（ⅱ）【解】由上述可知，当直线 l 的斜率不存在时，$M\left(-\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$，

设定点$\left(-\frac{6}{5},0\right)$为点 D，则$|AD|=\frac{4}{5}$，

所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\frac{8}{5}=\frac{16}{25}$；

当直线 l 的斜率存在时，$m=\frac{6}{5}k$，则设 l 的方程为 $x=ty-\frac{6}{5}(t\neq0)$，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1,\\ x=ty-\frac{6}{5},\end{cases}$得$(t^2+4)y^2-\frac{12}{5}ty-\frac{64}{25}=0$，

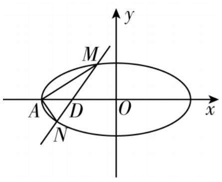
则 $y_1+y_2=\frac{12t}{5(t^2+4)}$，$y_1y_2=\frac{-64}{25(t^2+4)}$，

所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}\times\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{8\sqrt{25t^2+64}}{25(t^2+4)}$，

设 $u=\sqrt{25t^2+64}$，则 $u>8$，

所以 $S_{\triangle AMN}=\frac{8}{25}\times\frac{u}{\frac{u^2-64}{25}+4}=\frac{8}{u+\frac{36}{u}}$，

由函数 $y=u+\frac{36}{u}$ 在 $(8,+\infty)$ 上单调递增知 $u+\frac{36}{u}>8+\frac{9}{2}=\frac{25}{2}$，



所以 $S_{\triangle AMN}<\frac{8}{\frac{25}{2}}=\frac{16}{25}$.

综上，$\triangle AMN$ 的面积的最大值为$\frac{16}{25}$.

归纳总结 椭圆中的范围或定值问题，一般设交点坐标为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，设出直线方程为 $y=kx+b$（或 $x=my+t$），代入椭圆方程应用根与系数关系得 x_1+x_2，x_1x_2（或 y_1+y_2，y_1y_2），然后用两交点坐标表示出要求范围或定值的量，如果是范围则可转化为关于其中某个参数（两个参数时需要由条件寻找参数间关系）的函数，然后由函数的性质或不等式的知识求得范围．如果是定值，则代入后化简可得定值．

2.（1）【解】由长轴长为 $4\sqrt{2}$，可得 $2a=4\sqrt{2}$，$a=2\sqrt{2}$．

因为点 P 为上顶点，直线 PF_2 的倾斜角为 $135°$，

所以在 $\text{Rt}\triangle OPF_2$ 中，$\angle OF_2P=45°$，则 $|OP|=|OF_2|=b=c$，

又 $b^2+c^2=a^2=8$，则 $b=c=2$.

因为 $k_{PF_2}=\tan 135°=-1$，$P(0,2)$，

所以直线 PF_2 的方程为 $y=-x+2$.

椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

（2）【证明】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由（1）知，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，

则 B 关于原点的对称点 $B'(x_3,y_3)$，

即$\begin{cases}x_3=-x_2,\\ y_3=-y_2.\end{cases}$

由 $AF_1/\!/BF_2$，得$\frac{y_1}{x_1+2}=\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{-y_3}{-x_3+2}$，

所以 A，F_1，B' 三点共线，又 $\triangle BOF_2\cong\triangle B'OF_1$，所以$|BF_2|=|B'F_1|$，

则$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_2|}=\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|B'F_1|}=\frac{|AB'|}{|AF_1||B'F_1|}$，

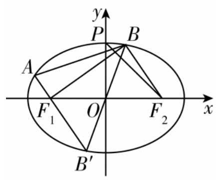
设直线 AB'：$x=my-2$，代入椭圆方程得 $(m^2+2)y^2-4my-4=0$，则有 $\Delta=32(m^2+1)>0$，$y_1+y_3=\frac{4m}{m^2+2}$，$y_1y_3=-\frac{4}{m^2+2}$.

故$|AB'|=\sqrt{1+m^2}|y_1-y_3|=\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{4\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}=\frac{4\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$，

$|AF_1||B'F_1|=\sqrt{m^2+1}|y_1|\sqrt{m^2+1}|y_3|=(m^2+1)\frac{4}{m^2+2}$，

所以$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_2|}=\frac{|AB'|}{|AF_1||B'F_1|}=\frac{\frac{4\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}}{\frac{4(m^2+1)}{m^2+2}}=\sqrt{2}$.

（3）【解】如图，由题意知四边形 ABF_2F_1 为梯形，设 h 为 F_2 到直线 AB' 的距离，



则 $h=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$，

$|AF_1|+|BF_2|=|AF_1|+|B'F_1|=|AB'|=\frac{4\sqrt{2}(m^2+1)}{m^2+2}$，

所以 $S=\frac{1}{2}(|AF_1|+|BF_2|)h=\frac{8\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$.

令 $t=\sqrt{m^2+1}(t\geq1)$，则 $t^2+1=m^2+2$，

换元法求最值

则 $S=8\sqrt{2}\frac{t}{t^2+1}=8\sqrt{2}\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\leq4\sqrt{2}$（当且仅当 $t=1$，即 $m=0$ 时等号成立），又 $S>0$，所以 S 的取值范围为$(0,4\sqrt{2}]$.

关键点拨 本题的关键是设 B 关于原点的对称点 $B'(x_3,y_3)$，进而由平行关系判断 A，F_1，B' 三点共线，设 AB'：$x=my-2$，再由根与系数的关系可得 $y_1+y_3=\frac{4m}{m^2+2}$，$y_1y_3=-\frac{4}{m^2+2}$，从而计算$\frac{1}{|AF_1|}+\frac{1}{|BF_2|}$可得结果；

在求 $S=\frac{8\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}}{m^2+2}$的范围的时候，通过换元利用基本不等式可求最大值．

专题 13　计数原理

考向 48　两个计数原理与排列组合

刷考点

1. A 【解析】第一步，从 0，1，2，3，4，5，6 这 7 个数中任选 5 个共有 C_7^5 种方法；

第二步，选出的 5 个数中，最小的为 a_3，从剩下的 4 个数中选出 2 个分给 a_1，a_2，由题意可知，选出后 a_1，a_2，a_4，a_5 就确定了，共有 C_4^2 种方法.

故满足条件的“五位凹数”有 $C_7^5C_4^2=126$（个）．故选 A.

2. 19 【解析】满足条件的分配方案可分为三类，第一类，每人 2 块；第二类，两人 3 块，两人 1 块；第三类，一人 3 块，一人 1 块，两人 2 块．则第一类的分配方案有 1 种，第二类的分配方案有 C_4^2 种，即 6 种，第三类的分配方案有 $C_4^2C_2^1$ 种，即 12 种，故满足条件的分配方案共有 1+6+12=19 种.

3. D 【解析】按甲的安排进行分类讨论．①甲排第一，则乙、丙等四人有 $A_4^4=24$（种）排法；②甲排第二，则乙、丙排后 3 位中的两位，有 $A_3^2A_2^2=12$（种）排法；③甲排第三，则乙、丙排最后 2 位，有 $A_2^2\times A_2^2=4$（种）排法．故共有 24+12+4=40（种）排法．故选 D.

4. D 【解析】若甲、乙两车停泊在同一排，丙、丁两车停泊在同一排，则有$2A_4^2\cdot A_4^2$ 种方案；

若丙、丁选一辆与甲、乙停泊在同一排，另一辆单独一排，则有 $2C_2^1\cdot A_4^3\cdot A_4^1$ 种方案，所以共有$2A_4^2\cdot A_4^2+2C_2^1\cdot A_4^3\cdot A_4^1=672$（种）停车方案．故选 D.

5. D 【解析】若数学只能排在第一节或者最后一节，则数学的排法有 2 种，物理和化学必须排在相邻的两节，将物理和化学捆绑，与语文、英语、生物学三门课程进行排序，有 $A_2^2A_4^4=48$（种）排法.

易错点：捆绑法解决相邻问题时，一定要考虑捆绑内部是否有顺序

由分步乘法计数原理可知，共有 2×48=96（种）不同的排法．故选 D.

6. D 【解析】由于环状排列没有首尾之分，

将 n 个不同元素围成的环状排列剪开看成 n 个元素排成一排,共有 A_n^n 种排法,由于 n 个不同元素共有 n 种不同的剪法,则环状排列共有 $\frac{A_n^n}{n}=A_{n-1}^{n-1}$ 种排法. 甲、乙两人相邻而坐,可将此 2 人当作 1 人,即 5 人围成一圈,有 A_4^4 种排法,又因为甲、乙两人可换位,有 A_2^2 种排法,故所求排法共有 $A_4^4A_2^2=48$(种). 故选 D.

7. B 【解析】由题意知可将 1,4 当成一个整体,和 0,3 共有 A_3^3 种排法,再根据插空法将不相邻的两个 2 插进去,总排法有 $A_3^3\cdot A_2^2C_4^2=72$(种). 故选 B.

8. C 【解析】8 个除颜色外完全相同的球,要使红球互不相邻,则最多有 4 个红球,根据红球个数分类讨论:

1 个红球 7 个黑球:先排 7 个黑球共有 1 种排法,从 8 个空里面选出 1 个空让红球插入,有 $C_8^1=8$(种)选法;

2 个红球 6 个黑球:先排 6 个黑球共有 1 种排法,从 7 个空里面选出 2 个空让红球插入,有 $C_7^2=21$(种)选法;

3 个红球 5 个黑球:先排 5 个黑球共有 1 种排法,从 6 个空里面选出 3 个空让红球插入,有 $C_6^3=20$(种)选法;

4 个红球 4 个黑球:先排 4 个黑球共有 1 种排法,从 5 个空里面选出 4 个空让红球插入,有 $C_5^4=5$(种)选法.

所以满足条件的不同排列方法的总数为 $8+21+20+5=54$.

故选 C.

9. D 【解析】先将“相声”与“小品”排在一起,有 A_2^2 种排法,再与其他 4 个节目排序,有 A_5^5 种排法,最后考虑“杂技节目”在前三位或在后三位情况一样,所以有 $\frac{A_2^2A_5^5}{2}=120$(种)不同的演出方案. 故选 D.

10. A 【解析】不考虑限制条件共有 A_6^6 种方法,B 最先汇报共有 A_5^5 种方法,如果 B 不能最先汇报,而 A,C,D 按先后顺序汇报(不一定相邻),那么共有 $\frac{A_6^6-A_5^5}{A_3^3}=100$(种)汇报安排.

11. B 【解析】5 名新教师按 3∶1∶1分组有 C_5^3 种分法,按 2∶2∶1分组有 $\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}$ 种分法,因此 5 名新教师的安排方案有 $\left(C_5^3+\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\right)A_3^3$ 种.

当甲、乙在同一组时,甲、乙可视为 1 个人,即相当于 4 名教师的安排方案,有 $C_4^2A_3^3$ 种,所以所求的不同安排方案有 $\left(C_5^3+\frac{C_5^2C_3^2}{A_2^2}\right)A_3^3-C_4^2A_3^3=25\times6-6\times6=114$(种). 故选 B.

方法总结 在排列组合的分组分配问题中注意完全平均分组和部分平均分组以及不平均分组的区别.

12. 540 【解析】(1)若按照 1∶1∶4 进行分配,则有 $C_6^4\times A_3^3=90$(种)分配方法;

(2)若按照 1∶2∶3 进行分配,则有 $C_6^3C_3^2\times A_3^3=360$(种)分配方法;

(3)若按照 2∶2∶2 进行分配,则有 $\frac{C_6^2C_4^2}{A_3^3}\times A_3^3=90$(种)分配方法.

易错点:平均分配有重复,注意消除重复

由分类加法计数原理得,共有 $90+360+90=540$(种)分配方法.

13. A 【解析】在编号为 2 和 3 的盒内分别放入 1 个小球和 2 个小球,还剩 17 个小球. 由题知三个盒内每个至少再放入 1 个小球,将 17 个小球排成一排,中间有 16 个空隙,插入 2 块隔板分成三堆放入三个盒中即可,共有 $C_{16}^2=120$(种)放法. 故选 A.

14. 60 【解析】先将卡片分为符合条件的三份,由题意知,三人分六张卡片,且每人至少一张,至多四张,若分得的卡片超过一张,则必须是连号,相当于将 1,2,3,4,5,6 这六个数用两个隔板隔开,在五个空位插上两个隔板,共 $C_5^2=10$(种)情况,再对应到三个人有 $A_3^3=6$(种)情况,则共有 $10\times6=60$(种)分法.

15. B 【解析】按照 A 场地安排人数,可以分以下两类:

第一类,A 场地安排 1 人,共 $C_3^1C_2^2A_2^2=18$(种)安排方法;

第二类,A 场地安排 2 人,共 $C_3^2A_2^2=6$(种)安排方法,

由分类加法计数原理得,共有 $18+6=24$(种)不同的安排方法.

故选 B.

16. 150 【解析】由题意得,三个学校可分得的志愿者人数分别为 3,1,1 或 2,2,1.

当三个学校分得的志愿者人数分别为 3,1,1 时,分配方案有 $C_5^3A_3^3=60$(种);

当三个学校分得的志愿者人数分别为 2,2,1 时,分配方案有 $\frac{C_5^2C_3^2C_1^1}{A_2^2}A_3^3=90$(种).

综上,不同的分配方案有 $60+90=150$(种).

17. C 【解析】由题意,将上色情况相同的棋子所在棋盘格用同一个序号表示,则棋盘内最多出现三种情况.

第一种情况:6 个格子分为 3+3 的两类,如表所示,

①	②	①
②	①	②

只用两种颜色,并选取两个位置放 A,B,其余位置放 C,D,E,F,此时有 $A_3^2(C_3^2+C_3^2)\cdot A_2^2\cdot A_4^4=36\cdot A_2^2\cdot A_4^4$(种).

第二种情况:6 个格子分为 3+2+1 的三类,如表所示,

①	③	②
③	②	③

选用三种颜色,且只用一次的颜色放在拐角,并选取两个位置放 A,B,其余位置放 C,D,E,F,此时有 $C_4^1\cdot A_3^3\cdot(C_3^2+C_2^2)\cdot A_2^2\cdot A_4^4=96\cdot A_2^2\cdot A_4^4$(种),或

③	①	③
②	③	②

选用三种颜色,且只用一次的颜色放在中间,并选取两个位置放 A,B,其余位置放 C,D,E,F,此时有 $C_2^1\cdot A_3^3\cdot(C_3^2+C_2^2)\cdot A_2^2\cdot A_4^4=48\cdot A_2^2\cdot A_4^4$(种).

第三种情况:6 个格子分为 2+2+2 的三类,如表所示,

①	③	②
②	①	③

选用三种颜色,并选取两个位置放 A,B,其余位置放 C,D,E,F,此时有 $A_3^3\cdot C_3^1\cdot A_2^2\cdot A_4^4=18\cdot A_2^2\cdot A_4^4$(种),或

①	②	③
②	③	①

选用三种颜色,并选取两个位置放 A,B,其余位置放 C,D,E,F,此时有 $A_3^3\cdot C_3^1\cdot A_2^2\cdot A_4^4=18\cdot A_2^2\cdot A_4^4$(种). 所以不同的放置与上色方式有 $(36+96+48+18+18)\cdot A_2^2\cdot A_4^4=10\ 368$(种).

故选 C.

18. 630 【解析】根据题意,只需确定区域 1,2,3,4 的颜色,即可确定整个伞面的涂色.

先涂区域 1,有 6 种选择,再涂区域 2,有 5 种选择,

当区域 3 与区域 1 涂的颜色不同时,区域 3 有 4 种选择,剩下的区域 4 有 4 种选择;

当区域 3 与区域 1 涂的颜色相同时,剩下的区域 4 有 5 种选择.

故不同的涂色方案有 $6\times5\times(4\times4+5)=630$(种).

考向 49 二项式定理

刷考点

1. D 【解析】由题可得展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^rx^{6-r}(-2y)^r$,$T_3=C_6^2x^4(-2y)^2=60x^4y^2$,故 $(x-2y)^6$ 的展开式中 x^4y^2 的系数为 60. 故选 D.

2. B 【解析】$(x+1)^n=(1+x)^n$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_n^rx^r$,因为 $\frac{(x+1)^n}{x}$ 的展开式中 x 的系数为 21,所以令 $r=2$,则 $C_n^2=21$,解得 $n=7$,故选 B.

3. AD 【解析】$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(\sqrt{x})^{6-r}\left(-\frac{1}{2x}\right)^r=C_6^r x^{3-\frac{1}{2}r}\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{-r}=C_6^r\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{3-\frac{3}{2}r}$,

令 $3-\frac{3}{2}r=0$,得 $r=2$,

则常数项为 $C_6^2\left(-\frac{1}{2}\right)^2=15\times\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$,故 A 正确,B 错误;

当 $r=0,2,4,6$ 时,对应项为有理项,

所以展开式中有理项有 4 项,故 C 错误,D 正确.

故选 AD.

4. 60 【解析】$\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_6^k x^{6-k}\left(\frac{2}{x^2}\right)^k=C_6^k 2^k x^{6-3k}$,

令 $6-3k=0$,得 $k=2$,则 $T_3=C_6^2 2^2 x^0=60$,

即在 $\left(x+\frac{2}{x^2}\right)^6$ 的展开式中,常数项为 60.

5. B 【解析】$(3x-y)(2x+y)^5=3x(2x+y)^5-y(2x+y)^5$,

而 $(2x+y)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(2x)^{5-r}y^r$,

所以当 $r=3$ 时,x^3y^3 的系数为 $3\times C_5^3 2^2=120$,

当 $r=2$ 时,x^3y^3 的系数为 $-1\times C_5^2 2^3=-80$,

所以 x^3y^3 的系数为 $120-80=40$.

6. B 【解析】因为 $(2+x)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_4^r\times 2^{4-r}x^r$,

所以 $(1-ax)(2+x)^4(a\in\mathbf{R})$ 的展开式中 x^3 的系数为 $1\times C_4^3\times 2^1-a\cdot C_4^2\times 2^2=-40$,解得 $a=2$,故选 B.

7. A 【解析】因为 $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-r}\cdot(-2)^r(0\leqslant r\leqslant 8,r\in\mathbf{N})$,

令 $r=2$,得 $2x^3C_8^r\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-r}(-2)^r=2x^3C_8^2x^{-3}\cdot(-2)^2=224$,

令 $r=8$,得 $-2C_8^r\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{8-r}(-2)^r=-2C_8^8(-2)^8=-512$,

所以 $(2x^3-2)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-2\right)^8$ 的展开式中的常数项为 $-512+224=-288$.

故选 A.

8. A 【解析】由题意,$\left(2x-\frac{a}{x}\right)^6$ 的通项为 $T_{r+1}=C_6^r(2x)^{6-r}\cdot\left(-\frac{a}{x}\right)^r=C_6^r2^{6-r}\cdot(-a)^rx^{6-2r}$,令 $6-2r=0$,则 $r=3$,

令 $6-2r=-1$,则 $r=\frac{7}{2}$,不符合题意,所以 $(x-1)\left(2x-\frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式中,常数项为 $-C_6^3 2^3(-a)^3=-1\,280$,解得 $a=-2$. 故选 A.

9. A 【解析】$(3x+1)^3\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=(3x+1)^3\cdot\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)=(3x+1)^3\cdot x^2-2(3x+1)^3+(3x+1)^3\cdot\frac{1}{x^2}$,

易知 $(3x+1)^3\cdot x^2$ 的展开式中没有 x 项;

因为 $-2(3x+1)^3$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=-2C_3^k(3x)^{3-k}$,令 $3-k=1$,得 $k=2$,所以 $-2(3x+1)^3$ 的展开式中 x 的系数为 $-2C_3^2 3^{3-2}=-18$;

又因为 $(3x+1)^3\cdot\frac{1}{x^2}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1}=C_3^k(3x)^{3-k}\frac{1}{x^2}=C_3^k3^{3-k}x^{1-k}$,令 $1-k=1$,得 $k=0$,所以 $(3x+1)^3\cdot\frac{1}{x^2}$ 的展开式中 x 的系数为 $C_3^0 3^{3-0}=27$.

综上,在 $(3x+1)^3\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ 的展开式中,x 的系数为 $-18+27=9$. 故选 A.

10. D 【解析】$\left(x-\frac{1}{x}+2\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r\left(x-\frac{1}{x}\right)^{5-r}\cdot 2^r=2^rC_5^rC_{5-r}^m x^{5-r-m}\cdot(-1)^m\cdot x^{-m}=2^rC_5^rC_{5-r}^m x^{5-r-2m}\cdot(-1)^m$,

令 $5-r-2m=2$,即 $r+2m=3$,

当 $r=1,m=1$ 时,x^2 的系数为 $2^1C_5^1C_4^1\cdot(-1)=-40$;

当 $r=3,m=0$ 时,x^2 的系数为 $2^3C_5^3C_2^0\cdot(-1)^0=80$,

所以 x^2 的系数为 $80-40=40$.

故选 D.

11. D 【解析】$\left(x^2-\frac{1}{x}+y\right)^6=\sum\limits_{i=0}^{6}C_6^i\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{6-i}y^i$,

xy 项对应 $i=1$,$C_6^1\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{6-1}$

$=C_6^1\left[\sum\limits_{r=0}^{5}C_5^r x^{2(5-r)}\left(-\frac{1}{x}\right)^r\right]$

$=6\left[\sum\limits_{r=0}^{5}C_5^r x^{10-3r}(-1)^r\right]$,

xy 项对应 $r=3$,其系数为 $6\times C_5^3(-1)^3=-60$,故 $\left(x^2-\frac{1}{x}+y\right)^6$ 的展开式中 xy 的系数为 -60. 故选 D.

12. A 【解析】$(x-2y+3z)^6$ 相当于 6 个因式 $(x-2y+3z)$ 相乘,其中一个因式取 x,有 C_6^1 种取法,余下 5 个因式中有 2 个取 $-2y$,有 C_5^2 种取法,最后 3 个因式中全部取 $3z$,有 C_3^3 种取法,故 $(x-2y+3z)^6$ 展开

巧思:运用组合的思想

式中 xy^2z^3 的系数为 $C_6^1\times1\times C_5^2\times(-2)^2\times C_3^3\times3^3=6\,480$. 故选 A.

13. B 【解析】由题意可得 $2^n=32$,即 $n=5$,则 $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_5^r(2\sqrt{x})^{5-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r=2^{5-r}\cdot(-1)^r\cdot C_5^r\cdot x^{\frac{5-3r}{2}}$,故 $T_2=2^4\cdot(-1)^1\cdot C_5^1\cdot x^{\frac{5-3\times1}{2}}=-80x$,即展开式中含 x 项的系数为 -80.

故选 B.

14. A 【解析】令 $x=1$,得 $(3-5+1)^5=-1$,所以 $(3x^3-5x^2+1)^5$ 的展开式中所有项的系数和为 -1.

提示:利用赋值法求所有项的系数和

$(3x^3-5x^2+1)^5$ 可以看成是 5 个因式 $(3x^3-5x^2+1)$ 相乘.

要得到 x^5 项,则 5 个因式中有 1 个因式取 $3x^3$,一个因式取 $-5x^2$,其余 3 个因式取 1,然后相乘可得,

所以 $(3x^3-5x^2+1)^5$ 的展开式中含 x^5 的项为 $C_5^1(3x^3)^1C_4^1\cdot(-5x^2)^1=-300x^5$,所以 $(3x^3-5x^2+1)^5$ 的展开式中,除 x^5 项之外,剩下所有项的系数之和为 $-1-(-300)=299$. 故选 A.

15. AC 【解析】根据二项式定理,$\left(2x-\frac{1}{x}\right)^8$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r2^{8-r}(-1)^rx^{8-2r}$,$r=0,1,2,\cdots,8$.

对于 A,令 $8-2r=0$,得 $r=4$,则常数项是 $C_8^42^4(-1)^4=1\,120$,故 A 正确;

对于 B,第四项的系数为 $C_8^32^{8-3}(-1)^3=-1\,792$,第六项的系数为 $C_8^52^{8-5}(-1)^5=-448$,故 B 错误;

对于 C,因为 $n=8$,所以各项的二项式系数之和为 $2^8=256$,故 C 正确;

对于 D,令 $x=1$,得各项的系数之和为 1,故 D 错误.

故选 AC.

16. ACD 【解析】令 $x=0$,得 $a_0=2^{2\,024}$.

对于 A,令 $x=1$,得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2\,024}=1$ ①,

令 $x=-1$,得 $a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{2\,024}=5^{2\,024}$ ②,

①−②得 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2\,023}=\frac{1-5^{2\,024}}{2}$,故 A 正确;

对于 B,$|a_0|+|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{2\,024}|=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{2\,024}$,由 A 得 $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{2\,024}=5^{2\,024}$,故 B 错误;

对于 C,令展开式中的 $x=\frac{1}{2}$,得 $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2\,024}}{2^{2\,024}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,024}$,所以 $\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\cdots+\frac{a_{2\,024}}{2^{2\,024}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\,024}-2^{2\,024}$,故 C 正确;

对于 D,对展开式的两边求导,得 $-3\times2\,024(2-3x)^{2\,023}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+$

$2\,023a_{2\,023}x^{2\,022}+2\,024a_{2\,024}x^{2\,023}$,

巧思：运用导数使 $a_n(n=1,2,\cdots,2\,024)$ 前出现对应的系数 n

令 $x=1$，得 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+2\,023a_{2\,023}+2\,024a_{2\,024}=6\,072$，故 D 正确.

故选 ACD.

17. B 【解析】由题知 $T_6=C_n^5(2x)^5$，$T_7=C_n^6(2x)^6$，所以 $C_n^5\cdot 2^5=C_n^6\cdot 2^6$，所以 $C_n^5=2C_n^6$，即 $\frac{n!}{(n-5)!\ 5!}=\frac{2\cdot n!}{6!\ (n-6)!}$，所以 $6=2(n-5)$，解得 $n=8$，所以二项式系数最大的项为 $T_5=C_8^4(2x)^4=1\,120x^4$. 故选 B.

18. D 【解析】因为二项展开式中只有第5项是二项式系数最大的项，即二项式系数 $C_n^0,C_n^1,\cdots,C_n^n$ 中第5个即 C_n^4 最大，所以由二项式系数的性质可知，展开式中共9项，$n=8$.

又 $\left(3\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^8=(3x^{\frac{1}{2}}-x^{-1})^8$，

所以 $(3x^{\frac{1}{2}}-x^{-1})^8$ 的二项展开式的通项为 $T_{r+1}=C_8^r(3x^{\frac{1}{2}})^{8-r}(-x^{-1})^r=C_8^r(-1)^r3^{8-r}x^{\frac{8-3r}{2}}$，$r=0,1,2,\cdots,8$.

令 $\frac{8-3r}{2}=-5$，得 $r=6$，所以 $\frac{1}{x^5}$ 的系数为 $C_8^6\cdot(-1)^6 3^2=9C_8^2=252$.

故选 D.

19. AD 【解析】$\left(x-\frac{1}{y}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_6^rx^{6-r}\cdot\left(-\frac{1}{y}\right)^r=(-1)^rC_6^rx^{6-r}y^{-r}$，

对于 A，取 $6-r=4$，则 $r=2$，故 x^4y^{-2} 的系数为 $(-1)^2C_6^2=15$，故 A 正确；

对于 B，因为 $\left(x-\frac{1}{y}\right)^6=\sum\limits_{r=0}^{6}(-1)^rC_6^rx^{6-r}y^{-r}$，所以令 $x=y=1$，得各项系数之和为 $\left(1-\frac{1}{1}\right)^6=0$，故 B 错误；

对于 C，$\left(x-\frac{1}{y}\right)^6$ 的二项式系数最大的项是第4项，故 C 错误；

对于 D，由展开式的通项可得，展开式中各项的系数依次为 $1,-6,15,-20,15,-6,1$，故系数最大项是第3项和第5项，故 D 正确. 故选 AD.

20. AD 【解析】对于 A，因为 $\left(x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中共有8项，所以 $n=7$，

故所有项的二项式系数和为 $2^7=128$，故 A 正确；

对于 B，令 $x=1$，可得所有项的系数和为 $\left(1+\frac{1}{2}\right)^7\neq\left(\frac{3}{2}\right)^8$，故 B 错误；

对于 C，因为二项展开式的通项为 $T_{r+1}=C_7^r\cdot x^{7-r}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot C_7^r\cdot x^{7-\frac{3r}{2}}$，$r=0,1,2,\cdots,7$，

所以当 $r\in\mathbf{N}^*$，$1\leqslant r\leqslant 6$ 时，设 T_{r+1} 项系数最大，

由 $\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot C_7^r\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{r-1}\cdot C_7^{r-1},\\ \left(\frac{1}{2}\right)^r\cdot C_7^r\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{r+1}\cdot C_7^{r+1},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}r\leqslant\frac{8}{3},\\ r\geqslant\frac{5}{3},\end{cases}$ 则 $r=2$，

故第3项的系数最大，故 C 错误.

对于 D，由 $7-\frac{3r}{2}$ 为整数，且 $r=0,1,2,\cdots,7$ 可知，r 的值可以为 $0,2,4,6$，所以二项展开式中，有理项共有4项，故 D 正确.

故选 AD.

21. A 【解析】$a=C_{20}^0+C_{20}^1\cdot2+C_{20}^2\cdot2^2+\cdots+C_{20}^{20}\cdot2^{20}=(1+2)^{20}=3^{20}=9^{10}=(10-1)^{10}$

$=C_{10}^0\cdot10^{10}+C_{10}^1\cdot10^9\cdot(-1)+C_{10}^2\cdot10^8\cdot(-1)^2+\cdots+C_{10}^{10}\cdot(-1)^{10}$

$=10[C_{10}^0\cdot10^9+C_{10}^1\cdot10^8\cdot(-1)+C_{10}^2\cdot10^7\cdot(-1)^2+\cdots+C_{10}^9\cdot(-1)^9]+1$，

即 a 被10除得的余数为1，结合选项可知只有 4 021 被 10 除得的余数为 1. 故选 A.

22. D 【解析】令 $x=0$，得 $a_0=1$，令 $x=1$，得 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2\,024}=2^{2\,024}$，

两式相减得 $a_1+a_2+\cdots+a_{2\,024}=2^{2\,024}-1=4^{1\,012}-1$，

因为 $4^{1\,012}=(3+1)^{1\,012}=C_{1\,012}^0 3^{1\,012}+C_{1\,012}^1 3^{1\,011}+\cdots+C_{1\,012}^{1\,011}3+C_{1\,012}^{1\,012}$，

其中 $C_{1\,012}^0 3^{1\,012}+C_{1\,012}^1 3^{1\,011}+\cdots+C_{1\,012}^{1\,011}3$ 能被3整除，

所以 $4^{1\,012}$ 被3除的余数为1，

综上，$a_1+a_2+\cdots+a_{2\,024}$ 能被3整除.

故选 D.

专题 14　概率与统计

考向 50　随机事件的概率及古典概型

刷考点

1. C 【解析】因为 $[-12,-4)$，$[-4,4)$，$[4,12)$ 内的频数和为 $25+35+20=80$，因此误差在 $[-12,12)$ 内的占 80%，结合题意知 $m=12$.

2. D 【解析】对于 A，试验中，出现的某种事件的频率总在一个固定的值的附近波动，并不是一个确定的值，一批产品次品率为0.05，则从中任取200件，次品的件数在10件左右，而不一定是10件，故 A 错误；

对于 B，100次并不是无穷多次，只能说明这100次试验中出现正面朝上的频率为 $\frac{51}{100}$，故 B 错误；

对于 C，根据定义，随机事件的频率只是概率的近似值，它并不等于概率，故 C 错误；

对于 D，频率为出现的次数与重复试验的次数的比值，抛掷骰子100次，得点数是6的结果有20次，则出现6点的频率是 $\frac{20}{100}=0.2$，故 D 正确.

故选 D.

3. B 【解析】设3个红球为 A,B,C，2个黑球为 a,b.

因为试验为“从中依次不放回地随机抽取出2个球”，

所以试验的样本空间 $\Omega=\{AB,BA,AC,CA,Aa,aA,Ab,bA,BC,CB,Ba,aB,Bb,bB,Ca,aC,Cb,bC,ab,ba\}$，

记事件 D 为“两次取到的球颜色相同”，则 $D=\{AB,BA,AC,CA,BC,CB,ab,ba\}$，由古典概型概率公式，可得 $P(D)=\frac{n(D)}{n(\Omega)}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$. 故选 B.

4. D 【解析】10个绳头，每个绳头只打一次结，且每个结仅含两个绳头，所有的打结方式有 $\frac{C_{10}^2C_8^2C_6^2C_4^2C_2^2}{A_5^5}=945$（种）.

其中恰好能围成一个圈的打结方式有 $C_8^1C_6^1C_4^1C_2^1=384$（种）.

所以5根绳子恰好能围成一个圈的概率为 $P=\frac{384}{945}=\frac{128}{315}$.

故选 D.

5. $\frac{64}{81}$ 【解析】用算筹随机摆出一个不含数字0的两位数，个位用纵式，十位用横式，共可以摆出 $9\times9=81$（个）两位数，

其中个位和十位上的算筹都为1，有 $1\times1=1$（个）；

个位和十位上的算筹都为2，有 $2\times2=4$（个）；

个位和十位上的算筹都为3，有 $2\times2=4$（个）；

个位和十位上的算筹都为4，有 $2\times2=4$（个）；

个位和十位上的算筹都为5，有 $2\times2=4$（个）.

故个位和十位上的算筹同样多的共有 $4+4+4+4+1=17$（个）.

所以个位和十位上算筹不一样多的概率为 $1-\frac{17}{81}=\frac{64}{81}$.