

模块综合测试

1. A 【解析】解不等式 $\sqrt{x} < 2$ 得, $0 \leq x < 4$, 解不等式 $3x \geq 1$ 得, $x \geq \frac{1}{3}$, 所以 $M = \{x | 0 \leq x < 4\}$, $N = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{3}\right\}$, 所以 $M \cup N = \{x | x \geq 0\}$. 故选 A.

2. D 【解析】当 $x=a=1, y=b=0$ 时, 满足 $x>y, a>b$, 但 $a-x>b-y$ 不成立, 故 A 错误;

当 $a=1, b=-1$ 时, 满足 $a>b$, 但 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不成立, 故 B 错误;

当 $x=2, y=-1, a=0, b=-2$ 时, 满足 $x>y, a>b$, 但 $ax>by$ 不成立, 故 C 错误;

$\therefore a>|b| \geq 0, \therefore$ 由不等式性质知 $a^2 > |b|^2 = b^2$, 故 D 正确. 故选 D.

3. B 【解析】当 $b=2, a=-1$ 时, 满足 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, 但不满足 $b < a < 0$, \therefore 充分性不成立;

当 $b < a < 0$ 时, $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ba} > 0, \therefore \frac{1}{b} > \frac{1}{a}, \therefore$ 必要性成立,

$\therefore \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ 是 “ $b < a < 0$ ” 的必要不充分条件, 故选 B.

4. C 【解析】由题图知, 甲厂总费用函数为 $y = \frac{1}{2}x + 1$, 乙厂总

$$\text{费用函数为 } y = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & 0 < x < 2, \\ \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}, & x \geq 2, \end{cases}$$

当 $0 < x < 2$ 时, 令 $\frac{1}{2}x + 1 = \frac{3}{2}x$, 可得 $x = 1$; 当 $x \geq 2$ 时, 令 $\frac{1}{2}x +$

$1 = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$, 可得 $x = 6$.

结合题图知, 当 $0 < x < 1$ 或 $x > 6$ 时, 选择乙厂比较划算; 当 $1 < x < 6$ 时, 选择甲厂比较划算; 当 $x = 1$ 或 $x = 6$ 时, 甲、乙厂总费用相同, 所以 A, B, D 错误, C 正确.

故选 C.

5. D 【解析】 $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x}$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$,

$$f(-x) = \frac{1-(-x)^2-1}{-x} = -\frac{|x^2-1|}{x} = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 是奇函数, 其图象关于原点对称, 所以 A 选项错误.

当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x} \geq 0$, 所以 C 选项错误.

当 $x > 0$ 时, 令 $f(x) = \frac{|x^2-1|}{x} = 0$, 解得 $x = 1$, 所以 B 选项错误.

所以 $f(x)$ 的大致图象是 D 选项. 故选 D.

6. B 【解析】因为 $\frac{4}{a+b} + \frac{1}{b+1} = 1$, 且 a, b 为正实数,

所以 $a+b+b+1 = (a+b+b+1)\left(\frac{4}{a+b} + \frac{1}{b+1}\right) = 4 + \frac{a+b}{b+1} + \frac{4(b+1)}{a+b} + 1 \geq$

$5 + 2\sqrt{\frac{a+b}{b+1} \cdot \frac{4(b+1)}{a+b}} = 9$, 当且仅当 $\frac{a+b}{b+1} = \frac{4(b+1)}{a+b}$, 即 $a = b +$

$2 = 4$ 时等号成立. 所以 $a+2b+1 \geq 9$, 则 $a+2b \geq 8$, 因此 $a+2b$ 的最小值为 8, 故选 B.

7. D 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 $[-1, 2a]$ 上的偶函数, 所以 $a-1+2a=0$, 解得 $a = \frac{1}{3}$, 即函数 $f(x)$ 的定义域为

$\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$. 又当 $x \in [0, 2a]$ 时, $f(x)$ 单调递减, 则当 $x \in$

$\left[-\frac{2}{3}, 0\right]$ 时, $f(x)$ 单调递增, 所以不等式 $f(x-1) > f(2x-3a)$

可化为 $f(|x-1|) > f(|2x-1|)$, 所以 $\begin{cases} |x-1| < |2x-1|, \\ -\frac{2}{3} \leq x-1 \leq \frac{2}{3}, \\ -\frac{2}{3} \leq 2x-1 \leq \frac{2}{3}, \end{cases}$ 解得

$\frac{2}{3} < x \leq \frac{5}{6}$, 即原不等式的解集为 $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]$. 故选 D.

8. C 【解析】因为 $y=f(x)$ 是偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = [x]$, 所以当 $x < 0$ 时, $f(x) = [-x]$.

已知关于 x 的不等式 $f(x) \geq 2^{\frac{x}{2}}$,

则当 $x \geq 0$ 时, 即 $[x] \geq 2^{\frac{x}{2}}$, 当 $x=0$ 时, 不等式不成立,

当 $x=1$ 时, 不等式不成立,

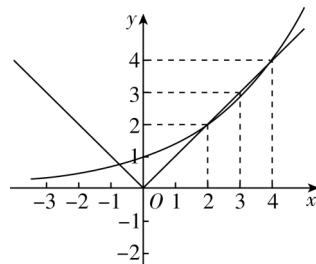
当 $x=2$ 时, 则 $[2] = 2 \geq 2^{\frac{2}{2}} = 2$, 不等式成立,

当 $x=3$ 时, 则 $2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2} < 3 = [3]$, 不等式成立,

当 $x=4$ 时, 则 $[4] = 4 \geq 2^{\frac{4}{2}} = 4$, 不等式成立. 作出 $y = 2^{\frac{x}{2}}$ 的图

象与 $y = |x|$ 的图象如图所示, 由图可知, 当 $x > 4$ 时, $y = 2^{\frac{x}{2}}$ 的

图象恒在 $y = x$ 图象的上方, 则此时 $f(x) = [x] \geq 2^{\frac{x}{2}}$ 无解,



所以当 $x \geq 0$ 时, 不等式 $f(x) \geq 2^{\frac{x}{2}}$ 的整数解有 3 个.

当 $x < 0$ 时, 不等式为 $[-x] \geq 2^{\frac{x}{2}}$,

此时 $0 < 2^{\frac{x}{2}} < 1$, 由图可知, 当 $x \leq -1$ 时, $y = -x$ 的图象恒在 $y =$

$2^{\frac{x}{2}}$ 图象的上方, 所以当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = [x] \geq 2^{\frac{x}{2}}$ 恒成立,

又 $x \in (-2\ 024, 2\ 024)$, 则在 $x \in (-2\ 024, 0)$ 上,

不等式 $f(x) \geq 2^{\frac{x}{2}}$ 的整数解有 2 023 个.

综上, 关于 x 的不等式 $f(x) \geq 2^{\frac{x}{2}}$ 的整数解的个数为 2 026.

故选 C.

9. ACD 【解析】对于 A, 由幂函数的定义可知 $m^2 - m - 1 = 1$, 解得 $m = 2$ 或 $m = -1$,

又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $m < 0$, 所以 $m = -1$, 故 A 正确;

对于 B, 由题知, $ax^2 + ax + 1 \neq 0$ 恒成立, 显然 $a = 0$ 符合题意, 当 $a \neq 0$ 时, 则 $\Delta = a^2 - 4a < 0$, 解得 $0 < a < 4$, 综上所述, $a \in [0, 4)$, 故 B 错误;

对于 C, 令 $t = \sqrt{4-x} (t \geq 0) \Rightarrow x = 4 - t^2$, 此时 $f(x) = y = 4 - t^2 + 2t = 5 - (t-1)^2 (t \geq 0)$, 显然 $f(t) \leq 5$, 故 C 正确;

对于 D, $y = f(x+1)$ 的定义域是 $[1, 2]$, 故可得 $x+1 \in [2, 3]$, 则 $y = f(x)$ 的定义域是 $[2, 3]$,

则对于 $y = f(2x-1)$, 有 $2x-1 \in [2, 3]$, 解得 $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$, 因此其

定义域为 $[\frac{3}{2}, 2]$, 故 D 正确.

故选 ACD.

10. BCD 【解析】对于 A, 因为 $0 < \sqrt{a} < \sqrt{b}$, 所以 $0 < a < b$, 所以 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $ac^6 > bc^6$, 所以 $c^6 > 0$, 所以 $a > b$, 故 B 正确;

对于 C, 令 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

因为 $a > b > 1$, 所以 $f(a) > f(b)$, 即 $a + \frac{1}{a} > b + \frac{1}{b}$, 故 C 正确;

对于 D, $a^2 + b^2 \geq 6(a+b-3)$ 等价于 $(a-3)^2 + (b-3)^2 \geq 0$, 不等式恒成立, 故 D 正确.

故选 BCD.

11. BCD 【解析】因为 $\forall x \in \mathbf{R}, f(-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 又 $\forall x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $f(-1) = f(1) = 0$,

可得当 $-1 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 当 $x < -1$ 时, $f(x) > 0$.

对于 A, 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 所以 $f(-4) > f(-3)$, 故 A 错误;

对于 B, 因为 $f(0)$ 是最小值, 所以存在 $m \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq m$, 故 B 正确;

对于 C, 若 $f(m-1) \leq 0$, 则 $-1 \leq m-1 \leq 1$, 解得 $0 \leq m \leq 2$, 故 C 正确;

对于 D, 若 $xf(x) \geq 0$, 则 $\begin{cases} x \geq 0, \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \leq 0, \\ f(x) \leq 0 \end{cases}$, 可得 $x \geq 1$

或 $-1 \leq x \leq 0$, 则 $x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$, 故 D 正确.

故选 BCD.

12. $[-1, 0]$ 【解析】当 $a = 0$ 时, $A = \{x | 2x - 1 = 0\} = \{\frac{1}{2}\}$, 满足条件;

当 $a \neq 0$ 时, $A = \{x | ax^2 + 2x - 1 = 0\}$ 只有 1 个元素, 则一元二次方程 $ax^2 + 2x - 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = 2^2 + 4a = 0$, 解得 $a = -1$.

故 $a = 0$ 或 $a = -1$, 即实数 a 的取值集合是 $\{-1, 0\}$.

13. $x^2 + 2$ (答案不唯一) 【解析】对于 $f(x) = x^2 + 2$, 定义域为 \mathbf{R} . 因为 $f(-x) = (-x)^2 + 2 = x^2 + 2 = f(x)$, 所以 $f(x) = x^2 + 2$ 为偶函数.

因为 $x^2 + 2 \geq 2$, 所以 $f(x) = x^2 + 2$ 的最小值为 2,

所以 $f(x) = x^2 + 2$ 符合题意.

写出其他符合要求的函数也满足题意.

14. $(-\infty, 6)$ 【解析】若对任意 $x_1 \in [0, 1]$, 存在 $x_2 \in [0, 1]$, 使得不等式 $f(x_1) > g(x_2)$ 成立,

则只需满足 $f(x)_{\min} > g(x)_{\min}, x \in [0, 1]$.

$g(x) = x^2 - x + a^2 - \frac{31}{4}$, 其图象的对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}$, 易

知 $g(x)$ 在 $[0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, 1]$ 上单调递增, 则

$g(x)_{\min} = g(\frac{1}{2}) = a^2 - 8$.

$f(x) = 2x^2 - ax + a^2 - 4$, 其图象的对称轴为直线 $x = \frac{a}{4}$.

①当 $\frac{a}{4} \leq 0$, 即 $a \leq 0$ 时, 易知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

$f(x)_{\min} = f(0) = a^2 - 4$, 又 $g(x)_{\min} = a^2 - 8$, 所以 $a^2 - 4 > a^2 - 8$ 恒成立;

②当 $0 < \frac{a}{4} < 1$, 即 $0 < a < 4$ 时, 易知 $f(x)$ 在 $[0, \frac{a}{4})$ 上单调递

减, 在 $(\frac{a}{4}, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(\frac{a}{4}) = \frac{7}{8}a^2 -$

4, 又 $g(x)_{\min} = a^2 - 8$, 所以 $\frac{7}{8}a^2 - 4 > a^2 - 8$, 解得 $-4\sqrt{2} < a <$

$4\sqrt{2}$, 又 $0 < a < 4$, 所以 $0 < a < 4$;

③当 $\frac{a}{4} \geq 1$, 即 $a \geq 4$ 时, 易知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递减, 则

$f(x)_{\min} = f(1) = a^2 - a - 2$, 又 $g(x)_{\min} = a^2 - 8$,

所以 $a^2 - a - 2 > a^2 - 8$, 解得 $a < 6$, 又 $a \geq 4$, 所以 $4 \leq a < 6$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 6)$.

15. 【解】(1) 当 $a = -1$ 时, $A = \{x | -5 \leq x \leq -1\}$, 故 $\complement_{\mathbf{R}}A = \{x | x < -5$

或 $x > -1\}$.

又 $B = \{x | -4 \leq x \leq 4\}$,

所以 $(\complement_{\mathbf{R}}A) \cap B = \{x | -1 < x \leq 4\}$.

(2) 因为“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的充分不必要条件,

所以 $A \subsetneq B$,

当 A 为空集时, $3a-2>a$, 解得 $a>1$;

当 A 不为空集时, 则 $\begin{cases} 3a-2 \leq a, \\ 3a-2 > -4, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 3a-2 \leq a, \\ 3a-2 \geq -4, \\ a \leq 4 \end{cases}$

解得 $-\frac{2}{3} \leq a \leq 1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为 $\left\{a \mid a \geq -\frac{2}{3}\right\}$.

16. 【解】(1) 由 $2a=b+1$, 可得 $b=2a-1$,

由 $f(x)>3$, 可得 $ax^2+(2a-1)x+1>3$, 即 $(x+2)(ax-1)>0$,

当 $a<-\frac{1}{2}$ 时, 解得 $-2<x<\frac{1}{a}$,

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时, 解集为 \emptyset ,

当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时, 解得 $\frac{1}{a}<x<-2$.

综上所述, 当 $a<-\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 $\left(-2, \frac{1}{a}\right)$,

当 $a=-\frac{1}{2}$ 时, 原不等式的解集为 \emptyset ,

当 $-\frac{1}{2}<a<0$ 时, 原不等式的解集为 $\left(\frac{1}{a}, -2\right)$.

(2) 若 $f(1)=3$, 则 $f(1)=a \times 1^2+b \times 1+1=3$, 所以 $a+b+1=3$,

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}\right)(a+b+1)=\frac{1}{3}\left(2+\frac{b+1}{a}+\frac{a}{b+1}\right) \geq$

$\frac{1}{3}\left(2+2\sqrt{\frac{b+1}{a} \cdot \frac{a}{b+1}}\right)=\frac{4}{3}$,

当且仅当 $\frac{b+1}{a}=\frac{a}{b+1}$, 即 $a=\frac{3}{2}, b=\frac{1}{2}$ 时取等号,

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b+1}$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

17. 【解】(1) 设 $f(x)=mx^2+bx+c(m \neq 0)$,

由 $f(x+1)-f(x-2)=6x-9$, 得 $6mx-3m+3b=6x-9$ 对于 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

故 $\begin{cases} 6m=6, \\ -3m+3b=-9, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=1, \\ b=-2, \end{cases}$

又由 $f(0)=2$, 得 $c=2$,

所以 $f(x)=x^2-2x+2$.

(2) $g(x)=(2a-2)x-a+3-f(x)=-(x-a)^2+a^2-a+1$,

当 $a>1$ 时, $g(x)_{\max}=g(1)=a$;

当 $0 \leq a \leq 1$ 时, $g(x)_{\max}=g(a)=a^2-a+1$;

当 $a<0$ 时, $g(x)_{\max}=g(0)=1-a$.

根据已知条件得 $\begin{cases} a>1, \\ a=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 0 \leq a \leq 1, \\ a^2-a+1=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a<0, \\ 1-a=2, \end{cases}$

解得 $a=2$ 或 $a=-1$.

所以实数 a 的值为 -1 或 2 .

18. 【解】(1) 当 $0 \leq x < 40, 100x \in \mathbf{N}$ 时,

$P=80x-x^2-20x-100-500=-x^2+60x-600$;

当 $40 \leq x \leq 100, 100x \in \mathbf{N}$ 时,

$P=80x-\left(\frac{165}{2}x+\frac{9000}{x}-1150\right)-500=-\frac{5}{2}x-\frac{9000}{x}+650$,

故 $P=\begin{cases} -x^2+60x-600, & 0 \leq x < 40, 100x \in \mathbf{N}, \\ -\frac{5}{2}x-\frac{9000}{x}+650, & 40 \leq x \leq 100, 100x \in \mathbf{N}. \end{cases}$

(2) 当 $0 \leq x < 40, 100x \in \mathbf{N}$ 时,

$P=-(x-30)^2+300$, 故当 $x=30$ 百台时, P 取得最大值, 最大值为 300 万元;

当 $40 \leq x \leq 100, 100x \in \mathbf{N}$ 时,

$P=-\frac{5}{2}x-\frac{9000}{x}+650 \leq -2\sqrt{\frac{5}{2}x \cdot \frac{9000}{x}}+650=350$, 当且仅

当 $\frac{5x}{2}=\frac{9000}{x}$, 即 $x=60$ 时, 等号成立, 故当 $x=60$ 百台时, P

取得最大值, 最大值为 350 万元.

由于 $350>300$, 故当年产量为 60 百台时, 企业所获年利润最大, 最大利润为 350 万元.

19. 【解】(1) 由函数 $f(x)=\frac{ax-b}{4-x^2}$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的奇函数, 得 $f(0)=\frac{-b}{4}=0$, 解得 $b=0$,

当 $b=0$ 时, $f(-x)=\frac{a(-x)}{4-(-x)^2}=-\frac{ax}{4-x^2}=-f(x)$, 所以 $f(x)=$

$\frac{ax}{4-x^2}$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的奇函数, 满足题意.

又 $f(1)=\frac{a}{4-1^2}=\frac{1}{3}$, 解得 $a=1$,

故 $f(x)=\frac{x}{4-x^2}, x \in (-2, 2)$.

(2) 函数 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上为增函数. 证明如下:

在 $(-2, 2)$ 上任取 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$,

则 $f(x_2)-f(x_1)=\frac{x_2}{4-x_2^2}-\frac{x_1}{4-x_1^2}=\frac{(x_2-x_1)(4+x_1x_2)}{(4-x_2^2)(4-x_1^2)}$.

因为 $x_2-x_1>0, 4+x_1x_2>0, 4-x_2^2>0, 4-x_1^2>0$,

所以 $f(x_2)-f(x_1)>0$, 即 $f(x_2)>f(x_1)$,

所以 $f(x)$ 在 $(-2, 2)$ 上为增函数.

(3) 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $-f(x)=f(-x)$,

不等式 $f(t-1)+f(t)<0$ 可化为 $f(t-1)<-f(t)$, 即 $f(t-1)<f(-t)$.

又 $f(x)$ 是定义在 $(-2, 2)$ 上的增函数, 所以 $\begin{cases} t-1 < -t, \\ -2 < t-1 < 2, \\ -2 < -t < 2, \end{cases}$

解得 $-1 < t < \frac{1}{2}$,

所以原不等式的解集为 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.