$0\Big)\cup\Big(0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\Big)$.

(2)设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=mx-3m,\\x^2+y^2=4\end{cases}$ 消去 y 得 $(1+m^2)x^2-6m^2x+9m^2-4=0$，则 $\Delta=4(4-5m^2)>0$，

$x_1+x_2=\frac{6m^2}{1+m^2}$，$x_1x_2=\frac{9m^2-4}{1+m^2}$，$y_1y_2=m^2(x_1-3)(x_2-3)=m^2[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9]$，

所以 $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\cdot\frac{y_2}{x_2-2}$

$=\frac{m^2[x_1x_2-3(x_1+x_2)+9]}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}$

$=\frac{m^2\left(\frac{9m^2-4}{1+m^2}-\frac{18m^2}{1+m^2}+9\right)}{\frac{9m^2-4}{1+m^2}-\frac{12m^2}{1+m^2}+4}=\frac{5m^2}{m^2}=5.$

(3)依题意，直线 l_1 不垂直于 y 轴，设其方程为 $x=ty+1$，设 $G(x_3,y_3)$，$H(x_4,y_4)$，

由 $\begin{cases}x=ty+1,\\x^2+y^2-4=0\end{cases}$ 消去 x 得 $(1+t^2)y^2+2ty-3=0$，显然 $\Delta'>0$，

$y_3+y_4=\frac{-2t}{1+t^2}$，$y_3y_4=\frac{-3}{1+t^2}$，$2ty_3y_4=3(y_3+y_4)$，而点 $A(2,0)$，$B(-2,0)$，

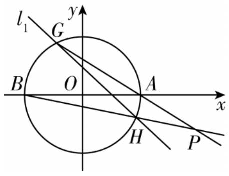
直线 AG 的方程为 $y=\frac{y_3}{x_3-2}(x-2)$，直线 BH 的方程为 $y=\frac{y_4}{x_4+2}(x+2)$，

由 $\begin{cases}y=\frac{y_3}{x_3-2}(x-2),\\y=\frac{y_4}{x_4+2}(x+2)\end{cases}$ 消去 y 得

$\frac{y_3}{x_3-2}(x-2)=\frac{y_4}{x_4+2}(x+2)$，

即 $\frac{y_3}{ty_3-1}(x-2)=\frac{y_4}{ty_4+3}(x+2)$，解得 $x=\frac{4ty_3y_4+6y_3-2y_4}{3y_3+y_4}=\frac{6(y_3+y_4)+6y_3-2y_4}{3y_3+y_4}=4$，

所以点 P 在定直线 $x=4$ 上.



方法技巧 求定值问题常见的方法：①从特殊入手，求出定值，再证明这个值与变量无关. ②直接推理、计算，并在计算推理的过程中消去变量，从而得到定值.

专题 12　圆锥曲线

考向 43　椭圆

刷考点

1. B 【解析】由题意得 $\frac{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}}{|x-4|}=\frac{1}{2}$，整理得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，所以点 P 的轨迹为椭圆. 故选 B.

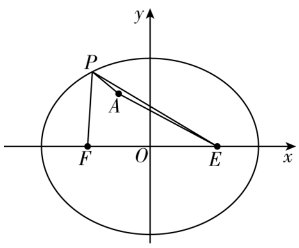
2. B 【解析】如图，将点 A 坐标代入椭圆 C 的方程中，得 $\frac{(-1)^2}{12}+\frac{(\sqrt{3})^2}{8}=\frac{11}{24}<1$，则点 A 在椭圆 C 的内部. 记椭圆 C 的右焦点为 E，由椭圆 C 的方程得 $E(2,0)$，设椭圆 C 的长轴长为 $2a$，则 $a=2\sqrt{3}$，因为 P 在椭圆 C 上，

所以 $|PF|+|PE|=2a=4\sqrt{3}$，即 $|PF|=4\sqrt{3}-|PE|$，

所以 $|PF|+|PA|=4\sqrt{3}-|PE|+|PA|\leqslant4\sqrt{3}+|AE|$，当 P 是 AE 的延长线与椭圆的交点时取等号，

提示：根据三角形三边关系得到

所以 $|PF|+|PA|$ 的最大值为 $4\sqrt{3}+\sqrt{(-1-2)^2+(\sqrt{3}-0)^2}=6\sqrt{3}$，故选 B.



3. B 【解析】如图，由题意知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，以 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$ 为焦点的椭圆的半焦距 $c=1$，点 P 是直线 l 与椭圆的交点，

设点 $F_2(1,0)$ 关于直线 $l:x-y+4=0$ 对称的点为 $F'(m,n)$，

则 $\begin{cases}\frac{n}{m-1}=-1,\\\frac{n}{2}=\frac{m+1}{2}+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-4,\\n=5,\end{cases}$

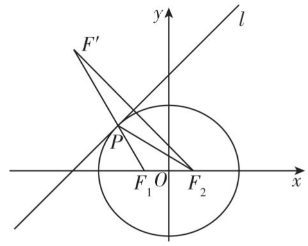
即 $F'(-4,5)$，

则椭圆的长轴长 $2a=|PF_1|+|PF_2|=|PF_1|+|PF'|\geqslant|F_1F'|=\sqrt{(-4+1)^2+5^2}=\sqrt{34}$，

所以该椭圆长轴长的最小值为 $\sqrt{34}$.

易错点：椭圆的长轴长为 $2a$，而不是 a

故选 B.



4. C 【解析】因为方程 $(m+1)x^2+(1-m)\cdot y^2=1-m^2$ 表示焦点在 x 轴上的椭圆，所以 $1-m^2\neq0$，该方程可化为 $\frac{x^2}{1-m}+\frac{y^2}{m+1}=1$，

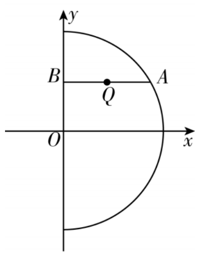
所以 $\begin{cases}1-m>m+1,\\m+1>0,\end{cases}$ 解得 $-1<m<0$. 故选 C.

5. D 【解析】如图，设 $A(x_0,y_0)$，$x_0>0$，$Q(x,y)$，则 $B(0,y_0)$，由题意可知，$\begin{cases}x=\frac{x_0}{2},\\y=y_0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x_0=2x,\\y_0=y,\end{cases}$

将点 $A(x_0,y_0)$ 代入 $x^2+y^2=12(x>0)$ 中，得 $4x^2+y^2=12(x>0)$，即 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{12}=1(x>0)$.

故选 D.



6. B 【解析】因为 $|OP|=|PF|=\frac{\sqrt{3}}{2}$，线段 AF 的中点为 P，所以 $\triangle AOF$ 是以 O 为直角的直角三角形，$|AF|=\sqrt{3}$，

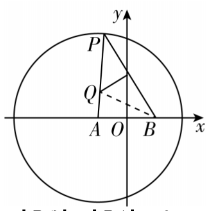
所以 $|AF|=a=\sqrt{3}$，

所以椭圆 M 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$. 故选 B.

7. $\sqrt{14}$ 【解析】如图，连接 QB，

因为点 Q 在线段 PB 的垂直平分线上，

所以 $|PQ|=|QB|$，



故 $|QA|+|QB|=|QA|+|PQ|=|PA|=6$，

所以点 Q 的轨迹是以 A,B 为焦点的椭圆，

设其方程为 $\frac{x_Q^2}{a^2}+\frac{y_Q^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

则 $2a=6$，$a=3$，$c=2$，$b^2=a^2-c^2=9-4=5$，

故点 Q 的轨迹方程为 $\frac{x_Q^2}{9}+\frac{y_Q^2}{5}=1$.

设 $x_Q+y_Q=t$，联立 $\begin{cases}\frac{x_Q^2}{9}+\frac{y_Q^2}{5}=1,\\x_Q+y_Q=t,\end{cases}$

消去 y_Q 得 $14x_Q^2-18tx_Q+9t^2-45=0$，则判别式 $\Delta=(-18t)^2-4\times14\times(9t^2-45)\geqslant0$，即 $t^2\leqslant14$，解得 $-\sqrt{14}\leqslant t\leqslant\sqrt{14}$，

故 x_Q+y_Q 的最大值为 $\sqrt{14}$.

8. C 【解析】由题意得 $a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{5}$，所以 $|F_1F_2|=2c=2\sqrt{5}$，$|PF_1|+|PF_2|=2a=6$.

因为 $|PF_1|-|PF_2|=2$，所以 $|PF_1|=4$，$|PF_2|=2$，

而 $|PF_1|^2+|PF_2|^2=16+4=20=|F_1F_2|^2$，

所以 $PF_1\perp PF_2$，

所以 $\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot$

$|PF_2|=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$.

故选 C.

9. A　【解析】由题意,$A(-a,0)$,$B(a,0)$,设点 $P(x_0,y_0)$,则 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,即 $y_0^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_0^2)$. 又 $\frac{y_0}{x_0+a}\cdot\frac{y_0}{x_0-a}=\frac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{3}{4}$,

因此 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$,

所以椭圆 C 的离心率 $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{1}{2}$. 故选 A.

10. D　【解析】因为椭圆 C 过点 $A(-2,0)$ 和 $B(0,1)$,

所以 $a^2=4$,$b^2=1$,可得 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$,

所以 $F_1(-\sqrt{3},0)$,$F_2(\sqrt{3},0)$.

设 $P(x,y)$,由题意得直线 AB 的方程为 $\frac{x}{-2}+y=1$,即 $x-2y+2=0$.

因为点 P 在线段 AB 上,所以 $P(x,y)$ 满足 $-2\leqslant x\leqslant 0$,$0\leqslant y\leqslant 1$,

则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{3}-x,-y)\cdot(\sqrt{3}-x,-y)=x^2+y^2-3=(2y-2)^2+y^2-3=5y^2-8y+1=5\left(y-\frac{4}{5}\right)^2-\frac{11}{5}$,$y\in[0,1]$,

当 $y=\frac{4}{5}$ 时,$(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\min}=-\frac{11}{5}$,当 $y=0$ 时,$(\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2})_{\max}=1$,所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围为 $\left[-\frac{11}{5},1\right]$. 故选 D.

11. 2　5　【解析】∵ 椭圆 C 的长轴长 $2a=4$,∴ $a=2$. 又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,∴ $c=\sqrt{3}$,

∴ $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$,∴ 椭圆 C 的短轴长 $2b=2$,∴ 椭圆 C:$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

设 $P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$,$Q(2\cos\beta,\sin\beta)$,

提示:椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上任意一点的坐标都可以表示为 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$

令直线 OP,OQ 的斜率分别为 k_{OP},k_{OQ},

∴ $k_{OP}\cdot k_{OQ}=\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{2\cos\beta}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{4\cos\alpha\cos\beta}=-\frac{1}{4}$,

∴ $\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)=0$,

∴ $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

∴ $|OP|^2+|OQ|^2=4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+4\cos^2\beta+\sin^2\beta=4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+k\pi+\beta\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+k\pi+\beta\right)+4\cos^2\beta+\sin^2\beta=4\sin^2\beta+\cos^2\beta+4\cos^2\beta+\sin^2\beta=5$,$k\in\mathbf{Z}$.

12. $\frac{2}{3}$　【解析】由题意,直线 AB 过 $F_1(-c,0)$ 且斜率为 $\sqrt{3}$,所以直线 AB 的方程为 $y=\sqrt{3}(x+c)$,与椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 联立消去 x,得 $\frac{3a^2+b^2}{3}\cdot y^2-\frac{2\sqrt{3}b^2c}{3}\cdot y-b^4=0$,$\Delta>0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\frac{2\sqrt{3}b^2c}{3a^2+b^2}$,$y_1y_2=\frac{-3b^4}{3a^2+b^2}$,

因为 $|AB|=3|F_1B|$,所以 $\overrightarrow{AF_1}=2\overrightarrow{F_1B}$,可得 $y_1=-2y_2$,

代入上式得 $-y_2=\frac{2\sqrt{3}b^2c}{3a^2+b^2}$,$-2y_2^2=\frac{-3b^4}{3a^2+b^2}$,

消去 y_2 并化简整理得 $8c^2=3a^2+b^2$,

将 $b^2=a^2-c^2$ 代入上式化简得 $c^2=\frac{4}{9}a^2$,

解得 $c=\frac{2}{3}a$,

因此,椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$.

13. A　【解析】直线 $kx-3y+(k+8)c=0$ 可化为 $k(x+c)-3y+8c=0$,

令 $\begin{cases}x+c=0,\\-3y+8c=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-c,\\y=\frac{8}{3}c,\end{cases}$

则该直线恒过定点 $\left(-c,\frac{8}{3}c\right)$,

若直线 $kx-3y+(k+8)c=0$ 恒与椭圆 Γ 有两个不同的公共点,则点 $\left(-c,\frac{8}{3}c\right)$ 在椭圆内部.

巧妙利用直线与椭圆的位置关系,分析出点与椭圆的位置关系

易知椭圆上的点当其横坐标为 $-c$ 时,纵坐标为 $\pm\frac{b^2}{a}$,即可得 $\frac{8}{3}c<\frac{b^2}{a}$,整理可得 $3c^2+8ac-3a^2<0$,即 $3e^2+8e-3<0$,结合 $e>0$,解得 $0<e<\frac{1}{3}$. 故选 A.

14. 7　【解析】由椭圆 C 的离心率 $e=\frac{1}{2}$,可得 $a=2c$,则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}c$,

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$,即 $3x^2+4y^2-12c^2=0$,

由直线 AB 过椭圆 C 的左焦点 $F(-c,0)$ 且斜率为 1,可得直线 AB 的方程为 $y=x+c$,

联立 $\begin{cases}y=x+c,\\3x^2+4y^2-12c^2=0,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $7x^2+8cx-8c^2=0$,

则 $\Delta=64c^2+4\times7\times8c^2=288c^2>0$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $x_1+x_2=-\frac{8}{7}c$,$x_1x_2=-\frac{8}{7}c^2$,

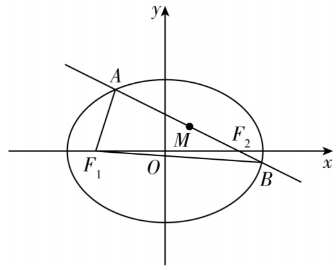
所以 $|AB|=\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{2\times(64c^2+4\times7\times8c^2)}}{7}=\frac{24c}{7}=12$,

解得 $c=\frac{7}{2}$,所以椭圆 C 的焦距 $2c=7$.

15. $12\sqrt{2}$　【解析】如图,由题意知 $F_1(-3,0)$,$F_2(3,0)$,

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,∵ 点 A,B 在椭圆 C 上,∴ $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$,两式相减得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$,

巧妙利用点差法



∵ M 为 AB 的中点,

∴ $x_1+x_2=2$,$y_1+y_2=2$,代入上式整理得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2}{a^2}$.

由题意知 $k_{AB}=k_{MF_2}=\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}$,

因此 $-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$,∴ $a^2=2b^2$,∴ $c^2=b^2$,由焦距为 6,得 $c=3$,即 $b=3$,则 $a=3\sqrt{2}$.

由椭圆的定义知 $\triangle AF_1B$ 的周长为 $|AF_1|+|BF_1|+|AB|=(|AF_1|+|AF_2|)+(|BF_1|+|BF_2|)=4a=12\sqrt{2}$.

敲黑板:$\triangle AF_1B$ 的周长为 $4a$

关键点拨　巧妙利用点差法

$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$,两式相减得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$,得到 $\frac{b^2}{a^2}=-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=-k_{AB}$,然后求出 a 和 b 的值.

16.【解】(1)将 $A(0,3)$,$P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 的坐标代入椭圆 C 的方程,可得 $\begin{cases}\frac{0}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1,\\\frac{9}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2\sqrt{3},\\b=3,\end{cases}$ 则 $c^2=a^2-b^2=3$,即 $c=\sqrt{3}$,

则 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$.

(2)由(1)可得椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{12}+$

$\frac{y^2}{9}=1$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=3$，此时 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}\neq9$，不符合题意，故直线 l 的斜率存在.

方法一：设直线 l 的方程为 $y=kx+b(b\neq3)$，$B(x_1,y_1)$，

联立 $\begin{cases}y=kx+b,\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(4k^2+3)x^2+8kbx+4b^2-36=0$，$\Delta=64k^2b^2-4(4k^2+3)\cdot(4b^2-36)=48(12k^2+9-b^2)>0$①，则 $x_1+3=\frac{-8kb}{4k^2+3}$.

由点 P 在 l 上，得 $\frac{3}{2}=3k+b$，即 $b=\frac{3}{2}-3k$②.

由①②知 $k\neq-\frac{3}{2}$，此时 $b\neq6$.

所以 $x_1=\frac{-8k\left(\frac{3}{2}-3k\right)}{4k^2+3}-3=\frac{12k^2-12k-9}{4k^2+3}$，

代入直线 l 的方程可得 $y_1=\frac{-6k^2-18k+\frac{9}{2}}{4k^2+3}$.

由 $A(0,3)$，$P\left(3,\frac{3}{2}\right)$ 可得 $|AP|=\frac{3\sqrt{5}}{2}$，直线 AP 的方程为 $x+2y-6=0$，设点 B 到直线 AP 的距离为 d，则 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}\cdot|AP|\cdot d=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}d=9$，解得 $d=\frac{12\sqrt{5}}{5}$.

由点到直线的距离公式可得 $d=\frac{|x_1+2y_1-6|}{\sqrt{1+2^2}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}$，

将 $x_1=\frac{12k^2-12k-9}{4k^2+3}$，$y_1=\frac{-6k^2-18k+\frac{9}{2}}{4k^2+3}$ 代入上式，

解得 $k=\frac{3}{2}$ 或 $k=\frac{1}{2}$，当 $k=\frac{3}{2}$ 时，$b=-3$；当 $k=\frac{1}{2}$ 时，$b=0$，

所以直线 l 的方程为 $y=\frac{3}{2}x-3$ 或 $y=\frac{1}{2}x$.

方法二：设直线 l 的方程为 $y-\frac{3}{2}=k(x-3)$，令 $P(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases}y=k(x-3)+\frac{3}{2},\\ \frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}=1,\end{cases}$ 消去 y 可得 $(4k^2+3)x^2-(24k^2-12k)x+36k^2-36k-27=0$，

$\Delta=(24k^2-12k)^2-4(4k^2+3)(36k^2-36k-27)=36(4k^2+12k+9)=36(2k+3)^2>0$，

$k\neq-\frac{3}{2}$，

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{24k^2-12k}{4k^2+3},\\ x_1x_2=\frac{36k^2-36k-27}{4k^2+3},\end{cases}$

所以 $|PB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}$.

又点 A 到直线 PB 的距离 $d=\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以 $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}\cdot\frac{\left|3k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=9$，解得 $k=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$，

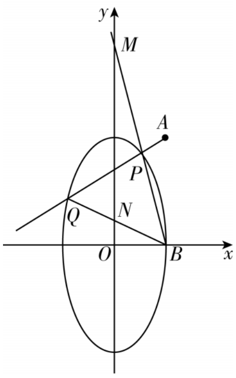
故直线 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$ 或 $y=\frac{3}{2}x-3$.

17. (1)【解】设 $T(x,y)$，由题意得 $\frac{\sqrt{x^2+(y-\sqrt{3})^2}}{\left|y-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$y\neq\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

整理得 $4x^2+y^2=4$，即 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$，

故动点 T 的轨迹 C 的方程为 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$.

(2)【证明】如图，当直线 PQ 的斜率不存在时，直线 PQ 的方程为 $x=1$，与 C 有且仅有一个交点，不满足题意，故直线 PQ 的斜率存在，设为 k，则直线 PQ 的方程为 $y=kx-k+2$.



联立 $\begin{cases}\frac{y^2}{4}+x^2=1,\\ y=kx-k+2,\end{cases}$ 消去 y 整理得 $(4+k^2)\cdot x^2+(4k-2k^2)x+k^2-4k=0$.

由判别式 $\Delta>0$，得 $(4k-2k^2)^2-4(4+k^2)\cdot(k^2-4k)>0$，整理得 $k>0$.

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$ $(x_1\neq1,x_2\neq1)$，

则 $x_1+x_2=\frac{2k^2-4k}{4+k^2}$，$x_1x_2=\frac{k^2-4k}{4+k^2}$.

直线 BP 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1-1}(x-1)$，

令 $x=0$，得 $y=\frac{y_1}{1-x_1}$，则 $M\left(0,\frac{y_1}{1-x_1}\right)$，同理可得 $N\left(0,\frac{y_2}{1-x_2}\right)$.

则 $\frac{y_1}{1-x_1}+\frac{y_2}{1-x_2}$

$=\frac{(kx_1-k+2)(1-x_2)+(kx_2-k+2)(1-x_1)}{(1-x_1)(1-x_2)}$

$=\frac{(2k-2)(x_1+x_2)-2kx_1x_2-2k+4}{1-(x_1+x_2)+x_1x_2}$

$=\frac{(2k-2)\cdot\frac{2k^2-4k}{4+k^2}-2k\cdot\frac{k^2-4k}{4+k^2}-2k+4}{1-\frac{2k^2-4k}{4+k^2}+\frac{k^2-4k}{4+k^2}}$

$=4$，

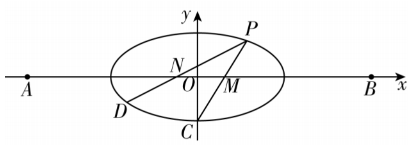
所以 $\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{1-x_1}+\frac{y_2}{1-x_2}\right)=2$，所以线段 MN 的中点坐标为 $(0,2)$，

即线段 MN 的中点为定点.

18. (1)【解】设椭圆方程为 $px^2+qy^2=1(p>0,q>0,p\neq q)$，

则 $\begin{cases}q=1,\\ \frac{64}{25}p+\frac{9}{25}q=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}p=\frac{1}{4},\\ q=1,\end{cases}$ 所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)【证明】如图，设 $P(x_0,y_0)$，$A(m,0)$，$B(n,0)$，$M(x_M,0)$，$N(x_N,0)$，



则 $\overrightarrow{CM}=(x_M,1)$，$\overrightarrow{CP}=(x_0,y_0+1)$，由 $\overrightarrow{CM}/\!/\overrightarrow{CP}$，得 $x_M(y_0+1)=x_0$，而 $y_0+1\neq0$，于是 $x_M=\frac{x_0}{y_0+1}$. $\overrightarrow{DN}=\left(x_N+\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$，

$\overrightarrow{DP}=\left(x_0+\frac{8}{5},y_0+\frac{3}{5}\right)$，

同理可得 $\left(x_N+\frac{8}{5}\right)\left(y_0+\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}\left(x_0+\frac{8}{5}\right)$，

而 $y_0+\frac{3}{5}\neq0$，于是 $x_N=\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}}$，

则 $\overrightarrow{NA}=\left(m-\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}},0\right)$，

$\overrightarrow{MB}=\left(n-\frac{x_0}{y_0+1},0\right)$，

$\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=\left(n-\frac{x_0}{y_0+1}\right)\left(m-\frac{\frac{3}{5}x_0-\frac{8}{5}y_0}{y_0+\frac{3}{5}}\right)$

$=\frac{(ny_0+n-x_0)(5my_0+8y_0+3m-3x_0)}{(y_0+1)(5y_0+3)}$，

不妨令 $5my_0+8y_0+3m=-3ny_0-3n$，因为 $P(x_0,y_0)$ 是椭圆上的动点，所以 $5m+8=-3n$，$3m=-3n$，得 $n=4$，$m=-4$，

于是 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}=\frac{-3[(4y_0+4)^2-x_0^2]}{(y_0+1)(5y_0+3)}$

$=\frac{-3[(4y_0+4)^2-(4-4y_0^2)]}{(y_0+1)(5y_0+3)}$

$=\frac{-12(5y_0^2+8y_0+3)}{5y_0^2+8y_0+3}=-12$，

所以存在 $A(-4,0)$ 和 $B(4,0)$，使得 $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{NA}$ 是定值，且定值为 -12.

刷上分

1. A 【解析】如图，依题意得 $F_2(2,0)$，则直线 PQ 的方程为 $y=3(x-2)$，即 $y=3x-6$，

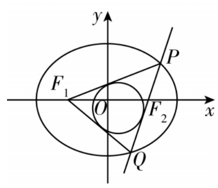
联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1,\\ y=3x-6,\end{cases}$ 消去 x 整理得 $8y^2+6y-27=0$，解得 $y=-\frac{9}{4}$ 或 $y=\frac{3}{2}$，不妨令 $y_P=\frac{3}{2}$，$y_Q=-\frac{9}{4}$，所以 $|y_P-y_Q|=\frac{15}{4}$.

由椭圆的方程得 $a=\sqrt{10}$，$b=\sqrt{6}$，

则由椭圆的定义可得 $\triangle PQF_1$ 的周长为 $4a=4\sqrt{10}$，又 $S_{\triangle PQF_1}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_P-y_Q|=2\times\frac{15}{4}=\frac{15}{2}$，设 $\triangle PQF_1$ 内切圆的半径为 $r_{内}$，则 $S_{\triangle PQF_1}=\frac{1}{2}\times4ar_{内}=2\sqrt{10}r_{内}$，

三角形内切圆半径公式：$S=\frac{1}{2}lr$，其中 l 为三角形周长

所以 $r_{内}=\frac{S_{\triangle PQF_1}}{2\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{8}$. 故选 A.



2. B 【解析】如图，由已知条件及椭圆的定义可得 $\begin{cases}|AF_1|=2|AF_2|,\\ |AF_1|+|AF_2|=2a,\end{cases}$

则 $|AF_1|=\frac{4a}{3}$，$|AF_2|=\frac{2a}{3}$.

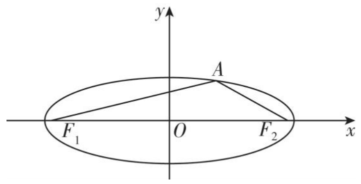
因为椭圆 E 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以 $\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

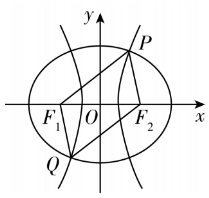
由余弦定理可得 $\cos\angle F_1AF_2=\frac{\frac{16a^2}{9}+\frac{4a^2}{9}-4c^2}{2\times\frac{4a}{3}\times\frac{2a}{3}}=\frac{5}{4}-\frac{9}{4}\times\frac{c^2}{a^2}=-\frac{3}{4}$，

巧妙利用余弦定理

则 $\sin\angle F_1AF_2=\frac{\sqrt{7}}{4}$，故 $\triangle AF_1F_2$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times\frac{4a}{3}\times\frac{2a}{3}\times\frac{\sqrt{7}}{4}=4\sqrt{7}$，则 $a=6$，则 $c=6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$，故椭圆 E 的焦距为 $8\sqrt{2}$. 故选 B.



3. A 【解析】如图，不妨令点 P 在第一象限，则点 Q 在第三象限，设椭圆的长半轴长为 a_1，双曲线的实半轴长为 a_2，



根据椭圆及双曲线的定义得 $|PF_1|+|PF_2|=2a_1$，$|PF_1|-|PF_2|=2a_2$，

遇到椭圆和双曲线共焦点问题，先利用定义求出对应焦点弦长度

$\therefore |PF_1|=a_1+a_2$，$|PF_2|=a_1-a_2$，

设 $|F_1F_2|=2c$，$\angle PF_2Q=\frac{2\pi}{3}$，

根据椭圆与双曲线的对称性知四边形 PF_1QF_2 为平行四边形，则 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，

则在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\cos\angle F_1PF_2$，即 $4c^2=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-2(a_1+a_2)(a_1-a_2)\cos\frac{\pi}{3}$，

化简得 $a_1^2+3a_2^2=4c^2$，即 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4$，

则 $\frac{e_1^2}{e_1^2+1}+\frac{3e_2^2}{e_2^2+3}=\frac{1}{\frac{1}{e_1^2}+1}+\frac{3}{\frac{3}{e_2^2}+1}$

另解：也可以利用权方和不等式求解

$=\left(\frac{1}{\frac{1}{e_1^2}+1}+\frac{3}{\frac{3}{e_2^2}+1}\right)\left(\frac{1}{e_1^2}+1+\frac{3}{e_2^2}+1\right)\times\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{6}\times\left[4+\frac{\frac{3}{e_2^2}+1}{\frac{1}{e_1^2}+1}+\frac{3\left(\frac{1}{e_1^2}+1\right)}{\frac{3}{e_2^2}+1}\right]$

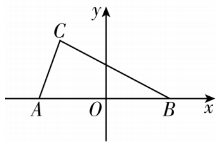
$\geqslant\frac{1}{6}\times\left[4+2\sqrt{\frac{\frac{3}{e_2^2}+1}{\frac{1}{e_1^2}+1}\times\frac{3\left(\frac{1}{e_1^2}+1\right)}{\frac{3}{e_2^2}+1}}\right]$

$=\frac{1}{6}\times(4+2\sqrt{3})=\frac{2+\sqrt{3}}{3}$，

当且仅当 $\begin{cases}\left(\frac{3}{e_2^2}+1\right)^2=3\left(\frac{1}{e_1^2}+1\right)^2,\\ \frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}e_1^2=\frac{3\sqrt{3}+4}{11}<1,\\ e_2^2=\frac{3}{8-3\sqrt{3}}=\frac{24+9\sqrt{3}}{37}>1\end{cases}$ 时，等号成立，

故选 A.

4. BC 【解析】如图，以线段 AB 的中点为坐标原点建立平面直角坐标系，



则 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，设 $C(x,y)$，

对于 A，$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$，即 $(-2-x,-y)\cdot(2-x,-y)=x^2+y^2-4=0$，

化简可得点 C 的轨迹方程为 $x^2+y^2=4$ $(y\neq0)$，所以 $|y|\in(0,2]$，

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|y|=2|y|\leqslant4$，

即当点 C 为 $(0,\pm2)$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最大值 4，故 A 错误；

对于 B，由题意可得 $|CA|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{2}|CB|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-2)^2+y^2}$，化简可得点 C 的轨迹方程为 $(x-6)^2+y^2=32$ $(y\neq0)$，

所以 $|y|\in(0,4\sqrt{2}]$，

所以 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|y|=2|y|\leqslant8\sqrt{2}$，即当点 C 为 $(6,\pm4\sqrt{2})$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最大值 $8\sqrt{2}$，故 B 正确；

对于 C，由 $|CA|+|CB|=a+b=8>|AB|=4$ 知，动点 C 的轨迹是以 A，B 为焦点的椭圆，

除去长轴上的两个端点

则 $2a=8$，$2c=4$，故 $b^2=a^2-c^2=12$，

则点 C 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ $(y\neq0)$，

故 $|y|\in(0,2\sqrt{3}]$，

则 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|y|=2|y|\leqslant4\sqrt{3}$，

即当 C 运动到短轴端点时，$\triangle ABC$ 的面积取得最大值 $4\sqrt{3}$，故 C 正确；

对于 D，不妨令点 C 在 x 轴上方，则 $y>0$，$\tan\angle CAB\cdot\tan\angle CBA=\frac{y}{x+2}\cdot\frac{-y}{x-2}=\frac{-y^2}{x^2-4}=\frac{1}{4}$，化简可得 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ $(y>0)$，同理可知当点 C 在 x 轴下方时，点 C 坐标满足 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ $(y<0)$，则点 C 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ $(y\neq0)$，则 $|y|\in(0,1]$，

则 $S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|y|=2|y|\leqslant2$，

即当点 C 为 $(0,\pm1)$ 时，$\triangle ABC$ 的面积取得最大值 2，故 D 错误.

故选 BC.

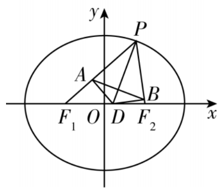
5. $\frac{3}{16}$ 【解析】如图，设 $\angle F_1PF_2=\theta$，依题意，

$\angle ADB=\pi-\theta$，$|AD|=|BD|=|PD|\sin\dfrac{\theta}{2}$，

由 $S_{\triangle PF_1D}+S_{\triangle PF_2D}=S_{\triangle F_1PF_2}$，

得 $\dfrac{1}{2}|PF_1||PD|\sin\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{1}{2}|PF_2||PD|\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta$，即 $|PD|\cdot\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{|PF_1||PF_2|\sin\theta}{|PF_1|+|PF_2|}$，

遇到角平分线，巧妙利用面积公式与角度结合在一起



则 $\dfrac{S_{\triangle DAB}}{S_{\triangle PF_1F_2}}=\dfrac{\frac{1}{2}|AD||BD|\sin(\pi-\theta)}{\frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\theta}=\dfrac{|AD||BD|}{|PF_1||PF_2|}=\dfrac{\left(|PD|\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{|PF_1||PF_2|}=\dfrac{|PF_1||PF_2|\sin^2\theta}{(|PF_1|+|PF_2|)^2}$，

在椭圆 $C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 中，$|F_1F_2|=2$，$|PF_1|+|PF_2|=4$，

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\theta=(|PF_1|+|PF_2|)^2-2|PF_1||PF_2|(1+\cos\theta)$，

则 $1+\cos\theta=\dfrac{(|PF_1|+|PF_2|)^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\dfrac{6}{|PF_1||PF_2|}$，

因此 $\dfrac{S_{\triangle DAB}}{S_{\triangle PF_1F_2}}=\dfrac{|PF_1||PF_2|}{16}(1-\cos^2\theta)=\dfrac{|PF_1||PF_2|}{16}(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)=\dfrac{3}{8}\left(2-\dfrac{6}{|PF_1||PF_2|}\right)=\dfrac{3}{4}\left(1-\dfrac{3}{|PF_1||PF_2|}\right)\leqslant\dfrac{3}{4}\left[1-\dfrac{3}{\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2}\right]=\dfrac{3}{16}$，当且仅当 $|PF_1|=|PF_2|=2$ 时取等号，

所以 $\dfrac{S_{\triangle DAB}}{S_{\triangle PF_1F_2}}$ 的最大值是 $\dfrac{3}{16}$.

6. (1)【解】因为椭圆 $C_1:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的焦点坐标为 $(\pm1,0)$，

所以椭圆 C 的焦点坐标也为 $(\pm1,0)$，即得焦距 $2c=2$.

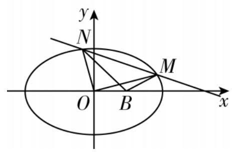
因为椭圆 C 经过点 $Q\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$，

所以 $2a=\sqrt{(1+1)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}+\sqrt{(1-1)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=4$，

所以 $a=2$，所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{3}$，

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

(2) ①【证明】如图，设直线 $l:x=my+t(m\neq0)$，



由 $\begin{cases}x=my+t,\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2+6mty+3t^2-12=0$，则 $\Delta=36m^2t^2-4(3m^2+4)(3t^2-12)=48(3m^2-t^2+4)>0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，所以 $y_1+y_2=-\dfrac{6mt}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{3t^2-12}{3m^2+4}$. 由题知 $B(1,0)$，

则 $k_{BM}+k_{BN}=\dfrac{y_1}{x_1-1}+\dfrac{y_2}{x_2-1}=\dfrac{y_1(x_2-1)+y_2(x_1-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=\dfrac{y_1(my_2+t-1)+y_2(my_1+t-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$.

因为直线 BM 和 BN 的斜率互为相反数，

所以 $k_{BM}+k_{BN}=0$，

所以 $\dfrac{y_1(my_2+t-1)+y_2(my_1+t-1)}{(x_1-1)(x_2-1)}=0$，

所以 $y_1(my_2+t-1)+y_2(my_1+t-1)=0$，

所以 $2my_1y_2+(t-1)(y_1+y_2)=0$，

即 $2m\times\dfrac{3t^2-12}{3m^2+4}+(t-1)\times\dfrac{-6mt}{3m^2+4}=0$，

所以 $6m(t-4)=0$，

因为 $m\neq0$，所以 $t=4$，所以动直线 l 恒过 x 轴上的定点 $T(4,0)$.

②【解】由①知，$y_1+y_2=-\dfrac{24m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=\dfrac{36}{3m^2+4}$，且 $\Delta=48(3m^2-12)>0$，即 $m^2>4$.

又 $S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}\cdot|OT|\cdot|y_1-y_2|$

$=2\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=2\sqrt{\left(-\dfrac{24m}{3m^2+4}\right)^2-4\dfrac{36}{3m^2+4}}$

$=24\cdot\sqrt{\dfrac{m^2-4}{(3m^2+4)^2}}$.

令 $n=m^2-4>0$，则 $m^2=n+4$，

所以 $S_{\triangle OMN}=24\sqrt{\dfrac{n}{(3n+16)^2}}\leqslant24\cdot\sqrt{\dfrac{n}{(2\cdot\sqrt{3n\cdot16})^2}}=\sqrt{3}$（当且仅当 $3n=16$ 时取“=”），

所以 $(S_{\triangle OMN})_{\max}=\sqrt{3}$.

考向44 双曲线

刷考点

1. C 【解析】由题意可得圆心 $C(3,0)$，半径 $r=4$.

因为 M 在线段 PA 的垂直平分线上，所以 $|MA|=|MP|$，

所以 $||MA|-|MC||=||MP|-|MC||=|CP|=4$.

因为 $|AC|=6>|CP|$，所以点 M 的轨迹是以 A,C 为焦点的双曲线. 故选C.

易错警示 对双曲线定义的理解不透彻致错

(1)双曲线定义用集合语言可叙述为：点集 $M=\{M|\,||MF_1|-|MF_2||=2a,0<2a<|F_1F_2|\}$；

(2) F_1,F_2 分别为双曲线的左、右焦点或上、下焦点，当 $|MF_1|-|MF_2|=2a$ 时，表示双曲线的右支或下支；当 $|MF_2|-|MF_1|=2a$ 时，表示双曲线的左支或上支.

2. B 【解析】要使方程 $\dfrac{x^2}{3a}+\dfrac{y^2}{4a-1}=1$ 表示双曲线，需使 $3a(4a-1)<0$，

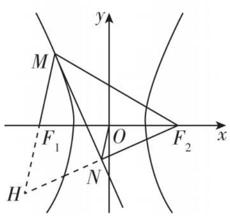
解不等式 $3a(4a-1)<0$，得 $0<a<\dfrac{1}{4}$.

提示：当方程 $\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{y^2}{n}=1$ 表示的曲线为双曲线时，有 $mn<0$

所以“$a<\dfrac{1}{4}$”是方程“$\dfrac{x^2}{3a}+\dfrac{y^2}{4a-1}=1$ 表示双曲线”的必要不充分条件.

故选B.

3. B 【解析】如图，



双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$ 的实半轴长 $a=2$，延长 F_2N 交直线 MF_1 于点 H，由题意得 $|MH|=|MF_2|$，$|NH|=|NF_2|$，又 O 是 F_1F_2 的中点，所以 $|ON|=\dfrac{1}{2}|F_1H|=\dfrac{1}{2}(|MH|-|MF_1|)=\dfrac{1}{2}(|MF_2|-|MF_1|)=a=2$. 故选B.

4. D 【解析】因为圆 $C:x^2+y^2+8x+7=0$ 可化为 $(x+4)^2+y^2=9$，所以圆 C 的圆心为 $C(-4,0)$，半径 $r=3$.

又因为双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$，即 $bx-ay=0$，

所以双曲线的左焦点 $(-c,0)$ 到渐近线 $bx-ay=0$ 的距离 $d=\dfrac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}}=b$，又渐近线与圆 C 相切，则由题意可知 $c=4$，$b=r=3$，可得 $a^2=c^2-b^2=7$，所以该双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{9}=1$. 故选D.

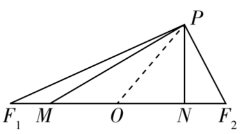
5. A 【解析】由题意可知，双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$，点 $P(-1,\sqrt{3})$ 在一条渐近线上，所以 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，则 $b=\sqrt{3}a$，且两条

渐近线的倾斜角分别为$60°$,$120°$,设O为坐标原点,则$\angle POF=60°$. 又$|PF|=2$,$|OP|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$,所以$\triangle OFP$为等边三角形,从而$c=|OF|=2$. 由$a^2+b^2=c^2$,$b=\sqrt{3}a$,解得$a^2=1$,$b^2=3$,所以双曲线$C$的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$,故选A.

6. B 【解析】因为$|F_1A|=2|F_2A|$,所以$|F_1A|>|F_2A|$.
又因为点A在C上,所以$|F_1A|-|F_2A|=2a$,
即$2|F_2A|-|F_2A|=2a$,所以$|F_2A|=2a$,$|F_1A|=4a$.
在$\triangle AF_1F_2$中,由正弦定理得$\frac{|AF_2|}{\sin\angle AF_1F_2}=\frac{|AF_1|}{\sin\angle AF_2F_1}$,
所以$\sin\angle AF_2F_1=\frac{|AF_1|\sin 30°}{|AF_2|}=1$.
又$0°<\angle AF_2F_1<180°$,所以$\angle AF_2F_1=90°$,
故$\angle F_1AF_2=60°$,
则$S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}|AF_1||AF_2|\sin 60°=2\sqrt{3}a^2=6\sqrt{3}$,所以$a^2=3$,
则$|F_1F_2|^2=(2c)^2=|AF_1|^2-|AF_2|^2=16a^2-4a^2=12a^2=36$,所以$c^2=9$,所以$b^2=c^2-a^2=6$,所以$C$的方程为$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$. 故选B.

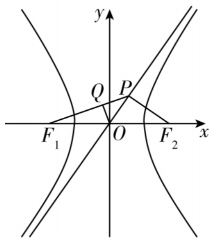
7. A 【解析】由题意得$F_2(0,c)$,双曲线C的渐近线方程是$y=\pm ax$,
则点F_2到渐近线$y=ax$的距离$d=\frac{c}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{c}{c}=1=\frac{a}{2}$,解得$a=2$,故双曲线两条渐近线斜率之积为$-a^2=-4$.
故选A.

8. D 【解析】如图,连接OP,由$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=0$可知$PF_1\perp PF_2$,
则在$\text{Rt}\triangle PF_1F_2$中,$|OP|=\frac{1}{2}|F_1F_2|=c$,
不妨设点P在渐近线$y=\frac{b}{a}x$上,
则在$\triangle OPN$中,
$\tan\angle PON=\frac{b}{a}$,



则$\cos\angle PON=\frac{a}{c}$,又$|ON|=a$,则由余弦定理得$|PN|^2=|OP|^2+|ON|^2-2|OP|\cdot|ON|\cdot\cos\angle PON=c^2+a^2-2ca\cdot\frac{a}{c}=c^2-a^2=b^2$,则$|PN|=b$,
由$|PN|^2+|ON|^2=|OP|^2$知$PN\perp ON$,即$PN\perp MN$.
在$\text{Rt}\triangle PMN$中,$\angle MPN=60°$,则$\tan\angle MPN=\frac{|MN|}{|PN|}$,即$\frac{2a}{b}=\sqrt{3}$,则$\frac{b}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以所求渐近线方程为$y=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}x$. 故选D.

9. D 【解析】由题知$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,由双曲线的对称性不妨令渐近线OP的方程为$y=\frac{b}{a}x$,
如图,

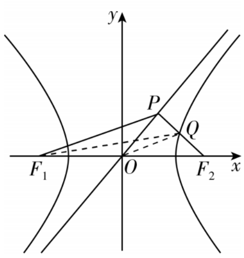


因为直线PF_2与直线$y=\frac{b}{a}x$垂直,所以直线PF_2的方程为$y=-\frac{a}{b}(x-c)$,
联立$\begin{cases}y=\frac{b}{a}x,\\ y=-\frac{a}{b}(x-c),\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{a^2}{c},\\ y=\frac{ab}{c},\end{cases}$即点$P\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$,
所以$\overrightarrow{OP}=\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$,$\overrightarrow{PF_1}=\left(-c-\frac{a^2}{c},-\frac{ab}{c}\right)=\left(-\frac{a^2+c^2}{c},-\frac{ab}{c}\right)$.
因为$OQ\perp PF_1$,所以$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF_1}=0$.
又$\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}$,所以$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}$.
所以$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PF_1}=\left(\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}\right)\cdot\overrightarrow{PF_1}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PF_1}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PF_1}^2$
$=-\frac{a^2b^2+a^2(a^2+c^2)}{c^2}+\frac{(a^2+c^2)^2+a^2b^2}{3c^2}=0$,
整理可得$b^4-a^2b^2-2a^4=0$,
所以$\left(\frac{b}{a}\right)^4-\left(\frac{b}{a}\right)^2-2=0$,解得$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$(负值舍去),
故双曲线C的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{2}x$.
故选D.

10. B 【解析】双曲线E的渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$,即$\frac{b}{a}x\pm y=0$,
因为点$(0,2)$到E的渐近线的距离为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,所以$\frac{2}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,解得$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$,则该双曲线的离心率$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\sqrt{3}$.
故选B.

11. D 【解析】在椭圆$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$中,$a^2=5$,$b^2=4$,则$c=\sqrt{a^2-b^2}=1$,所以椭圆的焦点分别为$(-1,0)$,$(1,0)$,
所以$(-1,0)$,$(1,0)$也是双曲线$\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{n}=1(m>n>0)$的两个焦点,因此$m+n=1$. 所以$\frac{4}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{4}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+n)=5+\frac{4n}{m}+\frac{m}{n}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4n}{m}\cdot\frac{m}{n}}=9$,当且仅当$\frac{4n}{m}=\frac{m}{n}$,即$m=\frac{2}{3}$,$n=\frac{1}{3}$时取等号,因此$\frac{4}{m}+\frac{1}{n}$的最小值为9. 故选D.

12. ACD 【解析】连接F_1Q,OQ,如图所示,
由题可知,$|PF_2|=\frac{\left|\frac{2c}{a}\right|}{\sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)^2+1}}=2$,
$|OP|=\sqrt{c^2-4}=a$,$|OF_1|=|OF_2|=c$,
$\sin\angle POF_2=\frac{2}{c}$,$\cos\angle POF_2=\frac{a}{c}$.
在$\triangle POF_1$中,由正弦定理可知,$\frac{|OP|}{\sin\angle PF_1O}=\frac{|OF_1|}{\sin\angle F_1PO}$,即$\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\angle POF_1\right)}=\frac{c}{\frac{1}{2}}$,即
$\frac{a}{\frac{1}{2}\left(-\frac{a}{c}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{c}}=\frac{c}{\frac{1}{2}}$,解得$a=\sqrt{3}$,则$c=\sqrt{7}$,则$\sin\angle PF_1F_2=\frac{1}{2}\left(-\frac{a}{c}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{c}=\frac{\sqrt{21}}{14}$,$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{21}}{3}$,$|OP|=\sqrt{3}$,故A,C正确,B错误.



在$\triangle QF_1F_2$中,由余弦定理可知,
$\cos\angle QF_2F_1=\frac{2}{\sqrt{7}}=\frac{(2\sqrt{7})^2+|QF_2|^2-(|QF_2|+2\sqrt{3})^2}{2|QF_2|\times 2\sqrt{7}}$,
解得$|QF_2|=8-4\sqrt{3}$,故$S_{\triangle OF_2Q}=\frac{1}{2}\cdot|QF_2||OF_2|\sin\angle QF_2O=\frac{1}{2}\times(8-4\sqrt{3})\times\sqrt{7}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=4\sqrt{3}-6$,故D正确. 故选ACD.

13. C 【解析】由题意可知直线l的斜率存在,设$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,直线l的斜率为k,则直线l的方程为$y=kx-1$,
联立$\begin{cases}5x^2-y^2=1,\\ y=kx-1\end{cases}\Rightarrow(5-k^2)x^2+2kx-2=0$,

则 $\Delta=4k^2+8(5-k^2)=40-4k^2>0$，即 $k^2<10$，

则 $x_1+x_2=\frac{2k}{k^2-5}$ ①，$x_1x_2=\frac{2}{k^2-5}$ ②.

因为 $\overrightarrow{MP}=2\overrightarrow{PN}$，所以 $-x_1=2x_2$ ③，

联立①③解得 $x_1=\frac{4k}{k^2-5}$，$x_2=\frac{-2k}{k^2-5}$，代入②整理得 $k^2=1\Rightarrow k=\pm1$，

则直线 l 的方程为 $y=x-1$ 或 $y=-x-1$. 故选 C.

14. B 【解析】由题知 $F(c,0)$，将 $x=c$ 代入双曲线 C 的方程得 $y=\pm\frac{12}{\sqrt{a}}$，

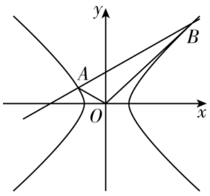
直线 l 与双曲线 C 交于 A,B 两点，

若 A,B 在同一支上，则 $|AB|_{\min}=\frac{24}{\sqrt{a}}$，

若 A,B 在两支上，则 $|AB|_{\min}=2\sqrt{a}$，

因为满足 $|AB|=16$ 的直线有 4 条，所以 $\begin{cases}\frac{24}{\sqrt{a}}<16,\\ 2\sqrt{a}<16,\end{cases}$ 解得 $\frac{9}{4}<a<64$，故选 B.

15. 【解】(1) 由题知 $2a=2$，$e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$，



所以 $a=1$，$c=\sqrt{2}$，

所以 $b^2=c^2-a^2=2-1=1$，

故双曲线 C 的标准方程为 $x^2-y^2=1$.

(2) 如图，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x^2-y^2=1,\\ y=kx+1\end{cases}$ 得 $(1-k^2)x^2-2kx-2=0$，

则 $\Delta=4k^2+8(1-k^2)=8-4k^2>0$，即 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，

则 $x_1+x_2=\frac{2k}{1-k^2}$，$x_1x_2=\frac{-2}{1-k^2}$，

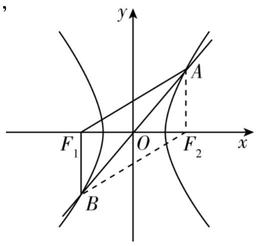
所以 $y_1y_2=(kx_1+1)(kx_2+1)=k^2x_1x_2+k(x_1+x_2)+1=\frac{-2k^2}{1-k^2}+\frac{2k^2}{1-k^2}+1=1$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=\frac{-2}{1-k^2}+1=2$，解得 $k=\pm\sqrt{3}$，

此时不满足 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，

故不存在实数 k 满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=2$.

刷上分

1. A 【解析】如图，连接 AF_2，BF_2，因为双曲线 C：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{8}=1$，所以 $a=2$，$b=2\sqrt{2}$，所以 $c=\sqrt{4+8}=2\sqrt{3}$，



由双曲线的对称性知 $|F_1B|=|AF_2|$，所以 $|F_1A|=2|F_1B|=2|AF_2|$，

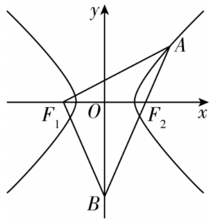
由双曲线的定义得 $|F_1A|-|AF_2|=2|AF_2|-|AF_2|=|AF_2|=2a=4$，所以 $|F_1A|=8$. 又 $|F_1F_2|=2c=4\sqrt{3}$，

所以 $|F_1A|^2=|AF_2|^2+|F_1F_2|^2$，即 $AF_2\perp F_1F_2$，

所以 $|OA|=\sqrt{|OF_2|^2+|AF_2|^2}=\sqrt{12+16}=2\sqrt{7}$，

故 $|AB|=2|OA|=4\sqrt{7}$，故选 A.

2. C 【解析】设 $|\overrightarrow{F_2A}|=2m$，$m>0$，因为 $\overrightarrow{F_2A}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{F_2B}$，所以 $|\overrightarrow{F_1B}|=|\overrightarrow{F_2B}|=3m$，$F_2$ 在线段 AB 上，如图所示，



根据双曲线的定义可知 $|F_1A|-|F_2A|=2a$，所以 $|F_1A|=2a+2m$，$|AB|=|F_2A|+|F_2B|=5m$，

又因为 $\overrightarrow{F_1A}\perp\overrightarrow{F_1B}$，所以 $\triangle ABF_1$ 为直角三角形，所以 $|F_1A|^2+|F_1B|^2=|AB|^2$，

所以 $(2a+2m)^2+(3m)^2=(5m)^2$，

解得 $a=m$ 或 $a=-3m$（舍去），则 $\cos\angle F_1AF_2=\frac{|F_1A|}{|AB|}=\frac{4}{5}$，

在 $\triangle AF_1F_2$ 中，根据余弦定理得 $\cos\angle F_1AF_2=\frac{|F_1A|^2+|F_2A|^2-|F_1F_2|^2}{2|F_1A|\cdot|F_2A|}=\frac{16m^2+4m^2-4c^2}{16m^2}=\frac{4}{5}$，解得 $c=\frac{3\sqrt{5}}{5}m=\frac{3\sqrt{5}}{5}a$（负值舍去），

所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.

3. B 【解析】由题意知 $k_{PM}=\frac{1-0}{4-5}=-1$，则直线 l 的斜率存在，设为 k，则 $k\cdot(-1)=-1$，所以 $k=1$.

因为点 $P(4,1)$ 在圆 $(x-5)^2+y^2=2b^2$ 上，所以 $2b^2=(4-5)^2+1^2=2$，即 $b^2=1$.

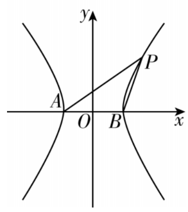
设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为点 P 为 AB 的中点，所以 $x_1+x_2=8$，$y_1+y_2=2$. 因为点 A,B 在双曲线 C 上，所以 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$，

两式相减，得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}=\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}$，

则 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}=\frac{8b^2}{2a^2}=\frac{4b^2}{a^2}=1$，即 $a^2=4$，

所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$. 故选 B.

4. BC 【解析】如图，对于双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{2}=1$，$a=1$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{3}$.



A 选项，根据双曲线的定义，由 $||RF_1|-|RF_2||=|4-|RF_2||=2$，解得 $|RF_2|=2$ 或 $|RF_2|=6$，所以 A 错误.

B 选项，双曲线的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{2}x$，即 $\sqrt{2}x-y=0$，

$F_2(\sqrt{3},0)$ 到直线 $\sqrt{2}x-y=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{1+2}}=\sqrt{2}$，所以 B 正确.

C 选项，设 $P(s,t)$，$|s|>1$，则 $s^2-\frac{t^2}{2}=1$，即 $2s^2-t^2=2$，

由题知 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，所以 $k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{t}{s+1}\cdot\frac{t}{s-1}=\frac{t^2}{s^2-1}=\frac{2s^2-2}{s^2-1}=2$，所以 C 正确.

D 选项，设双曲线 C 上不同两点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$ 关于点 $Q(1,1)$ 对称，则 $x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=2$，

则 $\begin{cases}x_1^2-\frac{y_1^2}{2}=1,\\ x_2^2-\frac{y_2^2}{2}=1,\end{cases}$

两式相减并整理得 $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$，

则 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=2$，即 $k_{MN}=2$，此时直线 MN：$y=2x-1$，代入双曲线 C 的方程得 $2x^2-4x+3=0$，则 $\Delta<0$，

这与 M,N 是双曲线 C 上不同的两点矛盾，所以 D 错误.

故选 BC.

5. $3x-2y-6=0$ 【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为弦 AB 的中点为 $M\left(3,\frac{3}{2}\right)$，

所以 $x_1+x_2=6$，$y_1+y_2=3$.

又 $\frac{x_1^2}{4}-\frac{y_1^2}{3}=1$，$\frac{x_2^2}{4}-\frac{y_2^2}{3}=1$，

两式相减，得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}-\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3}=0$，

即 $\frac{6(x_1-x_2)}{4}-\frac{3(y_1-y_2)}{3}=0$，整理得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{3}{2}$，

所以直线 l 的斜率 $k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{3}{2}$，

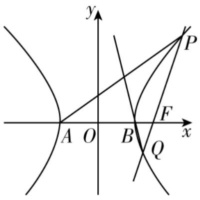
所以直线 l 的方程为 $y-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}(x-3)$，即 $3x-2y-6=0$，经检验满足题意.

6. 【解】(1) 设 $M(x,y)$，

由题知 $\frac{\sqrt{(x-3)^2+y^2}}{\left|x-\frac{4}{3}\right|}=\frac{3}{2}$，等号两边同时平方并整理得 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$，

故点 M 的轨迹 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$.

(2)如图,由(1)得曲线 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$,则 $A(-2,0)$,$B(2,0)$,



当直线 PQ 的斜率存在时,设直线 PQ 的方程为 $y=k(x-3)$,$P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

由 $\begin{cases}y=k(x-3),\\5x^2-4y^2=20\end{cases}$ 可得 $(5-4k^2)x^2+24k^2x-36k^2-20=0$,$\Delta>0$,

所以 $x_1+x_2=\frac{24k^2}{4k^2-5}$,$x_1x_2=\frac{36k^2+20}{4k^2-5}$.

因为 $k_1=\frac{y_1}{x_1+2}$,$k_2=\frac{y_2}{x_2-2}$,

所以 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{y_1(x_2-2)}{y_2(x_1+2)}=\frac{(x_1-3)(x_2-2)}{(x_2-3)(x_1+2)}$

$=\frac{x_1x_2-2x_1-3x_2+6}{x_1x_2-3x_1+2x_2-6}$

$=\frac{x_1x_2-3(x_1+x_2)+x_1+6}{x_1x_2-3(x_1+x_2)+5x_2-6}$

$=\frac{\frac{36k^2+20}{4k^2-5}-\frac{72k^2}{4k^2-5}+\frac{24k^2}{4k^2-5}-x_2+6}{\frac{36k^2+20}{4k^2-5}-\frac{72k^2}{4k^2-5}+5x_2-6}$

$=\frac{\frac{12k^2-10}{4k^2-5}-x_2}{\frac{50-60k^2}{4k^2-5}+5x_2}=\frac{\frac{12k^2-10}{4k^2-5}-x_2}{-5\left(\frac{12k^2-10}{4k^2-5}-x_2\right)}=-\frac{1}{5}$.

当直线 PQ 的斜率不存在时,直线 PQ:$x=3$,$P\left(3,\frac{5}{2}\right)$,$Q\left(3,-\frac{5}{2}\right)$,则 $k_1=\frac{\frac{5}{2}-0}{3+2}=\frac{1}{2}$,$k_2=\frac{-\frac{5}{2}}{3-2}=-\frac{5}{2}$,此时 $\frac{k_1}{k_2}=-\frac{1}{5}$,

综上,$\frac{k_1}{k_2}$ 为定值 $-\frac{1}{5}$.

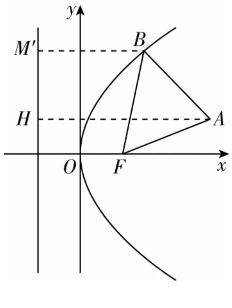
考向 45　抛物线

刷考点

1. D 【解析】$\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$ 表示动点 P 到直线 l 的距离,$|\overrightarrow{PN}|$ 表示动点 P 到定点 N 的距离,因为 $\frac{|\overrightarrow{PM}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=|\overrightarrow{PN}|$,所以动点 P 的轨迹为抛物线,故选 D.

2. C 【解析】由题意得 $|y_A|=4$,$x_A+\frac{p}{2}=5$,其中 $y_A^2=2px_A$,则 $2p\left(5-\frac{p}{2}\right)=16$,解得 $p=2$ 或 8. 故选 C.

3. B 【解析】如图,过点 B 作准线的垂线,垂足为 M',抛物线 C 的方程为 $y^2=2px(p>0)$,准线的方程为 $x=-\frac{p}{2}$,焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$.



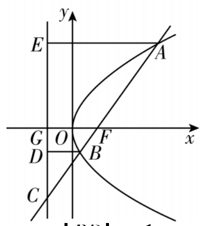
设点 B 到准线的距离为 d,则由抛物线的定义可知 $|BF|=|BM'|=d$,过点 A 作准线的垂线,垂足为 H,∴ $\triangle ABF$ 的周长为 $|AB|+|AF|+|BF|=|AB|+|BM'|+|AF|\geqslant|AH|+|AF|=4+\sqrt{5}$,当且仅当 A,B,H 三点共线时,等号成立.

∵ $|AH|=3+\frac{p}{2}$,$|AF|=\sqrt{\left(\frac{p}{2}-3\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}+10-3p}$,

∴ $3+\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+10-3p}=4+\sqrt{5}$,∵ $p>0$,

∴ $p=2$.

4. D 【解析】如图,过点 B 作准线的垂线,垂足为 D,设 $|BF|=a$,则 $|BC|=2|BF|=2a$,由抛物线的定义得 $|BD|=|BF|=a$,



在 Rt△BCD 中,$\sin\angle BCD=\frac{|BD|}{|BC|}=\frac{1}{2}$,所以 $\angle BCD=30°$,

在 Rt△ACE 中,因为 $|AE|=3$,所以 $|AC|=3+3a$,

因为 $|AC|=2|AE|$,所以 $3+3a=6$,解得 $a=1$.

因为 $BD/\!/FG$,所以 $\frac{1}{p}=\frac{2a}{3a}$,解得 $p=\frac{3}{2}$,所以抛物线方程为 $y^2=3x$.

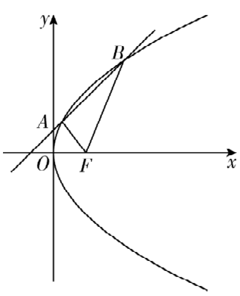
故选 D.

5. B 【解析】由题意,易知 $B\left(-\frac{p}{2},y_0\right)$,则直线 OB:$y=-\frac{2y_0}{p}x$,即 $2y_0x+py=0$,

所以点 A 到直线 OB 的距离 $d=\frac{|2y_0+py_0|}{\sqrt{4y_0^2+p^2}}=\sqrt{6}$. 又 $y_0^2=2p$,则 $\frac{(p+2)^2y_0^2}{4y_0^2+p^2}=\frac{2p(p+2)^2}{8p+p^2}=\frac{2(p+2)^2}{8+p}=6$,所以 $p^2+4p+4=24+3p$,所以 $p=4$(负值舍去).

故选 B.

6. $y^2=8x$ 【解析】如图,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为 $|BF|-|AF|=4$,所以 $x_2+\frac{p}{2}-\left(x_1+\frac{p}{2}\right)=4$,所以 $x_2-x_1=4$.



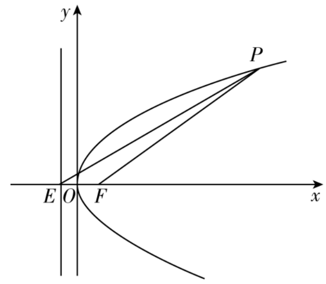
易知直线 AB 的斜率存在,故设直线 AB 的斜率为 k_{AB},因为 $|AB|=\sqrt{1+k_{AB}^2}\times|x_1-x_2|=4\sqrt{2}$,所以 $k_{AB}^2=1$.

因为 A,B 都在第一象限,所以 $k_{AB}=1$.

又因为 $k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{y_1^2}{2p}}=\frac{2p}{y_1+y_2}=1$,且 $y_1+y_2=4\times2=8$,所以 $2p=8$,解得 $p=4$,

所以抛物线的方程为 $y^2=8x$.

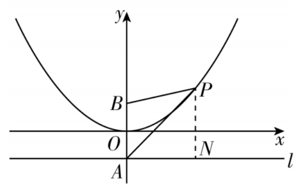
7. B 【解析】如图,由于抛物线的对称性,不妨设抛物线为 C:$y^2=2px(p>0)$,则其焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$,因为点 E 是 C 的准线与 C 的对称轴的交点,所以 $E\left(-\frac{p}{2},0\right)$,



因为点 P 在 C 上,设 $P(x_0,y_0)$,若 $\angle PEF=30°$,则 $\tan\angle PEF=\frac{|y_0|}{x_0+\frac{p}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,且 $|PF|=x_0+\frac{p}{2}$,则 $|PF|=\sqrt{3}|y_0|$,则 $\sin\angle PFE=\sin(\pi-\angle PFx)=\frac{|y_0|}{|PF|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

故选 B.

8. C 【解析】设抛物线 C 的准线为 l,作 $PN\perp l$,垂足为 N(如图所示),则 $|PN|=|BP|$,



$\sin\angle PAN=\frac{|PN|}{|PA|}=\frac{|PB|}{|PA|}$.

当 $\frac{|PA|}{|PB|}$ 取最大值时,$\sin\angle PAN$ 取得最小值. 当且仅当直线 PA 与抛物线相切于点 P 时,$\sin\angle PAN$ 取得最小值.

当直线 PA 与抛物线相切时,设直线 PA 的斜率为 k,且 $k\neq0$,则直线 PA 的方程为 $y=kx-1$,代入 $x^2=4y$,可得 $x^2-4kx+4=0$,

由方程根的判别式 $\Delta=16k^2-16=0$,解得 $k=\pm1$,

不妨设点 P 在第一象限,即 $k=1$,则 $P(2,1)$,$|PN|=2$,$|PA|=\sqrt{|PN|^2+|AN|^2}=2\sqrt{2}$,即 $\sin\angle PAN=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

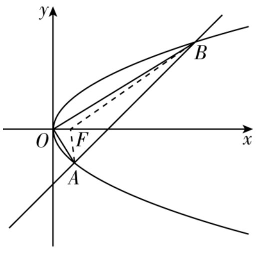
所以 $\frac{|PA|}{|PB|}$ 的最大值为 $\sqrt{2}$.

当点 P 在坐标原点时,$|PA|=|PB|$,即

$\frac{|PA|}{|PB|}$的最小值为1.

综上，$\frac{|PA|}{|PB|}$的取值范围为$[1,\sqrt{2}]$. 故选C.

9. BC 【解析】如图，设抛物线C的焦点为F，连接BF，AF，由$C:y^2=2x$，得焦点为$F\left(\frac{1}{2},0\right)$，准线方程为$x=-\frac{1}{2}$，故A错误，B正确；



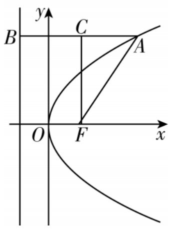
联立直线AB与抛物线C的方程得$y^2-2y-4=0$，若$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$y_1+y_2=2$，$y_1y_2=-4$，而$x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{4}=4$，

由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0$，得$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，故C正确；

显然直线$y=x-2$不过焦点F，由抛物线的定义得$|AF|=x_1+\frac{1}{2}$，$|BF|=x_2+\frac{1}{2}$，所以$|AF|+|BF|=x_1+x_2+1>|AB|$，故D错误. 故选BC.

10. C 【解析】如图，过点A作AB垂直准线于点B，过焦点F作$FC\perp AB$于点C，由题意可知$p=2$，$\angle AFx=\angle FAC=\frac{\pi}{3}$，



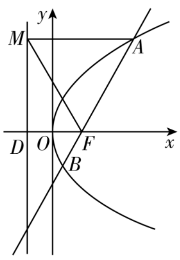
根据抛物线的定义得$|AF|=|AB|=|AC|+|BC|$，

在Rt$\triangle AFC$中，$|AC|=|AF|\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}|AF|$，又$|BC|=p=2$，

所以$|AF|=|AB|=\frac{1}{2}|AF|+2$，解得$|AF|=4$. 故选C.

11. A 【解析】如图，设抛物线C的准线交x轴于点D.

因为$\triangle AFM$为等边三角形，所以$|AF|=|AM|$. 又因为点M在C的准线上，所以由抛物线的定义可知AM垂直于准线.



由$y^2=4x$可知$F(1,0)$，$D(-1,0)$，设$A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，由题知$\angle FMD=\frac{\pi}{6}$，$|DF|=2$，所以$|MF|=|AM|=4$，

所以$x_A=4-1=3$，代入抛物线C的方程得$A(3,\pm2\sqrt{3})$，所以直线AB的方程为$\frac{y\pm2\sqrt{3}}{0\pm2\sqrt{3}}=\frac{x-3}{1-3}$，整理得$y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$或$y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}$.

由$\begin{cases}y=\sqrt{3}x-\sqrt{3},\\y^2=4x\end{cases}$或$\begin{cases}y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3},\\y^2=4x\end{cases}$消去$y$，化简得$3x^2-10x+3=0$，则$x_A+x_B=\frac{10}{3}$，

所以$|AB|=x_A+x_B+p=\frac{16}{3}$.

敲黑板：在抛物线中求过焦点的弦长时，常利用抛物线的定义

故选A.

12. ABD 【解析】抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点F在x轴上，

过F作直线$l:x=ty+1$，可知$F(1,0)$，则$\frac{p}{2}=1$，则$p=2$，A正确；

抛物线C的方程为$y^2=4x$，将直线l的方程代入抛物线C的方程，得$y^2-4ty-4=0$，则$\Delta=16t^2+16>0$.

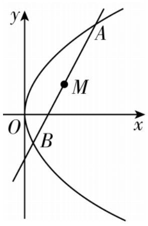
设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$①，

由$\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，得$y_1=-2y_2$，代入①式解得$y_1=-2\sqrt{2}$，$y_2=\sqrt{2}$或$y_1=2\sqrt{2}$，$y_2=-\sqrt{2}$，又$t=\frac{y_1+y_2}{4}$，则$t=\frac{\sqrt{2}}{4}$或$t=-\frac{\sqrt{2}}{4}$，C错误；

由选项C得$x_1=2$，$x_2=\frac{1}{2}$，则线段AB中点的横坐标为$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{1}{2}+2}{2}=\frac{5}{4}$，D正确；

$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{1}{2}+2+2=\frac{9}{2}$，则$|AF|=\frac{2}{3}|AB|=\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}=3$，B正确. 故选ABD.

13. D 【解析】如图，由题知直线l不垂直于y轴，设直线l的方程为$x-\frac{2}{3}=t\left(y-\frac{1}{2}\right)$，



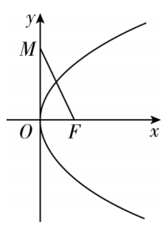
由$\begin{cases}x=t\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3},\\y^2=2x\end{cases}$得$y^2-2ty+t-\frac{4}{3}=0$，由弦$AB$的中点为$M\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$，得$t=\frac{1}{2}$，此时方程$y^2-y-\frac{5}{6}=0$有两个不等实根，

所以直线l的方程为$x-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)$，

即$12x-6y-5=0$.

故选D.

14. ABC 【解析】如图，对于A，由抛物线$C:y^2=4x$，得准线方程为$x=-1$，故A正确；



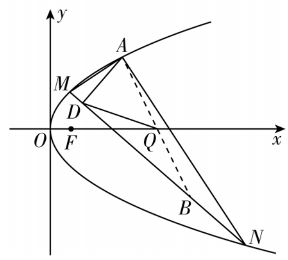
对于B，由题知$F(1,0)$，则线段MF的中点的坐标为$\left(\frac{1}{2},\frac{m}{2}\right)$，则$\frac{m^2}{4}=2$，解得$m=\pm2\sqrt{2}$，故B正确；

对于C，设直线MN的方程为$y=kx+m$ $(m\neq0)$，联立$\begin{cases}y=kx+m,\\y^2=4x,\end{cases}$消去$x$整理得$\frac{k}{4}y^2-y+m=0$，则$\Delta=1-km=0$，则$km=1$，

则$k_{MF}\cdot k_{MN}=-m\cdot k=-1$，则直线$MN$与直线$MF$垂直，故C正确；

对于D，设$Q(x_0,y_0)$，则$|QF|=x_0+1=3$，所以$x_0=2$，所以$y_0^2=8$，所以$|OQ|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=2\sqrt{3}$，故D错误. 故选ABC.

15. (1)【解】如图，由抛物线定义知$|AF|=2p+\frac{p}{2}=5$，则$p=2$，故抛物线C的方程为$y^2=4x$，



又$A(4,m)(m>0)$在抛物线C上，则$m^2=4\times4$，则$m=4$，故$A(4,4)$.

(2)【证明】设$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由(1)知$A(4,4)$，所以$\overrightarrow{AM}=(x_1-4,y_1-4)$，$\overrightarrow{AN}=(x_2-4,y_2-4)$.

又$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=0$，所以$AM\perp AN$，

所以$(x_1-4)(x_2-4)+(y_1-4)(y_2-4)=x_1x_2-4(x_1+x_2)+y_1y_2-4(y_1+y_2)+32=0$，

因为直线MN的斜率不为零，所以设直线$MN:x=ky+n$，

联立$\begin{cases}y^2=4x,\\x=ky+n,\end{cases}$消去$x$，整理得$y^2-4ky-4n=0$，且$\Delta=16k^2+16n>0$，

所以$y_1+y_2=4k$，$y_1y_2=-4n$，则$x_1+x_2=k(y_1+y_2)+2n=4k^2+2n$，$x_1x_2=k^2y_1y_2+kn(y_1+y_2)+n^2=n^2$，

则$x_1x_2-4(x_1+x_2)+y_1y_2-4(y_1+y_2)+32=n^2-16k^2-12n-16k+32=(n-4k-8)\cdot(n+4k-4)=0$，则$n=4k+8$或$n=4-4k$.

当$n=8+4k$时，直线$MN:x=k(y+4)+8$过定点$B(8,-4)$；

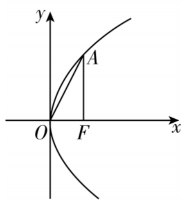
当$n=4-4k$时，直线$MN:x=k(y-4)+4$过定点$(4,4)$，即A,M,N共线，不合题意.

所以直线MN过定点$B(8,-4)$. 连接AB，又$AD\perp MN$，所以D在以AB为直径的圆上.

设线段AB的中点为$Q(6,0)$，即$|DQ|=\frac{|AB|}{2}=2\sqrt{5}$，为定值，得证.

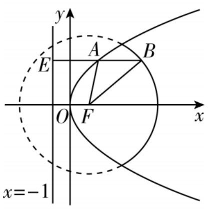
刷上分

1. B 【解析】如图，由抛物线$C:y^2=2px$过点$A(1,2)$，可得$4=2p$，即$p=2$，所以抛物线C的方程为$y^2=4x$，所以准线方程为$x=-1$，

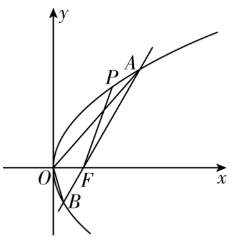


A 错误;
由 $A(1,2)$, $F(1,0)$ 得 $AF\perp OF$,则 $S_{\triangle AFO}=\frac{1}{2}\times1\times2=1$,B 正确;
当 $P(1,2)$ 时,点 P 到 C 的焦点的距离 $d=1+\frac{p}{2}=2$,C 错误;
若 $\triangle POF$ 为等边三角形,则点 P 的横坐标为 $\frac{1}{2}$,当 $x=\frac{1}{2}$ 时,纵坐标为 $\pm\sqrt{2}$,
易知 OF 边上的高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}\neq\sqrt{2}$,则 $\triangle POF$ 为等腰三角形,不是等边三角形,故不存在点 P,使得 $\triangle POF$ 为等边三角形,所以 D 错误.
故选 B.

2. D 【解析】由抛物线 $y^2=4x$ 可得准线方程为 $x=-1$,如图,过点 A 作准线 $x=-1$ 的垂线,垂足为 E,
则 $\triangle FAB$ 的周长为 $|AF|+|AB|+|BF|=|AB|+|AE|+4=|BE|+4=x_B+5$,由 $\begin{cases}y^2=4x,\\(x-1)^2+y^2=16\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=3,\\y=\pm2\sqrt{3},\end{cases}$
则 $3<x_B<5$,则 $\triangle FAB$ 的周长的取值范围是 $(8,10)$,
故选 D.



3. ACD 【解析】如图,因为 $|PF|=3$,所以 $\frac{p}{2}+2=3$,解得 $p=2$,所以抛物线 C 的标准方程为 $y^2=4x$.



对于 A,因为 $y^2=4x$,当 $x=2$ 时,$|y|=2\sqrt{2}<3$,故点 $M(2,-3)$ 在抛物线的外部,所以过点 M 且与 C 仅有一个公共点的直线有 3 条,故 A 正确;
对于 B,由抛物线 C 的方程可知,焦点 $F(1,0)$,设直线 l 的方程为 $x=my+1$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,联立 $\begin{cases}x=my+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 x,整理得 $y^2-4my-4=0$,所以 $\Delta=16m^2+16>0$,所以 $y_1+y_2=4m$,$y_1y_2=-4$,
又 $|OF|=1$,所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times|OF|\times|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\times|OF|\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\sqrt{16m^2+16}=2\sqrt{2}$,
解得 $m=\pm1$,则 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=4m^2+2=6$,$x_1x_2=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=1$,则 $|AF|\cdot|BF|=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+(x_1+x_2)+1=8$,故 B 错误;
对于 C,由选项 B 可知 $x_1x_2=1$,$y_1y_2=-4$,所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=1-4=-3<0$,所以 $\angle AOB$ 为钝角,所以 $\triangle AOB$ 为钝角三角形,故 C 正确;
对于 D,由选项 B 可知 $x_1x_2=1$,
所以 $2|AF|+|BF|=2(1+x_1)+(1+x_2)=3+2x_1+\frac{1}{x_1}\geqslant3+2\sqrt{2x_1\cdot\frac{1}{x_1}}=3+2\sqrt{2}$,当且仅当 $2x_1=\frac{1}{x_1}$,即 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$x_2=\sqrt{2}$ 时,等号成立,故 D 正确.
故选 ACD.

4. $x-y-1=0$ 【解析】依题意,抛物线 $C:x^2=4y$ 的每条包络线与该抛物线相切,显然过点 $A(2,1)$ 的包络线所在直线的斜率存在,设方程为 $y-1=k(x-2)$,
由 $\begin{cases}y-1=k(x-2),\\x^2=4y\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $x^2-4kx+8k-4=0$,
则 $\Delta=16k^2-32k+16=0$,解得 $k=1$,所以所求直线方程为 $x-y-1=0$.

5.【解】(1)由题意可得抛物线 $C:x^2=2py$ $(p>0)$ 的焦点为 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$,则圆 F 的方程为 $x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=4p^2$.
由 $\begin{cases}x^2+\left(y-\frac{p}{2}\right)^2=4p^2,\\x^2=2py\end{cases}$ 消去 x 得 $y^2+py-\frac{15p^2}{4}=0$,
解得 $y=\frac{3}{2}p$ 或 $y=-\frac{5}{2}p$(舍去),
将 $y=\frac{3}{2}p$ 代入 $x^2=2py$ 得 A,B 的坐标为 $\left(\pm\sqrt{3}p,\frac{3}{2}p\right)$,
故 $|AB|=2\sqrt{3}p=4\sqrt{3}$,所以 $p=2$,
所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$,圆 F 的方程为 $x^2+(y-1)^2=16$.
(2)$|MF|\cdot|NF|$ 为定值.
设 $P(x_0,y_0)$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $y_1=\frac{x_1^2}{4}$,$y_2=\frac{x_2^2}{4}$.
因为抛物线 C 的方程为 $y=\frac{x^2}{4}$,则 $y'=\frac{x}{2}$,

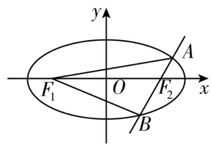
敲黑板:在抛物线 $x^2=2py(p\neq0)$ 中利用导数的几何意义求切线方程时,一定要先将抛物线的方程转化为 $y=\frac{x^2}{2p}$.

所以切线 PM 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$,
即 $x_1x-2y-2y_1=0$,①
同理,切线 PN 的方程为 $x_2x-2y-2y_2=0$.②
由直线 PM,PN 过 $P(x_0,y_0)$,得 $\begin{cases}x_1x_0-2y_1-2y_0=0,\\x_2x_0-2y_2-2y_0=0,\end{cases}$
所以直线 MN 的方程为 $x_0x-2y-2y_0=0$.
由 $\begin{cases}x_0x-2y-2y_0=0,\\x^2=4y\end{cases}$ 消去 y 得 $x^2-2x_0x+4y_0=0$,
则 $x_1+x_2=2x_0$,$x_1x_2=4y_0$,
所以 $|MF|\cdot|NF|=(y_1+1)(y_2+1)=y_1y_2+y_1+y_2+1=\frac{x_1^2}{4}\cdot\frac{x_2^2}{4}+\frac{x_1^2}{4}+\frac{x_2^2}{4}+1=\frac{(x_1x_2)^2}{16}+\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{4}+1=y_0^2+x_0^2-2y_0+1=x_0^2+(y_0-1)^2$.
又 $P(x_0,y_0)$ 在圆 F 上,
则 $x_0^2+(y_0-1)^2=16$,
即 $|MF|\cdot|NF|=16$,
故 $|MF|\cdot|NF|$ 为定值 16.

考向 46　直线与圆锥曲线的位置关系

刷考点

1. D 【解析】如图,



$\because F_1,F_2$ 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的两个焦点,
$\therefore |AF_1|+|AF_2|=10$,$|BF_1|+|BF_2|=10$,
$\therefore \triangle AF_1B$ 的周长为 $|AB|+|AF_1|+|BF_1|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=10+10=20$.
故选 D.

2. B 【解析】设 $|PF_2|=2m>0$,则 $|PF_1|=3m$,故 $|PF_1|-|PF_2|=m=2a$,所以 $|PF_2|=4a$,$|PF_1|=6a$,故 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|}=\frac{52a^2-4c^2}{48a^2}$,而 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{5}$,则 $c=\sqrt{5}a$,则 $\cos\angle F_1PF_2=\frac{52a^2-20a^2}{48a^2}=\frac{2}{3}$,又 $\angle F_1PF_2\in(0,\pi)$,所以 $\sin\angle F_1PF_2=\frac{\sqrt{5}}{3}$,故 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\cdot\sin\angle F_1PF_2=2\sqrt{5}$,即 $24a^2\times\frac{\sqrt{5}}{3}=4\sqrt{5}$,解得 $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$,故实轴长 $2a=\sqrt{2}$.故选 B.

3. A 【解析】由题意可得,$|PF_1|+|PF_2|=2a$,$|F_1F_2|=2c$,
设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径为 r,所以 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)r=\frac{1}{2}(2c+2a)r=(c+a)r$.

点悟:若 $\triangle ABC$ 的边长分别为 d,e,f,内切圆半径为 r,则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(d+e+f)r$

因为$\triangle PF_1F_2$的内切圆半径的最大值为$a-c$，所以$S_{\triangle PF_1F_2}=(c+a)r\leqslant(c+a)(a-c)=a^2-c^2=b^2$. 因为$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|y_P|\leqslant\frac{1}{2}\cdot2c\cdot b=bc$，所以$b^2=bc$，可得$b=c$.

又椭圆的长轴长为4，即$a=2$，由$a^2=b^2+c^2$，得$b=c=\sqrt{2}$，所以$\triangle PF_1F_2$的面积$S_{\triangle PF_1F_2}\leqslant bc=2$. 故选 A.

4. C 【解析】椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，则$a=2,b=\sqrt{3},c=1,F_1,F_2$是椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$的两个焦点，$P$是椭圆上一点，点$P$到两个焦点的距离之差为1，

假设$|PF_1|>|PF_2|$，

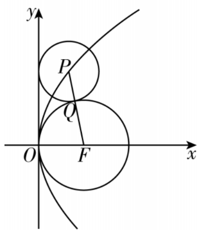
则$\begin{cases}|PF_1|-|PF_2|=1,\\|PF_1|+|PF_2|=2a=4,\end{cases}$

解得$|PF_1|=\frac{5}{2},|PF_2|=\frac{3}{2}$.

在$\triangle PF_1F_2$中，由余弦定理可得

$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}=\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2^2}{2\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}}=\frac{3}{5}$，所以$\sin\angle F_1PF_2=\frac{4}{5}$，所以$\triangle PF_1F_2$的面积$S=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|\sin\angle F_1PF_2=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{2}$. 故选 C.

5. A 【解析】设动点$P(m,n),m\neq0$，如图所示，$\odot P$与$\odot F$外切于点Q，



则$|PF|=|PQ|+|QF|$，

由抛物线焦半径公式得$|PF|=m+\frac{p}{2}$，

又因为$\odot F$的半径为$\frac{p}{2}$，即$|QF|=\frac{p}{2}$，

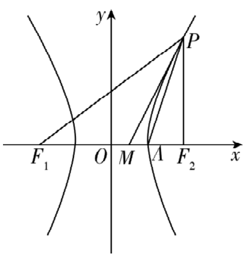
所以$|PQ|=|PF|-|QF|=m+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}=m$，

即$\odot P$的半径为m，

又点P到y轴的距离为m，所以$\odot P$与直线$x=0$相切，

故选 A.

6. ACD 【解析】由题意作图如图所示. 由$PF_2\perp F_1F_2$可知$|PF_2|=\frac{b^2}{a}$.



由$\tan\angle PF_1F_2=\frac{|PF_2|}{|F_1F_2|}=\frac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\frac{b^2}{2ac}=\frac{3}{4}$得$3ac=2b^2$，即$3ac=2(c^2-a^2)$，即$2e^2-3e-2=0$，即$(2e+1)(e-2)=0$，$\therefore e=2$（负值舍去），故 A 正确.

由$e=2=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$得$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，$\therefore$双曲线$C$的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$，故 B 错误.

由$\frac{c}{a}=2$得$c=2a,b=\sqrt{3}a$，则$|PF_2|=\frac{b^2}{a}=\frac{3a^2}{a}=3a$，又$|PF_1|-|PF_2|=2a$，

$\therefore|PF_1|=5a$，$\therefore\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{5a}{3a}=\frac{5}{3}$.

$\because|F_1M|=c+\frac{a}{2}=2a+\frac{a}{2}=\frac{5a}{2}$，

$|F_2M|=c-\frac{a}{2}=2a-\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$，

$\therefore\frac{|F_1M|}{|F_2M|}=\frac{\frac{5a}{2}}{\frac{3a}{2}}=\frac{5}{3}$，

$\therefore\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1M|}{|F_2M|}=\frac{5}{3}$，$\therefore$根据角平分线的性质可知$PM$平分$\angle F_1PF_2$，故 C 正确.

$\because|F_2A|=c-a=2a-a=a,|F_1F_2|=2c=4a$，

$\therefore\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PF_2}+\overrightarrow{F_2A}=\overrightarrow{PF_2}+\frac{1}{4}\overrightarrow{F_2F_1}=\overrightarrow{PF_2}+\frac{1}{4}(\overrightarrow{PF_1}-\overrightarrow{PF_2})=\frac{1}{4}\overrightarrow{PF_1}+\frac{3}{4}\overrightarrow{PF_2}$，故 D 正确. 故选 ACD.

7. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】由题意得$F(-1,0),c=1$.

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

联立$y=x+1$与椭圆方程$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$，消去x，可得$(a^2+b^2)y^2-2b^2y+b^2-a^2b^2=0$，

易知$\Delta>0$，

则$y_1+y_2=\frac{2b^2}{a^2+b^2},y_1y_2=\frac{b^2-a^2b^2}{a^2+b^2}$. ①

由$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，得$0-y_1=3(y_2-0)$，即$y_1=-3y_2$. ②

由①②消去y_1,y_2，可得$-3b^2=(a^2+b^2)(1-a^2)$，

由$a^2-b^2=1$，可得$a^4-3a^2+2=0$，

解得$a=\sqrt{2}$或$a=1$或$a=-\sqrt{2}$或$a=-1$.

因为$a>0$且$a>c$，所以$a=\sqrt{2}$，

则$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

快解 根据角参背景下的焦半径公式，可知$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，即$AF$较长，则$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{1+e\cos\theta}{1-e\cos\theta}=3$，且$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. $\left[-\frac{8}{9},0\right)$ 【解析】由题意可知$F_1(-5,0),F_2(5,0),A(5,y_A)$，

由$AF_2\perp x$轴可得$y_A=\pm\frac{b^2}{a}$，

又$\triangle AF_1F_2$的面积为$\frac{45}{4}$，即$S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}\times2c\times|y_A|=\frac{45}{4}$，则有$\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$，又$a^2+b^2=25$，

解得$a^2=16,b^2=9$，

所以双曲线方程为$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

设$P(x_0,y_0)$，则有$\frac{x_0^2}{16}-\frac{y_0^2}{9}=1(x_0\geqslant4)$，

则$|PF_1|=\sqrt{(x_0+c)^2+y_0^2}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}x_0+a\right)^2}=\frac{5}{4}x_0+4$，同理$|PF_2|=\frac{5}{4}x_0-4$，

因为$x_0\geqslant4$，

则$\frac{1}{|PF_1|}-\frac{1}{|PF_2|}=\frac{-8}{\left(\frac{5}{4}x_0+4\right)\left(\frac{5}{4}x_0-4\right)}=\frac{-8}{\frac{25}{16}x_0^2-16}\in\left[-\frac{8}{9},0\right)$.

9. B 【解析】椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$，即$5x^2+9y^2-45=0$，

设M,N两点的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，MN的中点为$H(x_0,y_0)$，

则$5x_1^2+9y_1^2-45=0,5x_2^2+9y_2^2-45=0$，

两式作差可得$5(x_1+x_2)(x_1-x_2)+9(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0$，

所以$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{5}{9}\cdot\frac{x_0}{y_0}=-\frac{1}{3}$，

所以$y_0=\frac{5}{3}x_0$，

代入直线方程$y=3x+m$得$x_0=-\frac{3m}{4},y_0=-\frac{5m}{4}$，即$H\left(-\frac{3m}{4},-\frac{5m}{4}\right)$.

又因为点H在椭圆内部，所以$5\times\frac{9m^2}{16}+9\times\frac{25m^2}{16}<45$，解得$-\frac{2\sqrt{6}}{3}<m<\frac{2\sqrt{6}}{3}$，

即m的取值范围是$\left(-\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$.

10. 【解】(1)依题意，$b^2+c^2=4,b=c$，

点悟： 正方形的对角线互相垂直平分且相等

解得$b=c=\sqrt{2}$，所以$a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，

所以椭圆E的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)因为直线 AB 的斜率存在,所以设直线 AB 的方程为 $y=kx+t(k\neq0)$,联立 $\begin{cases}y=kx+t,\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $(1+2k^2)\cdot x^2+4ktx+2t^2-4=0$,由 $\Delta=16k^2t^2-4(1+2k^2)(2t^2-4)=8(4k^2-t^2+2)>0$,得 $4k^2+2>t^2$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $D(-x_2,y_2)$,

点悟:直线 BD 的斜率为 0,即 $BD/\!/x$ 轴,则根据椭圆的对称性,点 B,D 关于 y 轴对称

$x_1+x_2=-\frac{4kt}{1+2k^2}$,$x_1x_2=\frac{2t^2-4}{1+2k^2}$.

直线 AC 的方程为 $y=\frac{y_1-1}{x_1}(x-0)+1$,即 $y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$,又直线 AC 过点 D,所以 $y_2=\frac{y_1-1}{x_1}(-x_2)+1$,即 $x_1y_2=-x_2y_1+x_2+x_1$,即 $x_1(kx_2+t)+x_2(kx_1+t)=x_1+x_2$,即 $2kx_1x_2+(t-1)(x_1+x_2)=0$,

即 $2k\frac{2t^2-4}{1+2k^2}-\frac{4kt(t-1)}{1+2k^2}=0$,整理得 $4k(t-2)=0$,

又 $k\neq0$,所以 $t=2$.

11. A 【解析】若直线 $AB\perp x$ 轴,则线段 AB 的中点在 x 轴上,不符合题意,所以直线 AB 的斜率存在.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由题意可得 $x_1+x_2=-2$,$y_1+y_2=2$,

联立得 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{9}+\frac{y_1^2}{4}=1,\\ \frac{x_2^2}{9}+\frac{y_2^2}{4}=1,\end{cases}$ 两式相减可得

$\frac{x_1^2-x_2^2}{9}+\frac{y_1^2-y_2^2}{4}=0$,

所以 $\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{2}{-2}k_{AB}=-k_{AB}=-\frac{4}{9}$,解得 $k_{AB}=\frac{4}{9}$,

故直线 l 的斜率为 $\frac{4}{9}$. 故选 A.

12. C 【解析】设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,因为点 A,B 在双曲线上,

所以 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 两式相减可得

$\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$,

整理可得 $\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{b^2}{a^2}$,又线段 AB 的中点是 $M(2,6)$,则 $x_1+x_2=4$,$y_1+y_2=12$,

所以 $3k_{AB}=\frac{b^2}{a^2}$,又直线过点 $P(-4,0)$,得到 $k_{AB}=\frac{6-0}{2-(-4)}=1$,所以 $\frac{b^2}{a^2}=3$,可得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+3}=2$. 故选 C.

13. D 【解析】由过椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点 F 且与长轴垂直的弦长为 $6\sqrt2$,可得椭圆过点 $(-c,3\sqrt2)$,

代入方程得 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{18}{b^2}=1$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$,

两式作差得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$,

即 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2}=0$,

因为 P 恰好是线段 AB 的中点,所以 $x_1+x_2=4$,$y_1+y_2=2$,

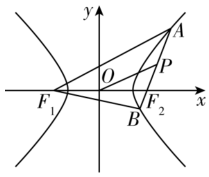
又因为直线 AB 的斜率为 -1,

所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1$,可得 $a^2=2b^2$,

联立方程 $\begin{cases}\frac{c^2}{a^2}+\frac{18}{b^2}=1,\\ a^2=2b^2,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=6\sqrt2,\\ b=6,\\ c=6.\end{cases}$

所以椭圆 C 上一点 M 到点 F 的距离的最大值为 $a+c=6+6\sqrt2$.

14. ABD 【解析】对于 A 选项,因为 $|AB|=|BF_1|$,所以 $|AF_2|=|AB|-|BF_2|=|BF_1|-|BF_2|=2a$,



由双曲线的定义可得 $|AF_1|-|AF_2|=|AF_1|-2a=2a$,所以 $|AF_1|=4a=2|AF_2|$,故 A 正确;

对于 B 选项,直线 AB 的斜率为 $\sqrt7$,设直线 AB 的倾斜角为 α,则 α 为锐角且 $\tan\alpha=\sqrt7$,由 $\begin{cases}\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt7,\\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,\\ \cos\alpha>0\end{cases}$ 可得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt2}{4}$,则 $\cos\angle AF_2F_1=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha=-\frac{\sqrt2}{4}$,在 $\triangle AF_1F_2$ 中,由余弦定理得 $\cos\angle AF_2F_1=\frac{|AF_2|^2+|F_1F_2|^2-|AF_1|^2}{2|AF_2|\cdot|F_1F_2|}=\frac{4a^2+4c^2-16a^2}{8ac}=-\frac{\sqrt2}{4}$.

即 $2c^2+\sqrt2ac-6a^2=0$,

等式 $2c^2+\sqrt2ac-6a^2=0$ 两边同时除以 a^2 可得 $2e^2+\sqrt2e-6=0$,

因为 $e>1$,解得 $e=\sqrt2$,故 B 正确;

对于 C 选项,因为 $\cos\angle AF_2F_1=-\frac{\sqrt2}{4}$,所以 $\angle AF_2F_1$ 为钝角,

所以 $\sin\angle AF_2F_1=\sqrt{1-\cos^2\angle AF_2F_1}=\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt2}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{4}$,

$S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}|AF_2|\cdot|F_1F_2|\sin\angle AF_2F_1=\frac{1}{2}\times2a\times2c\times\frac{\sqrt{14}}{4}=a\times2\sqrt2a\times\frac{\sqrt{14}}{4}=\sqrt7a^2$,故 C 错误;

对于 D 选项,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$,可得 $k_{OP}=\frac{\frac{y_1+y_2}{2}-0}{\frac{x_1+x_2}{2}-0}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$,因为 $c=\sqrt2a$,所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=a$,

由 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}-\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$,

所以 $\frac{y_1^2-y_2^2}{x_1^2-x_2^2}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=k_{AB}k_{OP}=\sqrt7k_{OP}=\frac{b^2}{a^2}=1$,则 $k_{OP}=\frac{\sqrt7}{7}$,

则直线 OP 的斜率为 $\frac{\sqrt7}{7}$,故 D 正确.

故选 ABD.

15. (1)【解】考虑边与椭圆 E 的长轴和短轴分别平行的矩形可知,其对角线的一半就是蒙日圆的半径,则有 $\sqrt{3+2}=\sqrt5$,因此椭圆 E 的蒙日圆方程为 $x^2+y^2=5$.

(2)【证明】(ⅰ)如图,设点 Q 是切点弦 MN 的中点,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

当 k_{OQ},k_{MN} 都存在时,联立 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1,\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1,\end{cases}$

两式相减得 $\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$,

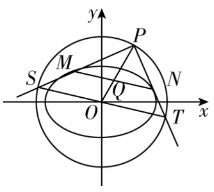
所以 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{b^2}{a^2}$,即 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\frac{\frac{y_1+y_2}{2}-0}{\frac{x_1+x_2}{2}-0}=-\frac{b^2}{a^2}$,$k_{OQ}\cdot k_{MN}=-\frac{b^2}{a^2}$.

(另解:设 MN 所在的直线方程是 $y=kx+m$,联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0,\end{cases}$ 消去 y 得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0$,$x_1+x_2=-\frac{2a^2km}{a^2k^2+b^2}$,$y_1+y_2=\frac{2b^2m}{a^2k^2+b^2}$,所以点 Q

的坐标是 $\left(-\frac{a^2km}{a^2k^2+b^2},\frac{b^2m}{a^2k^2+b^2}\right)$，于是 $k_{OQ}\cdot k_{MN}=\frac{\frac{b^2m}{a^2k^2+b^2}}{-\frac{a^2km}{a^2k^2+b^2}}\cdot k=-\frac{b^2}{a^2}$)

而 $k_{MN}=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$，所以 $k_{OQ}\cdot\left(-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}\right)=-\frac{b^2}{a^2}$，$k_{OQ}=\frac{y_0}{x_0}=k_{OP}$，所以 O,Q,P 三点共线，故 OP 平分切点弦 MN.

当 k_{OQ},k_{MN} 有一个不存在时，结论显然成立.



(ⅱ)显然线段 ST 是蒙日圆的直径，ST 经过原点 O，所以 $OS=OP,QM=QP$.

于是 $\angle OPS=\angle OSP,\angle OPS=\angle QMP$，因此 $\angle OSP=\angle QMP$，故 $MN//ST$.

16.【解】(1)由已知可得，抛物线的焦点坐标为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，直线 l 的方程为 $y=\frac{\sqrt3}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right)$. 联立抛物线与直线的方程得 $\begin{cases}y=\frac{\sqrt3}{3}\left(x-\frac{p}{2}\right),\\ y^2=2px,\end{cases}$

消去 y 得 $x^2-7px+\frac{p^2}{4}=0$.

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由根与系数的关系可得 $x_1+x_2=7p$，

则 $|AB|=x_1+x_2+p=8p=16$，所以 $p=2$.

所以抛物线的方程为 $y^2=4x$，准线方程为 $x=-1$.

(2)设直线 $l:x=my+1$，

联立直线与抛物线的方程 $\begin{cases}x=my+1,\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $y^2-4my-4=0$，

所以 $y_1+y_2=4m,y_1y_2=-4$.

又直线 OA 的斜率 $k_{OA}=\frac{y_1}{x_1}=\frac{4}{y_1}$，故直线 OA 的方程为 $y=\frac{4}{y_1}x$，所以 $M\left(-2,\frac{-8}{y_1}\right)$.

同理可得 $N\left(-2,\frac{-8}{y_2}\right)$.

设圆上任意一点为 $Q(x,y)$，则由 $\overrightarrow{QM}\cdot\overrightarrow{QN}=0$ 可得圆的方程为 $(x+2)^2+\left(y+\frac{8}{y_1}\right)\left(y+\frac{8}{y_2}\right)=0$，

整理可得 $(x+2)^2+y^2+y\left(\frac{8}{y_2}+\frac{8}{y_1}\right)+\frac{64}{y_1y_2}=(x+2)^2+y^2-8my-16=0$. 令 $y=0$，

可得 $x=2$ 或 $x=-6$，

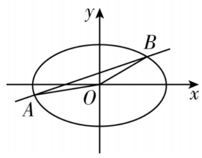
所以以 MN 为直径的圆过定点，定点坐标为 $(2,0),(-6,0)$.

17. (1)【解】因为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac12$，故 $\frac{c}{a}=\frac12$，

又焦距为 2，故 $2c=2$，即有 $c=1,a=2$，则 $b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt3$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)(ⅰ)【解】如图，



联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$ 消去 y，得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

$\Delta=48(4k^2-m^2+3)>0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{8km}{3+4k^2},x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$，

故 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{3m^2-12k^2}{3+4k^2}$，

则 $k_{OA}\cdot k_{OB}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{3m^2-12k^2}{4m^2-12}=-\frac34$，化简得 $m^2=\frac{4k^2+3}{2}$.

(ⅱ)【证明】因为 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{24(1+k^2)}{3+4k^2}}$，

又点 O 到直线 l 的距离 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

所以 $\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac12|AB|\cdot d=\frac12\times\sqrt{\frac{24(1+k^2)}{3+4k^2}}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac12\times\sqrt{\frac{24m^2}{3+4k^2}}=\frac12\sqrt{\frac{24\times\frac{3+4k^2}{2}}{3+4k^2}}=\sqrt3$.

故 $\triangle AOB$ 的面积为定值.

18.【解】(1)如图，由题意可得 $\sqrt{a^2+b^2}=2a$，且右焦点 $F(2a,0)$ 到渐近线 $\sqrt3x-y=0$ 的距离为 $\frac{2\sqrt3a}{2}=2\sqrt3$，

所以 $a=2,b=2\sqrt3$，所以 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$.

(2)①由(1)知，$F(4,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由题意可得直线 AB 的斜率存在且不为零，设直线 AB 的方程为 $x=my+4(m\neq0)$，

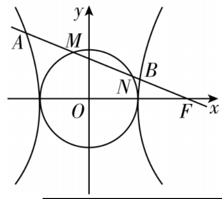
与双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 联立，消去 x 得 $(3m^2-1)y^2+24my+36=0$，所以 $3m^2-1\neq0,\Delta=144(m^2+1)>0$，

$y_1+y_2=-\frac{24m}{3m^2-1},y_1y_2=\frac{36}{3m^2-1}$，又 A,B 两点在 x 轴的同一侧，所以 $y_1y_2>0$，

则有 $3m^2-1>0$，即 $m^2>\frac13$.

圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$，点 O 到直线 AB 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$，由 $d<2$ 得 $m^2>3$，

由 $\begin{cases}m^2>\frac13,\\ m^2>3,\end{cases}$ 解得 $m>\sqrt3$ 或 $m<-\sqrt3$. 因为直线 AB 的斜率 $k=\frac1m$，所以直线 AB 斜率的取值范围是 $\left(-\frac{\sqrt3}{3},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt3}{3}\right)$.



②$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|$

$=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{24m}{3m^2-1}\right)^2-4\cdot\frac{36}{3m^2-1}}$

$=\frac{12(m^2+1)}{3m^2-1}$，

$|MN|=2\sqrt{4-d^2}=4\sqrt{\frac{m^2-3}{m^2+1}}$，

所以 $|AB|\cdot|MN|=\frac{12(m^2+1)}{3m^2-1}\cdot\frac{4\sqrt{m^2-3}}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{16\sqrt{(3m^2+3)(3m^2-9)}}{3m^2-1}$.

设 $t=3m^2-1,t>8$，

则 $|AB|\cdot|MN|=\frac{16\sqrt{(t+4)(t-8)}}{t}$

$=16\sqrt{1-\frac4t-\frac{32}{t^2}}$

$=16\sqrt{-32\left(\frac1t+\frac1{16}\right)^2+\frac98}\in(0,16)$，

所以 $|AB|\cdot|MN|$ 的取值范围是 $(0,16)$.

方法技巧 **圆锥曲线中最值或范围问题的常见解法**

(1)几何法，若题目的条件和结论能明显体现几何特征和意义，则考虑利用几何法来解决；

(2)代数法，若题目的条件和结论能体现某种明确的函数关系，则可首先建立目标函数，再求这个函数的最值或范围.

刷上分

1. C　【解析】设 $A(x_1,y_1)(x_1>0,y_1>0)$，$B(x_2,y_2)$，由题设可知 $F(1,0)$，

因为直线 l 的倾斜角为 $120°$，

故 $l: x=-\frac{\sqrt{3}}{3}y+1$，

由 $\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}y+1,\\ y^2=4x\end{cases}$ 可得 $y^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}y-4=0$，解得

$y=-2\sqrt{3}$ 或 $y=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

故 $y_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$y_2=-2\sqrt{3}$，故 $\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|y_1|}{|y_2|}=\frac{1}{3}$，

故选 C.

2. B　【解析】根据题意可得抛物线的焦点 $F\left(\frac{3}{2},0\right)$，根据题意可得直线 l 的斜率存在且不为 0.

设直线 l 的方程为 $y=k\left(x-\frac{3}{2}\right)=kx-\frac{3}{2}k$，

$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases} y=kx-\frac{3}{2}k,\\ y^2=6x,\end{cases}$

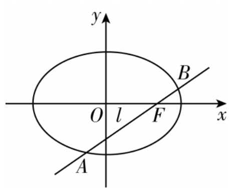
消去 y 可得 $k^2x^2-(3k^2+6)x+\frac{9}{4}k^2=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{3k^2+6}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{9}{4}$.

因为 $|AB|=x_1+x_2+p=\frac{3k^2+6}{k^2}+3=12$，解得 $k^2=1$，$k=\pm1$，

则直线 l 的方程为 $y=x-\frac{3}{2}$ 或 $y=-x+\frac{3}{2}$.

故选 B.

3. D　【解析】如图，由题意可知 $F(1,0)$，设 $l: x=ky+1$ $(k>0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



联立 $\begin{cases} x^2+2y^2=2,\\ x=ky+1,\end{cases}$ 消去 x 化简整理得 $(k^2+2)y^2+2ky-1=0$，

则有 $y_1+y_2=-\frac{2k}{k^2+2}$，$y_1y_2=-\frac{1}{k^2+2}$，

$|AB|=\frac{3\sqrt{2}}{2}=\sqrt{1+k^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{\left(-\frac{2k}{k^2+2}\right)^2-4\left(-\frac{1}{k^2+2}\right)}$

$=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{8+8k^2}}{k^2+2}(k>0)$，

解得 $k=\sqrt{2}$，

故直线 l 的方程为 $x-\sqrt{2}y-1=0$.

令 $x=0$，解得 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以直线 l 在 y 轴上的截距为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故选 D.

4. B　【解析】如图，根据题意，$4\pi=\pi\left(\frac{|AB|}{2}\right)^2$，

$\therefore |AB|=4$，

设 $|AF|=a$，$|BF|=b$，过点 A 作 $AQ\perp l$ 于 Q，过点 B 作 $BP\perp l$ 于 P，

由抛物线定义可得 $|AF|=|AQ|$，$|BF|=|BP|$，在梯形 $ABPQ$ 中，

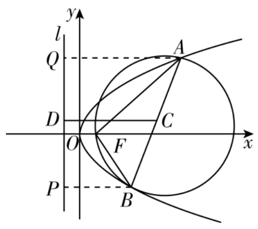
$2|CD|=|AQ|+|BP|=a+b$，

由题意可得 $AF\perp BF$，则 $|AB|^2=|AF|^2+|BF|^2$，即 $16=a^2+b^2$.

$\because |CD|^2=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=\frac{16+2ab}{4}=4+\frac{ab}{2}\leqslant4+\frac{a^2+b^2}{4}=8$，

$\therefore |CD|\leqslant2\sqrt{2}$（当且仅当 $a=b=2\sqrt{2}$ 时，等号成立），

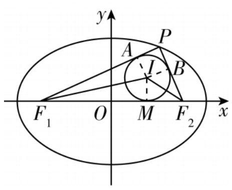
$\therefore |CD|$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$. 故选 B.



5. A　【解析】如图，设 $P(x_0,y_0)(x_0>0,y_0>0)$，$I(x_1,y_1)(x_1>0,y_1>0)$，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

易知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，$2a=4$，由椭圆焦半径公式可得 $|PF_1|=2+\frac{1}{2}x_0$，$|PF_2|=2-\frac{1}{2}x_0$，

设 A,B,M 分别为 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆与边 PF_1,PF_2,F_1F_2 的切点，则 $M(x_1,0)$，



根据内切圆的性质知 $|PA|=|PB|$，$|AF_1|=|MF_1|$，$|BF_2|=|MF_2|$，

因此 $|PF_1|-|PF_2|=|AF_1|-|BF_2|=|MF_1|-|MF_2|$，

即 $\left(2+\frac{1}{2}x_0\right)-\left(2-\frac{1}{2}x_0\right)=(x_1+1)-(1-x_1)$，解得 $x_1=\frac{1}{2}x_0$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由三角形面积公式可得 $\frac{1}{2}y_0|F_1F_2|=\frac{1}{2}(|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|)\cdot y_1$，解得 $y_1=\frac{1}{3}y_0$，

因此 $I\left(\frac{1}{2}x_0,\frac{1}{3}y_0\right)$，所以 $k_1\cdot k_2=\frac{\frac{1}{3}y_0-0}{\frac{1}{2}x_0+1}\cdot\frac{\frac{1}{3}y_0-0}{\frac{1}{2}x_0-1}=\frac{\frac{1}{9}y_0^2}{\frac{1}{4}x_0^2-1}=\frac{\frac{1}{9}\times3\left(1-\frac{1}{4}x_0^2\right)}{\frac{1}{4}x_0^2-1}=-\frac{1}{3}$.

故选 A.

6. AD　【解析】A. 设 $P(x,y)$，则由题意可得 $\frac{\sqrt{(x-4)^2+y^2}}{\left|x-\frac{25}{4}\right|}=\frac{4}{5}$，化简得 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$，故 A 正确；

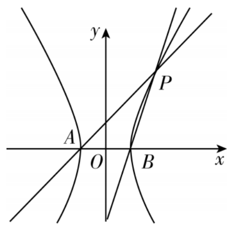
B. 由 A 可知，动点 P 的轨迹为椭圆且 $a^2=25$，$b^2=9$，$c^2=16$，所以 $|PF|$ 的最大值为 $a+c=5+4=9$，故 B 错误；

C. 由椭圆方程可知，点 Q 是椭圆的左焦点，点 F 是椭圆的右焦点，则 $4c^2=|MQ|^2+|MF|^2-2|MQ||MF|\cos60°$，即 $4c^2=|MQ|^2+|MF|^2-|MQ||MF|$，$(|MQ|+|MF|)^2-3|MQ||MF|=4c^2$，$4a^2-3|MQ|\cdot|MF|=4c^2$，所以 $|MQ||MF|=\frac{4b^2}{3}=12$，则 $S_{\triangle MQF}=\frac{1}{2}|MQ||MF|\sin60°=3\sqrt{3}$，故 C 错误；

D. 易知四边形 $AQBF$ 是平行四边形，则 $|AF|+|BF|=|AF|+|AQ|=2a=10$，$\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}=\frac{1}{10}\left(\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}\right)(|AF|+|BF|)=\frac{1}{10}\left(5+\frac{|BF|}{|AF|}+\frac{4|AF|}{|BF|}\right)\geqslant\frac{1}{10}\left(5+2\sqrt{\frac{|BF|}{|AF|}\cdot\frac{4|AF|}{|BF|}}\right)=\frac{9}{10}$，当且仅当 $\frac{|BF|}{|AF|}=\frac{4|AF|}{|BF|}$，即 $|BF|=2|AF|$ 时，等号成立，所以 $\frac{1}{|AF|}+\frac{4}{|BF|}$ 的最小值为 $\frac{9}{10}$，故 D 正确.

故选 AD.

7. $2\sqrt{6}$　【解析】如图，因为双曲线 $C: x^2-\frac{y^2}{3}=1$，所以 $a=1$，



设 $P(m,n)(m>0,n>0)$，则 $m^2-\frac{n^2}{3}=1$，可得 $n^2=3(m^2-1)$，

又因为 A,B 分别为双曲线 $C: x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右顶点，可得 $A(-1,0)$，$B(1,0)$，

所以 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=k_{AP}\cdot k_{BP}=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n}{m-1}=\frac{n^2}{m^2-1}=3$.

又由 $\tan\alpha>0$，$\tan\beta>0$，所以 $2\tan\alpha+\tan\beta\geqslant2\sqrt{2\tan\alpha\tan\beta}=2\sqrt{6}$，

当且仅当 $2\tan\alpha=\tan\beta=\sqrt{6}$ 时，等号成立，

所以 $\begin{cases}\frac{2n}{m+1}=\frac{n}{m-1},\\ n^2=3(m^2-1),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\ n=2\sqrt{6}\end{cases}$（负值舍去）.

所以△PAB 的面积为 $\frac{1}{2}\times 2a\times y_P=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$.

8. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 【解析】如图，设 $M(x_0,y_0)$，$P(x,y)$，

依题意 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OF}+5\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{OF}+5(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OF})=5\overrightarrow{OM}-4\overrightarrow{OF}$，

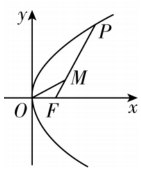
所以 $(x,y)=5(x_0,y_0)-4\left(\frac{p}{2},0\right)=(5x_0-2p,5y_0)$，

所以 $P(5x_0-2p,5y_0)$，将点 P 的坐标代入抛物线的方程得 $(5y_0)^2=2p\cdot(5x_0-2p)$，

整理得 $y_0^2=\frac{10px_0-4p^2}{25}$.

设直线 OM 的斜率为 k，则 $k^2=\frac{y_0^2}{x_0^2}=\frac{10px_0-4p^2}{25x_0^2}=-\frac{4p^2}{25}\left(\frac{1}{x_0}\right)^2+\frac{2p}{5}\cdot\frac{1}{x_0}$，

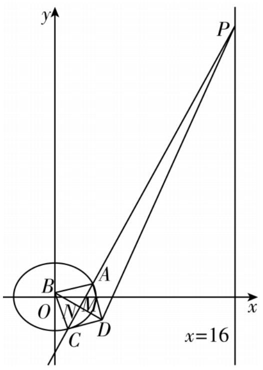
根据二次函数的性质可知，



当 $\frac{1}{x_0}=-\frac{\frac{2p}{5}}{-\frac{8p^2}{25}}=\frac{5}{4p}$ 时，

k^2 取得最大值，为 $-\frac{4p^2}{25}\cdot\left(\frac{5}{4p}\right)^2+\frac{2p}{5}\cdot\frac{5}{4p}=\frac{1}{4}$，所以 $k^2\leqslant\frac{1}{4}$，解得 $-\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$.

9. (1)【解】由题意可设椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$c^2=a^2-b^2$.



因为以 E 的一个顶点和两个焦点为顶点的三角形是等边三角形，且其周长为 $6\sqrt{2}$，

所以 $2a+2c=6\sqrt{2}$，且 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，

所以 $a=2\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2}$，$b^2=6$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$.

(2)【证明】如图，设直线 l 的方程为 $x=ty+2(t\neq0)$，

令 $x=16$，得 $y=\frac{14}{t}$，即 $P\left(16,\frac{14}{t}\right)$.

由 $\begin{cases}3x^2+4y^2=24,\\ x=ty+2\end{cases}$ 得 $(3t^2+4)y^2+12ty-12=0$.

设 $A(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{12t}{3t^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{12}{3t^2+4}$.

设 AC 的中点为 $N(x_3,y_3)$，则 $y_3=\frac{y_1+y_2}{2}=-\frac{6t}{3t^2+4}$.

所以 $x_3=ty_3+2=\frac{8}{3t^2+4}$.

因为四边形 $ABCD$ 为菱形，

所以 N 为 BD 的中点，$AC\perp BD$，

所以直线 BD 的斜率为 $-t$，

所以直线 BD 的方程为 $y+\frac{6t}{3t^2+4}=-t\left(x-\frac{8}{3t^2+4}\right)$.

令 $x=0$，得 $y=\frac{8t}{3t^2+4}-\frac{6t}{3t^2+4}=\frac{2t}{3t^2+4}$. 所以 $B\left(0,\frac{2t}{3t^2+4}\right)$.

设点 D 的坐标为 (x_4,y_4)，则 $x_4=2x_3=\frac{16}{3t^2+4}$，$y_4=2y_3-\frac{2t}{3t^2+4}=-\frac{14t}{3t^2+4}$，

即 $D\left(\frac{16}{3t^2+4},-\frac{14t}{3t^2+4}\right)$，所以直线 PD 的方程为 $y-\frac{14}{t}=\frac{\frac{14}{t}+\frac{14t}{3t^2+4}}{16-\frac{16}{3t^2+4}}\cdot(x-16)$，

即 $y=\frac{7}{6t}(x-4)$，

所以直线 PD 过定点 $(4,0)$.

方法技巧 **圆锥曲线中定点问题的两种解法**

(1)引进参数法：先引进动点的坐标或动线中的系数为参数表示变化量，再研究变化的量与参数何时没有关系，找到定点.

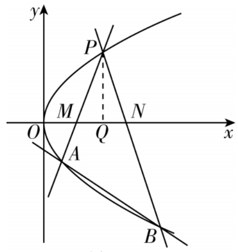
(2)特殊到一般法：先根据动点或动线的特殊情况探索出定点，再证明该定点与变量无关.

10.【解】(1)设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

因为 $P(2,4)$ 在抛物线上，

所以 $16=4p$，所以 $p=4$，所以 $C:y^2=8x$.

过 P 作 PQ 垂直于 x 轴于点 Q.



因为 $PM=PN$，所以 $\angle PMQ=\angle PNQ$.

因为 $\angle PNQ+\angle PNx=180°$，所以 $\angle PMQ+\angle PNx=180°$，

所以直线 PM，PN 的倾斜角互补，所以 $k_{PM}+k_{PN}=0$.

显然 A，B 不与 P 关于 x 轴的对称点重合，所以 $x_1\neq2$，$x_2\neq2$.

又因为 $k_{PA}=k_{PM}=\frac{y_1-4}{x_1-2}=\frac{y_1-4}{\frac{1}{8}y_1^2-2}=\frac{8}{y_1+4}$，

$k_{PB}=k_{PN}=\frac{y_2-4}{x_2-2}=\frac{y_2-4}{\frac{1}{8}y_2^2-2}=\frac{8}{y_2+4}$，

所以 $\frac{8}{y_1+4}+\frac{8}{y_2+4}=0$，所以 $y_1+4=-y_2-4$，

所以 $y_1+y_2=-8$，

所以 $k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{8}-\frac{y_1^2}{8}}=\frac{8}{y_1+y_2}=-1$，即直线 AB 的斜率为 -1.

(2)设 $AB:y=-x+m$，

联立 $\begin{cases}y=-x+m,\\ y^2=8x,\end{cases}$ 可得 $y^2+8y-8m=0$，所以 $y_1+y_2=-8$，$y_1y_2=-8m$，

且 $\Delta=64-4\times1\times(-8m)>0$，所以 $m>-2$.

若 M 与 O 重合，则此时 $m=0$，又由题意可知 M 不与原点重合，故 $m\in(-2,0)$.

又 $|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{2}\times\sqrt{64+32m}=8\sqrt{m+2}$，

且点 P 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|m-6|}{\sqrt{2}}$，

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\times d\times|AB|=2\sqrt{2}\times\sqrt{(6-m)^2(m+2)}$，

令 $f(m)=(6-m)^2(m+2)$，$m\in(-2,0)$，

所以 $f'(m)=(3m-2)\cdot(m-6)>0$ 在 $(-2,0)$ 上恒成立，

所以 $f(m)$ 在 $(-2,0)$ 上单调递增，

且 $f(0)=72$，$f(-2)=0$，

所以△PAB 面积的取值范围是 $(0,24)$.

归纳总结 **圆锥曲线中求解三角形面积的常用方法**

(1)利用弦长公式以及点到直线的距离公式，结合 $\frac{1}{2}\times$底$\times$高，表示出三角形的面积；

(2)根据直线与圆锥曲线的交点，利用公共底或者公共高的情况，将三角形的面积表示为 $\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|x_1-x_2|$ 或 $\frac{1}{2}\cdot|EF|\cdot|y_1-y_2|$；

(3)借助三角形内切圆的半径，将三角形面积表示为 $\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)\cdot R$（$R$ 为内切圆半径，a,b,c 为三角形三边长）.

考向 47 圆锥曲线的综合问题

刷考点

1.【解】(1)由题设,抛物线焦点为$\left(\frac{p}{2},0\right)$,

则相交弦所在直线方程为 $y=x-\frac{p}{2}$,

联立抛物线方程,整理得 $y^2-2py-p^2=0$,设交点坐标分别为(x_1,y_1),(x_2,y_2),

则有 $y_1+y_2=2p$,$y_1y_2=-p^2$,

由题意可得 $\sqrt{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{1+\left(\frac{1}{k}\right)^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=8$(弦长公式另一种表示方法),

又 $k=1$,所以 $4p=8$,$p=2$,

故抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$.

(2)直线 QR 过定点$\left(-\frac{7}{4},-3\right)$.

如图,令 $y=-1$,则 $x=\frac{1}{4}$,即 $P\left(\frac{1}{4},-1\right)$,

设 $Q\left(\frac{m^2}{4},m\right)$,$R\left(\frac{n^2}{4},n\right)$,其中 $m\neq n$ 且均不为±1,则 $k_{PQ}=\frac{4}{m-1}$,$k_{PR}=\frac{4}{n-1}$,

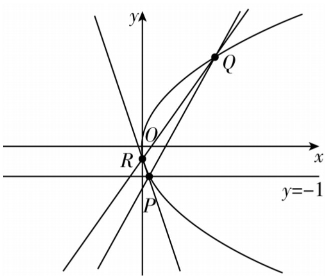
又直线 PQ 和直线 PR 的斜率之和为-1,

所以$\frac{4}{m-1}+\frac{4}{n-1}=-1$,即 $7-3(m+n)=mn$,

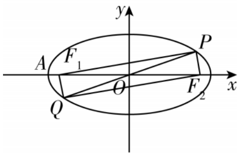
直线 QR 的方程为 $x-\frac{m^2}{4}=\frac{m+n}{4}(y-m)=\frac{m+n}{4}y-\frac{m^2+mn}{4}$,

所以 $4x=(m+n)y-mn=(m+n)(y+3)-7$,

显然直线 QR 恒过点$\left(-\frac{7}{4},-3\right)$.



2.(1)【解】如图,



因为点 P,Q 为 C 上关于坐标原点 O 对称的两点,

且$|PQ|=|F_1F_2|$,

所以四边形 PF_1QF_2 为矩形,

所以 $PF_1\perp PF_2$.

所以 $S_{矩形PF_1QF_2}=|PF_1|\cdot|PF_2|$,由椭圆定义及勾股定理得$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a,\\|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2,\end{cases}$

所以$|PF_1|\cdot|PF_2|=2b^2$,所以$\frac{1}{2}a^2=2b^2=2(a^2-c^2)$,所以$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $c=\sqrt{3}$,解得 $a=2$.

所以 $b^2=a^2-c^2=1$,故椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)【证明】因为 $F_2(\sqrt{3},0)$,所以可设直线 l 的方程为 $x=my+\sqrt{3}$.

联立方程组$\begin{cases}x=my+\sqrt{3},\\\frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$消去 x 化简并整理得$(m^2+4)y^2+2\sqrt{3}my-1=0$.

设 $G(x_1,y_1)$,$H(x_2,y_2)$,可得 $y_1+y_2=\frac{-2\sqrt{3}m}{m^2+4}$,$y_1y_2=\frac{-1}{m^2+4}$.

因为 $A(-2,0)$,所以直线 AG 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$.

设点 M,N 的纵坐标分别为 y_M,y_N,令 $x=4$,可得 $y_M=\frac{6y_1}{x_1+2}$,同理可得 $y_N=\frac{6y_2}{x_2+2}$.

所以 $y_M\cdot y_N=\frac{36y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}$

$=\frac{36y_1y_2}{(my_1+2+\sqrt{3})(my_2+2+\sqrt{3})}$

$=\frac{36y_1y_2}{m^2y_1y_2+(2+\sqrt{3})m(y_1+y_2)+(2+\sqrt{3})^2}=$

$$\frac{36\cdot\frac{-1}{m^2+4}}{m^2\cdot\frac{-1}{m^2+4}+(2+\sqrt{3})m\cdot\frac{-2\sqrt{3}m}{m^2+4}+(2+\sqrt{3})^2}$$

$=36\sqrt{3}-63$.

所以 M,N 两点的纵坐标之积为定值.

3.(1)【解】因为椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,点 $A(-2,0)$在 C 上,

所以$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\a=2,\\a^2=b^2+c^2,\end{cases}$

解得 $a=2$,$b=1$,$c=\sqrt{3}$,

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)【解】设过点 $B(-2,1)$且斜率为 k 的直线方程为 $y-1=k(x+2)$,即 $y=kx+2k+1$,

联立方程$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\y=kx+2k+1,\end{cases}$

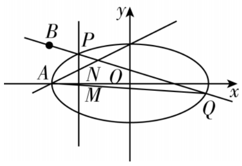
消去 y 得$(1+4k^2)x^2+(16k^2+8k)x+(16k^2+16k)=0$,

因为 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$,

所以$\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-16k^2-8k}{1+4k^2},\\x_1x_2=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2},\end{cases}$

所以$(x_1+2)(x_2+2)=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4=\frac{16k^2+16k}{1+4k^2}+\frac{-32k^2-16k}{1+4k^2}+4=\frac{4}{1+4k^2}$.

(3)【证明】如图,设直线 AQ 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2+2}(x+2)$,过点 P 作垂直于 x 轴的直线与直线 AQ 相交于点 M,



所以 $M\left(x_1,\frac{y_2(x_1+2)}{x_2+2}\right)$,又因为 $P(x_1,y_1)$,

设 PM 的中点 N 的坐标为(x_0,y_0),

于是 $N\left(x_1,\frac{(x_1+2)y_2+(x_2+2)y_1}{2(x_2+2)}\right)$,

所以$(x_1+2)+(x_2+2)=\frac{4-8k}{4k^2+1}$,$(x_1+2)\cdot(x_2+2)=\frac{4}{4k^2+1}$,又 $\Delta>0$,得 $k<0$,

则有$\frac{1}{x_1+2}+\frac{1}{x_2+2}=1-2k$.

又因为$\frac{y_1-1}{x_1+2}+\frac{y_2-1}{x_2+2}=\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}-\left(\frac{1}{x_1+2}+\frac{1}{x_2+2}\right)=2k$,

所以$\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=1$,

于是 $y_0=\frac{(x_1+2)y_2+(x_2+2)y_1}{2(x_2+2)}=\frac{(x_1+2)y_2+(x_2+2)y_1}{2(x_2+2)(x_1+2)}\cdot(x_1+2)$,

即 $y_0=\frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}\right)(x_1+2)=\frac{1}{2}(x_1+2)$,

即 $y_0=\frac{1}{2}(x_0+2)$,即 $x_0-2y_0+2=0$,

即点 N 在直线 $x-2y+2=0$ 上. 问题得证.

4.【解】(1)抛物线 C 的焦点为 $F\left(0,\frac{p}{2}\right)$,

$|FM|=\frac{p}{2}+3$,

所以 F 与圆 $M:x^2+(y+3)^2=1$ 上点的距离的最大值为$\frac{p}{2}+3+1=5$,解得 $p=2$,故抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$.

(2)设 $A\left(x_1,\frac{x_1^2}{4}\right)$,$B\left(x_2,\frac{x_2^2}{4}\right)$.

设 $l_{AB}:y=kx+b$,

直线 AB 的斜率一定存在

联立 l_{AB} 和抛物线 C 的方程得$\begin{cases}y=kx+b,\\x^2=4y,\end{cases}$整理得 $x^2-4kx-4b=0$,

则 $\Delta=16k^2+16b>0$,即 $k^2+b>0$,且 $x_1+x_2=4k$,$x_1x_2=-4b$,抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$,

即 $y=\frac{x^2}{4}$,则有 $y'=\frac{x}{2}$,

则 $l_{PA}:y-\frac{x_1^2}{4}=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$,

整理得 $y=\frac{x_1}{2}\cdot x-\frac{x_1^2}{4}$，同理可得 $l_{PB}:y=\frac{x_2}{2}\cdot x-\frac{x_2^2}{4}$.

联立 $\begin{cases}y=\frac{x_1}{2}\cdot x-\frac{x_1^2}{4},\\ y=\frac{x_2}{2}\cdot x-\frac{x_2^2}{4},\end{cases}$ 可得 $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1x_2}{4}\right)$，即 $P(2k,-b)$.

将点 P 的坐标代入圆 M 的方程，得 $(2k)^2+(-b+3)^2=1$，整理得 $k^2=\frac{1-(b-3)^2}{4}$.

由弦长公式得 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{16k^2+16b}$，

点 P 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|2k^2+2b|}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以 $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\sqrt{16k^2+16b}\cdot|2k^2+2b|=4\sqrt{(k^2+b)^3}=4\sqrt{\left[\frac{1-(b-3)^2}{4}+b\right]^3}=4\sqrt{\left(\frac{-b^2+10b-8}{4}\right)^3}$，

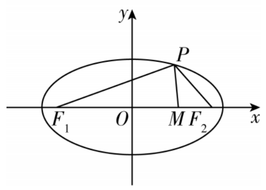
其中 $y_P=-b\in[-4,-2]$，即 $b\in[2,4]$.

当 $b=4$ 时，$(S_{\triangle PAB})_{\max}=32$.

5.【解】(1)由题意可知，$c=\sqrt{3}$，$2a=4$，$a=2$，

所以 $b=\sqrt{a^2-c^2}=1$，所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)如图，设 $P(x,y)$，则 $x\in[-2,2]$，



因为存在实数 λ 使得 $|PF_1|+|PF_2|=\lambda|PM|$，即 $\lambda|PM|=|PF_1|+|PF_2|=2a=4$，

可得 $\lambda=\frac{4}{|PM|}=\frac{4}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=\frac{4}{\sqrt{(x-1)^2+1-\frac{x^2}{4}}}=\frac{4}{\sqrt{\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}}}$，$x\in[-2,2]$，

又 $\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\in\left[\frac{2}{3},9\right]$，则 $\sqrt{\frac{3}{4}\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+\frac{2}{3}}\in\left[\frac{\sqrt{6}}{3},3\right]$，可得 $\lambda\in\left[\frac{4}{3},2\sqrt{6}\right]$，

所以 λ 的取值范围为 $\left[\frac{4}{3},2\sqrt{6}\right]$.

6.【解】(1)因为 $E:\frac{x^2}{2}+y^2=1$，所以 $a^2=2$，$b^2=1$，$c^2=a^2-b^2=1$，

所以 $|OF_1|=1\Rightarrow|DF_1|=|DO|-|OF_1|=1$，易得 $D(-2,0)$，可设 $l:x=my-2$，

由题意可知 $m\neq0$，联立 $\begin{cases}x=my-2,\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消元得 $(m^2+2)y^2-4my+2=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

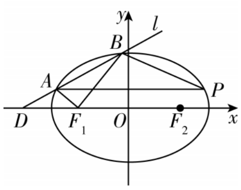
则 $\Delta=16m^2-8(m^2+2)>0\Rightarrow m^2>2$，且 $y_1+y_2=\frac{4m}{m^2+2}$，$y_1y_2=\frac{2}{m^2+2}$，

所以 $\triangle ABF_1$ 的面积 $S=|S_{\triangle BDF_1}-S_{\triangle ADF_1}|=\frac{1}{2}|DF_1|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4m}{m^2+2}\right)^2-\frac{4\times2}{m^2+2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8m^2-16}{(m^2+2)^2}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{m^2-2}{(m^2+2)^2}}$.

令 $t=m^2-2>0$，则 $S=\sqrt{2}\sqrt{\frac{t}{(t+4)^2}}=\sqrt{2}\sqrt{\frac{1}{t+8+\frac{16}{t}}}\leqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2\sqrt{t\cdot\frac{16}{t}}+8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

当且仅当 $t=\frac{16}{t}=4$，即 $m^2=6$，$m=\pm\sqrt{6}$ 时(此时适合 $m^2>2$ 的条件)等号成立. 故 $\triangle ABF_1$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

(2)设椭圆上存在满足条件的点 $P(x_0,y_0)$，定值 $k_1\cdot k_2=\lambda$，如图，由(1)知 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，



所以 $k_1=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$，$k_2=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}$，

$k_1\cdot k_2=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}\cdot\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}=\frac{y_1y_2-(y_1+y_2)y_0+y_0^2}{x_1x_2-(x_1+x_2)x_0+x_0^2}$，由 A，B 在直线 l 上，

所以 $x_1x_2=(my_1-2)(my_2-2)=m^2y_1y_2-2m(y_1+y_2)+4=\frac{8-2m^2}{m^2+2}$，$x_1+x_2=m(y_1+y_2)-4=\frac{-8}{m^2+2}$，

所以 $k_1\cdot k_2=\frac{\frac{2}{m^2+2}-\frac{4m}{m^2+2}y_0+y_0^2}{\frac{8-2m^2}{m^2+2}+\frac{8x_0}{m^2+2}+x_0^2}$
$=\frac{2-4my_0+y_0^2(m^2+2)}{8-2m^2+8x_0+x_0^2(m^2+2)}$
$=\frac{2-4my_0+y_0^2(m^2+2)}{(x_0^2-2)m^2+8(1+x_0)+2x_0^2}=\lambda$.

当 $x_0^2=2$，$x_0=\pm\sqrt{2}$，$y_0=0$ 时，该等式成立与 m 的取值无关，

此时 $\lambda=\frac{2}{8(1\pm\sqrt{2})+4}=\frac{3\pm2\sqrt{2}}{2}$，故椭圆上满足条件的点 P 存在，$P(-\sqrt{2},0)$ 对应 $k_1\cdot k_2=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$ 或 $P(\sqrt{2},0)$ 对应 $k_1\cdot k_2=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$.

刷上分

1.(1)【解】设椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ $(m>0,n>0)$，

因为椭圆 C 经过点 $A(-2,0)$ 与点 $B\left(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

所以 $\begin{cases}\frac{4}{m}=1,\\ \frac{2}{m}+\frac{\frac{1}{2}}{n}=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=4,\\ n=1,\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)(ⅰ)【证明】由(1)知，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

不妨令 M 在 x 轴上方，

则 $k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{y_1y_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=-1$①，

当直线 l 的斜率不存在时，

提示：易忽略此条件

设直线 l 的方程为 $x=n$，

联立方程 $\begin{cases}x=n,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 可得 $y=\pm\frac{\sqrt{4-n^2}}{2}$，

代入①中，解得 $n=-\frac{6}{5}$ 或 $n=-2$(舍去)，

所以直线 l 的方程为 $x=-\frac{6}{5}$.

当直线 l 的斜率存在时，设直线 l 的方程为 $y=kx+m$，

联立方程 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+1}$②，$x_1x_2=\frac{4(m^2-1)}{4k^2+1}$③，

由 $k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=-1$，

可得 $(k^2+1)x_1x_2+(km+2)(x_1+x_2)+m^2+4=0$，

将②③代入上式，解得 $m=\frac{6}{5}k$ 或 $m=2k$，

所以直线 l 的方程为 $y=kx+\frac{6}{5}k$ 或 $y=kx+2k$，

所以直线 l 恒过点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$ 或点 $(-2,0)$(舍去).

综上，直线 l 恒过定点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$.

(ⅱ)【解】由上述可知，当直线 l 的斜率不存在时，$M\left(-\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$，

设定点 $\left(-\frac{6}{5},0\right)$ 为点 D，则 $|AD|=\frac{4}{5}$，

所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{8}{5}=\frac{16}{25}$；

当直线 l 的斜率存在时，$m=\frac{6}{5}k$，则设 l 的方程为 $x=ty-\frac{6}{5}(t\neq0)$，

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x=ty-\frac{6}{5},\end{cases}$ 得 $(t^2+4)y^2-\frac{12}{5}ty-\frac{64}{25}=0$，

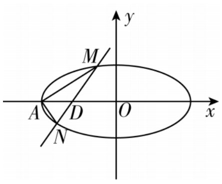
则 $y_1+y_2=\frac{12t}{5(t^2+4)}$，$y_1y_2=\frac{-64}{25(t^2+4)}$，

所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{8\sqrt{25t^2+64}}{25(t^2+4)}$，

设 $u=\sqrt{25t^2+64}$，则 $u>8$，

所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{8}{25}\times\frac{u}{\frac{u^2-64}{25}+4}=\frac{8}{u+\frac{36}{u}}$，

由函数 $y=u+\frac{36}{u}$ 在 $(8,+\infty)$ 上单调递增知 $u+\frac{36}{u}>8+\frac{9}{2}=\frac{25}{2}$，



所以 $S_{\triangle AMN}<\frac{8}{\frac{25}{2}}=\frac{16}{25}$.

综上，$\triangle AMN$ 的面积的最大值为 $\frac{16}{25}$.

归纳总结 椭圆中的范围或定值问题，一般设交点坐标为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，设出直线方程为 $y=kx+b$（或 $x=my+t$），代入椭圆方程应用根与系数关系得 x_1+x_2，x_1x_2（或 y_1+y_2，y_1y_2），然后用两交点坐标表示出要求范围或定值的量，如果是范围则可转化为关于其中某个参数（两个参数时需要由条件寻找参数间关系）的函数，然后由函数的性质或不等式的知识求得范围．如果是定值，则代入后化简可得定值．

2. (1)【解】由长轴长为 $4\sqrt{2}$，可得 $2a=4\sqrt{2}$，$a=2\sqrt{2}$.

因为点 P 为上顶点，直线 PF_2 的倾斜角为 $135°$，

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle OPF_2$ 中，$\angle OF_2P=45°$，则 $|OP|=|OF_2|=b=c$，

又 $b^2+c^2=a^2=8$，则 $b=c=2$.

因为 $k_{PF_2}=\tan 135°=-1$，$P(0,2)$，

所以直线 PF_2 的方程为 $y=-x+2$.

椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

(2)【证明】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由(1)知，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，

则 B 关于原点的对称点 $B'(x_3,y_3)$，

即 $\begin{cases}x_3=-x_2,\\ y_3=-y_2.\end{cases}$

由 $AF_1/\!/BF_2$，得 $\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{-y_3}{-x_3+2}$，

所以 A，F_1，B' 三点共线，又 $\triangle BOF_2\cong\triangle B'OF_1$，所以 $|BF_2|=|B'F_1|$，

则 $\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_2|}=\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|B'F_1|}=\frac{|AB'|}{|AF_1||B'F_1|}$，

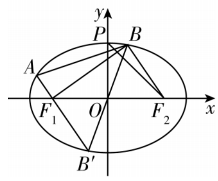
设直线 AB'：$x=my-2$，代入椭圆方程得 $(m^2+2)y^2-4my-4=0$，则有 $\Delta=32(m^2+1)>0$，$y_1+y_3=\frac{4m}{m^2+2}$，$y_1y_3=-\frac{4}{m^2+2}$.

故 $|AB'|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_3|=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{4\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}=\frac{4\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$，

$|AF_1||B'F_1|=\sqrt{m^2+1}|y_1|\sqrt{m^2+1}|y_3|=(m^2+1)\frac{4}{m^2+2}$，

所以 $\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_2|}=\frac{|AB'|}{|AF_1||B'F_1|}=\frac{\frac{4\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}}{\frac{4(m^2+1)}{m^2+2}}=\sqrt{2}$.

(3)【解】如图，由题意知四边形 ABF_2F_1 为梯形，设 h 为 F_2 到直线 AB' 的距离，



则 $h=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$，

$|AF_1|+|BF_2|=|AF_1|+|B'F_1|=|AB'|=\frac{4\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$，

所以 $S=\frac{1}{2}(|AF_1|+|BF_2|)h=\frac{8\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$.

令 $t=\sqrt{m^2+1}(t\geq1)$，则 $t^2+1=m^2+2$，

换元法求最值

则 $S=8\sqrt{2}\frac{t}{t^2+1}=8\sqrt{2}\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\leq4\sqrt{2}$（当且仅当 $t=1$，即 $m=0$ 时等号成立），又 $S>0$，所以 S 的取值范围为 $(0,4\sqrt{2}]$.

关键点拨 本题的关键是设 B 关于原点的对称点 $B'(x_3,y_3)$，进而由平行关系判断 A，F_1，B' 三点共线，设 AB'：$x=my-2$，再由根与系数的关系可得 $y_1+y_3=\frac{4m}{m^2+2}$，$y_1y_3=-\frac{4}{m^2+2}$，从而计算 $\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_2|}$ 可得结果；

在求 $S=\frac{8\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$ 的范围的时候，通过换元利用基本不等式可求最大值.

专题 13　计数原理

考向 48　两个计数原理与排列组合

刷考点

1. A 【解析】第一步，从 0，1，2，3，4，5，6 这 7 个数中任选 5 个共有 C_7^5 种方法；
第二步，选出的 5 个数中，最小的为 a_3，从剩下的 4 个数中选出 2 个分给 a_1，a_2，由题意可知，选出后 a_1，a_2，a_4，a_5 就确定了，共有 C_4^2 种方法.
故满足条件的“五位凹数”有 $C_7^5C_4^2=126$（个）. 故选 A.

2. 19 【解析】满足条件的分配方案可分为三类，第一类，每人 2 块；第二类，两人 3 块，两人 1 块；第三类，一人 3 块，一人 1 块，两人 2 块. 则第一类的分配方案有 1 种，第二类的分配方案有 C_4^2 种，即 6 种，第三类的分配方案有 $C_4^2C_2^1$ 种，即 12 种，故满足条件的分配方案共有 $1+6+12=19$ 种.

3. D 【解析】按甲的安排进行分类讨论. ①甲排第一，则乙、丙等四人有 $A_4^4=24$（种）排法；②甲排第二，则乙、丙排后 3 位中的两位，有 $A_3^2A_2^2=12$（种）排法；③甲排第三，则乙、丙排最后 2 位，有 $A_2^2\times A_2^2=4$（种）排法. 故共有 $24+12+4=40$（种）排法. 故选 D.

4. D 【解析】若甲、乙两车停泊在同一排，丙、丁两车停泊在同一排，则有 $2A_4^2\cdot A_4^2$ 种方案；
若丙、丁选一辆与甲、乙停泊在同一排，另一辆单独一排，则有 $2C_2^1\cdot A_4^3\cdot A_4^1$ 种方案，所以共有 $2A_4^2\cdot A_4^2+2C_2^1\cdot A_4^3\cdot A_4^1=672$（种）停车方案. 故选 D.

5. D 【解析】若数学只能排在第一节或者最后一节，则数学的排法有 2 种，物理和化学必须排在相邻的两节，将物理和化学捆绑，与语文、英语、生物学三门课程进行排序，有 $A_2^2A_4^4=48$（种）排法.
易错点：捆绑法解决相邻问题时，一定要考虑捆绑内部是否有顺序
由分步乘法计数原理可知，共有 $2\times48=96$（种）不同的排法. 故选 D.

6. D 【解析】由于环状排列没有首尾之分，