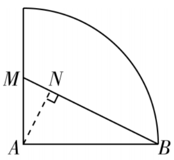
专题 10　立体几何

考向 33　空间几何体的结构、表面积与体积

刷考点

1. B　【解析】将圆锥侧面沿母线 AB 剪开,并展开成扇形如图所示,



则该扇形半径 $AB=4$,弧长为 $2\pi\times1=2\pi$,圆心角 $\angle BAM=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$,最短路线即为扇形中的线段 BM,$BM=\sqrt{AB^2+AM^2}=2\sqrt{5}$.

过点 A 作 BM 的垂线,垂足为 N,当蚂蚁从点 B 爬行到点 N 的过程中,它与点 A 的距离越来越小,

于是 BN 为上坡路段,当蚂蚁从点 N 爬行到点 M 的过程中,它与点 A 的距离越来越大,

于是 NM 为下坡路段,下坡路段长 $NM=AM\cdot\cos\angle AMB=2\times\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

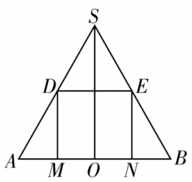
提示: 下坡即为到达地面的距离越来越小

方法总结　在解决空间曲线或折线(段)最短问题时一般要考虑几何体的侧面展开图,转化成求平面中两点间的最短距离问题,注意展开后对应的顶点和边与原来的顶点和边的关系.

2. A　【解析】设五边形有 x 个,六边形有 y 个,由于每条棱出现在两个面中,故会被重复计算一次,因此总棱数 $E=\frac{5x+6y}{2}$,同理每个顶点出现在三个面中,总顶点数 $V=\frac{5x+6y}{3}=60$,故 $E=90$,又面数 $F=x+y$,$V-E+F=2$,故 $60-90+x+y=2$,即 $x+y=32$,与 $5x+6y=180$ 联立,可解得 $x=12$. 故选 A.

3. C　【解析】作出轴截面,如图所示,

作轴截面是研究空间几何体内接问题的重要解题步骤

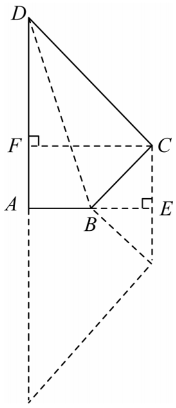


由题意可得,$AB=4$,$DE=2$,可知 D,E 分别为 SA,SB 的中点,

则 M,N 分别为 OA,OB 的中点,则 $DM=\frac{1}{2}SO=\frac{1}{2}\times\sqrt{4^2-2^2}=\sqrt{3}$,

可得 $S_{圆柱侧面积}=2\pi\times1\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}\pi$,$S_{圆锥侧面积}=\pi\times2\times4=8\pi$,所以所求的比值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 故选 C.

4. C　【解析】连接 BD,在圆内接四边形 $ABCD$ 中,$\angle DAB=90°$,所以 BD 是四边形 $ABCD$ 外接圆的直径,所以 $\angle DCB=90°$,则 $\angle ABC=135°$.



延长 AB,过点 C 作 $CE\perp AB$,垂足为 E,过点 C 作 $CF\perp AD$,垂足为 F,则 $\angle CBE=45°$,所以 $\triangle BCE$ 是等腰直角三角形,所以 $BE=CE=2$.

作出四边形 $ABCD$ 关于直线 AB 对称的图形,如图所示.

由于 $CE/\!/AF$,$AE/\!/CF$,$\angle DAB=90°$,所以四边形 $AECF$ 是矩形,$AF=CE=2$,$DF=CF=AE=4$,

所以在等腰直角三角形 CDF 中,$CD=4\sqrt{2}$.

将该四边形沿 AB 旋转一周,则旋转形成的几何体是一个圆台挖掉一个圆锥,

其表面积为 $\pi\times6^2+\pi\times(2+6)\times4\sqrt{2}+\pi\times2\times2\sqrt{2}=(36\sqrt{2}+36)\pi$.

圆台挖掉圆锥后求表面积是相加,而不是相减

故选 C.

易错警示　解决此类求组合体或旋转体表面积的问题时,切忌直接套用柱、锥、台的表面积公式,应先分析该几何体由哪几部分组成,几何体各个面间有无重叠,再结合相应几何体选择公式计算求解.

5. $(5+\sqrt{2})\pi$　【解析】由 $AB=1$,$AC=3$,得 $BC=2$,即圆柱的母线长 $l'=2$,

因为陀螺的底面圆的半径 $r=1$,

所以圆锥的母线长 $l=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,则圆锥的侧面积为 $\pi rl=\pi\times1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi$,圆柱的侧面积为 $2\pi rl'=2\pi\times1\times2=4\pi$,圆柱的底面积为 $\pi r^2=\pi\times1^2=\pi$,所以该陀螺的表面积 $S=\sqrt{2}\pi+4\pi+\pi=(5+\sqrt{2})\pi$.

6. A　【解析】设圆柱和圆台的高为 h,圆台的母线为 l,则 $l=\sqrt{h^2+1}$. 瓶子的侧面积 $S=2\pi h+\pi l(1+2)=2\pi h+3\pi\sqrt{h^2+1}=(3\sqrt{2}+2)\pi$,

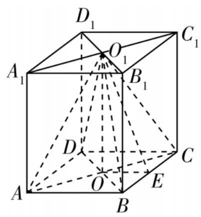
解得 $h=1$. 瓶子的体积 $V=\frac{1}{3}\pi\times1\times(1^2+2^2+1\times2)+\pi\times1^2\times1=\frac{10}{3}\pi$. 故选 A.

7. B　【解析】如图所示,正四棱柱为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$,正四棱锥为 O_1-ABCD.

设底面边长 $AB=a$,高 $OO_1=\sqrt{15}$,作 $O_1E\perp BC$ 于点 E,连接 OE,则 $O_1E=\sqrt{OO_1^2+OE^2}=\sqrt{15+\frac{1}{4}a^2}$.

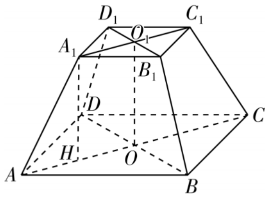
又正四棱柱的侧面积 $S_1=4AB\cdot OO_1=4\sqrt{15}a$,正四棱锥的侧面积 $S_2=4\cdot\frac{1}{2}BC\cdot O_1E=2\sqrt{15+\frac{1}{4}a^2}\cdot a$,则 $4\sqrt{15}a=2\sqrt{15+\frac{1}{4}a^2}\cdot a$,解得 $a=6\sqrt{5}$.

所以正四棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}S_{四边形ABCD}\cdot OO_1=\frac{\sqrt{15}}{3}a^2=60\sqrt{15}$. 故选 B.

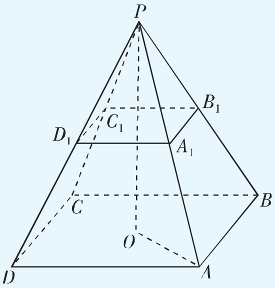


关键点拨　根据正四棱柱及正四棱锥的体积公式求出正四棱锥的高与斜高的关系式.

8. $\frac{7\sqrt{6}}{6}$　【解析】如图,连接 AC,BD 交于点 O,连接 A_1C_1,B_1D_1 交于点 O_1,连接 OO_1,过点 A_1 作 $A_1H\perp AC$ 于点 H,则 OO_1 为正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高. 在等腰梯形 A_1ACC_1 中,$AC=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$,$A_1C_1=\sqrt{2}A_1B_1=\sqrt{2}$,则 $AO=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$,$A_1O_1=\frac{1}{2}A_1C_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以 $AH=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $AA_1=\sqrt{2}$,所以 $A_1H=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以 $OO_1=A_1H=\frac{\sqrt{6}}{2}$,所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times(1^2+2^2+\sqrt{1^2\times2^2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.



一题多解 将正四棱台补形为正四棱锥 $P-ABCD$，如图，因为 $AB=2$，$A_1B_1=1$，所以 A_1，B_1，C_1，D_1 分别为 PA，PB，PC，PD 的中点. 又 $AA_1=\sqrt{2}$，所以



$PA=PB=PC=PD=2\sqrt{2}$. 过点 P 作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，垂足为 O，连接 OA，易知 O 为正方形 $ABCD$ 的中心，又因为 $AB=2$，所以 $OA=\sqrt{2}$，所以 $PO=\sqrt{PA^2-OA^2}=\sqrt{6}$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 $\frac{1}{3}PO\cdot S_{正方形ABCD}=\frac{1}{3}\times\sqrt{6}\times4=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，同理，四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$，所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{4\sqrt{6}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$.

考向 34　空间点、线、面的位置关系

刷考点

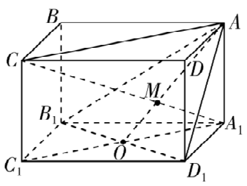
1. D 【解析】由题意知 $C\in\beta$，$C\in\gamma$，$\therefore$ 点 C 在 γ 与 β 的交线上.

$\because AB\cap l=M$，$\therefore M\in AB$，$M\in l$，

又 $AB\in\gamma$，$l\in\beta$，$\therefore$ 点 M 在 γ 与 β 的交线上.

$\therefore\gamma$ 与 β 的交线必通过点 C 和点 M.

2. BCD 【解析】对于 A，连接 AO，A_1C_1，AC，如图所示，



在长方形 $A_1B_1C_1D_1$ 中，由于 O 为对角线 B_1D_1 的中点，$A_1C_1\cap B_1D_1=O$，

则平面 $ACC_1A_1\cap$ 平面 $AB_1D_1=AO$，

由 $M\in$ 平面 AB_1D_1，$M\in A_1C$，$A_1C\subset$ 平面 ACC_1A_1，可知 $M\in AO$.

在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$BB_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，

由于 $AO\cap$ 平面 $ABB_1A_1=A$，所以 BB_1 与 MO 异面，故 A 错误；

对于 B，由选项 A 分析可知 $M\in AO$，$A_1C_1\cap B_1D_1=O$，易知 A，M，O，$A_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，故 B 正确；

对于 C，由选项 A 分析可知 $M\in AO$，$A_1C_1\cap B_1D_1=O$，易知 A，M，O，$C\subset$ 平面 ACC_1A_1，故 C 正确；

对于 D，由选项 A 分析可知 $M\in AO$，故 D 正确.

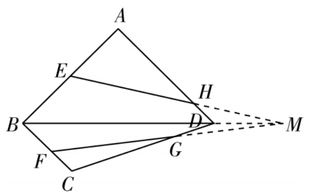
3. BD 【解析】延长线段 EH，FG 交于点 M，连接 DM，如图所示. $\because$ 点 E，H 分别在直线 AB，AD 上，而 AB，AD 是平面 ABD 内的直线. $\therefore E\in$ 平面 ABD，$H\in$ 平面 ABD，可得直线 $EH\subset$ 平面 ABD.

$\because$ 点 F，G 分别在直线 BC，CD 上，而 BC，CD 是平面 BCD 内的直线，

$\therefore F\in$ 平面 BCD，$G\in$ 平面 BCD，可得直线 $FG\subset$ 平面 BCD.

因此，直线 EH 与 FG 的公共点在平面 ABD 与平面 BCD 的交线上，$\because$ 平面 $ABD\cap$ 平面 $BCD=BD$，

$\therefore$ 点 $M\in$ 直线 BD.



关键点拨 证明三线共点问题，可以先由两条线相交于一点，再证明第三条线是相交于一点的两线所在平面的交线.

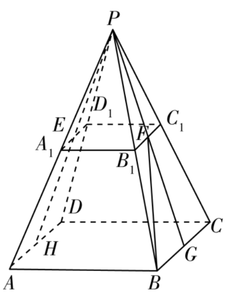
4. C 【解析】延长 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1，

提示：补台为锥

由正四棱台的性质可得侧棱 AA_1，BB_1，CC_1，DD_1 的延长线交于同一点，设该交点为 P.

E，F，G，H 分别为棱 A_1D_1，B_1C_1，BC，AD 的中点，

延长 HE，GF，则 HE，GF 的延长线必过点 P，则直线 HE 与直线 GF 相交于点 P，与直线 BB_1 相交于点 P，与直线 CC_1 相交于点 P，与直线 BF 是异面直线. 故 A，B，D 错误，C 正确.



5. B 【解析】对于 A，若直线 l 与 α 相交，则 α 内的直线与 l 相交或异面，因此若 l 与 α 相交，则不存在直线 $m\subset\alpha$，使 $l/\!/m$，故 A 错误；

对于 B，由于 $l\not\subset\alpha$，所以 l 与 α 相交或平行，不论是相交还是平行，均可在 α 内找到与 l 垂直的直线 m，故 B 正确；

对于 C，当 $l/\!/\alpha$ 时，α 内的直线与 l 平行或异面，此时不存在 $m\subset\alpha$，使 l，m 相交，故 C 错误；

对于 D，当直线 $l\perp\alpha$ 时，直线 l 与 α 内的所有直线均垂直，此时不存在直线 $m\subset\alpha$，使 l，m 所成角为 $\frac{\pi}{6}$，故 D 错误.

6. B 【解析】①若 $m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$，$m\perp n$，则 α，β 可能平行或相交，故①为假命题；

②若 $\alpha/\!/\beta$，$m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$，则 m 和 n 可能平行、相交或异面，故②为假命题；

③若 $m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m\perp n$，则 $\alpha\perp\beta$，故③为真命题；

④若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，则 $m\perp n$，故④为真命题.

故选 B.

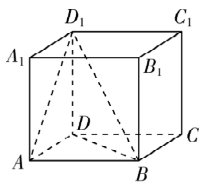
7. A 【解析】对于①，因为 $\alpha\cap\beta=m$，$m/\!/n$，所以当 $n\subset\alpha$ 时，$n/\!/\beta$；

当 $n\subset\beta$ 时，$n/\!/\alpha$；当 $n\not\subset\alpha$ 且 $n\not\subset\beta$ 时，$n/\!/\alpha$ 且 $n/\!/\beta$，故①正确.

对于②，因为 $\alpha\cap\beta=m$，$m\perp n$，所以 n 与 α，β 的位置关系为在平面内、与平面平行或相交，故②错误.

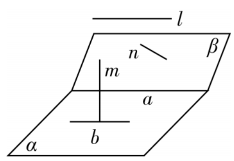
对于③，因为 $n/\!/\alpha$ 且 $n/\!/\beta$，$\alpha\cap\beta=m$，所以 $m/\!/n$，故③正确.

对于④，如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，记平面 ADD_1A_1 为 α，平面 $ABCD$ 为 β，则直线 AD 为 m，记直线 BD_1 为 n，由正方体的



性质可知 BD_1 与平面 ADD_1A_1 所成角为 $\angle AD_1B$，则 $\sin\angle AD_1B=\frac{AB}{BD_1}$，$BD_1$ 与平面 $ABCD$ 所成角为 $\angle DBD_1$，则 $\sin\angle DBD_1=\frac{DD_1}{BD_1}=\sin\angle AD_1B$，此时 BD_1 与 AD 不垂直，即 m 与 n 不垂直，故④错误. 故选 A.

8. AC 【解析】如图，因为 $m\perp$ 平面 α，所以存在 $b\subset\alpha$，使得 $m\perp b$ 且 $l/\!/b$，又 $l\not\subset\alpha$，由线面平行的判定定理可得 $l/\!/\alpha$，故 A 正确；



如图，满足题目条件，但 α，β 不垂直，故 B 错误；

如图，因为 $\alpha\cap\beta=a$，所以 $a\subset\alpha$，$a\subset\beta$，又 $m\perp\alpha$，所以 $m\perp a$，

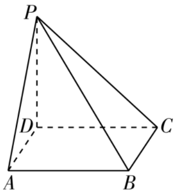
因为 $n\perp\beta$，所以 $n\perp a$，又 $l\perp m$，$l\perp n$，$l\not\subset\alpha$，$l\not\subset\beta$，所以 $a/\!/l$，故 C 正确；

假设 $l\perp\beta$，因为 $n\perp\beta$，所以 $n/\!/l$，这与 $l\perp n$ 矛盾，故 D 错误. 故选 AC.

考向 35 直线、平面平行的判定与性质

刷考点

1. C 【解析】由 $BC//AD$，$BC\not\subset$ 平面 PAD，$AD\subset$ 平面 PAD，得 $BC//$ 平面 PAD，故充分性成立.



由 $BC//$ 平面 PAD，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，平面 $ABCD\cap$ 平面 $PAD=AD$，得 $BC//AD$，故必要性成立.

故“$BC//AD$”是“$BC//$ 平面 PAD”的充要条件. 故选 C.

2. ABD 【解析】如图所示，连接 AC，CD_1，

由于 E，F 分别为 AD_1，DB 的中点，则 F 也为 AC 的中点，

所以 $EF//CD_1$，$EF\not\subset$ 平面 CDD_1C_1，$CD_1\subset$ 平面 CDD_1C_1，

所以 $EF//$ 平面 CDD_1C_1，故 D 正确；

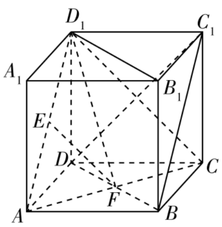
所以 EF 与 CD_1 共面，而 $B_1\notin CD_1$，所以直线 EF 与 D_1B_1 为异面直线，故 A 正确；

连接 BC_1，易得 $D_1E//BC_1$，

所以 $\angle DC_1B$ 即为直线 D_1E 与 DC_1 所成的角或其补角，

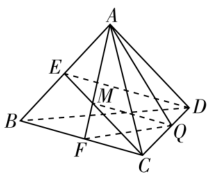
由于 $\triangle BDC_1$ 为等边三角形，即 $\angle DC_1B=60°$，故 B 正确；

假设 $D_1F\perp AD$，由于 $AD\perp DD_1$，$D_1F\cap DD_1=D_1$，D_1F，$DD_1\subset$ 平面 D_1DF，所以 $AD\perp$ 平面 D_1DF，而 $AD\perp$ 平面 D_1DF 显然不成立，故 C 错误. 故选 ABD.



3. B 【解析】如图，连接 CE，交 AF 于点 M，连接 QM，

因为 $DE//$ 平面 AFQ，$DE\subset$ 平面 CDE，平面 $CDE\cap$ 平面 $AFQ=QM$，所以 $DE//QM$.



又因为 E，F 分别为 AB，BC 的中点，所以点 M 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $\dfrac{EM}{MC}=\dfrac{1}{2}$.

在 $\triangle CDE$ 中，$DE//QM$，则 $\dfrac{DQ}{QC}=\dfrac{EM}{MC}=\dfrac{1}{2}$. 故选 B.

4. B 【解析】由题可知点 F 在正方形 BCC_1B_1 内（含边界）. 取棱 B_1C_1 上靠近点 B_1 的四等分点 G，棱 CC_1 上靠近点 C 的四等分点 H，连接 EG，GH，易得 $GH//B_1C//A_1D$，

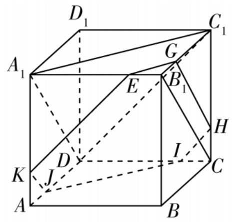
因为 $A_1D\subset$ 平面 A_1DC_1，$GH\not\subset$ 平面 A_1DC_1，

所以 $GH//$ 平面 A_1DC_1.

因为 $EF//$ 平面 A_1DC_1，所以过线段 GH 且与平面 A_1DC_1 平行的截面为如图所示的平面 $EGHIJK$，

所以 $EF\cap GH=F$，所以点 F 在线段 GH 上，所以 $EG\leqslant EF\leqslant EH$，又因为 $EG=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$EH=\sqrt{1^2+4^2+3^2}=\sqrt{26}$，

所以 EF 的长度的取值范围是 $[\sqrt{2},\sqrt{26}]$. 故选 B.



5. ABD 【解析】对于选项 A，因为 E，F 分别为 AC，BC 的中点，所以 $EF//AB$，

又 G 为 PB 上的动点（不含端点），

所以 $AB\not\subset$ 平面 EFG，又 $EF\subset$ 平面 EFG，

所以 $AB//$ 平面 EFG.

又平面 $EFG\cap$ 平面 $PAB=HG$，$AB\subset$ 平面 PAB，所以 $HG//AB$，故 A 正确；

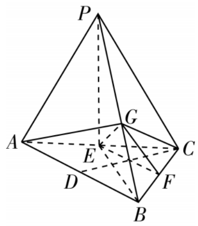
对于选项 B，连接 AC，CG，由题知 $\triangle APB\cong\triangle CPB$，所以 $AG=CG$，因为 E 为 AC 的中点，所以 $EG\perp AC$，即 EG 为点 G 到直线 AC 的距离，

如图①，连接 EP，EB，

因为 $PE\perp AC$，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，平面 $PAC\cap$ 平面 $ABC=AC$，$PE\subset$ 平面 PAC，

所以 $PE\perp$ 平面 ABC，

又 $EB\subset$ 平面 ABC，所以 $PE\perp EB$.



图①

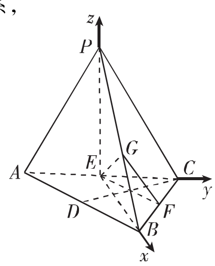
在 $\mathrm{Rt}\triangle PEB$ 中，当 $EG\perp PB$ 时，EG 的长度最短，即点 G 到直线 AC 的距离最短，

又 $PE=EB=\sqrt{3}$，$PB=\sqrt{6}$，由 $\sqrt{6}EG=\sqrt{3}\times\sqrt{3}$，得 $EG=\dfrac{3}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，故 B 正确；

对于选项 C，由选项 B 知，可建立如图②所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，

又 D，F 分别是 AB，BC 的中点，所以 $D\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2},0\right)$，



图②

$F\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$，

设 $\overrightarrow{BG}=\lambda\overrightarrow{BP}(0<\lambda<1)$，

又 $\overrightarrow{DC}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BG}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\lambda,-\dfrac{1}{2},\sqrt{3}\lambda\right)$，

若 $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{FG}=0$，则有 $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\lambda\right)-\dfrac{3}{4}=0$，解得 $\lambda=1$，又 $0<\lambda<1$，

所以 DC 与 FG 不垂直，故不存在点 G，使得 $CD\perp$ 平面 EFG，故 C 错误；

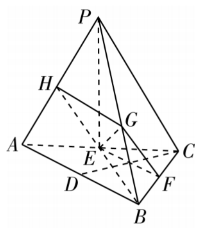
对于选项 D，如图③，由（1）知 $HG//AB$，又 $EF//AB$，且 $EF=\dfrac{1}{2}AB$，

又 $PG>GB$，所以 $HG//EF$，且 $HG>EF$，则 HE，GF 必有交点.

设 $HE\cap GF=Q$，因为 $HE\subset$ 平面 APC，所以 $Q\in$ 平面 APC，

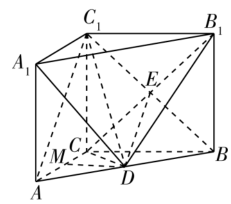
又 $GF\subset$ 平面 BPC，所以 $Q\in$ 平面 BPC，又平面 $APC\cap$ 平面 $BPC=PC$，所以 $Q\in PC$，

所以直线 PC，GF，HE 交于同一点，故 D 正确. 故选 ABD.



图③

6. （1）【证明】连接 BC_1 与 CB_1 交于点 E，则 E 是 BC_1 的中点，连接 DE，又 D 是 AB 的中点，则有 $DE//AC_1$，$DE\subset$ 平面 CDB_1，$AC_1\not\subset$ 平面 CDB_1，所以 $AC_1//$ 平面 CDB_1.



（2）【解】取 AC 的中点 M，连接 DM，

直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$BC\subset$ 平面 ABC，故 $BC\perp AA_1$.

又 D 为 AB 的中点，则有 $DM//BC$ 且 $DM=\dfrac{1}{2}BC=2$. 由 $AC^2+BC^2=AB^2$，可得 $AC\perp BC$，又 $AC\cap AA_1=A$，AC，$AA_1\subset$ 平面 ACC_1A_1，所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1，则 $DM\perp$ 平面 ACC_1A_1. $S_{\triangle AA_1C_1}=\dfrac{1}{2}AA_1\cdot A_1C_1=\dfrac{1}{2}\times4\times3=6$，$V_{C_1-AA_1D}=V_{D-AA_1C_1}=\dfrac{1}{3}DM\cdot S_{\triangle AA_1C_1}=\dfrac{1}{3}\times2\times6=4$.

一题多解 (1)【证明】$AC^2+BC^2=AB^2$，则有 $AC\perp BC$，又 $AA_1\perp$平面 ABC，以 C 为原点，$\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $C(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$B(0,4,0)$，$D\left(\frac{3}{2},2,0\right)$，$A_1(3,0,4)$，$B_1(0,4,4)$，$C_1(0,0,4)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-3,0,4)$，$\overrightarrow{CD}=\left(\frac{3}{2},2,0\right)$，$\overrightarrow{CB_1}=(0,4,4)$.

设平面 CDB_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{CD}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{3}{2}x+2y=0,\\ \overrightarrow{CB_1}\cdot\boldsymbol{n}=4y+4z=0,\end{cases}$

令 $y=1$，则 $x=-\frac{4}{3}$，$z=-1$，得

$\boldsymbol{n}=\left(-\frac{4}{3},1,-1\right)$，

于是 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\boldsymbol{n}=0$，且 $AC_1\not\subset$平面 CDB_1，故 $AC_1//$平面 CDB_1.

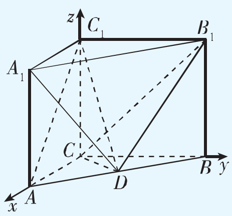
(2)【解】在(1)的基础上，$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{3}{2},2,0\right)$，$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,4)$，$\overrightarrow{A_1C_1}=(-3,0,0)$，

设平面 AA_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(a,b,c)$，$\begin{cases}\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}_1=-\frac{3}{2}a+2b=0,\\ \overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}_1=4c=0,\end{cases}$

令 $a=4$，则 $b=3$，$c=0$，得 $\boldsymbol{n}_1=(4,3,0)$.

于是点 C_1 到平面 AA_1D 的距离为 $d=\frac{|\overrightarrow{A_1C_1}\cdot\boldsymbol{n}_1|}{|\boldsymbol{n}_1|}=\frac{12}{5}$，

于是 $V_{C_1-AA_1D}=\frac{1}{3}d\cdot S_{\triangle AA_1D}=\frac{1}{3}\times\frac{12}{5}\times\frac{1}{2}\times4\times\frac{5}{2}=4$.



7. D 【解析】对于A：若 $m\subset\alpha$，则 $m//\alpha$ 不成立，故 A 错误；

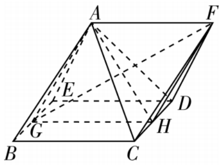
对于B：若 $l//\beta$，$m//\beta$，$l\subset\alpha$，$m\subset\alpha$，则 $\alpha//\beta$ 或 α 与 β 相交，故 B 错误；

对于C：若 $l//m$，$l\subset\alpha$，$m\subset\beta$，则 $\alpha//\beta$ 或 α 与 β 相交，故 C 错误；

对于D：由面面平行的判定定理可知 D 正确.

故选 D.

8. D 【解析】选项A：如图，取 CD 的中点 H，连接 GH，FH，AG，AH，



因为 $A-BCDE$ 是正四棱锥，$A-CDF$ 是正四面体，G 为 BE 的中点，

所以 $CD\perp GH$，$CD\perp AH$，$CD\perp FH$，

因为 $GH\cap AH=H$，$GH,AH\subset$平面 AGH，所以 $CD\perp$平面 AGH.

因为 $AH\cap FH=H$，$AH,FH\subset$平面 AFH，所以 $CD\perp$平面 AFH，

所以 A,G,H,F 四点共面，

由题意知 $AG=HF=\sqrt{3}$，$GH=AF=2$，所以四边形 $AGHF$ 是平行四边形，所以 $GH//AF$，因为 $BC//GH$，所以 $BC//AF$，所以 A,B,C,F 四点共面，故 A 正确；

选项B：由选项A知 $AG//FH$，又 $AG\not\subset$平面 CDF，$FH\subset$平面 CDF，所以 $AG//$平面 CDF，

因为 $CD//BE$，且 $BE\not\subset$平面 CDF，$CD\subset$平面 CDF，所以 $BE//$平面 CDF，

又 $AG\subset$平面 ABE，$BE\subset$平面 ABE，且 $AG\cap BE=G$，所以平面 $ABE//$平面 CDF，故 B 正确；

C选项：由选项A可得 $CD\perp$平面 $AGHF$，又 $FG\subset$平面 $AGHF$，所以 $FG\perp CD$，故 C 正确；

D选项：假设 $FG\perp$平面 ACD，因为 $AH\subset$平面 ACD，则 $FG\perp AH$，

由选项A知四边形 $AGHF$ 是平行四边形，所以四边形 $AGHF$ 是菱形，

与 $AG=\sqrt{3}$，$GH=2$ 矛盾，故 D 错误.

故选 D.

9. B 【解析】对于①：如图，连接 BD，B_1D_1，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$DD_1\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，则 $AC\perp DD_1$，

又 $AC\perp BD$，$BD\cap DD_1=D$，$BD\subset$平面 BDD_1B_1，$DD_1\subset$平面 BDD_1B_1，

则 $AC\perp$平面 BDD_1B_1，又 $B_1P\subset$平面 BDD_1B_1，则 $AC\perp B_1P$，故①正确；

对于②：如图，设 BD 交 AC 于 E，连接 EP.

由 $EP\subset$平面 BDD_1B_1，得 $AC\perp EP$，

所以 $S_{\triangle APC}=\frac{1}{2}AC\cdot PE=\frac{\sqrt{2}}{2}PE$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle BDD_1$ 中，当 $PE\perp BD_1$ 时，PE 最小，

又 $BD=\sqrt{2}$，$DD_1=1$，$BD_1=\sqrt{3}$，$\sin\angle DBD_1=\frac{DD_1}{BD_1}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

此时 $PE=BE\cdot\sin\angle DBD_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

因此△APC 面积的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，

故②错误；

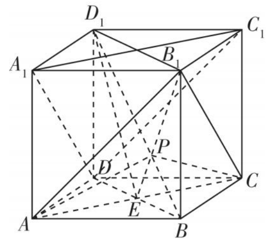
对于③：如图，连接 B_1C，AB_1，由①知，$AC\perp$平面 BDD_1B_1，又 $BD_1\subset$平面 BDD_1B_1，

所以 $AC\perp BD_1$，同理 $AB_1\perp BD_1$，

因为 $AC\cap AB_1=A$，$AB_1\subset$平面 AB_1C，$AC\subset$平面 AB_1C，所以 $BD_1\perp$平面 AB_1C，

当点 P 为直线 BD_1 与平面 AB_1C 的交点时，$BD_1\perp$平面 APC，

由于过一点 A 有且只有一个平面垂直于已知直线 BD_1，于是过直线 AC 与直线 BD_1 垂直的平面有且只有一个，所以存在唯一的点 P，使 $BD_1\perp$平面 APC，故③正确；

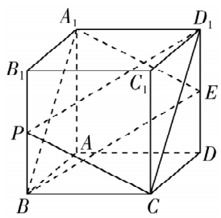


对于④：当 $BP=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，在△BPE 中，$BE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos\angle DBD_1=\frac{DB}{BD_1}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

则 $PE=\sqrt{BP^2+BE^2-2BP\cdot BE\cos\angle PBE}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\frac{1}{2}-2\times\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

即 $PE^2+BP^2=\frac{1}{2}=BE^2$，则 $PE\perp PB$，又 $AC\perp PB$，$AC\cap PE=E$，$AC\subset$平面 APC，$PE\subset$平面 APC，所以 $PB\perp$平面 APC，即 $BD_1\perp$平面 APC，由①同理可知 $BD_1\perp A_1C_1$，$BD_1\perp A_1D$，$A_1C_1\cap A_1D=A_1$，且 $A_1C_1\subset$平面 A_1C_1D，$A_1D\subset$平面 A_1C_1D，因此 $BD_1\perp$平面 A_1C_1D，则平面 $ACP//$平面 A_1C_1D，故④正确. 故选 B.

10. $\sqrt{5}$ 【解析】取棱 BB_1 的中点 P，连接 CP，PD_1，CD_1，如图所示.



因为 $CD_1//A_1B$，$CD_1\not\subset$平面 A_1BE，$A_1B\subset$平面 A_1BE，所以 $CD_1//$平面 A_1BE.

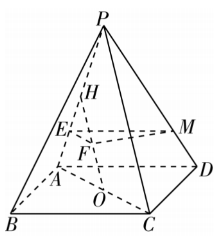
因为 $CP//A_1E$，$CP\not\subset$平面 A_1BE，$A_1E\subset$平面 A_1BE，所以 $CP//$平面 A_1BE.

又因为 $CP,CD_1\subset$平面 CPD_1，$CP\cap CD_1=C$，所以平面 $CPD_1//$平面 A_1BE.

因此平面 α 即为平面 CPD_1，即平面 α 与正方形 B_1BCC_1 的交线为 CP. 所以 $CP=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$.

11. 【证明】(1) 连接 AC，正四棱锥 $P-ABCD$ 中，O 为底面中心，则 O 为 AC 中点，

又 H 为 PA 的中



点,则有 $HO//PC$,

$HO\not\subset$ 平面 PCD,$PC\subset$ 平面 PCD,所以 $HO//$平面 PCD.

(2)E,F 分别为 AH,HO 的中点,则有 $EF//AO$,

$EF\not\subset$ 平面 $ABCD$,$AO\subset$ 平面 $ABCD$,则有 $EF//$平面 $ABCD$,

H,E 分别为 PA,AH 的中点,则有 $PE=3EA$,

又 $PM=3MD$,则有 $EM//AD$,

$EM\not\subset$ 平面 $ABCD$,$AD\subset$ 平面 $ABCD$,则有 $EM//$平面 $ABCD$,

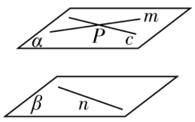
$EF,EM\subset$ 平面 EFM,$EF\cap EM=E$,

所以平面 $EFM//$平面 $ABCD$.

刷上分

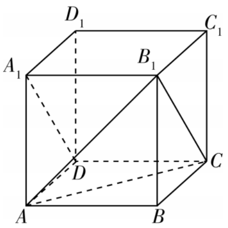
1. B 【解析】对于 A,若 $m//\alpha$ 且 $\alpha//\beta$,则 $m//\beta$ 或 $m\subset\beta$,故 A 错误;

对于 B,若 m,n 是异面直线,$m\subset\alpha$,$m//\beta$,$n\subset\beta$,$n//\alpha$,则在直线 m 上任取一点 P,过直线 n 与点 P 确定平面 γ,设 $\gamma\cap\alpha=c$,



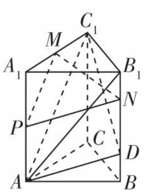
又 $n//\alpha$,则 $n//c$,$n\subset\beta$,$c\not\subset\beta$,所以 $c//\beta$,又 $m//\beta$,$m\subset\alpha$,$c\subset\alpha$,$m\cap c=P$,所以 $\alpha//\beta$,故 B 正确;对于 C,若 $\alpha\perp\beta$,$m\subset\alpha$,$n\subset\beta$,则 m,n 可能平行、相交或异面,故 C 错误;对于 D,若 $m\perp n$,$m\perp\alpha$,$\alpha//\beta$,则 $n\subset\beta$ 或 $n//\beta$,故 D 错误. 故选 B.

2. A 【解析】如图所示,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,因为平面 BCC_1B_1 // 平面 ADD_1A_1,平面 $BCC_1B_1\cap$ 平面 $AB_1C=B_1C$,平面 $AB_1C\cap$ 平面 $ADD_1A_1=l$,所以 $l//B_1C$,因为 $A_1D//B_1C$,所以 $l//A_1D$,故 A 正确;



因为 B_1D 与 B_1C 相交,所以 l 与 B_1D 不平行,故 B 错误;因为 C_1D 与 B_1C 不平行,所以 l 与 C_1D 不平行,故 C 错误;因为 DD_1 与 B_1C 不平行,所以 l 与 DD_1 不平行,故 D 错误. 故选 A.

3. B 【解析】依题意,作出图形如图所示,设 P 为 AA_1 的中点,连接 PM,PN,因为 M 为 A_1C_1 的中点,所以 $MP//AC_1$,又 $MP\not\subset$ 平面 ADC_1,$AC_1\subset$ 平面 ADC_1,所以 $MP//$平面 ADC_1.



又因为 $MN//$平面 ADC_1,$MN\cap MP=M$,$MN,MP\subset$ 平面 MNP,

所以平面 $MNP//$平面 ADC_1.

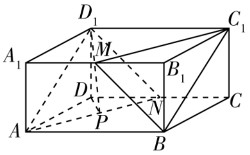
又平面 $MNP\cap$ 平面 $ABB_1A_1=PN$,平面 $ADC_1\cap$ 平面 $ABB_1A_1=AD$,

所以 $PN//AD$,又 $AA_1//BB_1$,所以四边形 $ADNP$ 是平行四边形,

所以 $DN=AP=\frac{1}{2}BB_1$,所以 $B_1N+BD=\frac{1}{2}B_1B$,又 $BB_1=4BD$,

所以 $B_1N=BD$,所以 $BN=3B_1N$,所以 $\frac{NB}{NB_1}=3$. 故选 B.

4. A 【解析】取 CD 的中点 N,连接 AN,AD_1,D_1N,



因为 $AB//D_1C_1$,$AB=D_1C_1$,所以四边形 ABC_1D_1 是平行四边形,

所以 $AD_1//BC_1$,又 $BC_1\subset$ 平面 BMC_1,$AD_1\not\subset$ 平面 BMC_1,故 $AD_1//$平面 BMC_1,同理可证 $AN//$平面 BMC_1,

又 $AN\cap AD_1=A$,$AN,AD_1\subset$ 平面 AD_1N,

故平面 $AD_1N//$平面 BMC_1,平面 $AD_1N\cap$ 平面 $ABCD=AN$.

结合 P 为下底面 $ABCD$ 上一点,且 $PD_1//$平面 BMC_1,可知点 P 在 AN 上运动,且 $\triangle D_1DP$ 为直角三角形,

当 $DP\perp AN$ 时,DP 最小,最小值为 $\frac{1\times2}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

此时 $\triangle D_1DP$ 的面积最小,且最小值为 $\frac{1}{2}\times1\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

故选 A.

5. ABD 【解析】对于 A,因为 $AB=BC=\sqrt{2}$,$AC=2$,

所以 $AB^2+BC^2=AC^2$,所以 $BC\perp AB$,

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$BB_1\perp$ 平面 ABC,

又 $BC\subset$ 平面 ABC,则 $BC\perp BB_1$,

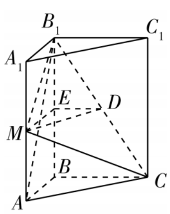
又 $BB_1\cap AB=B$,$BB_1,AB\subset$ 平面 A_1B_1BA,

故 $BC\perp$ 平面 A_1B_1BA,

又 $B_1M\subset$ 平面 A_1B_1BA,所以 $BC\perp B_1M$,

则直线 BC 与直线 B_1M 所成的角为 $90°$,故 A 正确;

对于 B,取 B_1B,B_1C 的中点分别为 E,D,连接 ME,ED,MD,又 M 为 A_1A 的中点,所以 $ME//AB$,又 $AB\subset$ 平面 ABC,$ME\not\subset$ 平面 ABC,所以 $ME//$平面 ABC,

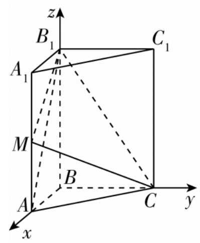


同理可证得 $ED//$平面 ABC,

又 $ME\cap ED=E$,$ME,ED\subset$ 平面 MED,故平面 $MED//$平面 ABC,又 $MD\subset$ 平面 MED,所以 $MD//$平面 ABC,

则在 B_1C 上存在点 D,使 $MD//$平面 ABC,故 B 正确;

对于 C,由 A 可知,AB,BC,BB_1 两两垂直,则以点 B 为坐标原点,以 BA,BC,BB_1 分别为 x 轴、y 轴、z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,



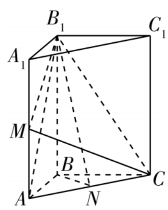
则 $B(0,0,0)$,$B_1(0,0,\sqrt{3})$,$M\left(\sqrt{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$C(0,\sqrt{2},0)$,$A(\sqrt{2},0,0)$,

所以 $\overrightarrow{B_1M}=\left(\sqrt{2},0,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,$\overrightarrow{CM}=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

因为 $\overrightarrow{B_1M}\cdot\overrightarrow{CM}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}+0\times(-\sqrt{2})+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{4}\neq0$,

所以 B_1M 与 CM 不垂直,故 C 错误;

对于 D,方法一(几何法——三垂线定理):在平面 ABC 内,过点 B 作 $BN\perp AC$ 于点 N,连接 B_1N,由三垂线定理得 $B_1N\perp AC$,所以 $\angle B_1NB$ 是二面角 B_1-AC-B 的平面角,



依题意知,$BN=1$,$BB_1=CC_1=\sqrt{3}$,所以 $\tan\angle B_1NB=\sqrt{3}$,所以二面角 B_1-AC-B 的大小为 $60°$,故 D 正确.

方法二(坐标法):

结合选项 C 建立的空间直角坐标系,可知平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$,

设平面 AB_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

因为 $\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$,$\overrightarrow{AB_1}=(-\sqrt{2},0,\sqrt{3})$,

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=-\sqrt{2}x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{3}$,

则 $y=\sqrt{3}$,$z=\sqrt{2}$,故 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},\sqrt{3},\sqrt{2})$,

设二面角 B_1-AC-B 的平面角为 θ,则 $|\cos\theta|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2}$,

又由图可知二面角 B_1-AC-B 为锐二面角,

所以二面角 B_1-AC-B 的大小为 $60°$,故 D 正确.

故选 ABD.

6. (1)【证明】$\because$ E 为 BC 中点,$BC=2AB=2AD$,$AD//BC$,

$\therefore$ $AD//CE$,$AD=CE$,$\therefore$ 四边形 $AECD$ 为平行四边形,

$\therefore AE/\!/CD$，$\because AE\not\subset$平面DCP，$CD\subset$平面DCP，$\therefore AE/\!/$平面DCP.

$\because E,F$分别为BC,BP的中点，$\therefore EF/\!/CP$，

$\because EF\not\subset$平面DCP，$CP\subset$平面DCP，$\therefore EF/\!/$平面DCP.

$\because AE\cap EF=E$，$AE,EF\subset$平面AEF，$\therefore$平面$AEF/\!/$平面DCP.

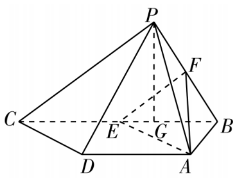
(2)【解】①$\because$平面$PBC\cap$平面$ABCD=BC$，平面$PBC\perp$平面$ABCD$，$AB\subset$平面$ABCD$，$AB\perp BC$，

$\therefore AB\perp$平面PBC，$\therefore \angle APB$即为直线AP与平面PBC所成的角，

即$\angle APB=45°$. 又$AB=AD=1$，则$BC=2$，

$\because AB\perp$平面PBC，$PB\subset$平面PBC，$\therefore AB\perp PB$，$\therefore PB=AB=1$.

作$PG\perp BC$于点G，则由平面$PBC\perp$平面$ABCD$，平面$PBC\cap$平面$ABCD=BC$，$PG\subset$平面PBC，得$PG\perp$平面$ABCD$，又$PC\perp PB$，则$PG\cdot BC=PC\cdot PB$，$\therefore PG=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore$四棱锥$P-ABCD$的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.



②$\because BC\perp AB$，$PB\perp AB$，

$\therefore \angle PBC$即为二面角$P-AB-D$的平面角，

$\because CP\perp PB$，

$\therefore \cos\angle PBC=\frac{PB}{BC}=\frac{1}{2}$，$\therefore \angle PBC=\frac{\pi}{3}$，

即二面角$P-AB-D$的大小为$\frac{\pi}{3}$.

考向36　直线、平面垂直的判定与性质

刷考点

1. C　【解析】对于ABD选项，满足条件的直线m均可能与平面α平行、垂直、斜交或在平面α内，故A，B，D错误；

对于C选项，由$m\perp\beta$，$n\perp\beta$，可得$m/\!/n$，又$n\perp\alpha$，则$m\perp\alpha$，故C正确. 故选C.

2. D　【解析】底面为直角三角形且侧棱垂直于底面的三棱柱称为“堑堵”.

所以在堑堵$ABC-A_1B_1C_1$中，$AC\perp BC$，侧棱$AA_1\perp$平面ABC.

在选项A中，四边形A_1B_1BA为矩形，因为$AC\perp BC$，所以AC,BC均与AB不垂直，

故CA,CB与底面ABB_1A_1均不可能垂直，同理可知CA_1,CB_1与底面ABB_1A_1均不可能垂直，所以四棱锥$C-A_1B_1BA$不是“阳马”，故A错误；

在选项B中，由题设易知C_1A_1,C_1B_1,C_1C两两垂直，则$\triangle A_1CC_1$为直角三角形，$\triangle A_1B_1C_1$为直角三角形，$\triangle CC_1B_1$为直角三角形，$\triangle A_1B_1C$不是直角三角形，所以四面体$A_1CC_1B_1$不是“鳖臑”，故B错误；

在选项C，D中，因为$AA_1\perp$平面ABC，$BC\subset$平面ABC，所以$AA_1\perp BC$，又$AC\perp BC$，$AC\cap AA_1=A$，$AC,AA_1\subset$平面AA_1C_1C，则$BC\perp$平面AA_1C_1C，又$AF\subset$平面AA_1C_1C，则$BC\perp AF$，又$AF\perp A_1C$且$A_1C\cap BC=C$，$A_1C,BC\subset$平面A_1BC，

则$AF\perp$平面A_1BC，又$A_1B\subset$平面A_1BC，所以$AF\perp A_1B$.

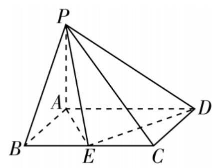
又$AE\perp A_1B$且$AF\cap AE=A$，$AF,AE\subset$平面AEF，则$A_1B\perp$平面AEF，又$EF\subset$平面AEF，则$A_1B\perp EF$，所以C错误，D正确.

故选D.

3. B　【解析】如图，连接AE. 因为$PA\perp$底面$ABCD$，$DE\subset$底面$ABCD$，所以$PA\perp DE$，又$DE\perp PE$，$PA\cap PE=P$，$PA,PE\subset$平面PAE，

所以$DE\perp$平面PAE，又$AE\subset$平面PAE，所以$DE\perp AE$，所以点E在以AD为直径的圆上.

又由$AD=2AB$可知，以AD为直径的圆与直线BC相切，故满足条件的点E只有1个. 故选B.



4. C　【解析】设圆锥PO的底面圆半径为r，则$\pi r^2+\pi r\cdot 3=10\pi$，而$r>0$，解得$r=2$，则$PO=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$.

取OB的中点N，连接MN,CN，由M为PB的中点，得$MN/\!/PO$，

而$PO\perp$平面BOC，则$MN\perp$平面BOC，又$CN\subset$平面BOC，所以$MN\perp CN$，

又O为AB的中点，则$OM=\frac{1}{2}PA=\frac{3}{2}$，

$MN=\frac{1}{2}PO=\frac{\sqrt{5}}{2}$，

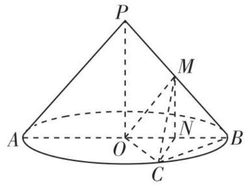
由$\angle BOC=60°$，$OB=OC$得$\triangle BOC$是正三角形，则$CN\perp OB$，$CN=\sqrt{3}$，则$CM^2=CN^2+MN^2=\frac{17}{4}$，

在$\triangle MOC$中，由余弦定理得$\cos\angle MOC=\frac{OM^2+OC^2-CM^2}{2\cdot OM\cdot OC}=\frac{\frac{9}{4}+4-\frac{17}{4}}{2\times\frac{3}{2}\times 2}=\frac{1}{3}$，

所以$\sin\angle MOC=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\triangle MOC$的面积为$\frac{1}{2}OC\cdot OM\cdot\sin\angle MOC=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{3}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$.

故选C.



5. 7　【解析】在正三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，

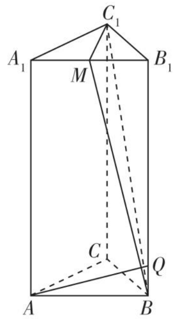
因为点M为A_1B_1的中点，

所以$C_1M\perp A_1B_1$，因为$A_1A\perp$平面$A_1B_1C_1$，$C_1M\subset$平面$A_1B_1C_1$，

所以$AA_1\perp C_1M$，因为$AA_1\cap A_1B_1=A_1$，$AA_1,A_1B_1\subset$平面AA_1B_1B，

所以$C_1M\perp$平面AA_1B_1B，因为$C_1M\subset$平面BC_1M，

所以平面$BC_1M\perp$平面AA_1B_1B.



因为$AQ\subset$平面AA_1B_1B，平面$BC_1M\cap$平面$AA_1B_1B=BM$，

且$AQ\perp$平面BC_1M，所以$AQ\perp BM$，可得$\triangle ABQ\backsim\triangle BB_1M$，

所以$\frac{BQ}{B_1M}=\frac{AB}{BB_1}$，所以$BQ=\frac{1}{2}$，所以$B_1Q=B_1B-BQ=\frac{7}{2}$，

所以$\frac{B_1Q}{QB}=7$.

6. (1)【证明】连接CE.

因为E是AD的中点，所以$AD=2AE$，

因为四边形$ABCD$是直角梯形，$AD=2AB=2BC=4$，且$AB\perp AD$，$AB\perp BC$，

所以四边形$ABCE$是正方形，则$BE\perp AC$.

因为$PC\perp BE$，$PC,AC\subset$平面PAC，且$PC\cap AC=C$，

所以$BE\perp$平面PAC.

(2)【解】作$BH\perp PA$，垂足为H，连接EH,PE.

由(1)可知$BE\perp$平面PAC. 又$PA\subset$平面PAC，所以$PA\perp BE$.

因为$BH,BE\subset$平面BEH，且$BH\cap BE=B$，

所以$PA\perp$平面BEH.

因为$EH\subset$平面BEH，所以$PA\perp EH$，则$\angle BHE$是二面角$B-PA-D$的平面角.

记$AC\cap BE=O$，连接OP，则O是AC的中点.

因为$PA=PC$，且O是AC的中点，所以

$OP\perp AC$.

因为 $BE\perp$ 平面 PAC,且 $OP\subset$ 平面 PAC,所以 $BE\perp OP$.

因为 $AC,BE\subset$ 平面 $ABCE$,且 $AC\cap BE=O$,所以 $OP\perp$ 平面 $ABCE$,

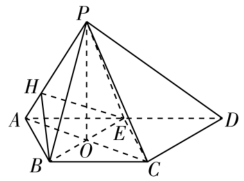
则四棱锥 $P-ABCE$ 为正四棱锥,故 $PA=PB=PE=2\sqrt{2}$.

因为 $\triangle PAB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}AB\cdot\sqrt{PA^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}PA\cdot BH$,

即 $\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{8-1}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times BH$,所以 $BH=\frac{\sqrt{14}}{2}$. 同理可得 $EH=BH=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

又 $BE=\sqrt{2}AB=2\sqrt{2}$,则在 $\triangle BEH$ 中,由余弦定理可得 $\cos\angle BHE=\frac{BH^2+EH^2-BE^2}{2BH\cdot EH}=-\frac{1}{7}$,

则 $\sin\angle BHE=\sqrt{1-\cos^2\angle BHE}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$,即二面角 $B-PA-D$ 的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{7}$.



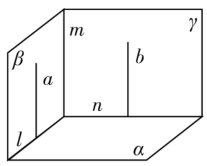
7. C 【解析】由二面角 $A-BC-D$ 为直二面角,可得平面 $ABC\perp$ 平面 BCD,又因为平面 $ABC\cap$ 平面 $BCD=BC$,$DC\perp BC$,且 $DC\subset$ 平面 BCD,所以 $DC\perp$ 平面 ABC,故①正确;

由 $DC\perp$ 平面 ABC,且 $AB\subset$ 平面 ABC,可得 $AB\perp CD$,又因为 $AB\perp AC$,且 $AC\cap CD=C$,$AC,CD\subset$ 平面 ACD,所以 $AB\perp$ 平面 ACD,故②正确;

因为 $AB\perp$ 平面 ACD,且 $AB\subset$ 平面 ABD,所以平面 $ABD\perp$ 平面 ACD,故③正确;

由题易知平面 $ABC\perp$ 平面 BCD,若平面 $ABD\perp$ 平面 BCD,则由平面 $ABD\cap$ 平面 $ABC=AB$,可得 $AB\perp$ 平面 BCD,又因为 $BC\subset$ 平面 BCD,所以 $AB\perp BC$,因为 AB 与 BC 不垂直,矛盾,所以平面 ABD 和平面 BCD 不垂直,故④错误. 故选 C.

8. C 【解析】当 α,β,γ 两两垂直时,在 β 内作 $a\perp l$,在 γ 内作 $b\perp n$,如图所示.



因为 $\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l$,

$a\perp l,a\subset\beta,\gamma\perp\alpha,\gamma\cap\alpha=n,b\perp n,b\subset\gamma$,

所以 $a\perp\alpha,b\perp\alpha$,所以 $a//b$,

因为 $a\not\subset\gamma,b\subset\gamma$,所以 $a//\gamma$,

因为 $a\subset\beta,\beta\cap\gamma=m$,所以 $a//m$,

因为 $a\perp\alpha$,所以 $m\perp\alpha$,

因为 $l,n\subset\alpha$,所以 $m\perp l,m\perp n$,

同理可证得 $n\perp l$,所以 l,m,n 两两垂直,必要性成立;

当 l,m,n 两两垂直时,因为 $\alpha\cap\beta=l,\beta\cap\gamma=m,\gamma\cap\alpha=n$,

所以 $n,l\subset\alpha,l,m\subset\beta,m,n\subset\gamma$,

因为 $m\perp n$,所以 m 与 n 是相交直线,

因为 $l\perp m,l\perp n,m,n\subset\gamma$,所以 $l\perp\gamma$,

因为 $l\subset\alpha,l\subset\beta$,所以 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$,

同理可证得 $\alpha\perp\beta$,所以 α,β,γ 两两垂直,充分性成立,

所以"l,m,n 两两垂直"是"α,β,γ 两两垂直"的充要条件,

故选 C.

9. D 【解析】如图所示,设 $AB=CD=2a$,则矩形 $ABCD$ 的面积 $S_{矩形ABCD}=3\times2a=6a$,

取 CD 的中点 F,连接 PF,如图所示,

因为 $\triangle PCD$ 是等边三角形,$PC=PD=CD=2a$,所以 $PF\perp CD$,且 $PF=\sqrt{3}a$,

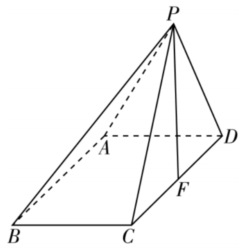
因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $PCD\cap$ 平面 $ABCD=CD$,$PF\subset$ 平面 PCD,

所以 $PF\perp$ 平面 $ABCD$,即 PF 是四棱锥 $P-ABCD$ 的高,

所以四棱锥 $P-ABCD$ 的体积 $V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}S_{矩形ABCD}\cdot PF=\frac{1}{3}\times6a\times\sqrt{3}a=18\sqrt{3}$,

解得 $a=3$,所以 $AB=2a=6$.

故选 D.

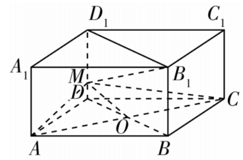


10. AB 【解析】由图可知直线 AC 和直线 B_1D_1 异面,则过空间中一点有且仅有一条直线与它们都垂直,故 A 正确;

提示:异面直线经过平移在同一平面上时是相交直线,此时可通过经过空间中一点有且只有一条直线与已知平面垂直得到

点 M 不在直线 AC 上,则点 M 与直线 AC 构成平面 MAC,点 M 不在直线 B_1D_1 上,则点 M 与直线 B_1D_1 构成平面 MB_1D_1,易知平面 MAC 与 MB_1D_1 相交,交线为 MO,易得直线 MO 与直线 AC,B_1D_1 均相交,且只有一条过点 M 的直线为平面 MAC 与平面 MB_1D_1 的交线,此直线 MO 即为过点 M 且与 AC,B_1D_1 都相交的直线,所以过点 M 有且仅有一条直线与直线 AC,B_1D_1 都相交,故 B 正确;

连接 BD 交 AC 于点 O,连接 MO,易知 $MA=MC$,所以 $MO\perp AC$,可知 M 到 AC 的距离大于 DO,且 $DO=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}AA_1$,又 M 到 B_1D_1 的距离小于 AA_1,结合 $AC=B_1D_1$,所以 $\triangle MAC$ 与 $\triangle MB_1D_1$ 的面积不可能相等,故 C 错误;由正四棱柱的性质可得 $AC\perp$ 平面 MB_1D_1,又 $AC\subset$ 平面 MAC,所以对任意 M 恒有平面 $MAC\perp$ 平面 MB_1D_1,故 D 错误.



11. (1)【证明】因为 $A_1C\perp$ 平面 ABC,$BC\subset$ 平面 ABC,

所以 $A_1C\perp BC$.

又 $AC\perp BC$,$A_1C\cap AC=C$,所以 $BC\perp$ 平面 ACC_1A_1.

因为 $BC\subset$ 平面 BB_1C_1C,所以平面 $ACC_1A_1\perp$ 平面 BB_1C_1C.

(2)【解】由(1)可知,$A_1C\perp BC$,又因为 $AB=A_1B$,$AC\perp BC$,所以 $CA=CA_1$,所以 $\triangle AA_1C$ 是等腰直角三角形,所以 $\triangle CA_1C_1$ 是等腰直角三角形.

如图,取 CC_1 的中点为 D,连接 A_1D,则 $A_1D\perp CC_1$,

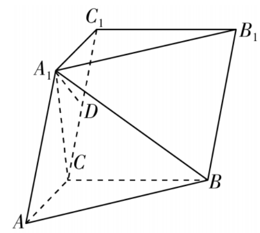
由(1)可知,$BC\perp$ 平面 ACC_1A_1,而 $A_1D\subset$ 平面 ACC_1A_1,

所以 $A_1D\perp BC$,又 $BC\cap CC_1=C$,所以 $A_1D\perp$ 平面 BB_1C_1C,

所以四棱锥 $A_1-BB_1C_1C$ 的高即为 A_1D.

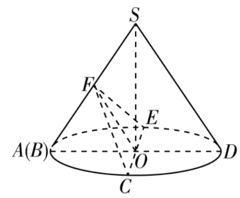
又 $A_1D=\frac{CC_1}{2}=\frac{AA_1}{2}=1$,

所以四棱锥 $A_1-BB_1C_1C$ 的高为 1.



刷上分

1. C 【解析】依题意,该半圆围成如图所示的圆锥,记 $AD\cap CE=O$,



设圆锥底面半径为 r,则 $2\pi r=4\pi$,$\therefore r=2$,

$\therefore CE=4$,

$\because F$ 为 AS 的中点,O 为 AD 的中点,

$\therefore FO//SD$,且 $FO=\frac{1}{2}SD=2=\frac{1}{2}CE$,

$\therefore\angle CFE=90^\circ$,$\triangle CEF$ 为等腰直角三角形,故 A 错误;

若 $SA\perp$ 平面 CEF,又 $OF\subset$ 平面 CEF,则 $SA\perp OF$,则 $\angle AFO=90^\circ$,在 $\triangle OAF$ 中,$AO=OF=AF=2$,

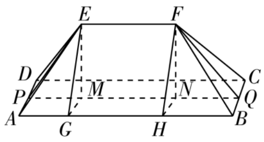
$\therefore\angle AFO=60^\circ$,矛盾,故 B 错误;

∵ $FO/\!/SD$，$SD\not\subset$ 平面 CEF，$OF\subset$ 平面 CEF，∴ $SD/\!/$平面 CEF，故 C 正确；
∵ $CE\perp AD$，$CE\perp SO$，$AD\cap SO=O$，AD，$SO\subset$平面 ASD，∴ $CE\perp$平面 SAD，又 $CE\subset$平面 CEF，∴ 平面 $CEF\perp$平面 SAD，
∴ D 到直线 FO 的距离即为 D 到平面 CEF 的距离，
又∵ $FO/\!/SD$，∴ D 到直线 FO 的距离等于 O 到直线 SD 的距离，设 O 到 SD 的距离为 h，则 $\frac{1}{2}OD\cdot SO=\frac{1}{2}SD\cdot h$，即 $\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=\frac{1}{2}h\times4$，∴ $h=\sqrt{3}$，即点 D 到平面 CEF 的距离为 $\sqrt{3}$，故 D 错误.

关键点拨 根据题意将平面图形还原为圆锥，找出对应线段的长度关系.

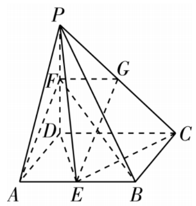
2. C 【解析】设 $BM=x$，$MC=y$，则 $BC=AD=x+y$.
因为 $AA_1\perp$平面 $ABCD$，$MD\subset$平面 $ABCD$，所以 $AA_1\perp MD$.
又 $AM\perp MD$，$AA_1\cap AM=A$，AA_1，$AM\subset$平面 AA_1M，
所以 $MD\perp$平面 AA_1M，
由题意知，$AM=\sqrt{x^2+1}$，$MD=\sqrt{y^2+1}$.
在 Rt$\triangle AMD$ 中，$AM^2+MD^2=AD^2$，
即 $x^2+1+y^2+1=(x+y)^2$，化简得 $xy=1$.
所以 $V_{A_1-AMD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\cdot(x+y)\cdot1\times\sqrt{3}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot2\sqrt{xy}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，
当且仅当 $x=y=1$ 时取等号，此时 $BC=x+y=2$.
故选 C.

3. C 【解析】根据题意及对称性可知底面四边形 $ABCD$ 为矩形，
设 E，F 在底面矩形上的射影点分别为 M，N，设 AD 与 BC 的中点分别为 P，Q，
则 M，N 在线段 PQ 上，如图，在平面 $ABCD$ 中，过 M，N 分别作 AB 的垂线，垂足分别为 G，H，
连接 GE，HF，EP，FQ，
∵ $EM\perp$平面 $ABCD$，又 $MG\perp AB$，则 $\angle EGM$ 为等腰梯形所在的平面与底面的夹角的平面角，
同理可知 $\angle FHN$ 为等腰梯形所在的平面与底面的夹角，$\angle FQN$，$\angle EPM$ 分别为等腰三角形所在的平面与底面的夹角，
则 $\tan\angle EPM=\tan\angle EGM=\tan\angle FHN=\tan\angle FQN=\frac{\sqrt{14}}{5}$，
又 $MG=NH=5$，∴ $EM=FN=\sqrt{14}$，∴ $PM=QN=5$，∴ $EP=FQ=\sqrt{14+25}=\sqrt{39}$，
∴ $MN=PQ-PM-QN=AB-PM-QN=25-5-5=15$，∴ $EF=MN=15$，
在等腰三角形 FBC 中，Q 为底边 BC 的中点，∴ $BC\perp FQ$，
又 $BQ=5$，$FQ=\sqrt{39}$，∴ $FB=\sqrt{39+25}=8$，
∴ $ED=EA=FC=FB=8$，
∴ 该多面体的所有棱长之和为 $8\times4+(25+10)\times2+15=117$.
故所需灯带的长度为 117 m. 故选 C.



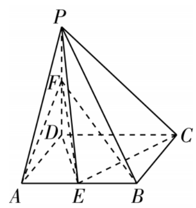
4. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 【解析】在 Rt$\triangle ABC$ 中，$BC=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，则 $AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，又平面 $ABC\perp\alpha$，
平面 $ABC\cap\alpha=AC$，$AC\perp BC$，$BC\subset$平面 ABC，所以 $BC\perp$平面 α.
又 $CP\subset\alpha$，所以 $BC\perp CP$，所以 $CP=\sqrt{BP^2-BC^2}=\sqrt{BP^2-\frac{1}{3}}$.
设 $\angle ABP=\theta(0<\theta<\pi)$，
则 $S_{\triangle ABP}=\frac{1}{2}AB\cdot BP\sin\theta$，即 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot BP\sin\theta$，解得 $BP=\frac{1}{\sin\theta}$.
易知当 $\sin\theta=1$，即 $\theta=\frac{\pi}{2}$，
提示：$\sin\theta\leqslant1$
即 $AB\perp BP$ 时，BP 取到最小值 1，此时 CP 取到最小值，最小值为 $\sqrt{BP^2-\frac{1}{3}}=\sqrt{1^2-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. (1)【证明】取 PC 的中点为 G，连接 EG，FG，如图①所示，易得 $FG/\!/CD$，且 $FG=\frac{1}{2}CD$，
又底面 $ABCD$ 是菱形，$AE=\frac{1}{2}AB$，∴ $AB/\!/CD$，则 $FG/\!/AE$，$FG=AE$，
即四边形 $AEGF$ 为平行四边形，∴ $AF/\!/EG$.
∵ $EG\subset$平面 PCE，$AF\not\subset$平面 PCE，
∴ $AF/\!/$平面 PCE.

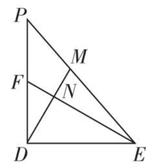


图①

(2)【解】存在点 M，此时 $\frac{PM}{PE}=\frac{2}{5}$. 理由如下：
连接 EF，如图②，由(1)得 $AE=\frac{1}{2}AD=1$，
且 $\angle DAB=60°$，∴ $\angle AED=90°$，$DE=\sqrt{3}$，
即 $AB\perp DE$，又平面 $PDE\perp$平面 $ABCD$，且平面 $PDE\cap$平面 $ABCD=DE$，$AB\subset$平面 $ABCD$，
∴ $AB\perp$平面 PDE，又∵ $AB\subset$平面 ABF，则平面 $PDE\perp$平面 ABF，
∵ 平面 $PDE\cap$平面 $ABF=EF$，∴ 在平面 PDE 内，过点 D 作 $DM\perp EF$ 于点 N，且与 PE 相交于点 M，平面 PDE 如图③所示，
则满足 $DM\perp$平面 ABF.
若选①，由 $PE=CE$，可知 $\triangle CDE\cong\triangle PDE$，
又 $AB\perp DE$，即 $CD\perp DE$，∴ $\angle PDE=90°$，
可知 $DF=1$，则 $\angle DFE=60°$，
∴ $\angle PDM=30°$，
又 $PE=\sqrt{PD^2+DE^2}=\sqrt{7}$，
∴ $\sin\angle DPE=\cos\angle PED=\frac{\sqrt{21}}{7}$，$\cos\angle DPE=\frac{2\sqrt{7}}{7}$，
则在 $\triangle PDM$ 中，$\sin\angle PMD=\sin(\angle DPE+\angle PDM)=\sin\angle DPE\cos\angle PDM+\cos\angle DPE\sin\angle PDM=\frac{5\sqrt{7}}{14}$，又由正弦定理 $\frac{PM}{\sin\angle PDM}=\frac{PD}{\sin\angle PMD}$，得 $PM=\frac{2\sqrt{7}}{5}$，
∴ $\frac{PM}{PE}=\frac{2}{5}$.
若选②，由 $\cos\angle PED=\frac{\sqrt{21}}{7}$，在 $\triangle PED$ 中，
由余弦定理得 $\cos\angle PED=\frac{PE^2+DE^2-PD^2}{2PE\cdot DE}$，
即 $\frac{PE^2+3-4}{2\sqrt{3}PE}=\frac{\sqrt{21}}{7}$，解得 $PE=\sqrt{7}$（负值舍去），
∴ $PE^2=DE^2+PD^2$，即 $\angle PDE=90°$，
下同选①.



图②



图③

考向 37 空间角和距离

刷考点

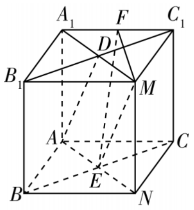
1. D 【解析】把直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补成一个底面为菱形的直四棱柱，如图所示.
因为 $DM=AE$，且 $DM/\!/AE$，所以四边形 $ADME$ 为平行四边形，所以 $AD/\!/ME$，
所以异面直线 AD 与 EF 所成的角为 $\angle FEM$ 或其补角，不妨设 $AC=AB=AA_1=a$，
因为 $\angle BAC=120°$，所以 $\angle ABN=60°$，所以 $\triangle ABN$ 为等边三角形，所以 $AN=a$，$EN=\frac{1}{2}AN=\frac{1}{2}a$，所以 $ME=\sqrt{MN^2+EN^2}=$

$\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

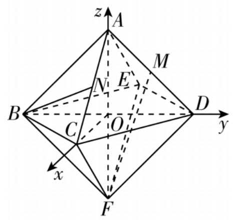
因为$\triangle A_1MC_1$是边长为a的等边三角形，所以$FM=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，又因为$EF=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，

所以在$\triangle EFM$中，由余弦定理可得$\cos\angle FEM=\frac{EF^2+EM^2-FM^2}{2EF\times EM}=\frac{7}{10}$，

故异面直线AD与EF所成角的余弦值为$\frac{7}{10}$. 故选D.



2. D 【解析】连接BD，AF交于点O，连接OC，易知OC，OD，OA两两垂直，如图，建立空间直角坐标系$O-xyz$，则$B(0,-\sqrt{2},0)$，$C(\sqrt{2},0,0)$，$A(0,0,\sqrt{2})$，$D(0,\sqrt{2},0)$，$F(0,0,-\sqrt{2})$，



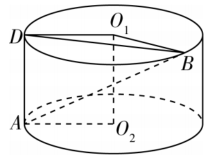
所以$N\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$M\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{BN}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{FM}=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$，

所以$|\cos\langle\overrightarrow{BN},\overrightarrow{FM}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{FM}|}{|\overrightarrow{BN}||\overrightarrow{FM}|}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{6}$，即直线$BN$与$FM$所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{6}$. 故选D.

3. D 【解析】如图，过点A作AD垂直于圆柱上底面于点D，则AD是母线，连接DB，DO_1，O_1O_2，$\because O_1O_2\perp$底面，$\therefore AD//O_1O_2$，又$AD=O_1O_2$，则四边形ADO_1O_2是平行四边形，则$O_1D//O_2A$，$\therefore O_2A$与O_1B所成的角就是$\angle DO_1B$或其补角.

当$\angle DO_1B=\frac{\pi}{3}$时，$\triangle DO_1B$是等边三角形，$BD=1$，在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，$AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=\sqrt{2}$；当$\angle DO_1B=\frac{2\pi}{3}$时，在$\triangle O_1DB$中，$BD=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，在$\mathrm{Rt}\triangle ABD$中，$AB=\sqrt{BD^2+AD^2}=2$. 综上，$AB=2$或$\sqrt{2}$. 故选D.



易错警示 异面直线所成角的范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$. 利用平移作异面直线所成角时，作出的角不一定是异面直线所成角，还可能是异面直线所成角的补角，需要进行分类讨论.

4. $\frac{2}{3}$ 【解析】因为在矩形$ABCD$中，$AB=1$，$BC=\sqrt{2}$，E是边BC的中点，所以$BE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故$\frac{BE}{AB}=\frac{AB}{AD}$，又$\angle BAD=\angle ABE=90°$，

所以$\triangle ABE\backsim\triangle DAB$，所以$\angle BAE=\angle ADB$，

则$\angle BAE+\angle ABD=\angle ADB+\angle ABD=90°$，

故$AE\perp MD$.

将$\triangle ABE$沿AE折起，使点B移动到点B'处，且AB'与MD垂直.

因为$AE\cap AB'=A$，AE，$AB'\subset$平面$AB'E$，

所以$MD\perp$平面$AB'E$，因为$MD\subset$平面$AECD$，

所以平面$AB'E\perp$平面$AECD$，

因为平面$AB'E\cap$平面$AECD=AE$，$B'M\perp AE$，$B'M\subset$平面$AB'E$，所以$B'M\perp$平面$AECD$.

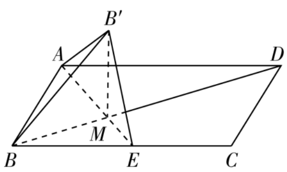
易知$CD//AB$，连接$B'B$，则$\angle B'AB$或其补角即为异面直线$B'A$和CD所成的角.

因为$AB=1$，$BE=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$AE=\sqrt{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

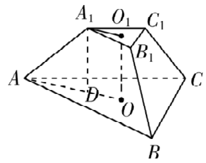
故$BM=B'M=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则$BB'=\sqrt{BM^2+B'M^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

又$AB'=AB=1$，故$\cos\angle B'AB=\frac{AB^2+AB'^2-B'B^2}{2AB\cdot AB'}=\frac{1+1-\frac{2}{3}}{2}=\frac{2}{3}$，

即异面直线BA和CD所成角的余弦值为$\frac{2}{3}$.



5. B 【解析】设正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的高为h. $\because AB=6$，$A_1B_1=2$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times6\times\sin\frac{\pi}{3}=9\sqrt{3}$，$S_{\triangle A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}\times2\times2\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. $\because$正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$的体积$V=\frac{1}{3}(S_{\triangle ABC}+S_{\triangle A_1B_1C_1}+\sqrt{S_{\triangle ABC}\cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}})\cdot h=\frac{1}{3}\times(9\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{9\sqrt{3}\times\sqrt{3}})h=\frac{13\sqrt{3}}{3}h=\frac{52}{3}$，$\therefore h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 如图，



设$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$的中心分别为O，O_1，连接A_1O_1，O_1O，AO，作$A_1D\perp$平面ABC交平面ABC于点D，由几何体$ABC-A_1B_1C_1$为正三棱台可知，点D在AO上，且四边形A_1O_1OD为矩形，其中$\angle A_1AD$即为直线A_1A与平面ABC所成的角. 由$AB=6$，$A_1B_1=2$，可得$OA=2\sqrt{3}$，$O_1A_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

敲黑板： 边长为a的正三角形的中心到各顶点的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$

$\therefore AD=OA-OD=OA-O_1A_1=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore\tan\angle A_1AD=\frac{A_1D}{AD}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=1$. 故选B.

一题多解 将正三棱台$ABC-A_1B_1C_1$补成正三棱锥$P-ABC$，

则A_1A与平面ABC所成角即为PA与平面ABC所成角.

因为$\frac{PA_1}{PA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{3}$，所以$\frac{V_{棱锥P-A_1B_1C_1}}{V_{棱锥P-ABC}}=\frac{1}{27}$.

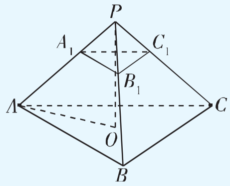
棱锥被平行于底面的平面所截，截得的小棱锥与原棱锥的体积比等于对应边的立方比

可知$V_{棱台ABC-A_1B_1C_1}=\frac{26}{27}V_{棱锥P-ABC}=\frac{52}{3}$，则$V_{棱锥P-ABC}=18$，

设正三棱锥$P-ABC$的高为d，则$V_{棱锥P-ABC}=\frac{1}{3}d\times\frac{1}{2}\times6\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=18$，解得$d=2\sqrt{3}$.

取底面ABC的中心为O，连接PO，AO，则$PO\perp$底面ABC，$PO=2\sqrt{3}$，且$AO=2\sqrt{3}$，

所以PA与平面ABC所成角的正切值为$\tan\angle PAO=\frac{PO}{AO}=1$. 故选B.

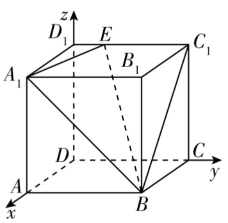


6. C 【解析】以 D 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系，

不妨设 $AD=1$，$D_1E=a(0\leqslant a\leqslant 1)$，则 $A_1(1,0,1)$，$B(1,1,0)$，$E(0,a,1)$，$C_1(0,1,1)$，

则 $\overrightarrow{A_1B}=(0,1,-1)$，$\overrightarrow{A_1E}=(-1,a,0)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,0,1)$，设平面 A_1BE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}y-z=0,\\ -x+ay=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，则 $\boldsymbol{n}=(a,1,1)$，所以 $\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{BC_1}|}=\dfrac{1-a}{\sqrt{a^2+2}\times\sqrt{2}}$，当 $a=1$ 时，$\sin\theta=0$，当 $0\leqslant a<1$ 时，令 $t=1-a(0<t\leqslant 1)$，则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{t}{\sqrt{t^2-2t+3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{2}{t}+1}}$，由于函数 $y=\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{2}{t}+1=3\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{2}{3}$，故当 $t=1$ 时，$y=\dfrac{3}{t^2}-\dfrac{2}{t}+1$ 取最小值 2，故此时 $(\sin\theta)_{\max}=\dfrac{1}{2}$. 综上可知，$(\sin\theta)_{\max}=\dfrac{1}{2}$，由于 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，故 $(\cos\theta)_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

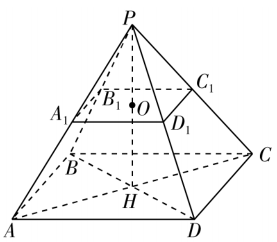
故选 C.



7. A 【解析】依题意，过正四棱锥 $P-ABCD$ 的高 PH 的中点 O 作平行于底面 $ABCD$ 的截面 $A_1B_1C_1D_1$，如图所示.

则 A_1,B_1,C_1,D_1 分别为棱 PA,PB,PC,PD 的中点，

设正方形 $ABCD$ 的边长 $AD=a$，$PA=b(a>0,b>0)$，



则正方形 $ABCD$ 的面积为 a^2，正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 的面积为 $\dfrac{1}{4}a^2$，正四棱锥 $P-ABCD$ 的侧面积为 $4\times\dfrac{1}{2}a\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=2a\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$，

正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧面积为 $4\left[\dfrac{1}{2}a\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}a\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}\right]=\dfrac{3}{2}a\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$，

所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的表面积为 $a^2+2a\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$，

正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面积为 $a^2+\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{3}{2}a\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{5}{4}a^2+\dfrac{3}{2}a\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}$，

则 $\dfrac{a^2+2a\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}{\dfrac{5}{4}a^2+\dfrac{3}{2}a\sqrt{b^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}}=\dfrac{12}{11}$，解得 $b=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

因为 $PH\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $\angle PAH$ 为直线 PA 与底面 $ABCD$ 所成的角，所以 $\cos\angle PAH=\dfrac{AH}{PA}$，又 $AH=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$，$PA=b=\dfrac{\sqrt{5}}{2}a$，

所以 $\cos\angle PAH=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，故选 A.

8. (1)【证明】$\because PA=AD=1$，且 E 为棱 PD 的中点，$\therefore AE\perp PD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AD\perp CD$，

又 $\because PA\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，

$\therefore PA\perp CD$.

$\because AD\cap PA=A$，$AD,PA\subset$ 平面 PAD，

$\therefore CD\perp$ 平面 PAD.

$\because AE\subset$ 平面 PAD，$\therefore CD\perp AE$.

又 $\because PD\cap CD=D$，$PD,CD\subset$ 平面 PCD，

$\therefore AE\perp$ 平面 PCD.

(2)【解】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，

$\therefore AB\perp AD$，$\therefore$ 以 A 为坐标原点，AB,AD,AP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，又 $\because E$ 为 PD 的中点，$\therefore E\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，

则 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{PC}=(1,1,-1)$.

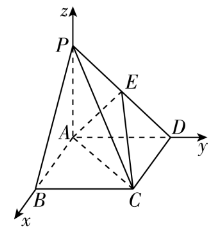
设平面 ACE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=x+y=0,\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{2}z=0,\end{cases}$

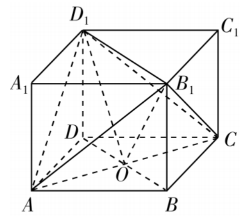
令 $x=1$，则 $y=-1$，$z=1$，即 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$，

$\therefore \cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{1-1-1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{3}$，

$\therefore$ 直线 PC 与平面 ACE 所成角的正弦值为 $\dfrac{1}{3}$.



9. $\dfrac{\pi}{3}$ 【解析】连接 BD 交 AC 于点 O，连接 OD_1，OB_1，B_1D_1，如图.



因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是直四棱柱，且四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形，

则 $AD_1=CD_1=\sqrt{7}$，$AB_1=CB_1=\sqrt{7}$，且 O 为 AC 的中点，则 $OA=\sqrt{3}$，

所以 $OD_1\perp AC$，$OB_1\perp AC$，则 $\angle D_1OB_1$ 为二面角 D_1-AC-B_1 的平面角.

因为 $OB_1=OD_1=\sqrt{AD_1^2-OA^2}=2$，且 $D_1B_1=DB=2$，

所以 $\triangle OD_1B_1$ 为等边三角形，所以 $\angle D_1OB_1=\dfrac{\pi}{3}$.

所以二面角 D_1-AC-B_1 的平面角的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$.

10. (1)【证明】过点 C_1 作 $C_1O_1\perp AC$，交 AC 于点 O_1.

因为平面 $A_1C_1CA\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $A_1C_1CA\cap$ 平面 $ABCD=AC$，$C_1O_1\subset$ 平面 A_1C_1CA，所以 $C_1O_1\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $\angle C_1CO_1$ 为直线 CC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，所以 $\angle C_1CO_1=60^\circ$.

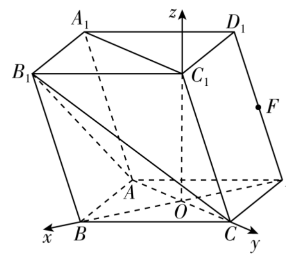
由 $CC_1=AA_1=2$，得 $CO_1=1$，

又因为底面 $ABCD$ 为正方形，$AB=\sqrt{2}$，

所以 $AC=2$，且 O 是 AC 中点，所以 $CO=1$，

可知 O,O_1 为同一点，所以 $C_1O\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)【解】因为底面 $ABCD$ 是正方形，所以 $AC\perp BD$，以 O 为原点，OB,OC,OC_1 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图所示.



由图易知 $AC=BD=2$，$CO=1$，$CC_1=AA_1=2$，$C_1O=\sqrt{3}$，

则 $A(0,-1,0)$，$C(0,1,0)$，$C_1(0,0,\sqrt{3})$，$B(1,0,0)$，$D(-1,0,0)$.

又 $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，所以 $B_1(1,-1,\sqrt{3})$，

所以 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,\sqrt{3})$.

设平面 ACB_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$

令 $z=1$，则 $x=-\sqrt{3}$，$y=0$，得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},0,1)$.

因为 $\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(-1,-1,0)$，

设平面 CDD_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

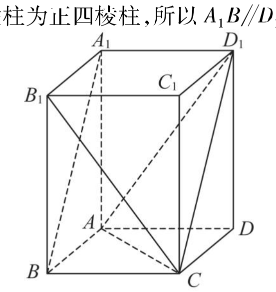
所以 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CC_1}=-y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=-x_1-y_1=0,\end{cases}$

令 $z_1=1$，则 $x_1=-\sqrt{3}$，$y_1=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{m}=(-\sqrt{3},\sqrt{3},1)$，所以 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\dfrac{|-\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})+0\times\sqrt{3}+1\times1|}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+0^2+1^2}\times\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$，

所以平面 ACB_1 与平面 CDD_1C_1 的夹角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

易错警示　面面夹角是平面 α 与平面 β 相交形成的四个二面角中不大于 $\dfrac{\pi}{2}$ 的二面角，故面面夹角 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，因此面面夹角的余弦值一定不小于 0，故两平面法向量夹角的余弦值的绝对值就是两平面夹角的余弦值，不用分情况讨论面面夹角是锐角还是钝角，注意和二面角进行区分.

11. B　【解析】如图，连接 D_1C，AC，因为该四棱柱为正四棱柱，所以 $A_1B/\!/D_1C$，



所以 $\angle AD_1C$（或其补角）为异面直线 A_1B 与 AD_1 所成角.

设底面正方形 $ABCD$ 的边长为 $a(a>0)$，

则 $AC=\sqrt{2}a$，$AD_1=CD_1=\sqrt{a^2+4}$，

在 $\triangle AD_1C$ 中，$\cos\angle AD_1C=\dfrac{AD_1^2+CD_1^2-AC^2}{2AD_1\cdot CD_1}=\dfrac{8}{2a^2+8}=\dfrac{4}{5}$，

解得 $a=1$.

因为该四棱柱为正四棱柱，所以 $AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，$B_1C\subset$ 平面 BCC_1B_1，

所以 $AB\perp B_1C$，同理 $AB\perp AD_1$，

所以直线 AD_1 与直线 B_1C 的距离为 $AB=a=1$. 故选 B.

方法技巧　**求异面直线间距离的常用方法**

①定义法：两异面直线公垂线段的长度；②转化为其中一条直线到过另一直线且与该线平行的平面间的距离；③转化为分别过两条异面直线，且互相平行的两平行平面间的距离；④异面直线上两点连线线段长度的最小值.

12. B　【解析】由直三棱柱可得 $BB_1\perp$ 平面 ABC，又 $AB\perp BC$，

因此建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $B(0,0,0)$，$A(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$C_1(2,0,2)$，$P(0,1,2)$，

设 $\overrightarrow{C_1Q}=\lambda\overrightarrow{C_1P}=\lambda(-2,1,0)=(-2\lambda,\lambda,0)$，其中 $\lambda\in[0,1]$，则 $Q(2-2\lambda,\lambda,2)$，

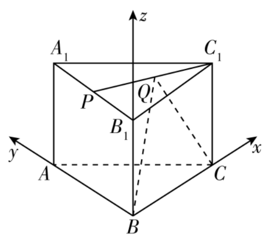
$\overrightarrow{CQ}=(-2\lambda,\lambda,2)$，$\overrightarrow{CB}=(-2,0,0)$，

故点 Q 到直线 BC 的距离

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{CQ}|^2-\left(\frac{|\overrightarrow{CQ}\cdot\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{CB}|}\right)^2}$$

$$=\sqrt{4\lambda^2+\lambda^2+4-\left(\frac{|4\lambda|}{2}\right)^2}=\sqrt{\lambda^2+4}，$$

因为 $\lambda\in[0,1]$，所以 $d\in[2,\sqrt{5}]$，故 $S_{\triangle QBC}=\dfrac{1}{2}\times d\times BC=d\in[2,\sqrt{5}]$. 故选 B.



13. D　【解析】因为三棱锥 $D-ABE$ 的高即为圆柱的高，即高 $AD=4$，

所以当三棱锥 $D-ABE$ 体积最大时，直角三角形 ABE 的面积最大，

此时点 E 是弧 AB 的中点，即 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形时，面积最大，

此时 $S_{\triangle ABE}=\dfrac{1}{2}\times4\times2=4$，$V_{三棱锥D-ABE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ABE}\cdot AD=\dfrac{1}{3}\times4\times4=\dfrac{16}{3}$.

连接 AC 交 BD 于点 O，所以 O 为 AC 的中点，

所以点 C 到平面 BDE 的距离等于点 A 到平面 BDE 的距离.

设点 A 到平面 BDE 的距离为 h，

因为 $AD\perp$ 平面 ABE，$BE\subset$ 平面 ABE，所以 $AD\perp BE$.

又 $AE\perp BE$，$AD\cap AE=A$，AD，$AE\subset$ 平面 ADE，

所以 $BE\perp$ 平面 ADE，

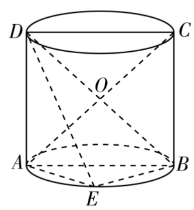
因为 $DE\subset$ 平面 ADE，所以 $BE\perp DE$，

$DE=\sqrt{AD^2+AE^2}=\sqrt{16+8}=2\sqrt{6}$，

所以 $S_{\triangle BDE}=\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{6}=4\sqrt{3}$，

所以 $V_{三棱锥D-ABE}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BDE}\cdot h=\dfrac{16}{3}$，

解得 $h=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. 故选 D.



一题多解　因为三棱锥 $D-ABE$ 的高即为圆柱的高，即高 $AD=4$，

所以当三棱锥 $D-ABE$ 体积最大时，直角三角形 ABE 的面积最大，

此时点 E 是弧 AB 的中点，即 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形时，面积最大.

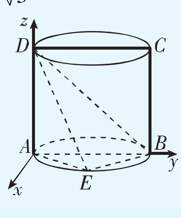
以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系，可得 $E(2,2,0)$，$B(0,4,0)$，$D(0,0,4)$，$C(0,4,4)$，则 $\overrightarrow{DB}=(0,4,-4)$，$\overrightarrow{DE}=(2,2,-4)$，$\overrightarrow{BC}=(0,0,4)$.

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$ 为平面 BDE 的法向量，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{DB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{DE}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}4y-4z=0,\\ 2x+2y-4z=0,\end{cases}$

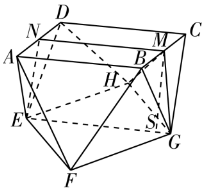
令 $y=1$，则 $z=1$，$x=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，

所以点 C 到平面 BDE 的距离 $h=\dfrac{|\overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$. 故选 D.

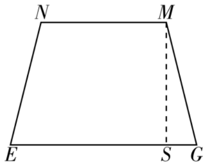


14. B　【解析】分别取 BC，AD 的中点 M，N，连接 MN，MG，NE，EG，如图①，

根据半正多面体的性质可知，四边形 $EGMN$ 为等腰梯形.



图①



图②

根据题意可知 $BC\perp MN$，$BC\perp MG$，
$MN\cap MG=M$，$MN,MG\subset$平面 $EGMN$，
故 $BC\perp$平面 $EGMN$，又 $BC\subset$平面 $ABCD$，
故平面 $ABCD\perp$平面 $EGMN$，
又平面 $ABCD//$平面 $EFGH$，
则平面 $EFGH\perp$平面 $EGMN$，
作 $MS\perp EG$，垂足为 S，如图②，
平面 $EFGH\cap$平面 $EGMN=EG$，
$MS\subset$平面 $EGMN$，故 $MS\perp$平面 $EFGH$，
则梯形 $EGMN$ 的高即为平面 $ABCD$ 与平面 $EFGH$ 之间的距离.

由题可得 $MG=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，$SG=\frac{2\sqrt{2}-2}{2}=\sqrt{2}-1$，

故 $MS=\sqrt{MG^2-SG^2}=\sqrt{3-(\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2\sqrt{2}}=\sqrt[4]{8}$，

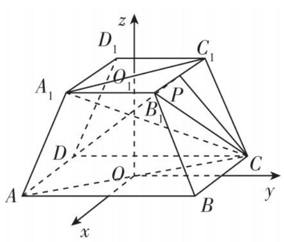
即平面 $ABCD$ 与平面 $EFGH$ 之间的距离为 $\sqrt[4]{8}$. 故选 B.

关键点拨 关键是根据几何体的结构特征，作出其截面图，确定梯形 $EGMN$ 的高即为平面 $ABCD$ 与平面 $EFGH$ 之间的距离.

15. (1)【证明】因为四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱台，所以上、下底面的中心 O_1，O 的连线垂直于上、下底面，则可以以 O 为坐标原点，过点 O 且平行于 AD 的直线为 x 轴，过点 O 且平行于 AB 的直线为 y 轴，以直线 O_1O 为 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

由于 $A_1A=\sqrt{5}$，上、下底面分别是边长为 2 和 4 的正方形，连接 AC,A_1C_1，则 $AC=4\sqrt{2}$，$A_1C_1=2\sqrt{2}$，可求出正四棱台的高为

$$\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{4\sqrt{2}-2\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{3},$$



则 $A_1(1,-1,\sqrt{3})$，$B_1(1,1,\sqrt{3})$，$A(2,-2,0)$，$B(2,2,0)$，$C(-2,2,0)$，

$\overrightarrow{A_1B_1}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(-1,-1,\sqrt{3})$，
$\overrightarrow{A_1C}=(-3,3,-\sqrt{3})$.

设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_0,y_0,z_0)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=-3x_0+3y_0-\sqrt{3}z_0=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=2y_0=0,\end{cases}$

取 $x_0=1$，可得 $\boldsymbol{n}=(1,0,-\sqrt{3})$.

设平面 ABB_1A_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BB_1}=-x_1-y_1+\sqrt{3}z_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=2y_1=0,\end{cases}$ 取 $x_1=1$，

可得 $\boldsymbol{m}=\left(1,0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

由于 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=0$，则平面 A_1B_1C 的法向量与平面 ABB_1A_1 的法向量垂直，
故平面 $A_1B_1C\perp$平面 ABB_1A_1.

(2)【解】设 $P(a,1,\sqrt{3})$，$a\in[-1,1]$，且 $D(-2,-2,0)$，$C(-2,2,0)$，则 $\overrightarrow{DC}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{CP}=(a+2,-1,\sqrt{3})$.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{p}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{DC}=4y_2=0,\\ \boldsymbol{p}\cdot\overrightarrow{CP}=(a+2)x_2-y_2+\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$

取 $z_2=\sqrt{3}$，可得 $\boldsymbol{p}=\left(-\frac{3}{a+2},0,\sqrt{3}\right)$.

设平面 A_1B_1C 与平面 PCD 的夹角为 θ，则

$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{p}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{p}|}=\frac{3}{2}\times\frac{a+3}{\sqrt{3(a+2)^2+9}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，化简得 $(a+3)^2=(a+2)^2+3$，解得 $a=-1$，

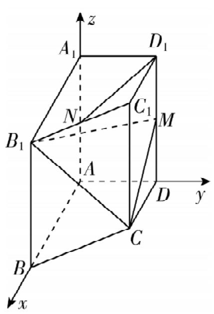
因此 $\overrightarrow{B_1P}=(-2,0,0)$，$\boldsymbol{m}=\left(1,0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

则点 P 到平面 ABB_1A_1 的距离 $d=|\overrightarrow{B_1P}|\cdot|\cos\langle\overrightarrow{B_1P},\boldsymbol{m}\rangle|=\sqrt{3}$.

刷上分

1. (1)【证明】∵在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1\perp$平面 $ABCD$，$AD\perp AB$，∴ AB,AD,AA_1 两两垂直.

以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,1,0)$，$A_1(0,0,2)$，$B_1(2,0,2)$，$C_1(1,1,2)$，$D_1(0,1,2)$.



∵ M,N 分别是 DD_1 和 B_1C_1 的中点，

∴ $M(0,1,1)$，$N\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},2\right)$，

∴ $\overrightarrow{D_1N}=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)$，$\overrightarrow{CB_1}=(1,-1,2)$，
$\overrightarrow{CM}=(-1,0,1)$.

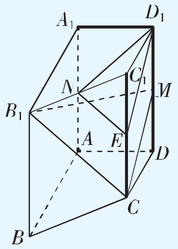
设平面 CB_1M 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CM}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-y+2z=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $y=3$，$z=1$，∴ $\boldsymbol{n}=(1,3,1)$.

∵ $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{D_1N}=0$，∴ $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{D_1N}$.
又∵ $D_1N\not\subset$平面 CB_1M，
∴ $D_1N//$平面 CB_1M.

一题多解 (1)如图，取 CC_1 的中点 E，连接 NE,D_1E.
∵ N 是 B_1C_1 的中点，
∴ $NE//B_1C$. ∵ $NE\not\subset$平面 CB_1M，$B_1C\subset$平面 CB_1M，∴ $NE//$平面 CB_1M.



由四棱柱的性质可知侧面 CDD_1C_1 为平行四边形，∵ M 是 DD_1 的中点，E 是 CC_1 的中点，$DD_1 \underline{\parallel} CC_1$，∴四边形 CED_1M 为平行四边形，
∴ $D_1E//CM$.
∵ $D_1E\not\subset$平面 CB_1M，$CM\subset$平面 CB_1M，
∴ $D_1E//$平面 CB_1M.
又 $NE\cap D_1E=E$，
∴平面 $D_1NE//$平面 CB_1M.
∵ $D_1N\subset$平面 D_1NE，
∴ $D_1N//$平面 CB_1M.

(2)【解】由(1)得 $\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$.

设平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2z_1=0,\\ -x_1+y_1=0,\end{cases}$

令 $x_1=1$，得 $y_1=1$，$z_1=0$，∴ $\boldsymbol{m}=(1,1,0)$.

由(1)可知平面 CB_1M 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,3,1)$，

∴平面 CB_1M 与平面 BB_1C_1C 夹角的余弦值为 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\frac{1+3}{\sqrt{1+3^2+1}\times\sqrt{1+1}}=\frac{2\sqrt{22}}{11}$.

(3)【解】由(1)知平面 CB_1M 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,3,1)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,2)$.

设点 B 到平面 CB_1M 的距离为 d，

则 $d=\frac{|\overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{1+3^2+1}}=\frac{2\sqrt{11}}{11}$，

即点 B 到平面 CB_1M 的距离为 $\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

2. (1)【证明】取 AB 的中点 O，连接 OD,OP，由 $BO=CD=1$，$BO//CD$，可得四边形 $OBCD$ 为平行四边形，

由 $BC\perp CD$，可得平行四边形 $OBCD$ 为矩形，则 $DO\perp AB$，

由平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAB\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$DO\subset$ 平面 $ABCD$，得 $DO\perp$ 平面 PAB.

又 $PO\subset$ 平面 PAB，则 $DO\perp PO$，由 $PD=2$，$DO=1$，得 $PO=\sqrt{3}$，

由 $PA=2$，$AO=1$，得 $PO^2+AO^2=PA^2$，则 $PO\perp AO$，即 $PO\perp AB$，

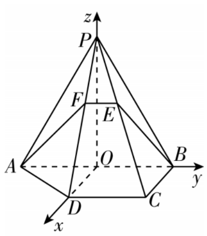
又 $DO\perp AB$，$PO\cap DO=O$，PO，$DO\subset$ 平面 PDO，

因此 $AB\perp$ 平面 PDO，又 $PD\subset$ 平面 PDO，

所以 $PD\perp AB$.

(2)【解】由(1)知 $DO\perp PO$，$PO\perp AO$，$DO\perp AO$，

则以 O 为坐标原点，直线 OD，OB，OP 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图所示，



则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(1,1,0)$，$D(1,0,0)$，

所以 $\overrightarrow{PA}=(0,-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PD}=(1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PB}=(0,1,-\sqrt{3})$.

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}=-y-\sqrt{3}z=0,\\ \overrightarrow{PD}\cdot\boldsymbol{n}=x-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},-\sqrt{3},1)$.

设 PB 与平面 PAD 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PB},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PB}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

即 PB 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

(3)【解】设截面 ABE 交 PD 于 F.

因为 $AB/\!/CD$，$AB\subset$ 平面 ABE，$DC\not\subset$ 平面 ABE，所以 $DC/\!/$ 平面 ABE，

又 $DC\subset$ 平面 PDC，平面 $ABE\cap$ 平面 $PDC=EF$，所以 $DC/\!/EF$.

依题意，$V_{P-ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{梯形ABCD}\cdot PO=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1+2}{2}\times1\times\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $V_{P-ABEF}=\dfrac{5}{5+7}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{24}$.

设 $\overrightarrow{PE}=\lambda\overrightarrow{PC}(\lambda\in(0,1))$，则 $EF=\lambda DC=\lambda$. 由 $D(1,0,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$，$A(0,-1,0)$，得 $\overrightarrow{PD}=(1,0,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AP}=(0,1,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PD}=(\lambda,0,-\sqrt{3}\lambda)$，

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PF}=(\lambda,1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$，$\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$.

点 F 到 AB 的距离为 $\sqrt{\overrightarrow{AF}^2-\left(\dfrac{|\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}\right)^2}=\sqrt{4\lambda^2-6\lambda+3}$，

所以截面 $ABEF$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}(\lambda+2)\sqrt{4\lambda^2-6\lambda+3}$.

设平面 $ABEF$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=2b=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AF}=\lambda a+b+\sqrt{3}(1-\lambda)c=0,\end{cases}$

取 $c=-\lambda$，得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3}(1-\lambda),0,-\lambda)$，

则点 P 到平面 $ABEF$ 的距离 $d=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{4\lambda^2-6\lambda+3}}$，

于是 $V_{P-ABEF}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}(\lambda+2)\cdot\sqrt{4\lambda^2-6\lambda+3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{4\lambda^2-6\lambda+3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{24}$，解得 $\lambda=-\dfrac{5}{2}$(舍去)或 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，

所以点 P 到截面 ABE 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

方法技巧 **计算线面角的几种方法**

(1)利用面面垂直的性质定理，得到线面垂直，进而确定线面角的垂足，明确斜线在平面内的射影，即可确定线面角；

(2)在构成线面角的直角三角形中，可利用等体积法求解垂线段的长度 h，从而不必作出线面角，则线面角 θ 满足 $\sin\theta=\dfrac{h}{l}$（l 为斜线段长），进而可求得线面角；

(3)建立空间直角坐标系，利用向量法求解，设 $\boldsymbol{a}$ 为直线 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 为平面的法向量，则线面角 θ 的正弦值为 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle|$.

考向 38 外接球问题、内切球问题

刷考点

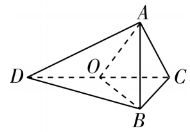
1. D 【解析】如图所示，取 CD 的中点 O，连接 AO，BO. 因为 $AC\perp AD$，$BC\perp BD$，所以 $OA=OB=OC=OD$，因此点 O 就是球心，又 $\angle BCD=\dfrac{\pi}{4}$，故 $\triangle BCD$ 是等腰直角三角形，所以 $OB\perp CD$.

因为平面 $ACD\perp$ 平面 BCD，平面 $ACD\cap$ 平面 $BCD=CD$，$OB\subset$ 平面 BCD，所以 $OB\perp$ 平面 ACD.

设球 O 的半径为 R，则 $OB=R$，$AC=R$，又 $\angle ACD=\dfrac{\pi}{3}$，则 $AD=\sqrt{3}R$，

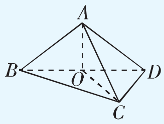
所以三棱锥 $A-BCD$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot OB=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times AC\cdot AD\cdot OB=\dfrac{\sqrt{3}}{6}R^3=12$，

所以 $R=2\sqrt{3}$，所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=48\pi$. 故选 D.



方法技巧 **共斜边的三棱锥的外接球半径的求法**

如图，在四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp AD$，$CB\perp CD$，此四面体可以看成是由两个共斜边的直角三角形拼接而成的，BD 为公共斜边.

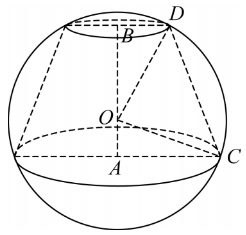


设点 O 为公共斜边 BD 的中点，根据直角三角形斜边中线等于斜边的一半可知，$OA=OC=OB=OD$，即点 O 到 A，B，C，D 四点的距离相等，故点 O 就是四面体 $ABCD$ 外接球的球心，公共斜边 BD 就是外接球的一条直径，即外接球半径 $R=\dfrac{l}{2}$（l 为公共斜边的长度）.

2. D 【解析】设该圆台的高为 h，其体积 $V=(9+3\sqrt{2})\pi=\dfrac{1}{3}h(3\pi+\sqrt{3\pi\times6\pi}+6\pi)$，

解得 $h=3$.

如图，由题意得上底面圆的半径 $BD=\sqrt{3}$，下底面圆的半径 $AC=\sqrt{6}$.

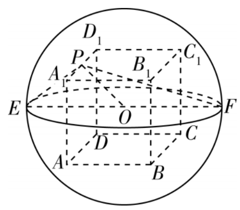


设球心 O 到下底面的距离为 t，即 $OA=t$，则 $BO=3-t$，由勾股定理得 $OA^2+AC^2=OB^2+BD^2$，即 $t^2+(\sqrt{6})^2=(3-t)^2+(\sqrt{3})^2$，

解得 $t=1$，则球 O 的半径 $R=\sqrt{t^2+6}=\sqrt{7}$，

故球 O 的表面积为 $4\pi R^2=28\pi$. 故选 D.

3. A 【解析】设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的球心为 O，球 O 的半径为 R，连接 PO.



由 $2R=4\sqrt{3}$，得 $R=2\sqrt{3}$，则 $OE=OF=2\sqrt{3}$，

$\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OE})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OF})=(\overrightarrow{PO}+$

$\overrightarrow{OE}$)·($\overrightarrow{PO}-\overrightarrow{OE}$)$=|\overrightarrow{PO}|^2-|\overrightarrow{OE}|^2=PO^2-12$.

当点 P 为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的侧面中心或底面中心时，OP 的长度取最小值，即 $OP_{\min}=2$，

当点 P 与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的顶点重合时，OP 的长度取最大值，即 $OP_{\max}=2\sqrt{3}$，

即 $2\leqslant OP\leqslant 2\sqrt{3}$，所以 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}=PO^2-12\in[-8,0]$.

故选 A.

4. A 【解析】由题意，得正三棱台上、下底面的外接圆的半径分别为 $\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3\sqrt{3}=3$，$\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4\sqrt{3}=4$. 设该正三棱台上、下底面的外接圆的圆心分别为 O_1，O_2，外接球的半径为 R，球心为 O，则 $O_1O_2=1$，球心 O 在直线 O_1O_2 上. 由于球心位置不能确定，需分球心在线段 O_1O_2 上和不在线段 O_1O_2 上两种情况讨论.易错点 当球心在线段 O_1O_2 上时，$R^2=3^2+OO_1^2=4^2+(1-OO_1)^2$，解得 $OO_1=4>1$，不符合题意；当球心不在线段 O_1O_2 上，即球心在线段 O_1O_2 的延长线上时，$R^2=4^2+OO_2^2=3^2+(1+OO_2)^2$，解得 $OO_2=3$，所以 $R^2=25$. 综上，球 O 的表面积为 $4\pi R^2=100\pi$，故选 A.

易错警示 正棱台的外接球的球心在高或高所在的直线上，不一定是在棱台的内部.

5. D 【解析】如图所示，设四面体 $ABCD$ 的外接球球心为 O，底面 $\triangle BCD$ 的外接圆圆心为 E，连接 OE，OB，OA，

则 $OE\perp$ 底面 BCD，A，O，E 共线且 A 在 OE 上方时，四面体 $ABCD$ 底面 BCD 上的高最大，最大值为 $EA=2+OE$.

取 BC 的中点为 F，连接 BE，EF，OF，DE，

由 $BC=\sqrt{3}\Rightarrow BF=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$OF=\sqrt{2^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}$，

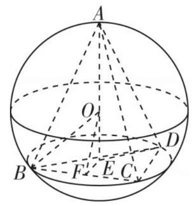
由正弦定理可知 $2BE=\frac{BC}{\sin\angle BDC}=2\Rightarrow BE=1$，

所以 $EF=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$，$OE=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{3}$，

在 $\triangle BCD$ 中，显然当 D，E，F 共线时，D 到 BC 距离最大，

所以 $(S_{\triangle BCD})_{\max}=\frac{1}{2}BC\cdot(EF+DE)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

则四面体 $ABCD$ 的体积最大值 $V=\frac{1}{3}(S_{\triangle BCD})_{\max}\cdot EA=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2+\sqrt{3})=\frac{2\sqrt{3}+3}{4}$. 故选 D.

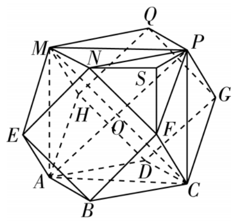


6. BD 【解析】对于 A，假设 $BF\perp$ 平面 EAB，因为 $AB\subset$ 平面 EAB，所以 $BF\perp AB$，

即 $\angle ABF=90°$，但六边形 $ABFPQH$ 为正六边形，$\angle ABF=120°$，矛盾，所以 A 错误；

对于 B，补齐八个角构成棱长为 2 的正方体，则该二十四等边体的体积为 $2^3-8\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times1\times1=\frac{20}{3}$，所以 B 正确；

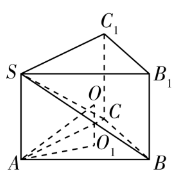
对于 C，如图，取正方形 $ACPM$ 对角线的交点为 O，即为该二十四等边体外接球的球心，其半径 $R=\sqrt{2}$，则外接球的表面积为 $4\pi R^2=8\pi$，所以 C 错误；



对于 D，因为 PN 在平面 $EBFN$ 内射影为 NS，所以 PN 与平面 $EBFN$ 所成角即为 $\angle PNS$，其正弦值为 $\frac{PS}{PN}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以 D 正确.

故选 BD.

7. 2 【解析】如图所示，设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1，连接 O_1A. 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，所以其外接圆半径 $r=O_1A=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3=\sqrt{3}$.



由于 $SA\perp$ 平面 ABC，将三棱锥 $S-ABC$ 补形为正三棱柱 SB_1C_1-ABC，

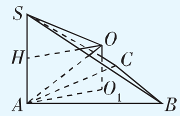
巧思：由于棱锥的一条侧棱垂直于底面，且底面为正三角形，因此将几何体补形为正三棱柱

由题意知 SA 为侧棱，设球心为 O，

敲黑板：球心 O 在过底面三角形外接圆的圆心且与底面垂直的直线上

连接 OO_1，OA，则 $OO_1\perp$ 平面 ABC，且 $OO_1=\frac{1}{2}SA$. 又球的半径 $R=OA=2$，$OA^2=OO_1^2+O_1A^2$，所以 $4=\frac{1}{4}SA^2+3$，得 $SA=2$.

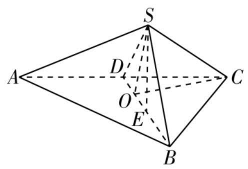
一题多解 如图所示，设 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O_1，连接 O_1A. 因为 $\triangle ABC$ 是边长为 3 的等边三角形，所以其外接圆半径 $r=O_1A=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times3=\sqrt{3}$.



设三棱锥 $S-ABC$ 的外接球球心为 O，连接 OO_1，则 $OO_1\perp$ 平面 ABC. 又 $SA\perp$ 平面 ABC，所以 $OO_1// SA$，连接 OS，OA，由题意知 $OS=OA=2$. 过 O 作 SA 的垂线，设垂足为 H，则四边形 AO_1OH 为矩形，所以 $OO_1=AH$，由 $OS=OA$ 可知 H 为 SA 的中点，则 $OO_1=AH=\frac{1}{2}SA$.

所以在 Rt$\triangle OO_1A$ 中，由勾股定理可得 $OA^2=OO_1^2+O_1A^2$，即 $4=\frac{1}{4}SA^2+3$，解得 $SA=2$.

8. $\frac{9}{2}\pi$ 【解析】取 AC 的中点为 D，连接 SD，BD，如图所示.



又 $SA=SC=\sqrt{5}$，$AB=BC=\sqrt{6}$，$AC=2\sqrt{2}$ 可知 $SD\perp AC$，$BD\perp AC$，

且 $SD=\sqrt{3}$，$BD=2$，

又 $SD\cap BD=D$，且 SD，$BD\subset$ 平面 SBD，所以 $AC\perp$ 平面 SBD，又 $AC\subset$ 平面 ABC，所以平面 $ABC\perp$ 平面 SBD.

取 BD 的中点为 E，连接 SE，又 $SB=SD=\sqrt{3}$，可得 $SE\perp BD$，且 $SE=\sqrt{2}$，

又 $SE\subset$ 平面 SBD，所以 $AC\perp SE$，又 $AC\cap BD=D$，AC，$BD\subset$ 平面 ABC，所以 $SE\perp$ 平面 ABC.

在 $\triangle ABC$ 中，$AB=BC=\sqrt{6}$，$AC=2\sqrt{2}$，可知 $\sin A=\frac{BD}{AB}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，可得 $\frac{BC}{\sin A}=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{6}}{3}}=3=2R$，解得 $R=\frac{3}{2}$.

易知 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心 O 必在直线 BD

上，设 $OD=x$，则 $x^2+(\sqrt{2})^2=R^2$，解得 $x=\frac{1}{2}$（负值舍去），即可得 O 为 DE 的中点.

又因为 $SE\perp$ 平面 ABC，所以该四面体的外接球球心 O' 一定在过 O 且平行于 SE 的直线上.

设 $OO'=h$，外接球半径为 R'，

则 $(SE+O'O)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=O'O^2+R^2$，即 $(\sqrt{2}+h)^2+\frac{1}{4}=h^2+\frac{9}{4}$，解得 $OO'=h=0$，

因此该四面体的外接球球心 O' 与 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心 O 重合，此时 $R'=\frac{3}{2}$，

所以该四面体的外接球体积为 $V=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{2}\pi$.

9. A　【解析】由题意，设正三棱柱的底面边长为 a，

则其内切球的半径 $r=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{\sqrt{3}}{6}a$，

敲黑板： 正三棱柱内切球的半径等于底面三角形内切圆的半径

所以正三棱柱的高 $h=2r=\frac{\sqrt{3}}{3}a$. 棱柱的体积 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot h=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{a^3}{4}=48\sqrt{3}$，得 $a=4\sqrt{3}$，所以球的表面积 $S=4\pi r^2=4\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2=\frac{\pi}{3}a^2=16\pi$. 故选 A.

10. D　【解析】依题意作出圆台的轴截面如图所示，

设 O_1,O_2 分别为上、下底面圆的圆心，M 为侧面切点，O 为内切球球心，连接 O_1O_2，OM，则 O 为 O_1O_2 的中点，

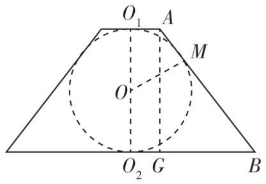
$OM\perp AB$，$OO_1=OM=4$，$O_1O_2=8$，$O_1A=MA=r_1$，$O_2B=MB=r_2$，

因为 $2r_1+r_2=12$，所以 $r_2=12-2r_1$，则 $AB=MA+MB=r_1+r_2=12-r_1$，

过点 A 作 $AG\perp O_2B$，垂足为 G，则 $BG=r_2-r_1=12-3r_1$.

在 $\text{Rt}\triangle ABG$ 中，由勾股定理得 $AG^2+BG^2=AB^2$，即 $8^2+(12-3r_1)^2=(12-r_1)^2$，解得 $r_1=2$ 或 $r_1=4$，因为 $r_1\neq r_2$，所以 $r_1=2$，$r_2=8$，故 $AB=10$，所以圆台的侧面积为 $\pi\times10\times(2+8)=100\pi$.

故选 D.



11. C　【解析】如图，作出圆锥 SO 的轴截面 SAB，

设上、下两部分几何体的内切球的球心分别为 E,F，半径分别为 r,R，连接 SO，BF，

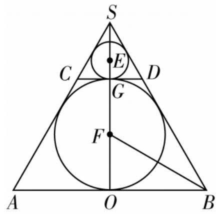
则 $OF=FG=R$，$EG=r$，根据题意可知 $\triangle SAB$ 为正三角形，易知 $SE=2r$，圆锥 SO 的底面半径 $OB=\sqrt{3}R$，

$\therefore SO=2r+r+R+R=3r+2R$，又 $SO=\sqrt{3}OB$，

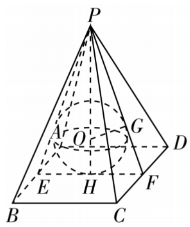
$\therefore 3r+2R=3R$，$\therefore R=3r$，

$\therefore$ 上部分圆锥的底面半径为 $\sqrt{3}r$，高为 $3r$，又圆锥 SO 的底面半径为 $OB=\sqrt{3}R=3\sqrt{3}r$，高为 $SO=3r+2R=9r$，

$\therefore$ 上部分圆锥的体积与圆锥 SO 的体积之比为 $\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，$\therefore$ 上、下两部分几何体的体积之比是 $1:26$.



12. $\frac{4\pi}{3}$　【解析】如图，O 为内切球的球心，PH 是棱锥的高，E,F 分别是 AB,CD 的中点，连接 PF，G 是球与侧面 PCD 的切点，可知 G 在 PF 上，$OG\perp PF$，



设内切球半径为 r，则 $OH=OG=r$，$HF=1$，$PH=\sqrt{3}$，$PF=2$，

由 $\triangle PGO\backsim\triangle PHF$ 可知 $\frac{OG}{HF}=\frac{PO}{PF}$，即 $\frac{r}{1}=\frac{\sqrt{3}-r}{2}$，解得 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以四棱锥的内切球表面积 $S=4\pi r^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4\pi}{3}$.

一题多解　由题意知，正四棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}\times4\times\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

正四棱锥的表面积 $S=4\times\frac{1}{2}\times2\times2+4=12$.

设四棱锥的内切球半径为 r，则 $\frac{1}{3}Sr=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，即 $\frac{1}{3}\times12r=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，故 $r=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以四棱锥的内切球表面积为 $4\pi r^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{4\pi}{3}$.

方法技巧　(1)求解多面体的内切球问题首先要利用多面体过球心的对角面来作出截面，再利用平面几何知识求解；

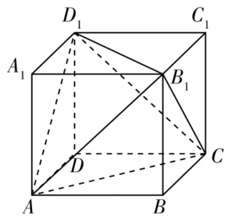
(2)当球与多面体的各个面相切时，注意球心到各面的距离相等且为球的半径，求球的半径时，可把球心与多面体的各顶点连接，球的半径是分成的小棱锥的高，用等体积法来求球的半径.

13. C　【解析】棱长为 $\sqrt{2}$ 的正方体的棱切球，其半径为正方体面对角线的一半，则半径 $r=1$，所以该球的表面积 $S=4\pi r^2=4\pi$. 故选 C.

14. B　【解析】如图所示，正四面体 AB_1CD_1 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，一个球与正四面体 AB_1CD_1 的六条棱都相切，则该球与正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 内切，正四面体的棱长为 a，则正方体的棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$，

即球的直径 $2R=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，半径 $R=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，所以这个球的体积为 $\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{24}\pi a^3$.

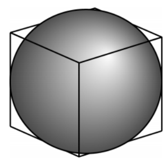
故选 B.

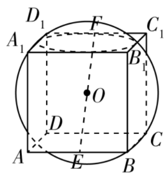


15. 12　【解析】如图所示，$\because EF$ 为球的直径，由正方体及球的对称性知，此球的球心为正方体的中心 O. 设正方体的棱长为 2，则 $OF=OE=\frac{1}{2}EF=\frac{1}{2}C_1B=\sqrt{2}$，

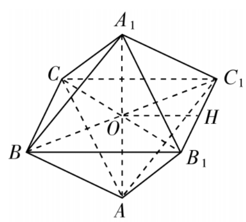
$\therefore$ 点 O 到正方体各棱的中点的距离均为 $\sqrt{2}$，且正方体各面与球的交线均为圆，此圆即为正方体各面的内切圆，$\therefore$ 球的球面与该正方体各棱的交点共有 12 个.

关键点





16. $\sqrt{2}$　【解析】在多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，连接 CB_1，BC_1 交于点 O，则 O 为正方形 CBB_1C_1 的中心，如图所示.



由题意可知 O 既是多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心，也是棱切球的球心，

提示：O 为正方形 CBB_1C_1 的中心，则 O 既是多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心，也是棱切球的球心，过点 O 作 $OH\perp B_1C_1$ 于点 H，即可得出外接球的半径 R 与棱切球的半径 r

连接 AA_1，过点 O 作 $OH\perp B_1C_1$ 于点 H，

在 $\mathrm{Rt}\triangle A_1OC_1$ 中，$OC_1=\dfrac{1}{2}BC_1=\sqrt{6}$，

$A_1C_1=2\sqrt{3}$，

所以 $R=OC_1=OA_1=\sqrt{6}$，

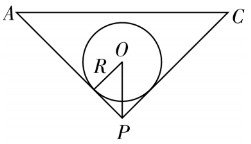
$r=OH=\sqrt{OC_1^2-C_1H^2}=\sqrt{3}$，所以 $\dfrac{R}{r}=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}=\sqrt{2}$.

17. 8π 【解析】在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle APB=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\triangle PAB$ 是正三角形，则 $\triangle PBC$，$\triangle PCD$，$\triangle PAD$ 均为正三角形，所以 $AC^2=AB^2+BC^2=PA^2+PC^2$，所以 $\angle APC=\dfrac{\pi}{2}$.

因为球 O 与侧棱 PA,PB,PC,PD 均相切，且 $PA=PC$，

所以平面 PAC 截正四棱锥得到等腰直角三角形 APC，

截球 O 得到球 O 的大圆，且圆 O 与 PA，PC 都相切，如图.



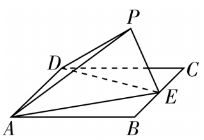
显然 OP 平分 $\angle APC$，因此球 O 的半径 $R=OP\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$，

所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=8\pi$.

刷上分

1. B 【解析】依题意，$PE\perp PA$，$PE\perp PD$，$PA\cap PD=P$，$PA,PD\subset$ 平面 PAD，

则 $PE\perp$ 平面 PAD，$PA=PD=2\sqrt{2}a$，$AD=4a$，即有 $PA^2+PD^2=AD^2$，则 $PA\perp PD$，



由此可将三棱锥 $P-ADE$ 补成以 PE,PA,PD 为相交三条棱的长方体.

PE，PA，PD 两两垂直

若三棱锥 $P-ADE$ 的四个顶点都在球 O 的球面上，则该长方体的各顶点均在球 O 的球面上，

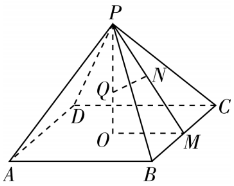
长方体和三棱锥 $P-ADE$ 是同一个外接球

设球 O 的半径为 R，则该长方体的体对角线长为 $2R$，

长方体的外接球直径等于长方体体对角线长

则 $2R=\sqrt{PE^2+PA^2+PD^2}=2\sqrt{5}a$，所以球 O 的表面积 $S=4\pi R^2=20a^2\pi$. 故选 B.

2. B 【解析】作出正四棱锥 $P-ABCD$ 如图所示，



根据题意可得正四棱锥的斜高 $PM=5$，底面正方形 $ABCD$ 的边长为 6，

$\therefore$ 正四棱锥的高 $OP=\sqrt{5^2-3^2}=4$.

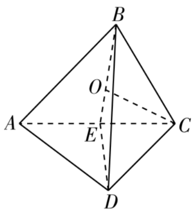
设这个正四棱锥的内切球的球心为 Q，半径为 r，与侧面 PBC 相切于点 N，

设高线与斜高的夹角为 θ，则 $\sin\theta=\dfrac{OM}{PM}=\dfrac{3}{5}$，则 $OP=OQ+\dfrac{QN}{\sin\theta}$，

$\therefore 4=r+\dfrac{r}{\sin\theta}=\dfrac{8}{3}r$，$\therefore r=\dfrac{3}{2}$.

$\therefore$ 这个正四棱锥的内切球的体积为 $\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\times\pi\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^3=\dfrac{9}{2}\pi$. 故选 B.

3. C 【解析】如图所示，



$AB=BC=AC=BD=2$，$AD=CD=\sqrt{2}$，$AD\perp CD$，

取 E 为 AC 中点，连接 BE，DE，则 $BE\perp AC$，$DE\perp AC$，

因为 $BE=\sqrt{3}$，$DE=1$，$BD=2$，

所以 $BE^2+DE^2=BD^2$，所以 $BE\perp ED$，

又 $AC\cap ED=E$，且 $AC\subset$ 平面 ACD，$ED\subset$ 平面 ACD，

所以 $BE\perp$ 平面 ACD，又 E 为直角三角形 ADC 的外心，

所以四面体外接球球心 O 在 BE 上，设外接球的半径为 r，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OEC$ 中，由 $OE^2+CE^2=OC^2$ 可得 $(\sqrt{3}-r)^2+1^2=r^2$，解得 $r=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，所以四面体 $ABCD$ 外接球的表面积为 $4\pi r^2=4\pi\times\dfrac{4}{3}=\dfrac{16\pi}{3}$. 故选 C.

4. C

思路导引　外接球的体积→球的半径→找到球心 O' 的位置→根据勾股定理表示出四棱锥的高 h 与 l 之间的关系→四棱锥体积可以看成关于 h 的函数→求导→求出最值

【解析】设外接球的半径为 R，因为外接球的体积为 36π，即 $36\pi=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，所以 $R=3$. 如图，在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，过点 P 作 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，因为四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 O 为底面 $ABCD$ 对角线的交点. 设 $AB=2a$，则 $AO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}AB=\sqrt{2}a$.

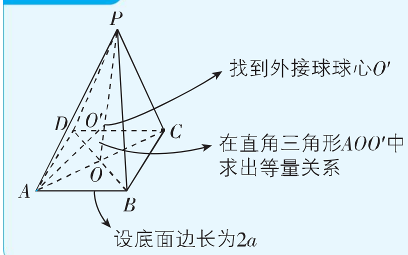
取 PO 上点 O'，使得 $PO'=O'A$，则 O'为该四棱锥外接球的球心. 设该四棱锥的高 $PO=h$，体积为 V，则 $V=\dfrac{1}{3}\cdot 4a^2h=\dfrac{4}{3}a^2h$. 又因为 $(h-3)^2+2a^2=9$，所以 $2a^2=6h-h^2$. 因为 $l\in[3,3\sqrt{3}]$，所以 $l^2=2a^2+h^2=6h\in[9,27]$，即 $h\in\left[\dfrac{3}{2},\dfrac{9}{2}\right]$. 则 $V=\dfrac{4}{3}a^2h=\dfrac{4}{3}\left(3h-\dfrac{h^2}{2}\right)h=4h^2-\dfrac{2}{3}h^3$，

关键点

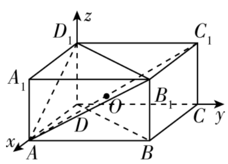
巧思：也可利用基本不等式求解最大值，$V=\dfrac{4}{3}a^2h=72\times\dfrac{l^2}{36}\times\dfrac{l^2}{36}\times\left(2-\dfrac{l^2}{18}\right)\leqslant 72\times\left[\dfrac{\dfrac{l^2}{36}+\dfrac{l^2}{36}+\left(2-\dfrac{l^2}{18}\right)}{3}\right]^3=\dfrac{64}{3}$，当且仅当 $\dfrac{l^2}{36}=2-\dfrac{l^2}{18}$，即 $l=2\sqrt{6}$ 时取等号

所以 $V'=-2h^2+8h$，令 $V'=0$，则 $h=0$ 或 $h=4$，所以 $V=4h^2-\dfrac{2}{3}h^3$ 在 $\left[\dfrac{3}{2},4\right)$ 上单调递增，在 $\left[4,\dfrac{9}{2}\right]$ 上单调递减. 故当 $h=4$ 时，V 取最大值 $\dfrac{64}{3}$；当 $h=\dfrac{9}{2}$ 时，$V=\dfrac{81}{4}$；当 $h=\dfrac{3}{2}$ 时，$V=\dfrac{27}{4}$，则 V 的最小值为 $\dfrac{27}{4}$. 故该正四棱锥体积的取值范围是 $\left[\dfrac{27}{4},\dfrac{64}{3}\right]$. 故选 C.

答图注解



5. B 【解析】建立如图所示的空间直角坐标系，设 $AD=a$，$DC=b$，则 $B(a,b,0)$，$A(a,0,0)$，$C_1(0,b,2)$，$D(0,0,0)$，所以 $\overrightarrow{DB}=(a,b,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-a,b,2)$，



因为 $AC_1\perp BD$，所以 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{DB}=-a^2+b^2=0$，所以 $a=b$，即四边形 $ABCD$ 为正方形，

又长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球直径为长方体的体对角线长 AC_1，

外接球的球心为体对角线的中点，不妨设球心为 O，由外接球体积为 36π，

可得 $\dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{AC_1}{2}\right)^3=36\pi$，解得 $AC_1=6$.

又 $AC_1=\sqrt{a^2+a^2+2^2}=6$，解得 $a=4$（负值舍去），所以 $A(4,0,0)$，$D_1(0,0,2)$，$B_1(4,4,2)$，$O(2,2,1)$，

所以 $\overrightarrow{AD_1}=(-4,0,2)$，$\overrightarrow{AB_1}=(0,4,2)$，$\overrightarrow{AO}=(-2,2,1)$.

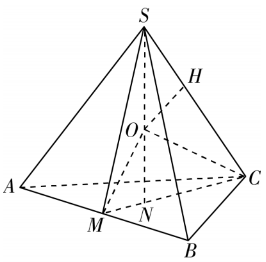
设平面 AB_1D_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-4x+2z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=4y+2z=0,\end{cases}$ 取 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,-1,2)$，

所以点 O 到平面 AB_1D_1 的距离 $d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AO}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

所以外接球被平面 AB_1D_1 截得的截面圆的半径 $r=\sqrt{3^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{3}}$，所以截面圆的面积 $S=\pi r^2=\frac{25}{3}\pi$，即外接球被平面 AB_1D_1 截得图形的面积为 $\frac{25}{3}\pi$. 故选 B.

6. C　【解析】如图所示，三棱锥 $S-ABC$ 为正三棱锥，且底面边长 $AB=BC=AC=2\sqrt{6}$，侧棱 $SA=SB=SC=3$. 设正三棱锥的棱切球球心为 O，半径为 R，顶点 S 在底面的射影为 N，则 N 为 $\triangle ABC$ 的中心，可知球心 O 在 SN 上，取 AB 的中点 M，连接 OM,SM,CM，过点 O 作 $OH\perp SC$，垂足为 H，则 $OM=OH=R$.



提示：因为棱切球的球心到各棱的距离相等，即为半径，所以球心在直线 SN 上，同时构造直角三角形，借助勾股定理求解

设 $ON=h$，在 $\mathrm{Rt}\triangle CMB$ 中，$CM=\sqrt{CB^2-MB^2}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-(\sqrt{6})^2}=3\sqrt{2}$.

因为 N 为 $\triangle ABC$ 的中心，

所以 $NC=\frac{2}{3}MC=2\sqrt{2}$，$MN=\frac{1}{3}MC=\sqrt{2}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OMN$ 中，$OM^2=ON^2+MN^2$，即 $R^2=h^2+2$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle SNC$ 中，$SN^2=SC^2-NC^2$，即 $SN=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$.

连接 OC，在 $\mathrm{Rt}\triangle ONC$ 中，$OC^2=ON^2+NC^2$，

则 $OC=\sqrt{ON^2+NC^2}=\sqrt{h^2+(2\sqrt{2})^2}\ (0<h<1)$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OSH$ 中，$SH^2=OS^2-OH^2$，

则 $SH=\sqrt{(1-h)^2-R^2}$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCH$ 中，$HC^2=OC^2-OH^2$，

则 $HC=\sqrt{h^2+(2\sqrt{2})^2-R^2}$.

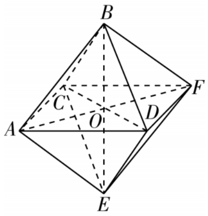
又因为 $SH+HC=SC$，

所以 $\sqrt{(1-h)^2-R^2}+\sqrt{h^2+(2\sqrt{2})^2-R^2}=3$，

化简得 $R=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1-h)$，由

$\begin{cases}R^2=h^2+2,\\ R=\frac{2\sqrt{2}}{3}(1-h)\end{cases}$ 得 $R^2-12\sqrt{2}R+24=0$，解得 $R=6\sqrt{2}\pm4\sqrt{3}$，因为 $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}>3$，不符合题意，所以 $R=6\sqrt{2}-4\sqrt{3}$. 故选 C.

7. 2π　【解析】因为 Ω 的各面都是边长为 1 的等边三角形，所以结合图象可知，几何体 Ω 是由两个相同的正四棱锥共底构成.



在正四棱锥 $B-ADFC$ 中，$AO=\frac{1}{2}AF=\frac{1}{2}\sqrt{AD^2+DF^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1^2+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

$OB=\sqrt{AB^2-\left(\frac{AF}{2}\right)^2}=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}=AO$.

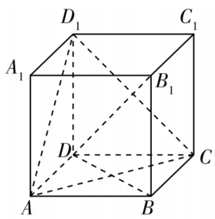
将 Ω 放入一个球体中，当球恰好是 Ω 的外接球时，该球表面积取得最小值，

此时球半径 $R=\frac{1}{2}AF=\frac{\sqrt{2}}{2}$，该球表面积的最小值为 $S=4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\pi$.

考向 39　截面、翻折问题

刷考点

1. A　【解析】如图，连接 AC,AD_1,CD_1,BD，因为 $BB_1\perp$ 平面 $ABCD$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $BB_1\perp AC$，又四边形 $ABCD$ 为正方形，所以 $BD\perp AC$.



又 $BB_1\cap BD=B$，$BB_1,BD\subset$ 平面 BB_1D，所以 $AC\perp$ 平面 BB_1D.

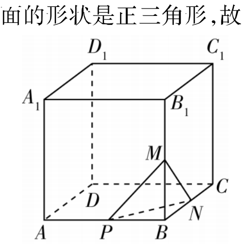
因为 $B_1D\subset$ 平面 BB_1D，所以 $AC\perp B_1D$，同理可证明 $AD_1\perp B_1D$.

因为 $AD_1\cap AC=A$，$AD_1,AC\subset$ 平面 ACD_1，

所以 $B_1D\perp$ 平面 ACD_1，

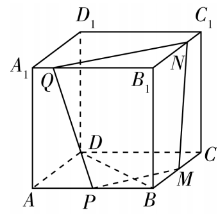
故平面 α 即为平面 ACD_1，则 α 截该正方体所得截面的形状为三角形. 故选 A.

2. AC　【解析】对于 A，如图①，当 M,N 分别为 BB_1,BC 的中点时，可知 $PM=PN=MN$，此时截面的形状是正三角形，故 A 正确；



图①

对于 B，如图②，四边形 $PMNQ$ 为过点 P 的正方体的一个截面，则由面面平行的性质可知 $PM/\!/QN$，若四边形 $PMNQ$ 为梯形，则 $PM\neq NQ$，

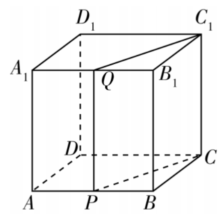


图②

如果为直角梯形，不妨令 $PM\perp MN$，

则由正方体的性质可知 $PM\perp CC_1$，设 MN,CC_1 交于点 T，又 $MN,CC_1\subset$ 平面 BCC_1B_1，则 $PM\perp$ 平面 BB_1C_1C，又因为 $AB\perp$ 平面 BB_1C_1C，则 $PM/\!/AB$ 或 PM 与 AB 重合，由图②可知不成立，即截面的形状不可能是直角梯形，故 B 错误；

对于 C，当 Q 为 A_1B_1 的中点时，如图③所示，

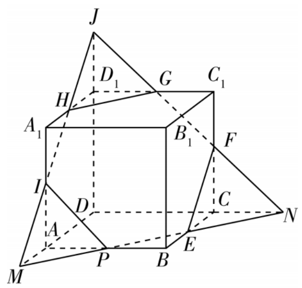


图③

截面为 PCC_1Q，则正方体的体积为 8，三棱柱 $BPC-B_1QC_1$ 的体积为 $\frac{1}{2}\times1\times2\times2=2$，

所以截面将正方体分成 $2:(8-2)=1:3$ 的两部分，故 C 正确；

对于 D，如图④所示，假设 E 为 BC 的中点，$\angle IMA=\angle FNC=\theta$，截面为 $IPEFGH$，



图④

则 $AP=CE=MA=CN=1$，$IA=CF=\tan\theta$，

$A_1I=C_1F=2-\tan\theta$，

$A_1H=C_1G=\frac{2}{\tan\theta}-1$，$D_1H=D_1G=3-\frac{2}{\tan\theta}$，

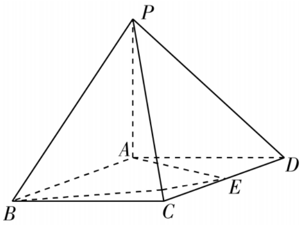
可得 $PE=\sqrt{2}$，$PI=EF=\sqrt{\tan^2\theta+1}=\frac{1}{\cos\theta}$，

$HI=GF=\frac{2}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}$，$HG=3\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{\tan\theta}$，

则六边形的周长为 $PE+2(IP+HI)+HG=4\sqrt{2}+\frac{4}{\sin\theta}-\frac{2\sqrt{2}}{\tan\theta}$，显然周长与 θ 有关，即六边形的周长不是定值，故 D 错误. 故选 AC.

方法总结 作截面的常用三种方法:直接法,截面的定点在几何体的棱上;平行线法,截面与几何体的两个平行平面相交,或者截面上有一条直线与几何体的某个平面平行;交线法,延长交线得交点,截面上的点中至少有两个点在几何体的同一平面上.

3. $\frac{2\pi}{3}$ $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$ 【解析】因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,底面 $ABCD$ 为矩形,则以 P 为球心,以 PB 为半径的球与底面 $ABCD$ 的交线为以 A 为圆心,AB 为半径的圆弧.



图①

如图①,在 CD 上取一点 E,使得 $AE=AB=2$,连接 AE,

则 $\overset{\frown}{BE}$ 的长度即为以 P 为球心,以 PB 为半径的球,被底面 $ABCD$ 截得的弧长.

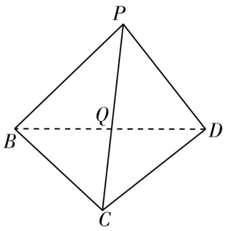
由 $AD=\sqrt{3}$,$AB=2$,

得 $\cos\angle DAE=\frac{AD}{AE}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

则 $\angle DAE=\frac{\pi}{6}$,所以 $\angle BAE=\frac{\pi}{3}$,

则 $\overset{\frown}{BE}$ 的长度为 $\frac{\pi}{3}\times 2=\frac{2\pi}{3}$,即以 P 为球心,以 PB 为半径的球,被底面 $ABCD$ 截得的弧长为 $\frac{2\pi}{3}$.

将平面 PDC 翻折到与平面 PBC 共面,平面图形如图②所示,连接 BD 交 PC 于点 Q,此时,$QB+QD$ 取得最小值,最小值为 BD.



图②

提示:翻折将问题平面化处理得出距离之和的最值

因为 $AD=\sqrt{3}$,$AB=2$,$PA=1$,

所以 $PD=\sqrt{AD^2+PA^2}=2$,$CD=AB=2$,

$PB=\sqrt{AB^2+AP^2}=\sqrt{5}$,$PC=\sqrt{1^2+2^2+(\sqrt{3})^2}=2\sqrt{2}$,$BC=AD=\sqrt{3}$,

所以 $\cos\angle BCP=\frac{BC^2+PC^2-BP^2}{2BC\cdot PC}=\frac{\sqrt{6}}{4}$,又 $\cos\angle DCP=\frac{DC^2+PC^2-DP^2}{2DC\cdot PC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以

$\sin\angle BCP=\frac{\sqrt{10}}{4}$,$\sin\angle DCP=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以 $\cos\angle BCD=\cos(\angle DCP+\angle BCP)=\cos\angle DCP\cos\angle BCP-\sin\angle DCP\sin\angle BCP=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{10}}{4}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}$.

又 $BD^2=BC^2+DC^2-2BC\cdot DC\cos\angle BCD=(\sqrt{3})^2+2^2-2\times\sqrt{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{4}=4+\sqrt{15}$,所以 $BD=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$(负值舍去),

即 $QB+QD$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{6}}{2}$.

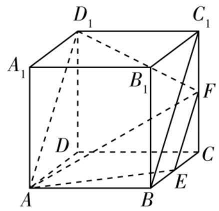
关键点拨 球心在截面圆上的射影即为截面圆的圆心,所以球被平面所截得的图形形状是圆,被平面图形所截得的图形形状是圆弧. 本题中以 P 为球心,以 PB 为半径的球与底面 $ABCD$ 的交线为以 A 为圆心,AB 为半径的圆弧,求出圆心角即可求出弧长.

4. D 【解析】若 4 为圆柱的底面周长,则圆柱的高为 2,此时圆柱的底面直径为 $\frac{4}{\pi}$,故圆柱的轴截面的面积为 $2\times\frac{4}{\pi}=\frac{8}{\pi}$;

若 2 为圆柱的底面周长,则圆柱的高为 4,此时圆柱的底面直径为 $\frac{2}{\pi}$,故圆柱的轴截面的面积为 $4\times\frac{2}{\pi}=\frac{8}{\pi}$.

故选 D.

5. B 【解析】连接 BC_1,AD_1,D_1F,如图所示,



因为 E,F 分别是 BC,CC_1 的中点,所以 $EF/\!/BC_1$,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,$AD_1/\!/BC_1$,所以 $EF/\!/AD_1$,

提示:一个平面被两个平行平面所截,截得的交线平行

所以 A,D_1,E,F 在同一平面内,所以平面 AEF 截该正方体所得的截面为四边形 EFD_1A. 因为正方体的棱长为 2,所以 $EF=\sqrt{2}$,$AD_1=2\sqrt{2}$,$D_1F=AE=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$,

则点 E 到 AD_1 的距离为等腰梯形 EFD_1A 的高,即为 $\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

所以所求截面面积 $S=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2}+\sqrt{2})\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{9}{2}$. 故选 B.

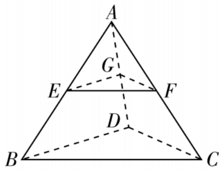
6. A 【解析】依题意与点 A,B,C,D 距离均相等的截面可分为两类,

一类是截面的一侧是 1 个点,另外一侧有 3 个点(如图①),此时截面过棱的中点,且与一个面平行,故截面三角形与平行的面(三角形)相似,相似比为 $\frac{1}{2}$,故其面积为 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times 4\times 4\sin 60°=\sqrt{3}$,这样的截面共有 4 个,故这类截面的面积和为 $4\sqrt{3}$.

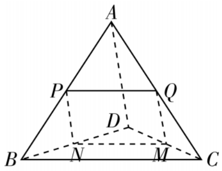
另外一类是截面的两侧各有 2 个顶点(如图②),因为正四面体对棱垂直,易知四边形 $PQMN$ 是边长为 2 的正方形,其面积为 4,这样的截面共有 3 个,故这类截面的面积和为 12,

故符合条件的截面的面积和为 $12+4\sqrt{3}$.

故选 A.

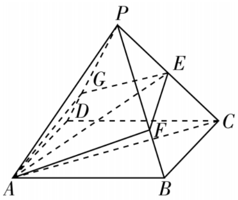


图①



图②

7. A 【解析】依题意,在正四棱锥 $P-ABCD$ 中,$AB=BC=CD=AD=4$,且 $PA=PB=PC=PD=4\sqrt{2}$,



所以 $AC=4\sqrt{2}$,所以三角形 PAC 是等边三角形.

设 E 是 PC 的中点,则 $AE\perp PC$,所以 $AE\subset\alpha$,且 $AE=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{2})^2}=2\sqrt{6}$,

设平面 α 与 PB,PD 分别相交于点 F,G,则由 $\alpha\perp PC$ 得 $PC\perp AF$,$PC\perp EF$,$PC\perp EG$,$PC\perp AG$,

$\cos\angle APB=\cos\angle BPC=\cos\angle DPC=\frac{(4\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2-4^2}{2\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$,

所以 $\frac{PE}{PF}=\frac{\frac{1}{2}PC}{PF}=\frac{2\sqrt{2}}{PF}=\frac{3}{4}$,$\frac{PE}{PG}=\frac{\frac{1}{2}PC}{PG}=\frac{2\sqrt{2}}{PG}=\frac{3}{4}$,故 $PF=PG=\frac{8\sqrt{2}}{3}$,

所以 $EF=EG=\sqrt{\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2-(2\sqrt{2})^2}=\frac{2\sqrt{14}}{3}$,

所以 $AF=AG=\sqrt{(4\sqrt{2})^2+\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2-2\times 4\sqrt{2}\times\frac{8\sqrt{2}}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$,

在 $\triangle AEF$ 中,由余弦定理得

$\cos\angle AFE=\frac{\left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{14}}{3}\right)^2-(2\sqrt{6})^2}{2\times\frac{8\sqrt{2}}{3}\times\frac{2\sqrt{14}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{7}}$,

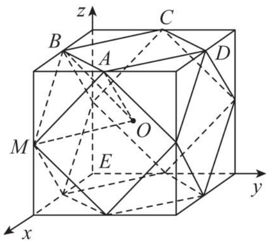
所以 $\sin\angle AFE=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{2\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$,

结合正四棱锥的对称性得 $S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{2}}{3}\times\frac{2\sqrt{14}}{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{8\sqrt{3}}{3}=S_{\triangle AEC}$，

所以所求截面面积为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}\times2=\frac{16\sqrt{3}}{3}$.

故选 A.

8. $\frac{\pi}{3}a^2$　【解析】建立如图所示的空间直角坐标系，则 $O(a,a,a)$，$A(2a,a,2a)$，$B(a,0,2a)$，$M(2a,0,a)$.



连接 OA，OB，OM，易知 $OA=OB=OM=AB=AM=BM=\sqrt{2}a$，

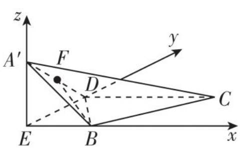
四面体 $OABM$ 为正四面体，点 O 到平面 ABM 的距离即为球 O 的半径，则半径 $R=\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\sqrt{2}a=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$，

提示：正四面体顶点到底面的距离为 $\frac{\sqrt{6}a'}{3}$，其中 a' 为正四面体的棱长

易知球心 O 到正方形 $ABCD$ 所在平面的距离为 a，

则球 O 被正方形 $ABCD$ 截得的圆的半径 $r=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，故所求截面面积 $S=\frac{\pi}{3}a^2$.

9. A　【解析】因为四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $A=60°$，所以 $\triangle ABD$ 为等边三角形. 连接 BD，BF，



因为 E 为 AB 的中点，所以 $DE\perp AB$，所以翻折后 $DE\perp EB$，$DE\perp A'E$，

因为 $EB\cap A'E=E$，EB，$A'E\subset$ 平面 $A'EB$，所以 $DE\perp$ 平面 $A'EB$.

因为菱形 $ABCD$ 的边长为 4，所以 $AB=AD=CD=BC=4$，$DE=2\sqrt{3}$，$AE=BE=2$，

所以直角梯形 $BCDE$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times(2+4)\times2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$.

设四棱锥 $A'-EBCD$ 的高为 h，则 $\frac{1}{3}\times6\sqrt{3}\cdot h=4\sqrt{3}$，得 $h=2$.

所以 $h=A'E$，所以 $A'E\perp$ 平面 $BCDE$，

所以以 E 为坐标原点，EB，ED，EA' 所在的直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系，则 $B(2,0,0)$，$C(4,2\sqrt{3},0)$，$F(0,\sqrt{3},1)$，

所以 $\overrightarrow{BC}=(2,2\sqrt{3},0)$，

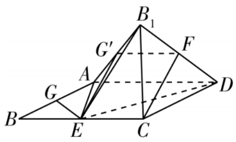
设 $\boldsymbol{c}=\frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{FB}=(2,-\sqrt{3},-1)$，则 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{4+3+1}=2\sqrt{2}$，

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$，

所以点 F 到直线 BC 的距离 $d=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})^2}=\sqrt{8-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{31}}{2}$.

故选 A.

10. C　【解析】对于①，由菱形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$\angle BAD=120°$，E 为边 BC 的中点知，$B=\frac{\pi}{3}$ 且 $BE=1$，



易知 $AE\perp EC$，$AE\perp B_1E$，又 $EC\cap B_1E=E$，EC，$B_1E\subset$ 平面 B_1EC，

故 $AE\perp$ 平面 B_1EC，又 $AE\subset$ 平面 AB_1E，所以平面 $AB_1E\perp$ 平面 B_1EC，故①正确；

对于②，设 G' 是 AB_1 的中点，连接 $G'E$，$G'F$，又 F 为 B_1D 的中点，则 $G'F//AD$ 且 $G'F=\frac{1}{2}AD$，

而 $EC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD$ 且 $EC//AD$，所以 $G'F//EC$ 且 $G'F=EC$，即四边形 $FG'EC$ 为平行四边形，

故 $CF//EG'$，所以 AB_1 与 CF 所成的角为 $\angle AG'E$ 或其补角，

设 G 为 AB 的中点，连接 GE，则 $\angle AG'E=\angle AGE$，由①分析易知 $\angle AGE=\frac{2\pi}{3}$，

故 AB_1 与 CF 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$，故②正确；

对于③，由上述分析知，翻折过程中当 $B_1E\perp$ 平面 $AECD$ 时，V_{B_1-AED} 最大，

此时 $V_{B_1-AED}=\frac{1}{3}\cdot B_1E\cdot S_{\triangle AED}=\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times2=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故③错误；

对于④，由②分析知，$EG'=CF$ 且 $EG'//CF$，故点 F 的轨迹与点 G 到点 G' 的轨迹相同，

由①知，B 到 B_1 的轨迹为以 E 为圆心，BE 为半径的半圆，而 G 为 AB 中点，

故 G 到 G' 的轨迹为以 AE 中点为圆心，$\frac{BE}{2}$ 为半径的半圆，

所以点 F 的轨迹长度为 $\frac{1}{2}\times2\pi\times\frac{B_1E}{2}=\frac{\pi}{2}$，故④正确.

故选 C.

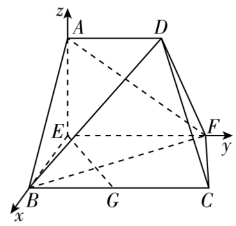
11. (1)【证明】沿 EF 将梯形 $ABCD$ 翻折后，

因为平面 $AEFD\perp$ 平面 $EBCF$，

平面 $AEFD\cap$ 平面 $EBCF=EF$，$AE\subset$ 平面 $AEFD$，$AE\perp EF$，

所以 $AE\perp$ 平面 $EBCF$. 又 $BE\perp EF$，

以 E 为坐标原点，EB 所在直线为 x 轴，EF 所在直线为 y 轴，EA 所在直线为 z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系.



则 $E(0,0,0)$，$A(0,0,1)$，$B(1,0,0)$，$D(0,1,1)$，$G(1,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{EG}=(1,1,0)$.

因为 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{EG}=-1+1=0$，所以 $BD\perp EG$.

(2)【解】易得 $F\left(0,\frac{3}{2},0\right)$，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{BA}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{BF}=\left(-1,\frac{3}{2},0\right)$.

设平面 ABF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+z=0,\\ -x+\frac{3}{2}y=0,\end{cases}$

令 $x=1$，解得 $y=\frac{2}{3}$，$z=1$，

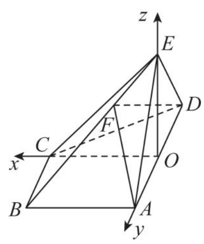
故 $\boldsymbol{n}=\left(1,\frac{2}{3},1\right)$.

设 BD 与平面 ABF 所成的角为 θ，则

$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{BD},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{BD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BD}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\left|-1+\frac{2}{3}+1\right|}{\sqrt{3}\times\sqrt{2+\frac{4}{9}}}=\frac{\sqrt{66}}{33}$.

故 BD 与平面 ABF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{66}}{33}$.

12. (1)【证明】取 AD 的中点 O，连接 EO，CO，如图所示.



因为 $\triangle ADE$ 是等边三角形，O 为 AD 中点，所以 $EO\perp AD$.

因为 $AD=2\sqrt{2}$，

所以 $EO=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$.

因为 $AD=2BC$，$\angle ABC=90°$，$AD//BC$，

所以四边形 $ABCO$ 为矩形，所以 $CO=AB=\sqrt{3}$.

又因为 $EC=3$，所以 $EC^2=CO^2+EO^2$，即 $EO\perp CO$.

因为 $EO\perp AD$，$EO\perp CO$，$CO\cap AD=O$，CO，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$.

又因为 $EO\subset$ 平面 ADE，所以平面 $EAD\perp$ 平面 $ABCD$.

(2)【解】以 O 为原点，OC,OA,OE 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，如图所示.

则 $A(0,\sqrt{2},0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$D(0,-\sqrt{2},0)$，$B(\sqrt{3},\sqrt{2},0)$，$E(0,0,\sqrt{6})$，因为$\frac{EF}{EB}=\frac{1}{3}$，$\overrightarrow{EB}=(\sqrt{3},\sqrt{2},-\sqrt{6})$，

所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

由 $\overrightarrow{EA}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{6})$，

得 $\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{EA}-\overrightarrow{EF}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{6})-\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$，$\overrightarrow{AD}=(0,-2\sqrt{2},0)$.

设平面 FAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{FA}=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{2}}{3}y-\frac{2\sqrt{6}}{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AD}=-2\sqrt{2}y=0,\end{cases}$

令 $x=2\sqrt{2}$，则 $y=0$，$z=-1$，即 $\boldsymbol{n}=(2\sqrt{2},0,-1)$.

易知平面 EAD 的一个法向量为 $\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3},0,0)$.

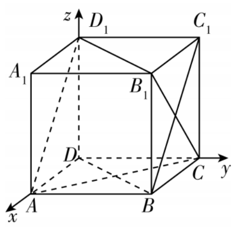
所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{OC}\rangle=\frac{2\sqrt{6}}{3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

因为二面角 $E-AD-F$ 的平面角为锐角，

所以二面角 $E-AD-F$ 的余弦值为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

刷上分

1. C 【解析】如图，因为正方体中过体对角线的截面面积最大，



所以问题转化为求平面 BDD_1B_1 与平面 ABC_1D_1 夹角的余弦值.

以 D 为坐标原点，DA,DC,DD_1 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$，

设正方体的棱长为 1，平面 α 与平面 β 的夹角为 θ，

因为 $DD_1\perp$平面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，所以 $DD_1\perp AC$，

且 $AC\perp BD$，$BD\cap DD_1=D$，$BD,DD_1\subset$平面 BDD_1B_1，

所以 $AC\perp$平面 BDD_1B_1，同理 $B_1C\perp$平面 ABC_1D_1，

所以 $\overrightarrow{AC}$ 为平面 BDD_1B_1 的一个法向量，

$\overrightarrow{B_1C}$ 为平面 ABC_1D_1 的一个法向量，

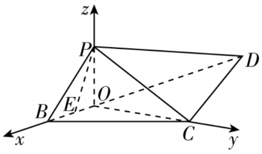
又 $A(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$B_1(1,1,1)$，

则有 $\overrightarrow{AC}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-1,0,-1)$，

则 $\cos\theta=\frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B_1C}|}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{B_1C}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

故选 C.

2. D 【解析】因为平面 $PBD\perp$平面 BCD，$PO\subset$平面 PBD，



平面 $PBD\cap$平面 $BCD=BD$，$PO\perp BD$，

所以 $PO\perp$平面 BCD，$OC\subset$平面 BCD，则 $PO\perp OC$，又 $PO\perp OB$，$OB\perp OC$，

则以点 O 为坐标原点，OB,OC,OP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，连接 EP，

则 $P(0,0,1)$，$C(0,2,0)$，设 $E(m,0,0)$，$-2\leqslant m\leqslant 1$，

所以 $\overrightarrow{CP}=(0,-2,1)$，$\overrightarrow{EP}=(-m,0,1)$，设 $\overrightarrow{EP}$ 与 $\overrightarrow{CP}$ 的夹角为 α，

则 $\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{EP}\cdot\overrightarrow{CP}}{|\overrightarrow{EP}||\overrightarrow{CP}|}=\frac{1}{\sqrt{5}\times\sqrt{m^2+1}}$，$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{\frac{5m^2+4}{5(m^2+1)}}$，

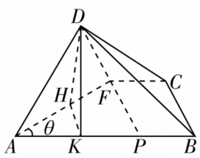
所以点 E 到直线 PC 的距离为 $|\overrightarrow{EP}|\cdot\sin\alpha=\sqrt{m^2+1}\times\sqrt{\frac{5m^2+4}{5(m^2+1)}}=\sqrt{\frac{5m^2+4}{5}}$，

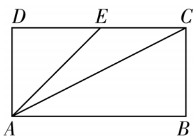
由 $-2\leqslant m\leqslant 1$，得 $0\leqslant m^2\leqslant 4$，则 $\sqrt{\frac{5m^2+4}{5}}\geqslant\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以点 E 到直线 PC 的距离的最小值为$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故选 D.

3. A 【解析】如图，在平面 ADF 内过点 D 作 $DH\perp AF$，垂足为 H，连接 HK. 过点 F 作 $FP/\!/BC$，交 AB 于点 P.





设 $\angle FAB=\theta$，$AE=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{5}$，

则 $\cos\theta\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

由 $AB=2$，$BC=1$ 可知 $\cos\angle CAB=\frac{AB}{AC}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\angle EAB=\frac{\sqrt{2}}{2}$

设 $DF=x$，则 $1<x<2$. 因为平面 $ABD\perp$平面 ABC，平面 $ABD\cap$平面 $ABC=AB$，

$DK\perp AB$，$DK\subset$平面 ABD，所以 $DK\perp$平面 ABC.

又因为 $AF\subset$平面 ABC，所以 $DK\perp AF$.

又因为 $DH\perp AF$，$DK\cap DH=D$，$DK,DH\subset$平面 DKH，所以 $AF\perp$平面 DKH，

又 $HK\subset$平面 DKH，所以 $AF\perp HK$，即 $AH\perp HK$.

在 Rt$\triangle ADF$ 中，$AF=\sqrt{1+x^2}$，$DH=\frac{DA\cdot DF}{AF}=\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$，

因为$\triangle ADF$ 和$\triangle APF$ 都是直角三角形且 $PF=AD$，$AF=AF$，

所以 Rt$\triangle ADF\cong$Rt$\triangle FPA$，则有 $AP=DF=x$.

因为$\triangle AHD\backsim\triangle ADF$，所以$\frac{AH}{AD}=\frac{DH}{DF}$，即$\frac{AH}{1}=\frac{\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}}{x}$，解得 $AH=\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$，

所以 $\cos\theta=\frac{AH}{AK}=\frac{AP}{AF}$，即$\frac{\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}}{2-t}=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，

化简得 $x=\frac{1}{2-t}$.

因为 $1<x<2$，所以 $1<t<\frac{3}{2}$. 故选 A.

4. ACD 【解析】因为球 O 是正方体的内切球，所以球 O 的半径 $r=2$，

正方体的表面积为 $6\times4^2=96$，球 O 的表面积为 $4\pi r^2=16\pi$，

所以球 O 与正方体的表面积之比为$\frac{\pi}{6}$，故 A 正确；

因为 M 是正方形 BCC_1B_1 的中心，所以 $OM/\!/AB$，取 BB_1 的中点 H，

连接 EH,HF，则 $EH/\!/AB/\!/OM$，则$\angle HEF$ 就是直线 EF 与 OM 所成角，

因为 $AB\perp$平面 BCC_1B_1，所以 $EH\perp$平面 BCC_1B_1，又 $HF\subset$平面 BCC_1B_1，

所以 $EH\perp HF$，$EH=4$，$HF=2\sqrt{2}$，则 $\tan\angle HEF=\frac{HF}{EH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以直线 EF 与 OM 所成角的正切值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 B 错误；

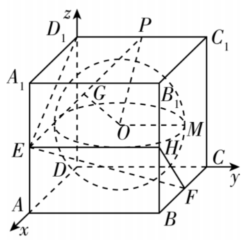
连接 ED_1，取 EP 的中点 G，连接 OG,OP，可得 $OP=2\sqrt{2}$，

在 Rt$\triangle PD_1E$ 中，$PE=\sqrt{PD_1^2+ED_1^2}=\sqrt{4+20}=2\sqrt{6}$，

又 $OG\perp PE$，可得 $OG=\sqrt{OP^2-\left(\frac{1}{2}PE\right)^2}=\sqrt{8-6}=\sqrt{2}$，

所以直线 EP 被球 O 截得的线段的长度为 $2\sqrt{r^2-OG^2}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$，故 C 正确；

对于 D，以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在的直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，易知 $A(4,$



0,0),$P(0,2,4)$,$M(2,4,2)$,$O(2,2,2)$,

则 $\overrightarrow{AP}=(-4,2,4)$,$\overrightarrow{AM}=(-2,4,2)$,$\overrightarrow{AO}=(-2,2,2)$,

设平面 APM 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}-4x+2y+4z=0,\\ -2x+4y+2z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$,得 $y=0,z=1$,

所以 $\boldsymbol{n}=(1,0,1)$.

所以点 O 到平面 APM 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AO}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=0$,

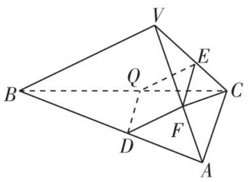
所以平面 APM 恰好过球 O 的球心,

所以球 O 的球面与平面 APM 的交线长为 $2\pi\times2=4\pi$,故 D 正确.

5. $\dfrac{\sqrt5}{2}$ 【解析】根据题意,在平面 VAC 内过点 F 作 $EF/\!/AC$,交 VC 于点 E,

在平面 VBC 内过点 E 作 $EQ/\!/VB$,交 BC 于点 Q,

在平面 VAB 内过点 F 作 $FD/\!/VB$,交 AB 于点 D,连接 DQ,如图所示,



因为 $EF/\!/AC$,则 $\triangle VEF\backsim\triangle VCA$,设其相似比为 k,$0<k<1$,

即 $\dfrac{VF}{VA}=\dfrac{VE}{VC}=\dfrac{EF}{AC}=k$,

则 $EF=\sqrt2k$.

又因为 $VA=1$,$AC=\sqrt2$,$\cos\angle VAC=\dfrac{\sqrt2}{2}$,

由余弦定理得 $VC=\sqrt{1+2-2\times1\times\sqrt2\times\dfrac{\sqrt2}{2}}=1$,则 $VC^2+VA^2=AC^2$,

即 $VC\perp VA$.

又 $BV\perp$ 平面 VAC,$VC,VA\subset$ 平面 VAC,所以 $BV\perp VC$,$BV\perp VA$.

又 $AB=\sqrt2$,则 $BV=1$,$BC=\sqrt2$.

因为 $FD/\!/VB$,所以 $\triangle AFD\backsim\triangle AVB$,则 $\dfrac{AF}{AV}=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{FD}{VB}$,

因为 $\dfrac{AF}{VA}=\dfrac{VA-VF}{VA}=1-k$,所以 $\dfrac{FD}{VB}=\dfrac{AF}{VA}=1-k$,

即 $FD=1-k$,

同理可得 $QE=1-k$,即 $QE=FD$,

因为 $EQ/\!/VB$,$FD/\!/VB$,所以 $EQ/\!/FD$,

故四边形 $EFDQ$ 为平行四边形,而 $EQ\subset$ 平面 $EFDQ$,$VB\not\subset$ 平面 $EFDQ$,

故 $VB/\!/$ 平面 $EFDQ$,同理 $AC/\!/$ 平面 $EFDQ$,

因此四边形 $EFDQ$ 为截面图形.

又 $BV\perp$ 平面 VAC,$EF\subset$ 平面 VAC,则 $BV\perp EF$,

又 $FD/\!/VB$,所以 $FD\perp EF$,

故平行四边形 $EFDQ$ 为矩形,则 $S_{矩形EFDQ}=EF\cdot FD=\sqrt2k\cdot(1-k)=-\sqrt2\left(k-\dfrac12\right)^2+\dfrac{\sqrt2}{4}$,

所以当 $k=\dfrac12$ 时,$S_{矩形EFDQ}$ 有最大值 $\dfrac{\sqrt2}{4}$,则 $VF=kVA=\dfrac12$,

在 Rt$\triangle CVF$ 中,$CF=\sqrt{CV^2+VF^2}=\sqrt{1+\dfrac14}=\dfrac{\sqrt5}{2}$.

6.【解】(1)翻折过程中总有平面 $PBD\perp$ 平面 PAG,证明如下:

翻折前,因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AC\perp BD$,

由于 M,N 分别是边 BC,CD 的中点,所以 $MN/\!/BD$,

所以 $MN\perp AC$,

则在翻折过程中,总有 $MN\perp GP$,$MN\perp GA$,$GP\cap GA=G$,$GP,GA\subset$ 平面 PAG,

所以 $MN\perp$ 平面 PAG,

所以 $BD\perp$ 平面 PAG,

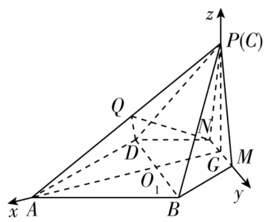
由于 $BD\subset$ 平面 PBD,所以平面 $PBD\perp$ 平面 PAG.

(2)存在,理由如下:

当平面 $PMN\perp$ 平面 $MNDB$ 时,因为平面 $PMN\cap$ 平面 $MNDB=MN$,$GP\subset$ 平面 PMN,$GP\perp MN$,

所以 $GP\perp$ 平面 $MNDB$,由于 $AG\subset$ 平面 $MNDB$,所以 $GP\perp AG$,

则以 G 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系,



依题意可知 $G(0,0,0)$,$P(0,0,\sqrt3)$,$D(\sqrt3,-2,0)$,$B(\sqrt3,2,0)$,$N(0,-1,0)$,$A(3\sqrt3,0,0)$,$\overrightarrow{PB}=(\sqrt3,2,-\sqrt3)$,$\overrightarrow{PA}=(3\sqrt3,0,-\sqrt3)$,

设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PA}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则 $\overrightarrow{GQ}=\overrightarrow{GP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{GP}+\lambda\overrightarrow{PA}=(0,0,\sqrt3)+(3\sqrt3\lambda,0,-\sqrt3\lambda)=(3\sqrt3\lambda,0,\sqrt3-\sqrt3\lambda)$,

易知平面 PMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(1,0,0)$,

$\overrightarrow{DQ}=(3\sqrt3\lambda-\sqrt3,2,\sqrt3-\sqrt3\lambda)$,$\overrightarrow{DN}=(-\sqrt3,1,0)$,

设平面 QDN 的法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DQ}=(3\sqrt3\lambda-\sqrt3)x_2+2y_2+(\sqrt3-\sqrt3\lambda)z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DN}=-\sqrt3x_2+y_2=0,\end{cases}$

不妨取 $\boldsymbol{n}_2=(\lambda-1,\sqrt3\lambda-\sqrt3,3\lambda+1)$,

设平面 QDN 与平面 PMN 的夹角为 θ,

则 $\cos\theta=\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\dfrac{|\lambda-1|}{\sqrt{(\lambda-1)^2+(\sqrt3\lambda-\sqrt3)^2+(3\lambda+1)^2}}=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$,解得 $\lambda=\dfrac13$,

所以当 Q 是 PA 上靠近点 P 的三等分点时,平面 QDN 与平面 PMN 的夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$.

考向 40 探索性问题

刷考点

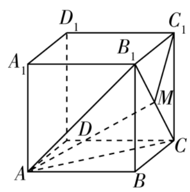
1. C 【解析】连接 AB_1,AC,则由正方体的性质可得 $\triangle ACB_1$ 为等边三角形,边长为 $2\sqrt2$,$\triangle CB_1C_1$ 为等腰直角三角形,直角边长为 2,如图①所示,

将正方体中 $\triangle ACB_1$ 绕 CB_1 旋转至与 $\triangle CB_1C_1$ 共平面,如图②,

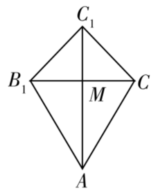
点悟:空间问题平面化是研究动点与两个顶点距离和的最小问题的方法

因为 $CA=CB_1=AB_1=2\sqrt2$,$CC_1=B_1C_1=2$,

所以 A,M,C_1 共线时,$MA+MC_1$ 最小,此时 M 为 CB_1 的中点,$MC_1=\sqrt2$,$MA=\sqrt6$,则 $MA+MC_1$ 的最小值为 $\sqrt2+\sqrt6$.故选 C.

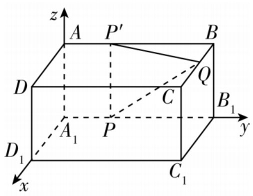


图①



图②

2. D 【解析】不妨令点 Q 的速度大小为每秒运动 1 个单位长度,设运动时间为 t s,则 $0\leqslant t\leqslant1$,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $P(0,2t,0)$,$Q(t,2,1)$,



显然点 P 到平面 $ABCD$ 的距离恒为 1,且在平面 $ABCD$ 上的射影为 $P'(0,2t,1)$,连接 PP',$P'Q$,

则 $\overrightarrow{P'Q}=(t,2-2t,0)$,则 $|\overrightarrow{P'Q}|=\sqrt{t^2+4(1-t)^2+0}=\sqrt{5t^2-8t+4}$,

所以 $\tan\theta=\dfrac{1}{|\overrightarrow{P'Q}|}=\dfrac{1}{\sqrt{5\left(t-\dfrac45\right)^2+\dfrac45}}\in\left[\dfrac12,\dfrac{\sqrt5}{2}\right]$.故选 D.

3. BCD 【解析】如图①,当点 P 与点 D 重合时,

提示:取特殊点验证便于快速求解

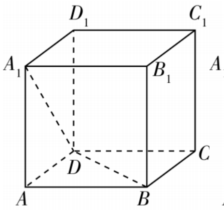
BP 与 AD 所成的角是 45°,故 A 错误.

如图②,连接 A_1B,DB,D_1B_1,B_1C,D_1C,易证平面 $CB_1D_1/\!/$ 平面 A_1DB,又 $BP\subset$ 平面

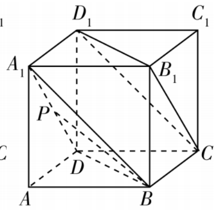
A_1DB，所以 $BP//$平面 CB_1D_1，

提示：求解涉及动点的线面平行探究性问题，常利用面面平行的性质转化

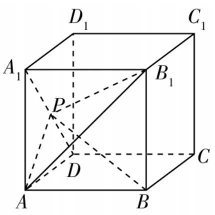
故 B 正确.



图①



图②



图③

如图③，因为 $AB//CD$，所以 BP 与 CD 所成的角即为 BP 与 AB 所成的角，即为 $\angle PBA$（或其补角）. 连接 AP，因为 $AB\perp$平面 A_1ADD_1，$AP\subset$平面 A_1ADD_1，所以 $AB\perp AP$，所以 $\tan\angle PBA=\frac{PA}{AB}$，则当点 P 与点 A_1（或点 D）重合时，$\tan\angle PBA$ 最大，此时 $\angle PBA$ 最大，易得 $\angle DBA=\frac{\pi}{4}$，则 α 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$，故 C 正确.

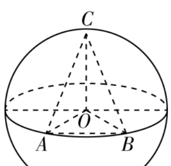
如图③，因为 $V_{A_1-PAB_1}=V_{P-AA_1B_1}$，所以当点 P 与点 D 重合时三棱锥 A_1-PAB_1 体积最大，

关键点：由于 $\triangle AA_1B_1$ 的面积为定值，故只需要三棱锥 $P-AA_1B_1$ 的高最大即可

此时三棱锥 A_1-PAB_1 的外接球即为正方体的外接球，设外接球半径为 R，则 $(2R)^2=2^2+2^2+2^2$，所以 $R^2=3$，所以该三棱锥外接球的表面积为 12π，故 D 正确.

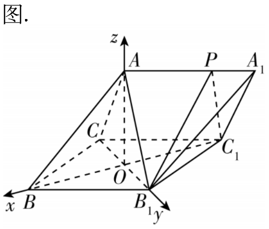
故选 BCD.

4. 8π 【解析】设球 O 的半径为 R，∵ $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB\sin\angle AOB\le\frac{1}{2}OA\cdot OB$（当 $OA\perp OB$ 时取等号），



又 $V_{O-ABC}=V_{C-AOB}$，∴ 当 $OC\perp$平面 AOB 时，$(V_{O-ABC})_{\max}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot OC=\frac{1}{6}R^3=1$，∴ $R^3=6$，∴ 球 O 的体积 $V=\frac{4\pi}{3}R^3=8\pi$.

5. (1)【证明】连接 BC_1，交 B_1C 于点 O，连接 AO，如图.



因为侧面 BB_1C_1C 为菱形，所以 $B_1C\perp BC_1$，O 为 B_1C 的中点. 又 $AC=AB_1$，所以 $AO\perp B_1C$.

又 $AO\cap BC_1=O$，且 $AO,BC_1\subset$平面 AOB，所以 $B_1C\perp$平面 AOB.

而 $AB\subset$平面 AOB，所以 $AB\perp B_1C$.

(2)【解】设 $AB=BC=2$，因为 $BC=BB_1$，$\angle CBB_1=\frac{\pi}{3}$，所以 $\triangle BCB_1$ 为等边三角形，所以 $B_1C=2$，$OB=\sqrt{3}$.

又 $AC\perp AB_1$，则 $AO=\frac{1}{2}B_1C=1$，

即有 $AO^2+OB^2=AB^2$，因此 $AO\perp OB$，即 OA,OB,OB_1 两两垂直，

以 O 为坐标原点，OB,OB_1,OA 所在直线分别为 x,y,z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(0,0,1)$，$B(\sqrt{3},0,0)$，$B_1(0,1,0)$，$C_1(-\sqrt{3},0,0)$，

则 $\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},0,-1)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(\sqrt{3},1,0)$.

设 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AA_1}(t\in\mathbf{R},t\neq0)$，

因为 $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}=(-\sqrt{3},1,0)$，所以 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AA_1}=(-\sqrt{3}t,t,0)$，

则 $\overrightarrow{B_1P}=\overrightarrow{B_1A}+\overrightarrow{AP}=(0,-1,1)+(-\sqrt{3}t,t,0)=(-\sqrt{3}t,t-1,1)$.

设平面 PB_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=\sqrt{3}x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1P}=-\sqrt{3}tx+(t-1)y+z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=2\sqrt{3}t-\sqrt{3}$，

所以 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},2\sqrt{3}t-\sqrt{3})$.

设直线 AB 与平面 PB_1C_1 所成的角为 θ，$\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AB}\rangle|=\frac{|-2\sqrt{3}t+2\sqrt{3}|}{2\times\sqrt{1+3+(2\sqrt{3}t-\sqrt{3})^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12t^2-24t+12}{12t^2-12t+7}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$，即 $36t^2+12t+1=0$，解得 $t=-\frac{1}{6}$.

综上所述，存在点 P 使得直线 AB 与平面 PB_1C_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{4}$，此时 $\frac{AP}{AA_1}=\frac{1}{6}$.

方法技巧 对于存在型探究性问题的求解，首先根据题意建立恰当的空间直角坐标系，将相关点、相关向量用坐标表示，假设点或参数存在，并用相关参数表示相关点的坐标，根据线、面满足的位置关系、数量关系，构建方程（组）求解，把“是否存在”问题转化为“点的坐标是否有解”“是否有规定范围内的解”等.

6. (1)【证明】如图，连接 BD,DF. 在 $\triangle PAB$ 中，$PA=PB=AB=4$，

∴ $\triangle PAB$ 为等边三角形. ∵ F 为 AB 的中点，∴ $PF\perp AB$，且 $PF=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$.

∵ 底面 $ABCD$ 为菱形，∴ $AB=AD$，

∵ $\angle DAB=60°$，∴ $\triangle ABD$ 为等边三角形.

∵ F 为 AB 的中点，∴ $DF\perp AB$，且 $DF=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，∵ $PD=2\sqrt{6}$，$PF^2+DF^2=PD^2$，∴ $PF\perp DF$. ∵ $PF\perp AB$，$AB\cap DF=F$，$AB,DF\subset$平面 $ABCD$，∴ $PF\perp$平面 $ABCD$.

(2)【解】由(1)知，$PF\perp AB$，$PF\perp DF$，$DF\perp AB$，

则以 F 为坐标原点，FB,FD,FP 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(2,0,0)$，$A(-2,0,0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$，$C(4,2\sqrt{3},0)$.

∵ M,N 分别为 PA,PB 的中点，∴ $M(-1,0,\sqrt{3})$，$N(1,0,\sqrt{3})$，∴ $\overrightarrow{PC}=(4,2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{MN}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC}=(2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,0)(0\le\lambda\le1)$，

$\overrightarrow{NE}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BE}=(1,0,-\sqrt{3})+(2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,0)=(1+2\lambda,2\sqrt{3}\lambda,-\sqrt{3})$.

设平面 MNE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}=2x_1=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{NE}=(1+2\lambda)x_1+2\sqrt{3}\lambda y_1-\sqrt{3}z_1=0,\end{cases}$

∴ $x_1=0$，取 $y_1=1$，则 $z_1=2\lambda$，

∴ $\boldsymbol{n}=(0,1,2\lambda)$.

易知平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

则 $|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{|2\lambda|}{\sqrt{1+4\lambda^2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，解得 $\lambda^2=\frac{1}{36}$，∵ $0\le\lambda\le1$，∴ $\lambda=\frac{1}{6}$，

∴ 平面 MNE 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(0,1,\frac{1}{3}\right)$.

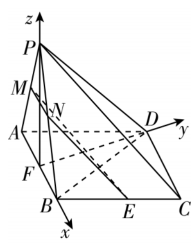
设直线 PC 与平面 MNE 所成的角为 θ，则

$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{PC},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{PC}|}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{\frac{10}{9}}\times2\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

即直线 PC 与平面 MNE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

(3)【解】存在点 H，使 $\overrightarrow{HP}\cdot\overrightarrow{HB}=0$. 理由如下：

∵ $\overrightarrow{HP}\perp\overrightarrow{HB}$，∴ $HP\perp HB$，∴ 点 H 在以线段 BP 的中点 N 为球心，



2 为半径的球面上. $D(0,2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CD}=(-4,0,0)$，$\overrightarrow{PC}=(4,2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$，$\overrightarrow{NP}=(-1,0,\sqrt{3})$.

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{u}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{CD}=-4x_2=0,\\ \boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{PC}=4x_2+2\sqrt{3}y_2-2\sqrt{3}z_2=0,\end{cases}$

则 $x_2=0$，取 $y_2=1$，则 $z_2=1$.

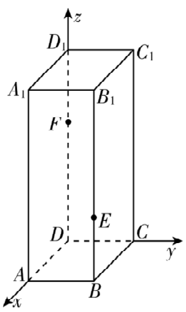
$\therefore \boldsymbol{u}=(0,1,1)$.

$\therefore$ 点 N 到平面 PCD 的距离为 $\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\overrightarrow{NP}|}{|\boldsymbol{u}|}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$\because \dfrac{\sqrt{6}}{2}<2$，记 $r=\sqrt{2^2-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，$\therefore$ 在平面 PCD 内存在点 H，且点 H 的轨迹是半径为 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 的圆，即点 H 的轨迹长度为 $2\pi\times\dfrac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}\pi$.

7. ACD　【解析】对于 A，若 $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$，此时 $A_1F\parallel CE$，则 A_1,F,C,E 四点共面，则 $A_1\in$ 平面 CEF，故 A 正确；

对于 B，以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，如图所示，



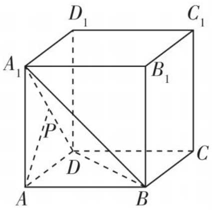
设 $AB=1$，则 $AA_1=3$，所以 $D(0,0,0)$，$C(0,1,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$B_1(1,1,3)$，$D_1(0,0,3)$，$E(1,1,3\lambda)$，$F(0,0,3\mu)$，则 $\overrightarrow{EF}=(-1,-1,3\mu-3\lambda)$，$\overrightarrow{DA}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{DC}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{DD_1}=(0,0,3)$，

若直线 EF 与该正四棱柱的 12 条棱所在直线所成的角都相等，则直线 EF 与 DA，DC，DD_1 所成的角均相等，可设所成的角为 θ，所以 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DA}|}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{DA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DC}|}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{DC}|}=\dfrac{|\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DD_1}|}{|\overrightarrow{EF}||\overrightarrow{DD_1}|}$，

即 $\dfrac{1}{\sqrt{1+1+(3\mu-3\lambda)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+1+(3\mu-3\lambda)^2}}=\dfrac{|3(3\mu-3\lambda)|}{3\sqrt{1+1+(3\mu-3\lambda)^2}}$，化简可得 $|3\mu-3\lambda|=1$，即 $|\mu-\lambda|=\dfrac{1}{3}$，则存在 λ,μ 满足题意，故 B 错误；

对于 C，D，当平面 CEF 截四棱柱的截面与平面 $ABCD$ 只有一个交点 C 时，截面最多，为五边形，故 C，D 正确. 故选 ACD.

8. BCD　【解析】当 $\lambda+\mu+\gamma=1$ 时，$\gamma=1-(\lambda+\mu)$，则 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}+\gamma\overrightarrow{AA_1}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}+[1-(\lambda+\mu)]\cdot\overrightarrow{AA_1}$，可得 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AA_1}=\lambda(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1})+\mu(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1})$，则 $\overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{A_1B}+\mu\overrightarrow{A_1D}$，可知点 P 在平面 A_1BD 内，如图①所示.

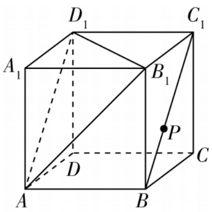


图①

设点 A 到平面 A_1BD 的距离为 d，由题可知 $A_1B=A_1D=BD=\sqrt{2}$，由 $V_{A-A_1BD}=V_{A_1-ABD}$ 可得 $\dfrac{1}{3}\times d\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{3}\times1\times\dfrac{1}{2}\times1\times1$，解得 $d=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 PA 的最小值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 A 错误.

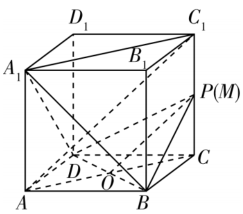
当 $\lambda=1$，$\mu=\gamma$ 时，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}+\mu\overrightarrow{AA_1}$，可得 $\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\mu(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1})$，则 $\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{AD_1}$，

由正方体的性质可知，$AD_1\parallel BC_1$，且 $AD_1=BC_1$，即 $\overrightarrow{AD_1}=\overrightarrow{BC_1}$，则 $\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{BC_1}$，可知点 P 在直线 BC_1 上，直线 PB 即为直线 BC_1，如图②所示. 因为 $AD_1\parallel BC_1$，$AD_1\subset$ 平面 AB_1D_1，$BC_1\not\subset$ 平面 AB_1D_1，所以 $BC_1\parallel$ 平面 AB_1D_1，即 $PB\parallel$ 平面 AB_1D_1，故 B 正确.



图②

当 $\lambda=\mu=1$，$\gamma=\dfrac{1}{2}$ 时，连接 AC，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}$，取 CC_1 的中点 M，可得 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM}$，可知点 P 即为点 M.

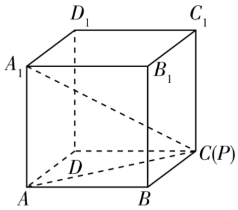


图③

因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $AA_1\perp BD$，设 $AC\cap BD=O$，连接 OP，AC_1，A_1C_1，如图③，由图③可知 $AC\perp BD$，$AA_1\cap AC=A$，AA_1，$AC\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C. 因为 $AC_1\subset$ 平面 AA_1C_1C，所以 $BD\perp AC_1$，同理可得 $A_1B\perp AC_1$，且 $BD\cap A_1B=B$，BD，$A_1B\subset$ 平面 A_1BD，所以 $AC_1\perp$ 平面 A_1BD. 又因为 O，P 分别为 AC，CC_1 的中点，所以 $OP\parallel AC_1$，所以 $OP\perp$ 平面 A_1BD. 因为 $OP\subset$ 平面 PBD，所以平面 $PBD\perp$ 平面 A_1BD，故 C 正确.

当 $\lambda\mu=1$，$\gamma=0$ 时，$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，可知点 P 在平面 $ABCD$ 内，如图④所示，

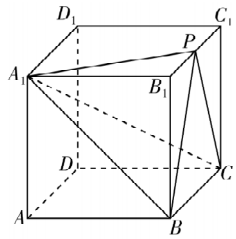
因为平面 $ABCD\parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以直线 PA_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角即为直线 PA_1 与平面 $ABCD$ 所成的角，因为 $AA_1\perp$ 平面 $ABCD$，所以直线 PA_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle A_1PA$，可得 $\tan\angle A_1PA=\dfrac{AA_1}{AP}=\dfrac{1}{AP}$. 又因为 $\lambda\mu=1$，即 $\mu=\dfrac{1}{\lambda}$，所以 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{\lambda}\overrightarrow{AD}$，所以 $\overrightarrow{AP}^2=\lambda^2\overrightarrow{AB}^2+\dfrac{1}{\lambda^2}\overrightarrow{AD}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\lambda^2+\dfrac{1}{\lambda^2}\geqslant2\sqrt{\lambda^2\cdot\dfrac{1}{\lambda^2}}=2$，当且仅当 $\lambda^2=\dfrac{1}{\lambda^2}$，即 $\lambda=\pm1$ 时等号成立，可知 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$，则 $\tan\angle A_1PA=\dfrac{1}{AP}$ 的最大值为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以直线 PA_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的正切值的最大值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 D 正确. 故选 BCD.



图④

9. ①②③　【解析】对于①，因为 $\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，$\lambda\in[0,1]$，$\mu\in[0,1]$，所以点 P 在正方形 BCC_1B_1 内（包括边界），而正方形 BCC_1B_1 的面积为 1，故①正确.

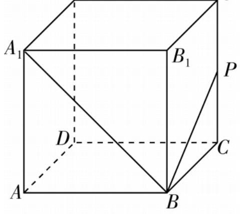
对于②，当 $\mu=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB_1}$，所以 $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BB_1}=\lambda\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{B_1C_1}$，故点 P 在线段 B_1C_1 上，如图①所示.



图①

易知 $B_1C_1\parallel$ 平面 A_1BC，所以 B_1C_1 上的点到平面 A_1BC 的距离都相等，又 $S_{\triangle A_1BC}=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值，故②正确.

对于③，当 $\lambda=1$ 时，$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BC}+\mu\overrightarrow{BB_1}$，所以 $\overrightarrow{BP}-\overrightarrow{BC}=\mu\overrightarrow{BB_1}$，即 $\overrightarrow{CP}=\mu\overrightarrow{BB_1}=\mu\overrightarrow{CC_1}$，所以点 P 在线段 CC_1 上，连接 BP，如图②所示.



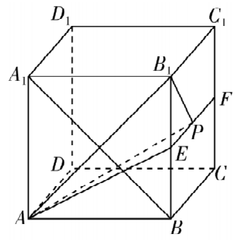
图②

易知 $BC\perp$ 平面 ABB_1A_1,又 $A_1B\subset$ 平面 ABB_1A_1,所以 $BC\perp A_1B$,

当点 P 与点 C 重合时,点 P 到 A_1B 的距离取最小值,最小值为 1,故③正确.

对于④,当 $\mu=\frac{1}{2}$ 时,$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$,

取 BB_1 的中点 E,CC_1 的中点 F,连接 AE,EF,如图③所示,易知点 P 在线段 EF 上.



图③

若 $A_1B\perp$ 平面 AB_1P,$AP\subset$ 平面 AB_1P,则必有 $A_1B\perp AP$,

因为 $PE\perp$ 平面 ABB_1A_1,$A_1B\subset$ 平面 ABB_1A_1,

所以 $PE\perp A_1B$,由 $AP\cap PE=P$,AP,$PE\subset$ 平面 APE,

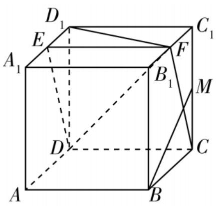
知 $A_1B\perp$ 平面 APE,又 $AE\subset$ 平面 APE,则有 $A_1B\perp AE$,

又 $A_1B\perp AB_1$,所以 $AE/\!/AB_1$,与 $AE\cap AB_1=A$ 矛盾,

故不存在满足题意的点 P,故④错误.

刷上分

1. D 【解析】如图,分别取 A_1D_1,B_1C_1 的中点 E,F,连接 DE,EF,CF.



因为 $CD\perp$ 平面 BCC_1B_1,$BM\subset$ 平面 BCC_1B_1,所以 $BM\perp CD$.

在 Rt△BCM,Rt△CC_1F 中,$BC=CC_1$,$CM=C_1F$,$\angle BCM=\angle CC_1F=90°$,

所以 Rt△$BCM\cong$ Rt△CC_1F,所以 $\angle CBM=\angle FCC_1$.

又 $\angle BCM=\angle BCF+\angle FCC_1=90°$,所以 $\angle BCF+\angle CBM=90°$,所以 $BM\perp CF$,

又 $CF\cap CD=C$,CF,$CD\subset$ 平面 $CDEF$,所以 $BM\perp$ 平面 $CDEF$,

由 $DP\perp BM$,得点 P 在平面 $CDEF$ 内,

由 $D_1P=1$,得点 P 在以 D_1 为球心,半径为 1 的球面上,因此动点 P 的轨迹为平面 $CDEF$ 与球 D_1 的球面的交线,即在平面 $CDEF$ 内的圆.

连接 DF,D_1F,设点 D_1 到平面 DEF 的距离为 h,平面 DEF 截球 D_1 所得截面圆的半径为 r,

则由 $V_{三棱锥D_1-DEF}=V_{三棱锥F-DED_1}$ 得 $\frac{1}{3}h\cdot S_{\triangle DEF}=\frac{1}{3}\times2\times\frac{1}{2}\times2\times1$,

且 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{5}=\sqrt{5}$,所以 $h=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,则 $r=\sqrt{1^2-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

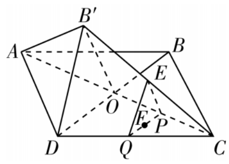
球心到截面距离、球半径、截面圆半径对应线段构成直角三角形

因此动点 P 的轨迹长度为 $\frac{2\sqrt{5}\pi}{5}$. 故选 D.

圆的周长公式

关键点拨 涉及立体图形中动点在某个平面内的轨迹问题,首先要确定动点与所在平面内的定点或定直线关系,结合有关平面轨迹定义判断求解.

2. A 【解析】连接 BD 交 AC 于点 O,连接 OB',因为四边形 $ABCD$ 为菱形,$\angle ABC=120°$,



所以 $AC\perp BD$,即 $OB'\perp AC$,$OD\perp AC$,所以 $\angle B'OD$ 为二面角 $B'-AC-D$ 的平面角,

则 $\angle B'OD=30°$.

又因为 $OB'=OD=\frac{1}{2}AB=2$,所以 $B'D$

$=\sqrt{B'O^2+DO^2-2B'O\cdot DO\cos30°}$

$=\sqrt{2^2+2^2-2\times2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

取 OC 中点 P,CD 中点 Q,连接 EP,EQ,PQ,则 $PQ/\!/OD$,$EP/\!/OB'$,

所以 $AC\perp EP$,$AC\perp PQ$,又 $EP\cap PQ=P$,EP,$PQ\subset$ 平面 EPQ,

所以 $AC\perp$ 平面 EPQ,

所以在三棱锥 $B'-ACD$ 表面上,满足 $AC\perp EF$ 的点 F 的轨迹为△EPQ.

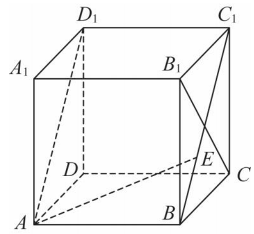
因为 $EP=\frac{1}{2}OB'$,$PQ=\frac{1}{2}OD$,$EQ=\frac{1}{2}B'D$,

所以△EPQ 的周长为 $\frac{1}{2}\times(\sqrt{6}-\sqrt{2}+2+2)=\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$,所以点 F 轨迹的长度为 $\frac{4+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. 故选 A.

3. B 【解析】对于①,连接 AD_1,BC_1,如图①,易知 $B_1C\perp BC_1$,$AB\perp$ 平面 CC_1B_1B,又 $B_1C\subset$ 平面 CC_1B_1B,所以 $AB\perp B_1C$,又 $AB\cap BC_1=B$,AB,$BC_1\subset$ 平面 ABC_1D_1,

所以 $B_1C\perp$ 平面 ABC_1D_1,所以只要点 E 在线段 BC_1 上,就有 $AE\perp B_1C$,所以动点 E 的轨迹是线段 BC_1,故①正确.

关键点:利用线面垂直确定动点位置



图①

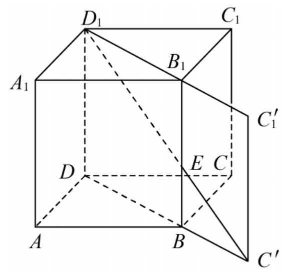
对于②,若 $\angle EA_1C=30°$,则点 E 在以 A_1C 为轴,一条母线所在直线为 A_1E 的圆锥的侧面上,平面 BCC_1B_1 与圆锥的轴 A_1C 斜交,截圆锥的侧面所得的截线是椭圆的一部分,故②正确.

提示:由于 $\angle EA_1C$ 是定值,A_1C 为定直线,因而 A_1E 绕 A_1C 旋转,形成圆锥侧面,而平面 BCC_1B_1 与圆锥的轴 A_1C 不垂直,也不与圆锥母线平行,因而截线形状为椭圆的一部分

对于③,因为 $A_1B_1/\!/CD$,所以 A_1E 与 CD 所成的角即为 A_1E 与 A_1B_1 所成的角,即为 $\angle EA_1B_1$(或其补角),当 E 为 BC_1 的中点时,$B_1E\perp BC_1$,此时 $\tan\angle EA_1B_1$ 最小.

在 Rt△A_1B_1E 中,$\tan\angle EA_1B_1=\frac{B_1E}{A_1B_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}$,所以 $\angle EA_1B_1$ 不可能为 30°,故③错误.

对于④,如图②,将侧面 BCC_1B_1 绕 BB_1 旋转到与平面 DBB_1D_1 在同一平面上,连接 D_1C' 交 BB_1 于点 E,此时 $EC+ED_1$ 最小,最小值为 $D_1C'=\sqrt{1^2+(\sqrt{2}+1)^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$,故④错误. 故选 B.



图②

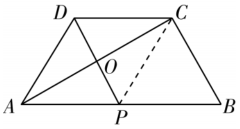
4. **思路导引** (1)先证明 $OP/\!/BC$,再根据直线与平面平行的判定定理即可证明;(2)建立空间直角坐标系,求出平面 ABC 和平面 BCD' 的法向量,计算法向量之间夹角的余弦值,即可得到面面角的大小;(3)假设存在点 Q 满足题意,设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PD'}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,分别求出平面 OCQ 和平面 ABD' 的法向量,根据其法向量垂直、数量积为 0 列方程解 λ 的值得到答案.

(1)【证明】在梯形 $ABCD$ 中,因为 $AB/\!/CD$,$AB=2CD=4$,P 为 AB 的中点,

所以 $CD/\!/AP$,$CD=AP$,连接 PC,如图①,所以四边形 $APCD$ 为平行四边形.

因为 $AC\cap DP=O$，所以 O 为 AC 的中点，所以 $OP// BC$.

因为 $OP\subset$平面 POD'，$BC\not\subset$平面 POD'，所以 $BC//$平面 POD'.



图①

(2)【解】在平行四边形 $APCD$ 中，因为 $AP=AD=2$，

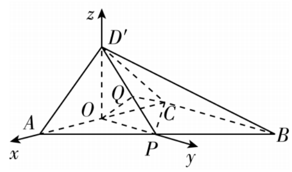
所以四边形 $APCD$ 为菱形，所以 $AC\perp DP$，

所以在三棱锥 $D'-ABC$ 中，$AC\perp OD'$，$AC\perp OP$.

因为 $OD'\subset$平面 ACD'，$OP\subset$平面 ACB，所以 $\angle D'OP$ 即为二面角 $B-AC-D'$ 的平面角，

所以 $\angle D'OP=\dfrac{\pi}{2}$，即 $OP\perp OD'$.

如图②所示，以 O 为坐标原点，分别以 OA,OP,OD' 所在直线为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，



图②

则 $B(-\sqrt{3},2,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$D'(0,0,1)$，所以 $\overrightarrow{BD'}=(\sqrt{3},-2,1)$，$\overrightarrow{CB}=(0,2,0)$.

设平面 BCD' 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CB}=2y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD'}=\sqrt{3}x-2y+z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,0,-\sqrt{3})$.

易知平面 ABC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(0,0,1)$，

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-\sqrt{3}}{1\times2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

所以平面 ABC 与平面 BCD' 夹角的大小为 $\dfrac{\pi}{6}$.

(3)【解】假设在线段 PD' 上存在点 Q，使得平面 $OCQ\perp$平面 ABD'，

设 $\overrightarrow{PQ}=\lambda\overrightarrow{PD'}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，因为 $P(0,1,0)$，

所以 $\overrightarrow{CP}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{PD'}=(0,-1,1)$，

所以 $\overrightarrow{CQ}=\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{CP}+\lambda\overrightarrow{PD'}=(\sqrt{3},1-\lambda,\lambda)$，

易知 $\overrightarrow{OC}=(-\sqrt{3},0,0)$，$\overrightarrow{AB}=(-2\sqrt{3},2,0)$.

设平面 OCQ 的法向量为 $\boldsymbol{t}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{t}\cdot\overrightarrow{OC}=-\sqrt{3}x_1=0,\\ \boldsymbol{t}\cdot\overrightarrow{CQ}=\sqrt{3}x_1+(1-\lambda)y_1+\lambda z_1=0,\end{cases}$

令 $y_1=\lambda$，得 $\boldsymbol{t}=(0,\lambda,\lambda-1)$.

设平面 ABD' 的法向量为 $\boldsymbol{s}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{s}\cdot\overrightarrow{AB}=-2\sqrt{3}x_2+2y_2=0,\\ \boldsymbol{s}\cdot\overrightarrow{BD'}=\sqrt{3}x_2-2y_2+z_2=0,\end{cases}$

令 $x_2=1$，得 $\boldsymbol{s}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$.

由 $\boldsymbol{t}\cdot\boldsymbol{s}=(0,\lambda,\lambda-1)\cdot(1,\sqrt{3},\sqrt{3})=\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，

所以当 Q 为线段 PD' 的中点时，平面 $OCQ\perp$平面 ABD'，此时 $\dfrac{PQ}{PD'}=\dfrac{1}{2}$.

专题 11　直线与圆

考向 41　直线的方程、圆的方程

刷考点

1. D　【解析】由直线 $x+\sqrt{3}y+1=0$，可得直线的斜率 $k=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，

设其倾斜角为 $\theta(0°\leqslant\theta<180°)$，可得 $\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\theta=150°$.

故选 D.

2. A　【解析】设 $K(x,y)$，则直线 KM 的斜率为 $k_{KM}=\dfrac{y}{x+2}$，直线 KN 的斜率为 $k_{KN}=\dfrac{y}{x-2}$，

依据题意可知，$k_{KM}+k_{KN}=\dfrac{y}{x+2}+\dfrac{y}{x-2}=3$，

化简得 $3x^2-2xy-12=0$，

因为直线 KM,KN 的斜率存在，

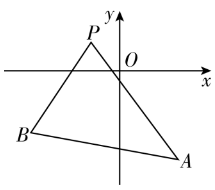
所以 $x\neq\pm2$，

所以点 K 的轨迹方程为 $3x^2-2xy-12=0$ $(x\neq\pm2)$. 故选 A.

3. B　【解析】由题意，

$k_{PA}=\dfrac{-3-1}{2+1}=-\dfrac{4}{3}$，

$k_{PB}=\dfrac{-2-1}{-3+1}=\dfrac{3}{2}$，



因为过点 $P(-1,1)$ 的直线与线段 AB 相交，

结合图象可知，该直线的斜率的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{4}{3}\right]\cup\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$. 故选 B.

易错警示　用 α 表示直线的倾斜角，则当 $0°\leqslant\alpha<90°$ 时，随着 α 的增大，直线的斜率 k 为非负值，且逐渐变大，当 $90°<\alpha<180°$ 时，随着 α 的增大，直线的斜率 k 为负值且逐渐变大.

4. A　【解析】$(3a-1)x-(a-2)y-1=0\Rightarrow(3x-y)a-x+2y-1=0$，

由 $\begin{cases}3x-y=0,\\ -x+2y-1=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{5},\\ y=\dfrac{3}{5},\end{cases}$ 直线 l 过定点 $\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5}\right)$，该定点在第一象限，则直线 l 一定经过第一象限. 故选 A.

5. B　【解析】设所求直线 l 的方程为 $x-2y+4+\lambda(x+y-2)=0$，即 $(1+\lambda)x+(\lambda-2)y+4-2\lambda=0$.

因为直线 l 与 $l_3:3x-4y+5=0$ 垂直，

所以 $3(1+\lambda)-4(\lambda-2)=0$，

解得 $\lambda=11$，

所以直线 l 的方程为 $12x+9y-18=0$，即 $4x+3y-6=0$. 故选 B.

6. $y=\dfrac{3}{2}x$ 或 $x+y-5=0$　【解析】当直线过原点时，设其方程为 $y=kx$，因为直线过点 $P(2,3)$，所以 $3=2k$，解得 $k=\dfrac{3}{2}$，

易错点

故直线方程为 $y=\dfrac{3}{2}x$.

当直线不过原点时，

设其方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{a}=1(a\neq0)$，

提示：已知直线在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 a，b，$a\neq0$，$b\neq0$，则直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

因为直线过点 $P(2,3)$，所以 $\dfrac{2}{a}+\dfrac{3}{a}=1$，

解得 $a=5$，即直线方程为 $x+y-5=0$. 综上，直线方程为 $y=\dfrac{3}{2}x$ 或 $x+y-5=0$.

易错警示　**忽视对截距为 0 时情况的讨论而致错**

直线在两坐标轴上的截距相等，应分为直线过原点(即截距都为 0)与直线不过原点(即截距都不为 0)两种情况讨论，分别求出直线方程，过原点的情况最容易被忽略.

7. $3x-2y-5=0$　【解析】由题意可知，角 A 的平分线所在直线方程为 $y=x$，所以点 B 关于直线 $y=x$ 的对称点 B' 在直线 AC 上，设 $B'(a,b)$，即 $\begin{cases}\dfrac{b-1}{a+1}=-1,\\ \dfrac{b+1}{2}=\dfrac{a-1}{2},\end{cases}$ 解得 $a=1,b=-1$，

所以 $B'(1,-1)$，直线 $B'C$ 即为边 AC 所在的直线，其方程为 $y-2=\dfrac{2+1}{3-1}(x-3)$，整理得 $3x-2y-5=0$.

8. A　【解析】若直线 $(m-2)x+(m+1)y+3=0$ 与直线 $(2m+2)x-my+2=0$ 垂直，