$\begin{cases}-2\leqslant 1+a+b\leqslant 2,\\-2\leqslant 9+3a+b\leqslant 2,\\-2\leqslant 25+5a+b\leqslant 2.\end{cases}$ 由 $\begin{cases}-2\leqslant -1-a-b\leqslant 2,\\-2\leqslant 9+3a+b\leqslant 2,\end{cases}$ 两式相加得$-4\leqslant 8+2a\leqslant 4$,解得$-6\leqslant a\leqslant -2$. 再由 $\begin{cases}-2\leqslant -9-3a-b\leqslant 2,\\-2\leqslant 25+5a+b\leqslant 2,\end{cases}$ 两式相加得$-4\leqslant 16+2a\leqslant 4$,解得$-10\leqslant a\leqslant -6$. 故 $a=-6$,代入不等式组得 $\begin{cases}-2\leqslant -5+b\leqslant 2,\\-2\leqslant -9+b\leqslant 2,\\-2\leqslant -5+b\leqslant 2,\end{cases}$ 解得 $b=7$. 经检验,当 $a=-6,b=7$ 时,$f(x)=x^2-6x+7=(x-3)^2-2$,有 $f(x)_{\max}=f(1)=f(5)=2$,$f(x)_{\min}=f(3)=-2$,满足$|f(x)|\leqslant 2$在$[1,5]$上恒成立. 综上,满足要求的有序数对$(a,b)$为$(-6,7)$,共1个,故选 B.

10. $\left\{k\,\middle|\,k\leqslant\dfrac{7}{12}\right\}$ 【解析】由 $x^2+xy+y^2\geqslant 2y+ky-1$ 得 $x^2+xy+y^2-2y-ky+1\geqslant 0$.

因为对任意实数 $x$,不等式成立,所以 $\Delta=y^2-4(y^2-2y-ky+1)\leqslant 0$,

即$-3y^2+8y+4ky-4\leqslant 0$,即存在 $y\in\left[\dfrac{3}{2},3\right]$,使 $4k\leqslant 3y-8+\dfrac{4}{y}$成立.

因为 $f(y)=3y-8+\dfrac{4}{y}=3\left(y+\dfrac{\frac{4}{3}}{y}\right)-8$ 在 $\left[\dfrac{3}{2},3\right]$ 上单调递增,

所以 $f(y)_{\max}=3\times 3-8+\dfrac{4}{3}=\dfrac{7}{3}$,所以 $4k\leqslant\dfrac{7}{3}$,解得 $k\leqslant\dfrac{7}{12}$,

即实数 $k$ 的取值范围是 $\left\{k\,\middle|\,k\leqslant\dfrac{7}{12}\right\}$.

# 专题 3　函数及其性质

## 考向 6　函数的概念

**刷考点**

1. C 【解析】要使 $f(x)=\sqrt{2x+8}+\dfrac{1}{x^2-16}$ 有意义,须使 $\begin{cases}2x+8\geqslant 0,\\x^2-16\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x>-4$ 且 $x\neq 4$,则 $f(x)$ 的定义域是$(-4,4)\cup(4,+\infty)$. 故选 C.

2. D 【解析】函数 $f(x)=\sqrt{x}$,则 $g(x)=f(x-1)+\dfrac{1}{x-2}=\sqrt{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$,

要使 $g(x)$ 有意义,须使 $\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\x-2\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq 2$,所以函数 $g(x)$ 的定义域为$[1,2)\cup(2,+\infty)$. 故选 D.

3. B 【解析】对于 A,$f(x)$,$g(x)$一个为指数函数、一个为对数函数,对应法则不同,因此不是相同函数,A 不符合题意;对于 B,$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|=f(x)$,是相同函数,B 符合题意;对于 C,函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,函数 $g(x)$ 的定义域为$\{x\mid x\neq 0\}$,因此不是相同函数,C 不符合题意;对于 D,$g(x)=\lg(2x)=\lg 2+\lg x$ 与函数 $f(x)=2\lg x$ 对应法则不同,因此不是相同函数,D不符合题意. 故选 B.

4. AB 【解析】由"$[a,b]$交汇函数"的定义可知"$[0,1]$交汇函数"表示函数的定义域与其值域的交集为$[0,1]$.

对于选项 A,$y=\sqrt{1-x}$ 的定义域 $A=(-\infty,1]$,值域 $B=[0,+\infty)$,则 $A\cap B=[0,1]$,A 正确;

对于选项 B,$y=2\sqrt{x}-x$ 的定义域 $A=[0,+\infty)$,令 $t=\sqrt{x}\geqslant 0$,则 $y=2t-t^2=-(t-1)^2+1\leqslant 1$,值域 $B=(-\infty,1]$,则 $A\cap B=[0,1]$,B 正确;

对于选项 C,$y=\dfrac{1}{x^2-2x+2}=\dfrac{1}{(x-1)^2+1}$,

$\because (x-1)^2\geqslant 0$,$\therefore (x-1)^2+1\geqslant 1$,$\therefore 0<\dfrac{1}{(x-1)^2+1}\leqslant 1$,定义域 $A=\mathbf{R}$,值域 $B=(0,1]$,则 $A\cap B=(0,1]$,C 错误;

对于选项 D,$y=\sqrt{1-x^2}-|x|$的定义域 $A=[-1,1]$,由题可得 $y^2=1-x^2+x^2-2|x|\sqrt{1-x^2}=1-2\sqrt{x^2(1-x^2)}$,$\because -1\leqslant x\leqslant 1$,$\therefore 0\leqslant x^2(1-x^2)\leqslant\dfrac{1}{4}$,即 $0\leqslant y^2\leqslant 1$,

点悟:$0\leqslant x^2\leqslant 1$,利用 $ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$,得 $x^2(1-x^2)\leqslant\left(\dfrac{x^2+1-x^2}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$,当且仅当 $x^2=\dfrac{1}{2}$时等号成立

$\therefore -1\leqslant y\leqslant 1$,即值域 $B=[-1,1]$,则 $A\cap B=[-1,1]$,D 错误. 故选 AB.

**归纳总结** 求函数的定义域,主要包括:偶次根式中被开方数不小于0、分母不为0、自变量的实际意义等;求函数的值域实际上就是求函数的最值问题(如无最值则为无穷大或无穷小),但要注意值域是否连续.

5. $-3$　$(-\infty,3)$ 【解析】因为函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+a}}{x-b}$的定义域为 $\begin{cases}x+a\geqslant 0,\\x-b\neq 0,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x\geqslant -a,\\x\neq b,\end{cases}$

而函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+a}}{x-b}$ 的定义域为$[3,+\infty)$,所以$-a=3$,$b<3$,即 $a=-3$,$b<3$.

6. $[2,14]$ 【解析】由 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 81,\\1\leqslant x^2\leqslant 81\end{cases}$ 得 $1\leqslant x\leqslant 9$,即 $g(x)$ 的定义域为$[1,9]$,

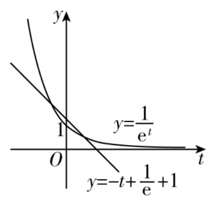
方法:一般地,若已知 $f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$,求函数 $f(g(x))$ 的定义域时,由于在 $f(x)$ 中的 $x$ 和 $f(g(x))$ 中的 $g(x)$ 受同一个对应法则的作用,所以范围相同,因此 $f(g(x))$ 的定义域即为满足条件 $a\leqslant g(x)\leqslant b$ 的 $x$ 的取值范围

$g(x)=[f(x)]^2+f(x^2)=(1+\log_3 x)^2+1+\log_3 x^2=(\log_3 x)^2+4\log_3 x+2$,令 $\log_3 x=t$,则 $t\in[0,2]$,令 $h(t)=t^2+4t+2=(t+2)^2-2$,则 $h(t)_{\min}=h(0)=2$,$h(t)_{\max}=h(2)=14$,所以 $h(t)\in[2,14]$,即函数 $y=g(x)$ 的值域为$[2,14]$.

7. A 【解析】在 $f(x)+2f(-x)=4x$①中令 $x=-x$,得 $f(-x)+2f(x)=-4x$②,联立①②得 $f(x)=-4x$,所以 $f(2)=-4\times 2=-8$,故选 A.

**一题多解** 因为函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+2f(-x)=4x$,所以分别令 $x=2$,$x=-2$,可得 $\begin{cases}f(2)+2f(-2)=8,\\f(-2)+2f(2)=-8,\end{cases}$ 解不等式组可得 $f(2)=-8$,故选 A.

8. B 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在$(0,+\infty)$上的单调函数,且 $f\left(f(x)-\dfrac{1}{e^x}\right)=\dfrac{1}{e}+1$,所以在$(0,+\infty)$上存在唯一一个实数 $t$ 使得 $f(t)=\dfrac{1}{e}+1$,且 $f(x)-\dfrac{1}{e^x}=t$.




易错点:已知复合函数的解析式 $y=f(g(x))$,可用换元法,令 $t=g(x)$,$y=f(t)$,但要注意新元的取值范围,即 $g(x)$ 的值域

令 $x=t$,得 $\dfrac{1}{e}+1-\dfrac{1}{e^t}=t$,即$-t+\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{1}{e^t}$. 画出 $y=-t+\dfrac{1}{e}+1$ 与 $y=\dfrac{1}{e^t}$的大致图象如图所示.

由图象可知,函数 $y=-t+\dfrac{1}{e}+1$ 与 $y=\dfrac{1}{e^t}$的图象在$(0,+\infty)$上只有1个交点,且 $t=1$ 是方程$-t+\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{1}{e^t}$的解,

关键点:根据函数的单调性以及等式恒成立,求出 $t$ 的值

所以 $f(x)=\dfrac{1}{e^x}+1$,故 $f(\ln 3)=\dfrac{1}{e^{\ln 3}}+1=\dfrac{1}{3}+1=\dfrac{4}{3}$,故选 B.

9. $f(x)=x$(答案不唯一) 【解析】若设 $f(x)=ax$,

方法:可以用待定系数法,首先把函数设出来,再结合条件列出方程组确定系数的值

则由 $f(x+2)=f(x)+2$,得 $a(x+2)=ax+2$,

解得 $a=1$，所以 $f(x)=x$（答案不唯一）.

**10. D**　【解析】当 $x-2>1$，即 $x>3$ 时，$f(x-2)=-f(x-4)$，所以当 $x>3$ 时，$f(x)=-f(x-2)=f(x-4)$，所以当 $x>3$ 时，$f(x)$ 的周期为 4，

关键点：判断出函数的周期性

所以 $f(2\ 023)=f(3)$. 又因为当 $x>1$ 时，$f(x)=-f(x-2)$，所以 $f(3)=-f(3-2)=-\cos\pi=1$，

提示：由于分段函数在各段上的对应法则不同，所以求分段函数在某点处的函数值时，关键要弄清该点所在区间对应的函数解析式是哪一个，然后再代入求值

即 $f(2\ 023)=1$，故选 D.

**11. BD**　【解析】先设 $t=f(a)$，

当 $t\leqslant 0$ 时，$f(t)=2t^2+2=20$，解得 $t=-3$ 或 $t=3$（舍去）.

当 $t>0$ 时，$f(t)=4t=20$，解得 $t=5$.

再根据 $t$ 的值求 $a$ 的值，

当 $f(a)=-3$ 时，

若 $a\leqslant 0$，则 $f(a)=2a^2+2=-3$，即 $2a^2=-5$，此方程无实数解.

若 $a>0$，则 $f(a)=4a=-3$，解得 $a=-\dfrac{3}{4}$（舍去）.

当 $f(a)=5$ 时，

若 $a\leqslant 0$，则 $f(a)=2a^2+2=5$，则 $a^2=\dfrac{3}{2}$，

解得 $a=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$（正值舍去）.

若 $a>0$，则 $f(a)=4a=5$，解得 $a=\dfrac{5}{4}$.

综上所述，$a$ 的值可能为 $-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $\dfrac{5}{4}$.

故选 BD.

**12.** $[2,3]$　【解析】由 $(x_2-x_1)[f(x_2)-f(x_1)]<0$，不妨设 $x_1<x_2$，

则 $x_2-x_1>0$，$f(x_2)-f(x_1)<0$，

则函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x^2-ax+5$ 单调递减，则 $\dfrac{a}{2}\geqslant 1$，即 $a\geqslant 2$，

当 $x>1$ 时，$f(x)=\dfrac{a}{x}$ 单调递减，则 $a>0$，

又函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则 $1-a+5\geqslant a$，即 $a\leqslant 3$，

综上所述，实数 $a$ 的取值范围是 $[2,3]$.

## 考向 7　函数的基本性质

### 刷考点

**1. C**　【解析】由题意可得 $2x^2-x-3\geqslant 0$，解得 $x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant \dfrac{3}{2}$，

易错点：在讨论函数的单调区间时，要先确定函数的定义域

根据二次函数及复合函数的性质可知，$f(x)=\sqrt{2x^2-x-3}$ 的单调递增区间为 $\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$，故选 C.

提示：$y=2x^2-x-3=2\left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{25}{8}$，其在 $\left(\dfrac{1}{4},+\infty\right)$ 上单调递增

**2. AB**　【解析】对于 A，因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $f(f(x))$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

提示：若内层函数与外层函数有相同的单调性，则复合函数单调递增；若内层函数与外层函数有相反的单调性，则复合函数单调递减

故 A 正确；

对于 B，因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $f(g(x))$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，故 B 正确；

对于 C，因为 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $-g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，因为 $-g(x)$ 的值域是否在 $(-\infty,0)$ 内无法判断，所以 $g(-g(x))$ 在 $(-\infty,0)$ 上的单调性无法判断，故 C 错误；

对于 D，因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以 $-f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，因为 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$-f(x)$ 的值域是否在 $[0,+\infty)$ 内无法判断，所以 $g(-f(x))$ 在 $[0,+\infty)$ 上的单调性无法判断，故 D 错误.

故选 AB.

**3.** $x^2-2x$　$-x^2+x$　【解析】不妨令 $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$，$g(x)=-x^2+x=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，

则 $f(x)+g(x)=x^2-2x+(-x^2+x)=-x$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

关键点：假设出一个在 $\mathbf{R}$ 上单调递减的函数，再检验是否满足命题中的条件

因为 $f(x)=(x-1)^2-1$ 的图象开口向上，对称轴为直线 $x=1$，所以当 $x>1$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，即 $f(x)$ 不为 $\mathbf{R}$ 上的减函数. 因为 $g(x)=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ 的图象开口向下，对称轴为直线 $x=\dfrac{1}{2}$，所以当 $x<\dfrac{1}{2}$ 时，函数 $g(x)$ 单调递增，即 $g(x)$ 不为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，因此 $f(x)$，$g(x)$ 都不是 $\mathbf{R}$ 上的减函数. 因此满足题意的一组函数可以是 $f(x)=x^2-2x$，$g(x)=-x^2+x$.

**4. C**　【解析】由题意得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，

则 $\begin{cases}2a-1<0,\\a>0,\\4a-2+3a\geqslant \dfrac{a}{2},\end{cases}$ 解得 $\dfrac{4}{13}\leqslant a<\dfrac{1}{2}$，

即实数 $a$ 的取值范围是 $\left[\dfrac{4}{13},\dfrac{1}{2}\right)$，故选 C.

易错警示　对于分段函数在实数集 $\mathbf{R}$ 上的单调递增（减）的问题，除了保证在定义域的每一个区间上单调性相同之外，还要考虑在分界点处的函数值的大小关系. 若函数是增函数，则在分界点处左边函数值小于或等于右边函数值；若函数是减函数，则在分界点处右边函数值小于或等于左边函数值，这样才能满足在 $\mathbf{R}$ 上单调递增（减），否则求出的参数的取值范围会出现错误.

**5. B**　【解析】因为函数 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于原点对称，且 $f(0)=0$. 当 $x>0$ 时，函数 $f(x)=a(x-1)+1=ax+1-a$，当 $x<0$ 时，$-x>0$，则 $f(-x)=-ax+1-a$，则 $f(x)=-f(-x)=ax+a-1$，即当 $x<0$ 时，函数 $f(x)=ax+a-1$，

所以 $f(x)=\begin{cases}ax+a-1,x<0,\\0,x=0,\\ax+1-a,x>0.\end{cases}$ 因为函数 $y=f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则有 $\begin{cases}a>0,\\1-a\geqslant 0,\\a-1\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $0<a\leqslant 1$，所以实数 $a$ 的取值范围为 $(0,1]$，故选 B.

**6. B**　【解析】因为 $f(x)=-x^2+2ax$ 图象的对称轴为直线 $x=a$，图象开口向下，且在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

提示：判断二次函数的单调性可利用函数图象的对称轴来协助判断，在开口方向确定的情况下，对称轴左、右两侧的单调性也就确定了

所以 $a\leqslant 1$. 因为 $g(x)=\dfrac{2x+1-2a}{x-a}=2+\dfrac{1}{x-a}$，且在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $x-a>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，即 $a<x$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，可得 $a\leqslant 1$. 综上，实数 $a$ 的取值范围是 $(-\infty,1]$. 故选 B.

**7.** $\left[\dfrac{3}{5},1\right)$　【解析】由已知对任意 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立，即 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，故需满足 $\begin{cases}a-3<0,\\0<a<1,\\a-3+4a\geqslant \log_a 1,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{3}{5}\leqslant a<1$.

**8. C**　【解析】由 $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>2$，得 $\dfrac{[f(x_2)-2x_2]-[f(x_1)-2x_1]}{x_2-x_1}>0$，令 $g(x)=f(x)-2x$，

关键点：构造函数 $g(x)=f(x)-2x$，并确定其单调性

则 $\dfrac{g(x_2)-g(x_1)}{x_2-x_1}>0$，因此函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，由 $f(1)=2\ 024$，得 $g(1)=2\ 022$，

由 $f(x-2\ 024)>2(x-1\ 013)$，得 $f(x-$

2 024)$-2(x-2\ 024)>2\ 022$，即 $g(x-2\ 024)>g(1)$，则 $x-2\ 024>1$，解得 $x>2\ 025$，所以原不等式的解集为 $(2\ 025,+\infty)$．故选 C．

**9. B** 【解析】当 $x>0$ 时，$f'(x)<0$，故偶函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x^2-x)-f(x)>0$，即 $f(|x^2-x|)>f(|x|)$，所以 $|x^2-x|<|x|$，显然 $x=0$ 不满足不等式，则 $|x-1|<1$，即 $-1<x-1<1$，所以 $x\in(0,2)$．故选 B．

**10. AD** 【解析】由条件①可知函数 $f(x)$ 为偶函数，由条件②可知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减．

对于选项 A，由偶函数图象的对称性知，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，所以 A 正确；

对于选项 B，因为 $f(-3)=f(3)$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(3)<f(1)$，即 $f(1)>f(-3)$，所以 B 错误；

对于选项 C，由 $f(x-1)>f(1)$，得 $|x-1|<1$，解得 $0<x<2$，所以 C 错误；

对于选项 D，因为 $f(2)=f(-2)=0$，当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，

由 $f(x)>0$，得 $0<x<2$，所以当 $0<x<2$ 时，$xf(x)>0$；

当 $x<0$ 时，函数在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，

由 $f(x)<0$，得 $x<-2$，所以当 $x<-2$ 时，$xf(x)>0$，

所以当 $xf(x)>0$ 时，$x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$，所以 D 正确．故选 AD．

**11. $(-3,3)$** 【解析】令 $x=y=0$ 得 $2f(0)=f(0)$，所以 $f(0)=0$．令 $y=-x$，得 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$ 为奇函数．设 $x_1>x_2$，则 $f(x_1)-f(x_2)=f(x_1-x_2)$．因为当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，所以 $f(x_1-x_2)>0$，则 $f(x_1)>f(x_2)$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增．

由 $f\left(-\frac{1}{4}\right)=-1$，得 $f\left(\frac{1}{4}\right)=1$，所以 $f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)=4f\left(\frac{1}{4}\right)=4$．不等式 $f(x^2-8)<4$ 可转化为 $f(x^2-8)<f(1)$，

**方法：** 若不等式一边没有函数符号“$f$”，而是常数（如 $f(m)<a$），应先将常数转化为带有函数符号“$f$”的函数值再求解

所以 $x^2-8<1$，解得 $-3<x<3$．

**12. C**

> **思路导引** (1)分析函数的单调性，可得 $f(x)=4^x-4^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，函数 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上的值域为 $[4^m-4^{-m},4^n-4^{-n}]$．
>
> (2)根据值域的对应关系可得 $4^m,4^n$ 为方程 $(k-1)x^2-kx+1=0$ 的两根，即一元二次方程有两个不相等的正实数根，利用判别式和根与系数的关系可求得实数 $k$ 的取值范围．

【解析】$\because y=4^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，$y=4^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数，

$\therefore f(x)=4^x-4^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[m,n]$ 上的值域为 $[4^m-4^{-m},4^n-4^{-n}]$，

$\therefore \begin{cases}4^m-4^{-m}=k(4^m-1),\\4^n-4^{-n}=k(4^n-1),\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}(k-1)4^{2m}-k\cdot4^m+1=0,\\(k-1)4^{2n}-k\cdot4^n+1=0,\end{cases}$

$\therefore 4^m,4^n$ 为方程 $(k-1)x^2-kx+1=0$ 的两个不相等的根，即 $(k-1)x^2-kx+1=0$ 有两个不相等的正实数根，

$\therefore \begin{cases}\Delta=k^2-4(k-1)>0,\\\dfrac{k}{k-1}>0,\\\dfrac{1}{k-1}>0,\end{cases}$ 解得 $k>1$ 且 $k\neq2$，

$\therefore$ 实数 $k$ 的取值范围是 $(1,2)\cup(2,+\infty)$．故选 C．

**13. B** 【解析】令 $s(x)=2g(x)-1$，则 $s(x)+s(-x)=2g(x)-1+2g(-x)-1=6$，所以 $s(x)$ 的图象关于点 $(0,3)$ 对称．令 $p(x)=\sin x+x+3$，则 $p(x)+p(-x)=\sin x+x+3+\sin(-x)+(-x)+3=6$，所以 $p(x)$ 的图象关于点 $(0,3)$ 对称．因为 $h(x)=s(x)+p(x)-3$，所以 $h(x)+3=s(x)+p(x)$．设 $h(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得最大值，则在 $x=-x_0$ 处取得最小值，所以 $h(x_0)+3+h(-x_0)+3=s(x_0)+s(-x_0)+p(x_0)+p(-x_0)=12$，所以 $h(x_0)+h(-x_0)=6$，所以 $h(x)$ 的最大值与最小值的和为 6．故选 B．

**14. $\frac{29}{20}$　$\frac{1}{4}$** 【解析】当 $a=-1$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{x}{1-x}=\frac{1}{x}-\frac{-(1-x)+1}{1-x}=\frac{1}{x}-\left(-1+\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+1$，

因为 $y=\frac{1}{x}$，$y=\frac{1}{x-1}$ 在 $[2,5]$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在区间 $[2,5]$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\min}=f(5)=\frac{1}{5}-\frac{5}{1-5}=\frac{29}{20}$．

当 $a>0$ 时，$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{ax}{1-x}=\frac{1}{x}+\frac{a}{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{x}-1+\frac{a}{\frac{1}{x}-1}+1$，

因为 $x\in(0,1)$，所以 $\frac{1}{x}>1$，所以 $\frac{1}{x}-1>0$，所以 $f(x)=\frac{1}{x}-1+\frac{a}{\frac{1}{x}-1}+1\geqslant 2\sqrt{\left(\frac{1}{x}-1\right)\cdot\frac{a}{\frac{1}{x}-1}}+1=2\sqrt{a}+1$，

当且仅当 $\frac{1}{x}-1=\frac{a}{\frac{1}{x}-1}$，即 $x=\frac{1}{\sqrt{a}+1}$ 时取等号，所以 $2\sqrt{a}+1=2$，解得 $a=\frac{1}{4}$．

**15. D** 【解析】$\left|\ln\frac{1}{4}\right|=\ln 4\in(\ln e,\ln e^2)=(1,2)$，$2^{1.2}>2$，$|\cos 2|\in(0,1)$．

因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减．

**提示：** 偶函数在两个关于原点对称的区间上单调性相反

因为 $|\cos 2|<\left|\ln\frac{1}{4}\right|<2^{1.2}$，所以 $f(|\cos 2|)>f\left(\left|\ln\frac{1}{4}\right|\right)>f(2^{1.2})$．又 $a=f\left(\ln\frac{1}{4}\right)=f\left(\left|\ln\frac{1}{4}\right|\right)$，$b=f(\cos 2)=f(|\cos 2|)$，

故 $b>a>c$，故选 D．

**方法：** 解决比较大小（最值）问题时，应充分利用奇函数在关于原点对称的两个区间上具有相同的单调性，偶函数在关于原点对称的两个区间上具有相反的单调性的性质

**16. D** 【解析】已知函数 $y=f(x+2)$ 是偶函数，所以 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，

因为函数 $f(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,2]$ 上单调递增，

所以 $f(-1)=f(5)<f(3)<f(2)$．

故选 D．

**17. D** 【解析】因为 $y=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$ 恒成立，所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

对于二次函数 $y=x^2-x+1$，其图象的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$，

所以函数 $y=x^2-x+1$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

所以函数 $y=\frac{1}{x^2-x+1}$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，

又对数函数 $y=\ln x$ 是增函数，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递减．

因为 $\frac{\sqrt{2}}{4}<\frac{\sqrt{3}}{4}<\frac{1}{2}$，所以 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)<f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，

即 $b>a$．

因为 $f(x+1)=\ln\frac{1}{x^2+x+1}=f(-x)$，

所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称．

又 $\frac{\sqrt{5}}{4}>\frac{1}{2}$，$16-(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2=8-2\sqrt{15}=\sqrt{64}-\sqrt{60}>0$，即 $4-(\sqrt{5}+\sqrt{3})>0$，

所以$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\left(\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{2}\right)=1-\left(\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{4-(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{4}>0$,所以$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}>\frac{\sqrt{5}}{4}-\frac{1}{2}$,所以$c>b$. 综上,$c>b>a$.

故选 D.

**方法技巧** 复合函数的单调区间,首先分清内层函数和外层函数分别是什么,再求内层函数的单调区间及符合条件的值域,接下来判断外层函数在此值域上的单调性,根据"同增异减"法则,得到复合函数的单调区间.

**18. A** 【解析】由题知$a=\ln\frac{2}{3}<0$,

令$f(x)=\sin x-x$,则$f'(x)=\cos x-1\leqslant 0$且等号不恒成立,所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减,所以$f(x)<f(0)$,所以$\sin x-x<0$,所以$\sin x<x$,所以$\sin\frac{2}{3}<\frac{2}{3}$,

即$0<b<\frac{2}{3}$. 令$g(x)=e^x-x-1$,则$g'(x)=e^x-1$,

当$x\in(-\infty,0)$时,$g'(x)<0$,函数$g(x)$单调递减,

当$x\in(0,+\infty)$时,$g'(x)>0$,函数$g(x)$单调递增,

所以$g(x)\geqslant g(0)$,所以$e^x-x-1\geqslant 0$,所以$e^x\geqslant x+1$,当且仅当$x=0$时等号成立,所以$e^{-\frac{1}{3}}>1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$,即$c>\frac{2}{3}$,所以$a<b<c$.

故选 A.

**19. C** 【解析】对 A,记$f(x)=y=|x|$,其定义域为$\mathbf{R}$,则$f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$,是偶函数,当$x\in(-\infty,0)$,$f(x)=|x|=-x$,所以$y=|x|$在$x\in(-\infty,0)$上单调递减,故 A 错误;

对 B,记$g(x)=y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,其定义域为$\mathbf{R}$,则$g(-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}=2^x\neq g(x)$,所以$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$不是偶函数,故 B 错误;

对 C,记$h(x)=y=x^{-2}$,其定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,则$h(-x)=(-x)^{-2}=x^{-2}=h(x)$,是偶函数,当$x\in(-\infty,0)$时,$y=x^2$为减函数,则$y=x^{-2}$在$(-\infty,0)$上单调递增,故 C 正确;

对 D,记$p(x)=y=x^3$,其定义域为$\mathbf{R}$,则$p(-x)=(-x)^3=-x^3=-p(x)$,是奇函数,故 D 错误. 故选 C.

**20. A** 【解析】因为$f(1+x)=-f(1-x)$,所以$f(x+2)=-f(1-(x+1))=-f(-x)$. 因为$f(2+x)=f(2-x)$,所以$f(2-x)=-f(-x)$,即$f(2+x)=-f(x)$,所以$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,所以$f(x)$是以 4 为周期的函数,则$f(x+2)=f(x-2)$. 因为$f(2+x)=f(2-x)$,所以$f(x-2)=f(2-x)$,所以$f(x)=f(-x)$,所以$f(x)$是偶函数. 故选 A.

**一题多解** 因为$f(1+x)=-f(1-x)$,所以$f(x)$的图象关于$(1,0)$中心对称. 因为$f(2+x)=f(2-x)$,所以$f(x)$的图象关于直线$x=2$对称,所以$f(x)$是以 4 为周期的函数,则$f(x+2)=f(x-2)$. 又$f(2+x)=f(2-x)$,所以$f(x-2)=f(2-x)$,所以$f(x)=f(-x)$,所以$f(x)$是偶函数. 故选 A.

**21. D** 【解析】由题意知,在函数$f(x)$中,$f(x+y)-[f(x)+f(y)]=2\ 023$,当$x=y=0$时,$f(0)-[f(0)+f(0)]=2\ 023$,解得$f(0)=-2\ 023$,故 B 错误.

**提示:** 若函数$f(x)$是$\mathbf{R}$上的奇函数,则该函数的图象必过原点,即有$f(0)=0$

当$y=-x$时,$f(0)-[f(x)+f(-x)]=2\ 023$,解得$f(x)+f(-x)=-4\ 046$,无法得到$f(x)=f(-x)$,故 A 错误.

在函数$f(x)+2\ 023$中,$f(0)+2\ 023=0$,$f(x)+2\ 023+f(-x)+2\ 023=0$,所以$f(x)+2\ 023$是奇函数,故 C 错误,D 正确. 故选 D.

**22. BCD** 【解析】对于选项 A:若$f(x+1)=x^2$,令$x=2$,可得$f(3)=2^2=4$,故 A 错误;

对于选项 B:若$f(x)=x^2-1$,则$f(x+1)=(x+1)^2-1=x^2+2x$,故 B 正确;

对于选项 C:若$y=f(x)$是偶函数,则$f(-x)-2=f(x)-2$,且$y=f(x)-2$与$y=f(x)$的定义域相同,均关于原点对称,

所以$y=f(x)-2$是偶函数,故 C 正确;

对于选项 D:若$y=f(x)$是奇函数,则$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$,且$y=f(x)$与$y=|f(x)|$的定义域相同,均关于原点对称,

所以$y=|f(x)|$是偶函数,图象关于$y$轴对称,故 D 正确. 故选 BCD.

**23. C** 【解析】因为$f(x)=(m^2+m-1)x^{m-\frac{1}{3}}$为幂函数,所以$m^2+m-1=1$,解得$m=-2$或 1.

当$m=-2$时,$f(x)=x^{-\frac{7}{3}}$为奇函数,不符合题意;

当$m=1$时,$f(x)=x^{\frac{2}{3}}$为偶函数,符合题意,故$m=1$. 故选 C.

**24.** 8　$\ln 2$　【解析】因为函数$f(x)=x^3\left(\ln\left|\frac{a}{2-x}-2\right|-b\right)$ $(a,b\in\mathbf{R}$且$a\neq 0)$是偶函数,所以函数$f(x)$对定义域内任意实数恒有$f(-x)=f(x)$成立,即$-x^3\left(\ln\left|\frac{a}{2+x}-2\right|-b\right)=x^3\left(\ln\left|\frac{a}{2-x}-2\right|-b\right)$,整理得$x^3\left(\ln\left|\frac{a-4-2x}{2+x}\right|+\ln\left|\frac{a-4+2x}{2-x}\right|-2b\right)=0$,

即$x^3\cdot\left[\ln\left|\frac{(a-4)^2-4x^2}{4-x^2}\right|-2b\right]=0$,显然$x^3$不恒为 0,所以$\ln\left|\frac{(a-4)^2-4x^2}{4-x^2}\right|-2b=0$恒成立,而$b$为常数,则必有$\frac{(a-4)^2-4x^2}{4-x^2}$为常数,于是得$\frac{(a-4)^2}{4}=\frac{-4}{-1}$,又$a\neq 0$,解得$a=8$,故$b=\ln 2$,此时$f(x)=x^3\left(\ln\left|\frac{8}{2-x}-2\right|-\ln 2\right)=x^3\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|$,定义域为$\{x\in\mathbf{R}|x\neq -2$且$x\neq 2\}$,关于原点对称,$f(-x)=-x^3\ln\left|\frac{2-x}{2+x}\right|=x^3\ln\left|\frac{2+x}{2-x}\right|=f(x)$,即函数$f(x)$是偶函数,所以$a=8$,$b=\ln 2$.

**25.** 【解】(1)由$f(x)$为奇函数,定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,可得$f(-1)=-f(1)$,即$-[1-(2a+1)+4]=-(1+2a+1+4)$,解得$a=-\frac{1}{2}$,

此时$f(x)=x+\frac{4}{x}$,又$f(-x)=-x-\frac{4}{x}=-f(x)$,所以$f(x)$为奇函数,所以$a=-\frac{1}{2}$.

(2)函数$f(x)$在$(0,2]$上单调递减,在$[2,+\infty)$上单调递增,证明如下:

$\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且$x_1<x_2$,

则$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{4}{x_1}-x_2-\frac{4}{x_2}=(x_1-x_2)+\frac{4(x_2-x_1)}{x_1x_2}=\frac{(x_1-x_2)(x_1x_2-4)}{x_1x_2}$,

当$2<x_1<x_2$时,$x_1x_2>4$,$x_1-x_2<0$,所以$f(x_1)-f(x_2)<0$,所以$f(x_1)<f(x_2)$,

所以$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增;

当$0<x_1<x_2<2$时,$0<x_1x_2<4$,$x_1-x_2<0$,所以$f(x_1)-f(x_2)>0$,所以$f(x_1)>f(x_2)$,

所以$f(x)$在$(0,2]$上单调递减.

(3)若对任意的$x_1,x_2\in[1,3]$,都有$f(x_1)-f(x_2)\leqslant 3m^2-2m$,

只需$f(x)_{\max}-f(x)_{\min}\leqslant 3m^2-2m(1\leqslant x\leqslant 3)$,

关键点

由(2)可知$f(x)$在$[1,2]$上单调递减,在$[2,3]$上单调递增,

所以$f(x)_{\min}=f(2)=4$.

又$f(1)=1+4=5$,$f(3)=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$,

所以$f(x)_{\max}=f(1)=5$,

所以$5-4\leqslant 3m^2-2m$,解得$m\geqslant 1$或$m\leqslant -\frac{1}{3}$,

故$m$的取值范围是$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]\cup[1,+\infty)$.

**26. A** 【解析】因为$f(2x+1)$为偶函数,所以$f(-2x+1)=f(2x+1)$,所以$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称,则$f(0)=f(2)$. 因为$f(x)=f(x+1)-f(x+2)$,所以$f(0)=f(1)-f(2)$. 因为$f(1)=2$,所以$f(0)=f(2)=1$,所以$f(3)=f(2)-f(1)=-1$,

$f(4)=f(3)-f(2)=-2$，$f(5)=f(4)-f(3)=-1$，$f(6)=f(5)-f(4)=1$，$f(7)=f(6)-f(5)=2$，所以 $f(x)$ 是以 6 为周期的函数，所以 $f(18)=f(6\times3)=f(0)=1$. 故选 A.

**一题多解** （特例法）因为 $f(2x+1)$ 为偶函数，所以 $f(-2x+1)=f(2x+1)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，设 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$，则 $f(1)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=2$ 且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 又 $f(x)+f(x+2)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{5\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)=\left(4\cos\frac{\pi}{3}x\right)\cdot\sin\frac{\pi}{6}=2\cos\frac{\pi}{3}x$，$f(x+1)=2\sin\left(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}x$，所以符合条件 $f(x)=f(x+1)-f(x+2)$，所以 $f(18)=2\sin\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)=1$. 故选 A.

**27. C** 【解析】由 $f(x)f(x-2)=4$，$f(x)>0$，得 $f(x)=\frac{4}{f(x-2)}$，于是 $f(x+2)=\frac{4}{f(x)}=\frac{4}{\frac{4}{f(x-2)}}=f(x-2)$，即 $f(x+4)=f(x)$，因此函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数.

提示：若 $f(x+a)=f(x-a)$，则函数的周期为 $2a$

又 $f(2\ 024)=1$，所以 $f(0)=f(4)=f(2\ 024)=1$. 又 $f(x)$ 为偶函数，$f(1)\cdot f(-1)=4$，$f(x)>0$，所以 $f(3)=f(-1)=f(1)=2$. 由 $f(2)f(0)=4$，得 $f(2)=4$，所以 $\sum_{i=1}^{2\ 023}f(i)=506\sum_{i=1}^{4}f(i)-f(2\ 024)=506\times(2+4+2+1)-1=4\ 553$，故选 C.

**28. ABC** 【解析】由 $f(x+2)$ 的图象关于 $(0,0)$ 对称，得 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 中心对称，

所以 $f(x)=-f(4-x)$，又 $f(x)=f(2-x)$，所以 $f(2-x)=-f(4-x)$，所以 $f(x)=-f(x+2)\Rightarrow f(x)=f(x+4)$，

即 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，A 正确；

因为 $f(8-x)=f(4-x)=-f(x)$，即 $f(8-x)+f(x)=0$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(4,0)$ 中心对称，B 正确；

$f(2\ 025)=f(4\times506+1)=f(1)=-f(4-1)=-f(3)=1$，C 正确；

若 $x\in[4,5]$，则 $x-4\in[0,1]$，即 $f(x)=f(x-4)=a\cdot2^{x-4}+b$，

因为定义域为 **R** 的函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 中心对称，所以 $f(2)=0$，则 $f(0)=f(2-0)=f(2)=0$，且由 C 知 $f(1)=1$，

则 $\begin{cases}a+b=0,\\2a+b=1,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$ 故 $f(x)=2^{x-4}-1$，

所以当 $x\in[4,5]$ 时，$f(x)=2^{x-4}-1$，D 错误.

故选 ABC.

**29. −8** 【解析】由 $f(x)$ 为偶函数，得 $f(x)=f(-x)$，即 $f(x+2)=f(-x-2)$，

由 $f(2+x)=f(2-x)$，得 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，且 $f(2-x)=f(-x-2)$，

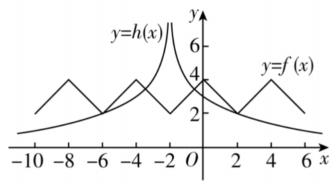
即 $f(2+x)=f(x-2)$，即 $f(x)=f(x+4)$，故 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，则 $f(x)$ 的图象也关于直线 $x=-2$ 对称.

由 $h(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x+2|+4$，得 $x\neq-2$，

因为 $h(-x-4)=\log_{\frac{1}{2}}|-x-4+2|+4=\log_{\frac{1}{2}}|x+2|+4=h(x)$，

所以 $h(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称.

当 $x\in[0,2]$ 时，$f(x)=-x+4$，作出 $f(x)$ 及 $h(x)$ 的大致图象如图所示.




当 $x>2$ 时，$2\leqslant f(x)\leqslant4$，$h(x)=\log_{\frac{1}{2}}|x+2|+4<-\log_2 4+4=2$，

故当 $x>2$ 时，$f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象无交点，

由图象可知，当 $x=2$ 时，$f(2)=h(2)$，有一个交点 $(2,0)$，

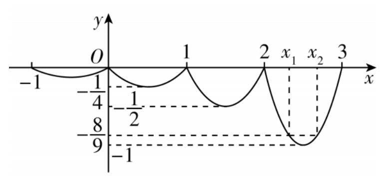
当 $x\in(-2,2)$ 时，$f(x)$ 与 $h(x)$ 的图象有一个交点，设该点横坐标为 $m$，

则结合函数图象的对称性可知，当 $x<-2$，$f(x)$ 与 $h(x)$ 图象必有两交点，且两交点横坐标分别为 $-6$，$-m-4$，

故 $f(x)$ 与 $h(x)$ 图象的所有交点的横坐标之和为 $-6+2+m+(-m-4)=-8$.

**30. B** 【解析】∵ 当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)$，$f(x+1)=2f(x)$，∴ $f(x)=2f(x-1)$，即 $f(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度，图象上各点的纵坐标变为原来的 2 倍，如图所示.

当 $2<x\leqslant3$ 时，$f(x)=4f(x-2)=4(x-2)(x-3)$，令 $4(x-2)(x-3)=-\frac{8}{9}$，整理得 $9x^2-45x+56=0$，∴ $(3x-7)(3x-8)=0$，∴ $x_1=\frac{7}{3}$，$x_2=\frac{8}{3}$，∵ 对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\geqslant-\frac{8}{9}$，∴ $m\leqslant\frac{7}{3}$，故选 B.

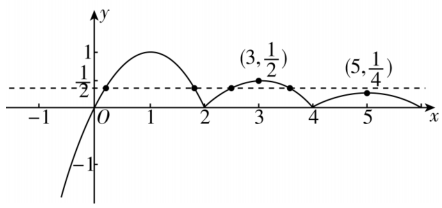


**31.** $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

**思路导引** 先根据函数 $f(x)$ 的“类周期”性，将函数 $f(x)$ 各段解析式求出来，画出图象，然后将函数 $F(x)=f(x)-m$ 有 4 个零点转化为函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 有 4 个交点，进而根据函数 $f(x)$ 各段的图象，求出 $m$ 的取值范围.

【解析】因为 $f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+1,x<2,\\\frac{1}{2}f(x-2),x\geqslant2,\end{cases}$ 所以 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2x,x<2,\\\frac{1}{2}f(x-2),x\geqslant2,\end{cases}$ 所以当 $x\in[2,4)$ 时，$x-2\in[0,2)$，则 $f(x)=\frac{1}{2}f(x-2)=\frac{1}{2}[-(x-2)^2+2(x-2)]$，所以当 $x\in[2n,2n+2)(n\in\mathbf{N}^*)$ 时，$f(x)=\frac{1}{2^n}f(x-2n)=\frac{1}{2^n}\cdot[-(x-2n)^2+2(x-2n)]$，画出 $f(x)$ 的图象如图所示.

如果能根据图象的平移和伸缩理清楚 $f(x)$ 的大致图象，这里不求解析式也可以




因为函数 $F(x)=f(x)-m$ 有 4 个零点，所以函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=m$ 有 4 个交点，所以 $\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$，所以实数 $m$ 的取值范围为 $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$.

**规律方法** 对于函数 $g(x)$ 满足 $g(x+T)=ag(bx)+c(a,b>0,c\in\mathbf{R})$ 的类周期形式，可先求出两段区间的解析式，画出对应的图象，从中找出规律研究其他区间的解析式和图象特征.

## 刷上分

**1. C** 【解析】因为 $f(x)$ 在 $(2,5)$ 上是减函数，所以 $\forall x_1,x_2\in(2,5)$，若 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)>f(x_2)$，故选 C.

**2. D** 【解析】设 $\sqrt{x}+1=t$，则 $x=(t-1)^2$，$t\geqslant1$，所以 $f(t)=\frac{1}{2}(t-1)^2+(t-1)-\frac{1}{t}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{t}$，即 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}(x\geqslant1)$.

对于 A，$f(0)$ 不存在，故 A 错误；

对于 B，$f(x)$ 的定义域是 $[1,+\infty)$，故 B 错误；

对于 C，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}(x\geqslant1)$，故 C

错误；

对于 D，易知 $f(x)$ 在定义域上为增函数，所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=-\frac{1}{2}$，故 D 正确. 故选 D.

**3. A** 【解析】因为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$，满足 $f(2+x)=f(2-x)$，

所以 $f(2+x)=f(2-x)=f(x-2)$，所以 $f(x)=f(x+4)$，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数.

因为 $f(x)$ 在区间 $[-2,0]$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上单调递增，

所以 $c=f(5)=f(1)<b=f(\sqrt{2})<a=f(-1.5)=f(1.5)$. 故选 A.

**4. A** 【解析】因为 $f(x)=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^x+1, x<0,\\ -x^2+2, x\geqslant 0,\end{cases}$

所以当 $x<0$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，且 $f(x)>2$，

当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=-x^2+2$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，且 $f(x)\leqslant 2$，

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

不等式 $f(2a^2-1)-f(3a+4)>0$，即 $f(2a^2-1)>f(3a+4)$，等价于 $2a^2-1<3a+4$，即 $(2a-5)(a+1)<0$，解得 $-1<a<\frac{5}{2}$，所以不等式 $f(2a^2-1)-f(3a+4)>0$ 的解集为 $\left(-1,\frac{5}{2}\right)$. 故选 A.

**5. B** 【解析】因为 $f(x)+f(x+2)=f(8)$①，

所以 $f(x+2)+f(x+4)=f(8)$，

所以 $f(x)=f(x+4)$，所以 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，则 $f(0)=f(4)=f(8)$.

在①中，令 $x=0$，得 $f(0)+f(2)=f(8)$，所以 $f(2)=0$.

因为 $f(x+1)$ 为奇函数，所以 $f(-x+1)=-f(x+1)$②，

在②中，令 $x=1$，得 $f(0)=-f(2)=0$，则 $f(8)=0$.

由①得 $f(x)+f(x+2)=0$③，

在②中，令 $x=\frac{1}{2}$，得 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-f\left(\frac{1}{2}+1\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)$，所以 $f\left(\frac{3}{2}\right)=-1$.

在③中，令 $x=\frac{1}{2}$，得 $f\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{5}{2}\right)=0$，所以 $f\left(\frac{5}{2}\right)=-1$，

令 $x=\frac{3}{2}$，得 $f\left(\frac{3}{2}\right)+f\left(\frac{3}{2}+2\right)=0$，所以 $f\left(\frac{7}{2}\right)=-f\left(\frac{3}{2}\right)=1$.

因为 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，所以 $\sum\limits_{k=1}^{2\,025}kf\left(k-\frac{1}{2}\right)=(1-2-3+4)+(5-6-7+8)+\cdots+(2\,021-2\,022-2\,023+2\,024)+2\,025=2\,025$.

故选 B.

**归纳总结**　函数图象的对称性与周期性

(1) 若 $f(x+a)+f(-x+b)=c$，则函数 $f(x)$ 的图象关于 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 中心对称；

(2) 若 $f(x+a)=f(-x+b)$，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 对称；

(3) 若 $f(x+a)=f(x-a)$ $(a>0)$，则函数 $f(x)$ 的周期为 $2a$；

(4) 若 $f(x+a)=-f(x)$ $(a>0)$，则函数 $f(x)$ 的周期为 $2a$.

**6. ABD** 【解析】对于 A，因为 $G(x)=f(2+3x)-1$ 为奇函数，所以 $G(-x)=-G(x)$，

即 $f(2-3x)-1=-[f(2+3x)-1]$，所以 $f(2-3x)+f(2+3x)=2$，所以 $f(2-x)+f(2+x)=2$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,1)$ 中心对称，所以 A 正确.

对于 B，在 $f(2-x)+f(2+x)=2$ 中，令 $x=0$，得 $2f(2)=2$，即 $f(2)=1$.

因为函数 $F(x)=f(1+x)-(1+x)$ 为偶函数，所以 $F(-x)=F(x)$，

所以 $f(1-x)-(1-x)=f(1+x)-(1+x)$，所以 $f(1+x)-f(1-x)=2x$.

令 $x=1$，得 $f(2)-f(0)=2$，所以 $1-f(0)=2$，即 $f(0)=-1$，所以 B 正确.

对于 C，因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,1)$ 中心对称，$f(0)=-1$，

所以 $f(0)+f(4)=2$，则 $f(4)=3$，所以 $f(0)\neq f(4)$，所以 4 不是 $f(x)$ 的周期，所以 C 错误.

对于 D，在 $f(2-x)+f(2+x)=2$ 中，令 $x=1$，得 $f(1)+f(3)=2$，

由选项 B 知 $f(2)=1$，$f(0)=-1$，

由选项 C 知 $f(4)=3$，

所以 $f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=5$，所以 D 正确.

故选 ABD.

**7. 2**　$(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$　【解析】由函数 $f(x)=-2\,024x^3+\frac{c}{e^x+1}$ 的图象关于点 $(0,1)$ 中心对称，得 $f(x)+f(-x)=2$，即 $-2\,024x^3+\frac{c}{e^x+1}+2\,024x^3+\frac{c}{e^{-x}+1}=2$，整理得 $\frac{c(e^x+1)}{e^x+1}=2$，解得 $c=2$，故函数 $f(x)=-2\,024x^3+\frac{2}{e^x+1}$.

因为函数 $y=-2\,024x^3$，$y=\frac{2}{e^x+1}$ 在 $\mathbf{R}$ 上都单调递减，所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

令 $g(x)=f(x)-1=-2\,024x^3+\frac{2}{e^x+1}-1$，

由函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 中心对称，得 $g(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 中心对称，则 $g(-x)=-g(x)$，

且 $g(x)=f(x)-1=-2\,024x^3+\frac{2}{e^x+1}-1$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

由 $f(-t^2)+f(7t-10)>2$，得 $f(7t-10)-1>-f(-t^2)+1$，即 $g(7t-10)>-g(-t^2)=g(t^2)$，

则 $t^2>7t-10$，即 $t^2-7t+10>0$，解得 $t<2$ 或 $t>5$，所以实数 $t$ 的取值范围是 $(-\infty,2)\cup(5,+\infty)$.

**8.** 【解】(1) 因为函数 $f(x)$ 是定义在 $(-4,4)$ 上的奇函数，且 $f(2)=1$，

所以 $\begin{cases}f(-2)=\frac{-2a+b}{2}=-1,\\ f(0)=\frac{b}{4}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\ b=0.\end{cases}$

(2) 由 (1) 可知当 $x\in(-4,0]$ 时，$f(x)=\frac{x}{x+4}$，

当 $x\in(0,4)$ 时，$-x\in(-4,0)$，则 $f(x)=-f(-x)=-\frac{-x}{-x+4}=\frac{x}{-x+4}$.

任取 $x_1,x_2\in(0,4)$，且 $x_1<x_2$，

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{-x_1+4}-\frac{x_2}{-x_2+4}=\frac{4(x_1-x_2)}{(-x_1+4)(-x_2+4)}$.

因为 $x_1,x_2\in(0,4)$，且 $x_1<x_2$，所以 $-x_1+4>0$，$-x_2+4>0$，$x_1-x_2<0$，

所以 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)=\frac{x}{-x+4}$ 在 $(0,4)$ 上单调递增.

(3) 由 (2) 知 $f(x)$ 在 $(0,4)$ 上单调递增，

由函数 $f(x)$ 是定义在 $(-4,4)$ 上的奇函数，得 $f(x)$ 在 $(-4,4)$ 上单调递增，

由 $f(m^2+1)+1>0$，得 $f(m^2+1)>-1=f(-2)$，

则 $\begin{cases}m^2+1>-2,\\ -4<m^2+1<4,\end{cases}$

解得 $-\sqrt{3}<m<\sqrt{3}$，

故原不等式的解集为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

## 考向 8　基本初等函数

**刷考点**

**1. C** 【解析】因为 $x\log_2 3=1$，所以 $\log_2 3^x=1$，所以 $3^x=2$，所以 $3^x+3^{-x}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$. 故选 C.

**2. ABD** 【解析】对于 A，由于 $a>0$，则 $\frac{a^2}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}}=\frac{a^2}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}}=a^{2-\frac{5}{6}}=a^{\frac{7}{6}}$，故 A 正确；

对于 B，因为 $3a+2b=1$，所以 $\frac{9^a\cdot 3^b}{\sqrt{3^a}}=\frac{3^{2a+b}}{3^{\frac{a}{2}}}=3^{\frac{1}{2}(3a+2b)}=\sqrt{3}$，故 B 正确；

对于 C，$\frac{1}{\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{9}}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}}=\log_{\frac{1}{9}}\frac{1}{4}+\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{5}=\log_9 4+\log_3 5=\log_3 2+\log_3 5=\log_3 10\neq\lg 3$，故 C 错误；提示：$\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$

对于 D,因为 $\log_a 2=m$,$\log_a 3=n$,$a>0$ 且 $a\neq 1$,所以 $a^m=2$,$a^n=3$,所以 $a^{m+2n}=a^m\cdot(a^n)^2=18$,故 D 正确.

故选 ABD.

**3. CD** 【解析】对于 A,原式 $=\frac{2}{5}-1+16^4+\pi-3=16^4-\frac{18}{5}+\pi$,故 A 错误;

对于 B,原式 $=\lg 5(3\lg 2+3)+3(\lg 2)^2-\lg 6+\lg 0.6$

$=3\lg 5\cdot\lg 2+3\lg 5+3(\lg 2)^2+\lg\frac{0.6}{6}$

$=3\lg 2(\lg 5+\lg 2)+3\lg 5+\lg\frac{1}{10}$

$=3\lg 2+3\lg 5-1=3(\lg 2+\lg 5)-1=2$,故 B 错误;

对于 C,原式 $=\lg(\sqrt{5}\times\sqrt{2})+\dfrac{\lg 3+\lg 9^{\frac{1}{4}}-\lg 3^{\frac{1}{2}}}{\lg\frac{3^4}{3^3}}=\lg 10^{\frac{1}{2}}+\frac{\lg 3}{\lg 3}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$,故 C 正确;

对于 D,原式 $=(0.3)^{3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}-7^2+\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-1=\frac{10}{3}-49+\frac{5}{3}-1=-45$,故 D 正确.

故选 CD.

**4. A** 【解析】若函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(-1,1)$,则 $f(-1)=(-1)^{\alpha}=1$. 因为 $\alpha\in\left\{-1,\frac{1}{2},1,2,3\right\}$,所以 $\alpha=2$,所以 $f(x)=x^2$,在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,充分性成立.

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,则函数 $f(x)$ 的图象不一定经过点 $(-1,1)$,如 $f(x)=x^{-1}$,必要性不成立. 所以"函数 $f(x)$ 的图象经过点 $(-1,1)$"是"函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减"的充分不必要条件.

故选 A.

**5. C** 【解析】对于 A:由函数 $y=x^{0.7}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,得 $\left(\frac{7}{6}\right)^{0.7}>\left(\frac{6}{7}\right)^{0.7}$,A 错误;

对于 B:由函数 $y=x^{-1}$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减,得 $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}>\left(-\frac{3}{5}\right)^{-1}$,B 错误;

对于 C:$(-2.1)^{\frac{3}{7}}=\left(-\frac{21}{10}\right)^{\frac{3}{7}}$,$(-2.2)^{-\frac{3}{7}}=\left(-\frac{10}{22}\right)^{\frac{3}{7}}$,

又函数 $y=x^{\frac{3}{7}}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $\left(-\frac{21}{10}\right)^{\frac{3}{7}}<\left(-\frac{10}{22}\right)^{\frac{3}{7}}$,即 $(-2.1)^{\frac{3}{7}}<(-2.2)^{-\frac{3}{7}}$,C 正确;

对于 D:$\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$,函数 $y=x^{\frac{4}{3}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,则 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$,即 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}>\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{3}}$,D 错误.

故选 C.

**6. A** 【解析】因为函数 $f(x)=(m^2-m-5)\cdot x^{m^2-6}$ 是幂函数,所以 $m^2-m-5=1$,解得 $m=-2$ 或 $m=3$.

敲黑板:根据幂函数的系数为 1 建立方程求出参数 $m$ 的值

因为对任意 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1\neq x_2$,都满足 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0$,即对任意 $x_1>x_2$,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,故幂函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,所以 $m^2-6>0$,所以 $m=3$,则 $f(x)=x^3$,易知 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 由 $a+b>0$ 得 $a>-b$,所以 $f(a)>f(-b)=-f(b)$,所以 $f(a)+f(b)>0$,故选 A.

**7.** $\frac{1}{4}$ 【解析】因为幂函数 $f(x)=(m^2-2m-2)x^{m^2+m-2}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数,

所以 $\begin{cases}m^2-2m-2=1,\\ m^2+m-2<0,\end{cases}$ 解得 $m=-1$,

所以 $f(x)=x^{-2}$,所以 $f(2m)=f(-2)=\frac{1}{4}$.

**8. C** 【解析】因为函数 $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数,

提示:指数函数 $g(x)=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$,当 $0<a<1$ 时,指数函数 $g(x)$ 单调递减,当 $a>1$ 时,指数函数 $g(x)$ 单调递增

根据复合函数的单调性可知,要使函数 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-ax}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减,则函数 $h(x)=2x^2-ax$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递增. 根据二次函数的性质可知,函数 $h(x)=2x^2-ax=2\left(x-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}$ 在 $\left(\frac{a}{4},+\infty\right)$ 上单调递增,所以 $\frac{a}{4}\leqslant 1$,

提示:对于二次函数,当函数的图象开口向上时,函数在对称轴的右侧单调递增

即 $a\leqslant 4$,故选 C.

**易错警示** 对于形如 $y=a^{f(x)}(a>0$,且 $a\neq 1)$ 的函数的单调性的判断,常用复合函数法. 复合函数的单调性:当 $a>1$ 时,函数 $y=a^{f(x)}$ 与函数 $y=f(x)$ 的单调性相同;当 $0<a<1$ 时,函数 $y=a^{f(x)}$ 与函数 $y=f(x)$ 的单调性相反.

**9. ACD** 【解析】当 $a=0$ 时,$f(x)=e^{-x^2}$,定义域为 $\mathbf{R}$,因为 $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$ 为偶函数,A 正确;

因为 $y=-x^2+2ax=-(x-a)^2+a^2\leqslant a^2$,所以 $0<f(x)=e^{-x^2+2ax}\leqslant e^{a^2}$,则 $f(x)$ 有最大值,没有最小值,B 错误;

因为 $y=-x^2+2ax$ 在 $(-\infty,a]$ 上单调递增,在 $[a,+\infty)$ 上单调递减,又 $y=e^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,a]$ 上单调递增,在 $[a,+\infty)$ 上单调递减,C 正确;

当 $x=0$ 时,$f(0)=e^0=1$,所以 $f(x)$ 的图象恒过定点 $(0,1)$,D 正确.

故选 ACD.

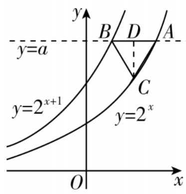
**10. BD** 【解析】对于 A,由 $e^x-e^{-x}\neq 0$,得 $x\neq 0$,故 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x\neq 0\}$,故 A 错误;

对于 B,函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称,且 $f(-x)=\frac{e^{-x}+e^x}{e^{-x}-e^x}=-f(x)$,故 $f(x)$ 是奇函数,故 B 正确;

对于 C,$f(-1)=\frac{e^{-1}+e}{e^{-1}-e}=\frac{e^2+1}{1-e^2}<0$,$f(1)=\frac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}}=\frac{e^2+1}{e^2-1}>0$,故 $f(-1)<f(1)$,故 $f(x)$ 在定义域上不是减函数,故 C 错误;

对于 D,$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}=1+\frac{2}{e^{2x}-1}(x\neq 0)$,令 $t=e^{2x}(t>0$,且 $t\neq 1)$,则 $y=1+\frac{2}{t-1}$,由于 $t=e^{2x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,$y=1+\frac{2}{t-1}$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递减,故函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递减,且当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)\to-1$,当 $x\to 0^-$ 时,$f(x)\to-\infty$,当 $x\to 0^+$ 时,$f(x)\to+\infty$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to 1$,故函数 $f(x)$ 的值域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,无最小值,也无最大值,故 D 正确. 故选 BD.

**11.** $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$ 【解析】如图,由 $2^x=a$,得 $x=\log_2 a$,即点 $A(\log_2 a,a)$,由 $2^{x+1}=a$,得 $x=\log_2 a-1$,即点 $B(\log_2 a-1,a)$,




敲黑板:根据指数式与对数式的互化求出点 $A$,$B$ 的坐标

所以 $|AB|=1$. 取 $AB$ 的中点 $D$,连接 $CD$,由 $\triangle ABC$ 为等边三角形,得 $CD\perp AB$,$|CD|=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

易知点 $C$ 不可能在直线 $l$ 的上方,因此点 $C\left(\log_2 a-\frac{1}{2},a-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

又点 $C$ 在函数 $y=2^x$ 的图象上,

所以 $a-\frac{\sqrt{3}}{2}=2^{\log_2 a-\frac{1}{2}}$,

即 $a-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{\sqrt{2}}$,解得 $a=\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$,

提示:$\log_2 a-\frac{1}{2}=\log_2 a-\log_2 2^{\frac{1}{2}}=\log_2\frac{a}{\sqrt{2}}$

所以满足题意的 $a$ 的值为 $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}$.

**12.** 2　$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$　【解析】由题可知，$f(-1)=\frac{1}{9}$，$f(0)=\frac{1}{3}$，$f(1)=\frac{2}{3}$，$f(2)=\frac{8}{9}$，

得到规律 $f(x)+f(1-x)=1$

所以 $f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)=2$.

由题可知 $f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{2}{4^x+2}$，

显然 $f(x)+f(1-x)=\frac{4^x}{4^x+2}+\frac{2}{4^x+2}=1$，

所以 $2[f(x)]^2<f(1-x)=1-f(x)$，

得 $[2f(x)-1][f(x)+1]<0$，

显然 $f(x)=\frac{4^x}{4^x+2}>0$，所以 $0<f(x)<\frac{1}{2}$，

即 $0<\frac{4^x}{4^x+2}<\frac{1}{2}$，解得 $x<\frac{1}{2}$. 故原不等式的解集为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

**13.**【解】(1)在函数 $f(x)=\frac{3^x+1}{3^x+a}$ 中，$3^x+a\neq0$，

由 $f(x)$ 是奇函数，得 $f(x)+f(-x)=0$，

即 $\frac{3^x+1}{3^x+a}+\frac{3^{-x}+1}{3^{-x}+a}=0$，整理得 $(a+1)(3^x+3^{-x}+2)=0$，解得 $a=-1$，

则函数 $f(x)=\frac{3^x+1}{3^x-1}=1+\frac{2}{3^x-1}$，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

由 $f(x)>2$，得 $1+\frac{2}{3^x-1}>2$，即 $\frac{2}{3^x-1}>1$，整理得 $0<3^x-1<2$，解得 $0<x<1$，

所以不等式 $f(x)>2$ 的解集为 $(0,1)$.

(2)因为函数 $y=3^x-1$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，

所以当 $0<x\le1$ 时，$0<3^x-1\le2$，

由(1)得 $f(x)=1+\frac{2}{3^x-1}$ 在 $x\in(0,1]$ 上的值域 $A=[2,+\infty)$.

又 $g(x)=\log_3\frac{x}{3}\cdot\log_3\frac{x}{9}+m=(\log_3x-1)(\log_3x-2)+m$，$x\in[3,27]$，

设 $t=\log_3x$，则 $t\in[1,3]$，$y=(t-1)(t-2)+m=t^2-3t+2+m$，

当 $t=\frac{3}{2}$ 时，$y_{\min}=-\frac{1}{4}+m$，当 $t=3$ 时，$y_{\max}=2+m$，

因此函数 $g(x)$ 在 $x\in[3,27]$ 上的值域 $B=\left[-\frac{1}{4}+m,2+m\right]$.

由对任意的 $x_1\in[3,27]$，总存在 $x_2\in(0,1]$，使得 $g(x_1)=f(x_2)$ 成立，得 $B\subseteq A$，

于是 $-\frac{1}{4}+m\ge2$，解得 $m\ge\frac{9}{4}$，

所以实数 $m$ 的取值范围是 $\left[\frac{9}{4},+\infty\right)$.

**14.** B　【解析】对于 $y=a^{x+1}+2$，令 $x+1=0$，得 $x=-1$，$y=a^0+2=3$，所以 $y=a^{x+1}+2$ 的图象恒过点 $A(-1,3)$，即 $m=-1$，$n=3$；

对于 $y=\log_a(x+1)+2$，令 $x+1=1$，得 $x=0$，$y=\log_a1+2=2$，所以 $y=\log_a(x+1)+2$ 的图象恒过点 $B(0,2)$，即 $p=0$，$q=2$，

所以 $mn+pq=-1\times3+0\times2=-3$. 故选 B.

**15.** B　【解析】$f(x)=\log_2x+2^x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f(2)=5$，所以不等式 $f(3x-2)<5$，即 $f(3x-2)<f(2)$. 又因为 $f(x)=\log_2x+2^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $0<3x-2<2$，解得 $\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$，故 $x$ 的取值范围为 $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$. 故选 B.

**16.** D　【解析】因为 $f(x)=|\lg x|=\begin{cases}\lg\frac{1}{x},0<x<1,\\ \lg x,x\ge1,\end{cases}$

所以 $b=f\left(\frac{1}{3}\right)=\lg3=f(3)$，

又因为 $1<e<3<\pi$，且 $f(x)=\lg x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(\pi)>f(3)>f(e)$，即 $f(\pi)>f\left(\frac{1}{3}\right)>f(e)$，所以 $c<b<a$. 故选 D.

**17.** BCD　【解析】对于 A，当 $a>1$ 时，由 $\log_a3<1$，得 $\log_a3<\log_aa$，则 $a>3$；当 $0<a<1$ 时，由 $\log_a3<1$，得 $\log_a3<\log_aa$，则 $a<3$，又 $0<a<1$，所以 $0<a<1$. 综上，若 $\log_a3<1$，则 $a>3$ 或 $0<a<1$，故 A 错误.

对于 B，因为 $0<\frac{1}{3}<\frac{\pi}{6}$，所以 $0<\sin\frac{1}{3}<\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，所以 $\log_2\sin\frac{1}{3}<\log_2\frac{1}{2}=-1$，

所以 $-\log_2\sin\frac{1}{3}>1$. 因为 $-\frac{1}{2}<-\sin\frac{1}{3}<0$，所以 $2^{-\frac{1}{2}}<2^{-\sin\frac{1}{3}}<2^0=1$，即 $\frac{\sqrt{2}}{2}<2^{-\sin\frac{1}{3}}<1$.

所以 $\sin\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{2}}{2}<2^{-\sin\frac{1}{3}}<1<-\log_2\sin\frac{1}{3}$，

所以 $b>c>a$，故 B 正确.

对于 C，令 $2^x=18^y=9^{xy}=t>0$，则 $x=\log_2t$，$y=\log_{18}t$，$xy=\log_9t$，所以 $\log_2t\cdot\log_{18}t=\log_9t$，所以 $\frac{\lg t}{\lg2}\cdot\frac{\lg t}{\lg18}=\frac{\lg t}{\lg9}$，即 $\lg t=\frac{\lg2\cdot\lg18}{\lg9}$. 所以 $x-y=\log_2t-\log_{18}t=\frac{\lg t}{\lg2}-\frac{\lg t}{\lg18}=\frac{\lg t(\lg18-\lg2)}{\lg2\cdot\lg18}=\frac{\lg2\cdot\lg18}{\lg9}\cdot\frac{\lg18-\lg2}{\lg2\cdot\lg18}=\frac{\lg18-\lg2}{\lg9}=\frac{\lg9}{\lg9}=1$，故 C 正确.

对于 D，令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}(x>0)$. 当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$. 所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减. 因为 $e<3<4$，所以 $f(e)>f(3)>f(4)$，所以 $\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln3}{3}>\frac{\ln4}{4}$，因为 $\frac{\ln4}{4}=\frac{2\ln2}{4}=\frac{\ln2}{2}$，所以 $\frac{1}{e}>\frac{\ln3}{3}>\frac{\ln2}{2}$，所以 $a<c<b$，故 D 正确.

故选 BCD.

**18.** $\lg x$（答案不唯一）　【解析】对于函数 $f(x)=\lg x(x>0)$，

提示：根据对数函数的运算法则设出特殊函数

$f(xy)=\lg(xy)=\lg x+\lg y=f(x)+f(y)$，且当 $x>y>0$ 时，$f(x)>f(y)$ 也成立，所以函数 $f(x)=\lg x$ 满足题意（答案不唯一）.

**19.**【解】(1)当 $t=1$ 时，不等式 $2f(x)\le g(x)$ 可化为 $2\log_a(x-1)\le\log_a(2x+1)$，

若 $0<a<1$，则 $\begin{cases}x-1>0,\\2x+1>0,\\(x-1)^2\ge2x+1,\end{cases}$ 解得 $x\ge4$，

易错点：底数范围不同决定了函数单调性不同，所以一定要对底数进行讨论

所以不等式 $2f(x)\le g(x)$ 的解集为 $[4,+\infty)$；

若 $a>1$，则 $\begin{cases}x-1>0,\\2x+1>0,\\(x-1)^2\le2x+1,\end{cases}$ 解得 $1<x\le4$，

所以不等式 $2f(x)\le g(x)$ 的解集为 $(1,4]$.

综上所述，当 $0<a<1$ 时，不等式 $2f(x)\le g(x)$ 的解集为 $[4,+\infty)$；当 $a>1$ 时，不等式 $2f(x)\le g(x)$ 的解集为 $(1,4]$.

(2)由题意可知 $h(x)=a^{\log_a(x-1)}+tx^2+2t+2=tx^2+x+2t+1$，

令 $tx^2+x+2t+1=0$，即 $t(x^2+2)=-(x+1)$，

因为 $x\in(1,3]$，所以 $x+1\in(2,4]$，

所以 $t\neq0$，所以 $\frac{1}{t}=-\frac{x^2+2}{x+1}$，

将函数零点问题转化为方程 $\frac{1}{t}=-\frac{x^2+2}{x+1}$ 有解问题

设 $m=x+1\in(2,4]$，

则 $\frac{1}{t}=-\frac{(m-1)^2+2}{m}=-\left(m+\frac{3}{m}\right)+2$，

因为函数 $y=-\left(m+\frac{3}{m}\right)+2$ 在 $(2,4]$ 上单调递减，

所以 $-\frac{11}{4}\le\frac{1}{t}<-\frac{3}{2}$，所以 $-\frac{2}{3}<t\le-\frac{4}{11}$.

故 $t$ 的取值范围是 $\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{11}\right]$.

## 刷上分

1. A 【解析】因为 $a=0.5^{-0.5}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.5}=2^{0.5}$，$b=4^{0.3}=2^{0.6}$，所以 $b>a>2^0=1$. 又 $c=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1$，所以 $b>a>c$，故选 A.

2. C 【解析】依题意得 $L_I=10\lg\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)\leqslant 40$，∴ $I\leqslant 10^{-8}$，故声强为 $10^{-8}$ W/m²，$2\times10^{-9}$ W/m² 的两人达到班级要求，故选 C.

3. D 【解析】因为 $f(x)$ 为定义在 **R** 上的奇函数，当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\log_2(x+1)+ax^2-a+1$，所以 $f(0)=1-a=0$，故 $a=1$，则 $f(x)=\log_2(x+1)+x^2$，易知 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，根据奇函数的性质可知 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增.
因为 $f(1)=2$，所以 $f(-1)=-f(1)=-2$，
由不等式 $f(3x+5)>-2=f(-1)$ 可得，$3x+5>-1$，解得 $x>-2$，故原不等式的解集为 $(-2,+\infty)$，故选 D.

4. C 【解析】因为 $f(x)=2^{|x|}+x^2$ 的定义域为 **R**，所以 $f(-x)=2^{|-x|}+(-x)^2=2^{|x|}+x^2=f(x)$，
所以函数 $f(x)$ 为偶函数，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(-x)=f(x)=f(|x|)$，
所以 $f(3a-2)=f(|3a-2|)>f(a-1)=f(|a-1|)$，
所以 $|3a-2|>|a-1|$，即 $8a^2-10a+3>0$，
解得 $a<\frac{1}{2}$ 或 $a>\frac{3}{4}$. 故实数 $a$ 的取值范围为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$. 故选 C.

5. D 【解析】对任意的 $x_1\in[0,1]$，存在 $x_2\in[1,2]$，使得 $f(x_1)=g(x_2)$，
即 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值域是 $g(x)$ 在 $[1,2]$ 上的值域的子集.
$\because f(x)=\frac{2^x+m}{2^x+1}=\frac{2^x+1+m-1}{2^x+1}=1+\frac{m-1}{2^x+1}$，
当 $m<1$ 时，$m-1<0$，
$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，$\therefore f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{m+1}{2},\frac{m+2}{3}\right]$，
又 $\because g(x)=(m-1)x$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，
$\therefore g(x)$ 的值域为 $[2m-2,m-1]$，
$\therefore \begin{cases}\frac{m+1}{2}\geqslant 2m-2,\\ \frac{m+2}{3}\leqslant m-1,\end{cases}$ 无解.
当 $m>1$ 时，$m-1>0$，$\therefore f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，$g(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，$\therefore f(x)$ 的值域为 $\left[\frac{m+2}{3},\frac{m+1}{2}\right]$，
$g(x)$ 的值域为 $[m-1,2m-2]$，
$\therefore \begin{cases}\frac{m+1}{2}\leqslant 2m-2,\\ \frac{m+2}{3}\geqslant m-1,\end{cases}$ 解得 $\frac{5}{3}\leqslant m\leqslant\frac{5}{2}$.
当 $m=1$ 时，$f(x)=1$，$g(x)=0$，显然不满足题意.
综上，实数 $m$ 的取值范围为 $\left[\frac{5}{3},\frac{5}{2}\right]$.
故选 D.

6. ACD 【解析】令 $\frac{1-x}{1+x}>0$，解得 $-1<x<1$，故函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|-1<x<1\}$，
因为 $f(x)$ 的定义域为 **R**，$f(-x)=\frac{1-10^{-x}}{1+10^{-x}}=\frac{10^x-1}{10^x+1}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数.
因为 $g(x)+g(-x)=\lg\frac{1-x}{1+x}+\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg 1=0$，所以 $g(x)$ 是奇函数，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的奇偶性相同，故 A 正确；
$\frac{1-x}{1+x}=\frac{-(1+x)+2}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$，
易知 $t=-1+\frac{2}{1+x}$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，$y=\lg t$ 在定义域内单调递增，所以 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减，故 B 错误；
设点 $P(x,y)$ 为 $f(x)$ 图象上一点，则点 $P$ 关于直线 $y=x$ 对称的点为 $Q(y,x)$，即 $\left(\frac{1-10^x}{1+10^x},x\right)$，
又 $g\left(\frac{1-10^x}{1+10^x}\right)=\lg\frac{1-\frac{1-10^x}{1+10^x}}{1+\frac{1-10^x}{1+10^x}}=\lg\frac{1+10^x-(1-10^x)}{1+10^x+(1-10^x)}=\lg 10^x=x$，
所以点 $Q\left(\frac{1-10^x}{1+10^x},x\right)$ 在 $g(x)$ 的图象上，
所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，故 C 正确；
设点 $M(x,y)$ 为 $f(x)$ 图象上一点，则点 $M$ 关于直线 $y=-x$ 对称的点为 $N(-y,-x)$，即 $\left(-\frac{1-10^x}{1+10^x},-x\right)$，
又 $g\left(-\frac{1-10^x}{1+10^x}\right)=\lg\frac{1+\frac{1-10^x}{1+10^x}}{1-\frac{1-10^x}{1+10^x}}=\lg\frac{1+10^x+(1-10^x)}{1+10^x-(1-10^x)}=\lg\frac{1}{10^x}=-x$.
所以点 $\left(-\frac{1-10^x}{1+10^x},-x\right)$ 在 $g(x)$ 的图象上，
所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称，故 D 正确.
故选 ACD.

7. 8 【解析】因为 $f(x)=e^x-e^{-x}$ 的定义域为 **R**，关于原点对称，且 $f(-x)=e^{-x}-e^x=-f(x)$，所以函数 $f(x)$ 为奇函数.
易知 $f(x)$ 在 **R** 上单调递增，所以由 $f(m)+f(2n-1)=0$，可得 $m+2n-1=0$，即 $m+2n=1$，
提示：奇函数性质的应用
由 $m>0,n>0$，得 $\frac{2}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{2}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+2n)=4+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}\geqslant 4+2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=8$，
当且仅当 $\frac{4n}{m}=\frac{m}{n}$，即 $m=\frac{1}{2}$，$n=\frac{1}{4}$ 时等号成立.

8. $\left[\frac{9}{7},\frac{4}{3}\right)$ 【解析】令 $g(x)=\frac{2^{x+1}}{2^x+2^{-x}}-1-a$，则 $g(x)=\frac{2\cdot 2^x}{2^x+\frac{1}{2^x}}-1-a=\frac{2\cdot[(2^x)^2+1]-2}{(2^x)^2+1}-1-a=1-\frac{2}{(2^x)^2+1}-a$，因为 $(2^x)^2+1>1$，所以 $g(x)\in(-1-a,1-a)$.
因为 $f(x)=\left|\frac{2^{x+1}}{2^x+2^{-x}}-1-a\right|=|g(x)|$，当 $0<a\leqslant 1$ 时，$0\leqslant 1-a<1$，$-2\leqslant -1-a<-1$，所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[0,a+1)$，所以此时 $\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\in[0,(n-1)(a+1))$，而 $f(x_n)\in[0,a+1)$，且 $[0,(n-1)(a+1))\cap[0,a+1)\neq\varnothing$，所以对任意正整数 $n$，存在实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 使得 $\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)=f(x_n)$ 成立，所以 $0<a\leqslant 1$ 不符合题意.
当 $a>1$ 时，$1-a<0$，$-1-a<-2$，所以函数 $f(x)$ 的值域为 $(a-1,a+1)$.
若 $a>1$，当 $n=8$ 时，存在实数 $x_1,x_2,\cdots,x_8$ 使得 $\sum_{i=1}^{7}f(x_i)=f(x_8)$ 成立，因为 $\sum_{i=1}^{7}f(x_i)\in(7(a-1),7(a+1))$，$f(x_8)\in(a-1,a+1)$，所以 $(7(a-1),7(a+1))\cap(a-1,a+1)\neq\varnothing$，所以 $7(a-1)<a+1$，解得 $a<\frac{4}{3}$，因为正整数 $n$ 的最大值为 8，所以不存在实数 $x_1,x_2,\cdots,x_9$ 使得 $\sum_{i=1}^{8}f(x_i)=f(x_9)$ 成立，因为 $\sum_{i=1}^{8}f(x_i)\in(8(a-1),8(a+1))$，$f(x_9)\in(a-1,a+1)$，即 $(8(a-1),8(a+1))\cap(a-1,a+1)=\varnothing$，所以 $8(a-1)\geqslant a+1$，解得 $a\geqslant\frac{9}{7}$. 综上，正实数 $a$ 的取值范围是 $\left[\frac{9}{7},\frac{4}{3}\right)$.

9. 【解】(1) 由题知函数 $f(x)$ 的定义域为 **R**，
又因为 $f(x)=\log_2(4^x+1)+kx$ 为偶函数，
所以 $f(-x)=f(x)$，即 $\log_2(4^{-x}+1)-kx=\log_2(4^x+1)+kx$，所以 $2kx=\log_2(4^{-x}+1)-\log_2(4^x+1)=\log_2\frac{\frac{4^x+1}{4^x}}{4^x+1}=\log_2 4^{-x}=-2x$，
所以 $k=-1$.
(2) 由 (1) 知 $f(x)=\log_2(4^x+1)-x$，所以 $f(3x-1)+1<\log_2 5$ 可化为 $\log_2(4^{3x-1}+1)-3x+1+1<\log_2 5$，
即 $\log_2(4^{3x-1}+1)-\log_2 5<3x-2$，
所以 $\log_2\frac{(4^{3x-1}+1)}{5}<3x-2=\log_2 2^{3x-2}$，又 $y=\log_2 x$ 为定义域上的增函数，所以 $\frac{(4^{3x-1}+1)}{5}<2^{3x-2}$，
所以 $(2^{3x})^2\cdot 2^{-2}+1<5\cdot 2^{3x}\cdot 2^{-2}$，所以

$\frac{(2^{3x})^2}{4}+1<\frac{5\cdot 2^{3x}}{4}$，所以 $(2^{3x})^2-5\cdot 2^{3x}+4<0$，

令 $t=2^{3x}$，$t>0$，上式化为 $t^2-5t+4<0$，即 $(t-1)(t-4)<0$，解得 $1<t<4$，

即 $1<2^{3x}<4$，所以 $2^0<2^{3x}<2^2$，所以 $0<3x<2$，解得 $0<x<\frac{2}{3}$. 故原不等式的解集为 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

## 考向 9　函数的图象

**刷考点**

**1. A**　【解析】对于 $f(x)=|\ln|1-x||$，必有 $f(x)\geq 0$，故 C，D 错误；

又 $f(2)=|\ln|1-2||=|\ln 1|=0$，故 B 错误；

将函数 $y=\ln x$ 在 $x$ 轴下方图象翻折到上方可得函数 $y=|\ln x|$ 的图象，

再将其在 $y$ 轴右侧图象翻折到左侧，右侧不变，可得函数 $y=|\ln|x||=|\ln|-x||$ 的图象，

进而将得到的函数图象向右平移 1 个单位长度，可得函数 $y=|\ln|-(x-1)||=|\ln|1-x||$ 的图象，故 A 正确.

故选 A.

**归纳总结**　函数的图象变换规律

(1) 平移变换（左加右减、上加下减）

①$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{左移 } a(a>0) \text{ 个单位长度}}$ $y=f(x+a)$ 的图象.

②$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{右移 } a(a>0) \text{ 个单位长度}}$ $y=f(x-a)$ 的图象.

③$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{上移 } h(h>0) \text{ 个单位长度}}$ $y=f(x)+h$ 的图象.

④$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{下移 } h(h>0) \text{ 个单位长度}}$ $y=f(x)-h$ 的图象.

(2) 对称变换

①$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{关于 } x \text{ 轴对称}}$ $y=-f(x)$ 的图象.

②$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{关于 } y \text{ 轴对称}}$ $y=f(-x)$ 的图象.

③$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{关于 } y=x \text{ 对称}}$ $y=f(x)$ 反函数的图象.

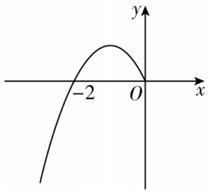
④$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow{\text{关于坐标原点对称}}$ $y=-f(-x)$ 的图象.

(3) 翻折变换

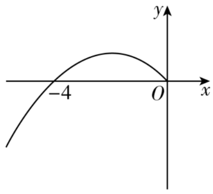
①$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{下方图象翻折到 } x \text{ 轴上方}]{\text{保留 } x \text{ 轴上方图象，将 } x \text{ 轴}}$ $y=|f(x)|$ 的图象.

②$y=f(x)$ 的图象 $\xrightarrow[\text{右边图象翻折到 } y \text{ 轴左边}]{\text{保留 } y \text{ 轴右边图象，将 } y \text{ 轴}}$ $y=f(|x|)$ 的图象.

**2. B**　【解析】函数 $y=f(x)$ 的图象关于 $y$ 轴对称得到的图象，即为 $y=f(-x)$ 的图象，如图③.



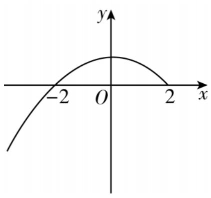
图③



图④

再将 $y=f(-x)$ 图象的纵坐标不变，横坐标伸长为原来的 2 倍，得到 $y=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$ 的图象，如图④.

再将 $y=f\left(-\frac{1}{2}x\right)$ 的图象向右平移 2 个单位长度得到 $y=f\left[-\frac{1}{2}(x-2)\right]=f\left(1-\frac{1}{2}x\right)$ 的图象，如图⑤.



图⑤

再将 $f\left(1-\frac{1}{2}x\right)$ 的图象沿 $x$ 轴翻折可得 $-f\left(1-\frac{1}{2}x\right)$ 的图象，即题图②所示. 故选 B.

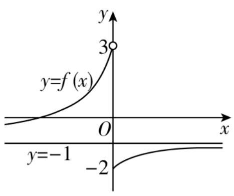
**3. C**　【解析】由函数 $h(x)$ 的图象向左平移一个单位长度，再向上平移一个单位长度后得到函数 $y=-\frac{4}{x}$ 的图象，所以 $h(x)=-\frac{4}{x-1}-1$.

当 $x<0$ 时，$f(x)=h(x)=-\frac{4}{x-1}-1$，易知 $f(x)$ 单调递增，又 $-\frac{4}{x-1}>0$，则 $-1<f(x)<3$；

当 $x\geq 0$ 时，$f(x)=-\left(\frac{1}{e}\right)^x-1$ 单调递增，

又 $-\left(\frac{1}{e}\right)^x<0$，则 $-2\leq f(x)<-1$，

作出 $f(x)$ 的图象如图所示，




由 $f(x+2)<f(x^2)$，$x^2\geq 0$，

得 $0\leq x+2<x^2$，解得 $-2\leq x<-1$ 或 $x>2$，

所以实数 $x$ 的取值范围是 $[-2,-1)\cup(2,+\infty)$.

故选 C.

**4. C**　【解析】根据函数 $f(x)$ 的解析式，易知该函数的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，故 A 错误；

令 $x=-1$，得 $f(-1)=\frac{-1}{3^{-1}-1}=\frac{3}{2}>0$，故 B 错误；

当 $x\to+\infty$ 时，$3^x-1$ 的增长速度远大于 $x^3$ 的增长速度，所以当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，故选项 D 错误. 故选 C.

**5. C**　【解析】由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

且 $f(-x)=\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=-f(x)$，

所以 $f(x)$ 是奇函数，排除 A，B.

当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，排除 D. 故选 C.

**6. C**　【解析】易知函数 $f(x)=\frac{\cos \pi x}{x}$ 是奇函数，图象关于原点对称，故排除 A；在原点右侧附近，$f(x)$ 的函数值大于 0，故排除 D；函数 $f(x)=\frac{\cos \pi x}{x}$ 在区间 $[-4,4]$ 上有零点 $\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{3}{2}$，$\pm\frac{5}{2}$，$\pm\frac{7}{2}$，共 8 个，故排除 B. 故选 C.

**7. A**　【解析】因为 $y=f(x)=(3^x-3^{-x})\cos x$，$x\in\mathbf{R}$，所以 $f(-x)=(3^{-x}-3^x)\cos x=-f(x)$，所以函数 $y=f(x)$ 是奇函数，故排除 B，D；而 $f(1)=(3-3^{-1})\cos 1=\frac{8}{3}\cos 1>0$，

提示：特殊值法

故排除 C，故选 A.

**8. B**　【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{2(-x)^3\cos(-x)}{e^{-x}+e^x}=-\frac{2x^3\cos x}{e^x+e^{-x}}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，故 C，D 错误. 当 $x\in(0,2\pi)$ 时，$2x^3>0$，$e^x+e^{-x}>0$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$\cos x>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$\cos x<0$，所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ 时，$f(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 时，$f(x)<0$，故 A 错误，B 正确. 故选 B.

**快解**　因为 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-x)=\frac{2(-x)^3\cos(-x)}{e^{-x}+e^x}=-\frac{2x^3\cos x}{e^{-x}+e^x}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，故 C，D 错误. 因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\left(\frac{\pi}{6}\right)^3\cos\frac{\pi}{6}}{e^{\frac{\pi}{6}}+e^{-\frac{\pi}{6}}}>0$，故 A 错误，B 正确. 故选 B.

**9. C**　【解析】选项 A 和 B 中函数的定义域为全体实数，由图象可知函数的定义域不是全体实数，则排除 A 和 B；

由题图可知函数图象关于 $y$ 轴对称，则该函数为偶函数，

选项 C 和 D 中函数的定义域均为 $\{x|x\neq\pm1\}$，关于原点对称，

选项 C 中 $f(-x)=\frac{1}{(-x)^2-1}=\frac{1}{x^2-1}=f(x)$，则

$f(x)$为偶函数，

选项 D 中 $f(-x)=\dfrac{-x}{(-x)^2-1}=-\dfrac{x}{x^2-1}=-f(x)$，则$f(x)$为奇函数，故选 C.

**10. D** 【解析】由题图知函数$f(x)$是偶函数.
各选项函数性质分析如下：

| 选项 | 奇偶性 | 特殊点函数值 | 正误 |
|---|---|---|---|
| A | $f(-x)=\dfrac{5e^{-x}-5e^{x}}{x^2+2}=-f(x)$，奇函数 | | × |
| B | $f(-x)=\dfrac{-5\sin x}{x^2+1}=-f(x)$，奇函数 | | × |
| C | $f(-x)=\dfrac{5e^{-x}+5e^{x}}{x^2+2}=f(x)$，偶函数 | $f(x)>0$ | × |
| D | $f(-x)=\dfrac{5\cos x}{x^2+1}=f(x)$，偶函数 | $f(2)=\cos 2<0$ | √ |

故选 D.

**11. D** 【解析】由题图可得，函数的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且当$x\to+\infty$时，$y\to 0$，当$x\to-\infty$时，$y\to 0$.
对于 A，$f(x)+g(x)=x^2+2^x-2^{-x}$的定义域为$\mathbf{R}$，故 A 不符合题意；
对于 B，$f(x)\cdot g(x)=x^2(2^x-2^{-x})$的定义域为$\mathbf{R}$，故 B 不符合题意；
对于 C，$\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{2^x-2^{-x}}{x^2}=\dfrac{2^x-\frac{1}{2^x}}{x^2}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，当$x\to+\infty$时，$\dfrac{g(x)}{f(x)}\to+\infty$，故 C 不符合题意；
对于 D，$\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x^2}{2^x-2^{-x}}=\dfrac{x^2}{2^x-\frac{1}{2^x}}$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，当$x\to+\infty$时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}\to 0$，故 D 符合题意. 故选 D.

**12. B** 【解析】由题图可知函数$f(x)$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，其图象关于坐标原点对称，故函数$f(x)$是奇函数. 对于 A 选项：$f(-x)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^{-x}-1}\right)\cdot\sin(-x)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^{x}-1}\right)\cdot\sin x=f(x)$，所以$f(x)$是偶函数，故排除 A；
对于 D 选项：$f(\pi)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^{\pi}-1}\right)\cdot|\sin\pi|=0$，由题图可知$f(\pi)\neq 0$，故排除 D；
对于 C 选项：当$x\in(0,+\infty)$时，$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{e^x-1}>0$，$\cos x$的符号不确定，由题图可知，当$x\in(0,+\infty)$时，$f(x)\geqslant 0$，故排除 C. 故选 B.

## 考向 10 函数与方程

刷考点

**1. C** 【解析】对于函数$f(x)=x-\dfrac{2}{x^2}$，
当$x\to 0$时，$x^2\to 0$，则$f(x)\to-\infty$，
$f(-1)=-1-\dfrac{2}{(-1)^2}=-3<0$，$f(1)=1-2=-1<0$，$f(2)=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}>0$，$f(3)=3-\dfrac{2}{9}=\dfrac{25}{9}>0$，
所以根据函数零点存在定理可知，$(-1,0)$，$(0,1)$，$(2,3)$内不一定包含$f(x)$的零点，$(1,2)$内一定包含$f(x)$的零点.
故选 C.

> **易错警示** 区间端点函数值异号，只是一个条件，还要注意函数零点存在定理成立的另一个条件，即函数在闭区间上的图象是一条连续不断的曲线.

**2. B** 【解析】因为$y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$，$y=-x^{\frac{1}{5}}$在$(0,+\infty)$上均单调递减，
所以$f(x)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x-x^{\frac{1}{5}}$在$(0,+\infty)$上单调递减，且图象连续不间断.
对 A，$f(0)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^0-0^{\frac{1}{5}}=1-0=1>0$，
因为幂函数$y=x^{\frac{1}{5}}$在$(0,+\infty)$上单调递增，
所以$f\left(\dfrac{1}{5}\right)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}}-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}}>0$，
所以$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{5}\right)$上无零点，故 A 错误；
对 B，因为$y=\left(\dfrac{1}{4}\right)^x$在$(0,+\infty)$上单调递减，所以$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}}-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}}<0$，所以$f\left(\dfrac{1}{5}\right)f\left(\dfrac{1}{4}\right)<0$，故$f(x)$在$\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{4}\right)$上存在零点，故 B 正确；
对 C，因为$f(1)=\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{3}{4}<0$，$f\left(\dfrac{1}{4}\right)<0$，
所以$f(x)$在$\left(\dfrac{1}{4},1\right)$上无零点，故 C 错误；
对 D，因为$f(4)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^4-4^{\frac{1}{5}}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^4-\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{5}}<0$，$f(1)<0$，
所以$f(x)$在$(1,4)$上无零点，故 D 错误.
故选 B.

**3. B** 【解析】函数$f(x)=(\sqrt{e})^x$的图象与函数$g(x)=2-\ln x$的图象交点的横坐标即为函数$h(x)=f(x)-g(x)=(\sqrt{e})^x+\ln x-2(x>0)$的零点，因为$h'(x)=\dfrac{1}{2}(\sqrt{e})^x+\dfrac{1}{x}>0$，所以$h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.
又$h(x)$的图象连续，且$h(1)=\sqrt{e}+\ln 1-2=\sqrt{e}-2<0$，$h(2)=(\sqrt{e})^2+\ln 2-2=e+\ln 2-2>0$，所以$h(1)\cdot h(2)<0$，所以$h(x)$的零点所在的区间为$(1,2)$. 所以函数$f(x)=(\sqrt{e})^x$的图象与函数$g(x)=2-\ln x$的图象交点横坐标所在的区间为$(1,2)$，故选 B.

**4. B** 【解析】因为函数$y=81\ln x$与$y=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x-3}-80$在$(0,+\infty)$上均单调递增，
所以函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增且图象连续. 因为$f(2)=81\ln 2-83<0$，$f(3)=81\ln 3-81>0$，所以$f(2)\cdot f(3)<0$，
所以函数$f(x)$的零点位于区间$(2,3)$内，故$k=2$. 故选 B.

**5. C** 【解析】因为函数$f(x)=\ln x+2x-5$在$(0,+\infty)$上单调递增，
提示：由于函数$y=\ln x$与函数$y=2x-5$在定义域内均为增函数，根据增函数+增函数=增函数，知$f(x)$为增函数
且$f(2)=\ln 2-1<0$，$f(3)=\ln 3+1>0$，即$x_0\in(2,3)$，所以$k=2$，故选 C.

**6.** $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$(答案不唯一) 【解析】因为$y=\dfrac{1}{2^x}$，$y=-x^{\frac{1}{3}}$在定义域内都是减函数，所以$f(x)=\dfrac{1}{2^x}-x^{\frac{1}{3}}$是减函数. 又$f(1)=-\dfrac{1}{2}<0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<0$，$f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}>0$，所以$f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot f\left(\dfrac{1}{3}\right)<0$，所以函数$f(x)$在$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$上有零点，且$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$，所以函数$f(x)=\dfrac{1}{2^x}-x^{\frac{1}{3}}$的零点属于$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$(答案不唯一).

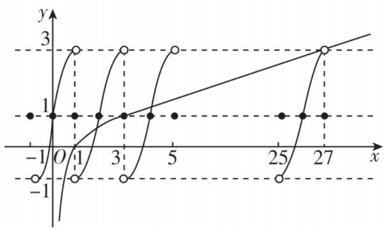
**7. C** 【解析】$f(x)=\cos x-\sqrt{3}\sin 2x=\cos x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=\cos x(1-2\sqrt{3}\sin x)$，
令$f(x)=0$，得$\cos x=0$或$\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}<\dfrac{1}{2}$，
又$x\in\left[0,\dfrac{13\pi}{6}\right]$，所以$\cos x=0$有两个不同的解，分别为$\dfrac{\pi}{2}$和$\dfrac{3\pi}{2}$，
$\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$在$[0,2\pi]$上有两个不同的解，
且$y=\sin x$在$\left[2\pi,\dfrac{13\pi}{6}\right]$上单调递增，
$\sin 2\pi=0$，$\sin\dfrac{13\pi}{6}=\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}>\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，

所以 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 在 $\left[2\pi,\frac{13\pi}{6}\right]$ 上有一个解，

综上所述，$f(x)=0$ 在 $\left[0,\frac{13\pi}{6}\right]$ 上有 5 个不同的解，即 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{13\pi}{6}\right]$ 上有 5 个零点，

故选 C.

**8. C** 【解析】由 $y=f(x)-1$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，得 $f(-x)-1=-[f(x)-1]$，即 $f(x)+f(-x)=2$，又 $f(x)+f(2-x)=2$，则 $f(2-x)=f(-x)$，即 $f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 是周期为 2 的函数. 又 $f(x)+f(2-x)=2$，将 $x=1$ 代入得 $f(1)+f(1)=2$，即 $f(1)=1$. 当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}+\sin\frac{\pi}{6}x+1$，则 $f(0)=1$，所以当 $x\in\mathbf{Z}$ 时，$f(x)=1$. 又当 $x\in(-1,1)$ 时，$f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}+\sin\frac{\pi}{6}x+1$ 单调递增，且 $-1<f(x)<3$. 故可作出函数 $y=f(x)$，$y=\log_3x$ 的大致图象如图所示.




而集合 $A$ 中的元素个数为函数 $y=f(x)$ 与 $y=\log_3x$ 图象交点的个数，由以上分析结合函数 $y=\log_3x$ 的性质可知，3 为集合 $A$ 中的一个元素，且 $y=f(x)$ 与 $y=\log_3x$ 在 $(1,3),(3,5),\cdots,(23,25)$ 中的图象各有一个交点，所以集合 $A=\{x|f(x)=\log_3x\}$ 中的元素个数为 13. 故选 C.

**易错警示** 利用函数图象求零点(或交点)个数时，需要在作出函数图象的同时注意以下要点：一是函数图象增长趋势，最简单的就是函数的单调性；二是注意特值，尤其是零点和最值. 把握以上两个要点，便可准确作图求出零点(或交点)个数.

**9. B** 【解析】由 $f(x)+f(x+4)=16\Rightarrow f(x+4)+f(x+8)=16\Rightarrow f(x)=f(x+8)$，

因此函数 $f(x)$ 是以 8 为周期的函数.

当 $x\in(0,4]$ 时，令 $f(x)=x^2-2^x=0$，得 $x=2$ 或 $x=4$，

因此当 $x\in(0,4]$ 时，函数 $f(x)=x^2-2^x$ 只有两个零点，且 $f(0)=16-f(4)=16$，$f(-4)=f(4)=0$，

由 $f(x)+f(x+4)=16\Rightarrow f(x)=16-f(x-4)$，

当 $x\in(4,8]$ 时，$x-4\in(0,4]$，则 $f(x)=16-f(x-4)=16-(x-4)^2+2^{x-4}$，

因为当 $x\in(4,8]$ 时，$16-(x-4)^2\geqslant0$，$2^{x-4}>1$，

所以 $f(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 没有零点，所以 $f(x)$ 在一个周期内只有两个零点.

又 $2\,024\div8=253$，所以在 $[0,2\,024]$ 上函数有 $253\times2=506$(个)零点，

当 $x\in[0,4]$ 时，$f(x)$ 有两个零点 2 和 4，

当 $x\in(4,8]$ 时，$f(x)$ 无零点，由函数的周期性可知，当 $x\in[-4,0)$ 时，$f(x)$ 有一个零点 $-4$，

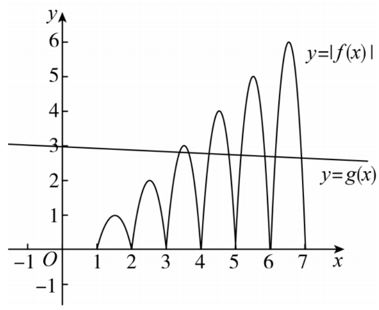
因此函数 $f(x)$ 在区间 $[-4,2\,024]$ 上有 507 个零点. 故选 B.

**10. C** 【解析】当 $0<x<1$ 时，$[x]=0$；当 $1\leqslant x<2$ 时，$[x]=1$；当 $2\leqslant x<3$ 时，$[x]=2$；当 $3\leqslant x<4$ 时，$[x]=3$；当 $4\leqslant x<5$ 时，$[x]=4$；$\cdots$，

所以 $f(x)=[x]\cdot\sin\pi x=\begin{cases}0,0<x<1,\\ \sin\pi x,1\leqslant x<2,\\ 2\sin\pi x,2\leqslant x<3,\\ 3\sin\pi x,3\leqslant x<4,\\ 4\sin\pi x,4\leqslant x<5,\\ 5\sin\pi x,5\leqslant x<6,\\ \cdots,\end{cases}$

则 $|f(x)|=\begin{cases}0,0<x<1,\\ -\sin\pi x,1\leqslant x<2,\\ 2\sin\pi x,2\leqslant x<3,\\ -3\sin\pi x,3\leqslant x<4,\\ 4\sin\pi x,4\leqslant x<5,\\ -5\sin\pi x,5\leqslant x<6,\\ \cdots,\end{cases}$

设 $g(x)=3-\frac{x}{50}$，令 $g(x)\geqslant0$，解得 $x\leqslant150$，画出 $y=|f(x)|$ 与 $y=g(x)$ 的部分图象如图所示.




由图可知 $y=|f(x)|$ 与 $y=g(x)$ 的图象在每个区间 $[k,k+1]$ $(3\leqslant k\leqslant149$ 且 $k\in\mathbf{Z})$ 上均有 2 个交点，所以交点总数为 $(150-3)\times2=294$，所以方程 $|f(x)|=3-\frac{x}{50}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的不同实根个数为 294. 故选 C.

**11. B** 【解析】由题意，函数 $f(x)=|\sin^2x-\sin|x||$ 满足 $f(-x)=f(x)$，且定义域为 $\mathbf{R}$，所以函数 $f(x)=|\sin^2x-\sin|x||$ 为偶函数. 当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)=|\sin^2x-\sin x|=\sin x-\sin^2x$，因为 $f(x)-\frac{1}{6}=0$，即 $\sin^2x-\sin x+\frac{1}{6}=0$，设 $t=\sin x\in[0,1]$，可得 $t^2-t+\frac{1}{6}=0$，解得 $t_1=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$，$t_2=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$，即 $\sin x=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ 或 $\sin x=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$，此时 $f(x)-\frac{1}{6}=0$ 共有 4 个不同的根；当 $x\in(\pi,2\pi]$ 时，$f(x)=|\sin^2x-\sin x|=\sin^2x-\sin x$，因为 $f(x)-\frac{1}{6}=0$，即 $\sin^2x-\sin x-\frac{1}{6}=0$，设 $m=\sin x\in[-1,0]$，可得 $m^2-m-\frac{1}{6}=0$，解得 $m_1=\frac{3-\sqrt{15}}{6}$，$m_2=\frac{3+\sqrt{15}}{6}>0$(舍去)，即 $\sin x=\frac{3-\sqrt{15}}{6}$，此时 $f(x)-\frac{1}{6}=0$ 共有 2 个不同的根. 所以方程 $f(x)-\frac{1}{6}=0$ 在 $[-2\pi,2\pi]$ 上的不同根的个数为 $(4+2)\times2=12$. 故选 B.

**12. ABD** 【解析】当 $x\leqslant0$ 时，$f(x)=-xe^x$，$f'(x)=-(x+1)e^x$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-1$，当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值，$f(-1)=\frac{1}{e}$，$f(0)=0$. 当 $x>0$ 且 $x\neq1$ 时，$f(x)=\frac{(2x-1)e^x}{x-1}$ $(x\neq1)$，$f'(x)=\frac{2x\left(x-\frac{3}{2}\right)e^x}{(x-1)^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{3}{2}$，当 $0<x<1$ 或 $1<x<\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x>\frac{3}{2}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，$f(x)$ 在 $x=\frac{3}{2}$ 处取得极小值，$f\left(\frac{3}{2}\right)=4e^{\frac{3}{2}}$. 当 $x\to0^+$ 时，$f(x)\to1$，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 不存在，所以函数 $f(x)$ 的大致图象如图①.

**敲黑板：** 通过求导讨论函数的单调性画出函数 $f(x)$ 的大致图象，在画图时也应该尽量准确，能表达出关键点之间的关系

令 $f(x)=t$，$y=t^2-at+\frac{1}{16}$.

**提示：** 在讨论含参二次函数 $h(x)$ 的零点时，需对照 $f(x)$ 的图象和 $a$ 的取值范围分类讨论

对于 A，若关于 $t$ 的方程 $t^2-at+\frac{1}{16}=0$ 仅有 1 个解，则 $\Delta=a^2-\frac{1}{4}=0$，解得 $a=\pm\frac{1}{2}$，

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，令 $t^2+\frac{1}{2}t+\frac{1}{16}=0$，即 $\left(t+\frac{1}{4}\right)^2=0$，解得 $t=-\frac{1}{4}$，由图①知当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=-\frac{1}{4}$ 仅有 1 个解，即 $h(x)$ 有 3 个零点；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，令 $t^2-\frac{1}{2}t+\frac{1}{16}=0$，即 $\left(t-\frac{1}{4}\right)^2=0$，解得 $t=\frac{1}{4}$，由图①可知 $f(x)=\frac{1}{4}$ 有 3 个不同的解，即 $h(x)$ 有 3 个零点，故 A 正确.

对于 B，若关于 $t$ 的方程 $t^2-at+\frac{1}{16}=0$ 有 2 个不同的解，则 $\Delta=a^2-\frac{1}{4}>0$，解得 $a>\frac{1}{2}$ 或 $a<-\frac{1}{2}$，不妨设 2 个解分别为 $t_1,t_2$，且 $t_1<t_2$，

则 $t_1+t_2=a$，$t_1\cdot t_2=\frac{1}{16}>0$，即 $t_1,t_2$ 必定同号并且都不为 0.

若使函数 $h(x)$ 有 4 个零点，则情况如下：

①$t_1=0$，$t_2=\frac{1}{e}$ 或 $t_2>4e^{\frac{3}{2}}$，此种情况与 $t_1\cdot t_2=\frac{1}{16}$ 矛盾，故舍去；

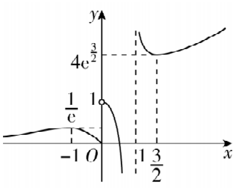
②$t_1<0$，$t_2\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，此种情况与 $t_1\cdot t_2=\frac{1}{16}$ 矛盾，故舍去；

③$0<t_1<\frac{1}{e}$，$t_2=4e^{\frac{3}{2}}$；

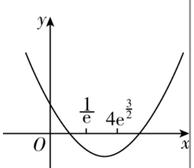
④$0<t_1<\frac{1}{e}$，$\frac{1}{e}<t_2<1$.

若情况③成立，即 $t_1\cdot 4e^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{16}$，则 $t_1=\frac{1}{64e^{\frac{3}{2}}}$，则 $a=\frac{1}{64e^{\frac{3}{2}}}+4e^{\frac{3}{2}}>\frac{1}{2}$，满足题意，即存在 $a$，使 $h(x)$ 有 4 个零点，故 B 正确.

对于 C，若使函数 $h(x)$ 有 5 个零点，则必有 $0<t_1<\frac{1}{e}$，$t_2>4e^{\frac{3}{2}}$，则 $t^2-at+\frac{1}{16}=0$ 的两根分别落在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 和 $(4e^{\frac{3}{2}},+\infty)$ 内，作出函数 $y=x^2-ax+\frac{1}{16}$ 的大致图象如图②.




图①

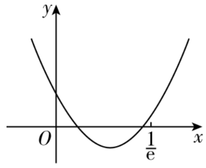



图②

由 $\begin{cases}\Delta=a^2-\frac{1}{4}>0,\\ \frac{1}{e^2}-a\cdot\frac{1}{e}+\frac{1}{16}<0,\\ 16e^3-a\cdot 4e^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{16}<0,\end{cases}$

可得 $\frac{1}{64e^{\frac{3}{2}}}+4e^{\frac{3}{2}}<a$，则存在 $a$，使 $h(x)$ 有 5 个零点，故 C 错误.

对于 D，若函数 $h(x)$ 有 6 个零点，则 $0<t_1<t_2<\frac{1}{e}$，作出函数 $y=x^2-ax+\frac{1}{16}$ 的大致图象如图③.




图③

由 $\begin{cases}\Delta=a^2-\frac{1}{4}>0,\\ 0<\frac{a}{2}<\frac{1}{e},\\ \frac{1}{e^2}-a\cdot\frac{1}{e}+\frac{1}{16}>0,\end{cases}$

可得 $\frac{1}{2}<a<\frac{1}{e}+\frac{e}{16}$，故 D 正确.

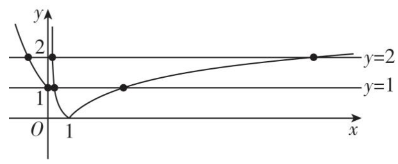
故选 ABD.

**13. 6** 【解析】令 $y=f^2(x)-3f(x)+2=0$，即 $[f(x)-1][f(x)-2]=0$，

解得 $f(x)=1$ 或 2.

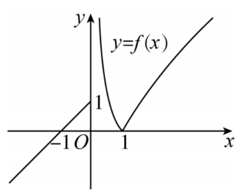
画出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.

先由函数的零点转化为方程 $f(x)=1$ 和 2 的根，再利用数形结合求出零点个数



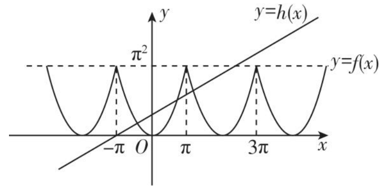

由图可知，函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=1$，$y=2$ 共有 6 个交点，所以函数 $y=f^2(x)-3f(x)+2$ 的零点个数是 6.

**14. C** 【解析】设函数 $h(x)=x-\frac{1}{x}$，$x>0$，则 $h'(x)=1+\frac{1}{x^2}>0$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$h(1)=0$，作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.




令 $t=f(x)$，则 $t^2+(m-4)t+2(2-m)=0$，则 $t_1=2$，$t_2=2-m$. 由图可知，直线 $y=2$ 与 $f(x)$ 的图象有 2 个交点，则直线 $y=2-m$ 与 $f(x)$ 的图象有 3 个交点，则 $0<2-m\leqslant 1$，解得 $1\leqslant m<2$，故选 C.

**15. A** 【解析】令函数 $h(x)=a(x+\pi)$，则 $h(x)$ 的图象是过点 $(-\pi,0)$，斜率为 $a$ 的直线. 由 $f(2\pi-x)=f(x)$ 可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，又 $f(x)$ 为偶函数，所以画出 $f(x)$ 和 $h(x)$ 在同一平面直角坐标系下的大致图象（如图为 $a>0$ 时的情况）如图所示.

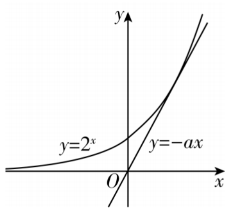



由题知 $g(x)$ 有且仅有三个零点，则 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的图象有且仅有三个交点. 当 $a=0$ 时，显然不成立；当 $a>0$ 时，由图可得 $\begin{cases}h(\pi)=2a\pi<\pi^2,\\ h(3\pi)=4a\pi>\pi^2,\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{2}$；当 $a<0$ 时，由对称性知 $-\frac{\pi}{2}<a<-\frac{\pi}{4}$. 综上，

$a$ 的取值范围是 $\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，

故选 A.

**16. A** 【解析】由题意可得方程 $(2^x+ax)\cdot(2^x-2x)=0$ 有 4 个不同的根.




方程 $2^x-2x=0$ 的 2 个根为 $x_1=1$，$x_2=2$，

所以方程 $2^x+ax=0$ 有 2 个不同的根，且 $a\neq-2$，

即函数 $y=2^x$ 与函数 $y=-ax$ 的图象有两个交点.

如图，当直线 $y=-ax$ 与函数 $y=2^x$ 的图象相切时，设切点为 $(x_0,2^{x_0})$，

因为 $y'=2^x\ln 2$，所以 $\begin{cases}-a=2^{x_0}\ln 2,\\ -ax_0=2^{x_0},\end{cases}$ 解得 $x_0=\frac{1}{\ln 2}=\log_2 e$，$a=-e\ln 2$.

要使函数 $y=2^x$ 与函数 $y=-ax$ 的图象有两个交点，只需直线 $y=-ax$ 的斜率大于 $e\ln 2$，即 $-a>e\ln 2\Rightarrow a<-e\ln 2$.

设 $g(x)=\frac{e\ln x}{x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{e(1-\ln x)}{x^2}$，

由 $1-\ln x>0\Rightarrow 0<x<e$，$1-\ln x<0\Rightarrow x>e$，

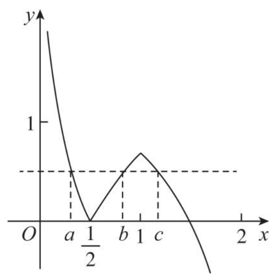
所以 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 单调递减，

所以 $g(x)$ 的最大值为 $g(e)=1$.

所以 $\frac{e\ln 2}{2}<1\Rightarrow e\ln 2<2\Rightarrow -e\ln 2>-2$.

故 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(-2,-e\ln 2)$，故选 A.

**17. BC** 【解析】因为 $\ln(2-x)+\ln 2=\ln[2(2-x)]$，所以 $y=\ln 2x$ 与 $y=\ln(2-x)+\ln 2$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，




作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示，所以 $b+c=2$.

因为$|\ln 2a|=|\ln 2b|$，即$-\ln 2a=\ln 2b$，所以$\ln 4ab=0$，所以$ab=\frac{1}{4}$. 因为$\frac{1}{2}<b<1$，即$\frac{1}{2}<\frac{1}{4a}<1$，所以$\frac{1}{4}<a<\frac{1}{2}$，所以$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{a+b+c}{abc}=\frac{a+2}{\frac{c}{4}}=\frac{4(a+2)}{2-\frac{1}{4a}}=\frac{16a(a+2)}{8a-1}$. 设$t=8a-1$，则$t\in(1,3)$，所以$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{1}{4}\left(t+\frac{17}{t}+18\right)$，因为$h(x)=x+\frac{17}{x}$在$(1,3)$上单调递减，所以$h(t)\in(h(3),h(1))=\left(\frac{26}{3},18\right)$，所以$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}=\frac{1}{4}\left(t+\frac{17}{t}+18\right)\in\left(\frac{20}{3},9\right)$，结合选项可知$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$的取值可以是 7，8. 故选 BC.

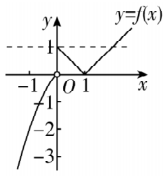
**18.** $(-1,0)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 【解析】当$x\geq1$时，$2^x>0$，故$f(x)$在$[1,+\infty)$上没有零点，

故$f(x)$在$(-\infty,1)$上有两个零点，

而函数$f(x)=2(x+a)(x-2a)(x<1)$的零点为$x=-a$或$x=2a$，所以$2a<1$，$-a<1$，且$-a\neq2a$，

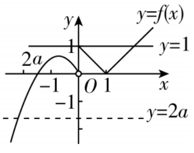
所以$-1<a<\frac{1}{2}$，且$a\neq0$.

**19.** $(-1,0)$ 【解析】设$t=f(x)$，当$x\geq0$时，$f(x)=|x-1|$，此时$t\geq0$. 由$f(t)=0$，得$t=1$，即$f(x)=|x-1|=1$，解得$x=0$或$x=2$，即$y=f(f(x))$在$[0,+\infty)$上有 2 个零点. 当$x<0$时，若$a\geq0$，$f(x)=-x^2+2ax$，其图象的对称轴方程为$x=a$，此时函数$f(x)$的大致图象如图①.



图①

则此时$f(x)=-x^2+2ax<0$，即$t<0$，则$f(t)<0$，即$f(t)=0$无解，则$t=f(x)$无零点，此时$y=f(f(x))$无零点，不符合题意，故需$a<0$，此时函数$f(x)$的大致图象如图②.



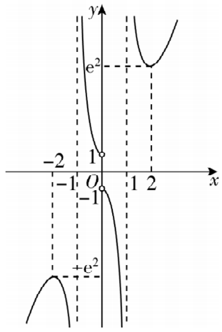
图②

由$f(t)=0$得$t=1$或$t=2a$，要使得函数$y=f(f(x))$恰有 3 个零点，需满足$y=f(f(x))$在$(-\infty,0)$上有 1 个零点，此时$f(x)=2a$只有 1 个解，故只需$y=1$与函数$f(x)$的图象在$(-\infty,0)$上无交点，即$f(a)=-a^2+2a^2<1$，解得$-1<a<1$，结合$a<0$，可得$a\in(-1,0)$.

**方法**：根据函数零点个数求解参数范围的问题，采用数形结合思想能高效解答，通过数与形的相互转化能使问题转化的更简单，常见的图象应用的命题角度有：(1)确定方程根的个数；(2)求参数范围；(3)求不等式解集；(4)研究函数性质

**20.** $(-\infty,-1-\ln 2)\cup(-1-\ln 2,+\infty)$ 【解析】已知$f(x)=e^{x-a}+4e^{a-x}-\ln(x+2)+x-3$不存在零点，即函数$h(x)=e^{x-a}+4e^{a-x}(x>-2)$与$g(x)=\ln(x+2)-x+3(x>-2)$的图象没有交点. $g'(x)=\frac{1}{x+2}-1=\frac{-1-x}{x+2}$，当$x\in(-2,-1)$时，$g'(x)>0$；当$x\in(-1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，则$g(x)$在$x=-1$处取得极大值，也是最大值，$g(x)_{\max}=g(-1)=\ln 1+4=4$. $h(x)=e^{x-a}+4e^{a-x}\geq2\sqrt{e^{x-a}\cdot4e^{a-x}}=4$，当且仅当$e^{x-a}=4e^{a-x}$，即$x=a+\ln 2$时等号成立. 要使两函数图象没有交点，须满足$a+\ln 2\neq-1$，即$a\neq-1-\ln 2$，故$a$的取值范围是$(-\infty,-1-\ln 2)\cup(-1-\ln 2,+\infty)$.

**21.** $(1-e^4,e^4-1)$ 【解析】当$x>0$且$x\neq1$时，$f'(x)=\frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$，$f'(2)=0$，当$0<x<2$且$x\neq1$时，$f'(x)<0$；当$x>2$时，$f'(x)>0$. 故$f(x)$在$(0,1)$，$(1,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增. 当$x=2$时，$f(x)$取得极小值$f(2)=e^2$，当$0<x<1$时，$f(x)<0$；当$x>1$时，$f(x)>0$，当$x\to0^+$时，$f(x)\to-1$由$f(x)$解析式可知，$f(x)$为奇函数，作出$f(x)$的大致图象如图所示.




令$g(x)=0$，得$[f(x)]^2-mf(x)-e^4=0$，设$t=f(x)$，$t\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$，得到关于$t$的方程$t^2-mt-e^4=0(*)$，

**敲黑板**：根据方程结构，通过换元转化为二次函数的零点问题

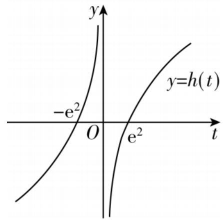
则$\Delta=m^2+4e^4>0$恒成立，设$(*)$式的 2 个不等实根为$t_1,t_2(t_1<t_2)$，当$t_1=-e^2$，$t_2=e^2$，即$m=0$时，满足题意；

当$\begin{cases}-e^2<t_1<-1,\\t_2>e^2\end{cases}$或$\begin{cases}t_1<-e^2,\\1<t_2<e^2\end{cases}$时，满足题意.

**提示**：在解决有关二次函数的零点问题时，一定要充分利用一元二次方程根的分布、二次函数的图象及所给条件三者之间的关系，观察、分析函数的图象，找函数的零点，判断各区间上函数值的符号，使问题得以解决

方法一：令$h(t)=t^2-mt-e^4$，则$\begin{cases}h(-e^2)>0,\\h(-1)<0,\\h(e^2)<0\end{cases}$或$\begin{cases}h(-e^2)<0,\\h(1)<0,\\h(e^2)>0,\end{cases}$故$0<m<e^4-1$或$1-e^4<m<0$. 综上，实数$m$的取值范围是$(1-e^4,e^4-1)$.

方法二：$(*)$式化为$m=t-\frac{e^4}{t}$，令$h(t)=t-\frac{e^4}{t}(t\neq0)$，易知$y=h(t)$在$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$上单调递增，且$h(1)=1-e^4$，$h(-1)=e^4-1$，$h(e^2)=h(-e^2)=0$，作出$h(t)$的大致图象如图所示.




当$0<m<e^4-1$或$1-e^4<m<0$时，满足$\begin{cases}-e^2<t_1<-1,\\t_2>e^2\end{cases}$或$\begin{cases}t_1<-e^2,\\1<t_2<e^2.\end{cases}$

综上，实数$m$的取值范围是$(1-e^4,e^4-1)$.

## 刷上分

**1. B** 【解析】由$\ln x=4-2^x$得$2^x+\ln x-4=0$，设$f(x)=2^x+\ln x-4$，则$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. 又$f(1)=-2<0$，$f(2)=\ln 2>0$，所以$f(x)$的唯一零点在区间$(1,2)$内，即方程$\ln x=4-2^x$的解所在的区间为$(1,2)$. 故选 B.

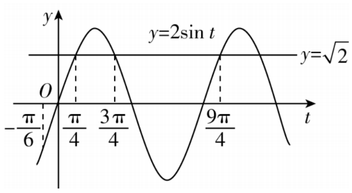
**2. C** 【解析】函数$f(x)=\ln x+x-4$在$(0,+\infty)$上单调递增，且$f(2)=\ln 2-2<0$，$f(3)=\ln 3-1>0$，所以函数$f(x)$存在唯一的零点$x_0\in(2,3)$，故$g(x_0)=2$，故选 C.

**3. C** 【解析】因为$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x-\cos\omega x-\sqrt{2}=2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}(\omega>0)$，令$f(x)=0$，即$2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{2}=0$，

所以$2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$.

又因为$x\in[0,\pi]$，所以$\omega x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right]$.

令$\omega x-\frac{\pi}{6}=t$，则$t\in\left[-\frac{\pi}{6},\omega\pi-\frac{\pi}{6}\right]$，所以$2\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{2}$，即$2\sin t=\sqrt{2}$，画出函数$y=2\sin t$的图象如图所示，




因为函数$f(x)$在$[0,\pi]$上恰有 2 个零点，所以$\frac{3\pi}{4}\leq t<\frac{9\pi}{4}$，

所以$\begin{cases}\omega>0,\\\frac{3\pi}{4}\leq\omega\pi-\frac{\pi}{6}<\frac{9\pi}{4},\end{cases}$解得$\frac{11}{12}\leq\omega<\frac{29}{12}$.

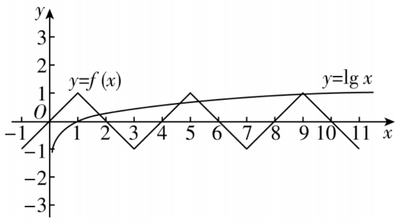
故选 C.

**4. B** 【解析】由$f(1+x)=f(1-x)$可得，$f(x)$的图象关于直线$x=1$对称，

由$f(1+x)=f(1-x)$可得$f(2+x)=f(-x)=-f(x)$，

所以$f(4+x)=-f(2+x)=f(x)$，所以$f(x)$是以 4 为周期的函数，

当 $x\in[-1,1]$ 时，$f(x)=x$，作出 $f(x)$ 与 $y=\lg x$ 的部分图象如图所示.




$g(x)=f(x)-\lg x$ 的零点个数即为方程 $f(x)=\lg x$ 的根的个数，

也即 $y=f(x)$ 与 $y=\lg x$ 图象的交点个数，

因为 $\lg 9<\lg 10=1$，

所以由图可知 $y=f(x)$ 与 $y=\lg x$ 图象的交点个数为5，故选B.

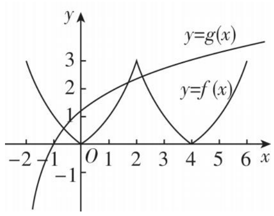
5. B 【解析】由 $f(x)=f(x+4)$ 可知函数 $y=f(x)$ 的周期是4，因为函数 $f(x)$ 为偶函数，所以 $f(x)=f(-x)$.

当 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1$，

当 $x\in[0,2]$ 时，$-x\in[-2,0]$，$f(x)=f(-x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}-1=2^{x}-1$.

由 $f(x)-\log_a(x+2)=0$ 得 $f(x)=\log_a(x+2)$，令 $g(x)=\log_a(x+2)$，

作出函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示.




当 $a>1$ 时，在区间 $(-2,6]$ 内方程 $f(x)-\log_a(x+2)=0$ 恰有3个不同的实数根，

等价于函数 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象有3个交点，

则满足 $\begin{cases}g(2)<f(2),\\ g(6)>f(6),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\log_a 4<3,\\ \log_a 8>3,\end{cases}$ 解得 $\sqrt[3]{4}<a<2$. 因此，实数 $a$ 的取值范围是 $(\sqrt[3]{4},2)$. 故选B.

6. AB 【解析】对于A，$f(-1)=\log_2 2=1$，A正确；

对于B，当 $x>0$ 时，$f(x)=f(x-1)-f(x-2)$，

即 $f(x+2)=f(x+1)-f(x)$，

则 $f(x+3)=f(x+2)-f(x+1)$，于是 $f(x+3)=-f(x)$，因此 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$，B正确；

对于C，$f(2\,023)=f(337\times6+1)=f(1)=f(0)-f(-1)=0-1=-1$，$f(2\,024)=f(337\times6+2)=f(2)=f(1)-f(0)=-1$，则 $f(2\,023)+f(2\,024)=-2$，C错误；

对于D，当 $x<0$ 时，$f(x)=\log_2(1-x)>0$，此时函数无零点，

而 $f(0)=0$，由 $f(x+6)=-f(x+3)=f(x)$ 知，$f(6)=-f(3)=f(0)$，则 $f(3)=0$，

即 $f(0)=f(3)=f(6)=f(9)=f(12)=\cdots=f(2\,022)=0$，显然 $2\,022=3\times674$，因此 $f(x)$ 在 $[-2\,024,2\,024]$ 上有675个零点，D错误. 故选AB.

7. 4 【解析】令 $t=|f(x)|$，则方程 $f^2(x)-a|f(x)|+4=0$ 可化为 $t^2-at+4=0$，

因为方程 $f^2(x)-a|f(x)|+4=0$ 恰有2个不同实数解，

所以 $\begin{cases}t=|f(x)|,\\ t^2-at+4=0\end{cases}$ 有两组解.

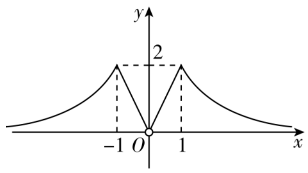
因为 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且 $f(-x)=\left|-x+\frac{1}{-x}\right|-\left|-x-\frac{1}{-x}\right|=f(x)$，

所以函数 $f(x)$ 为偶函数，

当 $x>1$ 时，$f(x)=\frac{2}{x}$；当 $0<x\le1$ 时，$f(x)=2x$.

所以当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，又函数 $f(x)$ 为偶函数，所以 $|f(x)|=f(x)$，

作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示，




所以当 $t>2$ 时，$t=|f(x)|$ 没有解；

当 $t=2$ 时，$t=|f(x)|$ 有两个解；

当 $0<t<2$ 时，$t=|f(x)|$ 有四个解；

当 $t\le0$ 时，$t=|f(x)|$ 没有解.

因为 $\begin{cases}t=|f(x)|,\\ t^2-at+4=0\end{cases}$ 有两组解，

所以2必须为方程 $t^2-at+4=0(a\in\mathbf{R})$ 的一个解，

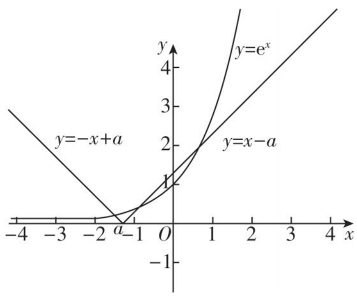
所以 $4-2a+4=0$，故 $a=4$，

当 $a=4$ 时，由 $f^2(x)-4|f(x)|+4=0$ 可得 $|f(x)|=2$，所以 $x=1$ 或 $x=-1$，满足条件，

所以 $a=4$.

8. $\left[-2+\frac{1}{e^2},-1\right)$ 【解析】因为函数 $f(x)=\frac{|x-a|}{e^x}-1$ 在 $x\in[-2,+\infty)$ 上有三个零点，

所以 $f(x)=\frac{|x-a|}{e^x}-1=0$，即 $|x-a|=e^x$ 在 $x\in[-2,+\infty)$ 上有三个不同的根，所以函数 $y=|x-a|$ 的图象与函数 $y=e^x$ 的图象在 $[-2,+\infty)$ 上恰有3个交点，如图.




由图可知，直线 $y=-x+a$ 与 $y=e^x$ 的图象在 $x\in[-2,+\infty)$ 上必须有一个交点，

所以 $-(-2)+a\ge e^{-2}$，所以 $a\ge-2+e^{-2}=-2+\frac{1}{e^2}$，

由图可知，直线 $y=x-a$ 与 $y=e^x$ 的图象在 $[-2,+\infty)$ 上必须有两个交点，

当直线 $y=x-a$ 与 $y=e^x$ 的图象相切时，设切点为 $(x_0,e^{x_0})$，

因为 $y'=(e^x)'=e^x$，所以根据导数的几何意义得切线的斜率为 $e^{x_0}$，所以 $e^{x_0}=1$，

解得 $x_0=0$，所以切点为 $(0,1)$，将其代入 $y=x-a$ 得 $1=0-a$，所以 $a=-1$，

所以由图可知当 $-2+\frac{1}{e^2}\le a<-1$ 时，函数 $y=|x-a|$ 的图象与函数 $y=e^x$ 的图象在 $[-2,+\infty)$ 上恰有3个交点，

所以当 $-2+\frac{1}{e^2}\le a<-1$ 时，函数 $f(x)=\frac{|x-a|}{e^x}-1$ 在 $x\in[-2,+\infty)$ 上有三个零点.

9. $(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})$ 【解析】函数 $f(x)$ 恰有一个零点即方程 $2\sqrt{x^2-ax}=|ax-2|-1$ 有且仅有1个根，讨论 $a=0$ 和 $a\neq0$ 两种情况；

提示：$a$ 和0均在函数 $f(x)$ 的定义域内

①当 $a=0$ 时，$2\sqrt{x^2}=1$，$x=\pm\frac{1}{2}$，方程有两个根，不成立.

②易知当 $a\neq0$ 时，$x=0$ 不为方程的根，

∴ 当 $a\neq0$ 且 $x\neq0$ 时，令 $t=ax$，则 $x=\frac{t}{a}$，

$t\neq0$，方程可化为 $2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=|t-2|-1$.

由 $|t-2|-1\ge0$ 知 $t\le1$ 或 $t\ge3$，

∴ $2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=\begin{cases}t-3,t\ge3,\\ 1-t,t\le1\text{ 且 }t\neq0,\end{cases}$

∴ $\frac{4t^2}{a^2}-4t=\begin{cases}t^2-6t+9,t\ge3,\\ t^2-2t+1,t\le1\text{ 且 }t\neq0,\end{cases}$

∴ $a^2=\begin{cases}\frac{4t^2}{t^2-2t+9},t\ge3,\\ \frac{4t^2}{t^2+2t+1},t\le1\text{ 且 }t\neq0,t\neq-1.\end{cases}$

由 $t^2+2t+1=(t+1)^2\neq0$ 知 $t\neq-1$

当 $t\ge3$ 时，令 $h(t)=\frac{4t^2}{t^2-2t+9}$，则 $h'(t)=\frac{8t(t^2-2t+9)-4t^2(2t-2)}{(t^2-2t+9)^2}=\frac{-8t^2+72t}{(t^2-2t+9)^2}$；当 $t\le1$ 且 $t\neq0,t\neq-1$ 时，令 $g(t)=\frac{4t^2}{t^2+2t+1}$，

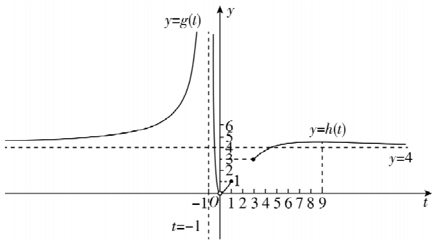
则 $g'(t)=\frac{8t(t^2+2t+1)-4t^2(2t+2)}{(t^2+2t+1)^2}=\frac{8t^2+8t}{(t^2+2t+1)^2}$.

令 $h'(t)=0$，解得 $t=0$ 或 $t=9$，∵ $t\ge3$，

∴ $h(t)$ 在 $(3,9)$ 上单调递增，在 $(9,+\infty)$ 上单调递减，且 $h(3)=3$，当 $t\to+\infty$ 时，$h(t)=\frac{4}{1-\frac{2}{t}+\frac{9}{t^2}}\to4$.

令 $g'(t)=0$,解得 $t=-1$ 或 $t=0$,∵ $t\leqslant1$ 且 $t\neq0,t\neq-1$,∴ $g(t)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增,在 $(-1,0)$ 上单调递减,在 $(0,1)$ 上单调递增,且 $g(1)=1$,当 $t\to0$ 时,$g(t)=\dfrac{4}{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}\to0$,当 $t\to-1$ 时,$g(t)\to+\infty$,当 $t\to-\infty$ 时,$g(t)=\dfrac{4}{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}=\dfrac{4}{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}\to4$.

根据上述分析画出函数 $h(t)=\dfrac{4t^2}{t^2-2t+9}$ $(t\geqslant3)$ 和函数 $g(t)=\dfrac{4t^2}{t^2+2t+1}$ $(t\leqslant1$ 且 $t\neq0,t\neq-1)$ 的大致图象如图所示.




由图可知,当 $1<a^2<3$ 时,函数 $y=a^2$ 与 $y=\begin{cases}h(t),t\geqslant3,\\ g(t),t\leqslant1\text{ 且 }t\neq0,t\neq-1\end{cases}$ 的图象有一个交点,解得 $-\sqrt{3}<a<-1$ 或 $1<a<\sqrt{3}$,

∴ $a$ 的取值范围为 $(-\sqrt{3},-1)\cup(1,\sqrt{3})$.

10.【解】(1)当 $a=-2$ 时,$f(x)=-2x^2+2$,所以 $g(x)=\ln f(x)=\ln(-2x^2+2)$.

令 $-2x^2+2>0$,解得 $-1<x<1$,

所以 $g(x)=\ln(-2x^2+2)$ 的定义域为 $(-1,1)$.

因为 $f(x)=-2x^2+2$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增,在 $(0,1)$ 上单调递减,函数 $y=\ln x$ 为增函数,

所以根据复合函数的单调性可知 $g(x)=\ln(-2x^2+2)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增,在 $(0,1)$ 上单调递减.

又 $g(-x)=\ln[-2(-x)^2+2]=\ln(-2x^2+2)=g(x)$,所以 $g(x)$ 是偶函数.

因为 $g(x)<g(2x-1)$,所以 $g(|x|)<g(|2x-1|)$,

所以 $0\leqslant|2x-1|<|x|<1$,解得 $\dfrac{1}{3}<x<1$,

所以不等式 $g(x)<g(2x-1)$ 的解集为 $\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{3}<x<1\right\}$.

(2)令 $t=m+\dfrac{1}{m}+1$,因为 $m>0$,

所以 $t=m+\dfrac{1}{m}+1\geqslant2\sqrt{m\cdot\dfrac{1}{m}}+1=3$,当且仅当 $m=1$ 时等号成立.

因为 $f(|x|)=m+\dfrac{1}{m}+1$,所以 $a|x|^2-(a+2)|x|+2=t$,

即 $a|x|^2-(a+2)|x|+2-t=0$ $(t\geqslant3)$ 有四个不同的实根.

令 $h(x)=a|x|^2-(a+2)|x|+2-t$,易知 $h(x)$ 为偶函数,图象关于 $y$ 轴对称,

所以 $a|x|^2-(a+2)|x|+2-t=0$ $(t\geqslant3)$ 有四个不同的实根可转化为 $ax^2-(a+2)x+2-t=0$ $(t\geqslant3)$ 有两个不等正根,设为 $x_1>0,x_2>0$,

所以 $\begin{cases}\Delta>0,\\ x_1+x_2>0,\\ x_1x_2>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(a+2)^2-4a(2-t)>0,\\ \dfrac{a+2}{a}>0,\\ \dfrac{2-t}{a}>0,\end{cases}$

由 $\begin{cases}\dfrac{a+2}{a}>0,\\ \dfrac{2-t}{a}>0\end{cases}$ 可得 $a<-2$.

因为 $(a+2)^2-4a(2-t)>0$,

即存在 $t\in[3,+\infty)$,使不等式 $4at+(a+2)^2-8a>0$ 成立,

故 $4a\times3+(a+2)^2-8a>0$,即 $a^2+8a+4>0$,

解得 $a<-4-2\sqrt{3}$ 或 $a>-4+2\sqrt{3}$,

故实数 $a$ 的取值范围为 $(-\infty,-4-2\sqrt{3})$.

## 考向 11　函数模型及其应用

刷考点

1. B 【解析】由题意得 $\begin{cases}a+b\log_3\dfrac{30}{10}=0,\\ a+b\log_3\dfrac{90}{10}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=1,\end{cases}$ ∴ $v_1=-1+\log_3\dfrac{Q_1}{10}$.

设 $v_2=k\log_3\dfrac{Q_2}{100}$,

由题意得 $k\log_3\dfrac{900}{100}=1$,解得 $k=\dfrac{1}{2}$,

∴ $v_2=\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{Q_2}{100}$.

又 $v_1=v_2$,∴ $-1+\log_3\dfrac{Q_1}{10}=\dfrac{1}{2}\log_3\dfrac{Q_2}{100}$,

则 $\log_3\dfrac{1}{3}+\log_3\dfrac{Q_1}{10}=\log_3\dfrac{\sqrt{Q_2}}{10}$,即 $\log_3\dfrac{Q_1}{30}=\log_3\dfrac{\sqrt{Q_2}}{10}$,∴ $\dfrac{Q_1}{30}=\dfrac{\sqrt{Q_2}}{10}$,即 $Q_1^2=9Q_2$. 故选 B.

2. AC 【解析】把 $k=\ln2,\theta_1=5\theta_0,t=4$ 代入 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt}$,得 $\theta=\theta_0+(5\theta_0-\theta_0)\cdot\mathrm{e}^{-4\ln2}$,解得 $\theta=\dfrac{5}{4}\theta_0$,则 $\dfrac{\frac{5}{4}\theta_0}{5\theta_0}=\dfrac{1}{4}$,故 A 正确;

假设存在满足题意的 $t$ 的值,则 $\theta_0+4\theta_0\cdot\mathrm{e}^{-kt}=2(\theta_0+4\theta_0\cdot\mathrm{e}^{-2kt})$,则 $8\cdot(\mathrm{e}^{-kt})^2-4\cdot\mathrm{e}^{-kt}+1=0$,令 $\mathrm{e}^{-kt}=m(m>0)$,则 $8m^2-4m+1=0$,$\Delta=(-4)^2-4\times8\times1<0$,所以方程无解,所以假设不成立,故 B 错误;

因为 $0<t_1<t_2<t_3$,$t_1+t_3=2t_2$,

所以 $\mathrm{e}^{-kt_1}+\mathrm{e}^{-kt_3}>2\sqrt{\mathrm{e}^{-kt_1}\cdot\mathrm{e}^{-kt_3}}=2\mathrm{e}^{-kt_2}$,

所以 $f(t_1)+f(t_3)-2f(t_2)=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\cdot\mathrm{e}^{-kt_1}+\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt_3}-2[\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\cdot\mathrm{e}^{-kt_2}]=(\theta_1-\theta_0)(\mathrm{e}^{-kt_1}+\mathrm{e}^{-kt_3}-2\mathrm{e}^{-kt_2})>0$,

即 $f(t_1)+f(t_3)>2f(t_2)$,故 C 正确;

因为 $f(t)=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt}$,所以 $f'(t)=-k(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt}$,所以 $f'(t_1)+f'(t_3)-2f'(t_2)=-k(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt_1}-k(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt_3}+2k(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt_2}=-k(\theta_1-\theta_0)(\mathrm{e}^{-kt_1}+\mathrm{e}^{-kt_3}-2\mathrm{e}^{-kt_2})<0$,即 $f'(t_1)+f'(t_3)<2f'(t_2)$,故 D 错误.

故选 AC.

3. 9 【解析】根据函数的解析式可知,当 $n<N_0$ 时,$t(n)=\dfrac{t_0}{\sqrt{n}}$ 单调递减;当 $n\geqslant N_0$ 时,$t(n)=\dfrac{t_0}{\sqrt{N_0}}$ 为常数,

且第 64 天和第 67 天检测过程平均耗时均为 8 h,

敲黑板:由此可知 $64,67\in[N_0,+\infty)$ 且 $N_0>16$

所以 $t(16)=\dfrac{t_0}{\sqrt{16}}=\dfrac{t_0}{4}=16$,

所以 $t_0=64$,$t(n)=\dfrac{64}{\sqrt{n}}(n<N_0)$.

又 $t(67)=\dfrac{t_0}{\sqrt{N_0}}=\dfrac{64}{\sqrt{N_0}}=8$,所以 $N_0=64$.

所以 $t(n)=\begin{cases}\dfrac{64}{\sqrt{n}},n<64,\\ 8,n\geqslant64.\end{cases}$

所以 $t(49)=\dfrac{64}{\sqrt{49}}=\dfrac{64}{7}\approx9$.

4. B 【解析】设该企业需要更新设备的年数为 $x(x\in\mathbf{N}^*)$,设备年平均费用为 $y$ 万元,则 $x$ 年的设备维护费用为 $2+4+6+\cdots+2x=\dfrac{x(2+2x)}{2}=x(x+1)$,所以 $y=\dfrac{100+0.5x+x(x+1)}{x}=x+\dfrac{100}{x}+\dfrac{3}{2}\geqslant2\sqrt{x\cdot\dfrac{100}{x}}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{43}{2}$(万元),当且仅当 $x=10$ 时,等号成立,因此,为使该设备年平均费用最低,该企业需要更新设备的年数为 10. 故选 B.

5. A 【解析】设经过 $n$ 层 PP 棉滤芯过滤后水中大颗粒杂质含量为 $y$,则 $y=80\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^n=80\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$,

令 $80\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\leqslant2$,解得 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\leqslant\dfrac{1}{40}$,两边取常用对数得 $n\lg\dfrac{2}{3}\leqslant\lg\dfrac{1}{40}$,

即 $n\lg\dfrac{3}{2}\geqslant\lg40$,即 $n(\lg3-\lg2)\geqslant1+2\lg2$. 因为 $\lg2\approx0.30$,$\lg3\approx0.48$,

所以 $(0.48-0.30)n\geqslant1.60$,解得 $n\geqslant\dfrac{80}{9}$,因为 $n\in\mathbf{N}^*$,所以 $n$ 的最小值为 9. 故选 A.

6. 12 【解析】设工厂和仓库之间的距离为 $x$ 千米,运费为 $y_1$ 万元,仓储费为 $y_2$ 万元,

依题意可设 $y_1=k_1x(x>0)$，$y_2=\frac{k_2}{x}(x>0)$.

当工厂和仓库之间的距离为 3 千米时，运费为 9 万元，仓储费为 4 万元，则 $3k_1=9$，$\frac{k_2}{3}=4$，得 $k_1=3$，$k_2=12$，所以 $y_1=3x$，$y_2=\frac{12}{x}$，即运费与仓储费之和为 $\left(3x+\frac{12}{x}\right)$ 万元.

已知 $x>0$，由 $3x+\frac{12}{x}\geqslant 2\sqrt{3x\cdot\frac{12}{x}}=12$，当且仅当 $3x=\frac{12}{x}$，即 $x=2$ 时，运费与仓储费之和最小，最小值为 12 万元.

## 考向 12　抽象函数的性质

### 刷考点

**1. D** 【解析】由函数 $f(x-1)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=0$，即 $y$ 轴对称，则 $f(x)$ 为偶函数.

由 $f(x+2)=-f(x)+2$ 得 $f(x+4)=-f(x+2)+2=f(x)$，即 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，所以 $f(2\ 025)=f(1+4\times506)=f(1)$，

在 $f(x+2)=-f(x)+2$ 中，令 $x=-1$ 可得 $f(1)=-f(-1)+2\Rightarrow f(1)=1$，

所以 $f(2\ 025)=1$. 故选 D.

**2. C** 【解析】由题意知 $f(-x)=-f(x)=-f(a-x)$，即 $f(x)=-f(x+a)=f(x+2a)$，所以 $f(x)$ 是周期为 $2a$ 的奇函数，且直线

**提示**：若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+a)=-f(x)$，则 $f(x)$ 的周期 $T=2a$

$x=\frac{a}{2}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴.

当 $a=2$ 时，$f(1)=-f(1+2)=-f(3)$，$f(1)=f(1+2\times4)=f(9)$，A 不符合题意；

当 $a=3$ 时，$f(1)=f(1+6n)$ 且 $n\in\mathbf{Z}$，B 不符合题意；

当 $a=4$ 时，$f(1)=f(4-1)=f(3)$，$f(1)=f(1+2\times4)=f(9)$，故 $f(1)=f(3)=f(9)$，C 符合题意；

当 $a=5$ 时，$f(1)=f(1+10m)$ 且 $m\in\mathbf{Z}$，D 不符合题意.

故选 C.

**3. B** 【解析】对于 A，令 $(x,y)$ 是函数 $y=g(x)$ 的图象上任意一点，则 $(2-x,y)$ 在 $y=f(x+1)$ 的图象上，即 $\begin{cases}y=g(x),\\y=f(3-x),\end{cases}$ 则 $g(x)=f(3-x)$，由 $g(x)$ 为奇函数，得 $g(-x)+g(x)=0$，

则 $f(3-x)+f(3+x)=0$，则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 对称，又 $g(x)=g(2-x)$，则 $f(3-x)=f(1+x)$，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，A 正确；

对于 C，由 A 可知 $f(3+x)=-f(3-x)=-f(1+x)$，即 $f(x+2)=-f(x)$，则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，则 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，C 正确；

对于 D，由 A 知函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 对称，且由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(3)=0$，则 $f(2\ 027)=f(506\times4+3)=0$，D 正确；

对于 B，结合 $f(3-x)=f(1+x)$，得 $f(4-x)=f(x)$，结合 $f(x+4)=f(x)$，得 $f(4-x)=f(x+4)$，则 $f(8-x)=f(x)$，

若 $f(x)$ 的图象关于点 $(4,0)$ 对称，则 $f(8-x)+f(x)=0$，即 $f(x)=0$，而没有条件确保 $f(x)=0$ 恒成立，B 错误.

故选 B.

> **方法技巧**　①存在常数 $a,b$ 使得 $f(x)+f(2a-x)=2b\Leftrightarrow f(a+x)+f(a-x)=2b$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,b)$ 对称.
> ②存在常数 $a$ 使得 $f(x)=f(2a-x)\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)$，则函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

**4. D** 【解析】因为 $f(x+3)+f(1-x)=2$，

所以当 $x=-1$ 时，$2f(2)=2$，即 $f(2)=1$.

又函数 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x=1$，所以 $f(0)=f(2)=1$.

在 $f(x+3)+f(1-x)=2$ 中，令 $x=1$，得 $f(4)+f(0)=2$，解得 $f(4)=1$.

故选 D.

**5. C** 【解析】对任意 $x_1,x_2(x_1\neq x_2)$，都有 $(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0$，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

函数 $y=f(x+1)$ 是以 $(-1,0)$ 为中心的"中心捺函数"，

所以函数 $y=f(x+1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，且 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称，即 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(n^2-mn)+f(2m^2-2mn)\geqslant0$，

即 $f(n^2-mn)\geqslant-f(2m^2-2mn)=f(2mn-2m^2)$，

所以 $n^2-mn\leqslant2mn-2m^2$，即 $n^2-3mn+2m^2\leqslant0$，

若 $m=0$，则 $n^2\leqslant0$，即 $n=0$，$\frac{m}{m+n}$ 没有意义，

若 $n=0$，则 $2m^2\leqslant0$，即 $m=0$，$\frac{m}{m+n}$ 没有意义，

所以 $m\neq0$ 且 $n\neq0$，

由 $n^2-3mn+2m^2\leqslant0$ 两边同时除以 $m^2$，得 $\left(\frac{n}{m}\right)^2-3\cdot\frac{n}{m}+2=\left(\frac{n}{m}-1\right)\left(\frac{n}{m}-2\right)\leqslant0$，解得 $1\leqslant\frac{n}{m}\leqslant2$，所以 $2\leqslant1+\frac{n}{m}\leqslant3$，

所以 $\frac{m}{m+n}=\frac{1}{1+\frac{n}{m}}\in\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$.

故选 C.

**6. ①②③④** 【解析】由 $f(-1)=0$，且 $f(x)+g(x+2)=1$，$f(x-4)-g(x)=3$，得 $g(1)=1$，$g(3)=-3$，故①正确；

由 $f(x-4)-g(x)=3$，得 $f(x+4-4)-g(x+4)=3$，即 $f(x)-g(x+4)=3$，由 $f(x)+g(x+2)=1$，得 $g(x+2)+g(x+4)=-2$，则 $g(x)+g(x+2)=-2$，所以 $g(x)=g(x+4)$，所以 4 为 $g(x)$ 的一个周期，故②正确；

由 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，得 $f(x)=f(2-x)$，由 $f(x)+g(x+2)=1$，可得 $f(2-x)+g(x+2)=1$，则 $f(2+x-6)+g(-x+6+2)=1$，即 $f(x-4)+g(8-x)=1$，由 $f(x-4)-g(x)=3$，得 $g(8-x)+g(x)=-2$，所以 $g(x)$ 的图象关于点 $(4,-1)$ 对称，结合 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，可知 $g(4)=-1$，故③正确；

由②知 $g(x)+g(x+2)=-2$，则 $g(2)+g(4)=-2$，又由③知 $g(4)=-1$，则 $g(2)=-1$，故④正确. 所以正确的有①②③④.

**7. BC** 【解析】令 $x=y=0$，得 $f(0)=0$，令 $y=0$，得 $f(x)=xf(0)=0$，则 $f(-x)=f(x)=-f(x)=0$，且 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数. 由 $g(x+1)=(x+1)(x^2+2x)=(x+1)\cdot[(x+1)^2-1]$，得 $g(x)=x^3-x$. 因为 $g(-x)=-g(x)$，且 $g(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $g(x)$ 是奇函数，故选 BC.

**8. 0** 【解析】因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$. 又 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(2-x)=f(x)+f(2)$，令 $x=2$，则 $f(0)=2f(2)$，即 $f(2)=0$，所以 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $f(2-x)=f(x)$，即 $f(2+x)=f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，即函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，则 $f(4)=f(0)=0$. 在 $f(2-x)=f(x)$ 中，令 $x=3$，可得 $f(3)=f(-1)=-f(1)$，所以 $f(1)+f(3)=0$，则 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 025)=506\times0+f(2\ 025)=f(1)$，则 $f(2)+f(3)+\cdots+f(2\ 025)=f(1)-f(1)=0$.

**9. $\frac{1}{2^{|x|}}$**（答案不唯一） 【解析】令 $f(x)=\frac{1}{a^{|x|}}(a>1)$，$f(x+y)=\frac{1}{a^{|x+y|}}$，$f(x)f(y)=\frac{1}{a^{|x|}}\cdot\frac{1}{a^{|y|}}=\frac{1}{a^{|x|+|y|}}=\frac{1}{a^{|x+y|}}(xy>0)$，所以满足若 $xy>0$，则 $f(x+y)=f(x)f(y)$. $f(-x)=\frac{1}{a^{|-x|}}=f(x)$，即 $f(x)=f(-x)$ 成立. 又 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $f(x)=\frac{1}{a^{|x|}}(a>1)$ 符合题意.

**10. ①②⑤** 【解析】$f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，满足 $f(x+2)=f(x)$，则 $f(x)$ 是周期函数，周期为 2，①正确；

偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x)=f(-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，②正确；

$f(x)$ 为偶函数，在 $[-1,0]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，③错误；

$f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递增，且 $f(x)$ 的周期为 2，则 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，④错误；

$f(x)$ 的周期为 2，则 $f(2)=f(0)$，⑤正确.

### 刷上分

**1. C** 【解析】$f(x)+f(-x-2)=-2$，又 $y=f(x)$ 是偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，则 $f(-x-2)=f(x+2)$，

则 $f(x)+f(x+2)=-2$，

则 $f(x+2)+f(x+4)=-2$，则 $f(x)=f(x+4)$，

则 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数.

因为 $f(0)+f(2)=-2$，$f(0)=1$，所以 $f(2)=-3$.

因为 $f(-1)+f(1)=-2$，$f(-1)=f(1)$，所以 $f(1)=-1$.

因为 $f(1)+f(3)=-2$，所以 $f(3)=-1$.

又 $f(4)=f(0)=1$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=-4$，则 $\sum\limits_{k=1}^{2\,025} f(k)=-4\times 506+f(2\,025)=-2\,024+f(1)=-2\,025$. 故选 C.

**2. A**　【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，所以 $f(0)=0$.

因为 $f(x+\mathrm{e})=f(x-\mathrm{e})$，所以 $f(x+2\mathrm{e})=f(x)$，则 $f(x)$ 是以 $2\mathrm{e}$ 为周期的函数，且 $f(x+\mathrm{e})=-f(\mathrm{e}-x)$，

所以 $f(\mathrm{e})=-f(\mathrm{e})\Rightarrow f(\mathrm{e})=0$.

因为当 $x\in(0,\mathrm{e})$ 时，$f(x)=\ln x$，所以 $f(1)=0$，所以 $f(-1)=-f(1)=0$，

所以 $f(-1+2\mathrm{e})=f(-1)=0$，

故 $f(x)$ 在区间 $(-\mathrm{e},2\mathrm{e})$ 内的零点为 $-1,0,1,\mathrm{e},-1+2\mathrm{e}$，其零点之和为 $3\mathrm{e}-1$. 故选 A.

**易错警示**　函数的零点不是一个点的坐标，而是函数解析式对应方程的根（或函数图象与 $x$ 轴交点的横坐标）.

**3. D**　【解析】$f(2x+1)$ 为奇函数，得 $f(2x+1)+f(-2x+1)=0$，

即 $f(x+1)+f(-x+1)=0$，则 $f(x+1)$ 为奇函数，且 $f(x)$ 图象关于点 $(1,0)$ 中心对称，故 B 错误，C 错误；

由 $f(2x+4)=f(2x)$ 可知 $f(x+4)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，故 A 错误；

由 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 中心对称，知 $f(x)=-f(2-x)$，

所以 $f(x+4)=-f(2-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,0)$ 中心对称，

所以 $f(x+3)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 中心对称，所以 $f(x+3)$ 为奇函数，故 D 正确.

故选 D.

**4. C**　【解析】$\because f(x+2)f(x)=1$，

$\therefore f(x+2)=\dfrac{1}{f(x)}$，

即 $f(x+4)=\dfrac{1}{f(x+2)}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{f(x)}}=f(x)$，

$\therefore 4$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期.

$\because f(0)\in(1,2)$，$\therefore f(2\,026)=f(2)=\dfrac{1}{f(0)}\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$. 故选 C.

**5. D**　【解析】由 $f(x+1)$ 是奇函数，知 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 中心对称，

所以 $f(1)=0$，$f(x+1)=-f(1-x)$，所以 $f(x+2)=-f(-x)$.

因为 $f(1-x)+g(x+1)=4$，所以 $g(x+1)=4-f(1-x)=4+f(x+1)$，所以 $g(x)=4+f(x)$.

因为 $f(x)+g(x-2)=4$，所以 $g(x-2)=4-f(x)$，所以 $g(x)=4-f(x+2)=4+f(-x)$.

所以 $4+f(x)=4+f(-x)$，所以 $f(x)=f(-x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数，所以 $g(x)=4+f(x)$ 也为偶函数，故 A，B 错误.

由 $g(x)=4+f(x)$，得 $f(x)-g(x)=-4$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{9}[f(k)-g(k)]=(-4)\times 9=-36$，故 C 错误.

因为 $f(x+2)=-f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数.

由 $f(x+2)=-f(-x)=-f(x)$，得 $f(x+2)+f(x)=0$，所以 $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$.

因为 $g(x)=4+f(x)$，所以 $g(x)+f(x)=4+2f(x)$，

所以 $\sum\limits_{k=1}^{9}[f(k)+g(k)]=\sum\limits_{k=1}^{9}[2f(k)+4]=\sum\limits_{k=1}^{9}[2f(k)]+36=2\sum\limits_{k=1}^{9}f(k)+36$，

因为 $\sum\limits_{k=1}^{9}f(k)=2\times 0+f(1)=0$，所以 $\sum\limits_{k=1}^{9}[f(k)+g(k)]=36$，故 D 正确.

故选 D.

**6. $-6$**　【解析】因为 $f(x-1)+2$ 是奇函数，即 $f(x-1)+2+f(-x-1)+2=0$，

所以 $f(x-1)+f(-x-1)=-4$，即 $f(-2+x)+f(-x)=-4$，令 $x=1$ 得 $2f(-1)=-4$，即 $f(-1)=-2$.

因为 $g(x-2)$ 是偶函数，所以 $g(-x-2)=g(x-2)$.

因为 $f(x)-g(x-2)=3$，所以 $f(-x)-g(-x-2)=3$，

所以 $f(x)=f(-x)$，所以 $f(-2+x)+f(x)=-4$，

所以 $f(-2+x+2)+f(x+2)=-4$，即 $f(x)+f(x+2)=-4$，故 $f(-2+x)=f(x+2)$，则 $f(x)=f(x+4)$，

故 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，而 $g(-2)=1$，故 $f(4)=f(0)=3+g(-2)=4$，

故 $f(2)=f(-2)=-4-f(0)=-4-4=-8$，而 $f(3)=f(-1)=-2$，

故 $f(2)+f(3)+f(4)=-8-2+4=-6$.

**7. $\dfrac{1}{2}$**　【解析】因为 $2S_n=3a_n-1$，

所以当 $n=1$ 时，$2a_1=2S_1=3a_1-1$，得 $a_1=1$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_{n-1}=3a_{n-1}-1$，

则 $2a_n=2S_n-2S_{n-1}=3a_n-3a_{n-1}$，

**易错点**：用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$ 求得通项公式，解题时要注意 $n\geqslant 2$ 的情形是否对 $n=1$ 也适用

所以 $a_n=3a_{n-1}$，

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 3 的等比数列，则 $a_n=3^{n-1}$，所以 $a_{1\,013}=3^{1\,012}$.

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$，则 $f(x+2)=\dfrac{1+f(x+1)}{1-f(x+1)}=\dfrac{1+\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1-\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}}=-\dfrac{1}{f(x)}$，所以 $f(x+4)=-\dfrac{1}{f(x+2)}=f(x)$，即 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数.

$f(2)=\dfrac{1+f(1)}{1-f(1)}=3$，则 $f(1)=\dfrac{1}{2}$.

$a_{1\,013}^2=(3^{1\,012})^2=9^{1\,012}=(1+8)^{1\,012}=1+\mathrm{C}_{1\,012}^{1}\cdot 8+\mathrm{C}_{1\,012}^{2}\cdot 8^2+\cdots+\mathrm{C}_{1\,012}^{1\,012}\cdot 8^{1\,012}$，

上述展开式中，从第二项开始，每一项都是 8 的倍数，也是 4 的倍数，

所以 $f(a_{1\,013}^2)=f(9^{1\,012})=f(1)=\dfrac{1}{2}$.

**8.**【解】(1) 由于 $f(x)$ 不恒为 0，故存在 $x_0$，使 $f(x_0)\neq 0$，

在 $f(m+n)+f(m-n)=2f(m)\cdot f(n)$ 中，

令 $m=x_0$，$n=0$，则 $f(x_0)+f(x_0)=2f(x_0)\cdot f(0)$，所以 $f(0)=1$；

令 $m=1$，$n=1$，得 $f(2)+f(0)=2f^2(1)$.

在 $f(1+m)=f(1-m)$ 中，

令 $m=1$，得 $f(2)=f(0)=1$，所以 $f^2(1)=1$.

在 $f(m+n)+f(m-n)=2f(m)\cdot f(n)$ 中，

令 $m=n=\dfrac{1}{2}$，得 $f(1)+f(0)=2f^2\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

因为当 $0<x<1$ 时，$-1<f(x)<1$，所以 $-1<f\left(\dfrac{1}{2}\right)<1$，即 $f(1)+f(0)<2$，

所以 $f(1)<1$，故 $f(1)=-1$.

(2) 函数 $f(x)$ 为偶函数. 证明如下：$f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，

在 $f(m+n)+f(m-n)=2f(m)\cdot f(n)$ 中，

令 $m=0$，$n=x$，得 $f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)$，

因为 $f(0)=1$，所以 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 为偶函数.

(3) 在 $f(1+m)=f(1-m)$ 中，令 $1+m=-x$，得 $f(-x)=f(2+x)$.

又 $f(x)$ 为偶函数，则 $f(x)=f(-x)=f(2+x)$，即 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数.

在 $f(m+n)+f(m-n)=2f(m)\cdot f(n)$ 中，

令 $m=n=\dfrac{1}{3}$，得 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)+f(0)=2f^2\left(\dfrac{1}{3}\right)$，

即 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)+1=2f^2\left(\dfrac{1}{3}\right)$ ①；

令 $m=\dfrac{2}{3}$，$n=\dfrac{1}{3}$，得 $f(1)+f\left(\dfrac{1}{3}\right)=2f\left(\dfrac{2}{3}\right)f\left(\dfrac{1}{3}\right)$，即 $-1+f\left(\dfrac{1}{3}\right)=2f\left(\dfrac{2}{3}\right)f\left(\dfrac{1}{3}\right)$ ②.

而 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)<1$，联立①②解得 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$，$f\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

在 $f(1+m)=f(1-m)$ 中，令 $m=-\dfrac{2}{3}$ 得 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=f\left(\dfrac{5}{3}\right)$，令 $m=-\dfrac{1}{3}$ 得 $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=f\left(\dfrac{4}{3}\right)$，

所以 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{2}{3}\right)+f\left(\dfrac{3}{3}\right)+f\left(\dfrac{4}{3}\right)+f\left(\dfrac{5}{3}\right)+f\left(\dfrac{6}{3}\right)=0$.

又因为 $f(x)$ 是以 2 为周期的函数，

所以 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{2}{3}\right)+f\left(\dfrac{3}{3}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2\,025}{3}\right)=337\times 0+f\left(\dfrac{1}{3}\right)+f\left(\dfrac{2}{3}\right)+f\left(\dfrac{3}{3}\right)=-1$.