2\sin A\cos A-\sin A}{\sin A\cos 2A+2\sin A\cos^2 A}$

$=\frac{2\cos A-1}{\cos 2A+2\cos^2 A}=\frac{2\cos A-1}{4\cos^2 A-1}$

$=\frac{2\cos A-1}{(2\cos A+1)(2\cos A-1)}=\frac{1}{2\cos A+1}$,

由于$\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$,故$\sqrt{2}+1<2\cos A+1<\sqrt{3}+1$,

则$\frac{1}{\sqrt{3}+1}<\frac{1}{2\cos A+1}<\frac{1}{\sqrt{2}+1}$,即$\frac{c-a}{b}\in\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\sqrt{2}-1\right)$.

(3)【证明】由$C=2A,\frac{\pi}{6}<A<\frac{\pi}{4}$可得$\frac{\sqrt{2}}{2}<\cos A<\frac{\sqrt{3}}{2}$.

则$\cos A+\cos B+\cos C=\cos A-\cos 3A+\cos 2A=\cos A-\cos(A+2A)+2\cos^2A-1=\cos A-\cos A(2\cos^2A-1)+2\sin^2A\cos A+2\cos^2A-1=-2\cos^3A+2\cos^2A+2\cos A+2(1-\cos^2A)\cos A-1=-4\cos^3A+2\cos^2A+4\cos A-1$,

设$x=\cos A,\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{3}}{2},f(x)=-4x^3+2x^2+4x-1$,则$f'(x)=-4(3x^2-x-1)$,

点悟:使用换元法时要注意新元的取值范围

令$f'(x)=0$,解得$x_1=\frac{1+\sqrt{13}}{6}$,$x_2=\frac{1-\sqrt{13}}{6}$(舍去),

故$f(x)$在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$上单调递减.

又$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+4\times\frac{\sqrt{2}}{2}-1=-\sqrt{2}+1+2\sqrt{2}-1=\sqrt{2}$,$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-4\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+2\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+4\times\frac{\sqrt{3}}{2}-1=-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}+2\sqrt{3}-1=\frac{\sqrt{3}+1}{2}<\sqrt{2}$.

故$\cos A+\cos B+\cos C>f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,即得证.

2. **思路导引** 本题利用三角函数的性质及导数研究函数的零点、极值点得出$\{a_n\}$,$\{b_n\}$通项,再计算$\{c_n\}$,分离得$\sqrt{2}k\le\frac{e^{\frac{2n-1}{4}\pi}}{\frac{2n-1}{4}\pi}$后构造函数$h(t)=\frac{e^t}{t}$,判断其单调性并计算最小值即可.

(1)【证明】令$g(x)=0$,即$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$,

解得$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

由题意可知$a_n=\frac{\pi}{4}+(n-1)\pi=n\pi-\frac{3\pi}{4}$,$n\in\mathbf{N}^*$,

$f(a_n)=e^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}\sin\left(n\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}e^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}$,

$f(a_{n+1})=e^{n\pi+\frac{\pi}{4}}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)=(-1)^{n+2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}e^{n\pi+\frac{\pi}{4}}$,

因为$f(a_n)\neq 0$,且$\frac{f(a_{n+1})}{f(a_n)}=\frac{(-1)^{n+2}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{n\pi+\frac{\pi}{4}}}{(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{2}}{2}e^{n\pi-\frac{3\pi}{4}}}=-e^{\pi}$是常数,

所以数列$\{f(a_n)\}$是首项为$f(a_1)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$,公比为$-e^{\pi}$的等比数列.

(2)【解】易知$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=\sqrt{2}e^x\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

令$f'(x)=0$,解得$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$,

当$-\pi+2k\pi\le x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi,k\in\mathbf{Z}$,即$-\frac{5\pi}{4}+2k\pi\le x\le 2k\pi-\frac{\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$时,$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 0$,则$f'(x)\le 0$,

当$2k\pi\le x+\frac{\pi}{4}\le 2k\pi+\pi,k\in\mathbf{Z}$,即$-\frac{\pi}{4}+2k\pi\le x\le 2k\pi+\frac{3\pi}{4}$,$k\in\mathbf{Z}$时,$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\ge 0$,则$f'(x)\ge 0$,

因此当$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$时,$y=f(x)$取得极值.

由题意可知$b_n=n\pi-\frac{\pi}{4},n\in\mathbf{N}^*$,

所以$c_n=\frac{\pi}{4}+\frac{(n-1)\pi}{2}=\frac{2n-1}{4}\pi$,$n\in\mathbf{N}^*$,

所以$|f(c_n)|=\left|e^{\frac{2n-1}{4}\pi}\sin\left(\frac{2n-1}{4}\pi\right)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{2n-1}{4}\pi}$.

$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$|f(c_n)|\ge kc_n$恒成立,

即$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{2n-1}{4}\pi}\ge k\frac{2n-1}{4}\pi$恒成立,

亦即$\sqrt{2}k\le\frac{e^{\frac{2n-1}{4}\pi}}{\frac{2n-1}{4}\pi}$恒成立.

设$h(t)=\frac{e^t}{t}(t>0)$,则$h'(t)=\frac{e^t(t-1)}{t^2}$,

令$h'(t)=0$得$t=1$,

当$0<t<1$时,$h'(t)<0$,当$t>1$时,$h'(t)>0$,

所以$h(t)$在区间$(0,1)$上单调递减,在区间$(1,+\infty)$上单调递增.

$c_1\in(0,1)$,当$n\ge 2$时,$c_n\in(1,+\infty)$,且$c_n<c_{n+1}$,$h(c_n)<h(c_{n+1})$.

因为$h(c_1)=\frac{4e^{\frac{\pi}{4}}}{\pi}$,$h(c_2)=\frac{4e^{\frac{3\pi}{4}}}{3\pi}$,$\frac{h(c_2)}{h(c_1)}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{3}>1$,

所以$h(c_n)$的最小值为$h(c_1)=\frac{4e^{\frac{\pi}{4}}}{\pi}$,

因此$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$|f(c_n)|\ge kc_n$恒成立,当且仅当$\sqrt{2}k\le\frac{4e^{\frac{\pi}{4}}}{\pi}$时恒成立,解得$k\le\frac{2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{\pi}$,

所以$k$的最大值是$\frac{2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{\pi}$.

3. (1)【解】由题意得$f(x)=ex-e^x$,

则$f'(x)=e-e^x$,为减函数,

令$f'(x)=e-e^x=0$得$x=1$,

所以当$x<1$时,$f'(x)>0$,$f(x)=ex-e^x$单调递增,

当$x>1$时,$f'(x)<0$,$f(x)=ex-e^x$单调递减,

所以$f(x)$在$x=1$处取得极大值,极大值为$f(1)=0$,无极小值.

(2)【解】因为$x>-1$,所以$x+2>1$,

从而$\forall n\in\mathbf{N}^*$,$f(x)\le(x+2)^n-x-3\Leftrightarrow f(x)\le(x+2)^1-x-3=-1$,

所以$\frac{a}{2}x-e^x\le-1$,即$\frac{a}{2}x-e^x+1\le 0$.

设$g(x)=\frac{a}{2}x-e^x+1,x>-1$,注意到$g(0)=0$,

由题意得$g(x)\le g(0)$,即0为$g(x)$的极大值点,

由$g'(x)=\frac{a}{2}-e^x$,令$g'(0)=\frac{a}{2}-e^0=0$,解得$a=2$,

检验,当$a=2$时,$g'(x)=1-e^x$,

当$x\in(-1,0)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,

当$x\in(0,+\infty)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,

所以$g(x)\le g(0)=0$恒成立,

综上,$a=2$.

(3)【证明】由(2)得$f(x)=x-e^x$,从而$F(x)=\ln x-x+x+\frac{1}{x}=\ln x+\frac{1}{x}$,$x>0$,

则$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$,

令$F'(x)<0$,解得$0<x<1$,令$F'(x)>0$,解得$x>1$,

所以$F(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以 $F(x)\geqslant F(1)=1$，

因为 $a_1\in(0,1)$，所以 $a_2=F(a_1)>1$，$a_3=F(a_2)>1$，…，$a_{n+1}=F(a_n)>1$.

令 $m(x)=F(x)-x=\frac{1}{x}+\ln x-x(x\geqslant 1)$，

则 $m'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{-x^2+x-1}{x^2}=\frac{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}{x^2}<0$，

所以 $m(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，且 $m(x)\leqslant m(1)=0$.

因为 $a_{n+2}-a_{n+1}=F(a_{n+1})-a_{n+1}=m(a_{n+1})$，

又 $a_{n+1}>1$，

所以 $m(a_{n+1})<0$，

所以 $1<a_{n+2}<a_{n+1}$，

所以 $m(a_{n+2})>m(a_{n+1})$，

即 $F(a_{n+2})-a_{n+2}>F(a_{n+1})-a_{n+1}$，

所以 $a_{n+3}-a_{n+2}>a_{n+2}-a_{n+1}$，

故 $a_{n+3}+a_{n+1}>2a_{n+2}$，

又 $a_{n+1}>1$，所以 $a_{n+3}+2a_{n+1}>2a_{n+2}+1$，即 $2a_{n+1}+a_{n+3}-1>2a_{n+2}$，证毕.

4.【解】(1)设样本平均数的估计值为 $\bar{x}$，则

$\bar{x}=10\times(40\times0.01+50\times0.02+60\times0.03+70\times0.024+80\times0.012+90\times0.004)=62$，

所以样本平均数的估计值为62.

设第40百分位数为 $x$，则 $0.03(x-55)+10\times(0.01+0.02)=0.4$，$\therefore x=\frac{175}{3}$.

点悟：根据频率分布直方图得出第40百分位数位于区间[55，65)

(2)因为学生的初试成绩 $X$ 近似服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 $\mu=62$，$\sigma\approx14$，

所以 $\mu+2\sigma\approx62+2\times14=90$，所以 $P(X\geqslant 90)=P(X\geqslant\mu+2\sigma)\approx\frac{1}{2}\times(1-0.9545)=0.02275$.

所以估计能参加复试的人数为 $0.02275\times8000=182$.

(3)由该生获一等奖的概率为 $\frac{1}{8}$ 可知，$a^2b=\frac{1}{8}$，

则 $P=a^2(1-b)+C_2^1a(1-a)b=a^2+2ab-\frac{3}{8}=a^2+\frac{1}{4a}-\frac{3}{8}$.

令 $P=f(a)=a^2+\frac{1}{4a}-\frac{3}{8}$，$0<a<1$，

则 $f'(a)=2a-\frac{1}{4a^2}=\frac{8a^3-1}{4a^2}$，

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f'(a)<0$；当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，$f'(a)>0$，

所以 $f(a)$ 在区间 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递增，

所以 $f(a)_{\min}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$，

所以 $P$ 的最小值为 $\frac{3}{8}$.

# 专题5 三角函数

## 考向18 三角函数的概念与诱导公式

刷考点

**1. ACD** 【解析】若角 $x$ 是第二象限角，则 $0<\sin x<1<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<-1<\cos x<0$，

则 $\sin(\cos x)<0$，$\cos(\sin x)>0$，故A，C，D正确，B错误.

故选ACD.

**2. C** 【解析】由 $\sin(\pi-\theta)<0$，$\cos(\pi+\theta)>0$，可得 $\sin\theta<0$，$\cos\theta<0$，故 $\theta$ 为第三象限角，故选C.

**3. BD** 【解析】由题得，$2k\pi+\frac{\pi}{2}<\alpha<2k\pi+\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，故 $k\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

当 $k=2n$，$n\in\mathbf{Z}$ 时，$2n\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in\mathbf{Z}$，则角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限左上部分(不含边界)；

当 $k=2n+1$，$n\in\mathbf{Z}$ 时，$2n\pi+\frac{5\pi}{4}<\frac{\alpha}{2}<2n\pi+\frac{3\pi}{2}$，$n\in\mathbf{Z}$，则角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第三象限右下部分(不含边界). 所以角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第一象限左上部分或第三象限右下部分(不含边界)，

故 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 的符号不确定且与 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 的大小关系不确定，$\tan\frac{\alpha}{2}>0$，$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|>\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|$. 故A，C错误，B，D正确. 故选BD.

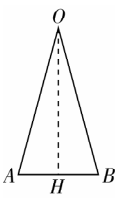
**4. C** 【解析】由大轮有25个齿，小轮有15个齿，大轮每分钟转3圈，可得到小轮每分钟转的圈数为 $\frac{3\times25}{15}=5$，

因此小轮每秒钟转的弧度数为 $\frac{5\times2\pi}{60}=\frac{\pi}{6}$，

所以小轮每秒转过的弧长是 $\frac{\pi}{6}\times2=\frac{\pi}{3}$ cm.

故选C.

**5. A** 【解析】因为圆的半径为 $r$，且圆的内接正十二边形被分成12个如图所示的等腰三角形，其顶角为30°，即 $\angle AOB=30°$，作 $OH\perp AB$ 交 $AB$ 于点 $H$，则 $H$ 为 $AB$ 的中点，且 $\angle AOH=15°$.




因为 $OA=OB=r$，在 Rt$\triangle AOH$ 中，$\sin\angle AOH=\frac{AH}{OA}$，即 $\sin15°=\frac{AH}{r}$，所以 $AH=r\sin15°$，则 $AB=2AH=2r\sin15°$，

所以正十二边形的周长 $L=12\times2r\times\sin15°=24r\sin15°$，

所以 $\pi\approx\frac{L}{2r}=\frac{24r\sin15°}{2r}=12\sin15°$. 故选A.

**6. B** 【解析】根据题意可知 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，

所以 $\frac{\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin^2\theta+\cos^2\theta}=\frac{2}{5}$，

敲黑板：转化为齐次式后，弦切互化

若 $\cos\theta=0$，则 $\sin^2\theta=\frac{2}{5}$，与 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 矛盾，故 $\cos\theta\neq0$，

等式左边分子分母同时除以 $\cos^2\theta$，可得 $\frac{\tan^2\theta+\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{2}{5}$，

化简可得 $3\tan^2\theta+5\tan\theta-2=0$，

解得 $\tan\theta=-2$ 或 $\tan\theta=\frac{1}{3}$.

故选B.

**7. D** 【解析】由 $\sin5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha$，

令 $\alpha=72°$，可得 $\sin360°=5\sin72°-20\sin^372°+16\sin^572°=0$.

设 $t=\sin72°$，则 $16t^5-20t^3+5t=0$，

由 $\sin90°=1>t=\sin72°>\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

得 $\frac{3}{4}<t^2<1$，

由 $16t^5-20t^3+5t=t(16t^4-20t^2+5)=0$，

解得 $t=0$(舍去)或 $t^2=\frac{5-\sqrt{5}}{8}$(舍去)或 $t^2=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$，所以 $\sin72°\cos18°=\sin^272°=\frac{5+\sqrt{5}}{8}$. 故选D.

**8. D** 【解析】因为 $b=\frac{1}{\cos48°}-\sin42°=\frac{1-\cos48°\sin42°}{\cos48°}=\frac{1-\cos^248°}{\cos48°}=\frac{\sin^248°}{\cos48°}$，$0<\cos48°<1$，所以 $b>\sin^248°=a$.

因为 $c=\frac{\tan48°}{1+\tan^248°}=\frac{\sin48°\cos48°}{\sin^248°+\cos^248°}=\sin48°\cos48°$，

$\sin48°>\sin45°=\cos45°>\cos48°>0$，

所以 $\sin^248°>\sin48°\cos48°$，所以 $a>c$，所以 $c<a<b$. 故选D.