专题 1　集合与常用逻辑用语

考向 1　集合

刷考点

1. ABD 【解析】由 $2x^2-3x-5<0$,得 $(2x-5)\cdot(x+1)<0$,解得 $-1<x<\frac{5}{2}$,所以 $A=\{0,1,2\}$,易知 $0\in A$,故 A 正确;$-1\notin A$,故 B 正确;$A\subseteq\{0,1,2\}$,故 D 正确;集合 A 的真子集个数为 $2^3-1=7$,故 C 错误. 故选 ABD.

2. D 【解析】显然 $\pi\in\mathbf{R}$,$\varnothing\subseteq\{0\}$,故①③正确;

敲黑板:空集是任何一个集合的子集,是任何一个非空集合的真子集

$\{x|x^2-2\,025x+2\,024=0\}=\{x|(x-1)(x-2\,024)=0\}=\{1,2\,024\}$,故②正确;在 $y=x^2-x-2$ 中,当 $x=1$ 时,$y=-2$,即有 $(1,-2)\in\{(x,y)|y=x^2-x-2\}$,因此 $\{(1,-2)\}\subseteq\{(x,y)|y=x^2-x-2\}$,故④正确. 综上,真命题的个数是 4,故选 D.

3. B 【解析】因为 $x^2+y^2\le\sqrt{3}$,$x\in\mathbf{Z}$,所以 x 可取 $-1,0,1$. 当 $x=-1$ 时,原式为 $1+y^2\le\sqrt{3}$,又 $y\in\mathbf{Z}$,所以 $y=0$;当 $x=0$ 时,原式为 $y^2\le\sqrt{3}$,又 $y\in\mathbf{Z}$,所以 $y=-1$ 或 $y=0$ 或 $y=1$;当 $x=1$ 时,原式为 $1+y^2\le\sqrt{3}$,又 $y\in\mathbf{Z}$,所以 $y=0$. 所以 $A=\{(-1,0),(0,-1),(0,0),(0,1),(1,0)\}$,共有 5 个元素. 故选 B.

点悟:当集合为有限集且元素个数较少时,考虑将集合中的元素一一列举出来

4. B 【解析】∵ $S=\left\{x\middle|x=m+\frac{1}{12},m\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\middle|x=\frac{12m+1}{12},m\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\middle|x=\frac{4\times3m+1}{12},m\in\mathbf{Z}\right\}$,

$P=\left\{x\middle|x=\frac{n}{3}+\frac{1}{12},n\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\middle|x=\frac{4n+1}{12},n\in\mathbf{Z}\right\}$,

$Q=\left\{x\middle|x=\frac{k}{3}-\frac{1}{4},k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\middle|x=\frac{4k-3}{12},k\in\mathbf{Z}\right\}=\left\{x\middle|x=\frac{4n+1}{12},n\in\mathbf{Z}\right\}$,

∴ $S\subseteq P=Q$. 故选 B.

5. $\{0,-1,-4\}$ 【解析】集合 $A=\{x|4ax^2+4(a+2)x-1=0\}$ 表示关于 x 的方程 $4ax^2+4(a+2)x-1=0$ 的解集,

因为集合 A 中只有一个元素,

所以当 $4a=0$,即 $a=0$ 时,由方程解得 $x=\frac{1}{8}$,此时 $A=\left\{\frac{1}{8}\right\}$,符合题意;

当 $4a\ne0$ 时,$\Delta=16(a+2)^2+16a=0$,解得 $a=-1$ 或 $a=-4$,

当 $a=-1$ 时,$A=\left\{\frac{1}{2}\right\}$,当 $a=-4$ 时,$A=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$,符合题意.

综上可得,实数 a 的所有可能取值组成的集合为 $\{0,-1,-4\}$.

6. A 【解析】由题意可知 $-1\in B$,$(-1)^3=-1\in A$,$0\in B$,$0^3=0\in A$,所以 $A\cap B=\{-1,0\}$. 故选 A.

一题多解　由题意知 $A=\{x|-\sqrt[3]{5}<x<\sqrt[3]{5}\}$,又 $B=\{-3,-1,0,2,3\}$,则 $A\cap B=\{-1,0\}$,故选 A.

7. A 【解析】由题意可知 $\complement_UB=\{3,4\}$,所以 $A\cup(\complement_UB)=\{1,3,4\}$,故选 A.

一题多解　因为 $3\in A$,所以 $3\in A\cup(\complement_UB)$,故排除 C,D;又 $4\notin B$,所以 $4\in\complement_UB$,所以 $4\in A\cup(\complement_UB)$,故排除 B,故选 A.

8. C 【解析】因为 $A=\{x|\ln x<0\}=(0,1)$,$B=\left\{x\middle|\frac{1}{2}<3^x<2\right\}=\left(\log_3\frac{1}{2},\log_32\right)$,所以 $A\cup B=(-\log_32,1)$. 故选 C.

9. D 【解析】由 $x(x-3)>0$,得 $x<0$ 或 $x>3$,所以 $A=(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$,所以 $\complement_UA=\{x|0\le x\le3\}$.

因为 $\log_2(x-1)<2=\log_24$,所以 $0<x-1<4$,解得 $1<x<5$,所以 $B=\{x|1<x<5\}$.

题图中阴影部分是由在 B 中但不在 A 中的元素构成的集合,即 $B\cap\complement_UA=\{x|1<x\le3\}$. 故选 D.

10. C 【解析】由题知 $A=\{x|x=4k+1,k\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=2(2k+1)-1,k\in\mathbf{Z}\}$,

$B=\{x|x=4k-1,k\in\mathbf{Z}\}=\{x|x=2(2k+1)-3,k\in\mathbf{Z}\}$,

所以 $A\cup B=\{x|x=2k+1,k\in\mathbf{Z}\}$. 又 $C=\{x|x=2k,k\in\mathbf{Z}\}$,所以 $C=\complement_U(A\cup B)$. 故选 C.

11. B 【解析】集合 $A=\left\{x\middle|\left(\frac{1}{2}\right)^x<1\right\}=\{x|x>0\}$,集合 $B=\{x|\ln x>0\}=\{x|x>1\}$,所以 $\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x\le1\}$,$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x\le0\}$.

对于 A,$A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|0<x\le1\}$,故 A 错误;

对于 B,$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$,故 B 正确;

对于 C,$A\cap B=\{x|x>1\}$,故 C 错误;

对于 D,$(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=\{x|x\le0\}$,故 D 错误.

12. C 【解析】∵ $A=\{x|ax=2\}\subseteq\mathbf{N}$,$a$ 是整数,∴ A 中至多一个元素.

当 $A=\varnothing$ 时,$a=0$;

当 $A\ne\varnothing$ 时,$a=1,2$. ∴ $a\in\{0,1,2\}$.

易错点:对集合分空集和非空集两类进行讨论

故选 C.

13. B 【解析】$A=\{x|x^2-4\le0\}=\{x|-2\le x\le2\}$,

$B=\{x||x-a|<1\}=\{x|a-1<x<a+1\}$,

因为 $B\subseteq A$,

所以 $\begin{cases}a-1\ge-2,\\a+1\le2,\end{cases}$ 解得 $-1\le a\le1$.

故选 B.

易错警示　在根据集合间的关系求参数时,需要注意端点处的值是否可以取到,最有效的方法是假设可以取到,如果满足就可以取等号,不满足则取不到等号.

14. C 【解析】由 $x^2-8x+15=0$,得 $(x-3)\cdot(x-5)=0$,解得 $x=3$ 或 $x=5$,所以集合 $A=\{3,5\}$.

当 $a=0$ 时,$B=\varnothing$,满足 $B\subseteq A$;

当 $a\ne0$ 时,$B=\left\{\frac{1}{a}\right\}$,因为 $B\subseteq A$,

所以 $\frac{1}{a}=3$ 或 $\frac{1}{a}=5$,得 $a=\frac{1}{3}$ 或 $a=\frac{1}{5}$.

综上,实数 a 取值的集合为 $\left\{0,\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right\}$,

所以实数 a 取值的集合的真子集的个数为 $2^3-1=7$,故选 C.

15. B 【解析】因为 $A\cup B=A$,所以 $B\subseteq A$.

敲黑板:涉及 $A\cap B=B$ 或 $A\cup B=A$ 的问题,可利用集合的运算性质,转化为集合 A,B 之间的包含关系来求解

因为 $A=\{1,3,a^2\}$,$B=\{1,a+2\}$,所以 $a+2=3$ 或 $a+2=a^2$. 当 $a+2=3$ 时,$a=1$,此时集合 A 中有两个 1,所以 $a=1$ 不符合题意,舍去.

易错点:注意依据集合中元素的互异性对求得的结果进行检验

当 $a+2=a^2$ 时,得 $a=-1$ 或 $a=2$. 当 $a=-1$ 时,集合 A 和集合 B 中均有两个 1,所以 $a=-1$ 不符合题意,舍去;当 $a=2$ 时,$A=\{1,3,4\}$,$B=\{1,4\}$,符合题意. 综上,$a=2$,所以满足 $A\cup B=A$ 的实数 a 的个数为 1,故选 B.

16. D 【解析】$A=\{x|-1<x<4\}$,

$B=\left\{x\middle|x<-\frac{a}{2}\right\}$.

∵ $A\cap B=\{x|-1<x<3\}$,∴ $-\frac{a}{2}=3$,

∴ $a=-6$,故选 D.

17. A 【解析】$\complement_{\mathbf{R}}A=\{x|x<-2$ 或 $x>10\}$.

因为 $B\cap\complement_{\mathbf{R}}A=\varnothing$,所以 $B\subseteq A$.

集合 B 与集合 A 在 $\mathbf{R}$ 中的补集没有交集

由于 $B=\{x|1-m\le x\le1+m\}$,要满足 $B\subseteq A$,

当 $B=\varnothing$ 时,$1-m>1+m$,解得 $m<0$.

当 $B\neq\varnothing$ 时，有 $\begin{cases} m\geqslant 0,\\ 1-m\geqslant -2,\\ 1+m\leqslant 10,\end{cases}$ 解得 $0\leqslant m\leqslant 3$.

综上，m 的取值范围为 $\{m\mid m\leqslant 3\}$. 故选 A.

18. ACD 【解析】由已知 $B=\{x\mid |x-1|=0\}=\{1\}$，

又 $A\cap B=A\cup B$，则 $A=B=\{1\}$，

则方程 $x^2-a^2x+a^2-1=0$ 有且只有一解 1，即 $\Delta=(-a^2)^2-4(a^2-1)=0$，解得 $a^2=2$，即 $a=\pm\sqrt{2}$，则 $M=\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$，

故 ACD 正确.

故选 ACD.

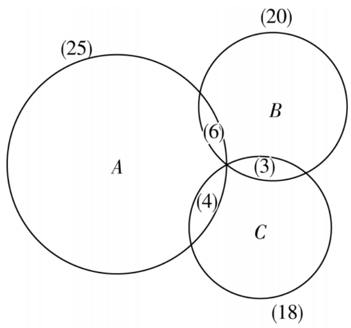
19. 0 或 1 【解析】因为 $A=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{y-3}{x-2}=1\right\}=\{(x,y)\mid y-3=x-2,x\neq 2\}=\{(x,y)\mid y=x+1,x\neq 2\}$，所以 A 表示直线 $y=x+1$ 上除点 $(2,3)$ 外的点的集合. 易错点 $B=\{(x,y)\mid y=kx+3\}$ 表示直线 $y=kx+3$ 上的点的集合. 要使 $A\cap B=\varnothing$，有以下两种情况：①当两直线平行时，两直线无交点，则 $k=1$；②当两直线不平行时，$k\neq 1$，此时直线 $y=kx+3$ 恰好过点 $(2,3)$，易错点 故 $2k+3=3$，即 $k=0$. 综上，实数 k 的值为 0 或 1.

20. C 【解析】因为 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B)$，$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$，所以 $\mathrm{card}(A\cap B)=0$，故 $A\cap B=\varnothing$，充分性成立；因为 $A\cap B=\varnothing$，所以 $\mathrm{card}(A\cap B)=0$，所以 $\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$，必要性成立. 故"$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)$"是"$A\cap B=\varnothing$"的充要条件，故选 C.

21. B 【解析】由题意，$\mathrm{card}(A)=25$，$\mathrm{card}(B)=20$，$\mathrm{card}(C)=18$，$\mathrm{card}(A\cap B)=6$，$\mathrm{card}(A\cap C)=4$，$\mathrm{card}(B\cap C)=3$.

因为全班同学每人至少选择一类项目且没有同学同时选择三类项目，

所以这个班同学人数是 $\mathrm{card}(A\cup B\cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A\cap B)-\mathrm{card}(A\cap C)-\mathrm{card}(B\cap C)=25+20+18-6-4-3=50$. 故选 B.



22. 9 【解析】由题意得 $\begin{cases}28+6+a+b=51,\\ 35+6+a+c=60,\\ 26+6+b+c=50,\end{cases}$ 则 $\begin{cases}a+b=17,\\ a+c=19,\\ b+c=18,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=9,\\ b=8,\\ c=10,\end{cases}$

此时，$a+b+c+6+28+35+26=122$，满足题意.

> **方法技巧** 对于 Venn 图，可以拆分为互不相交的多个部分，用编号区分每个部分，再检验题干要求的是哪些部分.

考向 2　常用逻辑用语

刷考点

1. C 【解析】由 $S_4>0$，得 $\frac{a_1-a_5}{1-q}>0$. 因为 $q>1$，所以 $a_1-a_5<0$，即 $a_5>a_1$，故必要性成立；

$S_4=\frac{a_1-a_5}{1-q}$，因为 $q>1$，$a_5>a_1$，所以 $S_4>0$，故充分性成立.

所以"$a_5>a_1$"是"$S_4>0$"的充要条件. 故选 C.

> **方法技巧** "若 p，则 q"为真命题，且"若 q，则 p"为假命题，则 p 是 q 的充分不必要条件；"若 p，则 q"为假命题，且"若 q，则 p"为真命题，则 p 是 q 的必要不充分条件.

2. D 【解析】两个周期函数之和是否为周期函数，取决于两个函数的周期的比值是否为有理数，若为有理数，则函数之和有周期，若不为有理数，则函数之和无周期. 如 $f(x)=\sin 2x$ 的最小正周期为 π，$g(x)=\sin \pi x$ 的最小正周期为 2，两个函数的周期的比值不是有理数，故充分性不成立；

若 $f(x)=\sin x+x$，$g(x)=-x$，则 $f(x)+g(x)=\sin x+x-x=\sin x$ 为周期函数，但 $f(x)=\sin x+x$，$g(x)=-x$ 为周期函数不正确，故必要性不成立.

因此"$f(x)$，$g(x)$ 为周期函数"是"$f(x)+g(x)$ 为周期函数"的既不充分也不必要条件.

3. BC 【解析】对于 A，异面直线 a，b 满足 $a/\!/\alpha$，$b/\!/\beta$，则可能 $\alpha/\!/\beta$，也可能 α 和 β 相交，故 A 错误；

对于 B，α 内有两条相交直线与平面 β 均无交点，即 α 内有两条相交直线与平面 β 平行，由面面平行的判定定理知 $\alpha/\!/\beta$，故 B 正确；

对于 C，由垂直于同一条直线的两平面平行可知 C 正确；

对于 D，α 内有无数个点到 β 的距离相等，则可能 $\alpha/\!/\beta$，也可能 α 和 β 相交，故 D 错误.

故选 BC.

4. A 【解析】由题可得，$A=\{-2,2\}$，$B\subsetneqq A$.

当 $B=\varnothing$ 时，有 $a=0$，符合题意；当 $B\neq\varnothing$ 时，有 $a\neq 0$，此时 $B=\left\{\frac{2}{a}\right\}$，则 $\frac{2}{a}=2$ 或 $\frac{2}{a}=-2$，所以 $a=\pm 1$. 综上，实数 a 的所有可能的取值组成的集合为 $\{-1,0,1\}$，故选 A.

> **快解** 由题可得，$A=\{-2,2\}$，$B\subsetneqq A$. 当 $a=0$ 时，$B=\varnothing$，则 $B\subsetneqq A$ 满足题意，故排除 BCD，故选 A.

5. B 【解析】由"$\forall x\in\mathbf{R}$，使得关于 x 的不等式 $x^2-ax+a>0$ 恒成立"，等价于方程 $x^2-ax+a=0$ 的根的判别式 $\Delta=(-a)^2-4a<0$，解得 $0<a<4$，则结合选项可知"$0<a<4$"的一个充分不必要条件是"$0<a<1$".

6. (1) $\frac{1}{2}$　(2) $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$（答案不唯一）

【解析】(1)由已知可得 $A=B$，则 $x=2$ 是方程 $bx=1$ 的解，且有 $b>0$，解得 $b=\frac{1}{2}$.

(2)若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件，则 $A\subsetneqq B$. 若不等式 $bx>1$ 对任意的 $x>2$ 恒成立，则 $b>\frac{1}{x}$ 对任意的 $x>2$ 恒成立，故 $b\geqslant\frac{1}{2}$，所以若 $x\in A$ 是 $x\in B$ 的充分不必要条件，则 b 的取值范围可以是 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$（答案不唯一）.

7. B 【解析】p：$\forall x<1$，$x^2<1$，则 $\neg p$：$\exists x<1$，$x^2\geqslant 1$，A 错误，B 正确；

q：$\exists x\leqslant 0$，$x^3+2\geqslant 0$，则 $\neg q$：$\forall x\leqslant 0$，$x^3+2<0$，C 错误，D 错误. 故选 B.

8. B 【解析】对于命题 p，当 $x=-1$ 时，$|x+1|=0<1$，所以 p 是假命题，$\neg p$ 是真命题. 对于命题 q，若 $x^3=x$，则 $x=-1,0,1$，所以满足"$\exists x>0$，$x^3=x$"，故 q 是真命题，$\neg q$ 是假命题，故选 B.

> **易错警示** 对含有量词的命题进行否定时：(1)不能只否定结论而忘记改变量词，也不能只改变量词而忘记对结论进行否定；(2)牢记命题的否定与原命题的真假性相反.

9. C 【解析】A 的意思是不存在偶数 $2n_0$ 不满足哥德巴赫猜想，与原命题等价.

B 的意思是两个质数的和作为集合，包含了所有大于 2 的偶数的集合，与原命题等价.

C 的意思是两个质数的和中不是偶数的部分为空集，也就是两个质数的和都是偶数.

因为 $2+3=5$ 是两个质数的和，但不是偶数，和命题矛盾，C 错.

D 的意思是要么一个偶数不大于 2，要么存在一个质数使得该偶数减去该质数之后还是一个质数，与原命题等价. 故选 C.

10. D 【解析】因为 $x^2-a>0$，即 $x^2>a$，且 $x\in(1,2)$，则 $x^2\in(1,4)$，所以 $a\leqslant 1$，

易错点：忘记取等号

只有选项 D 满足 $\{a|a\leqslant 1\}$ 是 $\{a|a<2\}$ 的真子集，所以命题“$\forall x\in(1,2),x^2-a>0$”为真命题的一个必要不充分条件是“$a<2$”，故选 D.

11. A 【解析】由 $x>1,y>0,\frac{2}{x-1}+\frac{1}{y}=1$,

看到 1，想到基本不等式“1”的妙用

得 $x+2y=(x-1)+2y+1=[(x-1)+2y]\cdot\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{y}\right)+1=5+\frac{4y}{x-1}+\frac{x-1}{y}\geqslant 5+2\sqrt{\frac{4y}{x-1}\cdot\frac{x-1}{y}}=9$，当且仅当 $\frac{4y}{x-1}=\frac{x-1}{y}$，即 $x-1=2y=4$ 时取等号，即当 $x=5,y=2$ 时，$(x+2y)_{\min}=9$. 依题意，$m^2+2m+1<9$，解得 $-4<m<2$，即命题 $P:-4<m<2$. 又 $x+1+m\geqslant 0\Leftrightarrow m\geqslant -x-1$，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$-3\leqslant -x-1\leqslant -2$，依题意，命题 $Q:m\geqslant -3$. 由命题 P 为真命题，命题 Q 为假命题，得 $-4<m<-3$，

所以实数 m 的取值范围是 $\{m|-4<m<-3\}$. 故选 A.

热点考向 1 新定义

1. B 【解析】因为 $A=\{2,3,5\},B=\{3,5,8\}$，所以 $A-B=\{2\}$，所以 $A-(A-B)=\{3,5\}$，有两个元素，则 $A-(A-B)$ 的子集个数是 $2^2=4$. 故选 B.

2. C 【解析】因为 $A=\{1,4\},B=\{-1,2\}$，

所以当 $a=1,b=-1$ 时，$x=b^2-a=0$；

当 $a=1,b=2$ 时，$x=b^2-a=3$；

当 $a=4,b=-1$ 时，$x=b^2-a=-3$；

当 $a=4,b=2$ 时，$x=b^2-a=0$.

所以 $A\otimes B=\{0,-3,3\}$，

故 $A\otimes B$ 中的元素个数为 3. 故选 C.

3. C 【解析】A 选项，$2\ 023=5\times 404+3$，故 $2\ 023\in[3]$，A 正确；

B 选项，全体整数被 5 除的余数只能是 0，1，2，3，4，

故 $\mathbf{Z}=[0]\cup[1]\cup[2]\cup[3]\cup[4]$，B 正确；

C 选项，$-2=5\times(-1)+3$，故 $-2\in[3]$，C 错误；

D 选项，由题意可知 $a-b$ 能被 5 整除，故 a,b 分别被 5 除的余数相同，故整数 a,b 属同一类，D 正确.

故选 C.

4. ABD 【解析】因为 $A=(-1,4],B=[0,7)$，所以 $A\cup B=(-1,7)$，所以 $A\cdot B=(-\infty,-1]\cup[7,+\infty)$，A 正确；

又 $A\cap B=[0,4]$，所以 $A^{\circ}B=(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$，B 正确；

又 $\complement_{\mathbf{R}}B=(-\infty,0)\cup[7,+\infty)$，则 $A\cup(\complement_{\mathbf{R}}B)=(-\infty,4]\cup[7,+\infty)$，所以 $A\cdot(\complement_{\mathbf{R}}B)=(4,7)$，C 错误；

又 $\complement_{\mathbf{R}}A=(-\infty,-1]\cup(4,+\infty)$，则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=(4,7)$，所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A)^{\circ}B=(-\infty,4]\cup[7,+\infty)$，D 正确.

故选 ABD.

5. BD 【解析】对于 A，因为 $E\cup F=\{x\in\mathbf{Q}|x\neq 1\}\neq\mathbf{Q}$，所以 A 错误.

对于 B，设 $E=\{x\in\mathbf{Q}|x\leqslant 1\},F=\{x\in\mathbf{Q}|x>1\}$，满足戴德金分割，则 E 有一个最大元素 1，F 没有最小元素，所以 B 正确.

对于 C，若 E 有一个最大元素，F 有一个最小元素，则不能同时满足 $E\cup F=\mathbf{Q},E\cap F=\varnothing$，所以 C 错误.

对于 D，设 $E=\{x\in\mathbf{Q}|x\leqslant\sqrt{3}\},F=\{x\in\mathbf{Q}|x>\sqrt{3}\}$，满足戴德金分割，此时 E 中没有最大元素，F 中也没有最小元素，所以 D 正确.

故选 BD.

6. 12 【解析】因为 A_1,A_2,A_3 满足：①每个集合都恰有 4 个元素；②$A_1\cup A_2\cup A_3=M$，所以 A_1,A_2,A_3 一定各包含 4 个不同的数值.

当集合 A_1,A_2,A_3 中元素的最小值分别是 1，2，3，最大值分别是 12，9，6，

特征数的和 $X_1+X_2+X_3$ 最小，如：$A_1=\{1,10,11,12\}$，特征数为 13；$A_2=\{2,7,8,9\}$，特征数为 11；$A_3=\{3,4,5,6\}$，特征数为 9，则 $X_1+X_2+X_3$ 的最小值为 $13+11+9=33$.

当集合 A_1,A_2,A_3 中元素的最小值分别是 1，4，7，最大值分别是 12，11，10 时，

特征数的和 $X_1+X_2+X_3$ 最大，如：$A_1=\{1,2,3,12\}$，特征数为 13；

$A_2=\{4,5,6,11\}$，特征数为 15；$A_3=\{7,8,9,10\}$，特征数为 17，

则 $X_1+X_2+X_3$ 的最大值为 $13+15+17=45$，

故 $X_1+X_2+X_3$ 的最大值与最小值的差为 $45-33=12$.

7. (1)【解】设一个 2 元“复活集”为 $\{x,y\}(x\neq y)$，则 $x+y=xy$.

由于 $\frac{3}{2}+3=\frac{3}{2}\times 3=\frac{9}{2}$，所以一个 2 元“复活集”可为 $\left\{\frac{3}{2},3\right\}$（答案不唯一）.

(2)【证明】由(1)分析可知，2 元“复活集”$\{x,y\}(x\neq y)$ 满足 $x+y=xy$.

若 $x>0,y>0$，则 $xy>2\sqrt{xy}$，即 $\sqrt{xy}(\sqrt{xy}-2)>0$，

所以 $\sqrt{xy}<0$（舍去）或 $\sqrt{xy}>2$，所以 $xy>4$，

所以对任意一个 2 元“复活集”，若其元素均为正数，则其元素之积一定大于 4.

(3)【解】设 3 元“复活集”$\{x,y,z\}$，其

巧思：先求得一个 3 元“复活集”，然后证明这个“复活集”是唯一的

中 x,y,z 都是正整数，且两两不相等，

根据集合中元素的互异性和无序性，不妨设 $x<y<z$，

根据“复活集”可得 $x+y+z=xyz$.

因为 $1+2+3=1\times 2\times 3$，所以存在元素均为正整数的 3 元“复活集”.

设 $x=1$，则 $1<y<z$，由 $x+y+z=xyz$，

先假设一个元素等于 1，利用因式分解，找出了满足条件的所有正整数解，并证明了这个解的唯一性

得 $1+y+z=yz$，整理得 $(y-1)(z-1)=2$.

由于 $1<y<z$ 且 y,z 都是正整数，所以 $\begin{cases}y-1=1,\\z-1=2,\end{cases}$

所以 $\begin{cases}y=2,\\z=3,\end{cases}$ 此时 3 元“复活集”为 $\{1,2,3\}$.

当 $x\geqslant 2$ 时，由 $x<y<z$，得 $xyz=x+y+z<3z$，所

再假设 $x\geqslant 2$，由“复活集”定义和不等式的性质得 $xy<3$，从而再由正整数性质进一步可求解

以 $xy<3$，

由于 $x<y$ 且 x,y 都是正整数，所以只有 $x=1,y=2$ 满足，

但与 $x\geqslant 2$ 矛盾，所以当 $x\geqslant 2$ 时，不存在元素均为正整数的 3 元“复活集”.

综上所述，存在某个 3 元“复活集”，所有符合条件的 3 元“复活集”为 $\{1,2,3\}$.

专题 2 不等式

考向 3 不等式的性质

刷考点

1. D 【解析】对于 A，$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{a(b+c)-b(a+c)}{b(b+c)}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}$，

因为 $a>b>c>0$，所以 $a-b>0,b(b+c)>0$，

所以 $\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+c}=\frac{c(a-b)}{b(b+c)}>0$，即 $\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}$，故 A 错误；

对于 B，因为 $a>b>0$，所以 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$，

又 $c<0$，所以 $\frac{c}{a}>\frac{c}{b}$，故 B 错误；

对于 C，当 $c=0$ 时，$ac^2=bc^2=0$，故 C 错误；

对于 D，若 $a>b$，则 $2a>a+b,a+b>2b$，

所以 $a>\frac{a+b}{2}>b$，故 D 正确.

故选 D.

2. D 【解析】对于 A，根据 $e^{a-b}>0$，得 $a-b$ 为任意实数，故 A 错误.

对于 B，由 $\ln\frac{a}{b}>0=\ln 1$，得 $\frac{a}{b}>1$，当 $a>0$ 且 $b>0$ 时，有 $a>b$；当 $a<0$ 且 $b<0$ 时，有 $a<b$，不满足题意，故 B 错误.

对于 C，因为 $a=2>b=1$ 满足 $a^a>b^b$，$a=-\frac{2}{3}<b=1$ 也满足 $a^a>b^b$，不满足题意，故 C 错误.

对于 D，因为 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，所以 $0>a>b$，所以