

3. **C** 【解析】 $\because m^2+n^2=25, mn=12, \therefore (m-n)^2=m^2+n^2-2mn=25-2\times 12=1, (m+n)^2=m^2+n^2+2mn=25+2\times 12=49, \therefore m-n=\pm 1, m+n=\pm 7$. 当 $m-n=1, m+n=7$ 时, $m^3n-mn^3=mn(m^2-n^2)=mn(m+n)(m-n)=12\times 7\times 1=84$; 当 $m-n=1, m+n=-7$ 时, $m^3n-mn^3=mn(m^2-n^2)=mn(m+n)(m-n)=12\times (-7)\times 1=-84$; 当 $m-n=-1, m+n=7$ 时, $m^3n-mn^3=mn(m^2-n^2)=mn(m+n)(m-n)=12\times 7\times (-1)=-84$; 当 $m-n=-1, m+n=-7$ 时, $m^3n-mn^3=mn(m^2-n^2)=mn(m+n)(m-n)=12\times (-7)\times (-1)=84$. 故选 C.
4. **B** 【解析】 $\because (2k+3)^2-4k^2=(2k+3)^2-(2k)^2=(2k+3+2k)\cdot(2k+3-2k)=3(4k+3), k$ 为任意整数, \therefore 其值总能被 3 整除. 故选 B.
5. **B** 【解析】 \because 不等式组 $\begin{cases} x+m\leq 4, \\ \frac{x}{2}-\frac{x-1}{4}>1 \end{cases}$ 有解, $\therefore 3<x\leq 4-m$. \therefore 不等式组 $\begin{cases} x+m\leq 4, \\ \frac{x}{2}-\frac{x-1}{4}>1 \end{cases}$ 有解且至多有 4 个整数解, $\therefore 3<4-m<8$, 解得 $-4<m<1, \therefore 0<1-m<5$. 又: 多项式 $x^2-(1-m)$ 能在有理数范围内因式分解, $\therefore 1-m=4$ 或 $1-m=1$, \therefore 符合条件的整数 m 的值为 $-3, 0$, 即符合条件的整数 m 的个数为 2. 故选 B.
6. **-3** 【解析】 $\because m^2-2m-2\ 011=0, \therefore m(m-2)=2\ 011. m^3-m^2-2\ 013m-2\ 014=m^3-m^2-m^2+m^2-2\ 013m-2\ 014=m^3-2m^2+m^2-2\ 013m-$

关键点拨 利用添项法将所求式子变形是解题关键.

关键点拨 利用完全平方公式求出 $m-n$ 和 $m+n$ 的值是解题的关键. 注意最后代入求值时要分类讨论.

- $2\ 014=m^2(m-2)+m(m-2\ 013)-2\ 014=m^2(m-2)+m(m-2-2\ 011)-2\ 014=m^2(m-2)+m(m-2)-2\ 011m-2\ 014$. 把 $m(m-2)=2\ 011$ 代入上式, 得原式 $=2\ 011m+2\ 011-2\ 011m-2\ 014=-3$. 故答案为 -3 .
7. **$(a-1)(a^2+a+1)$** 【解析】将题图(2)分成三个长方体, 可得体积为 $a\times a\times(a-1)+1\times 1\times(a-1)+1\times a\times(a-1)=a^2(a-1)+a(a-1)+(a-1)=(a-1)(a^2+a+1), \therefore a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)$. 故答案为 $(a-1)(a^2+a+1)$.
8. **\geq** 【解析】由题意得, 当 $a=2, b=x^2-2x+2$ 时, $c=a+b-ab=2+(x^2-2x+2)-2(x^2-2x+2)=2+x^2-2x+2-2x^2+4x-4=-x^2+2x, \therefore b-c=(x^2-2x+2)-(-x^2+2x)=x^2-2x+2+x^2-2x=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2\geq 0, \therefore b\geq c$. 故答案为 \geq .
9. 【解】(1) 原式 $=ax(x^2-16)=ax(x+4)(x-4)$.
(2) 原式 $=(2x-3y-x)^2=(x-3y)^2$.
(3) 原式 $=(m^2+1+2m)(m^2+1-2m)=(m+1)^2(m-1)^2$.
10. 【解】(1) 由图形可知, $2m^2+5mn+2n^2=(2m+n)(m+2n)$. 故答案为 $(2m+n)(m+2n)$.
(2) ①依题意得, $2m^2+2n^2=58, mn=10, \therefore m^2+n^2=29, \therefore (m+n)^2=m^2+n^2+2mn=29+20=49. \therefore m+n>0, \therefore m+n=7$.
②所有裁剪线长之和为 $7\times 6=42(\text{cm})$. 故答案为 42.

第十八章 分式

18.1 分式及其基本性质

18.1.1 从分数到分式



刷基础

1. **B** 【解析】若 $\frac{x}{2-\square}$ 是分式, 则 \square 可能是 y . 故选 B.
2. **C** 【解析】判断分式的两个条件: ①分子、分母都是整式; ②分母中含有字母.

- ① $\frac{3x}{2}$, 分母中不含字母, 故不是分式
- ② $\frac{4}{x+y}$, 符合分式的两个条件, 故是分式

续表

- ③ $x+y$, 是整式, 故不是分式
- ④ $\frac{x^2+2}{\pi}$, π 是常数, 故不是分式
- ⑤ $\frac{5}{8}$, 是分数, 故不是分式
- ⑥ $\frac{1}{x}$, 符合分式的两个条件, 故是分式
- ⑦ $\frac{m^2}{m}$, 符合分式的两个条件, 故是分式

3. **A** 【解析】当 $x=2$ 时, $x-2=0$, 分式无意义, 故选 A.

4. $\frac{4}{x^2+1}$ (答案不唯一) 【解析】 $\because x^2 \geq 0, \therefore x^2+1 \neq 0$, 即对于以 x^2+1 为分母的分式, 无论 x 取何值, 该分式都有意义. \therefore 当 $x=1$ 时, 分式的值为 2, \therefore 符合题意的分式可以为 $\frac{4}{x^2+1}$ (答案不唯一), 故答案为 $\frac{4}{x^2+1}$ (答案不唯一).

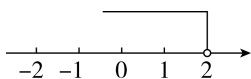
5. **B** 【解析】 \because 当 $x=-1$ 时, 分式无意义, \therefore A, D 选项不符合题意. \because 当 $x=2$ 时, $\frac{x-2}{x+1}=0$, $\frac{x+2}{x+1} \neq 0$, \therefore B 选项符合题意, C 选项不符合题意. 故选 B.

6. **B** 【解析】依题意得 $(ab-ac)+(bc-b^2)=0$ 且 $a-c \neq 0$, 整理得 $(b-c)(a-b)=0$ 且 $a \neq c$, 解得 $b=c$ 或 $a=b$ 且 $a \neq c$, 故该三角形是腰与底边不等的等腰三角形, 故选 B.

7. $\frac{5}{2}$ 【解析】 $\because x=-1$ 时, 分式 $\frac{x-2b}{2x+a}$ 无意义, $\therefore 2 \times (-1) + a = 0, \therefore a = 2$. $\because x=1$ 时, 此分式的值为 0, $\therefore 1-2b=0, \therefore b=\frac{1}{2}, \therefore a+b=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$.

8. **2** 【解析】 \because 分式 $\frac{|x|-2}{|x+2|}$ 的值为 0, $\therefore |x|-2=0$ 且 $|x+2| \neq 0$, 解得 $x=2$.

9. **C** 【解析】 \because 分式 $\frac{1}{x-2}$ 表示的数是负数, $\therefore \frac{1}{x-2} < 0, \therefore x < 2, \therefore x$ 的取值范围在数轴上表示如下:



故选 C.

10. **-3** 【解析】 $\because (m+2)x > 2m+4, \therefore (m+2)x > 2(m+2)$. 又 \because 关于 x 的不等式 $(m+2)x > 2m+4$ 的解集为 $x < 2, \therefore m+2 < 0, \therefore m < -2$. \because 分式 $\frac{2}{m+1}$ 的值为整数, \therefore 整数 m 的值为 $-3, -2, 0, 1$. 又 $\because m < -2, \therefore$ 满足条件的整数 m 的值为 -3 , 故答案为 -3 .

关键点拨

分式无意义, 分母为零; 分式值为零, 分子为零而分母不为零.

易错警示

分式的基本性质中, 分式的分子和分母同时乘或除以同一个数时, 这个数不能为 0.

关键点拨

当分式的值为 0 时, 可以先求使分子为 0 的字母的值, 再代入分式的分母中检验, 要保证分式的分母不为 0.

11. $\left(\frac{s}{t-0.5} - \frac{s}{t}\right)$ 【解析】公路全长为 s km, 骑自行车 t h 可走完全程, 则骑自行车的速度为 $\frac{s}{t}$ km/h; 若提前半小时走完全程, 则骑自行车的速度为 $\frac{s}{t-0.5}$ km/h, 则骑自行车每小时应多走 $\left(\frac{s}{t-0.5} - \frac{s}{t}\right)$ km. 故答案为 $\left(\frac{s}{t-0.5} - \frac{s}{t}\right)$.

18.1.2 分式的基本性质

课时 1 分式的基本性质



刷基础

1. **B** 【解析】A 选项, $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ ($m \neq 0$), 故此选项不符合题意; B 选项, $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$, 故此选项符合题意; C 选项, $\frac{a}{b} \neq \frac{a-1}{b-1}$, 故此选项不符合题意; D 选项, $\frac{-a}{a-b} = \frac{-(-a)}{-(a-b)} = \frac{a}{b-a}$, 故此选项不符合题意. 故选 B.

2. **D** 【解析】把 $\frac{2-x^2+x}{-2x^3+x-3}$ 的分子和分母同时乘 -1 得 $\frac{-2+x^2-x}{2x^3-x+3} = \frac{x^2-x-2}{2x^3-x+3}$. 故选 D.

3. **B** 【解析】 $-\frac{-a}{+a-b} = \frac{a}{a-b}$. 故选 B.

4. **A** 【解析】当 $A=3x+2y$ 时, 分式 $\frac{3x+2y}{2x+y}$ 中的 x 和 y 都扩大为原来的 3 倍后, 得 $\frac{3 \times 3x + 2 \times 3y}{2 \times 3x + 3y} = \frac{3(3x+2y)}{3(2x+y)} = \frac{3x+2y}{2x+y}$, 分式的值不变, 故选项 A 符合题意; 当 $A=3x+3$ 时, 分式 $\frac{3x+3}{2x+y}$ 中的 x 和 y 都扩大为原来的 3 倍后, 得 $\frac{3 \times 3x + 3}{2 \times 3x + 3y} = \frac{3(3x+1)}{3(2x+y)} = \frac{3x+1}{2x+y}$, 分式的值改变, 故选项 B 不符合题意; 当 $A=2xy$ 时, 分式 $\frac{2xy}{2x+y}$ 中的 x 和 y

都扩大为原来的 3 倍后,得 $\frac{2 \times 3x \times 3y}{2 \times 3x + 3y} = \frac{6xy}{2x+y}$,
分式的值改变,故选项 C 不符合题意;当 $A=3$
时,分式 $\frac{3}{2x+y}$ 中的 x 和 y 都扩大为原来的 3 倍
后,得 $\frac{3}{2 \times 3x + 3y} = \frac{1}{2x+y}$,分式的值改变,故选项
D 不符合题意. 故选 A.

5. $x \neq 1$ 【解析】由题意可知, $x-1 \neq 0$, $\therefore x \neq 1$.

6. (1) $\frac{a+20b}{4a+3b}$ (2) $\frac{3x^2+12x-6}{2x^3+6x^2-2}$

【解析】(1) 分子、分母同时乘 10, 得 $\frac{a+20b}{4a+3b}$.

(2) 分子、分母都乘 6, 得 $\frac{3x^2+12x-6}{2x^3+6x^2-2}$.

故答案为 (1) $\frac{a+20b}{4a+3b}$, (2) $\frac{3x^2+12x-6}{2x^3+6x^2-2}$.

7. $\frac{3x-1}{x^2-7x+2}$ 【解析】将分式的分子、分母同时
乘 -1, 得 $\frac{(-3x+1) \times (-1)}{(-x^2+7x-2) \times (-1)} = \frac{3x-1}{x^2-7x+2}$, 故答
案为 $\frac{3x-1}{x^2-7x+2}$.

8. 【解】设 $\frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = \frac{x+y}{z} = k$, 则 $\begin{cases} y+z=kx, & \text{①} \\ x+z=ky, & \text{②} \\ x+y=kz. & \text{③} \end{cases}$

①+②+③, 得 $2x+2y+2z=k(x+y+z)$.

因为 $x+y+z \neq 0$, 所以 $k=2$,

所以原式 $= \frac{2z-z}{2z+z} = \frac{z}{3z} = \frac{1}{3}$.

课时 2 分式的约分和通分

刷基础

1. C 【解析】分式 $\frac{x^2-1}{x^4-1}$ 的分子与分母有公因式
 x^2-1 , 分式 $\frac{4y+3x}{4a}$, $\frac{x^2-xy+y^2}{x+y}$, $\frac{a^2+2ab}{ab-2b^2}$ 是最简分
式. 故选 C.

2. C 【解析】当 $A=1$ 时, 分式为 $\frac{(x-1)(x+2)}{(x^2-1)x} =$
 $\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)(x-1)x} = \frac{x+2}{(x+1)x}$, 可以约分, 故 A 选项
不符合题意; 当 $A=x$ 时, 分式为
 $\frac{(x-1)(x+2)}{(x^2-x)x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x-1)} = \frac{x+2}{x^2}$, 可以约

关键点拨

将分式中的 x
和 y 同时扩大
为原来的 3
倍, 再利用分
式的基本性质
变形来解决.

关键点拨

先观察分式的
分子、分母是
否可以因式分
解, 再看分式
是否能约分.

关键点拨

掌握最简分式
的定义是解题
关键.

思路分析

根据两分式的
最简公分母及
分式的基本性
质判断即可.

分, 故 B 选项不符合题意; 当 $A=-x$ 时, 分式
为 $\frac{(x-1)(x+2)}{(x^2+x)x} = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2(x+1)}$, 不可以约分,
故 C 选项符合题意; 当 $A=4$ 时, 分式为
 $\frac{(x-1)(x+2)}{(x^2-4)x} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)(x-2)x} = \frac{x-1}{(x-2)x}$, 可以
约分, 故 D 选项不符合题意. 故选 C.

3. 0 或 -4 【解析】 \because 分式 $\frac{x(x+2)}{x^2+m}$ 不是最简分
式, 且 m 为实数, $\therefore m=0$ 或 -4.

4. B 【解析】A 选项, $\frac{x-1}{x^2+1}$, 分子、分母都不可以
因式分解, 不是“和谐分式”, 不符合题意;
B 选项, $\frac{a-2b}{a^2-b^2} = \frac{a-2b}{(a+b)(a-b)}$, 分母可以因式
分解, 且是最简分式, 是“和谐分式”, 符合题
意; C 选项, $\frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{x+y}{(x+y)(x-y)} = \frac{1}{x-y}$, 分母可
以因式分解, 但不是最简分式, 不是“和谐分
式”, 不符合题意; D 选项, $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2} =$
 $\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2} = \frac{a-b}{a+b}$, 分子可以因式分解, 但不
是最简分式, 不是“和谐分式”, 不符合题意.
故选 B.

5. 【解】(1) $\frac{2a(a-1)}{8ab^2(1-a)} = \frac{2a(a-1)}{-8ab^2(a-1)} = -\frac{1}{4b^2}$.

(2) $\frac{a^2-4ab+4b^2}{a^2-4b^2} = \frac{(a-2b)^2}{(a+2b)(a-2b)} = \frac{a-2b}{a+2b}$.

6. 【解】 $\frac{x^2-4xy+4y^2}{(x-2y)^3} = \frac{(x-2y)^2}{(x-2y)^3} = \frac{1}{x-2y}$.

把 $x=-2, y=3$ 代入,

得原式 $= \frac{1}{x-2y} = \frac{1}{-2-2 \times 3} = -\frac{1}{8}$.

7. A 【解析】 \because 两分式的最简公分母为 $(1+a)(1-a)^2$, $\therefore \frac{1}{1-a^2} = \frac{1}{(1+a)(1-a)} =$
 $\frac{1-a}{(1+a)(1-a)^2}$, $\therefore \frac{1}{1-a^2}$ 的分子变为 $1-a$, 故
选 A.

8. $10x^2(x-y)$ 【解析】 $\because \frac{1}{2x-2y} = \frac{1}{2(x-y)}$, \therefore 分
式 $\frac{2}{5x^2(x-y)}$ 与 $\frac{1}{2x-2y}$ 的最简公分母是

$10x^2(x-y)$, 故答案为 $10x^2(x-y)$.

$$9. \frac{(a-1)^2}{(a+1)^2(a-1)}, \frac{-5(a+1)}{(a+1)^2(a-1)}$$

【解析】 $\because \frac{a-1}{a^2+2a+1} = \frac{a-1}{(a+1)^2}, \frac{5}{1-a^2} = \frac{-5}{a^2-1} = \frac{-5}{(a+1)(a-1)}, \therefore$ 最简公分母为 $(a+1)^2(a-1)$, \therefore 通分后分别为 $\frac{(a-1)^2}{(a+1)^2(a-1)}, \frac{-5(a+1)}{(a+1)^2(a-1)}$.

10. 【解】填写表格如下:

通分前的分式		最简公分母	通分后的分式	
$\frac{3}{4xy}$	$\frac{5}{2x^2y}$	$4x^2y$	$\frac{3x}{4x^2y}$	$\frac{10}{4x^2y}$
$\frac{1}{2x-1}$	$\frac{1}{2x+1}$	$4x^2-1$	$\frac{2x+1}{4x^2-1}$	$\frac{2x-1}{4x^2-1}$
$\frac{x}{2x-1}$	$\frac{x+1}{4x^2-1}$	$4x^2-1$	$\frac{2x^2+x}{4x^2-1}$	$\frac{x+1}{4x^2-1}$

刷提升

1. A 【解析】 $\because \frac{a}{b} = 2, \therefore a = 2b, \therefore \frac{a^2-b^2}{ab-a^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{a(b-a)} = -\frac{a+b}{a} = -\frac{3b}{2b} = -\frac{3}{2}$, 故选 A.

2. 5 【解析】 $4x-y=4a^2-8a+16$, ① $x+y=a^2+8a-16$, ② ①+②得 $5x=5a^2$, 解得 $x=a^2$. 把 $x=a^2$ 代入②, 得 $y=8a-16. \because x \leq y, \therefore a^2 \leq 8a-16$, 即 $a^2-8a+16 \leq 0, \therefore (a-4)^2 \leq 0, \therefore a-4=0$, 解得 $a=4, \therefore \frac{a^2-1}{a-1} = \frac{(a+1)(a-1)}{a-1} = a+1 = 4+1=5$, 故答案为 5.

3. 【解】 $\because abc=1, \therefore \frac{1}{ab+b+1} = \frac{abc}{ab+b+abc} = \frac{ac}{a+1+ac}, \frac{1}{bc+c+1} = \frac{abc}{bc+c+abc} = \frac{ab}{b+1+ab} = \frac{ab}{b+abc+ab} = \frac{a}{1+ac+a}$.

4. 【解】(答案不唯一) (1) 选择 x^2 和 $4x+4$, 则 $x^2+(4x+4)=(x+2)^2$.
(2) 选择 x^2+4x 作为分子, x^2 作为分母, 则 $\frac{x^2+4x}{x^2} = \frac{x(x+4)}{x^2} = \frac{x+4}{x}$.

关键点拨

(1) 理解题中“巧分式”的定义是解题关键.

刷素养

5. 【解】(1) $\because \frac{(x-1)(2x-3)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = 2x-3, 2x-3$

是整式, \therefore ①是“巧分式”. $\because \frac{2x+5}{x+3} = \frac{2x+6-1}{x+3} =$

$\frac{2(x+3)-1}{x+3} = 2 - \frac{1}{x+3}, 2 - \frac{1}{x+3}$ 不是整式, \therefore ②不是

“巧分式”. $\because \frac{x^2-y^2}{x+y} = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = x-y, x-y$

是整式, \therefore ③是“巧分式”. 故答案为①③.

(2) \because 分式 $\frac{x^2-4x+m}{x+n}$ (m, n 为常数) 是一个“巧

分式”, 它的“巧整式”为 $x-7, \therefore (x+n)(x-7) = x^2-4x+m, \therefore x^2+(n-7)x-7n = x^2-4x+m,$

$\therefore \begin{cases} n-7=-4, \\ -7n=m, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} m=-21, \\ n=3. \end{cases}$

(3) 是. 理由: \because 分式 $\frac{-2x^3+2x}{A}$ 的“巧整式”为

$1-x, \therefore A = \frac{-2x^3+2x}{1-x}, \therefore A = \frac{2x(1-x^2)}{1-x} =$

$\frac{2x(1-x)(1+x)}{1-x} = 2x(1+x) = 2x^2+2x.$

$\therefore \frac{2x^3+4x^2+2x}{2x^2+2x} = \frac{2x(x^2+2x+1)}{2x(x+1)} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)} = x+$

$1, x+1$ 是整式, $\therefore \frac{2x^3+4x^2+2x}{A}$ 是“巧分式”.

18.2 分式的乘法与除法

课时1 分式的乘除

刷基础

1. D 【解析】A 选项, $\frac{a^2}{b^5} \cdot \frac{b^3}{a^5} = \frac{1}{a^3b^2}$, 故此选项

不正确; B 选项, $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$, 故此选项不正

确; C 选项, $\frac{7b}{2a^3} \cdot \frac{8a^3}{7b^2} = \frac{4}{b}$, 故此选项不正确;

D 选项, $a \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a}$, 故此选项正确. 故选 D.

2. C 【解析】原式 $= \frac{(x+1)(x-1)}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x+1} = x-1.$

$\because x$ 为正整数, $\therefore x \geq 1$ 且 x 为整数, $\therefore x-1 \geq 0$

且 $x-1$ 为整数, \therefore 计算 $\frac{x^2-1}{x+4} \cdot \frac{x+4}{x+1}$ 的结果是非

负整数. 故选 C.

3. $-3x^2 - 6x$ 【解析】原式 $= \frac{(x+2)(x-2)}{x} \cdot \frac{6x^2}{2(2-x)} = -(x+2) \cdot 3x = -3x^2 - 6x$. 故答案为 $-3x^2 - 6x$.

4. 1 【解析】原式 $= \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-3)} \cdot \frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-2)} = 1$. 故答案为 1.

5. 【解】答案不唯一. 例如: 选择 A, B. 易错警示

$$A \times B = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x^2-2x+1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{(x-1)^2}{x-1} = x+1.$$

$\because x \neq 1$ 且 $x \neq 2, \therefore x \neq 0$.

当 $x=0$ 时, 原式 $= x+1 = 1$.

6. A 【解析】A 选项, $\frac{x^2-4}{x-3} \div \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$.

$$\frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \frac{(x+2)(x-2)(x+3)}{x-3}, \text{不是整式, 符合题意;}$$

$$\text{B 选项, } \frac{x^2-4}{x-3} \div \frac{x-2}{x^2-9} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{x-2} = (x+2)(x+3),$$

$$\text{是整式, 不符合题意; C 选项, } \frac{x^2-4}{x-3} \div \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} = (x+2)(x-2),$$

$$\text{是整式, 不符合题意; D 选项, } \frac{x^2-4}{x-3} \div \frac{x+2}{x^2-9} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-3} \cdot \frac{(x+3)(x-3)}{x+2} = (x-2)(x+3),$$

是整式, 不符合题意. 故选 A.

7. D 【解析】 $\frac{x^2-2x}{x-1} \div \frac{x^2}{1-x} = \frac{x^2-2x}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x^2} =$

$$\frac{x^2-2x}{x-1} \cdot \frac{-(x-1)}{x^2}, \frac{x^2-2x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x^2} = \frac{x(x-2)}{x-1} \cdot \frac{x-1}{x^2} = \frac{x-2}{x},$$

$$\text{故接力中自己负责的一步出现错误的是乙和丁. 故选 D.}$$

8. C 【解析】 $\frac{2ab}{a+b} \div \frac{2a^2b^2}{a^2-b^2} = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{2a^2b^2} = \frac{2ab}{a+b} \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{2a^2b^2} = \frac{a-b}{ab},$ 故选 C.

9. 【解】(1) “惠民 1 号”玉米试验田面积是 $\pi(R-1)^2$ 平方米, 单位面积产量是 $\frac{450}{\pi(R-1)^2}$ 千

克/平方米; “惠民 2 号”玉米试验田面积是 $\pi(R^2-1)$ 平方米, 单位面积产量是 $\frac{450}{\pi(R^2-1)}$ 千克/平方米.

$$\because R-1 < R+1, R-1 > 0, \therefore 0 < (R-1)^2 < R^2-1, \therefore \frac{450}{\pi(R-1)^2} > \frac{450}{\pi(R^2-1)},$$

$$\therefore \text{“惠民 1 号”玉米试验田的玉米单位面积产量高.}$$

$$(2) \frac{450}{\pi(R-1)^2} \div \frac{450}{\pi(R^2-1)} = \frac{450}{\pi(R-1)^2} \times \frac{\pi(R^2-1)}{450} = \frac{R+1}{R-1}, \therefore \text{两块玉米试验田的玉米单位面积产量高的是单位面积产量低的} \frac{R+1}{R-1} \text{ 倍.}$$



刷提升

1. D 【解析】设 \otimes 为 A, 则 $\frac{m^2}{m+1} \div \frac{A}{m+1} = A,$

$$\therefore \frac{m^2}{m+1} \cdot \frac{m+1}{A} = A, \therefore m^2 = A^2, \therefore A = \pm m, \therefore \otimes \text{ 代表的代数式为 } \pm m, \text{ 故选 D.}$$

2. B 【解析】设木星的质量为 M, 这个人的质量为 m, 则地球的质量为 $\frac{1}{318}M$. \because 地球的半径约为木星半径的 $\frac{4}{45}, \therefore$ 木星的半径为 $R \div \frac{4}{45} = \frac{45}{4}R$. 这个人站在地球表面所受到的重力为

$$F_{\text{地}} = \frac{Gm \frac{1}{318}M}{R^2}; \text{站在木星表面所受到的重力为 } F_{\text{木}} = \frac{GmM}{\left(\frac{45}{4}R\right)^2}, \therefore \text{站在地球表面的人所受到的重力约是他站在木星表面所受到的重力的}$$

$$\frac{Gm \frac{1}{318}M}{R^2} \div \frac{GmM}{\left(\frac{45}{4}R\right)^2} = \frac{Gm \frac{1}{318}M}{R^2} \cdot \frac{16}{GmM} = \frac{1}{318} \times \frac{2025}{16} = \frac{675}{1696} \approx \frac{2}{5}, \text{ 故选 B.}$$

归纳总结

分式比较大小的方法: 同分母时比分子, 同分子时比分母, 分子、分母均不同时可用作差(商)法比较大小.

课时2 分式的乘除混合运算及乘方

3. 14 【解析】∵ 大正方形的面积为 49, ∴ $(a+b)^2 = 49$. 又∵ $a > b > 0$, ∴ $a+b=7$. ∴ 中间小正

$$\begin{aligned} \text{方形的面积为 } 1, \therefore (a-b)^2 &= 1, \therefore (a+b)^2 - (a-b)^2 = 48, \therefore a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 48, \\ \therefore ab &= 12, \therefore (a^4 - b^4) \div \frac{a^2 + b^2}{ab} \div (6a - 6b) = (a^2 + b^2)(a-b)(a+b) \cdot \frac{ab}{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{6(a-b)} = \\ \frac{ab(a+b)}{6} &= \frac{12 \times 7}{6} = 14. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. 【解】 \text{原式} &= a \left(a - \frac{1}{a} \right) \left(a + \frac{1}{a} \right) \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \cdot \\ &\quad \left(a^4 + \frac{1}{a^4} \right) \cdot \left(a^8 + \frac{1}{a^8} \right) \\ &= a \left(a^2 - \frac{1}{a^2} \right) \left(a^2 + \frac{1}{a^2} \right) \left(a^4 + \frac{1}{a^4} \right) \cdot \\ &\quad \left(a^8 + \frac{1}{a^8} \right) \\ &= a \left(a^4 - \frac{1}{a^4} \right) \left(a^4 + \frac{1}{a^4} \right) \cdot \left(a^8 + \frac{1}{a^8} \right) \\ &= a \left(a^8 - \frac{1}{a^8} \right) \left(a^8 + \frac{1}{a^8} \right) \\ &= a \left(a^{16} - \frac{1}{a^{16}} \right) \\ &= a^{17} - \frac{1}{a^{15}}. \end{aligned}$$

刷素养

$$\begin{aligned} 5. 【解】 (1) \because \frac{y^3}{x} \div \left(-\frac{y^5}{x^2} \right) &= -\frac{y^3}{x} \cdot \frac{x^2}{y^5} = -\frac{x}{y^2}, -\frac{y^5}{x^2} \div \frac{y^7}{x^3} = -\frac{y^5}{x^2} \cdot \frac{x^3}{y^7} = -\frac{x}{y^2}, \frac{y^7}{x^3} \div \left(-\frac{y^9}{x^4} \right) = -\frac{y^7}{x^3} \cdot \frac{x^4}{y^9} = \\ -\frac{x}{y^2}, \dots, \text{故可得结论: 将任意一个分式除以后} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{由规律可得, 第五个分式为 } \frac{y^{11}}{x^5}, \text{ 则第六个} & \\ \text{分式为 } -\frac{y^{13}}{x^6}. & \end{aligned}$$

$$(3) \text{由所给分式可得, 该列分式的奇数项为} & \\ \text{正, 偶数项为负, 分子是 } y^{2n+1}, \text{ 分母是 } x^n, \therefore \text{第} & \\ n \text{ 个分式为 } (-1)^{n+1} \cdot \frac{y^{2n+1}}{x^n}. & \end{aligned}$$

思路分析

根据图形得出 $(a+b)^2 = 49$, $(a-b)^2 = 1$, 再结合 $a > b > 0$ 求出 $a+b$ 及 ab 的值, 根据分式的乘除法法则把原式变形, 代入 $a+b$ 及 ab 的值计算即可.



刷基础

1. B 【解析】

$$\textcircled{1} \quad \frac{3x}{x^2} \cdot \frac{x}{3x} = \frac{1}{x}, \text{ 符合题意}$$

$$\textcircled{2} \quad a \div b \times \frac{1}{b} = a \times \frac{1}{b} \times \frac{1}{b} = \frac{a}{b^2}, \text{ 不符合题意}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{a}{a^2-1} \div \frac{a^2}{a^2+a} = \frac{a}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{a(a+1)}{a^2} = \frac{1}{a-1}, \text{ 符合题意}$$

$$\textcircled{4} \quad 8a^2b^2 \div \left(-\frac{3a}{4b^2} \right) = 8a^2b^2 \times \left(-\frac{4b^2}{3a} \right) = -\frac{32ab^4}{3}, \text{ 不符合题意}$$

$$\begin{aligned} 2. D \quad 【解析】 \frac{81-a^2}{a^2+6a+9} \div \frac{a-9}{2a+6} \cdot \frac{a+3}{a+9} &= \\ -\frac{(a+9)(a-9)}{(a+3)^2} \cdot \frac{2(a+3)}{a-9} \cdot \frac{a+3}{a+9} &= -2. \text{ 故} \\ \text{选 D.} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \frac{2a}{3b^2} \quad 【解析】 \text{由题意得 } \frac{2a^2b}{3x} \cdot \frac{2xy}{3ab^3} \div \left(\frac{2}{3}y \right) &= \\ \frac{4a^2bxy}{9ab^3x} \cdot \frac{3}{2y} = \frac{2a}{3b^2}, \text{ 故答案为 } \frac{2a}{3b^2}. & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. 【解】 (1) \text{第一步使用的公式是 } a^2-2ab+b^2 &= (a-b)^2, a^2-b^2 = (a+b)(a-b). \text{ 故答案为 } a^2- \\ 2ab+b^2 = (a-b)^2, a^2-b^2 = (a+b)(a-b). & \\ (2) \text{由第一步得到第二步所使用的运算方法} & \\ \text{是约分, 故答案为约分.} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \text{第二步出现错误, } \frac{1}{x^2-6x+9} \div \frac{x+3}{x-3} \cdot (9-x^2) &= \\ \frac{1}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{x+3} \cdot (3-x)(3+x) &= -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. 【解】 \frac{2a-2}{a+2} \cdot \frac{a^2-4}{a^2-2a+1} \div \frac{1}{1-a^2} &= \frac{2(a-1)}{a+2} \cdot \\ \frac{(a+2)(a-2)}{(a-1)^2} \cdot [-(a+1)(a-1)] &= -2(a-2) \cdot \\ (a+1) &= -2a^2+2a+4. \text{ 由 } a^2-a-3=0 \text{ 得 } a^2-a= \\ 3, \text{ 代入上式, 得原式} &= -2(a^2-a)+4=-2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. C \quad 【解析】 \text{原式} &= \frac{a}{a-1} \cdot \frac{2a}{(a+1)(a-1)} \cdot \\ \frac{(a-1)^2(a+1)^2}{4a^2} &= \frac{2a^2}{(a-1)^2(a+1)} \cdot \frac{(a-1)^2(a+1)^2}{4a^2} = \end{aligned}$$

$\frac{a+1}{2}$. 由于 $\frac{a+1}{2}$ 是正整数, $(a-1)(a+1) \neq 0$,

$a \neq 0$, 所以 a 为大于 1 的奇数. 故选 C.

7. $-\frac{5}{4b}$ 【解析】 $\left(-\frac{a}{b}\right)^2 \div \left(\frac{2a^2}{5b}\right)^2 \cdot \left(-\frac{a^2}{5b}\right) = \frac{a^2}{b^2} \div \frac{4a^4}{25b^2} \cdot \left(-\frac{a^2}{5b}\right) = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{25b^2}{4a^4} \cdot \left(-\frac{a^2}{5b}\right) = -\frac{5}{4b}$.

8. 【解】原式 $= \frac{(x+y)^2(x-y)^2}{x^2y^2} \cdot \frac{1}{x+y} \cdot \frac{x^3}{(x-y)^3} = \frac{x(x+y)}{y^2(x-y)} = \frac{x^2+xy}{xy^2-y^3}$. 当 $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$ 时, 原式 $= \frac{3}{2}$.

刷易错

9. 【解】佳佳的计算结果不对. 改正如下:

原式 $= (x+y) \cdot \frac{x}{x+y} \cdot \frac{x}{x+y} = \frac{x^2}{x+y}$.

18.3 分式的加法与减法

课时 1 分式的加減



1. D 【解析】 $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} = \frac{3}{x}$. 故选 D.

2. B 【解析】 $\because M = \frac{x}{x-1}, N = \frac{1}{x-1}, \therefore M+N = \frac{x}{x-1} + \frac{1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$, $M-N = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1$, $M \cdot N = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{1}{x-1} = \frac{x}{(x-1)^2}$, $\frac{M}{N} = \frac{x}{x-1} \div \frac{1}{x-1} = \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{1} = x$. 故选 B.

3. C 【解析】 $\frac{x^2}{1-x} + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2}{1-x} - \frac{1}{1-x} = \frac{(x+1)(x-1)}{1-x} = -(x+1) = -x-1$. \therefore 原式的值小于 -6 , $\therefore -x-1 < -6$, 解得 $x > 5$. 故选 C.

4. $\frac{3}{x-1}$ 【解析】原式 $= \frac{3(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{3}{x-1}$.

5. 【解】原式 $= \frac{2m-3}{4m^2-9} = \frac{2m-3}{(2m+3)(2m-3)} = \frac{1}{2m+3}$.

6. A 【解析】 $\frac{2}{x+3} + \frac{2}{3-x} + \frac{2x+18}{x^2-9} = \frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)} - \frac{2(x+3)}{(x+3)(x-3)} + \frac{2x+18}{(x+3)(x-3)} = \frac{2x+6}{(x+3)(x-3)} = \frac{2}{x-3}$. $\because x$ 为整数, 且原式为整数, $\therefore x-3 = \pm 1$ 或 ± 2 , $\therefore x = 4$ 或 2 或 5 或 1 , \therefore 所有符合条件的 x 的值的和为 $4+2+5+1=12$, 故选 A.

7. ② 【解析】原式 $= \frac{x(x+y)}{(x+y)(x-y)} - \frac{y(x-y)}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2+xy-xy-y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2-y^2}{(x+y)(x-y)} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$, 所以他从第②步开始出现错误, 故答案为②.

8. $\frac{3}{x(x+3)}$ 【解析】原式 $= \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} = \frac{3}{x(x+3)}$.

9. 【解】(1) 加入 m 克糖之前, \therefore 糖水为 a 克, 其中糖为 b 克, \therefore 含糖率 $A = \frac{b}{a}$. 加入 m 克糖之后, \therefore 糖水为 $(a+m)$ 克, 其中糖为 $(b+m)$ 克, \therefore 含糖率 $B = \frac{b+m}{a+m}$. 故答案为 $\frac{b}{a}, \frac{b+m}{a+m}$.
(2) $\because A = \frac{b}{a}, B = \frac{b+m}{a+m}, B-A = \frac{b+m}{a+m} - \frac{b}{a} = \frac{ab+am-ab-bm}{a(a+m)} = \frac{am-bm}{a(a+m)} = \frac{m(a-b)}{a(a+m)}$, $a > b > 0, m > 0, \therefore B-A > 0, \therefore B > A, \therefore$ 加糖后的糖水更甜了.

易错警示

在进行分式的乘除混合运算时, 应将乘除混合运算统一为乘法运算, 再按照从左到右的顺序计算.

关键点拨

(2) 利用分离常数法, 将 y 表示成 $-2 + \frac{5}{x+1}$ 是解题的关键.

10. 【解】(1) $P \geq Q$. 理由: $\because P = x+1, Q = \frac{4x}{x+1}$, $\therefore P-Q = x+1 - \frac{4x}{x+1} = \frac{(x+1)^2-4x}{x+1} = \frac{(x-1)^2}{x+1}$. $\because x > 0, \therefore x+1 > 0$. 又 $\because (x-1)^2 \geq 0$, $\therefore \frac{(x-1)^2}{x+1} \geq 0, \therefore P \geq Q$.

(2) $y = \frac{3}{P} - \frac{Q}{2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2x}{x+1} = \frac{3-2x}{x+1} = \frac{-2(x+1)+5}{x+1} = -2 + \frac{5}{x+1}$. $\because x, y$ 均为整数, $\therefore x+1$ 的值为 $\pm 1, \pm 5, \therefore$ 整数 y 的值为 3 或 -7 或 -1 或 -3 .

刷提升

1. C 【解析】 $\because p = \frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1}, q = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1},$
 $\therefore p+q = \frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1} + \left(\frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} \right) = \frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1} +$
 $\frac{1}{a+1} - \frac{1}{b+1} = \frac{a+1}{a+1} - \frac{b+1}{b+1} = 1-1=0, \therefore p = -q.$ 故
 选 C.

2. A 【解析】 $\because \frac{z}{x+y} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} = 11, \therefore 1 + \frac{z}{x+y} +$
 $1 + \frac{x}{y+z} + 1 + \frac{y}{z+x} = 14, \frac{x+y+z}{x+y} + \frac{x+y+z}{y+z} + \frac{x+y+z}{z+x} =$
 $14, \therefore (x+y+z) \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} \right) = 14, \therefore \frac{1}{x+y} +$
 $\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{14}{x+y+z}.$ 而 $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{7}{6},$
 $\therefore \frac{14}{x+y+z} = \frac{7}{6}, \therefore x+y+z = 12.$ 故选 A.

3. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ 【解析】 $\because \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1} =$
 $\frac{(2a+2b)n+a-b}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, \therefore \begin{cases} 2a+2b=0, \\ a-b=1, \end{cases}$
 解得 $\begin{cases} a = \frac{1}{2}, \\ b = -\frac{1}{2}, \end{cases}$ 故答案为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}.$

4. 【解】(1) 所得分式 $\frac{a+1}{b+1}$ 的值较原来分式的值
 增大了. 理由如下: $\frac{a}{b} - \frac{a+1}{b+1} = \frac{a(b+1)}{b(b+1)} -$
 $\frac{b(a+1)}{b(b+1)} = \frac{ab+a-ab-b}{b(b+1)} = \frac{a-b}{b^2+b}.$ $\because b>a>0, \therefore b^2 +$
 $b>0, a-b<0, \therefore \frac{a-b}{b^2+b} < 0, \therefore$ 所得分式 $\frac{a+1}{b+1}$ 的值
 增大了.

(2) ① 甲所购饲料的平均单价是 $\frac{800m+800n}{800 \times 2} =$
 $\frac{m+n}{2}$ (元/千克), 乙所购饲料的平均单价是
 $\frac{800 \times 2}{\frac{800}{m} + \frac{800}{n}} = \frac{2mn}{m+n}$ (元/千克).
 ② $\frac{m+n}{2} - \frac{2mn}{m+n} = \frac{(m+n)^2}{2(m+n)} - \frac{4mn}{2(m+n)} = \frac{(m-n)^2}{2(m+n)}.$
 $\because m, n$ 是正数, 且 $m \neq n, \therefore \frac{(m-n)^2}{2(m+n)} > 0,$
 $\therefore \frac{m+n}{2} > \frac{2mn}{m+n}, \therefore$ 乙所购饲料的平均单价较低.

解题策略
 分式混合运算
 顺序与分数混
 合运算顺序类
 似, 先算乘方,
 再算乘除, 最
 后算加减, 有
 括号的先算括
 号里面的.

思路分析
 (2) 先求出
 $P(2)+P(3)+$
 $P(4)+P(5)+$
 $P(6)+P(7)+$
 $P(8)$ 的值, 再
 解不等式
 即可.

刷素养

5. (1) 【解】由题意可得, 第⑤个等式是 $\frac{x+6}{x+7} -$
 $\frac{x+5}{x+6} = \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x+7},$ 故答案为 $\frac{x+6}{x+7} - \frac{x+5}{x+6} = \frac{1}{x+6} -$
 $\frac{1}{x+7}.$
 (2) 【解】由题意可得, 第⑩个等式是 $\frac{x+n+1}{x+n+2} -$
 $\frac{x+n}{x+n+1} = \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+n+2},$ 故答案为 $\frac{x+n+1}{x+n+2} -$
 $\frac{x+n}{x+n+1} = \frac{1}{x+n+1} - \frac{1}{x+n+2}.$
 (3) 【证明】 $\because \frac{x+n+1}{x+n+2} - \frac{x+n}{x+n+1} = \frac{(x+n+2)-1}{x+n+2} -$
 $\frac{(x+n+1)-1}{x+n+1} = 1 - \frac{1}{x+n+2} - 1 + \frac{1}{x+n+1} = \frac{1}{x+n+1} -$
 $\frac{1}{x+n+2}, \therefore$ 等式 $\frac{x+n+1}{x+n+2} - \frac{x+n}{x+n+1} = \frac{1}{x+n+1} -$
 $\frac{1}{x+n+2}$ 成立.

课时 2 分式的混合运算

刷基础

1. D 【解析】 $\because \left(\frac{x-1}{x+1} + 1 \right) \cdot \frac{x+1}{x} = \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{x+1}{x+1} \right) \cdot$
 $\frac{x+1}{x} = \frac{x-1+x+1}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{2x}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x} = 2, \therefore$ 嘉嘉
 从第一步开始出错; $\left(\frac{x-1}{x+1} + 1 \right) \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{x-1}{x+1} \cdot$
 $\frac{x+1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{x-1}{x} + \frac{x+1}{x} = \frac{2x}{x} = 2, \therefore$ 琪琪从第三步
 开始出错, 故两人的计算过程都不正确, 故
 选 D.

2. $-\frac{1}{a+3}$ 【解析】 $\left(1 - \frac{5}{a+2} \right) \div \left(\frac{5}{a+2} - a + 2 \right) =$
 $\frac{a-3}{a+2} \div \frac{5-(a^2-4)}{a+2} = \frac{a-3}{a+2} \cdot \frac{a+2}{-(a-3)(a+3)} =$
 $-\frac{1}{a+3},$ 故答案为 $-\frac{1}{a+3}.$

3. 【解】(1) $P = \frac{3-x}{x^2-2x+1} \div \left(1 + \frac{x^2-2x-1}{1-x} \right) =$
 $\frac{3-x}{(x-1)^2} \div \frac{1-x+x^2-2x-1}{1-x} = \frac{3-x}{(x-1)^2} \cdot \frac{1-x}{x(x-3)} =$
 $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x^2-x}.$
 (2) $P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)+P(7)+$

$$P(8) = \frac{1}{2 \times (2-1)} + \frac{1}{3 \times (3-1)} + \frac{1}{4 \times (4-1)} + \frac{1}{5 \times (5-1)} + \frac{1}{6 \times (6-1)} + \frac{1}{7 \times (7-1)} + \frac{1}{8 \times (8-1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \therefore \frac{t-2}{4} - \frac{3-t}{2} \geq \frac{7}{8},$$

$$\therefore 2(t-2) - 4(3-t) \geq 7, \text{解得 } t \geq 3\frac{5}{6}, \therefore \text{解集为 } t \geq 3\frac{5}{6}, \text{最小整数解为 } 4.$$

4. **A** 【解析】原式 $= \left(\frac{b}{a-b} + \frac{a-b}{a-b} \right) \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{a^2} = \frac{a}{a-b} \cdot \frac{(a+b)(a-b)}{a^2} = \frac{a+b}{a}$. $\therefore a-2b=0, b \neq 0$, $\therefore a=2b$, 则原式 $= \frac{2b+b}{2b} = \frac{3}{2}$, 故选 A.

5. 【解】 $\therefore \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \div \frac{x-1}{x^2+x} - x = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x(x+1)}{x-1} - x = x - x = 0$, \therefore 无论 x 为何值, 原式的值都为 0, \therefore 甲同学把“ $x=2\ 004$ ”错抄成“ $x=2\ 040$ ”, 其结果也是 0, \therefore 他的计算结果也是正确的.

6. 【解】 $\frac{x^2-4x+4}{x+1} \div \left(\frac{3}{x+1} - x + 1 \right) = \frac{(x-2)^2}{x+1} \div \left(\frac{3}{x+1} - \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \right) = \frac{(x-2)^2}{x+1} \div \frac{4-x^2}{x+1} = \frac{(2-x)^2}{x+1}$. $\frac{x+1}{(2+x)(2-x)} = \frac{2-x}{2+x}$. 解不等式组 $\begin{cases} 5-2x \geq 1, \\ x+1 > 0, \end{cases}$ 得 $-1 < x \leq 2$, \therefore 不等式组的整数解为 0, 1, 2. $\therefore x+1 \neq 0, (2+x)(2-x) \neq 0, \therefore x \neq -1$, 且 $x \neq \pm 2, \therefore x=0$ 或 1. 当 $x=1$ 时, 原式 $= \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3}$. (或当 $x=0$ 时, 原式 $= \frac{2-0}{2+0} = 1$)

刷素养

7. $-\frac{1}{202}$ 【解析】 $\therefore ab^2 = \frac{c}{a} - b, \therefore a^2b^2 = c - ab$, $a^2b^2 - c = -ab, c - a^2b^2 = ab, \therefore \frac{a^2b^2}{c^2} - \frac{2}{c} + \frac{1}{a^2b^2} + \frac{2ab}{c^2} - \frac{2}{abc} = \left(\frac{ab}{c} - \frac{1}{ab} \right)^2 + \frac{2a^2b^2}{abc^2} - \frac{2c}{abc^2} = \left(\frac{a^2b^2-c}{abc} \right)^2 + \frac{2(a^2b^2-c)}{abc^2} = \left(\frac{-ab}{abc} \right)^2 + \frac{-2ab}{abc^2} = \frac{1}{c^2} -$

$$\frac{2}{c^2} = -\frac{1}{c^2}, \frac{2}{ab} - \frac{2ab}{c} = \frac{2c-2a^2b^2}{abc} = \frac{2ab}{abc} = \frac{2}{c},$$

$$\therefore \left(\frac{a^2b^2}{c^2} - \frac{2}{c} + \frac{1}{a^2b^2} + \frac{2ab}{c^2} - \frac{2}{abc} \right) \div \left(\frac{2}{ab} - \frac{2ab}{c} \right) \div \frac{101}{c} = -\frac{1}{c^2} \div \frac{2}{c} \div \frac{101}{c} = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{101} = -\frac{1}{202}.$$

故答案为 $-\frac{1}{202}$.

18.4 整数指数幂

课时 1 负整数指数幂



刷基础

1. **D** 【解析】 $\therefore (x-3)^0 - 2(2x-4)^{-1}$ 有意义, $\therefore x-3 \neq 0$ 且 $2x-4 \neq 0, \therefore x \neq 3$ 且 $x \neq 2$. 故选 D.

关键点拨

利用 $2^{10} = 1\ 024 \approx 1 \times 10^3$ 进行估算是解题的关键.

2. **B** 【解析】 $\therefore 2^{10} = 1\ 024 \approx 1 \times 10^3, \therefore 2^{-30} = (2^{10})^{-3} \approx (10^3)^{-3} = 10^{-9}$. 故选 B.

3. **A** 【解析】 $\therefore 4^{3n} \times 8^n = \left(\frac{1}{2} \right)^{-9n}, \therefore 2^{6n} \times 2^{3n} = 2^9, \therefore 2^{9n} = 2^9, \therefore 9n = 9$, 解得 $n = 1$. 故选 A.

4. $3a(2a-b)^{-2}$ 【解析】 $\frac{3a}{(2a-b)^2} = 3a(2a-b)^{-2}$. 故答案为 $3a(2a-b)^{-2}$.

5. $b < a < d < c$ 【解析】 $\therefore a = -0.09, b = -\frac{1}{9}, c = 9, d = 1, -\frac{1}{9} < -0.09 < 1 < 9, \therefore b < a < d < c$. 故答案为 $b < a < d < c$.

6. **C** 【解析】 $(a^{-2})^3 (ab^2)^{-2} = a^{-6} \cdot a^{-2}b^{-4} = a^{-8}b^{-4} = \frac{1}{a^8b^4}$. 故选 C.

7. **A** 【解析】 由题意可得 $\begin{cases} x+y-3=0, \\ x-2y=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases}$ 则 $x^{-y} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, 故选 A.

8. **D** 【解析】 若填入的符号为“+”, 则算式为 $(-3) + (-4)^{-2} \times \left| -\frac{1}{5} \right| = (-3) + \frac{1}{16} \times \frac{1}{5} = -2\frac{79}{80}$; 若填入的符号为“-”, 则算式为 $(-3) - (-4)^{-2} \times \left| -\frac{1}{5} \right| = (-3) - \frac{1}{16} \times \frac{1}{5} = -3 - \frac{1}{80} = -3\frac{1}{80}$; 若填入的符号为“ \times ”, 则算式为 $(-3) \times (-4)^{-2} \times \left| -\frac{1}{5} \right| = -3 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{5} = -\frac{3}{80}$; 若填入的

方法归纳

分式的化简求值一般先把分式化简, 再根据已知条件代入求值, 当需要自主选择字母的取值时, 要注意所选取的字母的值要使分式有意义.

符号为“÷”，则算式为 $(-3) \div (-4)^{-2} \times \left| -\frac{1}{5} \right| = -3 \times 16 \times \frac{1}{5} = -9.6$. $\therefore \left| -2\frac{79}{80} \right| = 2\frac{79}{80}$, $\left| -3\frac{1}{80} \right| = 3\frac{1}{80}$, $\left| -\frac{3}{80} \right| = \frac{3}{80}$, $|-9.6| = 9.6$, $9.6 > 3\frac{1}{80} > 2\frac{79}{80} > \frac{3}{80}$, $\therefore -9.6 < -3\frac{1}{80} < -2\frac{79}{80} < -\frac{3}{80}$, \therefore 若“□”里填入的符号为“÷”，则算式的结果最小，故选 D.

9. 【解】 $(x^{-1}y^{-1}) \div (x^{-2}y^{-2}) - xy(x+y)^{-1} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \div \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right) - \frac{xy}{x+y} = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \div \left[\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right) \right] - \frac{xy}{x+y} = 1 \div \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) - \frac{xy}{x+y} = 1 \div \frac{x+y}{xy} - \frac{xy}{x+y} = \frac{xy}{x+y} - \frac{xy}{x+y} = 0$.

10. 【解】 原式 $= 2+3 \times 1-3+1=2+3-3+1=3$.

11. 【解】 $(1) 5^{-2} = \frac{1}{25}$; $(-2)^{-2} = \frac{1}{4}$.
故答案为 $\frac{1}{25}, \frac{1}{4}$.

(2) 如果 $2^p = \frac{1}{8}$, 即 $2^{-p} = \frac{1}{2^3}$, 那么 $p=3$;

如果 $a^{-2} = \frac{1}{16}$, 即 $a^{-2} = \frac{1}{(\pm 4)^2}$, 那么 $a = \pm 4$. 故答案为 $3, \pm 4$.

(3) 由于 a, p 均为整数, 所以当 $a=36$ 时, $p=1$;

当 $a=6$ 时, $p=2$; 当 $a=-6$ 时, $p=2$.

课时2 用科学记数法表示小于1的正数

刷基础

1. B 【解析】 $0.000\ 000\ 008 = 8 \times 10^{-9}$. 故选 B.

2. B 【解析】 $\because 1\text{ g} = 1\ 000\text{ mg}$, $\therefore 80\text{ mg} = 0.08\text{ g} = 8 \times 10^{-2}\text{ g}$, 故选 B.

3. A 【解析】 $\frac{1}{4}$ 纳米 $= \frac{1}{4} \times 10^{-9}$ 米 $= 0.25 \times 10^{-9}$ 米 $= 2.5 \times 10^{-10}$ 米. 故 $a=2.5, n=-10$, 故选 A.

4. D 【解析】 $\frac{1}{9\ 000} = 0.000\ 111\cdots \approx 1.11 \times 10^{-4}$.

故 a 是正数, n 是负数. 故选 D.

5. -7 【解析】 $0.000\ 000\ 23$ 用科学记数法表示为 2.3×10^{-7} , $\therefore n=-7$. 故答案为 -7.

归纳总结

对于负整数指数幂: $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0, p$ 为正整数), 应注意: ① $a \neq 0$;

② 计算负整数指数幂时, 一定要根据负整数指数幂的意义计算, 避免出现 $(-3)^{-2} = (-3) \times (-2)$ 的错误; ③ 当底数是分数时, 只要把分子、分母颠倒, 负指数就可变为正指数; ④ 在混合运算中, 始终要注意运算的顺序.

易错警示

根据 $|a| \leq 4$ 取 a 的值时, 注意前提是要使分式有意义, 故 a 不能取 2, 4.

6. B 【解析】 $\because a = 1.2 \times 10^{-2} = 0.012, b = 1.2 \times 10^{-3} = 0.001\ 2$, $\therefore 0 < b < 0.01 < a$. 故选 B.

7. 8 【解析】 $1.2 \times 10^{-9} = 0.000\ 000\ 001\ 2$, \therefore 将 1.2×10^{-9} 用小数表示时, 小数点后“0”的个数是 8. 故答案为 8.

8. C 【解析】 $9.4 \times 10^{-7} \times 10 = 9.4 \times 10^{-6}$, 故 A 选项错误, 不符合题意; $9.4 \times 10^{-7} - 1.4 \times 10^{-7} = 8 \times 10^{-7}$, 故 B 选项错误, 不符合题意; $9.4 \times 10^{-7} = 0.000\ 000\ 94$ 是 8 位小数, 故 C 选项正确, 符合题意; D 选项错误, 不符合题意. 故选 C.

9. 5×10^{-5} 【解析】 $50\ 000$ 纳米 $= (50\ 000 \div 10^9)$ 米 $= 5 \times 10^{-5}$ 米, 故答案为 5×10^{-5} .

10. 【解】 $7 \times 10^{-5} \div 70 = 0.1 \times 10^{-5} = 1 \times 10^{-6}(\text{m})$. 故这种杆菌每个大约有 $1 \times 10^{-6}\text{ m}$ 长.

重难专题3 分式的化简求值



刷难关

1. 【解】 原式 $= \left(\frac{a+2}{a+2} - \frac{4}{a+2} \right) \div \frac{(a-2)^2}{2(a-2)} = \frac{a-2}{a+2}$.

$\frac{2}{a-2} = \frac{2}{a+2}$, 当 $a = 2^{-1} + (\pi - 2\ 018)^0 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

时, 原式 $= \frac{2}{\frac{3}{2} + 2} = \frac{2}{\frac{7}{2}} = \frac{4}{7}$.

2. 【解】 原式 $= \left(\frac{a-2}{a-2} - \frac{3a-10}{a-2} \right) \div \frac{a-4}{(a-2)^2} = \frac{a-2-3a+10}{a-2} \cdot \frac{(a-2)^2}{a-4} = \frac{-2(a-4)}{a-2} \cdot \frac{(a-2)^2}{a-4} = -2(a-4)$. $\because |a| \leq 4$, 且 a 为整数, $\therefore a = \pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$. 由分式有意义的条件可知, a 不能取 2 和 4. 当 $a=0$ 时, 原式 $= 0+4=4$; 当 $a=1$ 时, 原式 $= -2+4=2$; 当 $a=-1$ 时, 原式 $= 2+4=6$; 当 $a=-2$ 时, 原式 $= 4+4=8$; 当 $a=3$ 时, 原式 $= -6+4=-2$; 当 $a=-3$ 时, 原式 $= 6+4=10$; 当 $a=-4$ 时, 原式 $= 8+4=12$.

3. C 【解析】 $\because ab=1, \therefore m = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} = \frac{1+b+1+a}{(1+a)(1+b)} = \frac{2+b+a}{1+a+b+ab} = \frac{2+b+a}{1+a+b+1} = 1$, $\therefore m^{2\ 021} = 1^{2\ 021} = 1$. 故选 C.

4. D 【解析】 原式 $= \frac{(x+y)^2 + xy}{xy(x+y)}$, 把 $x+y=5, xy=$

2 代入得原式 $= \frac{25+2}{2 \times 5} = \frac{27}{10}$. 故选 D.

5. D 【解析】 $\because y = \frac{x}{1-2x}, \therefore y-2xy = x, \therefore y-x =$

$$2xy, \therefore \frac{2x-3xy-2y}{y+xy-x} = \frac{2x-2y-3xy}{y-x+xy} = \frac{-2(y-x)-3xy}{y-x+xy} = \frac{-7xy}{3xy} = -\frac{7}{3}, \text{ 故选 D.}$$

6. -1 【解析】 \because 实数 m, n 满足 $m^2+2m-2=0$, $m-n=2, \therefore n=m-2, \therefore$ 原式 $= \frac{1}{m+1} + \frac{2}{m-2} = \frac{m-2+2m+2}{(m+1)(m-2)} = \frac{3m}{m^2-m-2} = \frac{3m}{m^2+2m-2-3m} = \frac{3m}{-3m} = -1$.

7. D 【解析】 $\because (x-y)(2x-y)=0 (xy \neq 0), \therefore x-y=0$ 或 $2x-y=0$, 解得 $x=y$ 或 $2x=y$. 原式 $= \frac{(x+y)^2-2xy}{xy} = \frac{(x+y)^2}{xy} - 2$. 当 $x=y$ 时, 原式 $= \frac{4y^2}{y^2} - 2 = 4 - 2 = 2$; 当 $2x=y$ 时, 原式 $= \frac{9x^2}{2x^2} - 2 = \frac{9}{2} - 2 = 2\frac{1}{2}, \therefore$ 原式的值是 2 或 $2\frac{1}{2}$.

8. 【解】 $\left(1 - \frac{x-y}{x+y}\right) \div \frac{2y}{x^2+2xy+y^2} = \left(\frac{x+y-x+y}{x+y}\right) \div \frac{2y}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} \cdot \frac{(x+y)^2}{2y} = x+y. \because |x-3| + (y+1)^2 = 0, \therefore x-3=0, y+1=0$, 解得 $x=3, y=-1, \therefore$ 原式 $= 3-1=2$.

9. 【解】由已知得 $x \neq 0, \therefore \frac{x^2-3x+1}{x} = x + \frac{1}{x} - 3 = -1, \therefore x + \frac{1}{x} = 2, \therefore \frac{x^4-9x^2+1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{x^2} - 9 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 11 = 2^2 - 11 = -7, \therefore \frac{x^2}{x^4-9x^2+1} = -\frac{1}{7}$.

18.5 分式方程

课时 1 分式方程及其解法

刷基础

1. A 【解析】① $x^2-x+\frac{1}{x}$ 不是分式方程; ② $\frac{1}{a}-3=a+4$ 是关于 a 的分式方程; ③ $\frac{x}{2}+5x=6$ 是一元一次方程; ④ $\frac{2x}{x-3}=1$ 是关于 x 的分式方

程. 故选 A.

2. A 【解析】原方程两边同乘 $2(1-3x)$ 得 $2(1-3x)+2=-5$, 即 $2-6x+2=-5$. 故选 A.

3. 7 【解析】根据题意, 得 $\frac{3}{x-1} = \frac{2}{x-3}$, 去分母, 得 $3x-9=2x-2$, 解得 $x=7$. 经检验, $x=7$ 是分式方程的解. 故答案为 7.

4. 【解】(1) 方程两边乘 $(x+1)(x-1)$, 得 $x^2+2x+1-4=x^2-1$, 解得 $x=1$. 经检验, 当 $x=1$ 时, $(x+1)(x-1)=0, \therefore$ 原分式方程无解.

(2) 去分母得 $x-5-10=0$, 解得 $x=15$. 经检验, $x=15$ 是原分式方程的解.

5. B 【解析】 $\frac{m}{x+5}=1$, 去分母得 $m=x+5$, 解得 $x=m-5$. 要使分式方程有解, 则 $x+5 \neq 0, \therefore m-5+5 \neq 0, \therefore m \neq 0, \therefore$ 当 $m < 5$ 且 $m \neq 0$ 时, $x=m-5 < 0$, 当 $m > 5$ 时, $x=m-5 > 0, \therefore$ 甲说法错误, 乙说法正确. 故选 B.

6. 1 (答案不唯一) 【解析】将分式方程两边都乘 $(x-4)$, 得 $2=3(x-4)-m$. 当 $x-4=0$ 时, $x=4$. 把 $x=4$ 代入 $2=3(x-4)-m$, 解得 $m=-2$, 所以若原分式方程没有增根, 则 $m \neq -2$. 故答案为 1 (答案不唯一).

刷易错

7. 【解】(1) 小丽的解答过程从第一步开始出错, 这一步应为 $2x+2-(x-3)=6x$, 这一步的依据是等式的性质. 故答案为一, $2x+2-(x-3)=6x$, 等式的性质.

(2) 小丽的解答过程缺少的步骤是检验, 故答案为检验.

(3) $1 - \frac{x-3}{2x+2} = \frac{3x}{x+1}$, 去分母得 $2x+2-(x-3)=6x$, 解得 $x=1$. 经检验, $x=1$ 是原方程的解, \therefore 原分式方程的解是 $x=1$.

刷提升

1. D 【解析】根据题意可得 $2x-1 \neq 0, x^2 \neq 0, \therefore y \neq 0. \because \frac{2x-1}{x^2} = y, \therefore \frac{x^2}{2x-1} = \frac{1}{y}, \therefore$ 分式方程 $\frac{2x-1}{x^2} + \frac{x^2}{2x-1} = 5$ 可变为 $y + \frac{1}{y} = 5$, 去分母得 $y^2 +$

刷有所得

解决增根问题的步骤: ① 确定增根; ② 化分式方程为整式方程; ③ 把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

易错警示

解分式方程去分母时, 常数项不要漏乘最简公分母, 做题时要仔细, 最后得到的解不要忘记检验.

$1=5y$, 整理得 $y^2-5y+1=0$, 故选 D.

2. C 【解析】方程两边同时乘 $(x-3)$, 得 $mx-2(x-3)=2m$, 即 $(m-2)x=2m-6$. \therefore 关于 x 的分式方程 $\frac{mx}{x-3}-2=\frac{2m}{x-3}$ 无解, $\therefore x-3=0$ 或 $m-2=0$, 即 $x=3$ 或 $m=2$, $\therefore 3(m-2)=2m-6$ 或 $m=2$, 解得 $m=0$ 或 2 . 故选 C.

3. C 【解析】A 选项, 原方程整理得 $(m-3)x=-6$, 当 $m=1$ 时, $-2x=-6$, 解得 $x=3$, 经检验, $x=3$ 是原方程的解, \therefore 原方程的解为 $x=3$, 故选项 A 正确, 不符合题意; B 选项, 当 $m=3$ 时, 方程无解, 故选项 B 正确, 不符合题意; C 选项, 当 x 为正数时, $m-3<0$, 且 $3\times\frac{-6}{m-3}-6\neq0$, $\therefore m<3$ 且 $m\neq0$, 故选项 C 错误, 符合题意; D 选项, 当 x 为负整数时, $x=\frac{-6}{m-3}$ 为负整数, 则 $x=-1$ 或 -2 或 -3 或 -6 , $\therefore m-3=6$ 或 3 或 2 或 1 , $\therefore m$ 有 4 个整数值, 故选项 D 正确, 不符合题意, 故选 C.

4. 6 或 0 【解析】 $\frac{2x}{x-1}-2=\frac{m}{(x-1)(x+2)}$ 去分母得 $2x(x+2)-2(x-1)(x+2)=m$, $2x^2+4x-2x^2-2x+4=m$, 解得 $x=\frac{1}{2}m-2$. \therefore 分式方程有增根, $\therefore x=1$ 或 $x=-2$, $\therefore \frac{1}{2}m-2=1$ 或 $\frac{1}{2}m-2=-2$, $\therefore m=6$ 或 0 .

5. 2 【解析】 $\begin{cases} \frac{3x-4}{2}\leq x-1, ① \\ 2(x+1)\geq -x+m, ② \end{cases}$ 由①得 $x\leq 2$, 由②得 $x\geq \frac{m-2}{3}$. \therefore 不等式组有解, $\therefore \frac{m-2}{3}\leq x\leq 2$. \therefore 不等式组至少有 2 个整数解, $\therefore \frac{m-2}{3}\leq 1$, 解得 $m\leq 5$. 方程 $\frac{m-1}{y-2}=2-\frac{3}{2-y}$, 去分母得 $m-1=2y-4+3$, 解得 $y=\frac{m}{2}$. \therefore 分式方程的解为非负整数, 且 $y\neq 2$, $\therefore m\geq 0$, $m\neq 4$, 且 m 为偶数. $\therefore m\leq 5$, $\therefore m=2, 0$, \therefore 符合条件的整数 m 的值之和为 $2+0=2$, 故答案为 2.

6. 【解】(1) 根据题意知方程的解是 $x_1=a, x_2=\frac{1}{a}$. 验证: 当 $x=a$ 时, 左边 $=a+\frac{1}{a}$ = 右边, 所以

易错警示

注意分式方程无解包括两种情况, 不要漏解.

思路分析

先求出不等式组的解集, 根据关于 x 的一元一次不等式组至少有 2 个整数解, 求出 m 的取值范围. 再根据分式方程的解为非负整数及分式有意义的条件进一步确定 m 的取值范围. 最后计算所有符合条件的整数 m 的和即可.

$x=a$ 是分式方程的解; 当 $x=\frac{1}{a}$ 时, 左边 $=\frac{1}{a}+$

$\frac{1}{a}=\frac{1}{a}+a$ = 右边, 所以 $x=\frac{1}{a}$ 是分式方程的解.

综上, $x_1=a, x_2=\frac{1}{a}$ 是分式方程的解.

(2) $\therefore x+\frac{1}{x-3}=b+\frac{1}{b-3}$, $\therefore x-3+\frac{1}{x-3}=b-3+\frac{1}{b-3}$, 则 $x-3=b-3$ 或 $x-3=\frac{1}{b-3}$, 解得 $x=b$ 或 $x=\frac{3b-8}{b-3}$.

刷素养

7. 【解】(1) A 与 B 互为“和整分式”. \therefore 分式 $A=\frac{x-7}{x-2}, B=\frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$, $\therefore A+B=\frac{x-7}{x-2}+\frac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}=\frac{x-7}{x-2}+\frac{(x+3)^2}{(x-2)(x+3)}=\frac{x-7}{x-2}+\frac{x+3}{x-2}=\frac{2x-4}{x-2}=2$, $\therefore A$ 与 B 互为“和整分式”, “和整值” $k=2$.

(2) ① \therefore 分式 $C=\frac{3x-4}{x-2}, D=\frac{G}{x^2-4}$, $\therefore C+D=\frac{(3x-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)}+\frac{G}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x^2+2x-8}{(x-2)(x+2)}+\frac{G}{(x-2)(x+2)}=\frac{3x^2+2x-8+G}{(x-2)(x+2)}$. $\therefore C$ 与 D 互为“和整分式”, 且“和整值” $k=3$, $\therefore \frac{3x^2+2x-8+G}{(x-2)(x+2)}=3$, $\therefore 3x^2+2x-8+G=3(x-2)(x+2)=3x^2-12$, $\therefore G=3x^2-12-3x^2-2x+8=-2x-4$.

② $\therefore D=\frac{G}{x^2-4}=\frac{-2x-4}{(x+2)(x-2)}=-\frac{2}{x-2}$, x 为正整数, 分式 D 的值为正整数, $\therefore x-2=-1$ 或 $x-2=-2$, 解得 $x=1$ 或 $x=0$ (舍去), $\therefore x=1$.

(3) $\therefore P$ 与 Q 互为“和整分式”, 且“和整值” $k=2$, $\therefore P+Q=\frac{3x-5}{x-3}+\frac{mx-3}{3-x}=2$, $\therefore \frac{3x-5-mx+3}{x-3}=2$, $\therefore (3-m)x-2=2x-6$, $\therefore (1-m)x=-4$. \therefore 当 $1-m=0$, 即 $m=1$ 时, 关于 x 的方程无解; 当 $1-m\neq 0, x=3$ 时, 原方程无解, $\therefore 3(1-m)=-4$, 解得 $m=\frac{7}{3}$. 综上所述, 实数 m 的值为 1 或 $\frac{7}{3}$.

课时2 分式方程与实际问题的综合



刷基础

1. **B** 【解析】∵ 足球的单价比排球的单价高 60%，用 500 元购买的排球数量比用 720 元购买的足球数量多 1 个， $\frac{500}{x} - \frac{720}{(1+60\%)x} = 1$ ，
∴ 方程中未知数 x 所表示的是排球的单价，
故选 B.

2. **C** 【解析】设总工作量为 1，甲单独完成任务需 x 小时，则乙单独完成任务需 $(x-5)$ 小时.
由题意得 $\frac{4}{x} = \frac{3}{x-5}$ ，解得 $x = 20$. 经检验， $x = 20$ 是所列方程的解，所以甲单独完成任务需 20 小时，乙单独完成任务需 15 小时. 因为丙的工作效率是甲的工作效率的 2 倍，所以丙单独完成任务需 10 小时. 因为一轮的工作量为 $\frac{1}{20} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{13}{60}$ ，四轮的工作量为 $\frac{13 \times 4}{60} = \frac{52}{60} = \frac{13}{15}$ ，所以四轮后剩余的工作量为 $1 - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$ ，所以剩余的工作量还需要甲、乙工作 1 小时，丙再工作 $\left(\frac{2}{15} - \frac{1}{20} - \frac{1}{15}\right) \div \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$ (时)，所以按照甲、乙、丙的轮流顺序至完成工作任务，共需 $3 \times 4 + 2 + \frac{1}{6} = 14 \frac{1}{6}$ (时). 故选 C.

3. $\frac{40}{x} = \frac{40}{x+2} + 1$ 【解析】由题意得甲的平均速度为每小时 $(x+2)$ 千米，则 $\frac{40}{x} = \frac{40}{x+2} + 1$.

4. **12.5** 【解析】设需再加入丙种糖 x 千克. 根据题意得 $\frac{15 \times 20 + 20 \times 10 + 25(20+x)}{20+10+20+x} = \frac{15 \times 20 + 20 \times 10 + 25 \times 20}{20+10+20} + 1$ ，解得 $x = 12.5$ ，经检验， $x = 12.5$ 是所列方程的解，且符合题意，
∴ 需再加入丙种糖 12.5 千克. 故答案为 12.5.

5. 【解】(答案不唯一) 提出问题：分别求出七、八年级两支志愿者队伍的人数.

思路分析

设甲单独完成任务需 x 小时，则乙单独完成任务需 $(x-5)$ 小时. 根据甲 4 小时完成的工作量与乙 3 小时完成的工作量相等列方程，求解后根据题意计算出共需要的时间即可.

关键点拨

设需再加入丙种糖 x 千克，根据要使什锦糖的单价每千克提高 1 元，可列出关于 x 的分式方程，解之经检验后，即可得出结论.

解决问题：设七年级志愿者队伍有 x 人，则八年级志愿者队伍有 $(1-20\%)x$ 人.

根据题意得 $\frac{720}{(1-20\%)x} - \frac{720}{x} = 2$ ，解得 $x = 90$.

经检验， $x = 90$ 是所列方程的解，且符合题意，
∴ $(1-20\%)x = (1-20\%) \times 90 = 72$.

答：七年级志愿者队伍有 90 人，八年级志愿者队伍有 72 人.



刷提升

1. **A** 【解析】设甲、乙、丙单独完成这项工程各需 x 天、 y 天、 z 天. 根据题意得 $x = a \cdot \frac{1}{\frac{1}{y} + \frac{1}{z}} =$

$$\frac{ayz}{y+z}, \therefore a = \frac{xy+xz}{yz}, \therefore a+1 = \frac{xy+yz+xz}{yz}, \therefore \frac{1}{a+1} =$$

$$\frac{yz}{xy+yz+xz}. \text{同理可得 } \frac{1}{b+1} = \frac{xz}{xy+yz+xz}, \frac{1}{c+1} =$$

$$\frac{xy}{xy+yz+xz}, \therefore \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} = \frac{yz}{xy+yz+xz} +$$

$$\frac{xz}{xy+yz+xz} + \frac{xy}{xy+yz+xz} = \frac{xy+yz+xz}{xy+yz+xz} = 1, \text{故选 A.}$$

2. 【解】(1) 由购进甲种商品数量 = 购进乙种商品数量，可得方程 $\frac{2\,000}{x} = \frac{1\,200}{x-20}$ 中的 x 表示甲种商品每件的进价. 由甲种商品每件的进价 - 乙种商品每件的进价 = 20，可得方程 $\frac{2\,000}{x} - \frac{1\,200}{x-20} = 20$ 中的 x 表示购进甲种 (或乙种) 商品的数量. 故答案为 A, C.

- (2) $\frac{2\,000}{x} = \frac{1\,200}{x-20}$ ，去分母得 $2\,000(x-20) = 1\,200x$ ，整理得 $5x-100=3x$ ，解得 $x=50$. 经检验， $x=50$ 是原方程的解，且符合题意，
∴ $x-20=50-20=30$. 故答案为 50, 30.

- (3) 设购进甲种商品 a 件，则购进乙种商品 $(40-a)$ 件. ∵ 商店计划用不超过 1 440 元的资金购进甲、乙两种商品，
∴ $50a + 30(40-a) \leq 1\,440$ ，
∴ $a \leq 12$.

答：至多购进甲种商品 12 件.

刷素养

3. 【解】(1) 选①(答案不唯一). 设购买一个 B 商品需要 x 元, 则购买 1 个 A 商品需要 $(x+10)$ 元. 根据题意, 得 $\frac{300}{x+10} = \frac{100}{x}$, 解得 $x=5$.

经检验, $x=5$ 是所列分式方程的解, 且符合题意, $\therefore x+10=15$.

答: 购买一个 A 商品需要 15 元, 购买一个 B 商品需要 5 元.

- (2) 设购买 B 商品 m 个, 则购买 A 商品 $(80-m)$ 个. 根据题意, 得 $\begin{cases} 80-m \geq 4m, \\ 15(80-m)+5m \geq 1\,000, \\ 15(80-m)+5m \leq 1\,050, \end{cases}$ 解得 $15 \leq m \leq 16$. $\therefore m$ 为整数, $\therefore m=15$ 或 16 , \therefore 商店有两种购买方案. 方案①: 购买 A 商品 65 个, B 商品 15 个; 方案②: 购买 A 商品 64 个, 购买 B 商品 16 个.

重难专题 4 分式方程的含参问题

刷难关

1. C 【解析】 $\frac{6}{(x+1)(x-1)} - \frac{m}{x-1} = 1$, 方程两边都乘 $(x+1)(x-1)$, 得 $6-m(x+1) = (x+1)(x-1)$. 由最简公分母 $(x+1)(x-1) \neq 0$, 可得 $x=1$ 或 -1 , 当 $x=1$ 时, $6-2m=0$, 所以 $m=3$; 当 $x=-1$ 时, $6-m(x+1) = (x+1)(x-1)$ 不成立, 所以增根是 $x=1$. 故选 C.

2. -1 【解析】 $\frac{1}{x-2} = \frac{k+1}{x^2-4}$, 去分母得 $x+2=k+1$, 解得 $x=k-1$. \therefore 关于 x 的分式方程 $\frac{1}{x-2} = \frac{k+1}{x^2-4}$ 有增根 $x=-2$, $\therefore k-1=-2$, $\therefore k=-1$, 故答案为 -1.

3. D 【解析】方程两边同时乘 $(x-a)(2x-1)$, 得 $6x-3=2x-2a$, 解得 $x=\frac{3-2a}{4}$. \therefore 方程 $\frac{3}{x-a} = \frac{2}{2x-1}$ 有解, \therefore 当 $x=\frac{3-2a}{4}$ 时, $(x-a)(2x-1) \neq 0$, 即 $\frac{3-2a}{4}-a \neq 0, 2 \times \frac{3-2a}{4}-1 \neq 0$, 解得 $a \neq \frac{1}{2}$, 故选 D.

4. -4 或 10 或 3 【解析】 $\frac{2}{x-2} + \frac{mx}{x^2-4} = \frac{5}{x+2}$, 去分

思路分析

(1) 设购买一个 B 商品需要 x 元, 则购买 1 个 A 商品需要 $(x+10)$ 元, 根据题意列出分式方程, 解方程, 检验后即可求出答案.

(2) 设购买 B 商品 m 个, 则购买 A 商品 $(80-m)$ 个, 根据题意得出一元一次不等式组, 求出 m 的取值范围, 根据 m 为整数, 即可求出购买方案.

方法总结

由分式方程有增根求参数的步骤: (1) 化分式方程为整式方程; (2) 把增根代入整式方程, 即可求得参数的值.

母, 得 $2(x+2)+mx=5(x-2)$, $2x+4+mx=5x-10$, $(m-3)x=-14$. 当 $x=2$ 或 $x=-2$ 时, $2(m-3)=-14$ 或 $-2(m-3)=-14$, 解得 $m=-4$ 或 $m=10$, \therefore 当 $m=-4$ 或 $m=10$ 时, 分式方程无解; 当 $m-3=0$, 即 $m=3$ 时, 整式方程无解, 则分式方程无解. 综上可知, m 的值为 -4 或 10 或 3. 故答案为 -4 或 10 或 3.

方法总结 | 分式方程无解的两种情况

(1) 分式方程转化为整式方程后, 整式方程的解是分式方程的增根, 则分式方程无解;

(2) 分式方程转化为整式方程后, 整式方程无解, 则分式方程无解.

注意: 分式方程无解 \neq 最简公分母的值为 0.

5. A 【解析】方程 $\frac{x}{x-3} - 4 = \frac{k}{3-x}$, 两边同时乘 $(x-3)$, 得 $x-4(x-3) = -k$, $\therefore x-4x+12 = -k$, $\therefore -3x = -k-12$, $\therefore x = \frac{k}{3} + 4$. \therefore 方程的解为非正数, 且 $x \neq 3$, $\therefore \frac{k}{3} + 4 \leq 0$, 且 $\frac{k}{3} + 4 \neq 3$, $\therefore k \leq -12$. 故选 A.

6. 【解】 $\frac{x+1}{x-3} - \frac{x}{x+2} = \frac{2m-x}{x^2-x-6}$, 方程两边同时乘 $(x-3)(x+2)$, 得 $(x+1)(x+2) - x(x-3) = 2m-x$, $6x+2=2m-x, 7x=2m-2, x=\frac{2m-2}{7}$. \therefore 分式方程的解为正数, $\therefore \frac{2m-2}{7} > 0$, 解得 $m > 1$. \therefore 分式方程有解, $\therefore (x-3)(x+2) \neq 0$, $\therefore \frac{2m-2}{7} - 3 \neq 0, \frac{2m-2}{7} + 2 \neq 0$, $\therefore m \neq \frac{23}{2}, m \neq -6$, $\therefore m$ 的取值范围为 $m > 1$ 且 $m \neq \frac{23}{2}$.

7. D 【解析】原方程去分母, 得 $x-4=mx$. \therefore 分式方程有正整数解, m 为整数, $\therefore x = \frac{4}{1-m}$ 且 $x \neq 1$, $\therefore 1-m=1$ 或 $1-m=2$, 解得 $m=0$ 或 $m=-1$, 故选 D.

8. 【解】 $\frac{3}{x-2} = \frac{m}{x}$, 去分母, 得 $3x=m(x-2)$. \therefore 分式方程有解, $\therefore x = \frac{2m}{m-3} (m \neq 3)$ 且 $x \neq 0, x \neq 2$.

$\therefore x = \frac{2m}{m-3} = \frac{2(m-3)+6}{m-3} = \frac{2(m-3)}{m-3} + \frac{6}{m-3} = 2 + \frac{6}{m-3}$, 分式方程有整数解, m 为整数, $\therefore m-3 = \pm 6, \pm 3, \pm 2, \pm 1$, 则 m 的值为 $-3, 9, 0, 6, 5, 1, 4, 2$. $\therefore m=0$ 时, $x=0$, 分式方程无解, \therefore 整数 m 的值是 $-3, 9, 6, 5, 1, 4, 2$.

方法总结

如果分式的值是整数, 那么分母必为分子的因数.

(1) 当分子为常数时, 找出分子的因数即可求出未知数.

例: 若 $\frac{4}{a}$ 为整数, 则 $a = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.

(2) 当分子含有未知数时, 需用分离常数法将分子化为常数.

例: 若 $\frac{3x}{x-1}$ 为整数, 则 $\frac{3x}{x-1} = \frac{3(x-1)+3}{x-1} = 3 + \frac{3}{x-1}$, 所以 $x-1 = \pm 1, \pm 3$, 则 $x = 2, 0, 4, -2$.

数学活动

刷活动

1. **A** 【解析】 $\because \frac{a}{b} = \frac{4}{3}, \therefore \frac{a}{b} - 1 = \frac{4}{3} - 1, \therefore \frac{a-b}{b} = \frac{4-3}{3}, \therefore \frac{a-b}{b} = \frac{1}{3}$. 故选 A.

2. **C** 【解析】A 选项, 因为 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 所以 $3a = 2b$, 故 A 不符合题意; B 选项, $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 但 $\frac{a+1}{b+1} \neq \frac{3}{4}$, 故 B 不符合题意; C 选项, 因为 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{a+b}{b} = \frac{5}{3}$, 故 C 符合题意; D 选项, 因为 $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{a-b}{b} = -\frac{1}{3}$, 故 D 不符合题意. 故选 C.

3. $\frac{1}{3}$ 【解析】 $\because \frac{x+y}{y} = \frac{4}{3}, \therefore \frac{x+y-y}{y} = \frac{4-3}{3}$, 即 $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$.

4. (1) 【解】当 $a=2, b=5, c=4, d=10$ 时, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 成立. 故答案为 $2, 5, 4, 10$ (a, b, c, d 的值均不唯一).

(2) 【解】当 $a=2, b=5, c=4, d=10$ 时, $\frac{a+b}{a-b} =$

$-\frac{7}{3}, \frac{c+d}{c-d} = -\frac{7}{3}$. 故答案为 $-\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}$ (答案不唯一, 与 (1) 对应即可).

(3) 【解】猜想: 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ ($a \neq b, c \neq d$).

(4) 【证明】 $\because \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \therefore ad = bc. \because a \neq b, c \neq d,$
 $\therefore \frac{a+b}{a-b} - \frac{c+d}{c-d} = \frac{(a+b)(c-d)}{(a-b)(c-d)} - \frac{(a-b)(c+d)}{(a-b)(c-d)} =$
 $\frac{ac+bc-ad-bd-ac+bc-ad+bd}{(a-b)(c-d)} = \frac{2bc-2ad}{(a-b)(c-d)} =$
 $0, \therefore \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$

5. 3 或 -3 或 $\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$ 【解析】根据 $x^2 = 9$, 得 $x =$

3 或 -3 , 代入 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 \frac{1}{9}$, 等式成立; 同理根

据 $x^2 = \frac{1}{9}$, 得 $x = \frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$, 代入 $x^2 + \frac{1}{x^2} = 9 \frac{1}{9}$,

等式成立. 故答案为 3 或 -3 或 $\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{3}$.

关键点拨

构造完全平方式, 利用其非负性求解是解题的关键.

6. 【解】(1) 填表如下:

x	\cdots	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	\cdots
$x^2 + \frac{1}{x^2}$	\cdots	$\frac{82}{9}$	$\frac{17}{4}$	2	$\frac{17}{4}$	$\frac{82}{9}$	\cdots

(2) 根据 (1) 猜想: 当 $x=1$ 时, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ 有最小值, 是 2 . 故答案为 1 , 小, 2 .

(3) $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2$.

$\therefore \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \geq 0, \therefore$ 当 $x=1$ 时, $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ($x>0$) 有最小值, 是 2 .

(4) $\because x^2 - 6x + \frac{1}{(x-3)^2} + 10 = x^2 - 6x + 9 + \frac{1}{(x-3)^2} +$

$1 = (x-3)^2 + \frac{1}{(x-3)^2} + 1 = (x-3)^2 - 2 + \frac{1}{(x-3)^2} +$

$1 + 2 = \left[(x-3) - \frac{1}{x-3}\right]^2 + 3. \therefore \left[(x-3) - \frac{1}{x-3}\right]^2 \geq 0, \therefore \left[(x-3) - \frac{1}{x-3}\right]^2 + 3$ ($x>3$) 有最

小值, 是 3 , 此时 $x-3=1$, 即 $x=4. \therefore x^2 - 6x +$

$\frac{1}{(x-3)^2} + 10$ ($x>3$) 有最小值, 是 3 , 此时 $x=4$.

关键点拨
利用比例的性质求解即可.

全章综合训练



1. x ≠ 19 【解析】由题可知,当 $x-19 \neq 0$ 时,分式有意义,解得 $x \neq 19$. 故答案为 $x \neq 19$.

2. A 【解析】原式 $= \frac{3x-3}{x-1} = \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$. 故选 A.

3. A 【解析】 \therefore 计算 $\frac{A}{xy+y^2} - \frac{y}{x^2+xy}$ 的结果为 $\frac{x-y}{xy}$,
 $\therefore \frac{y}{x^2+xy} + \frac{x-y}{xy} = \frac{A}{xy+y^2}$, $\therefore \frac{y^2}{xy(x+y)} + \frac{(x-y)(x+y)}{xy(x+y)} = \frac{x^2}{xy(x+y)} = \frac{x}{xy+y^2} = \frac{A}{xy+y^2}$, $\therefore A = x$. 故选 A.

4. 1 【解析】 $\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} = \frac{b^2+1+a^2+1}{(a^2+1)(b^2+1)} = \frac{a^2+b^2+2}{a^2b^2+a^2+b^2+1} = \frac{a^2+b^2+2}{(ab)^2+a^2+b^2+1}$. $\therefore ab = 1$,
 \therefore 原式 $= \frac{a^2+b^2+2}{1^2+a^2+b^2+1} = \frac{a^2+b^2+2}{a^2+b^2+2} = 1$. 故答案为 1.

5. 【解】原式 $= \frac{3a-6b+3b}{(a-b)^2} = \frac{3(a-b)}{(a-b)^2} = \frac{3}{a-b}$.
 $\therefore a-b-1=0, \therefore a-b=1, \therefore$ 原式 $= \frac{3}{1} = 3$.

6. C 【解析】数字 0.000 001 56 用科学记数法表示为 1.56×10^{-6} , 故选 C.

7. 3 【解析】原式 $= 1+2=3$, 故答案为 3.

8. 【解】原式 $= 1 \times \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{3} = 2$.

9. B 【解析】去分母得 $2 = x-1-m$, 解得 $x = m+3$, 由方程的解为正数, 得到 $m+3 > 0$, 且 $m+3 \neq 1$, 则 m 的取值范围为 $m > -3$ 且 $m \neq -2$. 故选 B.

10. A 【解析】 $\frac{kx}{x-3} - 2 = \frac{3}{3-x}$ 去分母并整理得 $(k-2)x = -9$. ①当 $k-2=0$ 时, 整式方程无解, 即原分式方程无解, 此时 $k=2$; ②当 $k-2 \neq 0$ 时, 解得 $x = \frac{-9}{k-2}$. \therefore 关于 x 的分式方程 $\frac{kx}{x-3} - 2 = \frac{3}{3-x}$ 无解, $\therefore x-3=0$, 解得 $x=3$, 则 $\frac{-9}{k-2} = 3$, 解得 $k=-1$, 经检验, $k=-1$ 是方程 $\frac{-9}{k-2} = 3$ 的

思路分析
分式有意义, 则分母不为 0.

关键点拨
将分式方程化成整式方程, 然后分 $k-2=0$ 和 $k-2 \neq 0$ 两种情况进行讨论即可求解.

解. 综上, $k=-1$ 或 $k=2$. 故选 A.

11. 【解】去分母得 $2+x(x+1) = x^2-1$, 去括号得 $2+x^2+x = x^2-1$, 移项、合并同类项得 $x = -3$.

检验: 把 $x = -3$ 代入 $(x+1)(x-1)$ 得 $(-3+1)(-3-1) = 8 \neq 0$, $\therefore x = -3$ 是原方程的解.

12. 【解】设 D 型车的平均速度是 x 千米/时, 则 C 型车的平均速度是 $3x$ 千米/时.

根据题意得 $\frac{300}{x} - \frac{300}{3x} = 2$, 解得 $x = 100$. 经检验, $x = 100$ 是所列方程的解, 且符合题意.

答: D 型车的平均速度是 100 千米/时.



1. B 【解析】将分式 $\frac{m+n}{m^2+n^2}$ 中 m 与 n 的值同时

扩大 2 倍可得 $\frac{2m+2n}{(2m)^2+(2n)^2} = \frac{2(m+n)}{4(m^2+n^2)} =$

$\frac{m+n}{2(m^2+n^2)}$, 即分式的值缩小为原来的 $\frac{1}{2}$. 故选 B.

2. B 【解析】百万分之一 $= \frac{1}{1\ 000\ 000} = 0.000\ 001 = 1 \times 10^{-6}$. 故选 B.

3. B 【解析】① $\because a^2 \geq 0, \therefore a^2+1 \geq 1 \neq 0, \therefore$ 无论 a 为何值, $\frac{a}{a^2+1}$ 都有意义, 故①正确; ② \because 当 $a = -1$ 时, $a^2-1 = 1-1 = 0, \therefore$ 此时分式无意义, 故②错误; ③ $\because \frac{x^2+1}{x-1}$ 的值为负数, 且 $x^2+1 > 0, \therefore x-1 < 0, \therefore x < 1$, 故③正确; ④ $\because \frac{x+1}{x+2} \div \frac{x+1}{x}$ 有

意义, $\therefore \begin{cases} x+2 \neq 0, \\ x \neq 0, \\ x+1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $x \neq -2$ 且 $x \neq 0$ 且 $x \neq -1$, 故④错误. 综上所述, 其中正确的个数是 2. 故选 B.

4. C 【解析】 $\because m^2-1 \neq 0, \therefore m \neq \pm 1, \therefore M = 1 - \frac{2}{m+1} \neq 0$, 故结论 I 错误. 由题意可知, 若使 M 的值为整数, 则 $m+1 = 1, 2, -1, -2, \therefore m = 0, 1, -2, -3$. 又 $\because m \neq \pm 1, \therefore m = 0, -2, -3$, 共 3 个, 故结论 II 正确. 故选 C.

5. C 【解析】当 $x > 0$ 时, $\max\left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} =$

$\frac{2}{3-x}$, $\therefore \frac{1}{x} = \frac{2}{3-x}$, 去分母得 $3-x=2x$, 解得 $x=1$, 经检验, $x=1$ 是分式方程的解, 且满足题意; 当 $x<0$ 时, $\max\left(-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} = \frac{2}{3-x}$, $\therefore -\frac{1}{x} = \frac{2}{3-x}$, 去分母得 $-(3-x)=2x$, 解得 $x=-3$, 经检验, $x=-3$ 是分式方程的解, 且满足题意, $\therefore x=-3$ 或 $x=1$. 故选 C.

6. B 【解析】 $\frac{x^2+3x}{x^3-x} \cdot \frac{x-1}{3+x} - (x^{-1}-1) \div (x^{-1}+1) = \frac{x^2+3x}{x^3-x} \cdot \frac{x-1}{3+x} - \frac{1-x}{x} \div \frac{1+x}{x} = \frac{x(x+3)}{x(x-1)(x+1)} \cdot \frac{x-1}{3+x} - \frac{1-x}{x} \cdot \frac{x}{1+x} = \frac{1}{x+1} - \frac{1-x}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. $\therefore x$ 为正整数, $\therefore 1 \leq x < x+1$, $\therefore \frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} < 1$, \therefore 表示 $\frac{x^2+3x}{x^3-x} \cdot \frac{x-1}{3+x} - (x^{-1}-1) \div (x^{-1}+1)$ 的值的点落在段②. 故选 B.

7. C 【解析】 $\therefore n$ 为正整数且 $\frac{n}{20-n}$ 是一个整数, $\therefore \begin{cases} n>0, \\ n \geq 20-n, \therefore 10 \leq n < 20, 0 < 20-n \leq 20-n>0, \end{cases}$ $10 \leq \frac{n}{20-n} < 16$, $\therefore \frac{n}{20-n} = 1^2$ 或 2^2 或 3^2 , $\therefore n=10$ 或 16 或 18 . 故选 C.

8. A 【解析】 $\therefore a_1=2, \therefore a_2=\frac{1+a_1}{1-a_1}=\frac{1+2}{1-2}=-3$, $a_3=\frac{1+a_2}{1-a_2}=\frac{1+(-3)}{1-(-3)}=-\frac{1}{2}, a_4=\frac{1+a_3}{1-a_3}=\frac{1+(-\frac{1}{2})}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{3}, a_5=\frac{1+a_4}{1-a_4}=\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2, \dots, \therefore$ 这列数按照 $2, -3, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ 的循环规律出现. $\therefore 2\ 023 \div 4 = 505 \dots 3, \therefore a_{2\ 023}$ 的值是 $-\frac{1}{2}$, 故选 A.

9. A 【解析】 $\therefore M = \frac{a+mb}{1+m} = \frac{1}{1+m}a + \frac{m}{1+m}b, N = \frac{a+nb}{1+n} = \frac{1}{1+n}a + \frac{n}{1+n}b, \therefore M-N = \left(\frac{1}{1+m} - \frac{1}{1+n}\right)a +$

思路分析

先根据条件确定分子 n 以及分母 $20-n$ 的范围, 再确定分式 $\frac{n}{20-n}$ 的大致范围, 从中找出符合题意的 n 的正整数值.

关键点拨

通过计算 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的值归纳出规律是解题关键.

$\left(\frac{m}{1+m} - \frac{n}{1+n}\right)b = \frac{n-m}{(1+m)(1+n)}a + \frac{m-n}{(1+m)(1+n)}b = \frac{(m-n)(b-a)}{(1+m)(1+n)}$. $\therefore a < b, -1 < n < m, \therefore m-n > 0, 1+m > 0, 1+n > 0, b-a > 0$, $\therefore \frac{(m-n)(b-a)}{(1+m)(1+n)} > 0, \therefore M-N > 0, \therefore M > N$. 故选 A.

10. $\frac{3\ 000}{x} - \frac{3\ 000}{(1+25\%)x} = 3$ 【解析】依题意有 $\frac{3\ 000}{x} - \frac{3\ 000}{(1+25\%)x} = 3$. 故答案为 $\frac{3\ 000}{x} - \frac{3\ 000}{(1+25\%)x} = 3$.

11. (1) -4 或 6 (2) 1 【解析】(1) 去分母, 得 $2(x+2)+mx=3(x-2), (m-1)x=-10$. \therefore 分式方程有增根, $\therefore x=\pm 2, m \neq 1$. 当 $x=2$ 时, 代入 $(m-1)x=-10$, 得 $2(m-1)=-10$, 解得 $m=-4$; 当 $x=-2$ 时, 代入 $(m-1)x=-10$, 得 $-2(m-1)=-10$, 解得 $m=6$, \therefore 当 $m=-4$ 或 6 时, 关于 x 的方程 $\frac{2}{x-2} + \frac{mx}{x^2-4} = \frac{3}{x+2}$ 有增根. 故答案为 -4 或 6.

(2) $\therefore \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x+1)}{(x+1)(x-5)} = \frac{(A+B)x-5A+B}{(x+1)(x-5)}, \frac{5x-7}{x^2-4x-5} = \frac{5x-7}{(x+1)(x-5)}, \therefore 5x-7 = (A+B)x-5A+B, \therefore A+B=5, -5A+B=-7$, 解得 $A=2, B=3, \therefore 2A-B=4-3=1$, $\therefore 2A-B$ 的立方根为 1. 故答案为 1.

12. -4 【解析】 $\therefore \frac{ab}{a+b} = -2, \frac{bc}{b+c} = \frac{5}{3}, \frac{ac}{a+c} = -\frac{5}{3}, \therefore \frac{a+b}{ab} = -\frac{1}{2}, \textcircled{1} \frac{b+c}{bc} = \frac{3}{5}, \textcircled{2} \frac{a+c}{ac} = -\frac{3}{5}, \textcircled{3}$ 由 $\textcircled{1}+\textcircled{2}+\textcircled{3}$ 可得 $\frac{a+b}{ab} + \frac{b+c}{bc} + \frac{a+c}{ac} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{2}, \therefore \frac{2(ab+bc+ac)}{abc} = -\frac{1}{2}, \therefore \frac{ab+bc+ac}{abc} = -\frac{1}{4}, \therefore \frac{abc}{ab+bc+ac} = -4$. 故答案为 -4.

13. 【解】(1) 原式 $= 1 \times (-1) - 9 = -1 - 9 = -10$. (2) 去分母得 $2x-1-6=1$, 解得 $x=4$. 经检验, $x=4$ 是原分式方程的解.

14. 【解】(1) $\because \frac{a}{b} = 3, \therefore a = 3b, \therefore \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(3b)^2+b^2}{3b \cdot b} = \frac{9b^2+b^2}{3b^2} = \frac{10b^2}{3b^2} = \frac{10}{3}.$
- (2) $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \div \frac{x^2-1}{x} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}.$
- \therefore 当 $x=0, \pm 1$ 时, 原分式无意义, $\therefore x=2$. 当 $x=2$ 时, 原式 $= \frac{1}{2-1} = 1.$

15. 【解】去分母得 $3(x-1)+6(x+1)=mx$, 去括号, 得 $3x-3+6x+6=mx$, 移项、合并同类项, 得 $(m-9)x=3.$
- (1) 若分式方程有增根, 则 $x=\pm 1$ 且 $m \neq 9.$
- 当 $x=-1$ 时, 代入 $(m-9)x=3$, 得 $9-m=3$, 解得 $m=6$; 当 $x=1$ 时, 代入 $(m-9)x=3$, 得 $m-9=3$, 解得 $m=12. \therefore m$ 的值为 6 或 12.
- (2) $\because (m-9)x=3, \therefore$ 当 $m-9=0$ 时, 原分式方程无解, 此时 $m=9$; 由 (1) 知当 $m=6$ 或 12 时, 原分式方程有增根, 则原分式方程无解. $\therefore m$ 的值为 6 或 9 或 12.
- (3) $\because (m-9)x=3$, 且分式方程有解, $\therefore x = \frac{3}{m-9}$, 且

$x \neq \pm 1, \therefore m-9 \neq \pm 3.$ 又 \because 方程的解为整数, m 为整数, $\therefore m-9 = \pm 1.$ 当 $m-9=1$ 时, $m=10$; 当 $m-9=-1$ 时, $m=8, \therefore m=8$ 或 10.

16. 【解】(1) 设出发后 1 h 内行驶的速度为 x km/h, 则 1 h 后行驶的速度为 $1.5x$ km/h. 根据题意得 $\frac{180-x}{x} - \frac{180-x}{1.5x} = \frac{40}{60}$, 解得 $x=60$, 经检验, $x=60$ 是所列方程的解, 且符合题意, $\therefore \frac{180}{x} - \frac{40}{60} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}.$

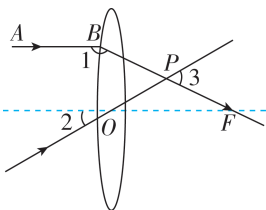
答: 汽车实际走完全程所花的时间为 $\frac{7}{3}$ h.

- (2) $l_1 > l_2.$ 理由如下: 由题意得, $l_1 = \frac{90}{a} + \frac{90}{b} = \frac{90(a+b)}{ab}, l_2 = 2 \times \frac{180}{a+b} = \frac{360}{a+b},$ 则 $l_1 - l_2 = \frac{90(a+b)}{ab} - \frac{360}{a+b} = \frac{90(a+b)^2 - 360ab}{ab(a+b)} = \frac{90(a-b)^2}{ab(a+b)}.$ $\because a, b$ 均为正数, 且 $a \neq b, \therefore (a-b)^2 > 0, ab(a+b) > 0, \therefore \frac{90(a-b)^2}{ab(a+b)} > 0,$ 即 $\frac{90(a+b)}{ab} - \frac{360}{a+b} > 0, \therefore l_1 > l_2.$

中考新考向备训

刷考向

1. C 【解析】根据题图可知, 图形的对称轴是 y 轴, \therefore 点 $A(-4, 2)$ 关于 y 轴对称的点的坐标为 $(4, 2)$, 故选 C.
2. C 【解析】 \because 6 210 文购买椽的数量为 x 株, \therefore 一株椽的价钱为 $\frac{6\ 210}{x}$ 文. 由题意得 $3(x-1) = \frac{6\ 210}{x}$, 故选 C.
3. A(或 C) 【解析】白方如果落子于点 A 或 C 的位置, 则所得的对弈图是轴对称图形. 故答案为 A (或 C).
4. C 【解析】观察各选项的图形可知, 只有 C 选项的图形是轴对称图形, 故选 C.
5. C 【解析】如图, $\because AB \parallel OF, \therefore \angle 1 + \angle BFO = 180^\circ.$
- $\because \angle 1 = 155^\circ, \therefore \angle BFO = 180^\circ - 155^\circ = 25^\circ. \therefore \angle 2 = 30^\circ, \therefore \angle POF = \angle 2 = 30^\circ,$
- $\therefore \angle 3 = \angle POF + \angle BFO = 30^\circ + 25^\circ = 55^\circ,$ 故选 C.



6. 0(答案不唯一) 【解析】 $\because \frac{1}{x+1}$ 的值为正数, $1 > 0,$
- $\therefore x+1 > 0, \therefore x > -1,$ 则满足条件的 x 的值可以为 0.
- 故答案为 0(答案不唯一).

7. 【解】选择①, 理由:
- $\because AE \parallel BF, CE \parallel DF, \therefore \angle A = \angle FBD, \angle D = \angle ECA.$
- $\because AE = BF, \therefore \triangle AEC \cong \triangle BFD(AAS),$
- $\therefore AC = BD, \therefore AC - BC = BD - BC,$ 即 $AB = CD.$
- (答案不唯一, 选择①或③均可使结论成立)

【一题多解】

选择③, 理由:

- $\because AE \parallel BF, \therefore \angle A = \angle FBD.$
- $\because AE = BF, \angle E = \angle F, \therefore \triangle AEC \cong \triangle BFD(ASA),$
- $\therefore AC = BD, \therefore AC - BC = BD - BC,$ 即 $AB = CD.$

8. 【解】根据题意补全图形并连接 AC, AD , 如图所示.
- 方法一: 依次填入 ②③① (或③②①).

