



## 第10章 圆锥曲线

## 第1节 椭圆

刷

基础

1. ABD 考查点 ▶ 椭圆的定义、椭圆的标准方程

【解析】由题意可知,  $\begin{cases} 2a=6, \\ \frac{c}{a}=\frac{2}{3}, \end{cases}$  解得

$\begin{cases} a=3, \\ c=2, \end{cases} \therefore |PF| + |PF'| = 2a = 6$ , 故 A

正确;

$b^2 = a^2 - c^2 = 5$ ,  $\therefore$  椭圆  $E: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ , 故 B

正确;  $\because F'(2, 0)$ ,  $\therefore |AF'| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ,

故 C 错误;  $|PA| + |PF| = |PA| + 2a -$

$|PF'| \leq 2a + |AF'| = 6 + \sqrt{2}$  (关键: 利用椭圆

的定义转化为求  $|PA| - |PF'|$  的最大

值), 当且仅当  $F', A, P$  三点共线且  $F'$  在

$A, P$  之间时等号成立, 故 D 正确. 故

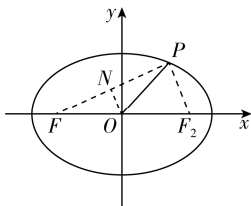
选 ABD.

2. B 考查点 ▶ 椭圆的定义

【解析】设椭圆右焦点为  $F_2$ , 连接  $PF$ ,

$PF_2$ , 取  $PF$  的中点为  $N$ , 连接  $ON$ , 如图所

示.



由椭圆定义可知  $|PF| + |PF_2| = 12$ , 由

$|PF| = 8$ , 可得  $|PF_2| = 4$ . 易知  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} +$

$\overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{ON}$ , 所以  $|\overrightarrow{OM}| = 2|\overrightarrow{ON}|$ , 又因为  $O$

为  $FF_2$  的中点, 所以  $ON \parallel PF_2$ , 且  $|ON| =$

$\frac{1}{2}|PF_2| = 2$ , 可得  $|\overrightarrow{OM}| = 4$ . 故选 B.

3.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$  考查点 ▶ 椭圆的定义、求椭圆

圆的标准方程

【解析】设椭圆  $C$  的焦距为  $2c$ ,  $O$  为坐标

原点, 连接  $BF_1, BF_2, PF_2, QF_2$ , 因为  $\frac{c}{a} =$

$\frac{1}{2}$ , 所以  $a = 2c$ ,  $b = \sqrt{3}c$ , 所以在  $\triangle BF_2O$

中,  $|OF_2| = c$ ,  $|BF_2| = a = 2c$ ,  $|OB| = b =$

$\sqrt{3}c$ , 所以  $\angle BF_2O = \frac{\pi}{3}$ , 所以  $\triangle BF_1F_2$  为

等边三角形, 因为  $M$  为线段  $BF_2$  的中

点, 所以  $PQ$  是线段  $BF_2$  的垂直平分线, 可

得

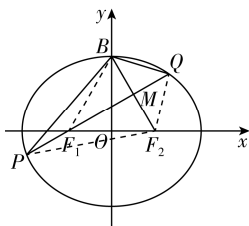
$|BP| + |BQ| + |PQ| = |PF_2| + |QF_2| +$

$|PF_1| + |QF_1| = 2a + 2a = 4a$ , 由  $\triangle BPQ$  的

周长为 16, 得  $4a = 16$ , 可得  $a = 4$ ,  $b =$

$2\sqrt{3}$ ,  $c = 2$ , 所以椭圆  $C$  的标准方程为

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ .

**一题多解**

设椭圆  $C$  的焦距为  $2c$ , 因

为  $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ , 所以  $a = 2c, b = \sqrt{3}c$ , 所以  $B(0,$

$\sqrt{3}c), F_2(c, 0), F_1(-c, 0), M\left(\frac{c}{2}, \frac{\sqrt{3}c}{2}\right),$

因为  $k_{BF_2} = \frac{\sqrt{3}c}{-c} = -\sqrt{3}, k_{PQ} = k_{MF_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}c}{2}}{\frac{3c}{2}} =$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 所以  $PQ$  是线段  $BF_2$  的垂直平分线, 以下同上.

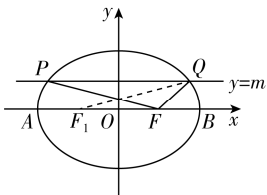
**4. B 考查点** ▶ 求椭圆的焦距

**【解析】** 设椭圆长轴长为  $2a$ , 焦距为  $2c$ , 易知  $a - c \approx 1.47 \times 10^8, a + c \approx 1.52 \times 10^8$ , 解得  $2c \approx 5.00 \times 10^6$ , 所以椭圆的焦距约为  $5.00 \times 10^6$  km. 故选 B.

**5. ABD 考查点** ▶ 椭圆的对称性、椭圆中四边形的面积、椭圆中的定值问题

**【解析】** 由  $a = 2, b = \sqrt{3}$ , 可得椭圆  $C$  的短轴长为  $2\sqrt{3}$ , 故 A 正确;

如图, 设椭圆  $C$  的左焦点为  $F_1$ , 连接  $QF_1$ , 由椭圆的对称性有  $|PF| + |QF| = |QF_1| + |QF| = 4$ , 故 B 正确;



由题意得  $|BF| = 1$ , 且  $PQ \parallel BF$ , 连接  $BQ$  (图略), 又因为四边形  $PQBF$  为平行四边形, 所以  $|PQ| = |BF| = 1$ , 可得点  $P$  的

坐标为  $\left(\pm \frac{1}{2}, y\right)$ , 把点  $P$  的坐标代入椭

圆方程中, 得到  $\frac{1}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 解得  $y = \frac{3\sqrt{5}}{4}$ ,

即点  $P$  的坐标为  $\left(\pm \frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{5}}{4}\right)$ , 则平行四

边形  $PQBF$  的面积为  $1 \times \frac{3\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$ , 故 C 错误;

$A(-2, 0)$ , 设点  $P, Q$  的坐标分别为  $(x_0, m), (-x_0, m)$ , 把点  $P, Q$  的坐标代

入椭圆方程中有  $\frac{x_0^2}{4} + \frac{m^2}{3} = 1$ , 则  $k_{AP} \cdot k_{AQ} =$

$\frac{m}{x_0 + 2} \times \frac{m}{-x_0 + 2} = \frac{m^2}{4 - x_0^2} = \frac{3\left(1 - \frac{1}{4}x_0^2\right)}{4 - x_0^2} = \frac{3}{4},$



故 D 正确. 故选 ABD.

**6. B** **考查点** ▶ 求椭圆的离心率的取值范围

【解析】由对称性可知,  $\angle APB = 2\angle APO$ ,

$O$  为坐标原点, 因为  $\sin \angle APO = \frac{|OA|}{|OP|} =$

$\frac{b}{|OP|} \geq \frac{b}{a}$ ,  $\angle APO \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以当点  $P$  位于长轴端点时,  $\angle APO$  最小.

由题可知, 在椭圆  $C_2$  上存在一点  $P$ , 使得

$\angle APB = \frac{\pi}{2}$ , 只需当点  $P$  位于长轴端

点时,  $\angle APO \leq \frac{\pi}{4}$ , 即  $\frac{b}{a} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 故  $e =$

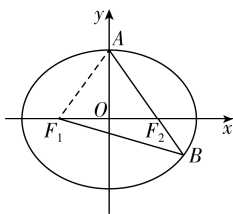
$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 又  $0 < e < 1$ , 所以椭圆  $C_2$  离

心率的取值范围为  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ . 故选 B.

**7. C** **考查点** ▶ 求椭圆的离心率

【解析】如图, 连接  $AF_1$ , 因为  $\triangle ABF_1$  的周长为  $4a$ ,  $|AF_1| = |AF_2| = a$ ,  $|AB| = |F_1B|$ , 所

以  $|AB| = |F_1B| = \frac{3}{2}a$ ,  $|BF_2| = \frac{a}{2}$ .



又  $\cos \angle AF_2F_1 + \cos \angle BF_2F_1 = 0$ , 即  $\frac{c}{a} +$

$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (2c)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2}{2 \times \frac{a}{2} \times 2c} = 0$ , 化简得  $3c^2 =$

$a^2$  (另解:  $\cos \angle F_1AF_2 = \frac{|AF_1|^2 + |AF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|AF_1| \cdot |AF_2|} =$

$\frac{|AF_1|^2 + |AB|^2 - |BF_1|^2}{2|AF_1| \cdot |AB|}$ , 即  $\frac{a^2 + a^2 - 4c^2}{2a^2} =$

$\frac{a^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a}{2}\right)^2}{2 \times a \times \frac{3a}{2}}$ , 即  $1 - \frac{2c^2}{a^2} = \frac{1}{3}$ , 所以

$\frac{c^2}{a^2} = \frac{1}{3}$ ) , 所以椭圆  $C$  的离心率  $e = \frac{c}{a} =$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ . 故选 C.

**一题多解**

(几何性质 + 二倍角公式): 连接  $AF_1$ , 取  $AF_1$  的中点  $M$ , 连接  $BM$ , 因为  $|AB| = |F_1B|$ , 所以  $BM \perp AF_1$ . 又  $|AF_1| + |AB| + |BF_1| = 4a$ ,  $|AF_1| = a$ , 所以  $|AB| = \frac{3a}{2}$ . 在  $\text{Rt} \triangle AMB$  中,



$$\cos \angle MAB = \cos \angle F_1AF_2 = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{1}{3},$$

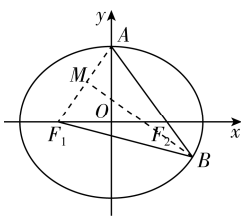
由二倍角公式得  $\sin \frac{\angle F_1AF_2}{2} =$

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \angle F_1AF_2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 在 Rt } \triangle AOF_2 \text{ 中,}$$

$|AF_2| = a, |OF_2| = c$ , 所以  $\frac{c}{a} =$

$$\sin \frac{\angle F_1AF_2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以椭圆 } C \text{ 的离心率}$$

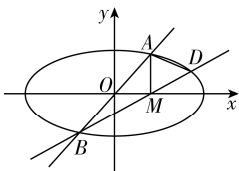
$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$



#### 8. D 考查点 ▶ 求椭圆的离心率

【解析】设  $D(x_1, y_1), A(x_0, y_0)$ , 则  $B(-x_0, -y_0), M(x_0, 0)$ , 所以  $k_{DA} = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}, k_{DB} =$

$$\frac{-y_0 - y_1}{-x_0 - x_1} = \frac{y_0 + y_1}{x_0 + x_1}, \text{ 又 } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$



$$\text{所以 } k_{DA} \cdot k_{DB} = \frac{y_0^2 - y_1^2}{x_0^2 - x_1^2} =$$

$$\frac{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2) - \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_1^2)}{x_0^2 - x_1^2} = -\frac{b^2}{a^2} \quad \left( \text{关键:} \right.$$

证明  $k_{DA} \cdot k_{DB} = -\frac{b^2}{a^2} \left. \right)$ , 又点  $M$  在直线

$$DB \text{ 上, 所以 } k_{DB} = k_{MB} = \frac{-y_0}{-x_0 - x_0} = \frac{1}{2} \times \frac{y_0}{x_0} =$$

$$\frac{1}{2}k_1, \text{ 又 } k_{DA} = k_2, \text{ 所以 } \frac{1}{2}k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2} \quad \left( \text{关} \right.$$

键: 由  $k_{DB} = \frac{1}{2}k_1, k_{DA} = k_2$ , 从而得到

$$\frac{1}{2}k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2} \left. \right). \text{ 因为 } k_1k_2 = -\frac{1}{2}, \text{ 所以}$$

$$-\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{4}, \text{ 即 } \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4}, \text{ 则 } e = \frac{c}{a} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故选 D.}$$





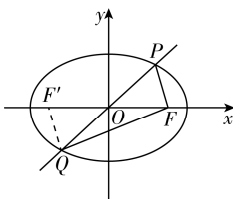
## 知识归纳

过原点的直线交椭圆  $E$ :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  于  $A, B$  两点,  $D$  为椭圆  $E$  上横坐标异于  $A, B$  的横坐标的点, 则  $k_{DA} \cdot k_{DB} = -\frac{b^2}{a^2}$ .

## 9. B 考查点 ▶ 椭圆的定义和对称性

【解析】设  $C$  的另一个焦点为  $F'$ , 由题意知,  $2a = 8$ , 连接  $F'Q$ , 根据椭圆的对称性知  $|PF| = |QF'|$ ,



所以  $\triangle PFQ$  的周长为  $|PF| + |QF| + |PQ| = |QF'| + |QF| + |PQ| = 8 + |PQ|$ , 当线段  $PQ$  为椭圆短轴时,  $|PQ|$  有最小值 6, 所以  $\triangle PFQ$  周长的最小值为 14. 故选 B.

## 10. AC 考查点 ▶ 椭圆的几何性质、椭圆焦点三角形的面积

【解析】对于 A 和 B: 由题意知  $\frac{c}{a} =$

$\frac{1}{2}$ ,  $c = 1$ , 所以  $a = 2$ ,  $b^2 = a^2 - c^2 = 3$ , 故 A 正确, B 错误;

对于 C: 由  $c < b$  知, 以线段  $F_1F_2$  为直径的圆在椭圆内且与椭圆无交点, 所以  $\angle F_1MF_2$  不可能为直角, 由  $\triangle F_1F_2M$  为直角三角形, 得  $\angle F_1F_2M = 90^\circ$  或  $\angle F_2F_1M = 90^\circ$ , 由椭圆的对称性不妨设

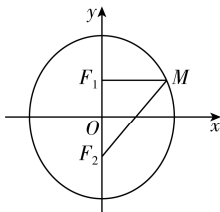
$\angle F_2F_1M = 90^\circ$ , 则  $|MF_1| = \frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$  (提示: 也可以将  $y = 1$  代入椭圆方程  $\frac{y^2}{4} +$

$\frac{x^2}{3} = 1$  得  $|MF_1| = \frac{3}{2}$ ), 所以  $|MF_2| =$

$2a - |MF_1| = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$ , 又  $|F_1F_2| = 2$ ,

所以  $\sin \angle F_1MF_2 = \frac{|F_1F_2|}{|MF_2|} = \frac{4}{5}$ , 故 C

正确;



对于 D: 由椭圆定义知  $|MF_2| + |MF_1| = 4$ , 又  $|MF_1| \cdot |MF_2| = 4$ , 所以  $|MF_1| = |MF_2| = 2$ , 又  $|F_1F_2| = 2$ , 所以  $\triangle F_1MF_2$  是边长为 2 的等边三角形, 所以

$S_{\triangle F_1MF_2} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ , 故 D 错误.



## 一题多解

对于 D 选项, 由椭圆定义

知  $|MF_2| + |MF_1| = 4$ , 又  $|MF_1| \cdot |MF_2| = 4$ , 由余弦定理得  $\cos \angle F_1MF_2 = \frac{|MF_2|^2 + |MF_1|^2 - |F_1F_2|^2}{2|MF_2||MF_1|} = \frac{(|MF_2| + |MF_1|)^2 - 2|MF_2||MF_1| - |F_1F_2|^2}{2|MF_2||MF_1|} = \frac{1}{2}$ , 所以  $\angle F_1MF_2 = 60^\circ$ , 所以  $S_{\triangle F_1MF_2} = \frac{1}{2}|MF_1||MF_2|\sin 60^\circ = \sqrt{3}$ . 故 D 错误.

## 11. C 考查点 ▶ 椭圆的焦点三角形

【解析】如图, 由椭圆定义可知  $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ , 且  $|F_1F_2| = 2c$ , 又  $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ , 利用余弦定理可知  $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|} =$

$$\frac{(|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1||PF_2| - |F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|} =$$

$$\frac{4a^2 - 2|PF_1||PF_2| - 4c^2}{2|PF_1||PF_2|} = \frac{1}{2}, \text{ 化简可得}$$

$$|PF_1||PF_2| = \frac{4b^2}{3}, \text{ 所以 } \triangle PF_1F_2 \text{ 的面}$$

$$\text{积 } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times$$

$$\frac{4b^2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}b^2}{3}, \text{ 设 } \triangle PF_1F_2 \text{ 的内切圆半}$$

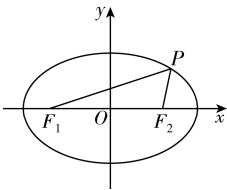
$$\text{径为 } r, \text{ 由 } S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2}|PF_1| \cdot r +$$

$$\frac{1}{2}|PF_2| \cdot r + \frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot r =$$

$$\frac{1}{2}(|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2|) \cdot r, \text{ 得 } r =$$

$$\frac{2S_{\triangle PF_1F_2}}{|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2|} = \frac{\frac{2\sqrt{3}b^2}{3}}{2(a+c)} =$$

$$\frac{\sqrt{3}b^2}{3(a+c)} = \frac{\sqrt{3}(a^2 - c^2)}{3(a+c)} = \frac{\sqrt{3}(a-c)}{3}.$$



设  $\triangle PF_1F_2$  的外接圆半径为  $R$ , 由正弦

$$\text{定理可得 } \frac{|F_1F_2|}{\sin \angle F_1PF_2} = 2R = \frac{2c}{\sin 60^\circ} =$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}c, \text{ 可得 } R = \frac{2\sqrt{3}}{3}c, \text{ 又 } \triangle PF_1F_2 \text{ 的外接}$$

圆面积是其内切圆面积的 64 倍, 即

$$\frac{\pi R^2}{\pi r^2} = 64, \text{ 所以 } \frac{R}{r} = 8,$$

$$\text{即 } \frac{R}{r} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}c}{\frac{\sqrt{3}}{3}(a-c)} = \frac{2c}{a-c} = 8, \text{ 所以 } 10c =$$



$8a$ , 离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ . 故选 C.

**快解**

因为  $\angle F_1PF_2 = 60^\circ$ , 所以

$$S_{\triangle PF_1F_2} = b^2 \tan \frac{\angle F_1PF_2}{2} = \frac{\sqrt{3}b^2}{3}, \text{ 以下同上.}$$

**12. C 考查点** ▶ 根据离心率求椭圆的标准方程、由弦中点求弦所在直线的方程

**【解析】** 由题设,  $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , 即  $\frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{2}{a^2} = \frac{2}{3}$ , 可得  $a^2 = 6$ ,

过点  $P\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$  的直线与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点且满足  $|PA| = |PB|$ , 则  $P$  为线段  $AB$  的中点,

所以  $x_A + x_B = 3, y_A + y_B = 1$ , 又  $\frac{x_A^2}{6} + \frac{y_A^2}{2} = 1$ ,

$$\frac{x_B^2}{6} + \frac{y_B^2}{2} = 1, \text{ 则 } \frac{x_A^2 - x_B^2}{6} + \frac{y_A^2 - y_B^2}{2} = 0,$$

$$\text{即 } \frac{(x_A + x_B)(x_A - x_B)}{6} = -\frac{(y_A + y_B)(y_A - y_B)}{2},$$

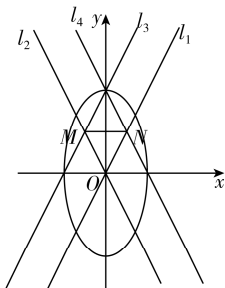
$$\text{所以 } \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = -\frac{x_A + x_B}{3(y_A + y_B)} = -1,$$

故直线  $AB$  的方程为  $y - \frac{1}{2} = -$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{ 即 } x + y - 2 = 0. \text{ 故选 C.}$$

**13. A 突破点** ▶ 根据椭圆的有界性求最值

**【解析】** 设过点  $P$  且与直线  $l_1, l_2$  平行的直线分别为  $l_3, l_4$ , 如图:



设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), P(x_0, y_0), O$  为坐标原点, 则  $y_1 = -2x_1, y_2 = 2x_2$ , 所以

$$x_1 = -\frac{y_1}{2}, x_2 = \frac{y_2}{2}. \text{ 显然四边形 } PMON \text{ 为}$$

平行四边形, 故线段  $MN$  的中点与线段

**关键点**

$OP$  的中点重合,

$$\text{则 } \begin{cases} x_0 + 0 = x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(y_2 - y_1), \\ y_0 + 0 = y_1 + y_2 = 2(x_2 - x_1), \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} x_2 - x_1 = \frac{y_0}{2}, \\ y_2 - y_1 = 2x_0, \end{cases} \text{ 又因为 } P \text{ 为椭圆上任意}$$

一点, 所以  $\frac{y_0^2}{4} + x_0^2 = 1$ , 即  $4x_0^2 = 4 - y_0^2$ , 即

$$|MN| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} =$$



$$\sqrt{\frac{y_0^2}{4} + 4x_0^2} = \sqrt{4 - \frac{3}{4}y_0^2}, \text{ 而 } 0 \leq y_0^2 \leq 4,$$

所以当  $y_0^2 = 4$  时,  $|MN|_{\min} = 1$ . 故选 A.

### 一题多解

设  $P(x_0, y_0)$ , 则  $\frac{y_0^2}{4} + x_0^2 = 1$ .

不妨令直线  $l_3: y - y_0 = 2(x - x_0)$ , 直线  $l_4: y -$

$$y_0 = -2(x - x_0), \text{ 由 } \begin{cases} y - y_0 = 2(x - x_0), \\ y = -2x \end{cases} \text{ 得}$$

$$M\left(\frac{2x_0 - y_0}{4}, \frac{-2x_0 + y_0}{2}\right), \text{ 由 } \begin{cases} y - y_0 = -2(x - x_0), \\ y = 2x \end{cases}$$

$$\text{得 } N\left(\frac{2x_0 + y_0}{4}, \frac{2x_0 + y_0}{2}\right), \text{ 所以 } |MN| =$$

$$\sqrt{\left(\frac{2x_0 + y_0}{4} - \frac{2x_0 - y_0}{4}\right)^2 + \left(\frac{2x_0 + y_0}{2} - \frac{-2x_0 + y_0}{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{y_0^2}{4} + 4x_0^2} = \sqrt{3x_0^2 + 1}, \text{ 因为 } 0 \leq x_0^2 \leq 1, \text{ 所}$$

以当  $x_0^2 = 0$  时,  $|MN|_{\min} = 1$ . 故选 A.

### 14. 突破点 ▶ 求椭圆中的最值问题、直线与椭圆的位置关系

【解】(1) 依题意有  $P(a, 0), Q(0, b)$ , 因为当  $l$  垂直于  $x$  轴时,  $k_{OA} = \sqrt{3} k_{PQ}$ ,

$$A\left(-c, \frac{b^2}{a}\right), \text{ 所以 } \frac{\frac{b^2}{a} - 0}{-c - 0} = \sqrt{3} \cdot \frac{b - 0}{0 - a}, \text{ 解得}$$

$$b = \sqrt{3}c, \text{ 即有 } \begin{cases} a + c = 3, \\ b = \sqrt{3}c, \\ b^2 + c^2 = a^2, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} a = 2, \\ b = \sqrt{3}, \end{cases} \text{ 故椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 易知直线  $l$  的斜率不为 0,

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,  $l$  的方程为  $x = my - 1$ ,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x = my - 1 \end{cases} \text{ 得 } (3m^2 + 4)y^2 - 6my -$$

$$9 = 0,$$

$$\Delta = 36m^2 + 36(3m^2 + 4) = 144(m^2 + 1) > 0,$$

$$\text{由根与系数的关系有 } y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4},$$

$$y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4},$$

$$\text{则 } |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{6m}{3m^2 + 4}\right)^2 + \frac{36}{3m^2 + 4}} = \frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4},$$

$$\text{于是 } S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |PF_1| |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 3 \times$$

$$\frac{12\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4} = \frac{18\sqrt{m^2 + 1}}{3m^2 + 4} =$$

$$\frac{18}{3\sqrt{m^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{m^2 + 1}}}.$$

$$\text{令 } t = \sqrt{m^2 + 1} \geq 1, y = 3t + \frac{1}{t} \geq 4, \text{ 当且}$$

仅当  $t=1, m=0$  时取等号,

则  $S_{\triangle PAB} \leq \frac{9}{2}$ , 故  $\triangle PAB$  面积的最大值为  $\frac{9}{2}$ .

(3)  $\triangle MF_1F_2$  的外接圆经过点  $N$ , 理由如下:

直线  $AP$  的方程为  $y = \frac{y_1}{x_1-2}(x-2)$ ,

令  $x=0$ , 则  $y = \frac{2y_1}{2-x_1}$ , 故  $M\left(0, \frac{2y_1}{2-x_1}\right)$ ,

同理可得  $N\left(0, \frac{2y_2}{2-x_2}\right)$ ,

则  $\overrightarrow{F_1M} = \left(1, \frac{2y_1}{2-x_1}\right)$ ,  $\overrightarrow{F_1N} = \left(1, \frac{2y_2}{2-x_2}\right)$ ,

故有  $\overrightarrow{F_1M} \cdot \overrightarrow{F_1N} = 1 + \frac{2y_1}{3-my_1} \cdot \frac{2y_2}{3-my_2} =$

$$1 + \frac{4y_1y_2}{m^2y_1y_2 - 3m(y_1+y_2) + 9} = 1 + \frac{-36}{\frac{-9m^2}{3m^2+4} - \frac{18m^2}{3m^2+4} + 9} = 0,$$

故  $F_1M \perp F_1N$ , 同理可证  $F_2M \perp F_2N$ , 于是  $\triangle MF_1F_2$  的外接圆经过点  $N$ .

**15. B** **考查点** ▶ 由椭圆的离心率求参数的取值, 充分、必要条件的判断

**【解析】** 椭圆  $C: \frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{4} = 1$  ( $\lambda > 0$  且  $\lambda \neq$

4), 当  $C$  的离心率  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 若  $0 < \lambda < 4$ ,

则有  $e = \frac{\sqrt{4-\lambda}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 解得  $\lambda = 2$ , 即充分

性不成立; 当  $\lambda = 8$  时, 得椭圆  $C: \frac{x^2}{8} +$

$\frac{y^2}{4} = 1$ , 此时离心率  $e = \frac{\sqrt{8-4}}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 即必要性成立. 所以“ $C$  的离心率

$e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ”是“ $\lambda = 8$ ”的必要不充分条件. 故

选 B.

#### 易错警示

本题易错之处在于容易忽略对椭圆焦点位置的讨论, 需分  $0 < \lambda < 4$  (焦点在  $y$  轴上) 和  $\lambda > 4$  (焦点在  $x$  轴上) 两种情况分别求出  $\lambda$  的值.

#### 刷

#### 提分

**1. C** **考查点** ▶ 求椭圆的离心率

**【解析】** 连接  $PF_2$  (图略), 设直线  $l$  与  $PF_2$  的交点为  $H$ , 由点  $F_2$  关于  $l$  的对称点  $P$  恰好在椭圆  $C$  上, 得  $|PF_1| = |F_1F_2| = 2c$ , 且  $F_1H \perp PF_2$ ,

由椭圆定义得  $|PF_2| = 2a - |PF_1| = 2a - 2c$ , 在  $\triangle PF_1F_2$  中, 由余弦定理得



$$\cos \angle PF_1 F_2 = \frac{|PF_1|^2 + |F_1 F_2|^2 - |PF_2|^2}{2|PF_1||F_1 F_2|} =$$

$$\frac{4c^2 + 4c^2 - (2a - 2c)^2}{2 \times 2c \times 2c} = \frac{c^2 - a^2 + 2ac}{2c^2}, \text{ 所以}$$

$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{F_1 F_2} = 2c \cdot 2c \cdot \cos(\pi - \angle PF_1 F_2) = -4c^2 \cdot \frac{c^2 - a^2 + 2ac}{2c^2} = -\frac{2}{3}b^2,$$

由  $a^2 = b^2 + c^2$ , 整理得  $2c^2 + 3ac - 2a^2 = 0$ , 又

椭圆的离心率  $e = \frac{c}{a}$ , 所以  $2e^2 + 3e - 2 = 0$ ,

且  $0 < e < 1$ , 解得  $e = \frac{1}{2}$ , 所以  $C$  的离心率

$e = \frac{1}{2}$ . 故选 C.

## 2. D 考查点 ▶ 求椭圆的离心率的取值范围

【解析】设  $AB$  中点为  $Q(m, n)$ , 则  $x_1 + x_2 = 2m, y_1 + y_2 = 2n$ . 将  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  的坐标代入椭圆方程得

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \text{ 两式作差得, } \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} =$$

$$0, \text{ 即 } \frac{x_1 + x_2}{a^2} + \frac{y_1 + y_2}{b^2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 0, \text{ 即 } \frac{2m}{a^2} +$$

$$\frac{2n}{b^2} \cdot k_{AB} = 0, \text{ 整理得 } k_{AB} = -\frac{b^2 m}{a^2 n}, \text{ 所以线段}$$

$$AB \text{ 中垂线方程为 } y - n = \frac{a^2 n}{b^2 m}(x - m). \text{ 由题}$$

$$\text{意, 点 } P\left(\frac{a}{4}, 0\right) \text{ 在线段 } AB \text{ 的中垂线上,}$$

$$\text{所以 } -n = \frac{a^2 n}{b^2 m} \left(\frac{a}{4} - m\right), \text{ 即 } m =$$

$$\frac{a^3}{4(a^2 - b^2)} = \frac{a^3}{4c^2}. \text{ 由 } 0 < m < a, \text{ 即 } 0 < \frac{a^3}{4c^2} < a,$$

$$\text{解得 } e > \frac{1}{2}, \text{ 又 } 0 < e < 1, \text{ 所以椭圆离心率的}$$

$$\text{取值范围为 } \left(\frac{1}{2}, 1\right). \text{ 故选 D.}$$

### 知识归纳

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

( $a > b > 0$ ) 上两点  $A, B$ , 线段  $AB$  的中点为  $Q(x_0, y_0)$ , 直线  $AB, OQ$  ( $O$  为坐标原点) 的

斜率存在, 由点差法可知,  $\frac{x_0}{a^2} + \frac{y_0}{b^2} \cdot k_{AB} = 0$ ,

从而  $k_{AB} \cdot k_{OQ} = -\frac{b^2}{a^2}$ .

## 3. C 突破点 ▶ 椭圆的几何性质

【解析】由题意知,  $c = 1, \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ , 所以  $a = 2$ ,

直线  $x = a^2$  即为直线  $x = 4$ , 令  $P(4, m)$  ( $m \neq 0$ ), 则线段  $PF_2$  的中点坐标为

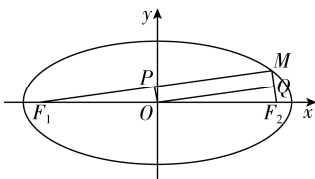
$$\left(\frac{5}{2}, \frac{m}{2}\right), k_{PF_2} = \frac{m}{3}, \text{ 所以线段 } PF_2 \text{ 的中垂}$$

$$\text{线方程为 } y - \frac{m}{2} = -\frac{3}{m}\left(x - \frac{5}{2}\right), \text{ 因为线段}$$

$F_1F_2$  的中垂线为  $y$  轴, 令  $x=0$ , 则  $y=\frac{15}{2m}+\frac{m}{2}$ , 所以  $\triangle PF_1F_2$  的外接圆圆心坐标为  $(0, \frac{15}{2m}+\frac{m}{2})$ , 则外接圆半径  $R = \sqrt{[0-(-1)]^2 + (\frac{15}{2m}+\frac{m}{2})^2} = \sqrt{\frac{15^2}{4m^2} + \frac{m^2}{4} + \frac{17}{2}} \geq \sqrt{2\sqrt{\frac{15^2}{4m^2} \cdot \frac{m^2}{4}} + \frac{17}{2}} = 4$ , 当且仅当  $\frac{15^2}{4m^2} = \frac{m^2}{4}$ , 即  $m^2 = 15$  时等号成立, 所以当  $\triangle PF_1F_2$  的外接圆周长取最小值时, 该圆的半径为 4. 故选 C.

#### 4. C 突破点 ▶ 求椭圆的短轴长

【解析】记  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ , 所以  $|OP|^2 + |OQ|^2 = a^2 - b^2 = c^2 = \frac{1}{4} (|MF_1|^2 + |MF_2|^2)$ , 所以  $|MF_1|^2 + |MF_2|^2 = 4c^2 = |F_1F_2|^2$ , 所以  $MF_1 \perp MF_2$ .



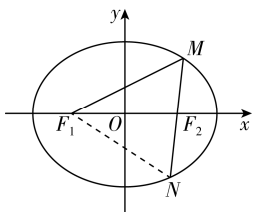
因为四边形  $OPMQ$  的面积为  $\frac{5}{2}$ , 所以  $\triangle MF_1F_2$  的面积为 5, 即  $S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} |MF_1| \cdot |MF_2| = 5$ , 则  $|MF_1| \cdot |MF_2| = 10$ , 因为  $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ , 所以  $4a^2 = (|MF_1| + |MF_2|)^2 = |MF_1|^2 + |MF_2|^2 + 2|MF_1| \cdot |MF_2|$ , 即  $4a^2 = 4c^2 + 20$ , 可得  $4b^2 = 4a^2 - 4c^2 = 20$ , 解得  $b = \sqrt{5}$ , 因此椭圆  $C$  的短轴长为  $2b = 2\sqrt{5}$ . 故选 C.

#### 5. C 突破点 ▶ 求椭圆的离心率

【解析】点  $F_1$  关于  $\angle F_1MF_2$  的平分线的对称点  $N$  必在  $MF_2$  上, 因此  $M, F_2, N$  三点共线, 且  $|MF_1| = |MN|$  (关键: 角平分线性质的应用). 由椭圆的定义知,  $|MF_1| + |MF_2| = 2a$ , 设  $|MF_1| = m$ , 则  $|MF_2| = 2a - m$ ,  $|MN| = m$ ,  $|NF_2| = |MN| - |MF_2| = 2m - 2a$ , 连接  $NF_1$ , 又  $|NF_1| + |NF_2| = 2a$ , 所以  $|F_1N| = 4a - 2m$ , 在  $\triangle MF_1N$  中, 由余弦定理得  $|F_1N|^2 = |MF_1|^2 + |MN|^2 - 2|MF_1| \cdot |MN| \cdot \cos \angle F_1MF_2$ , 即  $(4a - 2m)^2 = m^2 + m^2 - 2m^2 \times \frac{7}{9}$ , 化简得  $m = \frac{3}{2}a$  或  $m = 3a$  (舍去), 所以  $|MF_1| = \frac{3}{2}a$ ,  $|MF_2| = \frac{1}{2}a$ , 在  $\triangle MF_1F_2$  中,  $|F_1F_2| = 2c$ , 由余弦定理得



$$(2c)^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 - 2 \times \frac{3}{2}a \times \frac{1}{2}a \times \frac{7}{9}, \text{解得 } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{故选 C.}$$



## 6. ACD 突破点 ▶ 椭圆中的最值问题

【解析】由题意可知,  $2a = 4$ , 即  $a = 2$ , 又

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{所以 } c = \sqrt{3}, \text{所以 } b = \sqrt{a^2 - c^2} = 1,$$

所以椭圆  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 故

A 正确;

因为  $B(0, 1)$ , 设  $P(x_P, y_P)$ , 且  $\frac{x_P^2}{4} + y_P^2 =$

$$1, \text{所以 } |PB| = \sqrt{x_P^2 + (y_P - 1)^2} =$$

$$\sqrt{4(1 - y_P^2) + (y_P - 1)^2} =$$

$$\sqrt{-3\left(y_P + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}} \leq \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{所}$$

以  $|PB|$  的最大值为  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ , 故 B 错误;

因为  $|PF_1| + |PM| = 2a - |PF_2| + |PM| = 2a -$

$(|PF_2| - |PM|) \geq 2a - |MF_2|$ , 当且仅当  $P, F_2, M$  三点共线且  $M$  在  $P, F_2$  之间时等号

成立,  $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , 则  $|MF_2| =$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1, \text{所以 } |PF_1| +$$

$|PM| \geq 2a - |MF_2| = 4 - 1 = 3$ , 所以  $|PF_1| + |PM|$  的最小值为 3, 故 C 正确;

设切点为  $A$ , 由椭圆的光学性质可知,

$F_1, A, Q$  三点共线, 所以  $|QF_1| = |AF_1| +$

$|AQ| = 2a = 4$ , 所以  $Q$  点的轨迹是以

$(-\sqrt{3}, 0)$  为圆心, 4 为半径的圆, 则  $t =$

$|x_1 + \sqrt{2}y_1 - 4\sqrt{3}|$  表示  $Q$  点到直线  $x +$

$\sqrt{2}y - 4\sqrt{3} = 0$  距离的  $\sqrt{3}$  倍, 圆心  $(-\sqrt{3}, 0)$

到直线  $x + \sqrt{2}y - 4\sqrt{3} = 0$  的距离为  $d =$

$$\frac{|-\sqrt{3} - 4\sqrt{3}|}{\sqrt{1+2}} = 5, \text{所以 } Q \text{ 点到直线 } x +$$

$\sqrt{2}y - 4\sqrt{3} = 0$  的距离最大值为 9, 最小值

为 1, 所以  $t$  的取值范围为  $[\sqrt{3}, 9\sqrt{3}]$ , 故

D 正确. 故选 ACD.

## 7. BCD 突破点 ▶ 蒙日圆

【解析】对于 A, 依题意, 过椭圆  $E$  的上顶

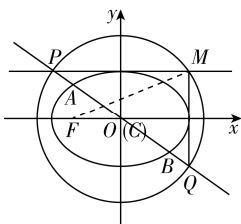
点作  $y$  轴的垂线, 过椭圆  $E$  的右顶点作  $x$

轴的垂线, 则这两条垂线的交点在圆  $C$

上 (关键: 取椭圆的两个特殊点, 得到

$$a^2 + b^2 = \frac{4}{3}a^2),$$





所以  $a^2 + b^2 = \frac{4}{3}a^2$ , 得  $a^2 = 3b^2$ , 所以椭圆

$E$  的离心率  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , 故 A 错误;

对于 D, 因为点  $M, P, Q$  都在圆  $C$  上, 且  $\angle PMQ = 90^\circ$ , 所以  $PQ$  为圆  $C$  的直径, 则

**突破点**

$|PQ| = 2 \times \sqrt{\frac{4}{3}a^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}a$ , 所以  $\triangle MPQ$  面积的最大值为  $\frac{1}{2}|PQ| \times \sqrt{\frac{4}{3}a^2} = \frac{2\sqrt{3}a}{3} \times \frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{4}{3}a^2$ , 故 D 正确;

对于 C, 设  $M(x_0, y_0)$ , 椭圆  $E$  的左焦点为  $F(-c, 0)$ , 连接  $MF$ , 因为  $c = \frac{\sqrt{6}}{3}a$ , 所以

$$|MF|^2 = (x_0 + c)^2 + y_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0c + c^2 = \frac{4}{3}a^2 + 2x_0 \times \frac{\sqrt{6}}{3}a + \frac{2}{3}a^2 = 2a^2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}ax_0,$$

又  $-\frac{2\sqrt{3}}{3}a \leq x_0 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}a$  (提示: 注意  $x_0$  的

范围), 所以  $|MF|^2 \geq \left(\frac{6-4\sqrt{2}}{3}\right)a^2$ , 则点

$M$  到左焦点的距离的最小值为  $\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{3}a$ , 故 C 正确;

对于 B, 由直线  $PQ$  经过坐标原点, 易得点  $A, B$  关于原点对称, 设  $A(x_1, y_1)$ ,  $D(x_2, y_2)$  ( $x_2 \neq \pm x_1$ ), 则  $B(-x_1, -y_1)$ ,  $k_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ,  $k_2 = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}$ , 又

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{3b^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{3b^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 所以 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{3b^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0, \text{ 所以}$$

$$\frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = -\frac{1}{3}, \text{ 所以 } k_1 k_2 = -\frac{1}{3}, \text{ 故 B 正确. 故选 BCD.}$$

#### 8. A 突破点 ▶ 椭圆中三角形的周长问题

**【解析】** 如图所示, 由椭圆  $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$

知  $a^2 = 9, b^2 = 8$ , 所以  $c^2 = a^2 - b^2 = 1$ . 所以  $F_2(1, 0)$ ,  $|F_1 F_2| = 2c = 2$ , 所以过  $F_2$  且垂直于  $x$  轴的直线为  $x = 1$ , 不妨令点  $A$  在  $x$  轴上方, 把  $x = 1$  代入  $C$  中, 可得

$A\left(1, \frac{8}{3}\right), B\left(1, -\frac{8}{3}\right)$ . 由题知  $\triangle AF_1 F_2$ ,





$\frac{1}{a(1-\lambda)}x - 1$ , 联立得  $P\left(\frac{2a(1-\lambda)}{1+(1-\lambda)^2}, \frac{1-(1-\lambda)^2}{1+(1-\lambda)^2}\right)$ , 设  $\begin{cases} x = \frac{2a(1-\lambda)}{1+(1-\lambda)^2}, \\ y = \frac{1-(1-\lambda)^2}{1+(1-\lambda)^2}, \end{cases}$  又  $0 < \lambda < 1$ , 则  $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1, 0 < y < 1$ . 若  $a = 2$ , 则点  $P$  的

轨迹方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1, 0 < y < 1, x > 0$  (易错: 求点  $P$  轨迹方程的过程中可能变形不等价导致轨迹方程的范围出错, 影响对选项的判断). 设点  $P(2\cos\theta, \sin\theta), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 直线  $AC: x + 2y - 2 = 0, |AC| = \sqrt{5}$ , 点  $P$  到直线  $AC$  的距离  $d = \frac{|2\cos\theta + 2\sin\theta - 2|}{\sqrt{5}} = \frac{\left|2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 2\right|}{\sqrt{5}}$ , 由于  $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ , 于是当  $\theta = \frac{\pi}{4}$  时,  $d_{\max} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{5}}$ ,  $S_{\triangle PAC}$  的最大值为  $\sqrt{2} - 1$ , C 错误.

对于 D, 由 C 可知, 点  $P$  的轨迹方程为  $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1, 0 < y < 1$ , 设  $P(a\cos\theta, \sin\theta), \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 于是  $a^2\cos^2\theta + \sin^2\theta + 1 + 2\sin\theta > 4$ , 即  $a^2 > \frac{4 - (1 + \sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta + 3 - 1 - \sin^2\theta - 2\sin\theta}{\cos^2\theta} = 1 + \frac{2}{1 + \sin\theta}$  能成立, 于是  $a^2 > 2, a \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ , D 正确. 故选 AD.

### 10. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 突破点 ▶ 求椭圆的离心率

【解析】由题设  $A(0, b), B(0, -b), F(c, 0)$ , 则  $AF$  的中点为  $\left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right), k_{AF} = -\frac{b}{c}$ ,

所以  $AF$  中垂线的斜率为  $\frac{c}{b}$ , 故  $AF$  的

中垂线方程为  $y - \frac{b}{2} = \frac{c}{b}\left(x - \frac{c}{2}\right)$  ①, 由

$B$  关于点  $F$  的对称点为  $B'$ , 得  $B'(2c, b)$ , 故  $AB'$  中垂线方程为  $x = c$  ②, 联立①

②, 可得  $y = \frac{b^2 + c^2}{2b} = \frac{a^2}{2b}$ , 故过  $A, B', F$  三

点的圆的圆心为  $\left(c, \frac{a^2}{2b}\right)$  (关键: 求  $AF$ ,  $AB'$  的中垂线方程并求交点坐标得到圆心坐标), 由题意有  $a = \frac{a^2}{2b}$ , 则  $a = 2b$ , 可

得  $e = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

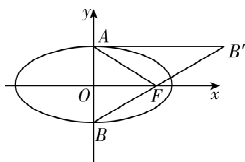


## 快解

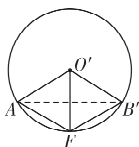
如图①,由椭圆的性质可知

$|AF| = |BF| = |B'F| = \sqrt{b^2 + c^2} = a$ , 而  $\triangle AFB'$  的外接圆半径也为  $a$ , 所以  $\triangle AO'F$  和  $\triangle FO'B'$  均为等边三角形 ( $O'$  为  $\triangle AFB'$  的外接圆圆心), 如图②, 则  $\angle AFB' = 120^\circ$ , 则  $\angle AFB = 60^\circ$ ,  $\angle AFO = 30^\circ$ , 所以椭圆的离心率  $e = \frac{c}{a} =$

$$\frac{|OF|}{|AF|} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



图①



图②

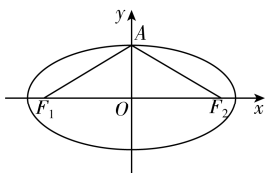
### 11. 突破点 ▶ 求椭圆的方程、椭圆中的弦长问题

【解】(1) 设  $O$  为坐标原点, 由题意得,  $|OF_1| = |OF_2| = c$ ,  $|F_1F_2| = 2c$ ,  $|OA| = b$ ,  $|AF_1| = |AF_2| = \sqrt{b^2 + c^2} = a$ ,

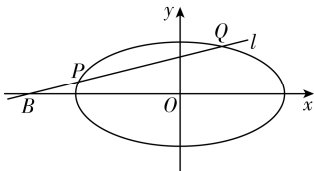
因为  $\triangle AF_1F_2$  的周长为  $4 + 2\sqrt{3}$ , 面积为  $\sqrt{3}$ ,

所以  $2a + 2c = 4 + 2\sqrt{3}$ ,  $\frac{1}{2} \cdot 2c \cdot b = \sqrt{3}$ ,

又因为  $a^2 = b^2 + c^2$ , 所以  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = \sqrt{3}$ , 故椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .



(2) 由题意得, 直线  $l$  的斜率存在, 设  $l$  的方程为  $y = k(x + 3)$ ,  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ ,  $x_1 > -3$ ,  $x_2 > -3$ ,



$$\text{由 } \begin{cases} y = k(x + 3) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } (4k^2 + 1)x^2 + 24k^2x + 36k^2 - 4 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = (24k^2)^2 - 4(4k^2 + 1)(36k^2 - 4) = -16(5k^2 - 1) > 0, \text{ 即 } -\frac{\sqrt{5}}{5} < k < \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = -\frac{24k^2}{4k^2 + 1}, x_1 x_2 = \frac{36k^2 - 4}{4k^2 + 1},$$

$$\text{因为 } |BP| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 + 3| = \sqrt{1 + k^2} \cdot (x_1 + 3), |BQ| = \sqrt{1 + k^2} (x_2 + 3),$$

$$\text{所以 } |BP| + |BQ| = \sqrt{1 + k^2} (x_1 + x_2 + 6) =$$

$$\sqrt{1+k^2} \left( -\frac{24k^2}{4k^2+1} + 6 \right) = \frac{6\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1},$$

$$\begin{aligned} |BP| \cdot |BQ| &= (1+k^2)(x_1+3)(x_2+3) = \\ &= (1+k^2)[x_1x_2+3(x_1+x_2)+9] = (1+k^2) \cdot \\ &\left[ \frac{36k^2-4}{4k^2+1} + 3\left(-\frac{24k^2}{4k^2+1}\right) + 9 \right] = \frac{5(1+k^2)}{4k^2+1}, \end{aligned}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{|BP|} + \frac{1}{|BQ|} = \frac{4\sqrt{2}}{5},$$

$$\text{所以 } \frac{|BP|+|BQ|}{|BP| \cdot |BQ|} = \frac{\frac{6\sqrt{1+k^2}}{4k^2+1}}{\frac{5(1+k^2)}{4k^2+1}} = \frac{4\sqrt{2}}{5}, \text{ 解}$$

$$\text{得 } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{4},$$

$$\begin{aligned} \text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y &= \frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{ 或} \\ y &= -\frac{\sqrt{2}}{4}x - \frac{3\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

## 12. 突破点 ▶ 椭圆中三角形面积的最值问题

【解】(1) 由椭圆  $\Gamma_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的焦距为  $2\sqrt{3}$ , 得  $c = \sqrt{3}$ , 由椭圆的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 得  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 解得  $a = \sqrt{6}$ , 易知  $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$ , 则可得椭圆  $\Gamma_1: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2) (i) 当直线  $PQ$  的斜率不存在时, 可设方程为  $x = n$ , 代入椭圆  $\Gamma_1: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 不妨设  $P\left(n, \sqrt{3 - \frac{n^2}{2}}\right)$ ,  $Q\left(n, -\sqrt{3 - \frac{n^2}{2}}\right)$ , 易知  $|OM| = |n| = \sqrt{3 - \frac{n^2}{2}}$ , 解得  $|n| = \sqrt{2}$ ;

当直线  $PQ$  的斜率存在时, 可设方程为

$$y = kx + m, \text{ 联立 } \begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 可得}$$

$$(1+2k^2)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0, \Delta = 48k^2 + 24 - 8m^2 > 0, \text{ 设 } P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), \text{ 则}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{4km}{1+2k^2}, x_1x_2 = \frac{2m^2-6}{1+2k^2}, \text{ 可得}$$

$$\begin{aligned} y_1y_2 &= (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2x_1x_2 + km \cdot \\ &(x_1 + x_2) + m^2, \text{ 由直线 } OP \text{ 的斜率 } k_{OP} = \frac{y_1}{x_1}, \text{ 直线 } OQ \text{ 的斜率 } k_{OQ} = \frac{y_2}{x_2}, \text{ 且 } OP \perp \end{aligned}$$

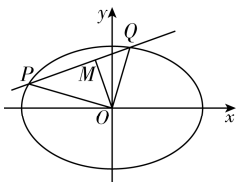
$$OQ, \text{ 得 } k_{OP}k_{OQ} = \frac{y_1y_2}{x_1x_2} = -1, \text{ 整理可得}$$

$$y_1y_2 + x_1x_2 = 0, \text{ 化简可得 } (1+k^2) \cdot (2m^2-6) - 4k^2m^2 + m^2(1+2k^2) = 0, \text{ 解}$$



得  $m^2 = 2 + 2k^2$ , 所以  $|OM| =$

$$\frac{|k \cdot 0 - 0 + m|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{\frac{m^2}{1+k^2}} = \sqrt{2}.$$



综上所述, 线段  $OM$  的长度为定值, 定值为  $\sqrt{2}$ .

(ii) 由(i)知点  $M$  的轨迹方程为  $x^2 + y^2 = 2$ , 由圆的对称性, 得  $S_{\triangle PQN} = 2S_{\triangle POQ} = |OM| \cdot |PQ|$ .

由(i)可知, 当直线  $PQ$  的斜率不存在时,  $|PQ| = 2\sqrt{2}$ ; 当直线  $PQ$  的斜率存在时,  $|PQ| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2|$

$$= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

$$= \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{\sqrt{48k^2+24-8m^2}}{1+2k^2}$$

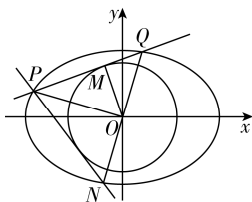
$$= 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{(1+k^2)(4k^2+1)}}{1+2k^2}$$

$$= 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4k^2 + \frac{1}{k^2} + 4}} \leq 3,$$

当且仅当  $k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$  时等号成立, 则

$$2\sqrt{2} \leq |PQ| \leq 3.$$

故  $S_{\triangle PQN}$  的最小值为 4.



## 第2节 双曲线

刷

基础

1. D 考查点 根据双曲线的渐近线求标准方程

【解析】因为双曲线  $C$  的一个焦点是

$F_1(0, 2)$ , 设双曲线方程为  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a >$

$0, b > 0)$ , 则双曲线的渐近线方程为  $y =$

$$\pm \frac{a}{b}x, \text{ 所以 } \begin{cases} c=2, \\ \frac{a}{b}=\sqrt{3}, \\ c=\sqrt{a^2+b^2}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a=\sqrt{3}, \\ b=1, \\ c=2, \end{cases} \text{ 所}$$

以  $C$  的方程是  $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ . 故选 D.

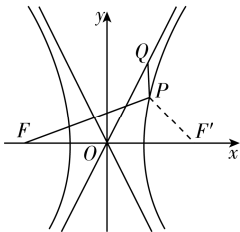
2. 4 考查点 利用双曲线的定义求距离的和的最值

【解析】设双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$  的右焦点为

$F'(\sqrt{5}, 0)$ , 连接  $PF'$ , 易知其渐近线方程



为  $y = \pm 2x$ , 则  $|PF| - |PF'| = 2a = 2$ ,  
 $\therefore |PF| = |PF'| + 2, \therefore |PQ| + |PF| = |PQ| + |PF'| + 2 \geq |F'Q| + 2$ ,



当且仅当  $F', Q, P$  三点共线, 且  $F'Q$  垂直于渐近线时,  $|F'Q|_{\min} = \frac{|2\sqrt{5}|}{\sqrt{1+4}} = 2$ ,  
 $\therefore |PQ| + |PF|$  的最小值为 4.

**3. A** **考查点** 根据双曲线的渐近线求参数值

**【解析】** 因为双曲线  $\frac{x^2}{3m} - \frac{y^2}{4-m^2} = 1$  的焦点

在  $x$  轴上, 所以  $\begin{cases} 3m > 0, \\ 4-m^2 > 0, \end{cases}$  即  $0 < m < 2$ .

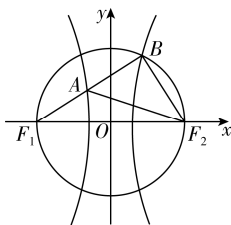
又双曲线的两条渐近线互相垂直, 所以

$-\frac{\sqrt{4-m^2}}{\sqrt{3m}} \times \frac{\sqrt{4-m^2}}{\sqrt{3m}} = -1$ , 即  $(m-1)(m+4) = 0$ , 解得  $m = 1$  或  $m = -4$  (舍).

故选 A.

**4.  $y = \pm 2\sqrt{3}x$**  **考查点** 双曲线的定义与渐近线方程

**【解析】** 如图所示, 由以  $C$  的中心为圆心,  $F_1F_2$  的长为直径的圆过点  $B$ , 可知  $\angle F_1BF_2 = 90^\circ$ , 由  $|AB|, |BF_2|, |AF_2|$  依次成等差数列, 得  $2|BF_2| = |AF_2| + |AB|$ , 由双曲线定义可知  $|AF_2| = |AF_1| + 2a$ ,  $|BF_1| = |BF_2| + 2a$ , 则  $2|BF_2| = |AF_2| + |AB| = |AF_1| + |AB| + 2a = |BF_1| + 2a = |BF_2| + 4a$ , 即  $|BF_2| = 4a$ ,



$|BF_1| = |BF_2| + 2a = 6a$ , 又  $\angle F_1BF_2 = 90^\circ$ , 所以  $|BF_1|^2 + |BF_2|^2 = |F_1F_2|^2$ , 即  $36a^2 + 16a^2 = 4c^2 = 4a^2 + 4b^2$ , 则  $b^2 = 12a^2$ ,  
 则渐近线方程为  $y = \pm 2\sqrt{3}x$ .

**5. D** **考查点** 求双曲线的焦距的最值

**【解析】** 双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的渐近线方

程为  $bx \pm ay = 0$ , 由  $\begin{cases} y = b, \\ bx \pm ay = 0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x = \pm a, \\ y = b, \end{cases}$

因此直线  $y = b$  与双曲线  $C$  的两条渐近线的交点为  $(-a, b), (a, b)$ , 直线  $y = b$  与双曲线  $C$  的两条渐近线围成的三角形面积为  $\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = 4$ , 则  $ab = 4$ , 双曲线  $C$  的



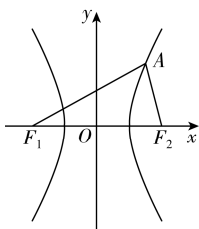
焦距  $2c = 2\sqrt{a^2+b^2} \geq 2\sqrt{2ab} = 4\sqrt{2}$ , 当且仅当  $a=b$  时取等号, 所以双曲线  $C$  的焦距的最小值为  $4\sqrt{2}$ . 故选 D.

### 6. A 考查点 ▶ 求双曲线的虚半轴长

【解析】由题意得,  $a = \sqrt{2}$ ,  $|AF_1| = |F_1F_2| = 2c$ ,  $c > a = \sqrt{2}$ , 由双曲线定义得,  $|AF_1| - |AF_2| = 2a = 2\sqrt{2}$ ,  $\therefore |AF_2| = 2c - 2\sqrt{2}$ .

$$\therefore \tan \angle AF_1F_2 = \frac{\sqrt{15}}{7}, \therefore \frac{\sin \angle AF_1F_2}{\cos \angle AF_1F_2} = \frac{\sqrt{15}}{7}, \text{ 且 } \cos \angle AF_1F_2 > 0,$$

$$\therefore \sin^2 \angle AF_1F_2 + \cos^2 \angle AF_1F_2 = 1, \angle AF_1F_2 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$



$$\therefore \left(\frac{\sqrt{15}}{7} \cos \angle AF_1F_2\right)^2 + \cos^2 \angle AF_1F_2 = 1,$$

$\therefore \cos \angle AF_1F_2 = \frac{7}{8}$ . 在  $\triangle AF_1F_2$  中, 由余弦定理得

$$\cos \angle AF_1F_2 = \frac{|AF_1|^2 + |F_1F_2|^2 - |AF_2|^2}{2|AF_1| \cdot |F_1F_2|} =$$

$$\frac{(2c)^2 + (2c)^2 - (2c - 2\sqrt{2})^2}{2 \cdot 2c \cdot 2c} = \frac{7}{8}, \text{ 解得 } c =$$

$$2\sqrt{2} \text{ 或 } c = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (舍)}, \therefore b = \sqrt{c^2 - a^2} =$$

$$\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}. \text{ 故选 A.}$$

### 7. D 考查点 ▶ 求双曲线的离心率的取值范围

【解析】根据双曲线定义知  $\triangle AF_1B$  的周长为  $4a + 2|AB|$ , 而  $|AB| \geq \frac{2b^2}{a}$  (提示: 过

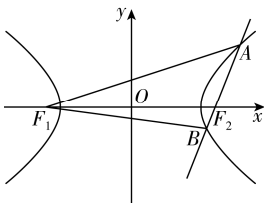
双曲线的焦点的弦中通径长最短, 而通径长为  $\frac{2b^2}{a}$ ), 所以  $4a + 2|AB| \geq 4a + \frac{4b^2}{a}$ ,

而  $\triangle ABF_1$  的周长为  $10a$ , 所以  $4a + \frac{4b^2}{a} \leq$

$10a$ , 即  $2b^2 \leq 3a^2$ , 所以  $2(c^2 - a^2) \leq 3a^2$ ,

解得  $e \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$ , 所以双曲线离心率的取值

范围是  $\left(1, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ . 故选 D.



### 8. C 考查点 ▶ 求双曲线的离心率





【解析】因为  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0$ ，且  $P$  为线段  $FQ$  的中点，所以  $OP \perp FQ$ ， $|OF| = |OQ| = c$ ，不妨设点  $P$  在第一象限，则直线  $OP$  的斜率为  $\frac{b}{a}$ ，所以直线  $FQ$  的方程

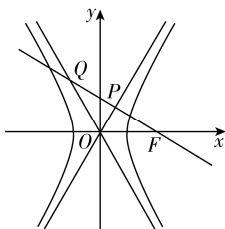
$$\text{为 } y = -\frac{a}{b}(x-c), \text{ 联立 } \begin{cases} y = -\frac{a}{b}(x-c), \\ y = -\frac{b}{a}x, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} x = \frac{a^2c}{a^2-b^2}, \\ y = -\frac{abc}{a^2-b^2}, \end{cases} \text{ 即点 } Q\left(\frac{a^2c}{a^2-b^2}, -\frac{abc}{a^2-b^2}\right),$$

$$\text{所以 } |OQ| = \sqrt{\left(\frac{a^2c}{a^2-b^2}\right)^2 + \left(-\frac{abc}{a^2-b^2}\right)^2} = c,$$

化简可得  $a^4 + a^2b^2 = (a^2 - b^2)^2$ ，即  $3a^2 = b^2$ ，所以双曲线  $C$  的离心率  $e =$

$$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2. \text{ 故选 C.}$$



### 一题多解

因为  $P$  为  $FQ$  的中点，

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0$ ，所以  $OP \perp FQ$ ，所以  $\angle POF = \angle POQ$ ，

又直线  $OP$  与直线  $OQ$  分别为双曲线  $C$  的两条渐近线，得  $2\angle POF + \angle POQ =$

$3\angle POF = \pi$ ，所以  $\angle POF = \frac{\pi}{3}$ ，所以  $\frac{b}{a} =$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}, \text{ 故 } e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2.$$

### 9. B 考查点 ▶ 求双曲线的离心率的取值范围

【解析】设以  $F_2(c, 0)$  为圆心， $a$  为半径的圆与双曲线的一条渐近线  $bx - ay = 0$  交于  $A, B$  两点，

则  $F_2$  到渐近线  $bx - ay = 0$  的距离  $d =$

$$\frac{|bc|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = b \text{ (提示: 双曲线的焦点到其渐}$$

近线的距离为  $b$ )，所以  $|AB| =$

$2\sqrt{a^2 - b^2}$ ，因为  $3|AB| > |F_1F_2|$ ，所以  $3 \times$

$2\sqrt{a^2 - b^2} > 2c$ ，可得  $9a^2 - 9b^2 > c^2 = a^2 + b^2$ ，

即  $4a^2 > 5b^2 = 5c^2 - 5a^2$ ，可得  $5c^2 < 9a^2$ ，

所以  $\frac{c^2}{a^2} < \frac{9}{5}$ ，所以  $e < \frac{3\sqrt{5}}{5}$ ，又  $e > 1$ ，所以双

曲线的离心率的取值范围是  $\left(1, \frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$ 。

故选 B.

### 10. C 考查点 ▶ 利用定义解决双曲线中焦点三角形问题



【解析】记  $l$  与  $x$  轴交于点  $K$ ,

由双曲线的定义, 得  $|PF_1| - |PF_2| =$

$$2a = 2, |OF_1| = |OF_2| = 5,$$

因为  $MN \parallel PF_2$ ,  $O$  为  $F_1F_2$  的中点, 所以

$OM$  为  $\triangle PF_1F_2$  的中位线,  $|OM| =$

$$\frac{1}{2}|PF_2|,$$

$$|ON| = |MN| - |OM| = \frac{2}{3}|PF_2| -$$

$$\frac{1}{2}|PF_2| = \frac{1}{6}|PF_2|,$$

易知  $\triangle OKN \sim \triangle F_2KP$ , 故  $\frac{|OK|}{|KF_2|} =$

$$\frac{|ON|}{|PF_2|} = \frac{1}{6}, \text{ 故 } \frac{|KF_1|}{|KF_2|} = \frac{4}{3},$$

又  $\angle F_1PF_2$  的平分线为  $l$ , 由角平分线

$$\text{的性质得 } \frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|KF_1|}{|KF_2|} = \frac{4}{3},$$

所以  $|PF_1| = 8, |PF_2| = 6, |F_1F_2| = 10,$

故  $\triangle PF_1F_2$  为直角三角形, 面积为  $\frac{1}{2} \times$

$6 \times 8 = 24$ . 故选 C.

### 11. BCD 突破点 ▶ 双曲线性质的综合应用

【解析】对于 A, 由题可得,  $b^2 = 4, e = \sqrt{5},$

$$\text{所以 } e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{4}{a^2} = 5, \text{ 解得 } a = 1,$$

所以实轴长为 2, 故 A 错误;

对于 B, 双曲线  $E$  的渐近线方程为  $y =$

$$\pm \frac{2}{a}x, \text{ 若两渐近线垂直, 则 } \frac{2}{a} \cdot$$

$$\left(-\frac{2}{a}\right) = -1, \text{ 解得 } a = 2, \text{ 故 B 正确;}$$

对于 C, 因为  $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ , 所以

$$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2 = 4c^2, \text{ 又}$$

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a, \text{ 所以 } |PF_1|^2 +$$

$$|PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2| = 4a^2, \text{ 两式相减}$$

$$\text{可得 } |PF_1||PF_2| = 2(c^2 - a^2) = 2b^2 = 8,$$

故 C 正确;

对于 D, 由  $|QF_1| - |QF_2| = 2a, |PF_1| -$

$$|PF_2| = 2a, \text{ 两式相加得 } |PF_1| + |QF_1| =$$

$$|PF_2| + |QF_2| + 4a = |PQ| + 4a, \text{ 又}$$

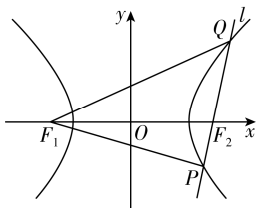
$$|PQ| \geq \frac{2b^2}{a} = \frac{8}{a}, \text{ 所以 } \triangle F_1PQ \text{ 的周长为}$$

$$|PF_1| + |QF_1| + |PQ| = 4a + 2|PQ| \geq 4a +$$

$$\frac{16}{a} \geq 2\sqrt{4a \cdot \frac{16}{a}} = 16, \text{ 当且仅当 } 4a =$$

$$\frac{16}{a}, \text{ 即 } a = 2 \text{ 时等号成立, 故 D 正确. 故}$$

选 BCD.



**12. B 考查点** ▶ 双曲线中三角形的面积

【解析】由双曲线定义可知,  $|AF_2| - |AF_1| = |AF_1| = 2a = 4$ , 所以  $a = 2$ ,  $|AF_2| = 8, |BF_2| = 4$ ,

所以  $S_{\triangle ABF_2} = \frac{1}{2} |AF_2| \cdot |BF_2| \cdot \sin \angle AF_2B = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \sin \angle AF_2B = 16 \sin \angle AF_2B = 8\sqrt{3}$ , 解得  $\sin \angle AF_2B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 因为  $\angle AF_2B$  为钝角, 所以  $\angle AF_2B = \frac{2\pi}{3}$ , 所以  $\angle F_1AF_2 = \frac{\pi}{3}$ , 在  $\triangle AF_1F_2$  中, 由余弦定理可知  $|F_1F_2|^2 = |AF_1|^2 + |AF_2|^2 - 2|AF_1| \cdot |AF_2| \cos \frac{\pi}{3} = 16 + 64 - 32 = 48$ , 所以  $c^2 = 12, b^2 = c^2 - a^2 = 12 - 4 = 8$ , 所以双曲线  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ . 故选 B.

**13. B 考查点** ▶ 点差法求解双曲线方程

【解析】根据题意,  $F(0, -2)$  是双曲线的一个焦点, 则双曲线的焦点在  $y$  轴上, 设双曲线的方程为  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ,  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 由已知条件易得直线  $l$  的斜率  $k = k_{PF} = \frac{-2-1}{0-3} = 1$ , 则

有  $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1$ , 变形可得  $y_1 - y_2 = x_1 - x_2$ , 因为  $M, N$  两点在双曲线上, 所以

$$\begin{cases} \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{x_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{y_2^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \text{两式相减得}$$

$$\frac{(y_1 - y_2)(y_1 + y_2)}{a^2} - \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{b^2} = 0,$$

又因为  $MN$  的中点为  $P(3, 1)$ , 所以  $x_1 + x_2 = 6, y_1 + y_2 = 2$ , 化简得  $b^2 = 3a^2$ , 又因为  $c = 2$ , 所以  $a^2 + b^2 = 4$ , 解得  $a^2 = 1, b^2 = 3$ , 则双曲线的方程为  $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$ . 故选 B.

**14. 突破点** ▶ 求双曲线的标准方程、双曲线中三角形的面积问题

【解】(1) 由已知得双曲线的实轴长为  $2\sqrt{2}$ , 即得  $a = \sqrt{2}$ ,

所以双曲线方程为  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,

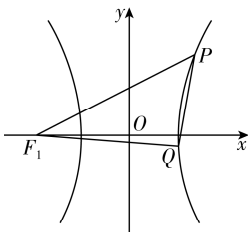
又双曲线过点  $P(2, \sqrt{6})$ , 所以  $\frac{2^2}{2} - \frac{(\sqrt{6})^2}{b^2} = 1$ , 解得  $b = \sqrt{6}$ ,

则双曲线  $C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ .

(2) 由已知得直线  $PQ: y - \sqrt{6} = 2\sqrt{6}(x -$



2), 即  $y = 2\sqrt{6}x - 3\sqrt{6}$ , 设  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ ,



$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1, \\ y = 2\sqrt{6}x - 3\sqrt{6}, \end{cases}$$

消去  $y$  整理得  $7x^2 - 24x + 20 = 0$ ,  $\Delta = (-24)^2 - 4 \times 7 \times 20 = 16 > 0$ ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{24}{7}, x_1 x_2 = \frac{20}{7},$$

$$|PQ| = \sqrt{1 + (2\sqrt{6})^2} \cdot$$

$$\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{1 + (2\sqrt{6})^2} \cdot$$

$$\sqrt{\left(\frac{24}{7}\right)^2 - 4 \times \frac{20}{7}} = \frac{20}{7}.$$

又  $F_1$  为双曲线  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$  的左焦点, 所以

点  $F_1$  的坐标为  $(-2\sqrt{2}, 0)$ , 点  $F_1$  到

$$\text{直线 } PQ \text{ 的距离 } d = \frac{|2\sqrt{6} \times (-2\sqrt{2}) - 3\sqrt{6}|}{\sqrt{24+1}} = \frac{8\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{5},$$

所以  $\triangle PQF_1$  的面积  $S = \frac{1}{2} |PQ| d = \frac{1}{2} \times$

$$\frac{20}{7} \times \frac{8\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{5} = \frac{16\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{7},$$

所以  $\triangle PQF_1$  的面积为  $\frac{16\sqrt{3}+6\sqrt{6}}{7}$ .

**15. BCD** **考查点** 双曲线定义的应用、根据直线与双曲线的位置关系求斜率范围

**【解析】** 对于 A, 离心率为  $2 = \sqrt{1 + \frac{m}{4}}$ ,

解得  $m = 12$ ,  $c = 4$ ,  $||MF_1| - |MF_2|| = 4$ , 则  $|MF_2| = 9$  或  $1$ ,

又因为  $|MF_2| \geq c - a = 2$ , 所以  $|MF_2| = 9$ ,

**易错点**

故 A 错误;

对于 B, 假设存在直线  $l$  使点  $P(1, \sqrt{2})$  为线段  $AB$  的中点, 连接  $OP$  (图略), 已知

$k_{OP} = \sqrt{2}$ , 又  $k_{OP} \times k_{AB} = \frac{b^2}{a^2} = 3$ , 所以

以  $k_{AB} = \frac{3}{\sqrt{2}}$ , 直线  $AB: y = \frac{3}{\sqrt{2}}(x-1) + \sqrt{2}$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1, \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 整理得 } 3x^2 -$$

$6x + 25 = 0$ ,  $\Delta = 6^2 - 300 < 0$ , 矛盾, 所以不

**易错点**

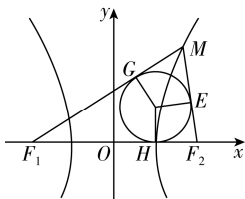
存在直线  $l$  使点  $P(1, \sqrt{2})$  为线段  $AB$  的



中点,故 B 正确;

对于 C, 由于双曲线的渐近线斜率为  $\pm\sqrt{3}$ , 若直线  $l$  与双曲线  $C$  的两支各有 1 个交点, 则直线  $l$  的斜率  $k \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ , 故 C 正确;

对于 D, 设  $\triangle MF_1F_2$  的内切圆与  $x$  轴相切于点  $H(x_0, 0)$ , 与  $MF_1$  相切于点  $G$ , 与  $MF_2$  相切于点  $E$ , 则由双曲线定义得



$$2a = ||MF_1| - |MF_2|| = ||GF_1| - |EF_2|| = ||HF_1| - |HF_2|| = |(x_0 + c) - (c - x_0)| = 2|x_0|,$$

所以  $x_0 = \pm a = \pm 2$ , 即  $\triangle MF_1F_2$  内切圆圆心的横坐标为  $\pm 2$ , 所以 D 正确. 故选 BCD.

### 易错警示

(1) 利用双曲线定义求双曲线上的点  $P$  到焦点  $F$  的距离时, 注意焦半径的范围, 即  $|PF| \geq c - a$ ;

(2) 在求解与弦中点相关的问题时, 求出中点弦所在直线方程后, 一定要将直线方程与双曲线方程联立, 化为一元二次方程, 然后判断其判别式是否大于零, 检验所求方程是否满足直线与双曲线有两个交点.

### 刷

### 提分

**1. B 考查点** ▶ 已知两曲线交点的个数求参数的取值范围、求动点的轨迹方程

**【解析】** 设  $M(x, y)$ , 由题意得  $\frac{|3x-y|}{\sqrt{10}} \cdot$

$$\frac{|3x+y|}{\sqrt{10}} = \frac{9}{10}, \text{ 所以 } 9x^2 - y^2 = \pm 9, \text{ 即 } x^2 - \frac{y^2}{9} = \pm 1,$$

所以点  $M$  的轨迹  $\Gamma$  为两个双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1, \frac{y^2}{9} - x^2 = 1$ .

双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$  的实半轴长为 1, 双曲线  $\frac{y^2}{9} - x^2 = 1$  的实半轴长为 3,

由  $y = \sqrt{a - x^2}$ , 得  $x^2 + y^2 = a (y \geq 0)$ , 表示以原点为圆心,  $\sqrt{a}$  为半径的圆的上半圆 (包含  $x$  轴上的点),

若曲线  $\Gamma$  与半圆  $x^2 + y^2 = a (y \geq 0)$  有四个交点, 则  $\sqrt{a} > 3$ , 即  $a > 9$ .

故选 B.

**2. A 突破点** ▶ 双曲线的离心率

**【解析】** 因为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0,$



$b > 0$ ) 的渐近线方程为  $y = \pm \frac{b}{a}x$ , 焦点

$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ ,

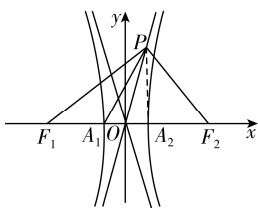
所以由双曲线的对称性不妨设  $P(x_0,$

$\frac{b}{a}x_0)$  ( $x_0 > 0$ ), 因为  $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$ , 所以

$PF_1 \perp PF_2$ , 所以  $k_{PF_1} \cdot k_{PF_2} = -1$ , 所以

$$\frac{\frac{b}{a}x_0 \cdot \frac{b}{a}x_0}{(x_0+c) \cdot (x_0-c)} = -1, \text{ 所以 } \frac{b^2}{a^2}x_0^2 = c^2 - x_0^2,$$

$$\frac{c^2}{a^2}x_0^2 = c^2, x_0 = a, \text{ 连接 } PA_2,$$



所以  $PA_2 \perp F_1F_2$ , 又  $3\angle A_1PA_2 = \frac{\pi}{2}$ , 所以

$$\angle PA_1A_2 = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \frac{|PA_2|}{|A_1A_2|} = \frac{b}{2a} = \tan \frac{\pi}{3} =$$

$\sqrt{3}$ , 所以  $b = 2\sqrt{3}a$ , 两边平方得  $b^2 = 12a^2$ ,

所以  $c^2 - a^2 = 12a^2$ , 所以  $c^2 = 13a^2$ , 所以

$\frac{c}{a} = \sqrt{13}$ , 所以双曲线  $C$  的离心率  $e =$

$\sqrt{13}$ . 故选 A.

### 快解

由双曲线的对称性不妨设

$P(x_0, \frac{b}{a}x_0)$  ( $x_0 > 0$ ), 因为  $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$ ,

所以  $PF_1 \perp PF_2$ , 所以点  $P$  是以  $F_1F_2$  为直径的圆与双曲线的渐近线的交点, 所以

$P(a, b)$ , 即  $PA_2 \perp x$  轴, 因为  $\angle F_1PF_2 =$

$3\angle A_1PA_2 = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\angle PA_1A_2 = \frac{\pi}{3}$ , 以下同上.

### 3. B 突破点 ▶ 利用双曲线定义求轨迹方程

【解析】由题意知, 圆  $O$  的半径  $r = 2$ , 延长  $BN$  交直线  $AM$  于点  $C$ , 连接  $ON$  (图略),

因为  $\angle AMN = \angle BMN$ , 且  $MN \perp BN$ , 所以  $|MB| = |MC|$ , 且  $N$  为  $BC$  的中点, 所以

$$ON \parallel AC, \text{ 且 } |ON| = \frac{1}{2}|AC|,$$

因此  $||MA| - |MB|| = ||MA| - |MC|| =$

$|AC| = 2|ON| = 4 < |AB|$ , 所以点  $M$  在以

$A, B$  为焦点的双曲线  $\Omega$  上, 设  $\Omega$  的方程

为  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ), 可知  $2a = 4$ , 所

以  $a = 2$ , 又  $c = 3$ , 所以  $b^2 = c^2 - a^2 = 5$ , 所以

$\Omega$  的方程为  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ , 即  $|x| \geq 2$ , 又点

$M$  是圆  $O$  外一点, 所以  $|x| > 2$ , 即  $y \neq 0$ ,



故所求轨迹方程为  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 (y \neq 0)$ . 故选 B.

**4. C 突破点** ▶ 已知方程求双曲线的渐近线方程、根据双曲线的渐近线求标准方程

**【解析】**由题意,  $|MF| = |FA| = a + c$ ,

设  $N$  为双曲线的左焦点, 连接  $MN$ , 由双曲线的定义得  $|MN| - |MF| = 2a$ , 故

$$|MN| = 3a + c, \text{ 因为 } \cos \angle MFN = \frac{(a+c)^2 + 4c^2 - (3a+c)^2}{2 \cdot 2c \cdot (a+c)} = \frac{1}{2},$$

所以  $c^2 - 3ac - 4a^2 = 0$ , 即  $(c - 4a)(c + a) = 0$ ,

则  $c = 4a$ , 进而可得  $b = \sqrt{15}a$ ,

故双曲线  $C_1$  的渐近线方程为  $y = \pm \sqrt{15}x$ ,

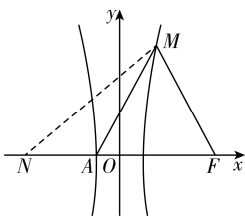
因此  $C_2$  的渐近线方程为  $y = \pm \sqrt{15}x$ ,

即  $m = \sqrt{15}n$ ,

由焦距为  $2\sqrt{m^2 + n^2} = 16$ , 解得  $m = 2\sqrt{15}$ ,

$n = 2$ , 故  $C_2$  的标准方程为  $\frac{y^2}{60} - \frac{x^2}{4} = 1$ . 故

选 C.



**5. C 突破点** ▶ 双曲线焦点三角形的面积

**【解析】**设  $P(x_0, y_0)$ , 则  $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ , 即

$b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ , 双曲线  $C$  的渐近线方程

为  $bx \pm ay = 0$ , 则  $|PD| \cdot |PE| = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot$

$$\frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2|}{c^2} = \frac{a^2 b^2}{c^2},$$

又  $||PF_1| - |PF_2|| = 2a$ , 所以  $|PF_1|^2 -$

$2|PF_1| \cdot |PF_2| + |PF_2|^2 = 4a^2$ , 在  $\triangle F_1PF_2$

中, 由余弦定理可得  $(2c)^2 = |PF_1|^2 -$

$2|PF_1| \cdot |PF_2| \cos 120^\circ + |PF_2|^2 = 4a^2 +$

$3|PF_1| \cdot |PF_2|$ , 于是  $|PF_1| \cdot |PF_2| = \frac{4b^2}{3}$ ,

$$S_{\triangle PF_1F_2} = \frac{1}{2} |PF_1| \cdot |PF_2| \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} b^2,$$

而  $\sqrt{3} |PD| \cdot |PE| = S_{\triangle PF_1F_2}$ , 因此  $\sqrt{3} \times \frac{a^2 b^2}{c^2} =$

$\frac{\sqrt{3}}{3} b^2$ , 化简得  $c^2 = 3a^2$ , 即  $a^2 + b^2 = 3a^2$ , 所

以  $\frac{b^2}{a^2} = 2$ , 即  $\frac{b}{a} = \sqrt{2}$ , 所以双曲线  $C$  的两

条渐近线的斜率为  $\pm\sqrt{2}$ . 故选 C.



## 快解

由双曲线的几何性质知,  $|PD| \cdot$

$$|PE| = \frac{a^2 b^2}{c^2}, S_{\triangle F_1 P F_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\angle F_1 P F_2}{2}} = \frac{b^2}{\sqrt{3}}$$

(速记: 焦点三角形  $F_1 P F_2$  的面积

$$S_{\triangle F_1 P F_2} = \frac{b^2}{\tan \frac{\angle F_1 P F_2}{2}}), \text{ 所以由 } \sqrt{3} |PD| \cdot$$

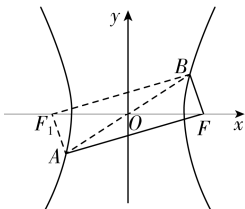
$$|PE| = S_{\triangle P F_1 F_2} \text{ 得 } \sqrt{3} \cdot \frac{a^2 b^2}{c^2} = \frac{b^2}{\sqrt{3}}, \text{ 所以 } c^2 =$$

$$3a^2, \text{ 即 } a^2 + b^2 = 3a^2, \text{ 所以 } \frac{b^2}{a^2} = 2, \text{ 即 } \frac{b}{a} =$$

$\sqrt{2}$ , 所以双曲线  $C$  的两条渐近线的斜率为  $\pm\sqrt{2}$ .

### 6. A 突破点 ▶ 求双曲线的离心率的取值范围

【解析】如图所示,



设双曲线的左焦点为  $F_1$ , 连接  $F_1 A, F_1 B, AB$ , 由双曲线的对称性可知, 四边形  $A F B F_1$  为平行四边形, 又  $\overrightarrow{F_1 A} \cdot \overrightarrow{F_1 B} = 0$ , 所以  $F A \perp F B$ , 所以平行四边形  $A F B F_1$  为矩形, 故  $|A B| = |F F_1| = 2c$ , 设  $|A F_1| = n$ ,  $|A F| = m$ , 则  $|B F| = n$ , 在  $Rt \triangle A B F$  中,  $m - n = 2a, m^2 + n^2 = 4c^2$ , 所以  $2mn = 4c^2 - 4a^2 = 4b^2$ , 则  $mn = 2b^2$ ,

$$\text{所以 } \frac{m}{n} + \frac{n}{m} = \frac{m^2 + n^2}{mn} = \frac{2c^2}{b^2}, \text{ 令 } \frac{m}{n} = t, \text{ 得 } t +$$

$$\frac{1}{t} = \frac{2c^2}{b^2}, \text{ 又由 } |F B| < |F A| \leq 3|F B| \text{ 得}$$

$$\frac{m}{n} = t \in (1, 3],$$

因为对勾函数  $y = t + \frac{1}{t}$  在  $(1, 3]$  上单调

递增, 所以  $\frac{2c^2}{b^2} = t + \frac{1}{t} \in \left(2, \frac{10}{3}\right]$ , 所以

$$\frac{c^2}{b^2} \in \left(1, \frac{5}{3}\right], \text{ 即 } \frac{a^2}{b^2} + 1 = \frac{a^2 + b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} \in$$

$$\left(1, \frac{5}{3}\right], \text{ 则 } \frac{a^2}{b^2} \in \left(0, \frac{2}{3}\right], \text{ 故 } \frac{b^2}{a^2} \in$$

$$\left[\frac{3}{2}, +\infty\right), \text{ 所以 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \in$$

$$\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, +\infty\right), \text{ 所以双曲线 } C \text{ 的离心率的}$$

取值范围是  $\left[\frac{\sqrt{10}}{2}, +\infty\right)$ , 故选 A.

### 7. ABD 突破点 ▶ 双曲线性质的综合应用

【解析】设直线  $P F_2$  的倾斜角为  $\theta$ , 且  $\theta$





为锐角, 则  $\tan \theta = e = \frac{c}{a} = \frac{|PF_1|}{|PF_2|}$ , 故

$$|PF_1| = e|PF_2|,$$

由双曲线定义可得  $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ , 则

$$e|PF_2| - |PF_2| = 2a, \text{ 故 } |PF_2| = \frac{2a}{e-1}, \text{ 故 B}$$

正确;

$$\text{又 } |PF_2| = |F_1F_2| \cos \theta = 2c \cos \theta, |PF_1| =$$

$$|F_1F_2| \sin \theta = 2c \sin \theta, \text{ 所以 } |PF_1| -$$

$$|PF_2| = 2c \sin \theta - 2c \cos \theta = 2a, \text{ 故 } \sin \theta -$$

$$\cos \theta = \frac{a}{c} = \frac{1}{e}, \text{ 平方并化简可得 } 1 - \frac{1}{e^2} =$$

$$2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\text{由 } 1 - \frac{1}{e^2} = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} =$$

$$\frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{2e}{e^2 + 1}, \text{ 化简得 } e^4 - 2e^3 - 1 = 0,$$

$$\text{记 } f(e) = e^4 - 2e^3 - 1, \text{ 则 } f'(e) = 4e^3 - 6e^2 =$$

$$2e^2(2e - 3), \text{ 当 } 1 < e < \frac{3}{2} \text{ 时, } f'(e) < 0, f(e)$$

$$\text{单调递减, 当 } e > \frac{3}{2} \text{ 时, } f'(e) > 0, f(e) \text{ 单调}$$

$$\text{递增, 又 } f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{81}{16} - \frac{27}{4} - 1 < 0, f(2) =$$

$$-1 < 0 \text{ 且 } f(3) = 81 - 2 \times 27 - 1 > 0, f(1) = 1 -$$

$$2 - 1 < 0, \text{ 所以 } 2 < e < 3, \text{ 故 C 错误, A 正确;}$$

双曲线的渐近线方程为  $bx \pm ay = 0$ , 圆心

$$(0, 2) \text{ 到渐近线的距离为 } \frac{|2a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$\frac{2a}{c} = \frac{2}{e},$$

$$\text{由于 } 2 < e < 3, \text{ 故 } \frac{2}{e} < 1 = r, \text{ 因此 } C_2 \text{ 的渐近}$$

线与  $C_1$  相交, 且与  $C_1$  有 4 个公共点, 故

D 正确. 故选 ABD.

## 8. $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ 突破点 ▶ 点差法解决双曲

线中的中点弦问题

【解析】由题意得, 点  $(2a, a)$  首先满足

$$\frac{(2a)^2}{a^2} - \frac{a^2}{b^2} \leq 1, \text{ 得 } \frac{b^2}{a^2} \leq \frac{1}{3}. \text{ 假设存在以}$$

点  $(2a, a)$  为中点的弦, 设弦与双曲线交

$$\text{于点 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } \frac{x_1 + x_2}{2} = 2a,$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = a, \text{ 由点 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \text{ 在双}$$

$$\text{曲线上得 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases} \text{ 两式作差得}$$

$$\frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} = \frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2}, \text{ 即}$$

$$\frac{x_1 + x_2}{a^2} = \frac{y_1 + y_2}{b^2} \cdot k_{AB}, \text{ 即 } \frac{4a}{a^2} = \frac{2a}{b^2} \cdot k_{AB}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } k_{AB} = \frac{2b^2}{a^2}. \text{ 因为不存在该中点弦, 所以}$$



直线  $AB$  与双曲线至多有一个交点, 则

$$\frac{2b^2}{a^2} \geq \frac{b}{a},$$

所以  $\frac{1}{4} \leq \frac{b^2}{a^2} \leq \frac{1}{3}$ , 因为  $e = \frac{c}{a} =$

$$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}, \text{ 所以 } \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \leq e \leq \sqrt{1 + \frac{1}{3}},$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{5}}{2} \leq e \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

### 9. $\pm \frac{\sqrt{15}}{3}$

**突破点** ▶ 利用定义解决有关双曲线中焦点三角形的问题

**【解析】** 因为实轴长为 4 的双曲线  $C: \frac{y^2}{a^2} -$

$\frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的渐近线方程为  $x \pm$

$$\sqrt{3}y = 0, \text{ 则 } \begin{cases} 2a = 4, \\ \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = 2\sqrt{3}, \end{cases} \text{ 所以}$$

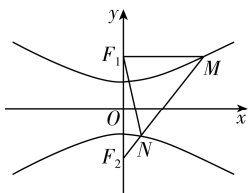
双曲线  $C$  的方程为  $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1, c =$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 12} = 4,$$

如图所示, 设  $|F_1M| = |F_1N| = m (m > 0)$ ,

由双曲线的定义可得  $|F_1N| - |F_2N| = m -$

$$|F_2N| = 2a,$$



则  $|F_2N| = m - 2a = m - 4, |F_2M| - |F_1M| =$

$|F_2M| - m = 2a$ , 所以  $|F_2M| = m + 2a = m +$

$4$ , 所以  $|MN| = |F_2M| - |F_2N| = m + 4 -$

$(m - 4) = 8$ , 又  $\cos \angle F_1F_2N =$

$\cos \angle F_1F_2M$ ,

$$\text{即 } \frac{|F_1F_2|^2 + |F_2N|^2 - |F_1N|^2}{2|F_1F_2| \cdot |F_2N|} =$$

$$\frac{|F_1F_2|^2 + |F_2M|^2 - |F_1M|^2}{2|F_1F_2| \cdot |F_2M|},$$

$$\text{所以 } \frac{64 + (m-4)^2 - m^2}{2 \times 8 \times (m-4)} = \frac{64 + (m+4)^2 - m^2}{2 \times 8 \times (m+4)},$$

解得  $m = 2\sqrt{10}$ , 所以  $\cos \angle F_1F_2M =$

$$\frac{64 + (m-4)^2 - m^2}{2 \times 8 \times (m-4)} = \frac{80 - 8m}{16(m-4)} = \frac{10-m}{2(m-4)} =$$

$$\frac{10 - 2\sqrt{10}}{2 \times (2\sqrt{10} - 4)} = \frac{\sqrt{10}(\sqrt{10} - 2)}{4 \times (\sqrt{10} - 2)} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

所以  $\sin \angle F_1F_2M = \sqrt{1 - \cos^2 \angle F_1F_2M} =$

$\frac{\sqrt{6}}{4}$ . 当直线  $l$  的倾斜角  $\theta$  为锐角时, 则

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \angle F_1F_2M,$$

$$\text{所以 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \angle F_1F_2M\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \angle F_1F_2M\right)} =$$



$$\frac{\cos \angle F_1 F_2 M}{\sin \angle F_1 F_2 M} = \frac{\sqrt{10}}{4} \times \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{15}}{3}, \text{此时, 直}$$

线  $l$  的斜率为  $\frac{\sqrt{15}}{3}$ ; 当直线  $l$  的倾斜角为

钝角时, 由对称性可知, 直线  $l$  的斜率为  $-\frac{\sqrt{15}}{3}$ . 综上所述, 直线  $l$  的斜率为

$$\pm \frac{\sqrt{15}}{3}.$$

#### 10. 突破点 ▶ 利用双曲线定义求方程、双曲线中的定值问题

(1) 【解】设圆  $C_1, C_2$  的交点为  $M$ , 则  $|MC_1| = r_1, |MC_2| = r_2$ ,

因为  $|r_1 - r_2| = 2\sqrt{3}$ , 所以  $||MC_1| - |MC_2|| = 2\sqrt{3} < |C_1 C_2| = 4$ ,

故点  $M$  的轨迹(曲线  $T$ )是以  $C_1, C_2$  为焦点的双曲线, 设双曲线  $T$  的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0),$$

则  $2a = 2\sqrt{3}, a^2 + b^2 = 4$ , 即  $a = \sqrt{3}, b = 1$ ,

故曲线  $T$  的方程为  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ .

(2) 【证明】(i) 要证  $|P_1 Q_1| = |P_2 Q_2|$ , 只要证线段  $P_1 P_2$  的中点与线段  $Q_1 Q_2$  的中点重合.

设  $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ , 其中  $x_1 < 0 < x_2$ ,

由题知, 直线  $l$  的斜率存在, 设  $l$  的方程为  $y = kx + m$ .

因为直线  $l$  与圆  $x^2 + y^2 = 3$  相切,

所以  $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = \sqrt{3}$ , 即  $m^2 = 3(1+k^2)$ .

$$\text{联立} \begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1, \end{cases} \text{消去 } y \text{ 并整理得 } (3k^2 -$$

$$1)x^2 + 6kmx + (3m^2 + 3) = 0,$$

$$\text{所以} \begin{cases} 3k^2 - 1 \neq 0, \\ \Delta = 36m^2 k^2 - 4(3k^2 - 1)(3m^2 + 3) = \\ 12(m^2 - 3k^2 + 1) = 48 > 0, \\ x_1 + x_2 = -\frac{6mk}{3k^2 - 1}, \\ x_1 x_2 = \frac{3m^2 + 3}{3k^2 - 1} < 0, \end{cases}$$

则线段  $P_1 P_2$  的中点的横坐标为

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3km}{1 - 3k^2}.$$

又直线  $y = kx + m$  与直线  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$  和  $y =$

$\frac{\sqrt{3}}{3}x$  交点的横坐标分别为  $-\frac{\sqrt{3}m}{1+\sqrt{3}k}$

和  $\frac{\sqrt{3}m}{1-\sqrt{3}k}$ ,

则线段  $Q_1 Q_2$  的中点的横坐标为



$$-\frac{\sqrt{3}m}{1+\sqrt{3}k} + \frac{\sqrt{3}m}{1-\sqrt{3}k} = \frac{3km}{1-3k^2},$$

所以  $|P_1Q_1| = |P_2Q_2|$ .

(ii) 由条件  $x_1 < 0 < x_2, x_1x_2 = \frac{3m^2+3}{3k^2-1} < 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{得 } 3k^2-1 < 0, \text{ 所以 } x_2-x_1 &= \sqrt{(x_1-x_2)^2} = \\ \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} &= \frac{\sqrt{12(m^2-3k^2+1)}}{|3k^2-1|} = \\ \frac{4\sqrt{3}}{1-3k^2}, \end{aligned}$$

由题意知,  $A(-\sqrt{3}, 0), B(\sqrt{3}, 0)$ ,

$$\begin{aligned} \text{所以 } k_1 \cdot k_2 &= \frac{y_1}{x_1+\sqrt{3}} \cdot \frac{y_2}{x_2-\sqrt{3}} \\ &= \frac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{(x_1+\sqrt{3})(x_2-\sqrt{3})} \\ &= \frac{k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2+\sqrt{3}(x_2-x_1)-3} \\ &= \frac{\frac{k^2(3m^2+3)}{3k^2-1}-\frac{6m^2k^2}{3k^2-1}+m^2}{\frac{3m^2+3}{3k^2-1}+\frac{12}{1-3k^2}-3} \\ &= \frac{3m^2k^2+3k^2-6m^2k^2+3m^2k^2-m^2}{3m^2+3-12-9k^2+3} \\ &= \frac{3k^2-m^2}{3m^2-6-9k^2} = \frac{-3}{3} = -1, \end{aligned}$$

即  $k_1k_2$  为定值  $-1$ .

#### 11. 突破点 ▶ 求双曲线中面积的最值问题

【解】(1) 设  $P(x_0, y_0)$ , 则  $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ , 即

$$y_0^2 = \frac{b^2}{a^2}x_0^2 - b^2,$$

过点  $P$  作  $C$  的两条渐近线的平行线的

方程分别为  $y-y_0 = \frac{b}{a}(x-x_0), y-y_0 = -\frac{b}{a}(x-x_0)$ ,

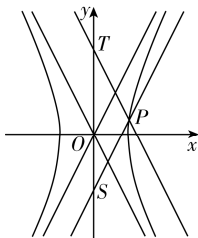
则不妨取  $S(0, y_0 - \frac{b}{a}x_0), T(0, y_0 + \frac{b}{a}x_0)$ ,

$$\begin{aligned} \text{于是 } |OS| \cdot |OT| &= \left| y_0 - \frac{b}{a}x_0 \right| \cdot \left| y_0 + \frac{b}{a}x_0 \right| \\ &= \left| y_0^2 - \frac{b^2}{a^2}x_0^2 \right| = b^2 = 4, \end{aligned}$$

又  $c = \sqrt{5}a$ , 且  $a^2 + b^2 = c^2$ ,

可得  $a^2 = 1, c^2 = 5$ ,

所以双曲线  $C$  的标准方程为  $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ .





(2) 由题易知直线  $l_1$  的斜率存在且不为 0, 设直线  $l_1: x = my + \sqrt{5}$  ( $m \neq 0$ ),  
 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), Q(x_3, y_3)$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + \sqrt{5}, \\ x^2 - \frac{y^2}{4} = 1, \end{cases} \text{ 可得 } (4m^2 - 1)y^2 +$$

$$8\sqrt{5}my + 16 = 0, \text{①}$$

$$\text{则 } \Delta = 320m^2 - 64(4m^2 - 1) = 64m^2 + 64 > 0, 4m^2 - 1 \neq 0,$$

$$y_1 + y_2 = \frac{-8\sqrt{5}m}{4m^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{16}{4m^2 - 1},$$

由于直线  $l_1$  与双曲线的左、右两支相交, 所以方程①有两个同号的实根,

$$\text{故 } y_1 y_2 = \frac{16}{4m^2 - 1} > 0, \text{ 则 } 4m^2 - 1 > 0,$$

$$\text{由 } O, Q, M \text{ 三点共线得 } \frac{y_M}{x_M} = \frac{y_3}{x_3} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} =$$

$$\frac{y_1 + y_2}{m(y_1 + y_2) + 2\sqrt{5}} = \frac{\frac{-8\sqrt{5}m}{4m^2 - 1}}{\frac{-8\sqrt{5}m^2}{4m^2 - 1} + 2\sqrt{5}} = 4m, \text{②}$$

$$\text{由 } MF \perp l_1 \text{ 得 } \frac{y_M - 0}{x_M - \sqrt{5}} \cdot \frac{1}{m} = -1, \text{③}$$

$$\text{由②③解得 } M\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{4m}{\sqrt{5}}\right).$$

由  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$  可知, 四边形  $MANB$  是平行四边形,

$$\text{所以 } S_{\text{四边形}MANB} = 2S_{\triangle MAB},$$

点  $M$  到直线  $AB$  的距离  $d =$

$$\frac{\left| \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{4m^2}{\sqrt{5}} - \sqrt{5} \right|}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \sqrt{1+m^2},$$

$$|AB| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - y_2|$$

$$= \sqrt{1+m^2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$$

$$= \sqrt{1+m^2} \times \frac{8\sqrt{1+m^2}}{|4m^2 - 1|} = \frac{8(1+m^2)}{|4m^2 - 1|},$$

$$S_{\text{四边形}MANB} = \frac{4}{\sqrt{5}} \sqrt{1+m^2} \times \frac{8(1+m^2)}{|4m^2 - 1|} = \frac{32}{\sqrt{5}} \cdot$$

$$\sqrt{\frac{(1+m^2)^3}{(4m^2 - 1)^2}},$$

$$\text{令 } t = 4m^2 - 1, \text{ 得 } m^2 = \frac{t+1}{4}, t > 0, \text{ 则}$$

$$S_{\text{四边形}MANB} = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{(t+5)^3}{t^2}},$$

$$\text{令 } f(t) = \frac{(t+5)^3}{t^2},$$

$$\text{则 } f'(t) = \frac{3(t+5)^2 \cdot t^2 - 2t \cdot (t+5)^3}{t^4} =$$

$$\frac{(t+5)^2(t-10)}{t^3},$$

$$\text{令 } f'(t) = 0, \text{ 则 } t = 10,$$

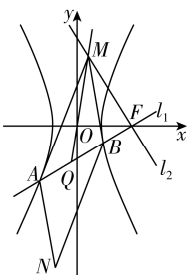


所以  $f(t)$  在  $(0, 10)$  上单调递减, 在  $(10, +\infty)$  上单调递增,

$$\text{故 } f(t)_{\min} = f(10) = \frac{135}{4},$$

$$\text{所以 } S_{\text{四边形}MANB} \geq \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{3\sqrt{15}}{2} = 6\sqrt{3}, \text{ 当且}$$

仅当  $t=10$ , 即  $m = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$  时取等号.



### 第3节 抛物线

刷

基础

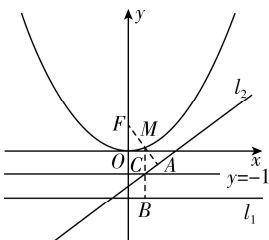
**1. B** **考查点** 抛物线的定义及方程、抛物线的焦半径公式

【解析】由抛物线的定义, 可知  $|MF| = x_0 + \frac{p}{2}$ , 又  $2|OF| = p$ ,  $|MF| = 2|OF|$ , 所以

以  $x_0 + \frac{p}{2} = p$ , 即  $x_0 = \frac{p}{2}$ , 由点  $M(x_0, 4)$  在  $C$  上, 得  $16 = 2px_0$ , 结合  $p > 0$ , 解得  $p = 4$ , 所以  $C$  的方程为  $y^2 = 8x$ . 故选 B.

**2. 3** **考查点** 抛物线的定义

【解析】由题知抛物线焦点为  $F(0, 1)$ , 准线方程为  $y = -1$ , 过点  $M$  作  $l_1$  和准线的垂线, 垂足分别为  $B, C$ , 过点  $M$  作  $l_2$  的垂线, 垂足为  $A$ , 则  $M$  到  $l_1$  与  $l_2$  的距离之和为  $|MA| + |MB|$ . 连接  $MF$ , 由抛物线定义知  $|MF| = |MC|$ , 又  $|MB| = |MF| + 1$ , 所以  $|MA| + |MB| = |MA| + |MF| + 1 \geq |FA| + 1$ . 当且仅当  $F, M, A$  三点共线且  $M$  在  $F, A$  之间时,  $|MA| + |MB|$  最短, 点  $F$  到直线  $3x - 4y - 6 = 0$  的距离为  $\frac{|-4-6|}{5} = 2$ , 所以点  $M$  到  $l_1$  与  $l_2$  的距离之和的最小值为 3.

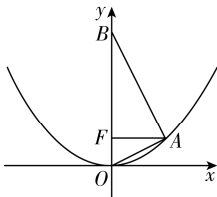


**3. B** **考查点** 抛物线的几何性质

【解析】如图, 由  $E: x^2 = 2py (p > 0)$  可得点  $F(0, \frac{p}{2})$ , 因为  $AF$  垂直于  $y$  轴, 所以可



取  $A\left(p, \frac{p}{2}\right)$  (提示:  $AF$  为抛物线的通径的一半, 通径长为  $2p$ ),



又  $\angle BAO = 90^\circ$ , 所以易得  $\triangle ABF \sim \triangle OAF$ , 则  $\frac{|AF|}{|OF|} = \frac{|BF|}{|AF|}$ , 即  $|AF|^2 = |BF| \cdot |OF|$ , 即  $p^2 = 4\sqrt{3} \times \frac{p}{2}$ , 因为  $p > 0$ , 所以  $p = 2\sqrt{3}$ . 故选 B.

### 一题多解

由  $E: x^2 = 2py$  ( $p > 0$ ) 可得

点  $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$ , 因为  $AF$  垂直于  $y$  轴, 所以

可取  $A\left(p, \frac{p}{2}\right)$ , 因为  $|FB| = 4\sqrt{3}$ , 所以

$B\left(0, 4\sqrt{3} + \frac{p}{2}\right)$ , 因为  $\angle BAO = 90^\circ$ , 所

以  $k_{AB} \cdot k_{AO} = -1$ , 即  $\frac{4\sqrt{3} + \frac{p}{2} - \frac{p}{2}}{-p} \cdot \frac{\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}} =$

$-1$ , 解得  $p = 2\sqrt{3}$ . 故选 B.

### 4. B 考查点 ▶ 抛物线的定义及其几何性质

【解析】由已知, 点  $N(\sqrt{6}, y_0)$  在抛物线上, 则  $6 = 2py_0$ , 其中  $y_0 > \frac{p}{2}$ .

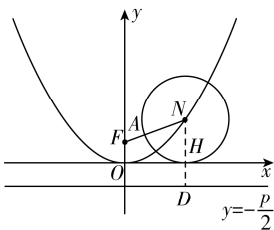
如图所示, 过点  $N$  作直线  $y = -\frac{p}{2}$  的垂线, 垂足为  $D$ , 且与  $x$  轴交于点  $H$ , 由抛物线定义知,  $|NF| = |ND|$ , 又  $|NA| = |NH|$ ,

所以  $|AF| = |DH| = \frac{p}{2}$ , 因为  $\vec{NA} = 2\vec{AF}$ , 所

以  $|HN| = 2|DH| = p$ , 故  $6 = 2p^2$ , 即  $p =$

$\sqrt{3}$ , 则抛物线  $C$  的准线方程为  $y = -\frac{p}{2} =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 故选 B.

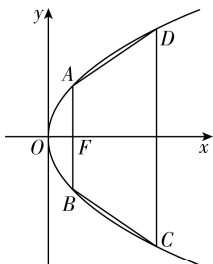


### 5. $\frac{3}{4}$ 考查点 ▶ 抛物线的对称性

【解析】如图所示, 四边形  $ABCD$  为等腰梯形, 根据抛物线的对称性可知,  $AB \perp x$



轴,  $CD \perp x$  轴, 不妨令  $y_A > 0, y_D > 0$ ,



$|AB| = 1, y_A = \frac{1}{2}$ , 抛物线的焦点

$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , 所以  $A\left(\frac{p}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , 把点  $A$  的坐

标代入  $y^2 = 2px (p > 0)$  得  $\frac{1}{4} = p^2$ , 则  $p = \frac{1}{2}$ ,

$A\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ , 所以抛物线方程为  $y^2 = x$ ,

$|CD| = 2, y_D = 1$ , 代入  $y^2 = x$  得  $x_D = 1$ , 所以等

腰梯形  $ABCD$  的高为  $x_D - x_A = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

#### 6. B 考查点 ▶ 抛物线的焦点弦

【解析】由题知  $F\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ , 易知直线  $AB$

的斜率不为 0, 设直线  $AB: x = my + \frac{1}{4}$ , 由

$$\begin{cases} x = my + \frac{1}{4} \\ y^2 = x \end{cases} \text{ 得 } y^2 - my - \frac{1}{4} = 0, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 y_2 = -\frac{1}{4} \text{ ①. 由 } \overrightarrow{AF} =$$

$3\overrightarrow{FB}$  可知  $y_1 = -3y_2$  ②, 由 ①② 可得,  $y_2^2 =$

$\frac{1}{12}$ , 则  $x_2 = y_2^2 = \frac{1}{12}$ , 所以  $B\left(\frac{1}{12}, \pm\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ ,

所以  $k_{BF} = \pm \frac{\frac{1}{2\sqrt{3}}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{12}} = \pm\sqrt{3}$ . 故选 B.

#### 快解

当直线  $l$  的斜率为正值时, 过点  $A, B$  分别作  $AM, BN$  垂直于准线, 垂足分别为  $M, N$ , 过点  $B$  作  $BK \perp AM$ , 垂足为  $K$  (图略). 设直线  $AB$  的倾斜角为  $\theta$ , 则  $\angle MAB = \theta$ , 所以  $\cos \theta = \frac{|AK|}{|AB|} = \frac{|AM| - |BN|}{|AF| + |BF|} = \frac{|AF| - |BF|}{|AF| + |BF|} = \frac{2|BF|}{4|BF|} = \frac{1}{2}$ , 所以  $\theta = 60^\circ$ , 所以由对称性知直线  $l$  的斜率为  $\pm\sqrt{3}$ .

#### 7. B 考查点 ▶ 与抛物线的焦点弦有关的几何性质

【解析】抛物线  $y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为

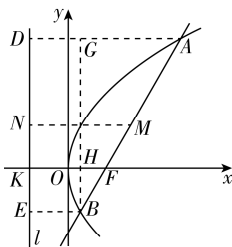
$F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , 准线  $l: x = -\frac{p}{2}$ , 设准线交  $x$  轴

于点  $K$ , 由抛物线的对称性, 不妨令点  $A$





在第一象限,过  $A, B$  分别作  $AD \perp l, BE \perp l$ , 垂足分别为  $D, E$ , 过点  $B$  作  $BG \perp AD$  于点  $G$ , 交  $FK$  于  $H$ , 令  $|BE| = |BF| = n$ ,  $|AD| = |AF| = 3n$ , 则  $|AG| = 2n$ ,  $|FH| = p - n$ , 由  $FH \parallel AG$ , 得  $\frac{|FH|}{|AG|} = \frac{|BF|}{|AB|}$ , 即  $\frac{p-n}{2n} = \frac{n}{\frac{n}{4n}}$ , 则  $p = \frac{3n}{2}$ , 设线段  $AB$  的中点为  $M$ , 过点  $M$  作  $MN \perp l$  于点  $N$ , 则  $|MN| = \frac{|AD| + |BE|}{2} = 2n = \frac{4p}{3}$ , 由线段  $AB$  的中点到  $y$  轴的距离为  $\frac{5}{2}$ , 得  $|MN| = \frac{p}{2} + \frac{5}{2}$ , 因此  $\frac{4p}{3} = \frac{p}{2} + \frac{5}{2}$ , 所以  $p = 3$ . 故选 B.



## 一题多解

抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , 易知直线  $AB$  的斜率不为 0, 设直线  $AB: x = my + \frac{p}{2}$ , 由  $\begin{cases} x = my + \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases}$  得  $y^2 - 2mpy - p^2 = 0$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $\Delta = 4p^2m^2 + 4p^2 > 0$ ,  $y_1 + y_2 = 2pm$ ,  $y_1y_2 = -p^2$ , 又  $|AF| = 3|BF|$ , 由抛物线的对称性, 不妨令点  $A$  在第一象限, 所以  $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{FB}$ , 所以  $y_1 = -3y_2$ , 由  $\begin{cases} y_1 + y_2 = 2pm \\ y_1y_2 = -p^2 \\ y_1 = -3y_2 \end{cases}$  消去  $y_1, y_2$  得  $m^2 = \frac{1}{3}$ . 由线段  $AB$  的中点到  $y$  轴的距离为  $\frac{5}{2}$  得  $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{2}$ , 所以  $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + p = 2m^2p + p = \frac{5}{3}p = 5$ , 所以  $p = 3$ . 故选 B.

## 知识归纳

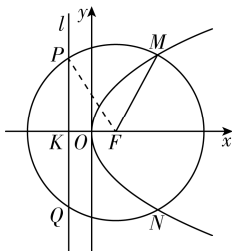
过抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点  $F$  的直线与抛物线交于  $A, B$  两点,  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}$ ,  $y_1y_2 = -p^2$ .

8.  $\sqrt{3}$  考查点 ▶ 抛物线的焦半径

【解析】如图, 由  $C: y^2 = 4x$  可知,  $F(1, 0)$ ,



$l: x = -1$ , 设准线  $l$  与  $x$  轴交于点  $K$ , 连接  $PF$ ,



因为以  $F$  为圆心的圆与准线  $l$  交于  $P, Q$

两点, 则  $|PK| = \frac{1}{2}|PQ| = 2\sqrt{3}$ , 又  $|FK| =$

$p = 2$ , 所以  $|PF| = \sqrt{|FK|^2 + |PK|^2} = 4$ , 设

点  $M(x_0, y_0)$ , 则  $|MF| = |PF| = x_0 + \frac{p}{2} =$

$x_0 + 1 = 4$ , 解得  $x_0 = 3$ , 所以  $y_0 = \pm 2\sqrt{3}$ , 故

$M(3, \pm 2\sqrt{3})$ , 于是  $|k| = \left| \frac{\pm 2\sqrt{3} - 0}{3 - 1} \right| = \sqrt{3}$ .

### 9. $2\sqrt{7}$ 考查点 ▶ 抛物线的定义及其几何性质、抛物线的焦点弦

【解析】由题知,  $F(1, 0)$ , 直线  $l$  的方程为

$y = x - 1$ , 由  $\begin{cases} y = x - 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$  得  $x^2 - 6x + 1 = 0$ , 设

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $\Delta = 32 > 0$ ,  $x_1 +$

$x_2 = 6$ , 所以线段  $AB$  的中点  $P$  的横坐标

为 3, 所以点  $P$  到  $y$  轴的距离  $d = 3$ , 又

$|AB| = x_1 + x_2 + p = 6 + 2 = 8$ , 所以以  $AB$  为直

径的圆的半径  $R = 4$ , 则被  $y$  轴截得的弦

长为  $2\sqrt{R^2 - d^2} = 2\sqrt{4^2 - 3^2} = 2\sqrt{7}$ .

#### 一题多解

$$|AB| = \frac{2p}{\sin^2 45^\circ} = 8, \text{ 过点 } A,$$

$B$  分别作抛物线  $C$  的准线的垂线, 垂足分别为  $A', B'$  (图略), 设线段  $AB$  的中点

为  $P$ , 则  $x_P + 1 = \frac{|AA'| + |BB'|}{2} = \frac{|AB|}{2} = 4$ , 所

以  $x_P = 3$ , 又以  $AB$  为直径的圆的半径  $R = 4$ ,

所以被  $y$  轴截得的弦长为  $2\sqrt{R^2 - x_P^2} =$

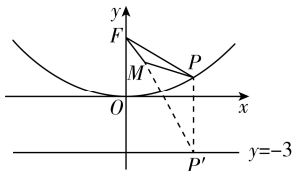
$2\sqrt{4^2 - 3^2} = 2\sqrt{7}$ .

### 10. C 考查点 ▶ 抛物线的定义、抛物线上的点到定点和焦点距离的和的最值

【解析】由题知  $F(0, 3)$ , 准线方程为

$y = -3$ , 过点  $P$  作  $C$  的准线的垂线, 垂足

为  $P'$ , 连接  $MP'$ ,



由抛物线的定义知  $|PF| = |PP'|$ , 又

$|MF| = \sqrt{1^2 + (2-3)^2} = \sqrt{2}$ , 所以  $|PM| +$

$|PF| + |MF| = |PM| + |PP'| + \sqrt{2} \geq$

$|MP'| + \sqrt{2} \geq 5 + \sqrt{2}$ , 当且仅当  $M, P,$



$P'$  三点共线时取得最小值, 故  $\triangle PMF$  的周长的最小值是  $5+\sqrt{2}$ . 故选 C.

**11. B** **考查点** ▶ 抛物线的定义、抛物线的对称性、抛物线中的三角形面积问题

**【解析】** 由题意知  $F(1,0)$ , 直线  $AC$  的倾斜角  $\alpha=45^\circ$ , 则直线  $AC$  的方程为  $y=x-1$ , 联立  $\begin{cases} y^2=4x, \\ y=x-1, \end{cases}$  可得  $x^2-6x+1=0$ , 解得  $x=3\pm 2\sqrt{2}$ , 结合题图可取  $x_A=3+2\sqrt{2}$ ,  $x_C=3-2\sqrt{2}$ ,

故  $|AF|=x_A+1=4+2\sqrt{2}$ ,  $|CF|=x_C+1=4-2\sqrt{2}$ , 根据抛物线的对称性结合  $AC$ ,  $BD$  是过抛物线焦点  $F$  的两条互相垂直的弦, 可知  $|DF|=|AF|=4+2\sqrt{2}$ ,  $|BF|=|CF|=4-2\sqrt{2}$ , 故  $S_{\triangle AFB}=\frac{1}{2}|AF|\times|BF|=\frac{1}{2}\times(4+2\sqrt{2})\times(4-2\sqrt{2})=4$ , 故结合抛物线对称性可得“蝴蝶形图案(阴影区域)”的面积为  $2\times 4=8$ . 故选 B.

**12. A** **考查点** ▶ 抛物线中的三角形问题

**【解析】** 由抛物线的对称性, 不妨设点  $P\left(\frac{y^2}{2p}, y\right)$  ( $y>0$ ), 由题意知  $E\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$ , 根据焦半径公式得  $|PF|=\frac{y^2}{2p}+\frac{p}{2}$ ,  $|PE|=\sqrt{\left(\frac{y^2}{2p}+\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$ , 在  $\triangle EFP$  中, 由正弦定理可得  $\frac{\sin \angle EFP}{\sin \angle FEP}=\frac{|PE|}{|PF|}$

$$=\frac{\sqrt{\left(\frac{y^2}{2p}+\frac{p}{2}\right)^2+y^2}}{\frac{y^2}{2p}+\frac{p}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\left(\frac{y^2}{2p}+\frac{p}{2}\right)^2+y^2}}{\left(\frac{y^2}{2p}+\frac{p}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\left(\frac{y}{\frac{y^2}{2p}+\frac{p}{2}}\right)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{2p}{y+\frac{p^2}{y}}\right)^2},$$

$$\text{因为 } y+\frac{p^2}{y}\geq 2p, \text{ 当且仅当 } y=p, x=\frac{p}{2}$$

$$\text{时取等号, 所以 } \sqrt{1+\left(\frac{2p}{y+\frac{p^2}{y}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{1+\frac{4p^2}{\left(y+\frac{p^2}{y}\right)^2}}\leq \sqrt{1+\frac{4p^2}{(2p)^2}}=\sqrt{2}, \text{ 即}$$

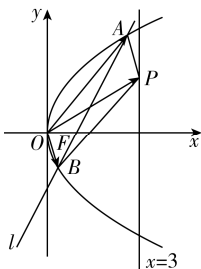
$$\frac{\sin \angle EFP}{\sin \angle FEP}=\mu \text{ 取最大值 } \sqrt{2} \text{ 时, 点 } P \text{ 的横}$$

$$\text{坐标为 } \frac{p}{2}. \text{ 故选 A.}$$

**13. A** **考查点** ▶ 直线和抛物线的位置关系、抛物线中四边形的面积问题



【解析】由题知  $F(1,0)$ , 直线  $l$  的斜率不为 0, 设直线  $l$  的方程为  $x = my + 1$ ,  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,



联立  $\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ , 整理得  $y^2 - 4my - 4 = 0$ ,

因为  $\Delta = 16m^2 + 16 > 0$ , 所以  $y_1 + y_2 = 4m$ ,  $y_1 y_2 = -4$ . 所以  $x_1 + x_2 = m(y_1 + y_2) + 2 = 4m^2 + 2$ . 因为  $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ , 所以四边形  $OAPB$  为平行四边形. 因为点  $P$  的横坐标为 3, 所以  $3 = x_1 + x_2 = 4m^2 + 2$ , 解得  $m^2 = \frac{1}{4}$ . 所以  $|AB| = \sqrt{1+m^2} \cdot$

$$\sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{1+m^2} \cdot$$

$$\sqrt{16m^2 - 4 \times (-4)} = 5, \text{ 点 } O \text{ 到直线 } AB$$

的距离为  $\frac{1}{\sqrt{1+m^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 所以平行四边

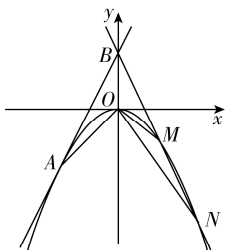
形  $OAPB$  的面积为  $5 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$ . 故

选 A.

**14. BC** **突破点** ▶ 判断直线与抛物线的位置关系、求直线与抛物线相交所得弦的弦长

【解析】对于 A, 因为点  $A(-1, -1)$  在抛物线  $E$  上, 所以  $(-1)^2 = -2p \times (-1)$ , 解得  $p = \frac{1}{2}$ , 所以抛物线  $E$  的标准方程为  $x^2 = -y$ , 其准线方程为  $y = \frac{1}{4}$ , 故 A 错误;

对于 B, 由题可知  $k_{AB} = \frac{1+1}{0+1} = 2$ , 则直线  $AB$  的方程为  $y = 2x + 1$ , 联立  $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ x^2 = -y \end{cases}$ , 消去  $y$  得  $x^2 + 2x + 1 = 0$ , 此时  $\Delta = 2^2 - 4 = 0$ , 故直线  $AB$  与抛物线  $E$  相切, 故 B 正确;



对于 C 和 D, 由题意知  $l$  的斜率存在, 设

$l$  的方程为  $y = kx + 1$ , 联立  $\begin{cases} y = kx + 1 \\ x^2 = -y \end{cases}$ , 消



去  $y$  得  $x^2+kx+1=0$ , 则  $\Delta_1=k^2-4>0$ , 即  $|k|>2$ , 设  $M(x_1, -x_1^2), N(x_2, -x_2^2)$ , 则  $x_1+x_2=-k, x_1x_2=1$ ,

又  $|AB|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}, |OA|=\sqrt{2}$ , 所以  $|BM||BN|=\sqrt{1+k^2}|x_1|\cdot\sqrt{1+k^2}\cdot|x_2|=(1+k^2)|x_1x_2|=1+k^2>5=|AB|^2$ ,  
 $|OM||ON|=\sqrt{x_1^2+x_1^4}\sqrt{x_2^2+x_2^4}$   
 $=\sqrt{x_1^2x_2^2(x_1^2x_2^2+x_1^2+x_2^2+1)}$   
 $=\sqrt{2+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}=\sqrt{2+k^2-2}$   
 $=|k|>2=|OA|^2$ , 故 C 正确, D 错误.  
 故选 BC.

### 15. 突破点 ▶ 求轨迹方程、抛物线中的定值问题

(1)【解】因为点  $P(x, y)$  到点  $(1, 0)$  的距离为  $\sqrt{(x-1)^2+y^2}$ , 点  $P(x, y)$  到  $y$  轴的距离为  $|x|$ ,

又动点  $P(x, y)$  到点  $(1, 0)$  的距离比它到  $y$  轴的距离多 1, 则  $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=|x|+1$ ,

整理得  $(x-1)^2+y^2=(|x|+1)^2$ , 即  $x^2-2x+1+y^2=x^2+2|x|+1, y^2=2|x|+2x$ ,

当  $x\geq 0$  时,  $y^2=4x$ ;

当  $x<0$  时,  $y=0$  (易错: 容易忽略讨论  $x<0$  这种情况),

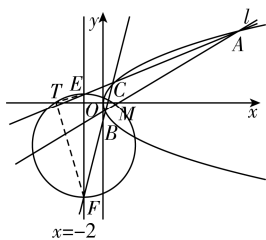
所以动点  $P$  的轨迹方程为

$$\begin{cases} y^2=4x, x\geq 0, \\ y=0, x<0. \end{cases}$$

(2)【证明】由题知, 直线  $l$  的斜率不为 0, 设直线  $l$  的方程为  $x=my+2$ , 在动点  $P$  的轨迹中, 记  $C_1:y^2=4x(x\geq 0), C_2:y=0(x<0)$ ,

将  $x=my+2$  代入  $y^2=4x$ , 消去  $x$  得  $y^2-4my-8=0, \Delta=(-4m)^2+32>0$ ,

设  $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$ , 则  $y_1+y_2=4m, y_1y_2=-8$ ,



$$\text{则 } k_{AC} = \frac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1} = \frac{4}{y_1+2},$$

$$\text{则直线 AC 的方程为 } y-2 = \frac{4}{y_1+2}(x-1),$$

$$\text{令 } x=-2, \text{ 则 } y=2+\frac{4}{y_1+2}\times(-3) = \frac{2y_1-8}{y_1+2},$$

$$\text{所以 } E\left(-2, \frac{2y_1-8}{y_1+2}\right), \text{ 同理可得 } F\left(-2, \frac{2y_2-8}{y_2+2}\right).$$



$$\frac{2y_2-8}{y_2+2} \Bigg),$$

设以线段  $EF$  为直径的圆与  $x$  轴的一个交点为  $T(a, 0)$ ,

$$\text{连接 } ET, FT, \text{ 则 } \overrightarrow{ET} = \left( a+2, -\frac{2y_1-8}{y_1+2} \right),$$

$$\overrightarrow{FT} = \left( a+2, -\frac{2y_2-8}{y_2+2} \right), \text{ 且 } \overrightarrow{ET} \cdot \overrightarrow{FT} = 0,$$

$$\text{所以 } (a+2)^2 + \frac{2y_1-8}{y_1+2} \cdot \frac{2y_2-8}{y_2+2} = 0,$$

$$\text{所以 } (a+2)^2 = -\frac{2y_1-8}{y_1+2} \cdot \frac{2y_2-8}{y_2+2} =$$

$$-\frac{4y_1y_2-16(y_1+y_2)+64}{y_1y_2+2(y_1+y_2)+4}$$

$$= -\frac{-32-64m+64}{-8+8m+4} = -\frac{32-64m}{8m-4} = 8,$$

$$\text{所以 } a = 2\sqrt{2}-2 \text{ 或 } a = -2\sqrt{2}-2,$$

所以以  $EF$  为直径的圆在  $x$  轴上截得的弦长为定值  $|(2\sqrt{2}-2) - (-2\sqrt{2}-2)| = 4\sqrt{2}$ .

#### 16. C 考查点 ▶ 抛物线的方程及几何性质

【解析】抛物线  $C: y = ax^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{a}y$ , 准

线方程为  $y = -\frac{1}{4a}$ , 点  $P(m, 1)$  在  $x$  轴上

方, 故准线在  $x$  轴下方, 所以  $a > 0$ , 所以

点  $P(m, 1)$  到准线的距离为  $1 + \frac{1}{4a} =$

$\frac{3}{2}$ , 解得  $a = \frac{1}{2}$ . 故选 C.

#### 易错警示

本题的易错点有两处: 一是没有将抛物线方程化为标准方程, 而误认为准线方程为  $x = -\frac{a}{4}$ ; 二是忽略了根据点  $P(m, 1)$  的坐标可以确定抛物线的开口方向.

#### 刷

#### 提分

#### 1. C 考查点 ▶ 抛物线的定义、抛物线中距离和的最值

【解析】由题得  $F(0, 4)$ , 连接  $FA$ , 因为  $FP \perp l$ , 垂足为  $P$ ,

所以点  $P$  的轨迹是以  $FA$  为直径的圆 (不包括  $F, A$  两点),

半径  $r = \frac{1}{2}|FA| = \frac{3}{2}$ , 圆心为  $B\left(\frac{3}{2}, 4\right)$ ,

又因为抛物线的方程为  $x^2 = 16y$ ,

所以其准线为直线  $y = -4$ , 过点  $Q$  作准线的垂线, 垂足为  $R$ ,

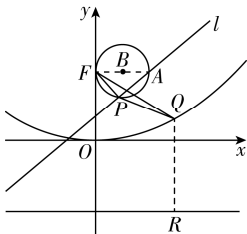
则  $|FQ| + |PQ| = |QR| + |PQ| \geqslant |PR|$ ,

当  $B, P, Q, R$  四点共线且  $P$  在  $B$  点下方时取等号,

$$(|FQ| + |PQ|)_{\min} = |BR| - r = 8 - \frac{3}{2} = \frac{13}{2}.$$

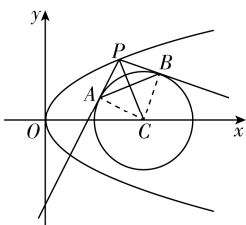


故选 C.



## 2. B 突破点 ▶ 圆的切线长、根据抛物线的性质求参数

【解析】设  $P(x_0, y_0)$ , 则  $y_0^2 = 2x_0$ , 圆  $C$  的圆心  $C(4, 0)$ , 半径为  $r$ , 连接  $AC, BC$ , 由  $PA, PB$  与圆  $C$  相切于点  $A, B$  得  $PC \perp AB, PA \perp AC, PB \perp BC$ ,



则  $|AB| \cdot |PC| = 2S_{\text{四边形}PACB} = 4S_{\triangle PAC} = 2|PA| \cdot |AC| = 2r \sqrt{|PC|^2 - r^2} = 2r \sqrt{(x_0 - 4)^2 + y_0^2 - r^2} = 2r \sqrt{x_0^2 - 6x_0 + 16 - r^2} = 2r \sqrt{(x_0 - 3)^2 + 7 - r^2} \geq 2r \sqrt{7 - r^2}$  (提示: 将  $|AB| \cdot |PC|$  转化为  $2S_{\text{四边形}PACB}$ ), 当且仅当  $x_0 = 3$  时, 等号成立, 可知  $|AB| \cdot |PC|$  的最小值为  $2r \sqrt{7 - r^2} = 4\sqrt{3}$ , 整理可得  $r^4 - 7r^2 + 12 = 0$ , 解得  $r^2 = 4$  或  $r^2 = 3$ , 又  $r \in \mathbf{N}^*$ , 所以  $r^2 = 4$ , 即  $r = 2$ . 故选 B.

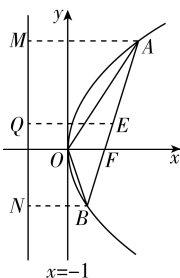
## 3. BD 突破点 ▶ 抛物线的中点弦、直线与抛物线的位置关系

【解析】由题意知, 焦点  $F(1, 0)$ , 准线方程为  $x = -1$ , 设  $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$ .

对于 A, 当过焦点  $F$  的直线为  $x = 1$  时, 不妨设点  $A$  在第一象限, 易得  $A(1, 2), B(1, -2)$ , 此时  $|AB|_{\min} = 4$ , 故 A 错误.

对于 B, 设  $AB$  的中点为  $E$ , 过  $A, B, E$  分别作准线的垂线, 垂足分别为  $M, N, Q$ ,

如图, 则  $|EQ| = \frac{1}{2}(|AM| + |BN|) = \frac{1}{2}(|AF| + |BF|) = \frac{1}{2}|AB|$ , 而  $|AB| < |OA| + |OB|$ , 所以  $|EQ| < \frac{1}{2}(|OA| + |OB|)$ , 故 B 正确.





对于 C, 由抛物线的性质可知  $y_1 y_2 = -p^2 = -4$  ①.

若存在弦  $AB$ , 使得  $AB$  中点的坐标为  $(\frac{5}{2}, 3)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} y_1 + y_2 = 6, \\ \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} = 5, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} y_1 = 2, \\ y_2 = 4 \end{cases} \text{或} \begin{cases} y_1 = 4, \\ y_2 = 2, \end{cases} \text{都}$$

不满足①式, 故 C 错误.

$$\text{对于 D, 当 } AB \perp OF \text{ 时, } \begin{cases} \frac{y_1^2}{4} = \frac{y_2^2}{4} = 1, \\ y_1 = -y_2, \end{cases} \text{解}$$

$$\text{得} \begin{cases} y_1 = 2, \\ y_2 = -2 \end{cases} \text{或} \begin{cases} y_1 = -2, \\ y_2 = 2, \end{cases}$$

由抛物线的对称性, 不妨取  $A(1, 2)$ ,  $B(1, -2)$ , 则  $|OA| = |OB| = \sqrt{5}$ , 所以  $|OA| \cdot |OB| = 5$ , 故 D 正确.

故选 BD.

#### 4. C 突破点 ▶ 直线和抛物线的位置关系、抛物线中的三角形面积问题

【解析】显然直线  $B_1 B_2$  和直线  $C_1 C_2$  的斜率存在且不为 0, 设直线  $B_1 B_2$  的斜率为  $k (k \neq 0)$ , 则直线  $C_1 C_2$  的斜率为  $-\frac{1}{k}$ , 且直线  $B_1 B_2$  的方程为  $y = kx + 1$ ,

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + 1, \\ x^2 = 4y \end{cases} \text{消去 } y \text{ 整理得 } x^2 - 4kx - 4 =$$

$0, \Delta = (-4k)^2 + 16 = 16k^2 + 16 > 0$ . 设  $B_1(x_1, y_1), B_2(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = 4k$ , 所以  $B_0(2k, 2k^2 + 1)$ , 同理  $C_0(-\frac{2}{k}, \frac{2}{k^2} +$

$1)$ , 所以  $|FB_0| = \sqrt{1+k^2} |2k-0| = 2|k| \cdot \sqrt{1+k^2}$  (提示: 弦长公式),  $|FC_0| =$

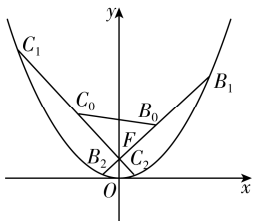
$$\frac{2}{|k|} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}} = \frac{2\sqrt{1+k^2}}{|k|^2}, \text{因为 } FB_0 \perp FC_0,$$

所以  $\triangle FB_0 C_0$  的面积  $S = \frac{1}{2} |FB_0| \cdot$

$$|FC_0| = \frac{1}{2} \cdot 2|k| \sqrt{1+k^2} \cdot \frac{2\sqrt{1+k^2}}{|k|^2} =$$

$$\frac{2(1+k^2)}{|k|} = 2 \left( \frac{1}{|k|} + |k| \right) \geq 4, \text{当且仅}$$

当  $k = \pm 1$  时, 等号成立, 故  $\triangle FB_0 C_0$  的面积的最小值为 4. 故选 C.



#### 5. B 突破点 ▶ 抛物线的几何性质

【解析】设抛物线  $x^2 = 2py$  的焦点为  $F$ , 连接  $AF, BF$ , 过点  $A, B, M$  分别作  $AA_1, BB_1, MN$  垂直于抛物线的准线, 垂足分别为  $A_1, B_1, N$ ,





由抛物线定义及梯形中位线的性质知,

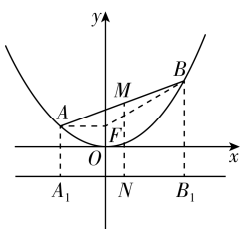
$$|MN| = \frac{|AA_1| + |BB_1|}{2} = \frac{|AF| + |BF|}{2}, \text{ 而}$$

$|AF| + |BF| \geq |AB| = 12$  (当且仅当  $A, B, F$  三点共线时等号成立), 所以  $y_M + \frac{p}{2} =$

$$|MN| = \frac{|AF| + |BF|}{2} \geq 6, \text{ 即 } y_M \geq 6 - \frac{p}{2},$$

所以点  $M$  的纵坐标的最小值为  $6 - \frac{p}{2}$ ,

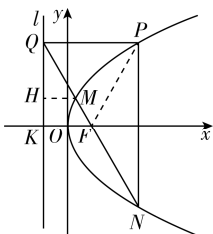
所以  $6 - \frac{p}{2} = 4$ , 解得  $p = 4$ .



#### 6. D 突破点 ▶ 抛物线的定义、直线与抛物线的位置关系

【解析】如图, 过点  $M$  作  $MH \perp l$  于点  $H$ , 设准线  $l$  与  $x$  轴的交点为  $K$ , 因为  $M$  为靠近点  $F$  的  $QF$  的三等分点, 所以  $\frac{|MH|}{|FK|} =$

$$\frac{|MQ|}{|FQ|} = \frac{2}{3}, \text{ 因为 } |FK| = p, \text{ 所以 } |MH| = \frac{2}{3}p.$$



$$\text{所以 } x_M = \frac{2p}{3} - \frac{p}{2} = \frac{p}{6}, \text{ 则 } y_M^2 = 2px_M = \frac{p^2}{3},$$

由抛物线的对称性, 不妨设  $M\left(\frac{p}{6}, \frac{\sqrt{3}p}{3}\right)$ . 易知直线  $MN$  的斜率不为 0, 设直

线  $MN$  的方程为  $x = my + \frac{p}{2}$ , 与抛物线方

程  $y^2 = 2px$  联立, 得  $y^2 - 2pmy - p^2 = 0, \Delta = 4p^2m^2 + 4p^2 > 0$ , 所以  $y_M y_N = -p^2$ , 所以  $y_N =$

$$\frac{-p^2}{y_M} = -\sqrt{3}p, \text{ 所以 } x_N = \frac{y_N^2}{2p} = \frac{3p}{2}, \text{ 则}$$

$$N\left(\frac{3p}{2}, -\sqrt{3}p\right), \text{ 所以 } k_{MN} = \frac{\frac{\sqrt{3}p}{3} + \sqrt{3}p}{\frac{p}{6} - \frac{3p}{2}} =$$

$-\sqrt{3}$ , 所以  $\angle QFK = 60^\circ$ , 则  $\angle PQF =$

$\angle QFK = 60^\circ$ , 连接  $PF$ , 所以  $\triangle PQF$  为等

边三角形. 因为  $|KF| = p$ , 所以  $|QF| =$

$$\frac{|KF|}{\cos 60^\circ} = 2p, \text{ 所以 } |PQ| = 2p, \text{ 则 } x_P =$$

$|PQ| - \frac{p}{2} = \frac{3p}{2}$ , 可得  $PN$  垂直于  $x$  轴, 所

$$\text{以 } \frac{|PN|}{|PQ|} = \frac{2 \times \sqrt{3}p}{2p} = \sqrt{3}.$$

**7. BCD 突破点** ▶ 抛物线的对称性、直线与抛物线的位置关系、与抛物线焦点弦有关的几何性质

**【解析】**对于 A: 由题意可知,  $N, F, M$  三点共线, 根据抛物线的对称性可知, 若存在点  $P$  使得点  $P, N, O, M$  都在以  $F$  为圆心的圆上, 则  $|MN|$  为通径, 则  $x_M = x_N = 1$ ,  $|y_0| = 2$ , 则以点  $F$  为圆心的圆的半径为 2, 但  $|OF| = 1 \neq 2$ , 所以不存在点  $P$  使得点  $P, N, O, M$  都在以  $F$  为圆心的圆上, 故 A 错误.

对于 B: 由  $P(x_0, y_0)$ , 得  $N\left(\frac{y_0^2}{4}, y_0\right)$ , 当

直线  $MN$  的斜率存在时,  $k_{NF} = \frac{y_0}{\frac{y_0^2}{4} - 1} =$

$\frac{4y_0}{y_0^2 - 4}$ , 则直线  $NF: y = \frac{4y_0}{y_0^2 - 4}(x - 1)$ , 将直线

$NF$  的方程与抛物线方程联立, 得

$\frac{y_0}{y_0^2 - 4}y^2 - y - \frac{4y_0}{y_0^2 - 4} = 0$ , 则  $y_M y_N = -4$ , 所以

$y_M = \frac{-4}{y_0}$ , 则  $x_M = \frac{4}{y_0^2}$ , 即  $M\left(\frac{4}{y_0^2}, \frac{-4}{y_0}\right)$  (**提**

**示:**可直接利用  $y_M y_N = -p^2$  得  $y_M = \frac{-4}{y_0}$ ).

若存在点  $P$  使得点  $F$  是  $\triangle POM$  的垂心,

则  $\overrightarrow{OF} \perp \overrightarrow{PM}, \overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{FM}, \overrightarrow{OF} = (1, 0), \overrightarrow{PM} =$   
 $\left(\frac{4}{y_0^2} - x_0, \frac{-4}{y_0} - y_0\right)$ , 则  $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{PM} = \frac{4}{y_0^2} - x_0 =$

0 ①,  $\overrightarrow{OP} = (x_0, y_0), \overrightarrow{FM} = \left(\frac{4}{y_0^2} - 1, \frac{-4}{y_0}\right)$ ,

则  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{FM} = \frac{4x_0}{y_0^2} - x_0 - 4 = 0$  ②, 且  $4x_0 > y_0^2 >$

0 ③, 联立 ①③, 得  $x_0 > 1$ , 联立 ①②, 得

$x_0^2 - x_0 - 4 = 0$ , 则  $\Delta > 0$ , 得  $x_0 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} > 1$

成立, 故 B 正确.

对于 C: 若存在点  $P$  使得点  $F$  是  $\triangle POM$

的重心, 则  $1 = \frac{0 + x_0 + \frac{4}{y_0^2}}{3}$  且  $0 = \frac{0 + y_0 + \frac{-4}{y_0}}{3}$ ,

得  $x_0 = 2, y_0 = \pm 2$ , 即  $P(2, \pm 2)$ , 故 C 正确.

对于 D: 点  $M$  到直线  $PN$  的距离为

$\left|\frac{-4}{y_0} - y_0\right| = \left|\frac{4}{y_0}\right| + |y_0| \geq 2\sqrt{\left|\frac{4}{y_0}\right| \times |y_0|} =$

4, 当且仅当  $\frac{4}{|y_0|} = |y_0|$ , 即  $y_0 = \pm 2$  时等

号成立, 所以点  $M$  到直线  $PN$  的最短距离为 4, 故 D 正确.

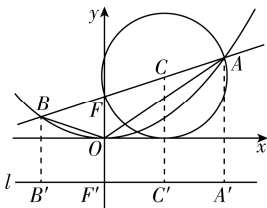
故选 BCD.

**8. ABD 突破点** ▶ 直线与抛物线的位置关



系、求在曲线上某点处的切线方程

【解析】由题意，取  $AF$  的中点为  $C$ ，分别过  $A, B, C, F$  作准线  $l$  的垂线，垂足分别为  $A', B', C', F'$ ，如图①。



图①

对于 A，由抛物线  $y = 2x^2$ ，得  $p = \frac{1}{4}$ ，焦点

$F\left(0, \frac{1}{8}\right)$ ，准线  $l: y = -\frac{1}{8}$ ，

设以  $AF$  为直径的圆的圆心为  $C$ ，则其半径  $r = \frac{1}{2}|AF|$ ，

由图①可知  $|CC'| = \frac{1}{2}(|AA'| + |FF'|) = \frac{1}{2}(|AF| + p) = r + \frac{1}{8}$  (提示：梯形中位线的性质)，

由圆心  $C$  到  $x$  轴的距离  $d = |CC'| - \frac{p}{2} = r$ ，得圆  $C$  与  $x$  轴相切，故 A 正确；

对于 B，由题意易知直线  $AB$  的斜率存在，则设直线  $AB$  的方程为  $y = kx + \frac{1}{8}$ ，

联立  $\begin{cases} y = kx + \frac{1}{8} \\ y = 2x^2 \end{cases}$ ，消去  $y$  可得  $2x^2 - kx - \frac{1}{8} = 0$ ，

则  $\Delta = k^2 + 1 > 0$ ，设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，

则  $x_1 + x_2 = \frac{k}{2}, x_1 x_2 = -\frac{1}{16}$ ，

$y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} = \frac{k^2}{2} + \frac{1}{4}$ ，

$y_1 y_2 = \left(kx_1 + \frac{1}{8}\right) \left(kx_2 + \frac{1}{8}\right) = k^2 x_1 x_2 + \frac{k}{8}(x_1 + x_2) + \frac{1}{64} = -\frac{k^2}{16} + \frac{k^2}{16} + \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$ ，

由图①可知  $|AF| = |AA'| = y_1 + \frac{1}{8}$ ，

$|BF| = |BB'| = y_2 + \frac{1}{8}$ ，

所以  $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|}$

$= \frac{y_1 + y_2 + \frac{1}{4}}{y_1 y_2 + \frac{1}{8}(y_1 + y_2) + \frac{1}{64}}$

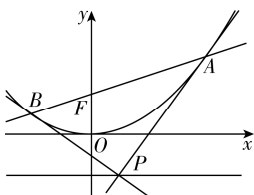
$= \frac{\frac{k^2}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{64} + \frac{k^2}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}} = 8$ ，故 B 正确；



对于 C, 由选项 B 可知  $k_1 k_2 = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0}$ .

$$\frac{y_2 - 0}{x_2 - 0} = \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{64}{-16}}{-\frac{1}{16}} = -\frac{1}{4}, \text{ 故 C 错误;}$$

对于 D, 如图②所示,



图②

由  $y = 2x^2$ , 求导可得  $y' = 4x$ , 由选项 B 可得直线  $l_1, l_2$  的斜率分别为  $4x_1, 4x_2$ ,

所以直线  $l_1, l_2$  的方程分别为  $y - y_1 = 4x_1(x - x_1)$ ,  $y - y_2 = 4x_2(x - x_2)$ ,

$$\text{由} \begin{cases} y - y_1 = 4x_1(x - x_1) \\ y - y_2 = 4x_2(x - x_2) \end{cases}$$

$$\text{可得} \begin{cases} x_2 y - x_2 y_1 = 4x_1 x_2(x - x_1) \\ x_1 y - x_1 y_2 = 4x_1 x_2(x - x_2) \end{cases}$$

消去  $x$  可得  $y(x_2 - x_1) - x_2 y_1 + x_1 y_2 = 4x_1 x_2 \cdot$

$(x_2 - x_1)$ , 由  $A, B$  在直线  $y = kx + \frac{1}{8}$  上,

$$\text{得 } y(x_2 - x_1) - x_2 \left( kx_1 + \frac{1}{8} \right) + x_1 \left( kx_2 + \frac{1}{8} \right) = 4x_1 x_2(x_2 - x_1),$$

$$\text{化简可得 } y(x_2 - x_1) + \frac{1}{8}(x_1 - x_2) = 4x_1 x_2 \cdot$$

$$(x_2 - x_1), \text{ 由 } x_1 \neq x_2, x_1 x_2 = -\frac{1}{16},$$

$$\text{得 } y - \frac{1}{8} = -\frac{1}{4}, \text{ 所以 } y = -\frac{1}{8}, \text{ 故 D}$$

正确.

故选 ABD.

## 9. $2\sqrt{2}$ 突破点 ▶ 抛物线中的三角形面积问题

【解析】易知  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , 直线  $AB$  的斜率

不为 0, 设直线  $AB$  的方程为  $x = my + \frac{p}{2}$ ,

$$\text{由} \begin{cases} x = my + \frac{p}{2} \\ y^2 = 2px \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 2mpy - p^2 = 0, \text{ 则 } \Delta =$$

$$4m^2 p^2 + 4p^2 > 0, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2),$$

$$\text{则 } y_1 y_2 = -p^2 \text{ ①. 由 } \overrightarrow{AF} = \sqrt{2} \overrightarrow{FB} \text{ 知 } y_1 =$$

$$-\sqrt{2} y_2 \text{ ②, 由 ① ② 可得 } y_2^2 = \frac{p^2}{2}. \text{ 所以}$$

$$\frac{S_{\triangle MNF}}{S_{\triangle NBF}} = \frac{\frac{1}{2} p |y_1 - y_2|}{\frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{p}{2}\right) |y_2|} =$$

$$\frac{p |-\sqrt{2} y_2 - y_2|}{\left(\frac{y_2^2}{2p} + \frac{p}{2}\right) |y_2|} = \frac{(\sqrt{2} + 1)p}{\frac{p}{2\sqrt{2}} + \frac{p}{2}} = 2\sqrt{2}.$$



## 一题多解

设直线  $AB$  的倾斜角为  $\alpha$ , 不妨令  $\alpha$  为锐角, 过点  $B$  作  $BC \perp AM$ , 垂足为  $C$ , 如图所示, 因为  $\angle MAB = \alpha$ , 且  $\overrightarrow{AF} = \sqrt{2} \overrightarrow{FB}$ , 所以  $\cos \alpha = \frac{|AC|}{|AB|} =$

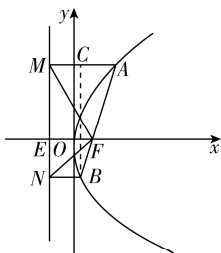
$$\frac{|AM| - |BN|}{|AF| + |BF|} = \frac{|AF| - |BF|}{|AF| + |BF|} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}. \text{ 设准}$$

线与  $x$  轴交于点  $E$ , 则  $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|ME|}{|EN|} = \sqrt{2}$ ,

$$\text{所以 } \frac{S_{\triangle MNF}}{S_{\triangle NBF}} = \frac{\frac{1}{2} |EF| (|ME| + |NE|)}{\frac{1}{2} |BN| |NE|} =$$

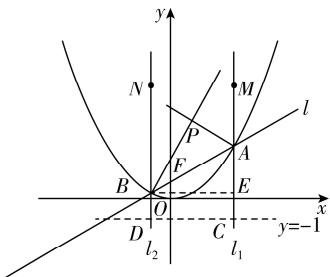
$$\frac{p(\sqrt{2}|NE| + |NE|)}{|BF||NE|} = \frac{(\sqrt{2}+1)p}{\frac{p}{1+\cos \alpha}} = (\sqrt{2}+1) \cdot$$

$$(1 + \cos \alpha) = 2\sqrt{2} \left( \text{提示: } |BF| = \frac{p}{1+\cos \alpha} \right).$$



### 10. $8 + \frac{8\sqrt{3}}{3}$ 突破点 ▶ 直线与抛物线的位置关系

【解析】作出抛物线的准线  $y = -1$ , 设  $A, B$  在准线上的射影分别是  $C, D$ , 由抛物线的对称性不妨设点  $A$  在第一象限, 过点  $B$  作  $BE \perp AC$  于点  $E$ ,



设  $|BF| = m$ , 则  $|BD| = m$ , 则  $|AF| = |AC| = 3m$ ,

$$\therefore \cos \angle BAE = \frac{|AE|}{|AB|} = \frac{2m}{4m} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle BAE = 60^\circ, \angle ABE = 30^\circ,$$

$\therefore$  直线  $AB$  的倾斜角为  $30^\circ$ ,

$$\therefore \text{直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1, \\ x^2 = 4y, \end{cases}$$

$$\text{可得 } x^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}x - 4 = 0, \Delta > 0,$$



设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore |AB| = y_1 + y_2 + 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x_1 + x_2) + 4 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} + 4 = \frac{16}{3},$$

$\therefore \angle ABN$  和  $\angle BAM$  的平分线相交于点  $P$  且  $AM \parallel BN$ ,

$$\therefore PA \perp PB, \angle PBA = \frac{1}{2} \angle NBA = 30^\circ,$$

$$\therefore |AP| = \frac{|AB|}{2} = \frac{8}{3}, \text{ 则 } |BP| = |AP| \cdot$$

$$\tan 60^\circ = \frac{8}{3} \times \sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \triangle PAB \text{ 的周长为 } |PA| + |AB| + |PB| = 8 + \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

#### 11. 突破点 ▶ 抛物线中的三角形面积问题

(1) 【解】设双曲线的半焦距为  $c$ , 则  $c^2 = a^2 + 1$ ,

$$\text{因为离心率为 } \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{则 } \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 = a^2 + 1, \text{ 解得 } a = \sqrt{3},$$

$$\text{所以双曲线 } C_1 \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} - y^2 = 1.$$

(2) 【证明】设  $P(x_0, y_0)$ , 不妨设  $OA$  为渐近线  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ,  $OB$  为渐近线  $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x$ ,

$$\text{直线 } AP \text{ 的方程为 } y - y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - x_0),$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \\ y - y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - x_0), \end{cases}$$

$$\text{解得 } A\left(\frac{1}{2}x_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}y_0, \frac{\sqrt{3}}{6}x_0 + \frac{1}{2}y_0\right),$$

$$\text{所以 } |OA| = \frac{|x_0 + \sqrt{3}y_0|}{\sqrt{3}},$$

$$\text{同理可得 } B\left(\frac{1}{2}x_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_0, -\frac{\sqrt{3}}{6}x_0 + \frac{1}{2}y_0\right), \text{ 所以 } |OB| = \frac{|x_0 - \sqrt{3}y_0|}{\sqrt{3}}.$$

由于直线  $OA$  的斜率  $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 因此

$\angle AOx = 30^\circ$ , 所以  $\angle AOB = 2\angle AOx = 60^\circ$ ,

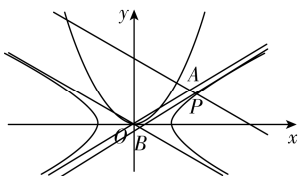
所以平行四边形  $PAOB$  的面积为  $S =$

$$|OA| \cdot |OB| \cdot \sin \angle AOB = \frac{\sqrt{3}|x_0^2 - 3y_0^2|}{6},$$

因为点  $P$  在双曲线  $C_1$  上, 所以  $\frac{x_0^2}{3} - y_0^2 =$

$$1, \text{ 即 } x_0^2 - 3y_0^2 = 3,$$

所以平行四边形  $PAOB$  的面积为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



(3)【解】由(2)知  $P(x_0, y_0)$ , 设  $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ ,

因为函数  $y = \frac{1}{2}x^2$  的导数为  $y' = x$ , 所以

直线  $PC$  的方程为  $y - y_1 = x_1(x - x_1)$ ,

由于  $P(x_0, y_0)$  在直线  $PC$  上, 所以  $y_0 - y_1 = x_1(x_0 - x_1) = x_0x_1 - 2y_1$ , 所以  $y_0 + y_1 = x_0x_1$ ,

同理可得  $y_0 + y_2 = x_0x_2$ ,

所以  $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$  均满足方程  $y_0 + y = x_0x$ ,

所以直线  $CD$  的方程为  $x_0x = y + y_0$ ,

联立  $\begin{cases} x_0x = y + y_0 \\ x^2 = 2y \end{cases}$  得  $x^2 - 2x_0x + 2y_0 = 0$ ,

$\Delta > 0$ ,

所以  $x_1 + x_2 = 2x_0, x_1x_2 = 2y_0$ ,

则  $|CD| = \sqrt{1+x_0^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+x_0^2} \cdot \sqrt{4x_0^2 - 8y_0}$ ,

又因为点  $P$  到直线  $CD$  的距离  $d = \frac{|x_0^2 - 2y_0|}{\sqrt{1+x_0^2}}$ ,

所以  $\triangle PCD$  的面积  $S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2} |CD| \cdot d$

$= \frac{1}{2} |x_0^2 - 2y_0| \cdot \sqrt{4x_0^2 - 8y_0}$   
 $= (x_0^2 - 2y_0)^{\frac{3}{2}}$ ,

又因为  $x_0^2 - 2y_0 = 3y_0^2 - 2y_0 + 3 = 3\left(y_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} \geq \frac{8}{3}$ , 当且仅当  $y_0 = \frac{1}{3}$  时取等号,

所以  $S_{\triangle PCD} \geq \left(\frac{8}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{16\sqrt{6}}{9}$ ,

所以  $\triangle PCD$  面积的最小值为  $\frac{16\sqrt{6}}{9}$ .

## 12. 突破点 ▶ 圆锥曲线新定义、裂项相消法求和

(1)【解】假设 3 是抛物线  $C$  的和谐数, 则 3 的和谐圆为  $A: (x-3)^2 + y^2 = r^2$ ,

由抛物线的对称性, 不妨设圆  $A$  与抛物线  $C$  有公共点  $T(x_0, 2\sqrt{x_0})$ ,

显然抛物线  $C$  在点  $T$  处的切线, 即曲线  $f(x) = 2\sqrt{x}$  在点  $T$  处的切线,

易知该切线的斜率为  $f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{x_0}}$ ,

$\therefore$  圆  $A$  与抛物线  $C$  在点  $T$  处有相同的切线,

$\therefore \frac{2\sqrt{x_0} - 0}{x_0 - 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_0}} = -1$ , 解得  $x_0 = 1$ ,

$\therefore$  圆  $A$  与抛物线  $C$  有公共点  $T(1, 2)$ ,



$\therefore$  和谐圆的半径为

$$\sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2},$$

$\therefore 3$  是抛物线  $C$  的和谐数, 且 3 的和谐圆为  $(x-3)^2 + y^2 = 8$ .

(2) (i) 【解】由抛物线的对称性, 只需考虑  $T_1, T_2, \dots, T_n$  均在  $x$  轴上方的情形, 不妨设  $T_k(x_k, 2\sqrt{x_k})$ ,

$\therefore a_k$  为抛物线  $C$  的和谐数,

$\therefore a_k$  的和谐圆为  $A_k: (x-a_k)^2 + y^2 = r_k^2$ ,

$\therefore$  由 (1) 可知,  $\frac{2\sqrt{x_k}-0}{x_k-a_k} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_k}} = -1$ , 解得

$$x_k = a_k - 2,$$

$$\therefore T_k(a_k - 2, 2\sqrt{a_k - 2}),$$

$\therefore T_k$  在圆  $A_k$  上,

$$\therefore r_k = \sqrt{(a_k - 2 - a_k)^2 + (2\sqrt{a_k - 2})^2} = 2\sqrt{a_k - 1},$$

$\therefore \forall k \in \{2, 3, \dots, n-1, n\}$ , 圆  $A_{k-1}$  与  $A_k$  外切, 且  $a_{k-1} < a_k$ ,

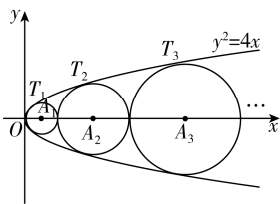
$$\therefore a_k - a_{k-1} = r_{k-1} + r_k = 2\sqrt{a_{k-1} - 1} + 2\sqrt{a_k - 1}, \text{ 即 } (a_k - 1) - (a_{k-1} - 1) = 2\sqrt{a_{k-1} - 1} + 2\sqrt{a_k - 1},$$

$$\therefore \sqrt{a_k - 1} - \sqrt{a_{k-1} - 1} = 2,$$

$\therefore$  数列  $\{\sqrt{a_n - 1}\}$  是等差数列, 其公差为 2, 首项为  $\sqrt{a_1 - 1} = 2$ ,

$$\therefore \sqrt{a_n - 1} = 2 + 2(n-1) = 2n, \text{ 即 } a_n = 4n^2 + 1,$$

$\therefore$  数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 4n^2 + 1$ .



(ii) 【证明】显然点  $A_0(1, 0)$  为抛物线  $C$  的焦点,  $\therefore |A_0T_k| = a_k - 1 = 4k^2$ ,

易知  $|A_0A_k| = 4k^2$ , 且  $|A_kT_k| = r_k = 2\sqrt{a_k - 1} = 4k$ ,  $\therefore \triangle A_0A_kT_k$  为等腰三角形,

易知  $\triangle A_0A_kT_k$  的面积  $S_k = \frac{1}{2} \cdot 4k \cdot$

$$\sqrt{(4k^2)^2 - (2k)^2} = 4k^2 \cdot \sqrt{4k^2 - 1},$$

当  $k \geq 2$  时,  $\sqrt{4k^2 - 1} = 2\sqrt{k^2 - \frac{1}{4}} >$

$$2\sqrt{k^2 - 2 + \frac{1}{k^2}} = 2\left(k - \frac{1}{k}\right),$$

$$\therefore S_k > 4k^2 \cdot 2\left(k - \frac{1}{k}\right) = 8(k^3 - k),$$

$$\therefore \frac{1}{S_k} < \frac{1}{8(k^3 - k)} = \frac{1}{8k(k-1)(k+1)} =$$

$$\frac{1}{16} \left[ \frac{1}{k(k-1)} - \frac{1}{k(k+1)} \right],$$

$$\therefore \sum_{k=2}^n \frac{1}{S_k} < \frac{1}{16} \sum_{k=2}^n \left[ \frac{1}{k(k-1)} - \right.$$





$$\frac{1}{k(k+1)} \Big] = \frac{1}{16} \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{n(n+1)} \right] < \frac{1}{32},$$

$\therefore$  不等式  $\sum_{k=2}^n \frac{1}{S_k} < \frac{1}{32}$  得证.

## 专题 1 圆锥曲线中的弦长与面积问题

刷

难关

1. 突破点 ▶ 椭圆中的弦长问题、椭圆中的四边形面积问题

【解】(1) 依题意得  $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ a-c = \sqrt{6}-\sqrt{3}, \end{cases}$  解得

$$\begin{cases} a = \sqrt{6}, \\ c = \sqrt{3}, \end{cases} \text{ 故 } b^2 = a^2 - c^2 = 3,$$

所以  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2) 依题意,  $F(\sqrt{3}, 0)$ , 则直线  $PF: y = x - \sqrt{3}$ ,

与椭圆方程联立  $\begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = x - \sqrt{3}, \end{cases}$  消去  $y$  得

$$3x^2 - 4\sqrt{3}x = 0,$$

解得  $x=0$  或  $x = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ ,

设  $P, Q$  的横坐标分别为  $x_P, x_Q$ , 不妨设

$$x_P = 0, x_Q = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{故 } |PQ| = \sqrt{1+1} \cdot |x_P - x_Q| = \sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

(3) 当直线  $l$  的斜率存在时, 设直线  $l: y = kx + m$ ,

由原点  $O$  到直线  $l$  的距离为 1, 得

$$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}} = 1, \text{ 化简得 } m^2 = k^2 + 1.$$

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 又  $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OP}$ , 则  $P(x_1+x_2, y_1+y_2)$ ,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 得 } (2k^2+1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0, \Delta = 16k^2m^2 - 4(2k^2+1)(2m^2-6) = 48k^2 - 8m^2 + 24 > 0,$$

$$\text{则 } x_1+x_2 = -\frac{4km}{2k^2+1}, x_1x_2 = \frac{2m^2-6}{2k^2+1}, y_1+y_2 =$$

$$\frac{2m}{2k^2+1}, \text{ 所以 } P\left(-\frac{4km}{2k^2+1}, \frac{2m}{2k^2+1}\right),$$

因为点  $P$  在椭圆  $C$  上,

$$\text{所以 } \left(-\frac{4km}{2k^2+1}\right)^2 + 2\left(\frac{2m}{2k^2+1}\right)^2 = 6,$$

$$\text{即 } 4m^2(2k^2+1) = 3(2k^2+1)^2,$$

$$\text{即 } 4m^2 = 3(2k^2+1),$$

$$\text{由 } m^2 = k^2 + 1, \text{ 解得 } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, m^2 = k^2 +$$

$$1 = \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{弦长 } |AB| &= \sqrt{k^2+1} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \\ &= \sqrt{k^2+1} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{2k^2+1} \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{2}, \end{aligned}$$

因为原点  $O$  到直线  $l$  的距离  $d=1$ ,  
所以平行四边形  $OAPB$  的面积  $S =$

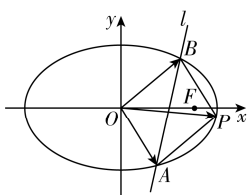
$$2S_{\triangle AOB} = |AB| \cdot d = \frac{3\sqrt{6}}{2} \times 1 = \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

当直线  $l$  的斜率不存在时,不妨设直线  $l:$

$$x=1, \text{ 则 } A\left(1, -\frac{\sqrt{10}}{2}\right), B\left(1, \frac{\sqrt{10}}{2}\right),$$

此时  $P(2,0)$  不在椭圆  $C$  上,不合题意.

综上所述,四边形  $OAPB$  的面积为  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ .



## 2. 突破点 ▶ 双曲线的弦长问题、双曲线中三角形的面积问题

【解】(1) 由双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$  的渐近线方程为  $y = \pm \sqrt{3}x$ , 可得

$$\frac{b}{a} = \sqrt{3}, \quad \text{①}$$

又由焦距长为 4, 可得  $2c=4$ , 即  $c=2$ , 则有  $a^2+b^2=4$ , ②

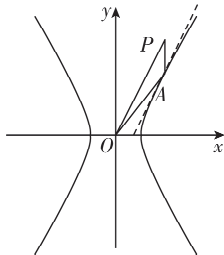
联立①②两式, 解得  $a^2=1, b^2=3$ ,

所以双曲线方程为  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2) 由点  $P$  的坐标为  $(2,4)$ ,  $O$  为原点,

$$\text{得 } |OP| = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5},$$

此时直线  $OP$  的斜率  $k=2$ ,



设平行于  $OP$  的直线  $y=2x+t$  与双曲线

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 相切, 联立 } \begin{cases} y=2x+t, \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

消去  $y$  得  $x^2 + 4tx + t^2 + 3 = 0$ ,

由  $\Delta = 16t^2 - 4(t^2 + 3) = 12t^2 - 12 = 0$ , 解得  $t = \pm 1$ ,

则切点为  $A(2,3)$  时可以得到  $\triangle AOP$  的面积最小,

再由平行线间的距离公式可得直线  $OP$



与过  $A$  点的切线的距离  $d = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,

则  $\triangle AOP$  面积的最小值为  $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 1$ .

(3) 当过  $C$  的右焦点  $F$  的直线的斜率为 0 时, 易知  $|MN| = \sqrt{3}$ , 不符合题意;

当过  $C$  的右焦点  $F$  的直线的斜率不为 0 时, 可设方程为  $my = x - 2$ , 与双曲线方程

$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  联立得  $(my + 2)^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ , 即

$(3m^2 - 1)y^2 + 12my + 9 = 0$ ,  $\Delta = (12m)^2 - 36(3m^2 - 1) > 0$ ,

设  $D(x_1, y_1)$ ,  $E(x_2, y_2)$ , 则有  $y_1 + y_2 =$

$$\frac{-12m}{3m^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{9}{3m^2 - 1},$$

所以  $|DE| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - y_2|$

$$= \sqrt{1+m^2} \sqrt{\left(\frac{-12m}{3m^2-1}\right)^2 - 4 \cdot \frac{9}{3m^2-1}}$$

$$= \sqrt{1+m^2} \cdot \frac{6\sqrt{1+m^2}}{|3m^2-1|} = \frac{6(1+m^2)}{|3m^2-1|},$$

所以以  $DE$  为直径的圆的半径

$$R = \frac{3(1+m^2)}{|3m^2-1|}.$$

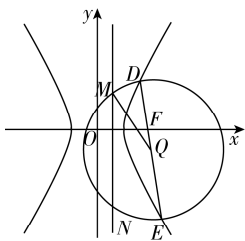
设线段  $DE$  的中点为  $Q(x_0, y_0)$ ,

则有  $y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-6m}{3m^2 - 1}$ , 则  $x_0 = my_0 + 2 = m \cdot$

$$\frac{-6m}{3m^2 - 1} + 2 = \frac{-2}{3m^2 - 1},$$

所以中点  $Q(x_0, y_0)$  到直线  $x = \frac{1}{2}$  的距离

$$d_1 = \left| \frac{1}{2} - \frac{-2}{3m^2 - 1} \right| = \left| \frac{3m^2 + 3}{2(3m^2 - 1)} \right|,$$



再由  $|MN| = 3\sqrt{3}$ , 结合勾股定理有

$$\left(\frac{|MN|}{2}\right)^2 + d_1^2 = R^2, \text{ 则 } \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 +$$

$$\left|\frac{3m^2 + 3}{2(3m^2 - 1)}\right|^2 = \left[\frac{3(1+m^2)}{|3m^2 - 1|}\right]^2, \text{ 解得 } m =$$

0 或  $m = \pm 1$ ,

所以直线  $DE$  的方程为  $x + y - 2 = 0$  或  $x - y - 2 = 0$  或  $x = 2$ .

### 3. 突破点 ▶ 椭圆中的范围问题

(1) 【解】设  $E$  的半焦距为  $c$ , 依题意,

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}, \text{ 所}$$

以  $a = \sqrt{2}b$ ,

又因为菱形  $ABCD$  的四个顶点恰为  $E$  的



四个顶点时, 面积为  $\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 6\sqrt{2}$ , 所以  $2\sqrt{2}b^2 = 6\sqrt{2}$ ,

所以  $b = \sqrt{3}, a = \sqrt{6}$ , 所以  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2) 【证明】当  $AC$  的斜率不存在时, 则  $BD$  的斜率为 0, 此时菱形  $ABCD$  的顶点为椭圆的四个顶点, 故  $AC$  与  $BD$  的交点为  $O$ ;

当  $AC$  的斜率为 0 时, 则  $BD$  的斜率不存在, 此时菱形  $ABCD$  的顶点为椭圆的四个顶点, 故  $AC$  与  $BD$  的交点为  $O$ ;

当  $AC$  的斜率存在且不为 0 时, 设直线  $AC$  的方程为  $y = kx + m (k \neq 0)$ ,

设点  $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ ,  $AC$  的中点为  $T(x', y')$ .

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = kx + m \end{cases} \text{得 } (2k^2 + 1)x^2 + 4kmx + 2m^2 - 6 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 16k^2m^2 - 4(2k^2 + 1)(2m^2 - 6) = 8(6k^2 - m^2 + 3) > 0,$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = -\frac{4km}{2k^2 + 1}, \text{ 所以 } x' = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2km}{2k^2 + 1}, y' = kx' + m = \frac{m}{2k^2 + 1},$$

$$\text{即 } T\left(\frac{-2km}{2k^2 + 1}, \frac{m}{2k^2 + 1}\right).$$

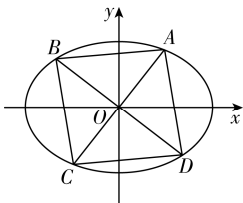
因为菱形的对角线互相垂直平分, 故直线  $BD$  的方程为  $y - \frac{m}{2k^2 + 1} = -\frac{1}{k}\left(x + \frac{2km}{2k^2 + 1}\right)$ , 化简得  $y = -\frac{1}{k}x - \frac{m}{2k^2 + 1}$ ,

$$\text{同理可得线段 } BD \text{ 中点的横坐标 } x'' = \frac{-2\left(-\frac{1}{k}\right)\left(-\frac{m}{2k^2 + 1}\right)}{2\left(-\frac{1}{k}\right)^2 + 1} = \frac{-2km}{(2k^2 + 1)(k^2 + 2)},$$

因为  $x' = x''$  且  $k \neq 0$ , 所以  $m = 0$ , 即点  $T(0, 0)$ , 即  $AC$  与  $BD$  的交点为坐标原点  $O$ .

综上所述,  $AC$  与  $BD$  的交点为坐标原点  $O$ .

(3) 【解】当  $AC$  的斜率不存在或斜率为 0 时, 易得菱形  $ABCD$  的边长为  $\sqrt{a^2 + b^2} = 3$ , 故其周长为 12.



当  $AC$  的斜率存在且不为 0 时, 由 (2) 知直线  $AC$  与椭圆  $E$  联立所得的方程为

$$(2k^2+1)x^2-6=0,$$

$$\text{所以 } |OA|^2 = x_1^2 + y_1^2 = (k^2+1)x_1^2 = \frac{6(k^2+1)}{2k^2+1}.$$

$$\text{同理 } |OB|^2 = \frac{6\left[\left(-\frac{1}{k}\right)^2+1\right]}{2\left(-\frac{1}{k}\right)^2+1} = \frac{6(k^2+1)}{k^2+2},$$

由勾股定理可得  $|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2$ ,

$$\text{所以 } |AB|^2 = 6(k^2+1) \left( \frac{1}{2k^2+1} + \frac{1}{k^2+2} \right)$$

$$= 2(2k^2+1+k^2+2) \left( \frac{1}{2k^2+1} + \frac{1}{k^2+2} \right)$$

$$= 2 \left( 2 + \frac{k^2+2}{2k^2+1} + \frac{2k^2+1}{k^2+2} \right) \geq 8,$$

当且仅当  $k^2=1$  时等号成立,

$$\text{令 } t = \frac{k^2+2}{2k^2+1}, \text{ 则 } t \in \left( \frac{1}{2}, 2 \right), \text{ 则 } |AB|^2 <$$

$$2 \left( 2 + 2 + \frac{1}{2} \right) = 9, \text{ 所以 } |AB| \in [2\sqrt{2}, 3),$$

即周长的取值范围为  $[8\sqrt{2}, 12)$ .

综上所述, 菱形  $ABCD$  周长的取值范围是  $[8\sqrt{2}, 12]$ .

- 4. 突破点** ▶ 求直线与抛物线相交所得弦的弦长、抛物线中的三角形面积问题、由导数求函数的最值(不含参)

**【解】**(1) 记  $A, B$  的坐标分别为  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 易知直线  $AB$  的斜率存在, 设直线  $AB$  为  $l: y = kx + \frac{p}{2}$ ,

联立抛物线方程有  $x^2 - 2pkx - p^2 = 0$ , 则有  $\Delta = 4p^2k^2 + 4p^2 > 0, x_1 + x_2 = 2pk, x_1x_2 = -p^2$ ,

所以  $|AB| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_2 - x_1| = 2p(1+k^2) \geq 2p$ , 当且仅当  $k=0$  时等号成立,

此时  $|AB| = 2p = 4$ , 解得  $p=2$ , 所以抛物线方程为  $x^2 = 4y$ .

(2) 分别设抛物线在  $A, B$  两点处的切线为

$l_1, l_2$ , 对二次函数  $y = \frac{x^2}{4}$  求导得  $y' = \frac{x}{2}$ ,

所以  $l_1: y = \frac{x_1}{2}(x - x_1) + y_1$ , 即  $x_1x - 2y - 2y_1 = 0$ .

同理,  $l_2: x_2x - 2y - 2y_2 = 0$ ,

设点  $M(x_0, y_0)$ , 则有  $\begin{cases} x_1x_0 - 2y_0 - 2y_1 = 0, \\ x_2x_0 - 2y_0 - 2y_2 = 0, \end{cases}$

所以直线  $AB$  的方程为  $x_0x - 2y_0 - 2y = 0$ ,

因为直线  $AB$  过焦点  $F(0, 1)$ , 所以解得  $y_0 = -1$ , 所以  $M(x_0, -1)$ ,

则直线  $AB$  方程为  $y = \frac{x_0}{2}x + 1$ , 点  $M$  的轨迹为准线  $y = -1$ .

联立直线  $AB$  与抛物线方程有  $x^2 - 2x_0x - 4 = 0$ , 所以  $|x_2 - x_1| = 2\sqrt{x_0^2 + 4}$ ,

过点  $M$  作  $x$  轴的垂线  $l$  交直线  $AB$  于点  $M_1$ , 则  $M_1\left(x_0, \frac{x_0^2}{2} + 1\right)$ , 所以  $|MM_1| =$

$$\frac{x_0^2}{2} + 2,$$

所以  $\triangle MAB$  的面积  $S_1 = \frac{1}{2} |MM_1| \cdot |x_2 -$

$$x_1| = \frac{1}{2} (x_0^2 + 4) \sqrt{x_0^2 + 4},$$

同理直线  $CD$  方程为  $y = \frac{x_0}{2}x + \frac{1}{2}$ , 联立抛

物线方程得  $x^2 - 2x_0x - 2 = 0$ ,

记  $C, D$  的坐标分别为  $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ ,

$$\text{则有 } |x_4 - x_3| = 2\sqrt{x_0^2 + 2},$$

令直线  $l$  交直线  $CD$  于点  $M_2$ , 则

$$M_2\left(x_0, \frac{x_0^2 + 1}{2}\right),$$

$$\text{所以 } |MM_2| = \frac{x_0^2 + 3}{2},$$

所以  $\triangle MCD$  的面积  $S_2 = \frac{1}{2} |MM_2| \cdot |x_4 -$

$$x_3| = \frac{1}{2} (x_0^2 + 3) \cdot \sqrt{x_0^2 + 2},$$

$$\text{所以 } \frac{S_2}{S_1} = \frac{(x_0^2 + 3) \sqrt{x_0^2 + 2}}{(x_0^2 + 4) \sqrt{x_0^2 + 4}}, \text{ 令 } t = \sqrt{x_0^2 + 4},$$

则  $t \geq 2$ ,

$$\text{则 } \frac{S_2}{S_1} = \frac{(t^2 - 1) \sqrt{t^2 - 2}}{t^3} = \sqrt{\frac{t^6 - 4t^4 + 5t^2 - 2}{t^6}},$$

$$\text{又令 } u = \frac{1}{t^2}, \text{ 则 } u \in \left(0, \frac{1}{4}\right],$$

$$\text{则有 } \frac{S_2}{S_1} = \sqrt{-2u^3 + 5u^2 - 4u + 1},$$

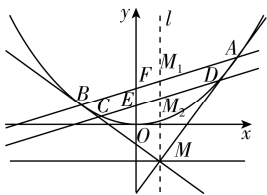
$$\text{令 } g(u) = -2u^3 + 5u^2 - 4u + 1, u \in \left(0, \frac{1}{4}\right],$$

$$\text{则 } g'(u) = -6u^2 + 10u - 4 = -2(u - 1) \cdot (3u - 2),$$

所以  $g(u)$  在  $\left(0, \frac{1}{4}\right]$  上单调递减, 所

以  $g(u) \in \left[\frac{9}{32}, 1\right)$ , 则  $\frac{S_2}{S_1}$  的取值范围是

$$\left[\frac{3\sqrt{2}}{8}, 1\right).$$



(3) 由(2)知, 直线  $AB$  方程为  $y = \frac{x_0}{2}x + 1$ ,

$$\text{则有 } y_2 - y_1 = \frac{x_0}{2} (x_2 - x_1),$$

$$\overrightarrow{FM} = (x_0, -2), \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{AB} = x_0(x_2 - x_1) - 2(y_2 - y_1) = x_0(x_2 - x_1) - x_0(x_2 - x_1) = 0,$$

所以  $FM \perp AB$ , 所以点  $F$  在以线段  $AM$  为直径的圆上,



同理,点  $F$  也在以线段  $BM$  为直径的圆上,所以两圆的相交弦即为线段  $FM$ ,即  $FM=MG$ ,

则  $|FM| \geq 2$ , 当且仅当  $FM \perp x$  轴时等号成立,此时以线段  $FM$  为直径的圆面积为  $\pi$ ,

又  $|FM|$  的取值范围是  $[2, +\infty)$ , 所以以线段  $MG$  为直径的圆面积的取值范围是  $[\pi, +\infty)$ .

## 专题2 圆锥曲线中的范围与最值问题

刷

难关

### 1. 突破点 ▶ 轨迹问题——椭圆、椭圆中的最值问题、根据弦长求参数

【解】(1) 设  $P(x, y)$ , 由  $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{1}{4}$ ,

得  $\frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{1}{4} (x \neq \pm 2)$ , 整理得  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

因为点  $P$  异于点  $A, B$ , 所以  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 (y \neq 0)$ .

(2) 设  $l$  的方程为  $y = x + m$ ,  $E(x_1, y_1)$ ,  $F(x_2, y_2)$ , 则  $m \neq \pm 2$ .

联立  $\begin{cases} y = x + m, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases}$  整理得  $5x^2 + 8mx + 4m^2 - 4 = 0$ ,

则  $\Delta = (8m)^2 - 20(4m^2 - 4) = 80 - 16m^2 > 0$ , 即  $m^2 < 5$ ,

所以  $x_1 + x_2 = -\frac{8m}{5}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 4}{5}$ ,

则  $|EF| = \sqrt{2} \times \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{80 - 16m^2}}{5} = \frac{4\sqrt{6}}{5}$ , 解得  $m = \pm\sqrt{2}$ , 满足题设,

所以  $l$  的方程为  $y = x \pm \sqrt{2}$ .

(3) 设直线  $PA$  的方程为  $y = k(x + 2)$ ,  $k \neq 0$ , 则直线  $PB$  的方程为  $y = -\frac{1}{4k}(x - 2)$ .

令  $x = 4$ , 得  $M(4, 6k)$ ,

同理得  $N(4, -\frac{1}{2k})$ ,

则  $|MN| = \left| 6k + \frac{1}{2k} \right| = 6|k| + \frac{1}{2|k|}$ .

在  $\triangle PMN$  中, 由正弦定理知  $r_1 = \frac{|MN|}{2\sin \angle MPN}$ , 同理可得  $r_2 = \frac{|AB|}{2\sin \angle APB}$ .

因为  $\angle MPN + \angle APB = \pi$ ,

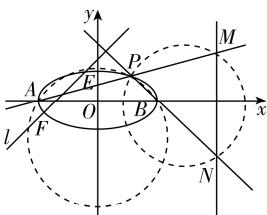
所以  $\sin \angle MPN = \sin \angle APB$ ,

从而  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{|MN|}{|AB|} = \frac{6|k| + \frac{1}{2|k|}}{4} \geq \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,



当且仅当  $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{6}$  时等号成立,

故  $\frac{r_1}{r_2}$  的最小值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .



### 方法总结

#### 求解圆锥曲线中范围与最

#### 值问题的一般方法

(1) 几何法: 若题目中的条件和结论能明显体现几何特征和意义, 则考虑利用圆、圆锥曲线的定义、图形及几何性质求解;

(2) 代数法: 若题目给出的条件和结论的几何特征不明显, 则可以建立目标函数, 再求这个目标函数的最值(或值域).

常用技巧: 可利用不等式、函数性质、三角换元、导数等知识, 注意自变量的取值范围.

## 2. 突破点 ▶ 双曲线中参数的取值范围、双曲线中的最值问题、求双曲线的轨迹方程

【解】(1) 设  $M(x, y)$ , 由题意知

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 2|x-1|,$$

化简得  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ .

(2) (i) 因为曲线  $C$  方程为  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ ,

所以  $A(-2, 0), B(2, 0)$ .

设直线  $PA$  的方程为  $x = ty - 2$ , 则  $t = \frac{3}{m}$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} x = ty - 2, \\ 3x^2 - y^2 = 12, \end{cases} \text{得 } (3t^2 - 1)y^2 - 12ty = 0,$$

$$\text{故 } y_D = \frac{12t}{3t^2 - 1},$$

因为点  $D$  在双曲线右支上, 所以  $y_P \cdot$

$$y_D > 0, \text{ 得 } \frac{12mt}{3t^2 - 1} > 0, \text{ 即 } \frac{36}{\frac{27}{m^2} - 1} > 0, \text{ 解得}$$

$$0 < m^2 < 27,$$

设直线  $PB$  的方程为  $x = ny + 2$ , 则

$$n = -\frac{1}{m},$$

$$\text{联立} \begin{cases} x = ny + 2, \\ 3x^2 - y^2 = 12, \end{cases} \text{得 } (3n^2 - 1)y^2 + 12ny =$$

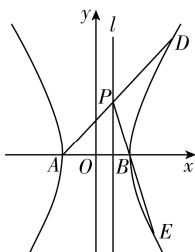
$$0, \text{ 故 } y_E = \frac{-12n}{3n^2 - 1},$$

因为点  $E$  在双曲线右支上, 所以  $y_P \cdot y_E <$

$$0, \text{ 得 } \frac{-12mn}{3n^2 - 1} < 0, \text{ 即 } \frac{12}{\frac{3}{m^2} - 1} < 0, \text{ 解得 } m^2 > 3,$$

综上所述,  $3 < m^2 < 27$ .





$$(ii) \frac{|\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}|}{|\vec{PD}| \cdot |\vec{PE}|} = \frac{|\vec{PA}|}{|\vec{PD}|} \cdot \frac{|\vec{PB}|}{|\vec{PE}|} =$$

$$\left| \frac{m}{y_D - m} \right| \cdot \left| \frac{m}{y_E - m} \right|, y_D = \frac{12 \cdot \frac{3}{m}}{3 \cdot \frac{9}{m^2} - 1} =$$

$$\frac{36m}{27 - m^2}, y_E = \frac{-12 \cdot \left(-\frac{1}{m}\right)}{3 \cdot \frac{1}{m^2} - 1} = \frac{12m}{3 - m^2},$$

$$\text{故 } \frac{|\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}|}{|\vec{PD}| \cdot |\vec{PE}|} = \left| \frac{m}{\frac{36m}{27 - m^2} - m} \right| \cdot \left| \frac{m}{\frac{12m}{3 - m^2} - m} \right| =$$

$$\left| \frac{27 - m^2}{m^2 + 9} \cdot \frac{3 - m^2}{9 + m^2} \right|,$$

令  $m^2 + 9 = \lambda$ , 则  $12 < \lambda < 36$ ,

$$\frac{|\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}|}{|\vec{PD}| \cdot |\vec{PE}|} = -\frac{(36 - \lambda)(12 - \lambda)}{\lambda^2} = -\frac{432}{\lambda^2} +$$

$$\frac{48}{\lambda} - 1 = -432 \left( \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{9\lambda} \right) - 1 = -432 \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{18} \right)^2 + \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3},$$

当且仅当  $\lambda = 18$ , 即  $m = \pm 3$  时取等号,

故  $\frac{|\vec{PA}| \cdot |\vec{PB}|}{|\vec{PD}| \cdot |\vec{PE}|}$  的最大值为  $\frac{1}{3}$ .

**3. 突破点** ▶ 直线与双曲线的位置关系、根据直线与双曲线的位置关系求参数或范围

**【解】** (1) 将  $x = -c$  代入双曲线方程  $\frac{x^2}{a^2} -$

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0), \text{ 得 } y = \pm \frac{b^2}{a},$$

$$\text{所以 } |PF_1| = |QF_1| = \frac{b^2}{a},$$

$$\text{所以 } |PF_2| = |QF_2| = \frac{b^2}{a} + 2a,$$

$$\text{所以由题得 } \begin{cases} \frac{b}{a} = \sqrt{3}, \\ \frac{4b^2}{a} + 4a = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ b = \sqrt{3}, \end{cases}$$

所以双曲线  $E$  的方程为  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2) 由题意可知直线  $AB$  斜率存在且其斜率  $k \neq \pm\sqrt{3}$ ,

设直线  $AB: y = kx + m$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 设线段  $AB$  的中点为  $M$ .

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (3 - k^2) \cdot$$



$$x^2 - 2kmx - m^2 - 3 = 0, 3 - k^2 \neq 0,$$

$$\text{则 } \Delta = (-2km)^2 + 4(3 - k^2)(m^2 + 3) = 12(3 + m^2 - k^2) > 0, \text{ 即 } m^2 > k^2 - 3,$$

$$\text{所以 } x_1 + x_2 = \frac{2km}{3 - k^2}, x_1 x_2 = -\frac{3 + m^2}{3 - k^2},$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 2m = k \cdot \frac{2km}{3 - k^2} +$$

$$2m = \frac{6m}{3 - k^2},$$

$$\text{所以 } M\left(\frac{km}{3 - k^2}, \frac{3m}{3 - k^2}\right), k_{MC} = \frac{y_M - y_C}{x_M} = \frac{\frac{3m}{3 - k^2} - 4}{\frac{km}{3 - k^2}} = \frac{3m - 12 + 4k^2}{km}.$$

$$\text{由 } CM \text{ 为线段 } AB \text{ 的中垂线知 } k_{MC} \cdot k_{AB} = -1, \text{ 所以 } \frac{3m - 12 + 4k^2}{km} = -\frac{1}{k}, \text{ 解得 } m = 3 - k^2.$$

又由点  $A, B$  在双曲线的右支上可得

$$x_1 x_2 = -\frac{3 + m^2}{3 - k^2} = -\frac{3 + m^2}{m} > 0 \Rightarrow m = 3 - k^2 < 0 \Rightarrow k^2 > 3,$$

$$\text{且 } x_1 + x_2 = \frac{2km}{3 - k^2} = 2k > 0 \Rightarrow k > 0,$$

$$\text{且 } \Delta = 12(m^2 - k^2 + 3) > 0 \Rightarrow (3 - k^2)^2 + (3 - k^2) = (3 - k^2)(4 - k^2) > 0 \Rightarrow k^2 < 3 \text{ 或 } k^2 > 4,$$

综上  $k^2 > 4$ , 且  $k > 0$ , 即  $k > 2$ ,

$$\text{由 } m = 3 - k^2 \text{ 得 } x_1 + x_2 = 2k, x_1 x_2 = -\frac{3 + m^2}{m},$$

$$M(k, 3),$$

$$\text{又 } |CM| = \sqrt{1 + k^2},$$

$$\text{所以 } \tan \angle ACM = \frac{|AM|}{|CM|} = \frac{\frac{1}{2}|AB|}{|CM|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \cdot \sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{1 + k^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{4k^2 + \frac{4(3 + m^2)}{m}}$$

$$= \sqrt{3 + \frac{3}{3 - k^2}}.$$

因为  $k^2 > 4$ , 所以  $m = 3 - k^2 < -1$ , 故  $-3 <$

$$\frac{3}{3 - k^2} < 0, \text{ 所以 } \sqrt{3 + \frac{3}{3 - k^2}} \in (0, \sqrt{3}),$$

$$\text{所以 } \angle ACM \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{所以 } \angle ACB = 2\angle ACM \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right).$$

#### 4. 突破点 ▶ 抛物线中的三角形或四边形面积问题、直线与抛物线交点相关问题

【解】(1) 如图, 当  $l_1 \perp x$  轴时, 令  $x = 2$ , 代入抛物线方程  $y^2 = 2x$ , 则  $A(2, 2), B(2, -2), |AB| = 4$ ,

由题意直线  $l_2$  斜率存在, 设直线  $l_2$ :



$y = kx - 2k, C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ , 由于

$$S_{\text{四边形}ACBD} = \frac{1}{2} \times 4 \times |x_1 - x_2| = 4\sqrt{5},$$

$$\text{则 } |x_1 - x_2| = 2\sqrt{5}.$$

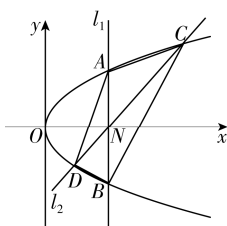
$$\text{由于 } \begin{cases} y = kx - 2k, \\ y^2 = 2x, \end{cases} \text{ 则 } k^2 x^2 - (4k^2 + 2)x + 4k^2 = 0, \Delta = [-(4k^2 + 2)]^2 - 16k^4 > 0,$$

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 + \frac{2}{k^2}, \\ x_1 x_2 = 4, \end{cases}$$

$$(x_1 - x_2)^2 = \left(4 + \frac{2}{k^2}\right)^2 - 16 = 20,$$

$$\text{则 } 4 + \frac{2}{k^2} = 6, \text{ 则 } k = \pm 1,$$

所以直线  $l_2$  的方程为  $x + y - 2 = 0$  或  $x - y - 2 = 0$ .



(2) 设点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$ , 由题意直线  $AB$  和  $CD$  斜率存在且不为零,

$$\text{因为 } k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2}{y_1 + y_2}, \text{ 同理, } k_{CD} = \frac{2}{y_3 + y_4}, k_{AC} = \frac{2}{y_1 + y_3}, k_{BD} = \frac{2}{y_2 + y_4},$$

$$\text{所以直线 } AB: y - y_1 = \frac{2}{y_2 + y_1}(x - x_1), \text{ 化简}$$

$$\text{可得 } (y_1 + y_2)y - y_1 y_2 = 2x,$$

$$\text{同理可得, 直线 } CD: (y_3 + y_4)y - y_3 y_4 = 2x,$$

$$\text{直线 } AC: (y_1 + y_3)y - y_1 y_3 = 2x,$$

$$\text{直线 } BD: (y_2 + y_4)y - y_2 y_4 = 2x,$$

又因为  $k_{AB} = -k_{CD}$ , 直线  $AB$  和直线  $CD$  交于点  $N(2, 0)$ ,

$$\text{所以 } \frac{2}{y_1 + y_2} = -\frac{2}{y_3 + y_4}, \text{ 且 } -y_1 y_2 = -y_3 y_4 = 4,$$

$$\text{即 } \begin{cases} y_1 y_2 = y_3 y_4 = -4, \\ y_1 + y_2 = -(y_3 + y_4), \end{cases}$$

$$y_1 - \frac{4}{y_1} = -y_3 + \frac{4}{y_3}, \text{ 且 } y_1 \neq -y_3, \text{ 化简得}$$

$$y_1 y_3 = 4, \text{ 所以 } y_3 = -y_2, y_4 = -y_1,$$

则联立直线  $AC$  与  $BD$  的方程, 得

$$\begin{cases} \left(y_1 + \frac{4}{y_1}\right)y = 2x + 4, \\ -\left(y_1 + \frac{4}{y_1}\right)y = 2x + 4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -2, \\ y = 0, \end{cases} \text{ 所以}$$

点  $M$  的坐标为  $(-2, 0)$ ,

$$\text{由于 } y_4 = -y_1, \text{ 则 } x_4 = x_1, \text{ 所以 } k_{MD} = \frac{y_4}{x_4 + 2} =$$

$$\frac{-y_1}{x_1 + 2} = -k_{MA}, \text{ 则 } x \text{ 轴平分 } \angle AMB,$$

设  $\triangle MAB$  的内切圆圆心为  $Q(n, 0), -2 < n < 2$ ,



则点  $Q$  到直线  $MA$  的距离  $r =$

$$\frac{2n+4}{\sqrt{4+\left(y_1+\frac{4}{y_1}\right)^2}},$$

点  $Q$  到直线  $AB$  的距离  $r =$

$$\frac{4-2n}{\sqrt{4+\left(y_1-\frac{4}{y_1}\right)^2}},$$

所以  $\frac{4+2n}{\sqrt{4+\left(y_1+\frac{4}{y_1}\right)^2}} = \frac{4-2n}{\sqrt{4+\left(y_1-\frac{4}{y_1}\right)^2}}.$

方法一: 化简可得  $\frac{2+n}{2-n} = \frac{\sqrt{4+\left(y_1+\frac{4}{y_1}\right)^2}}{\sqrt{4+\left(y_1-\frac{4}{y_1}\right)^2}} =$

$$\sqrt{\frac{\left(y_1^2+\frac{16}{y_1^2}\right)+12}{\left(y_1^2+\frac{16}{y_1^2}\right)-4}} = \sqrt{1+\frac{16}{\left(y_1^2+\frac{16}{y_1^2}\right)-4}},$$

由于  $y_1 \neq 2$ , 则  $y_1^2 + \frac{16}{y_1^2} > 8$ ,

所以  $1 < \frac{2+n}{2-n} < \sqrt{5}$ ,

则  $0 < n < 3 - \sqrt{5}$ , 即  $n \in (0, 3 - \sqrt{5})$ .

方法二: 由  $\frac{4+2n}{\sqrt{4+\left(y_1+\frac{4}{y_1}\right)^2}} =$

$$\frac{4-2n}{\sqrt{4+\left(y_1-\frac{4}{y_1}\right)^2}} \text{ 化简得到 } n =$$

$$\frac{\left[\sqrt{4+\left(y_1+\frac{4}{y_1}\right)^2} - \sqrt{4+\left(y_1-\frac{4}{y_1}\right)^2}\right]^2}{8} =$$

$$\frac{\left[\sqrt{12+\left(y_1^2+\frac{16}{y_1^2}\right)} - \sqrt{-4+\left(y_1^2+\frac{16}{y_1^2}\right)}\right]^2}{8},$$

令  $z = y_1^2 + \frac{16}{y_1^2}$ , 由于  $y_1 \neq 2$ , 则  $z > 8$ .

则  $n = \frac{(\sqrt{12+z} - \sqrt{-4+z})^2}{8}$ , 设  $f(z) =$

$$\sqrt{12+z} - \sqrt{-4+z}, z > 8,$$

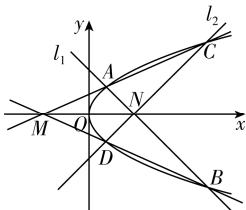
则  $f'(z) = \frac{1}{2\sqrt{12+z}} - \frac{1}{2\sqrt{z-4}} =$

$$\frac{\sqrt{z-4} - \sqrt{z+12}}{2\sqrt{12+z}\sqrt{z-4}} < 0,$$

则  $f(z)$  在  $(8, +\infty)$  上单调递减, 则

$f(z) < f(8) = 2\sqrt{5} - 2$ , 所以  $0 < n < 3 - \sqrt{5}$ , 即

$n \in (0, 3 - \sqrt{5})$ .





## 一题多解

(1) 设直线  $l_2: x = ty + 2$ , 倾斜角为  $\alpha$ , 由对称性知  $l_2$  有两条, 且关于直线  $l_1$  对称,

不妨设  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , 那么  $\angle ANC = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $t > 0$ ,

$$\text{则 } S_{\text{四边形}ACBD} = \frac{1}{2} \times 4 \times |CD| \times \cos \alpha = 4\sqrt{5},$$

$$\text{则 } |CD| \cos \alpha = 2\sqrt{5},$$

$$\text{由于 } \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x = ty + 2 \end{cases} \Rightarrow y^2 - 2ty - 4 = 0, \Delta = 4t^2 + 16 >$$

$$0, \text{ 则 } \begin{cases} y_1 + y_2 = 2t, \\ y_1 y_2 = -4, \end{cases}$$

$$\text{则 } |CD| = \sqrt{1+t^2} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{1+t^2} \cdot$$

$$\sqrt{4t^2 + 16}, \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\text{所以 } |CD| \cos \alpha = 2t \sqrt{t^2 + 4} = 2\sqrt{5}, \text{ 即 } (t^2 - 1)(t^2 + 5) = 0,$$

则  $t = 1$ , 此时  $l_2: x = y + 2$ , 由对称性得, 另一条符合题意的直线方程为  $x = -y + 2$ , 所以直线  $l_2$  的方程为  $x + y - 2 = 0$  或  $x - y - 2 = 0$ .

(2) 点  $M(-2, 0)$  证明同原解析.

设  $\triangle MAB$  的内切圆圆心为  $Q(n, 0)$ ,  $-2 < n < 2$ ,

由于  $|MQ| = 2 + n$ ,  $|NQ| = 2 - n$ , 设半径为  $r$ ,  $\angle AMQ = \alpha$ ,  $\angle ANQ = \beta$ , 直线  $AC: x = t_{AM}y - 2$ , 直线  $AB: x = t_{AB}y + 2$ , 则  $\sin \alpha =$

$$\frac{r}{2+n} = \frac{1}{\sqrt{1+t_{AM}^2}},$$

$$\sin(\pi - \beta) = \sin \beta = \frac{r}{2-n} = \frac{1}{\sqrt{1+t_{AB}^2}}, \text{ 那么}$$

$$\frac{2+n}{2-n} = \sqrt{\frac{1+t_{MA}^2}{1+t_{AB}^2}} = \sqrt{\frac{y_1^2 + (x_1 + 2)^2}{y_1^2 + (x_1 - 2)^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + 6x_1 + 4}{x_1^2 - 2x_1 + 4}} \quad \left( \text{提示: 或在 } \triangle AMN \text{ 中, 由角} \right.$$

$$\text{平分线定理得 } \frac{|MQ|}{|NQ|} = \frac{|AM|}{|AN|}, \text{ 则 } \frac{2+n}{2-n} =$$

$$\frac{\sqrt{(x_1 + 2)^2 + y_1^2}}{\sqrt{(x_1 - 2)^2 + y_1^2}} = \sqrt{\frac{x_1^2 + 6x_1 + 4}{x_1^2 - 2x_1 + 4}} \Big).$$

$$\text{设 } f(x_1) = \frac{x_1^2 + 6x_1 + 4}{x_1^2 - 2x_1 + 4} = \frac{8x_1}{x_1^2 - 2x_1 + 4} + 1 =$$

$$\frac{8}{x_1 + \frac{4}{x_1} - 2} + 1 > 1, x_1 > 0,$$

由于  $x_1 \neq 2$ , 则  $x_1 + \frac{4}{x_1} > 4$ , 所以  $1 <$

$$\frac{2+n}{2-n} < \sqrt{5},$$

$$\text{解得 } 0 < n < 3 - \sqrt{5},$$

$$\text{即 } n \in (0, 3 - \sqrt{5}).$$



## 专题3 圆锥曲线中的定点、定值与定直线问题

刷

难关

1. **突破点** ▶ 直线与圆的位置关系问题、求直线与抛物线相交所得弦的弦长、抛物线中的直线过定点问题

【解】(1) 联立  $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ x - y + 1 = 0, \end{cases}$  整理得  $y^2 - 2py + 2p = 0$ .

因为  $l_1$  与  $W$  相切, 所以  $\Delta_1 = (-2p)^2 - 8p = 0$ , 解得  $p = 2$  或  $p = 0$  (舍去),

故  $W$  的方程为  $y^2 = 4x$ .

(2) 由(1)可知  $F(1, 0)$ .

因为  $l_1 \parallel l_2$ , 所以  $l_2$  的方程为  $x - y - 1 = 0$ .

设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ .

联立  $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x - y - 1 = 0, \end{cases}$  整理得  $y^2 - 4y - 4 = 0$ ,

$\Delta_2 = 32 > 0$ , 则  $y_1 + y_2 = 4$ ,

则  $|MN| = x_1 + x_2 + p = y_1 + 1 + y_2 + 1 + 2 = 8$ .

(3) 直线  $l$  过定点.

设  $A(4a^2, 4a), B(4b^2, 4b), a \neq b, a \neq 1, b \neq 1$ ,

则直线  $l$  的方程为  $x = (a+b)y - 4ab$  ①,

直线  $AP$  的方程为  $x = (a+1)y - 4a$ , 直线

$BP$  的方程为  $x = (b+1)y - 4b$ .

设动圆  $F$  的半径为  $r$ , 易知  $|PF| = 5$ , 则  $0 < r < 5$ , 且  $r \neq 4$ .

因为直线  $AP$  和圆  $F$  相切, 所以

$$\frac{|1+4a|}{\sqrt{(a+1)^2+1}} = r,$$

整理得  $(16-r^2)a^2 + (8-2r^2)a + 1-2r^2 = 0$ ,

同理可得  $(16-r^2)b^2 + (8-2r^2)b + 1-2r^2 = 0$ ,

所以  $a, b$  是关于  $x$  的一元二次方程  $(16-r^2)x^2 + (8-2r^2)x + 1-2r^2 = 0$  的两个不相等的实数根, 则  $16-r^2 \neq 0$ , 且  $\Delta_3 = r^2(-4r^2+100) > 0$ ,

则  $a+b = \frac{2r^2-8}{16-r^2}, ab = \frac{1-2r^2}{16-r^2}$ , 代入①式整理

得  $x = \frac{(8+2y)r^2 - (8y+4)}{16-r^2}$ .

由  $\frac{8y+4}{8+2y} = 16$ , 得  $y = -\frac{31}{6}$ , 此时  $x = \frac{7}{3}$ , 故

直线  $l$  过定点  $\left(\frac{7}{3}, -\frac{31}{6}\right)$ .

2. **突破点** ▶ 求双曲线的方程、求双曲线中三角形(四边形)的面积问题、双曲线中的动点在定直线上问题

(1) 【解】双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的渐近线

方程为  $bx \pm ay = 0$ , 设  $F(c, 0)$ , 则

$$\frac{bc}{\sqrt{a^2+b^2}} = b = 2\sqrt{3},$$

由  $|AB| = 2a = 4$ , 得  $a = 2$ ,



所以双曲线  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ .

(2) 【证明】由 (1) 知,  $A(-2, 0), B(2, 0), F(4, 0)$ , 直线  $l$  不垂直于  $y$  轴, 设直线  $l$  的方程为  $x = ty + 4$ ,

由  $\begin{cases} x = ty + 4, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 \end{cases}$  消去  $x$  得  $(3t^2 - 1)y^2 + 24ty + 36 = 0$ , 设  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ,

可得  $\begin{cases} 3t^2 - 1 \neq 0, \\ \Delta = 144(t^2 + 1) > 0, \end{cases} y_1 + y_2 = -\frac{24t}{3t^2 - 1},$

$y_1 y_2 = \frac{36}{3t^2 - 1} < 0$ , 则  $ty_1 y_2 = -\frac{3}{2}(y_1 + y_2)$ ,

$t^2 < \frac{1}{3}$ .

直线  $AP: y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$  ①, 直线  $BQ: y =$

$\frac{y_2}{x_2 - 2}(x - 2)$  ②,

联立 ① ② 得  $\frac{x+2}{x-2} = \frac{y_2(ty_1+6)}{y_1(ty_2+2)} =$

$-\frac{\frac{3}{2}(y_1+y_2)+6y_2}{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+2y_1} = \frac{-3y_1+9y_2}{y_1-3y_2} = -3$ , 解得

$x = 1$ ,

所以直线  $AP$  与  $BQ$  的交点  $T$  在定直线  $x = 1$  上.

(3) 【解】由 (2) 知,  $\frac{S_1}{S_2} =$

$\frac{\frac{1}{2}|TP||TQ|\sin\angle PTQ}{\frac{1}{2}|TA||TB|\sin\angle ATB} = \frac{|TP|}{|TA|} \cdot \frac{|TQ|}{|TB|} =$

$\frac{x_1-1}{3} \cdot \frac{x_2-1}{1} = 5$ ,

则  $(ty_1+3)(ty_2+3) = 15$ , 即  $t^2 y_1 y_2 + 3t(y_1 + y_2) - 6 = 0$ ,

即  $\frac{36t^2}{3t^2-1} - \frac{72t^2}{3t^2-1} - 6 = 0$ , 解得  $t^2 = \frac{1}{9}$ , 即  $t =$

$\pm \frac{1}{3}$ ,

所以直线  $l$  的方程为  $x = \frac{1}{3}y + 4$  或  $x =$

$-\frac{1}{3}y + 4$ , 即  $3x - y - 12 = 0$  或  $3x + y - 12 = 0$ .

### 3. 突破点 ▶ 求椭圆的标准方程、椭圆中的直线过定点问题

【解】(1) 因为椭圆  $C$  的离心率为  $\frac{1}{2}$ , 且

过点  $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$ , 所以  $a = 2c, \frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1$ ,

又  $a^2 = b^2 + c^2$ , 解得  $a^2 = 4, b^2 = 3$ , 所以椭圆

$C$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2) 因为直线  $l$  的斜率为 1, 所以设直线  $l$



的方程为  $y=x+m$ ,  $M(x_1, y_1)$ ,  $N(x_2, y_2)$ ,

由  $\begin{cases} y=x+m, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}$  消去  $y$  并整理得  $7x^2 +$

$$8mx + 4m^2 - 12 = 0,$$

则  $\Delta_1 = 64m^2 - 4 \times 7 \times (4m^2 - 12) = 16(21 - 3m^2) > 0$ , 解得  $m^2 < 7$ .

$$x_1 + x_2 = -\frac{8m}{7}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{7}.$$

设椭圆的右顶点为  $A$ , 由 (1) 得, 点  $A$  的坐标为  $(2, 0)$ ,

因为以  $MN$  为直径的圆经过椭圆  $C$  的右顶点, 所以  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 0$ ,

所以  $(x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 = 0$ , 即  $(x_1 - 2) \cdot (x_2 - 2) + (x_1 + m)(x_2 + m) = 0$ ,

整理得  $2x_1 x_2 + (m - 2)(x_1 + x_2) + 4 + m^2 = 0$ ,

所以  $2 \times \frac{4m^2 - 12}{7} - (m - 2) \times \frac{8m}{7} + 4 + m^2 = 0$ ,

即  $7m^2 + 16m + 4 = 0$ , 解得  $m = -2$  或  $m = -\frac{2}{7}$ , 满足题意.

所以直线  $l$  的方程为  $x - y - 2 = 0$  或  $7x - 7y - 2 = 0$ .

(3) 当直线  $l$  的斜率不存在时, 直线  $l$  与椭圆  $C$  的两个交点分布在  $x$  轴两侧, 不合题意.

所以直线  $l$  的斜率存在, 设直线  $l$  的方程为  $y = kx + n$ ,  $M(x_3, y_3)$ ,  $N(x_4, y_4)$ ,

由  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = kx + n \end{cases}$  得  $(3 + 4k^2)x^2 + 8knx + 4n^2 -$

$12 = 0$ , 所以  $\Delta_2 = -48(n^2 - 4k^2 - 3) > 0$ ,  $x_3 +$

$$x_4 = \frac{-8kn}{3 + 4k^2}, x_3 x_4 = \frac{4n^2 - 12}{3 + 4k^2}.$$

因为  $\angle APM = \angle OPN$ , 所以  $k_{PM} + k_{PN} = 0$ ,

即  $\frac{y_3}{x_3 - \frac{2}{3}} + \frac{y_4}{x_4 - \frac{2}{3}} = 0$ , 整理得  $2kx_3 x_4 +$

$\left(n - \frac{2}{3}k\right)(x_3 + x_4) - \frac{4n}{3} = 0$ , 所以  $n = -6k$ ,

所以直线  $l$  的方程为  $y = kx - 6k = k(x - 6)$ ,

所以直线  $l$  过定点, 定点坐标为  $(6, 0)$ .

#### 4. 突破点 ▶ 根据直线与双曲线的位置关系求参数、双曲线中的定值问题

(1) 【解】联立  $\begin{cases} \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = x + 1, \end{cases}$  得  $(3 - m)x^2 -$

$$2mx - 4m = 0,$$

可得  $\begin{cases} m > 0, \\ 3 - m \neq 0, \\ 4m^2 + 16m(3 - m) > 0, \end{cases}$  解得  $m \in (0,$

$3) \cup (3, 4)$ .

(2) 【证明】设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 则

$$x_1 + x_2 = \frac{2m}{3 - m}, x_1 x_2 = \frac{-4m}{3 - m},$$

设  $AB$  的中点为  $E(x_0, y_0)$ , 则  $x_0 = \frac{m}{3 - m}$ ,



从而  $y_0 = x_0 + 1 = \frac{3}{3-m}$ , 即  $E\left(\frac{m}{3-m}, \frac{3}{3-m}\right)$ .

双曲线  $M$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m}}x$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m}}x, \\ y = x + 1, \end{cases} \text{ 可得 } x = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}-\sqrt{m}},$$

不妨设  $x_c = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}-\sqrt{m}}$ , 则  $y_c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{m}}x_c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{m}}$ ,

所以  $C\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{3}-\sqrt{m}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{m}}\right)$ ,

同理可得  $D\left(\frac{-\sqrt{m}}{\sqrt{3}+\sqrt{m}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{m}}\right)$ ,

从而可得  $CD$  的中点坐标为  $\left(\frac{m}{3-m}, \frac{3}{3-m}\right)$ , 故  $CD$  的中点与  $AB$  的中点重合,

则  $AE = EB, CE = ED$ , 则  $AC = BD$ .

(3) 【解】不存在, 理由如下:

设过  $P(x_3, y_3)$  且与双曲线  $N: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = \lambda$  相切的直线的方程为  $y - y_3 = k(x - x_3)$ , 即  $y = kx + y_3 - kx_3$ .

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = \lambda, \\ y = kx + y_3 - kx_3, \end{cases} \text{ 可得 } (3 - 2k^2)x^2 -$$

$$4k(y_3 - kx_3)x - 2(y_3 - kx_3)^2 - 6\lambda = 0,$$

由题意可知  $3 - 2k^2 \neq 0$ ,  $\Delta = 16k^2(y_3 - kx_3)^2 + 4(3 - 2k^2)[2(y_3 - kx_3)^2 + 6\lambda] = 0$ ,

可得  $(y_3 - kx_3)^2 + \lambda(3 - 2k^2) = 0$ , 即  $(x_3^2 - 2\lambda)k^2 - 2x_3y_3k + y_3^2 + 3\lambda = 0$ ,

由题意可知  $k_1, k_2$  为方程  $(x_3^2 - 2\lambda)k^2 - 2x_3y_3k + y_3^2 + 3\lambda = 0$  的两个根,

则  $x_3^2 - 2\lambda \neq 0$ ,  $\Delta_1 = 4x_3^2y_3^2 - 4(x_3^2 - 2\lambda)(y_3^2 + 3\lambda) > 0$ ,

$$k_1 \cdot k_2 = \frac{y_3^2 + 3\lambda}{x_3^2 - 2\lambda} = \frac{3\left(\frac{x_3^2}{2} - 1\right) + 3\lambda}{x_3^2 - 2\lambda} = \frac{3x_3^2 - 6 + 6\lambda}{2x_3^2 - 4\lambda},$$

若  $k_1 \cdot k_2$  为定值, 则有  $\frac{3}{2} = \frac{-6 + 6\lambda}{-4\lambda}$ , 解得

$$\lambda = \frac{1}{2}, \text{ 此时 } k_1 \cdot k_2 = \frac{3}{2},$$

但此时  $\Delta_1 = 4x_3^2y_3^2 - 4(x_3^2 - 1)\left(y_3^2 + \frac{3}{2}\right) = -2(3x_3^2 - 2y_3^2) + 6 = -6 < 0$ ,

故不存在  $\lambda$ , 使得  $k_1 \cdot k_2$  为定值.

## 专题 4 圆锥曲线中的存在性问题

### 刷 难关

1. 突破点 ▶ 等差中项的应用、求抛物线的方程、抛物线中的存在性问题

【解】(1) 由题意可得  $k_{OD} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 所以



$$k_{AB} = -\sqrt{3},$$

所以直线  $AB$  的方程为  $y - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}(x - 6)$ ,

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 2px, \\ y - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}(x - 6), \end{cases}$$

消去  $x$  并整理得  $y^2 + \frac{2\sqrt{3}p}{3}y - 16p = 0$ ,

$$\text{所以 } y_1 y_2 = -16p, y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{3}p}{3},$$

$$\text{所以 } x_1 x_2 = \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} = \frac{(-16p)^2}{4p^2},$$

因为  $OA \perp OB$ , 所以  $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ ,

$$\text{即 } \frac{(-16p)^2}{4p^2} - 16p = 0, \text{ 解得 } p = 4,$$

所以抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 8x$ .

(2) 存在点  $P$  满足题意.

由(1)得  $F(2, 0)$ ,  $l: x = -2$ , 假设存在  $P(x_0, y_0)$  满足题意,

设过点  $F$  的动直线方程为  $x = my + 2$ , 由题知  $m \neq 0$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + 2, \\ x = -2, \end{cases} \text{ 解得 } y = -\frac{4}{m},$$

$$\text{则 } M\left(-2, -\frac{4}{m}\right),$$

设  $S(x_3, y_3), T(x_4, y_4)$ ,

$$\text{联立} \begin{cases} x = my + 2, \\ y^2 = 8x, \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 并整理得 } y^2 - 8my - 16 = 0,$$

$$\text{所以 } y_3 y_4 = -16, y_3 + y_4 = 8m,$$

$$\text{直线 } PS \text{ 的斜率为 } \frac{y_0 - y_3}{x_0 - x_3} = \frac{8}{y_0 + y_3}, \text{ 直线 } PT$$

$$\text{的斜率为 } \frac{y_0 - y_4}{x_0 - x_4} = \frac{8}{y_0 + y_4},$$

$$\text{直线 } PM \text{ 的斜率为 } \frac{y_0 + \frac{4}{m}}{x_0 + 2} = \frac{y_0 + \frac{4}{m}}{\frac{y_0^2}{8} + 2} =$$

$$\frac{8my_0 + 32}{my_0^2 + 16m},$$

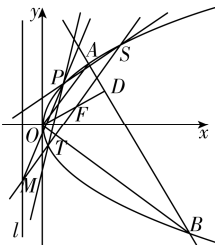
因为直线  $PS, PM, PT$  的斜率成等差数列,

$$\text{所以 } 2 \times \frac{8my_0 + 32}{my_0^2 + 16m} = \frac{8}{y_0 + y_3} + \frac{8}{y_0 + y_4} =$$

$$\frac{8(2y_0 + y_3 + y_4)}{y_0^2 + y_0(y_3 + y_4) + y_3 y_4} = \frac{8(2y_0 + 8m)}{y_0^2 + 8my_0 - 16},$$

整理得  $(y_0^2 - 16)m^2 + y_0^2 - 16 = 0$ , 因为该式对任意  $m$  恒成立, 所以  $y_0^2 - 16 = 0$ , 解得  $y_0 = 4$  或  $y_0 = -4$ , 此时  $x_0 = 2$ ,

即存在  $P(2, 4)$  或  $P(2, -4)$  满足题意.



**2. 突破点** ▶ 求椭圆的标准方程、椭圆中三角形(四边形)的面积、椭圆中的直线过定点问题、椭圆中的存在性问题

(1)【解】由题意得  $2b = 2\sqrt{3}$ ,  $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ , 故

$$b = \sqrt{3}, a = 2c,$$

$$\text{由 } a^2 = b^2 + c^2, \text{ 解得 } c = 1, a = 2,$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) (i)【证明】由(1)得  $A(-2, 0)$ , 设  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ .

当直线  $l$  的斜率不存在时, 直线  $l$  与  $C$  交于关于  $x$  轴对称的两点, 则  $Q(x_1, -y_1)$ ,

$$\text{则 } \frac{y_1}{x_1+2} \cdot \frac{-y_1}{x_1+2} = -\frac{1}{4}, \text{ 即 } x_1^2 + 4x_1 + 4 = 4y_1^2,$$

$$\text{又 } \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \text{ 所以 } y_1^2 = 3 - \frac{3x_1^2}{4},$$

$$\text{所以 } x_1^2 + 4x_1 + 4 = 12 - 3x_1^2, \text{ 解得 } x_1 = 1 \text{ 或 } x_1 = -2,$$

当  $x_1 = -2$  时,  $y_1 = 0$ , 此时  $P(x_1, y_1)$  与  $A(-2, 0)$  重合, 不符合题意,

当  $x_1 = 1$  时, 直线  $l$  的方程为  $x = 1$ .

当直线  $l$  的斜率存在时, 设直线  $l$  的方程为  $y = kx + m$ ,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = kx + m, \end{cases} \text{ 得 } (3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0,$$

$$4m^2 - 12 = 0,$$

$$\Delta = 64k^2m^2 - 4(3 + 4k^2)(4m^2 - 12) > 0, \text{ 解得 } 4k^2 - m^2 + 3 > 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-8km}{3 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2},$$

$$\text{所以 } y_1y_2 = k^2x_1x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{4k^2m^2 - 12k^2}{3 + 4k^2} + \frac{-8k^2m^2}{3 + 4k^2} + m^2 = \frac{3m^2 - 12k^2}{3 + 4k^2},$$

$$\text{由 } \frac{y_1}{x_1+2} \cdot \frac{y_2}{x_2+2} = \frac{y_1y_2}{x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} = \frac{3m^2 - 12k^2}{\frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} + \frac{-16km}{3 + 4k^2} + 4} = -\frac{1}{4}, \text{ 得 } \frac{3m^2 - 12k^2}{\frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2} + \frac{-16km}{3 + 4k^2} + 4} = -\frac{1}{4}, \text{ 整理}$$

$$\text{得 } m^2 - km - 2k^2 = 0, \text{ 解得 } m = 2k \text{ 或 } m = -k,$$

当  $m = 2k$  时,  $y = kx + 2k = k(x + 2)$ , 直线  $l$  过定点  $A(-2, 0)$ , 不符合题意,

当  $m = -k$  时, 满足  $4k^2 - m^2 + 3 > 0$ ,

$$y = kx - k = k(x - 1), \text{ 直线 } l \text{ 过定点 } (1, 0).$$

综上, 直线  $l$  过定点  $(1, 0)$ .

(ii)【解】存在点  $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ , 使得

$\triangle PBF_2$  与  $\triangle QF_1F_2$  的面积之比为  $3:5$ , 理由如下:

$P$  在  $x$  轴上方, 故  $Q$  在  $x$  轴下方, 即  $y_1 > 0, y_2 < 0, F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$ ,

由椭圆定义可知,  $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 4$ ,

又  $M: (x+1)^2 + y^2 = 16$  的圆心为  $F_1(-1, 0)$ , 半径为 4,



故  $|PF_1| + |PB| = 4$ , 所以  $|PF_2| = |PB|$ ,

$$\text{由于 } \frac{S_{\triangle PBF_2}}{S_{\triangle PF_1F_2}} = \frac{|PB|}{|PF_1|} = \frac{|PF_2|}{|PF_1|} = \frac{|PF_2|}{4 - |PF_2|},$$

$$\frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle QF_1F_2}} = \frac{|PF_2|}{|QF_2|},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{S_{\triangle PBF_2}}{S_{\triangle QF_1F_2}} &= \frac{S_{\triangle PBF_2}}{S_{\triangle PF_1F_2}} \cdot \frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle QF_1F_2}} \\ &= \frac{|PF_2|}{4 - |PF_2|} \cdot \frac{|PF_2|}{|QF_2|} = \frac{|PF_2|^2}{(4 - |PF_2|) \cdot |QF_2|}. \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{|PF_2|^2}{(4 - |PF_2|) \cdot |QF_2|} = \frac{3}{5},$$

当直线  $l$  的斜率不存在时,  $|PF_2| =$

$$|QF_2|, \text{ 此时 } \frac{|PF_2|^2}{(4 - |PF_2|) \cdot |QF_2|} =$$

$$\frac{|PF_2|}{4 - |PF_2|} = \frac{3}{5},$$

$$\text{解得 } |PF_2| = \frac{3}{2},$$

$$\text{令 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \text{ 中 } x = 1, \text{ 得 } y = \pm \frac{3}{2},$$

又  $P$  在  $x$  轴上方, 故  $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ , 满足题意,

当直线  $l$  的斜率存在时, 设  $\angle PF_2x = \theta$ , 则

$$\theta \neq \frac{\pi}{2},$$

在  $\triangle PF_1F_2$  中,  $\angle PF_2F_1 = \pi - \theta$ ,  $|PF_1| = 4 - |PF_2|$ ,  $|F_1F_2| = 2$ ,

$$\text{由余弦定理得 } \cos \angle PF_2F_1 = \frac{|PF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - |PF_1|^2}{2|PF_2| \cdot |F_1F_2|},$$

$$\text{即 } \cos(\pi - \theta) = \frac{|PF_2|^2 + 4 - (4 - |PF_2|)^2}{2|PF_2| \cdot 2},$$

$$\text{则 } |PF_2| = \frac{3}{2 + \cos \theta},$$

$$\text{同理可得 } |QF_2| = \frac{3}{2 - \cos \theta},$$

$$\text{由 } \frac{|PF_2|^2}{(4 - |PF_2|) \cdot |QF_2|} = \frac{3}{5}, \text{ 可得}$$

$$\frac{\left(\frac{3}{2 + \cos \theta}\right)^2}{\left(4 - \frac{3}{2 + \cos \theta}\right) \cdot \frac{3}{2 - \cos \theta}} = \frac{3}{5},$$

$$\text{解得 } \cos \theta = 0 \text{ 或 } \cos \theta = -\frac{9}{2}, \text{ 均舍去.}$$

综上, 存在点  $P\left(1, \frac{3}{2}\right)$ , 使得  $\triangle PBF_2$  与  $\triangle QF_1F_2$  的面积之比为  $3:5$ .

## 突破 圆锥曲线新定义

刷

热点

### 1. 突破点 ▶ 求轨迹方程、圆锥曲线新定义

(1) 【解】由题意知  $F_1(-c, 0)$ ,  $F_2(c, 0)$ ,

双曲线  $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ , 将

$x = c$  代入上式, 解得  $y = \pm \frac{b^2}{a}$ .

因为当  $PF_2 \perp x$  轴时, 直线  $y = 1$  为  $\triangle PF_1F_2$  的“等线”, 所以点  $P$  在直线  $y = 1$  的上方, 故有  $P\left(c, \frac{b^2}{a}\right)$ . 由题意知,  $\frac{b^2}{a} - 1 = 2, e = \frac{c}{a} = 2, c^2 = a^2 + b^2$ ,

解得  $a = 1, b = \sqrt{3}$ , 所以曲线  $E$  的方程为  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2) 【解】设  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), P(x_0, y_0)$ .

由题意知直线  $m$  与曲线  $E$  相切, 当直线  $m$  的斜率存在时, 设直线  $m$  的方程为

$y - y_0 = k(x - x_0)$ , 与  $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$  联立, 得

$$(3 - k^2)x^2 + 2k(kx_0 - y_0)x - (k^2x_0^2 + y_0^2 - 2kx_0y_0 + 3) = 0,$$

故  $[2k(kx_0 - y_0)]^2 + 4(3 - k^2)(k^2x_0^2 + y_0^2 - 2kx_0y_0 + 3) = 0$ , 整理并化简后, 该式可以看作关于  $k$  的一元二次方程  $(x_0^2 - 1)k^2 - 2x_0y_0k + y_0^2 + 3 = 0$ ,

又  $x_0^2 - \frac{y_0^2}{3} = 1$ , 所以  $k = \frac{x_0y_0}{x_0^2 - 1} =$

$\frac{x_0y_0}{\left(1 + \frac{y_0^2}{3}\right) - 1} = \frac{3x_0}{y_0}$ , 即直线  $m$  的方程为

$$x_0x - \frac{y_0y}{3} = 1.$$

当直线  $m$  的斜率不存在时,  $x_0x - \frac{y_0y}{3} = 1$  也成立.

综上, 由直线  $m$  与曲线  $E$  相切, 可得直线

$m$  的方程为  $x_0x - \frac{y_0y}{3} = 1$  (\*).

由题意知, 双曲线  $E$  的渐近线方程为  $y = \pm\sqrt{3}x$ , 不妨设  $A$  在  $B$  上方,

将直线  $m$  的方程与双曲线  $E$  的渐近线方

程联立得  $x_A = \frac{1}{x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{3}}}, x_B = \frac{1}{x_0 + \frac{y_0}{\sqrt{3}}}$ , 故  $x_A +$

$x_B = \frac{1}{x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{x_0 + \frac{y_0}{\sqrt{3}}} = 2x_0$ , 所以  $P$  是线段

$AB$  的中点,

因为  $F_1, F_2$  到过  $O$  的直线的距离相等,

过  $O$  的直线  $y = \sqrt{2}x$  是四边形  $AF_1BF_2$  的“等线”, 所以点  $A, B$  到该“等线”的距离相等, 且分居“等线”两侧, 所以该“等线”必过点  $P$ , 即直线  $OP$  的方程为  $y = \sqrt{2}x$ .

由  $\begin{cases} y_0 = \sqrt{2}x_0, \\ x_0^2 - \frac{y_0^2}{3} = 1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x_0 = \sqrt{3}, \\ y_0 = \sqrt{6} \end{cases}$

或  $\begin{cases} x_0 = -\sqrt{3}, \\ y_0 = -\sqrt{6}, \end{cases}$



因为点  $P$  在双曲线  $E$  的右支上, 所以  $P(\sqrt{3}, \sqrt{6})$ .

$$\text{所以 } y_A = \sqrt{3}x_A = \frac{\sqrt{3}}{x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{\sqrt{3}x_0 - y_0} = \sqrt{6} + 3,$$

$$y_B = -\sqrt{3}x_B = -\frac{\sqrt{3}}{x_0 + \frac{y_0}{\sqrt{3}}} = \frac{-3}{\sqrt{3}x_0 + y_0} = \sqrt{6} - 3,$$

所以  $|y_A - y_B| = 6$ , 所以  $S_{\text{四边形}AF_1BF_2} = \frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_A - y_B| = 2|y_A - y_B| = 12$ .

(3) 【证明】设  $G(x, y)$ , 由  $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OP}$ , 得

$$x_0 = 3x \geq 1, y_0 = 3y,$$

因为点  $P$  在双曲线  $E$  的右支上, 所以

$$(3x)^2 - \frac{(3y)^2}{3} = 1 \left( x \geq \frac{1}{3} \right),$$

所以曲线  $\Gamma$  的方程为  $9x^2 - 3y^2 = 1 \left( x \geq \frac{1}{3} \right)$ ,

由 (\*) 知直线  $n$  的方程为  $\frac{9x_0}{3}x - \frac{3y_0y}{3} = 1$ , 即  $3x_0x - y_0y - 1 = 0$ .

设点  $F_1(-2, 0), F_2(2, 0), A(x_A, y_A)$  到切线  $n$  的距离分别为  $d_1, d_2, d_3$ ,

$$\text{由 (2) 知 } x_A = \frac{1}{x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{3}}}, y_A = \sqrt{3} \cdot$$

$$\frac{1}{x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{3}}},$$

$$\text{所以 } d_3 = \frac{\left| \frac{3x_0}{x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{3}}} - \frac{\sqrt{3}y_0}{x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{3}}} - 1 \right|}{\sqrt{9x_0^2 + y_0^2}}$$

$$= \frac{\left| \frac{3x_0 - \sqrt{3}y_0 - x_0 + \frac{y_0}{\sqrt{3}}}{x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{3}}} \right|}{\sqrt{9x_0^2 + y_0^2}}$$

$$= \frac{\left| \frac{2x_0 - \frac{2y_0}{\sqrt{3}}}{x_0 - \frac{y_0}{\sqrt{3}}} \right|}{\sqrt{9x_0^2 + y_0^2}} = \frac{2}{\sqrt{9x_0^2 + y_0^2}},$$

$$\text{由 } x_0 \geq 1 \text{ 得 } d_1 = \frac{|-6x_0 - 1|}{\sqrt{9x_0^2 + y_0^2}} = \frac{6x_0 + 1}{\sqrt{9x_0^2 + y_0^2}},$$

$$d_2 = \frac{|6x_0 - 1|}{\sqrt{9x_0^2 + y_0^2}} = \frac{6x_0 - 1}{\sqrt{9x_0^2 + y_0^2}},$$

$$\text{因为 } d_2 + d_3 = \frac{6x_0 - 1}{\sqrt{9x_0^2 + y_0^2}} + \frac{2}{\sqrt{9x_0^2 + y_0^2}} =$$

$$\frac{6x_0 + 1}{\sqrt{9x_0^2 + y_0^2}} = d_1,$$

所以切线  $n$  为  $\triangle AF_1F_2$  的“等线”.

## 2. 突破点 ▶ 求椭圆的方程、求椭圆的切线方程、椭圆中的直线过定点问题

(1)【解】因为极点  $F_2(2\sqrt{3}, 0)$  对应的极

线  $l$  的方程为  $\frac{2\sqrt{3}x}{a^2} + \frac{0 \times y}{b^2} = 1$ , 即  $x = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ ,

所以  $a^2 = 16$ ,

因为右焦点  $F_2$  的坐标为  $(2\sqrt{3}, 0)$ , 所以

以  $c = 2\sqrt{3}$ , 所以  $b^2 = a^2 - c^2 = 4$ ,

所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

(2)【证明】当切线  $QM$  的斜率存在时, 设切线  $QM$  的方程为  $y = kx + t$ , 切点  $M$  的坐标为  $(x_1, y_1)$ ,  $y_1 \neq 0$ .

由  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = kx + t, \end{cases}$  可得  $(b^2 + a^2k^2)x^2 +$

$2a^2ktx + a^2(t^2 - b^2) = 0$ ,

$\Delta_1 = 4a^4k^2t^2 - 4a^2(b^2 + a^2k^2)(t^2 - b^2) = 0$ ,

则  $t^2 = a^2k^2 + b^2$ ,

则  $x_1 = -\frac{a^2kt}{b^2 + a^2k^2} = -\frac{a^2k}{t}$ ,

则  $y_1 = kx_1 + t = \frac{b^2}{t}$ ,

由于  $\frac{x_1}{y_1} = -\frac{a^2k}{b^2}$ , 则  $k = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ ,

则切线  $QM$  的方程为  $y - y_1 = k(x - x_1) =$

$-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$ , 又  $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ , 所以  $\frac{x_1x}{a^2} +$

$\frac{y_1y}{b^2} = 1$ .

当切线  $QM$  的斜率不存在时, 切点  $M$  的坐标为  $(a, 0)$  或  $(-a, 0)$ , 切线  $QM$  的方

程为  $x = a$  或  $x = -a$ , 符合方程  $\frac{x_1x}{a^2} +$

$\frac{y_1y}{b^2} = 1$ .

综上,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 上一点  $M(x_1,$

$y_1)$  的切线方程为  $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ .

同理,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 上一点  $N(x_2,$

$y_2)$  的切线方程为  $\frac{x_2x}{a^2} + \frac{y_2y}{b^2} = 1$ .

设  $Q(x_3, y_3)$ , 因为点  $Q$  在两条切线上,

所以  $\begin{cases} \frac{x_2x_3}{a^2} + \frac{y_2y_3}{b^2} = 1, \\ \frac{x_1x_3}{a^2} + \frac{y_1y_3}{b^2} = 1, \end{cases}$

所以直线  $MN$  的方程为  $\frac{x_3x}{a^2} + \frac{y_3y}{b^2} = 1$ , 根据

极线定义知直线  $MN$  为极点  $Q$  的极线.

(3)【解】存在定点  $T$  恒在直线  $MN$  上.

由题意, 设点  $P$  的坐标为  $(x_0, y_0)$ ,

因为点  $P$  在直线  $y = -\frac{1}{2}x + 4$  上运动, 所以

$$y_0 = -\frac{1}{2}x_0 + 4.$$

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = -\frac{1}{2}x + 4, \end{cases} \text{得 } x^2 - 8x + 24 = 0,$$

$$\Delta_2 = 64 - 4 \times 24 = -32 < 0,$$

所以直线  $y = -\frac{1}{2}x + 4$  与椭圆  $C$  相离, 即

点  $P$  在椭圆  $C$  外, 又  $PM, PN$  都与椭圆  $C$  相切,

所以点  $P$  和直线  $MN$  是椭圆  $C$  的一对极点和极线.

对于椭圆  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 与点  $P(x_0, y_0)$  对应

$$\text{的极线方程为 } \frac{x_0 x}{16} + \frac{y_0 y}{4} = 1,$$

将  $y_0 = -\frac{1}{2}x_0 + 4$  代入  $\frac{x_0 x}{16} + \frac{y_0 y}{4} = 1$ , 整理得

$$x_0(x - 2y) + 16y - 16 = 0,$$

又因为定点  $T$  的坐标与  $x_0$  的取值无关,

$$\text{所以令 } \begin{cases} x - 2y = 0, \\ 16y - 16 = 0, \end{cases} \text{解得 } \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \text{所以存在}$$

在定点  $T(2, 1)$  恒在直线  $MN$  上.

当  $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TN}$  时,  $T$  是线段  $MN$  的中点,

易知此时直线  $MN$  的斜率存在.

设  $M(x_4, y_4), N(x_5, y_5)$ , 直线  $MN$  的斜率为  $k_1$ ,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{x_4^2}{16} + \frac{y_4^2}{4} = 1, \\ \frac{x_5^2}{16} + \frac{y_5^2}{4} = 1, \end{cases} \text{两式相减,}$$

$$\text{整理得 } \frac{y_5 - y_4}{x_5 - x_4} = -\frac{4}{16} \cdot \frac{x_4 + x_5}{y_4 + y_5} = -\frac{4}{16} \times$$

$$\frac{2 \times 2}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}, \text{即 } k_1 = -\frac{1}{2}.$$

所以当  $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{TN}$  时, 直线  $MN$  的方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2), \text{即 } x + 2y - 4 = 0.$$

## 全章综合训练

### 刷情境

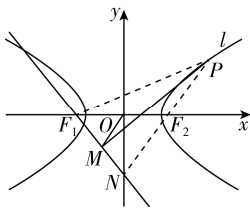
#### 1. B 创新点 ▶ 新情境

**【解析】**如图, 连接  $PF_1, PF_2$ , 延长  $PF_2$  交直线  $F_1M$  于点  $N$ , 由于  $M$  是  $\angle F_1PF_2$  的平分线上的一点, 且  $F_1M \perp MP$ , 所以点  $M$  为  $F_1N$  的中点, 所以  $|PF_1| = |PN|$  (**提示: 角平分线性质的应用**), 又  $O$  为  $F_2F_1$  的中点, 所以  $|F_2N| = 2|OM| = 4$ , 故  $|PF_1| - |PF_2| = |PN| - |PF_2| = |F_2N| = 4$ , 故  $2a = 4$ , 则  $a^2 = 4$ , 将点  $P\left(3, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$  的坐标代入  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 可得  $\frac{9}{4} - \frac{5}{4b^2} = 1$ , 解





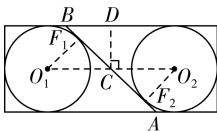
得  $b^2 = 1$ , 故离心率  $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 故选 B.



## 2. D 创新点 ▶ 模块融合

【解析】设平面  $\alpha$  被圆筒所截得到的截面为椭圆  $\Gamma$ , 如图, 作出圆柱过椭圆  $\Gamma$  的长轴的轴截面图, 设长轴  $AB$  与两圆的切点是  $F_1, F_2$ . 连接  $O_1O_2$ , 记椭圆长轴与  $O_1O_2$  交于点  $C$ , 过  $C$  作  $CD \perp O_1O_2$ , 且  $CD$  交圆柱的母线于点  $D$ , 连接  $O_1F_1, O_2F_2$ , 则  $O_1F_1 \perp AB, O_2F_2 \perp AB$ . 因为圆柱的高为 16, 球的半径是 3, 所以圆柱的底面半径为 3,  $O_1O_2 = 16 - 2 \times 3 = 10, O_1F_1 = 3, CD = 3$ .

根据对称性可知  $C$  是  $O_1O_2, AB$  的中点, 故  $CO_1 = 5$ , 则  $CF_1 = CF_2 = 4$ . 易得  $\text{Rt} \triangle F_1CO_1 \cong \text{Rt} \triangle DBC$ , 故  $BC = CO_1 = 5$ , 则椭圆的长半轴长  $a = 5$ . 由题意得椭圆的短半轴长  $b = 3$ , 所以半焦距长  $c = 4$ , 则椭圆的离心率为  $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ , 故选 D.



## 3. B 创新点 ▶ 新情境

【解析】在照射过程中, 椭圆的短半轴长是球的半径, 因为  $A'A \parallel B'B$ , 所以  $\angle A'AB + \angle B'BA = 180^\circ$ , 由题知  $A'A, B'B$  均与球相切, 连接  $AO', BO', O'H, O'O$ , 可知  $\angle O'AB = \frac{1}{2} \angle A'AB, \angle O'BA =$

$\frac{1}{2} \angle B'BA$ , 所以  $\angle O'AB + \angle O'BA = \frac{1}{2} \angle A'AB + \frac{1}{2} \angle B'BA = 90^\circ$ , 所以  $\angle AO'B = 90^\circ$ , 即  $AO' \perp O'B$ , 又因为  $O$  为椭圆中心, 即线段  $AB$  的中点, 由直角三角形的性质可知  $|O'O| = \frac{1}{2} |AB|$ , 所以

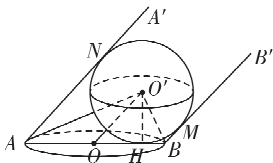
球心到椭圆中心的距离是椭圆的长半轴长, 由题得  $|O'H| = R, \angle O'OH = \varphi$ , 所以  $\sin \varphi = \frac{|O'H|}{|O'O|}$ , 从而  $|O'O| = \frac{R}{\sin \varphi}$ . 所以

$$a = \frac{R}{\sin \varphi},$$

又  $b = R$ , 所以  $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{R^2}{\sin^2 \varphi} - R^2} = \sqrt{\frac{R^2(1 - \sin^2 \varphi)}{\sin^2 \varphi}} = \frac{R}{\tan \varphi}$ , 则  $e = \frac{c}{a} = \cos \varphi$ ,



由题知  $0 < \varphi_2 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $0 < \cos \varphi_1 < \cos \varphi_2$ , 所以  $e_1 < e_2$ . 故选 B.



#### 4. AC 创新点 ▶ 新情境

【解析】对于 A, 设线段长度为 1, 线段一分为二后, 较长部分的线段长度为  $x$ , 则较短部分的线段长度为  $1-x$ , 由题意知“黄金分割比” $x$  满足  $x = \frac{1-x}{x}$ , 即  $x^2 + x - 1 = 0$ , 解得  $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$  (负值舍去). 若 C:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 为“黄金双曲线”, 则离心率  $e = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ , 故 A 正确.

对于 B, 设  $E(x_1, y_1), F(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$ , 其中

$$\begin{cases} x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}, \\ y_0 = \frac{y_1+y_2}{2}, \end{cases} \text{ 又 } E, F \text{ 在双曲线 } C \text{ 上,}$$

所以  $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases}$  两式相减可得  $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} - \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$ , 即  $\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} \cdot \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{b^2}{a^2}$ , 可得

$$k_{EF} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2} \quad (\text{提示: 若 } EF \text{ 为双曲线 } C:$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的不平行于对称轴且不过中心  $O$  的弦,  $M$  为  $EF$  的中点,

则  $k_{EF} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2}$ ), 所以  $k_{EF} \cdot k_{OM} =$

$$\frac{c^2 - a^2}{a^2} = e^2 - 1, \text{ 故 B 错误.}$$

对于 C, 易知  $F_1(-c, 0), B_2(0, -b)$ , 所以  $k_{F_1B_2} = \frac{-b-0}{0-(-c)} = -\frac{b}{c}$ , 易知双曲线的一条渐近线的斜率  $k = \frac{b}{a}$ , 则  $k_{F_1B_2} k =$

$$-\frac{b}{c} \cdot \frac{b}{a} = -\frac{b^2}{ac} = \frac{a^2 - c^2}{ac} = \frac{1}{e} - e = \frac{2}{\sqrt{5}+1}$$

$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = -1$ , 因此直线  $F_1B_2$  与双曲线  $C$  的一条渐近线垂直, 故 C 正确.

对于 D, 由离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$  可得

$$\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \text{ 解得 } \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}},$$

可得一条渐近线的斜率  $k = \frac{b}{a} =$

$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ , 而直线  $y = \frac{\sqrt{6}}{2}x + 1$  的斜率  $\frac{\sqrt{6}}{2} <$

$\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$ , 根据渐近线性性质可知直线  $y =$

$\frac{\sqrt{6}}{2}x + 1$  与双曲线  $C$  的左右两支各有一个

交点, 故 D 错误.

故选 AC.

## 5. ACD 创新点 ▶ 新情境

【解析】 $C_1: x = 4 + \sqrt{-y^2 + 4y}$  可变形为  $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4 (x \geq 4)$ , 表示以  $C_1(4, 2)$  为圆心, 2 为半径的圆的右半部分,  $C_2: x = 4 + \sqrt{-y^2 - 4y}$  可变形为  $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 4 (x \geq 4)$ , 表示以  $C_2(4, -2)$  为圆心, 2 为半径的圆的右半部分.

对于 A, 抛物线  $C_3: y^2 = 2px$  过点  $(4, 4)$ , 则  $16 = 8p$ , 解得  $p = 2$ , 故 A 正确.

对于 B, 当  $O, C_1, P$  三点共线时,  $|OP| = 2 + 2\sqrt{5} > 4\sqrt{2}$ , 故 B 错误.

对于 C, 因为  $AB$  是抛物线的焦点弦, 所以当  $AB$  为通径时,  $|AB|$  取得最小值,  $|AB|_{\min} = 4$ .

当直线  $l$  的斜率存在时, 设直线  $l$  的方程为  $y = k(x-1)$ , 由对称性可设  $k > 0$ , 可

得  $k \geq \frac{4}{3}$ , 联立  $\begin{cases} y = k(x-1) \\ y^2 = 4x \end{cases}$ , 整理得

$k^2x^2 - (2k^2+4)x + k^2 = 0$ , 可得  $x_A + x_B = 2 + \frac{4}{k^2}$ , 所以  $x_A + x_B = 2 + \frac{4}{k^2} \leq \frac{17}{4}$ , 即当直线  $l$

的方程为  $y = \frac{4}{3}(x-1)$  时, 弦  $AB$  最长, 且

$|AB|_{\max} = x_A + x_B + 2 = \frac{25}{4}$ , 故 C 正确.

对于 D, 由对称性不妨设直线  $l: x = my + 1$  ( $m \geq 0$ ), 当  $B$  与点  $(4, 4)$  重合时, 直线  $l$

的斜率取最小值  $\frac{4}{3}$ , 所以  $m \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$ ,

显然离  $AB$  最远的点  $P$  在曲线  $C_2$  上, 且

$d_{P-l} \leq d_{C_2-l} + r = \frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}} + 2$  ( $d_{P-l}$ : 点  $P$  到  $l$

的距离,  $d_{C_2-l}$ : 点  $C_2$  到  $l$  的距离). 联立

$\begin{cases} x = my + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$ , 整理得  $y^2 - 4my - 4 = 0$ , 则  $y_A +$

$y_B = 4m, y_A \cdot y_B = -4$ , 则  $|AB| = \sqrt{1+m^2} \cdot$

$\sqrt{(y_A+y_B)^2 - 4y_Ay_B} = 4(m^2+1)$ , 所以

$S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2} |AB| \times d_{P-l} \leq \frac{1}{2} \times 4(m^2+1) \cdot$

$\left(\frac{|2m+3|}{\sqrt{m^2+1}} + 2\right) = 2\sqrt{m^2+1}(2m+3) +$

$4(m^2+1)$ ,

设  $h(m) = 2\sqrt{m^2+1}(2m+3) + 4(m^2+1)$ ,



由  $y = \sqrt{m^2+1}$ ,  $y = 2m+3$ ,  $y = 4(m^2+1)$  均在  $\left[0, \frac{3}{4}\right]$  上单调递增, 且当  $m \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$  时,  $y = \sqrt{m^2+1} > 0$ ,  $y = 2m+3 > 0$ , 易得  $h(m)$  在  $\left[0, \frac{3}{4}\right]$  上单调递增, 所以  $S_{\triangle PAB}$  的最大值为  $h\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{35}{2}$ , 故 D 正确.

故选 ACD.

刷

真题

## 刷小题

## 1. A 命题点 ▶ 动点的轨迹方程

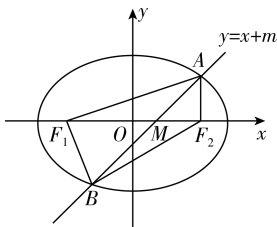
【解析】设  $P(x_0, y_0)$ , 则  $P'(x_0, 0)$ , 线段  $PP'$  的中点  $M$  的坐标为  $\left(x_0, \frac{y_0}{2}\right)$ . 因为点  $P$  在曲线  $C: x^2 + y^2 = 16 (y > 0)$  上, 所以  $x_0^2 + y_0^2 = 16 (y_0 > 0)$ . 设点  $M$  的坐标为  $(x', y')$ , 则  $x' = x_0$ ,  $y' = \frac{y_0}{2}$ , 即  $2y' = y_0$ , 代入  $x_0^2 + y_0^2 = 16 (y_0 > 0)$  得,  $x'^2 + (2y')^2 = 16 (y' > 0)$ , 所以  $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1 (y' > 0)$ , 即点  $M$  的轨迹方程为  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (y > 0)$ , 故选 A.

## 2. A 命题点 ▶ 椭圆的离心率

【解析】由椭圆  $C_1$  的方程知离心率  $e_1 = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ , 由椭圆  $C_2$  的方程知  $e_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 又  $\because e_2 = \sqrt{3}e_1$ , 即  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ , 化简得  $a^2 = 4a^2 - 4$ ,  $\therefore a^2 = \frac{4}{3}$ .  $\because a > 1$ ,  $\therefore a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ . 故选 A.

## 3. C 命题点 ▶ 直线与椭圆的位置关系、三角形面积比

【解析】如图, 设直线  $y = x + m$  与  $x$  轴的交点为  $M$ , 所以  $S_{\triangle F_1AB} = \frac{1}{2} |MF_1| |y_A - y_B|$ ,  $S_{\triangle F_2AB} = \frac{1}{2} |MF_2| \cdot |y_A - y_B|$ . 因为  $S_{\triangle F_1AB} = 2S_{\triangle F_2AB}$ , 所以  $|MF_1| = 2|MF_2|$ . 又  $|F_1F_2| = 2\sqrt{2}$ , 所以  $x_M = \frac{\sqrt{2}}{3}$  或  $3\sqrt{2}$ , 因为点  $M$  在直线  $y = x + m$  上且  $y = x + m$  与  $C$  有两个交点, 所以  $m = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ , 故选 C.



## 4. B 命题点 ▶ 椭圆焦点三角形问题



【解析】由题意得  $c = \sqrt{5-1} = 2$ , 故  $|F_1F_2| = 4$ . 因为  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 0$ , 所以  $PF_1 \perp PF_2$ ,  $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = (|PF_1| + |PF_2|)^2 - 2|PF_1| \cdot |PF_2| = |F_1F_2|^2 = 16$ , 又  $|PF_1| + |PF_2| = 2\sqrt{5}$ , 所以  $|PF_1| \cdot |PF_2| = 2$ , 故选 B.

#### 5. A 命题点 ▶ 椭圆的离心率

【解析】由题意设  $P(x_0, y_0)$ ,  $Q(-x_0, y_0)$ ,  $x_0 \in (-a, a)$ . 因为  $A$  为左顶点, 所以  $A(-a, 0)$ , 所以  $k_{AP} = \frac{y_0}{x_0+a}$ ,  $k_{AQ} = \frac{y_0}{-x_0+a}$ . 因为直线  $AP, AQ$  的斜率之积为  $\frac{1}{4}$ , 所以  $k_{AP} \cdot k_{AQ} = \frac{y_0^2}{a^2 - x_0^2} = \frac{1}{4}$ . 又因为点  $P$  在椭圆上, 所以  $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$ , 整理可得  $\frac{y_0^2}{b^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2} = \frac{a^2 - x_0^2}{a^2}$ , 即  $\frac{y_0^2}{a^2 - x_0^2} = \frac{b^2}{a^2}$ , 所以  $\frac{1}{4} = \frac{b^2}{a^2}$ . 根据  $a^2 = b^2 + c^2$ , 可得  $\frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{4}$ , 则离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 故选 A.

#### 6. B 命题点 ▶ 椭圆的标准方程

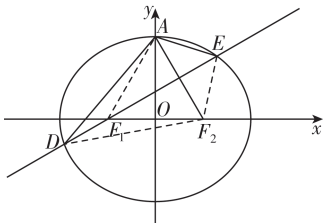
【解析】由题可知  $A_1(-a, 0)$ ,  $A_2(a, 0)$ ,  $B(0, b)$ , 则  $\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{BA_2} = (-a, -b) \cdot (a, -b) = -a^2 + b^2 = -1$ , 即  $a^2 - b^2 = 1$ , 所以  $c^2 = 1$ , 即  $c = 1$ . 又离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$ , 所以  $a = 3$ , 即  $a^2 = 9$ ,  $b^2 = 8$ , 椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ , 故选 B.

#### 7. C 命题点 ▶ 椭圆的定义、利用基本不等式求最值

【解析】由题意可知,  $|MF_1| + |MF_2| = 2a = 6$ , 所以  $|MF_1| \cdot |MF_2| \leq \left( \frac{|MF_1| + |MF_2|}{2} \right)^2 = 9$ , 当且仅当  $|MF_1| = |MF_2| = 3$  时, 等号成立, 所以  $|MF_1| \cdot |MF_2|$  的最大值为 9, 故选 C.

#### 8. 13 命题点 ▶ 直线与椭圆的位置关系

【解析】设  $F_1$  为椭圆  $C$  的左焦点. 如图, 连接  $AF_1, DF_2, EF_2$ . 因为椭圆的离心率为  $\frac{1}{2}$ , 所以  $a = 2c$ , 所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4c^2} + \frac{y^2}{3c^2} = 1$ , 且  $\triangle AF_1F_2$  为等边三角形, 则直线  $DE$  的斜率  $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .





由直线  $DE$  垂直平分线段  $AF_2$  得,  $|AD| = |DF_2|$ ,  $|AE| = |EF_2|$ , 则  $\triangle ADE$  的周长等价于  $|DE| + |DF_2| + |EF_2| = |DF_1| + |DF_2| + |EF_1| + |EF_2| = 4a$ .

设  $D(x_1, y_1), E(x_2, y_2)$ , 又直线  $DE$  的方程为  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x+c)$ , 与椭圆方程联立得

$$13x^2 + 8cx - 32c^2 = 0, \text{ 则 } x_1 + x_2 = -\frac{8c}{13}, x_1x_2 = -\frac{32c^2}{13}.$$

$$\text{由弦长公式 } |DE| = \sqrt{k^2+1} \cdot |x_1 - x_2| = \sqrt{k^2+1} \cdot \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}, \text{ 得}$$

$$|DE| = \sqrt{\frac{1}{3}+1} \cdot \sqrt{\left(-\frac{8c}{13}\right)^2 + \frac{128c^2}{13}} =$$

$$\frac{48}{13}c = 6, \text{ 即 } c = \frac{13}{8}. \text{ 所以 } \triangle ADE \text{ 的周长为 } 4a = 8c = 13.$$

### 9. $x + \sqrt{2}y - 2\sqrt{2} = 0$ 命题点 ▶ 直线与椭圆的位置关系、直线的方程

【解析】设直线  $l$  的方程为  $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ , 则点  $M(m, 0), N(0, n) (m > 0, n > 0)$ . 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) (x_1, x_2 > 0, x_1 \neq x_2)$ . 由题意知线段  $AB$  与线段  $MN$  有相同的

$$\text{中点, 所以 } \begin{cases} \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{m+0}{2}, \\ \frac{y_1+y_2}{2} = \frac{0+n}{2}, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_1+x_2 = m, \\ y_1+y_2 = n. \end{cases} \text{ 又}$$

$$\text{因为 } k_{AB} = k_{MN}, \text{ 所以 } \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{0-n}{m-0} = -\frac{n}{m}.$$

将点  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$  的坐标代入椭圆方程, 得

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{6} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \\ \frac{x_2^2}{6} + \frac{y_2^2}{3} = 1, \end{cases} \text{ 两式相减, 得}$$

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{6} + \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3} = 0, \text{ 整理}$$

$$\text{得 } \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} \cdot \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{1}{2}, \text{ 则 } \frac{n}{m} \cdot \left(-\frac{n}{m}\right) =$$

$$-\frac{1}{2}, \text{ 则 } m^2 = 2n^2 \text{ ①. 又 } |MN| = 2\sqrt{3}, \text{ 所以}$$

$$\text{由勾股定理, 得 } m^2 + n^2 = 12 \text{ ②. 联立 ①②,}$$

$$\text{结合 } m > 0, n > 0, \text{ 解得 } \begin{cases} m = 2\sqrt{2}, \\ n = 2, \end{cases} \text{ 所以直线}$$

$$l \text{ 的方程为 } \frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{y}{2} = 1, \text{ 即 } x + \sqrt{2}y -$$

$$2\sqrt{2} = 0.$$

### 10.8 命题点 ▶ 椭圆的定义、几何性质

【解析】因为椭圆  $C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ , 所以

$a = 4, c^2 = 12$ . 由题意可知, 四边形  $PF_1QF_2$  是矩形, 且  $PF_1 \perp PF_2$ .

设  $|PF_1| = m, |PF_2| = n$ ,

$$\text{所以 } \begin{cases} m^2 + n^2 = 4c^2 = 48, \\ m + n = 2a = 8, \end{cases}$$



$$\text{所以 } mn = \frac{(m+n)^2 - (m^2 + n^2)}{2} = 8,$$

$$\text{所以 } S_{\text{四边形}PF_1QF_2} = mn = 8.$$

### 11. D 命题点 ▶ 双曲线的离心率

【解析】由题意知  $2b = \sqrt{7} \times 2a$ , 即  $b = \sqrt{7}a$ , 则  $b^2 = 7a^2$ . 又  $a^2 + b^2 = c^2$ , 所以  $c^2 - a^2 = 7a^2$ , 即  $c^2 = 8a^2$ , 得  $C$  的离心率  $e = \frac{c}{a} = 2\sqrt{2}$ , 故选 D.

#### 一题多解

由题意知  $2b = \sqrt{7} \times 2a$ , 即

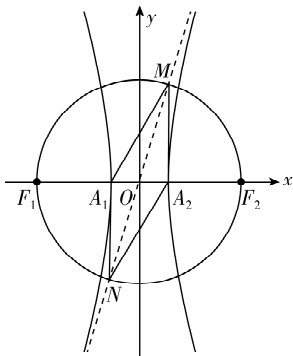
$b = \sqrt{7}a$ , 则  $\frac{b^2}{a^2} = 7$ , 所以  $C$  的离心率  $e =$

$$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + 7} = 2\sqrt{2}, \text{ 故选 D.}$$

### 12. ACD 命题点 ▶ 双曲线的综合应用

【解析】不妨设点  $M$  在第一象限.

因为  $M, N$  都在以  $O$  为圆心,  $F_1F_2$  为直径的圆上, 所以根据对称性有  $|OM| = |ON|$ , 又因为  $|OA_1| = |OA_2|$ , 所以四边形  $MA_1NA_2$  为平行四边形,



所以  $\angle A_1MA_2 = \pi - \angle MA_1N = \frac{\pi}{6}$ , 故 A 正确.

设  $M(x_0, \frac{b}{a}x_0)$  ( $x_0 > 0$ ), 根据  $|OM| = c$ , 得

$$x_0^2 + \frac{b^2}{a^2}x_0^2 = c^2, \text{ 解得 } x_0 = a,$$

故  $M(a, b)$ ,  $N(-a, -b)$ , 所以  $\angle MA_2A_1 =$

$$\frac{\pi}{2}, \text{ 又因为 } \angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6}, \text{ 所以 } |MA_2| =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}|MA_1|, \text{ 故 B 错误.}$$

在  $\text{Rt} \triangle MA_1A_2$  中,  $|MA_2| = b$ ,  $|A_1A_2| =$

$$2a, \angle A_1MA_2 = \frac{\pi}{6},$$

$$\text{所以 } \tan \angle A_1MA_2 = \frac{|A_1A_2|}{|MA_2|} = \frac{2a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即}$$

$$\frac{b}{a} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{故 } e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{13} \quad \left( \text{提示: } e = \frac{c}{a} = \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \right), \text{ 故 C 正确.}$$

$$\text{当 } a = \sqrt{2} \text{ 时, } b = 2\sqrt{6}, \text{ 则 } S_{\text{平行四边形}NA_1MA_2} =$$



$2S_{\triangle MA_1A_2} = 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 8\sqrt{3}$ , 故 D 正确.

故选 ACD.

### 13. C 命题点 ▶ 双曲线的方程、离心率

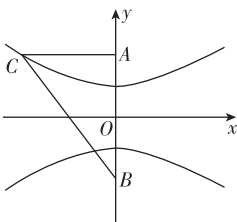
【解析】由题可设双曲线的方程为  $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ .

根据已知条件可得  $\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2 = 4^2, \\ \frac{4^2}{a^2} - \frac{(-6)^2}{b^2} = 1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a = 2, \\ c = 4. \end{cases}$

则该双曲线的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2$ . 故选 C.

#### 快解

如图, 记  $A(0, 4), B(0, -4), C(-6, 4)$ , 则  $AB \perp AC, |AB| = 8, |AC| = 6$ , 则  $|BC| = 10$ . 又该双曲线的半焦距  $c = 4$ , 实轴长  $2a = |BC| - |AC| = 4$ , 则  $a = 2$ , 则该双曲线的离心率  $e = \frac{c}{a} = 2$ . 故选 C.



### 14. D 命题点 ▶ 双曲线的几何性质、直线和圆的位置关系

【解析】因为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的离心率  $e = \sqrt{5}$ , 所以由  $e^2 = \frac{c^2}{a^2} =$

$\frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 5$ , 得  $\frac{b}{a} = 2$ , 所以双曲线 C 的渐近线方程为  $y = \pm 2x$ . 由题意知渐近线  $y = 2x$  与圆相交, 圆心  $(2, 3)$  到直线  $y = 2x$  的距离  $d = \frac{|2 \times 2 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 所以

$|AB| = 2\sqrt{1 - d^2} = 2\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ , 故选 D.

### 15. AC 命题点 ▶ 双曲线的定义、性质

【解析】由双曲线的对称性, 不妨令双曲线 C:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ , 左、右焦点

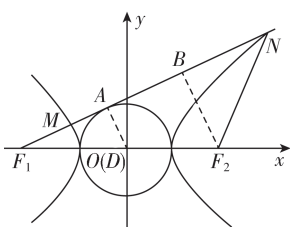
分别为  $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ , 圆  $D: x^2 + y^2 = a^2$ . ①当点  $M, N$  分别在双曲线两支上时, 如图所示, 设直线  $MN$  与圆  $D$  的切点为  $A$ , 连接  $OA$ , 则  $OA \perp MN$ , 且  $|OA| = a$ . 又  $|OF_1| = c$ , 则  $|AF_1| = \sqrt{c^2 - a^2} = b$ .

过  $F_2$  作  $F_2B \perp MN$  于点  $B$ , 则  $F_2B \parallel OA$ , 又  $|OF_1| = |OF_2|$ , 所以  $|F_2B| = 2|OA| =$

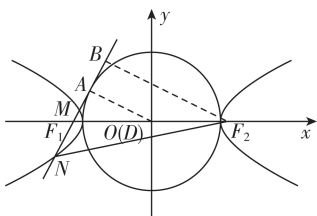




$2a, |AB| = |AF_1| = b$ . 因为  $\cos \angle F_1NF_2 = \frac{3}{5}$ , 所以  $\sin \angle F_1NF_2 = \frac{4}{5}$ ,  $\tan \angle F_1NF_2 = \frac{4}{3}$ , 所以  $|NB| = \frac{|F_2B|}{\tan \angle F_1NF_2} = \frac{3a}{2}$ ,  $|F_2N| = \frac{|F_2B|}{\sin \angle F_1NF_2} = \frac{5a}{2}$ , 所以  $|F_1N| = 2b + \frac{3a}{2}$ . 由双曲线的定义可知,  $|F_1N| - |F_2N| = 2b + \frac{3a}{2} - \frac{5a}{2} = 2b - a = 2a$ , 所以  $\frac{b}{a} = \frac{3}{2}$ , 所以双曲线的离心率为  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ , 故选 C.

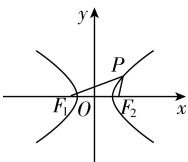


②当点  $M, N$  在双曲线的同一支上时, 如图所示, 此时仍有  $|F_2B| = 2|OA| = 2a$ ,  $|AB| = |AF_1| = b$ , 所以  $|NB| = \frac{|F_2B|}{\tan \angle F_1NF_2} = \frac{3a}{2}$ ,  $|F_2N| = \frac{|F_2B|}{\sin \angle F_1NF_2} = \frac{5a}{2}$ , 所以  $|F_1N| = \frac{3a}{2} - 2b$ . 由双曲线的定义可知,  $|F_2N| - |F_1N| = \frac{5a}{2} - \frac{3a}{2} + 2b = a + 2b = 2a$ , 所以  $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ , 所以双曲线的离心率为  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 故选 A.



## 16. A 命题点 ▶ 双曲线的定义及离心率, 余弦定理的应用

【解析】不妨设双曲线的焦点在  $x$  轴上, 如图, 由双曲线的定义得,  $|PF_1| - |PF_2| = 2a$ , 又  $|PF_1| = 3|PF_2|$ ,



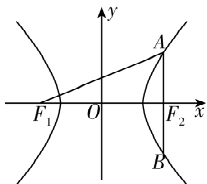
所以  $|PF_2| = a$ ,  $|PF_1| = 3a$ , 所以在  $\triangle F_1PF_2$  中, 有  $|F_1F_2|^2 = |PF_1|^2 + |PF_2|^2 - 2|PF_1||PF_2| \cdot \cos \angle F_1PF_2$ , 即  $4c^2 = 9a^2 + a^2 - 2 \cdot 3a \cdot a \cos 60^\circ$ , 化简得  $4c^2 = 7a^2$ , 即  $\frac{c^2}{a^2} = \frac{7}{4}$ , 所以离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .



$$\sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}, \text{ 故选 A.}$$

### 17. $\frac{3}{2}$ 命题点 ▶ 双曲线离心率的求解

【解析】因为  $AB$  与  $y$  轴平行, 所以  $AB$  与  $x$  轴垂直, 结合双曲线的对称性知  $|AF_2| = |BF_2| = 5$ .



又  $|F_1A| = 13$ , 所以  $|F_1F_2| = \sqrt{|F_1A|^2 - |AF_2|^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ , 则  $c = 6$ , 而  $2a = |AF_1| - |AF_2| = 13 - 5 = 8$ , 所以  $a = 4$ , 所以离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$ .

### 18. $\frac{1}{2}$ (或 $-\frac{1}{2}$ ) 命题点 ▶ 直线与双曲线的位置关系

【解析】 $\because$  双曲线  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$  的渐近线方程为  $y = \pm \frac{1}{2}x$ , 直线  $y = k(x-3)$  过定点  $(3, 0)$ ,  $\therefore$  只有当直线  $y = k(x-3)$  与渐近线平行时, 该直线与双曲线才只有一个公共点,  $\therefore k$  的取值为  $\pm \frac{1}{2}$  (任答一个即可得分).

#### 一题多解

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} - y^2 = 1, \\ y = k(x-3), \end{cases} \text{ 化简并}$$

整理得  $(1-4k^2)x^2 + 24k^2x - 36k^2 - 4 = 0$ ,

由题意得  $1-4k^2 = 0$  或  $\Delta = (24k^2)^2 + 4(36k^2+4)(1-4k^2) = 0$ ,

解得  $k = \pm \frac{1}{2}$  或无解, 即  $k = \pm \frac{1}{2}$ , 经检验, 符合题意.

### 19. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 命题点 ▶ 双曲线的渐近线、圆的标准方程及直线与圆的位置关系

【解析】由题意得双曲线的渐近线方程为  $y = \pm \frac{1}{m}x$ . 将圆的一般方程转化为标准方程, 可得  $x^2 + (y-2)^2 = 1$ , 则圆的圆心为  $(0, 2)$ , 半径为 1. 因为圆与双曲线的渐近线相切, 所以圆心到双曲线渐近线的距离等于圆的半径, 所以  $\frac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}} = 1$ ,

解得  $m^2 = \frac{1}{3}$ . 因为  $m > 0$ , 所以  $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

### 20. -3 命题点 ▶ 双曲线的标准方程及简单几何性质

【解析】依题意得  $m < 0$ , 则双曲线的标准方程可化为  $y^2 - \frac{x^2}{-m} = 1$ , 此时双曲线的



渐近线方程为  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{-m}}x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ , 解得  $m = -3$ .

**21.  $y = \sqrt{3}x$   $y = -\sqrt{3}x$  命题点** ▶ 双曲线的几何性质

**【解析】** 双曲线  $C$  的离心率  $e = \frac{c}{a} =$

$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = 2$ , 所以  $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ , 所以双曲线

$C$  的渐近线方程为  $y = \sqrt{3}x, y = -\sqrt{3}x$ .

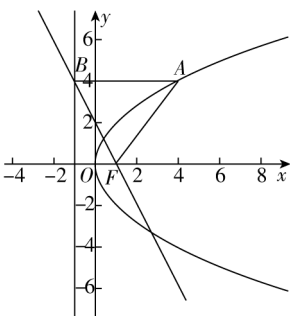
**22. C 命题点** ▶ 抛物线的定义及几何性质, 抛物线的焦半径

**【解析】** 因为直线  $BF$  的方程为  $y = -2x + 2$ , 所以当  $y = 0$  时,  $x = 1$ , 即  $\frac{p}{2} = 1$ , 所以

抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ , 准线方程为  $x = -1$ , 则  $B(-1, 4)$ , 由点  $B$  坐标得  $y_A = 4$ , 代入  $y^2 = 4x$ , 得  $A(4, 4)$ .

所以  $|AF| = \sqrt{(4-1)^2 + (4-0)^2} = 5$  (另

解:  $|AF| = x_A + \frac{p}{2} = 4 + 1 = 5$ ). 故选 C.



**23. ACD 命题点** ▶ 抛物线的定义与性质、直线与抛物线的位置关系

**【解析】** 由题意

可得  $F(\frac{3}{2}, 0)$ ,

直线  $l$  即为抛

物线  $C$  的准

线. 由抛物线

的定义可得

$|AD| = |AF|$ ,

故 A 正确. 由

抛物线的性质可得, 当  $AB$  垂直于  $x$  轴

时,  $|AB|$  最小, 此时  $AB$  为抛物线的通

径, 则有  $|AB| \geq 6$ , 故 C 正确. 过点  $B$  作

$l$  的垂线, 垂足为  $H$ . 由  $EF \perp AB$  可得

$\angle AFE = \frac{\pi}{2}$ , 又  $\angle ADE = \frac{\pi}{2}$ ,  $|AD| =$

$|AF|$ , 所以  $\angle DEA = \angle FEA$ . 同理可得

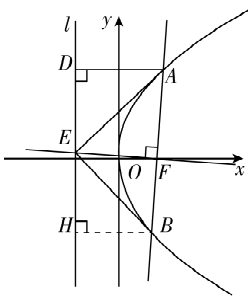
$\angle FEB = \angle HEB$ , 故  $\angle AEB = \frac{1}{2}(\angle DEF +$

$\angle FEH) = \frac{\pi}{2}$ , 在  $\text{Rt} \triangle AEB$  中,  $EF$  为  $AB$

边上的高, 所以  $|AE| \cdot |BE| = |AB| \cdot |EF|$ ,

当  $E$  为  $l$  与  $x$  轴的交点且  $AB$  为抛物线

的通路时,  $|AB| \cdot |EF|$  取得最小值, 最





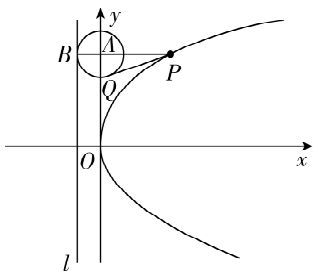
小值为  $3 \times 6 = 18$ , 故  $|AE| \cdot |BE| \geq 18$ ,

故 D 正确. 在  $\text{Rt} \triangle AEB$  中,  $\angle AEB = \frac{\pi}{2}$ ,

故  $|AE| \neq |AB|$ , 故 B 错误. 故选 ACD.

**24. ABD** **命题点** 抛物线的定义与性质, 直线与抛物线的位置关系

**【解析】**  $\because y^2 = 4x, \therefore$  准线  $l$  为直线  $x = -1, \therefore \odot A$  圆心为  $A(0, 4)$ , 半径为 1, 作出抛物线与  $\odot A$  如图所示.  $\therefore l$  与  $\odot A$  相



切, 故 A 正确. 当  $P, A, B$  三点共线时,

$\because A(0, 4), \therefore P$  点坐标为  $(4, 4), \therefore |PA| =$

$4, |AQ| = 1, \therefore |PQ| = \sqrt{4^2 - 1} = \sqrt{15}$ , 故

B 正确. 当  $|PB| = 2$  时,  $P$  点坐标为  $(1,$

$2)$  或  $(1, -2)$ . 当  $P$  点坐标为  $(1, 2)$  时,

点  $B$  坐标为  $(-1, 2), |PA| =$

$\sqrt{1^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5} = |AB|$ , 而  $|PB| = 2$ ,

$|PA|^2 + |AB|^2 \neq |PB|^2$ , 此时  $PA$  与  $AB$  不

垂直; 当  $P$  点坐标为  $(1, -2)$  时,  $B$  点坐标

为  $(-1, -2), |PA| = \sqrt{1^2 + (4+2)^2} =$

$\sqrt{37} = |AB|$ , 而  $|PB| = 2$ , 则  $|PA|^2 +$

$|AB|^2 \neq |PB|^2$ , 此时  $PA$  与  $AB$  也不垂

直, 故 C 错误. 对于 D, 设  $P(x_0, y_0)$ , 则

$B(-1, y_0), \therefore |PA| = |PB|, \therefore |PA|^2 =$

$|PB|^2$ , 则  $x_0^2 + (y_0 - 4)^2 = (x_0 + 1)^2$ , 又点

$P$  在抛物线上,  $\therefore y_0^2 = 4x_0$ , 代入整理可

得  $y_0^2 - 16y_0 + 30 = 0$ , 解得  $y_0 = 8 \pm \sqrt{34}$

(另解:  $\Delta = 16^2 - 4 \times 1 \times 30 = 136 > 0$ , 故方

程有两个不等实根),  $\therefore$  满足  $|PA| =$

$|PB|$  的点  $P$  有且仅有 2 个, 故 D 正确.

故选 ABD.

### 一题多解

选项 ABC 同解析. 对于 D, 设抛物线  $C$  的焦点为  $F$ , 则  $F(1, 0)$  且  $|PB| = |PF|, \therefore |PA| = |PB|, \therefore |PA| = |PF|, \therefore$  满足  $|PA| = |PF|$  的点在线段  $AF$  的垂直平分线上, 设线段  $AF$  的中点为

$M, \because A(0, 4), F(1, 0), \therefore M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ , 则

线段  $AF$  的垂直平分线的方程为  $y - 2 =$

$\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\right)$ , 即  $x - 4y + \frac{15}{2} = 0$ , 联立

$$\begin{cases} x - 4y + \frac{15}{2} = 0, \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{消去 } x \text{ 可得 } y^2 - 16y + 30 = 0,$$

$\therefore \Delta > 0, \therefore$  满足  $|PA| = |PB|$  的点  $P$  有且仅有 2 个, 故 D 正确.

**25. AC 命题点** 抛物线的焦点、准线以及弦长

**【解析】**对于 A, 依题意, 抛物线  $C$  的焦点为  $(\frac{p}{2}, 0)$ , 直线  $y = -\sqrt{3}(x-1)$  过点  $(1, 0)$ , 所以  $\frac{p}{2} = 1$ , 解得  $p = 2$ , 故 A 正确.

对于 B, 由 A 可知抛物线  $C: y^2 = 4x$ , 将直线方程  $y = -\sqrt{3}(x-1)$  与  $C$  的方程联立、整理可得  $3x^2 - 10x + 3 = 0$ . 设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = \frac{10}{3}$ . 设抛物线

$C$  的焦点为  $F$ , 由抛物线的定义可知,  $|MF| = x_1 + 1, |NF| = x_2 + 1$ , 所以  $|MN| = |MF| + |NF| = x_1 + x_2 + 2 = \frac{16}{3}$  (快解: 易

知直线  $y = -\sqrt{3}(x-1)$  的倾斜角  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ ,

所以  $|MN| = \frac{2p}{\sin^2 \alpha} = \frac{2 \times 2}{\sin^2 \frac{2\pi}{3}} = \frac{16}{3}$ ), 故 B

错误.

对于 C, 由 B 知  $|MN| = \frac{16}{3}$ , 所以以  $MN$

为直径的圆的半径为  $\frac{8}{3}$ . 设  $MN$  的中点

为  $P$ , 因为  $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5}{3}$ , 即点  $P$  的横坐标

为  $\frac{5}{3}$ , 所以  $P$  到  $C$  的准线的距离为  $\frac{8}{3}$ ,

所以以  $MN$  为直径的圆与  $l$  相切, 故 C 正确.

对于 D, 由于  $3x^2 - 10x + 3 = (3x-1)(x-3) = 0$ , 不妨设  $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$ , 将  $x_1 = 3$

代入  $y = -\sqrt{3}(x-1)$ , 解得  $y_1 = -2\sqrt{3}$ , 所

以  $M(3, -2\sqrt{3}), |MO| = \sqrt{3^2 + (-2\sqrt{3})^2} =$

$\sqrt{21}$ , 同理可得  $|NO| = \frac{\sqrt{13}}{3}$ , 又  $|MN| =$

$\frac{16}{3}$ , 所以  $\triangle OMN$  不是等腰三角形, 故 D

错误. 故选 AC.

**26. BCD 命题点** 抛物线及其几何性质

**【解析】**对于 A, 由点  $A(1, 1)$  在抛物线  $C$  上, 得  $2p = 1$ , 解得  $p = \frac{1}{2}$ , 则  $C$  的准线

为  $y = -\frac{1}{4}$ , 故 A 错误.

对于 B, 由点  $A, B$  的坐标得直线  $AB$  的斜率  $k_{AB} = 2$ , 由于  $C$  的方程为  $y = x^2$ , 所以  $y' = 2x$ , 令  $y' = 2$ , 则  $x = 1$ , 将  $x = 1$  代入  $y = x^2$ , 得  $y = 1$ , 所以切点为  $(1, 1)$ , 即为  $A$  点, 所以直线  $AB$  与  $C$  相切, 故 B 正确.

对于 C, 由于直线  $PQ$  的斜率一定存在,



设直线  $PQ$  的方程为  $y = kx - 1$ , 由

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = kx - 1, \end{cases} \text{ 得 } x^2 - kx + 1 = 0, \text{ 所以 } x_P \cdot$$

$x_Q = 1$ , 则  $y_P \cdot y_Q = x_P^2 \cdot x_Q^2 = 1$ , 所以  $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = x_P \cdot x_Q + y_P \cdot y_Q = 2 = |\vec{OP}| \cdot |\vec{OQ}| \cdot \cos \theta < |\vec{OP}| \cdot |\vec{OQ}|$  (其中  $\theta$  为  $\vec{OP}$  与  $\vec{OQ}$  的夹角), 又  $|OA|^2 = (1-0)^2 + (1-0)^2 = 2$ , 所以  $|OA|^2 < |OP| \cdot |OQ|$ , 故 C 正确.

对于 D, 由 C 知  $|BP| \cdot |BQ| = \sqrt{1+k^2} |x_P| \cdot \sqrt{1+k^2} |x_Q| = (1+k^2) \cdot |x_P x_Q| = 1+k^2$ , 由 B 选项知  $|k| > 2$ , 所以  $1+k^2 > 5$ . 又  $|BA|^2 = (1-0)^2 + [1-(-1)]^2 = 5$ , 所以  $|BP| \cdot |BQ| > |BA|^2$ , 故 D 正确. 故选 BCD.

## 27. ACD 命题点 ▶ 抛物线的性质、余弦定理、直线与抛物线的位置关系

【解析】对于 A, 因为  $|AF| = |AM|$ , 且

$$M(p, 0), F\left(\frac{p}{2}, 0\right), \text{ 所以 } x_A = \frac{x_F + x_M}{2} =$$

$\frac{3}{4}p$ , 代入抛物线方程  $y^2 = 2px (p > 0)$ , 解

得  $y_A = \frac{\sqrt{6}}{2}p$ , 所以  $A\left(\frac{3}{4}p, \frac{\sqrt{6}}{2}p\right)$ , 所

$$\text{以 } k_{AB} = k_{AF} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}p - 0}{\frac{3}{4}p - \frac{p}{2}} = 2\sqrt{6}, \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B, 由选项 A 的分析, 知直线  $AB$  的方程为  $y = 2\sqrt{6}\left(x - \frac{p}{2}\right)$ , 代入  $y^2 = 2px$ ,

得  $12x^2 - 13px + 3p^2 = 0$ , 解得  $x = \frac{3}{4}p$  或

$$x = \frac{1}{3}p, \text{ 所以 } x_B = \frac{1}{3}p, \text{ 所以 } y_B = -\frac{\sqrt{6}}{3}p,$$

$$\text{所以 } |OB| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2} = \frac{\sqrt{7}}{3}p \neq \frac{p}{2} = |OF|,$$

故 B 不正确;

对于 C, 由抛物线的定义及选项 B 的分

析, 得  $|AB| = x_A + x_B + p = \frac{25}{12}p > 2p$ , 即

$|AB| > 4|OF|$ , 故 C 正确;

对于 D, 因为  $|OA| = \frac{\sqrt{33}}{4}p$ ,  $|AM| = \frac{5}{4}p$ ,

$$|OB| = \frac{\sqrt{7}}{3}p, |BM| = \frac{\sqrt{10}}{3}p, \text{ 所以由余弦定$$

$$\text{理, 得 } \cos \angle OAM = \frac{|OA|^2 + |AM|^2 - |OM|^2}{2|OA| \cdot |AM|} =$$

$$\frac{\frac{33}{16}p^2 + \frac{25}{16}p^2 - p^2}{2 \times \frac{\sqrt{33}}{4}p \times \frac{5}{4}p} = \frac{21}{5\sqrt{33}} > 0, \cos \angle OBM =$$

$$\frac{|OB|^2 + |BM|^2 - |OM|^2}{2|OB| \cdot |BM|} = \frac{\frac{7}{9}p^2 + \frac{10}{9}p^2 - p^2}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{3}p \times \frac{\sqrt{10}}{3}p} =$$



$\frac{4}{\sqrt{70}} > 0$ , 所以  $\angle OAM < 90^\circ$ ,  $\angle OBM < 90^\circ$ , 所以

$\angle OAM + \angle OBM < 180^\circ$ , 故 D 正确. 故选 ACD.

### 28. B 命题点 ▶ 抛物线的几何性质

【解析】依题意可得抛物线的焦点  $F(1, 0)$ ,  $B(3, 0)$ , 所以  $|AF| = |BF| = 2$ , 设 A 点横坐标为  $x_A$ , 则有  $x_A + 1 = 2$ , 所以  $x_A = 1$ , 所以  $AF \perp BF$ , 所以  $|AB| = 2\sqrt{2}$ , 故选 B.

### 29. $\frac{9}{4}$ 命题点 ▶ 抛物线的方程及性质

【解析】将点  $A(1, \sqrt{5})$  的坐标代入抛物线  $C: y^2 = 2px$ , 得  $5 = 2p$ , 所以  $p = \frac{5}{2}$ , 所以

抛物线 C 的准线方程为  $x = -\frac{p}{2} = -\frac{5}{4}$ ,

所以点 A 到准线的距离为  $1 + \frac{5}{4} = \frac{9}{4}$ .

### 30. ABD 命题点 ▶ 新定义曲线方程的求解及相关性质

【解析】设曲线 C 上任一点  $(x, y)$ , 由 C 上的点到点  $F(2, 0)$  的距离与到定直线  $x = a$  ( $a < 0$ ) 的距离之积为 4, 可得

$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2} = 4$ , 又  $\because C$  过坐标原点,  $\therefore \sqrt{(0-2)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(0-a)^2} = 4$ , 得  $|a| = 2$ .

又  $\because a < 0$ ,  $\therefore a = -2$ , 故 A 正确.

由 A 选项可得, 曲线 C 的方程为

$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+2)^2} = 4 (x > -2)$ ,

即  $y^2 = \frac{16}{(x+2)^2} - (x-2)^2 (x > -2)$ , 将点

$(2\sqrt{2}, 0)$  的坐标代入上式, 得  $0^2 =$

$\frac{16}{(2\sqrt{2}+2)^2} - (2\sqrt{2}-2)^2$ , 成立,

$\therefore$  点  $(2\sqrt{2}, 0)$  在 C 上, 故 B 正确.

令  $\omega(x) = \frac{16}{(x+2)^2} - (x-2)^2 (x > 0)$ ,

则  $\omega'(x) = \frac{-2[16 + (x-2)(x+2)^3]}{(x+2)^3}$ ,

令  $g(x) = (x-2)(x+2)^3 + 16$ , 则

$g'(x) = 4(x+2)^2(x-1)$ ,

$\therefore g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

又  $g(0) = 0$ ,  $g(1) = -11 < 0$ ,  $g(2) = 16 > 0$ ,

$\therefore$  存在  $m \in (1, 2)$ , 使得  $g(m) = 0$ .

$\therefore \omega(x)$  在  $(0, m)$  上单调递增, 在  $(m, +\infty)$  上单调递减,

$\therefore \omega(x)$  在  $x = m$  处取得极大值, 也是最大值,

$\therefore \omega(x)_{\max} = \omega(m) > \omega(2) = 1$ ,  $\therefore C$  在第一象限的点的纵坐标的最大值大于 1, 故 C 错误.



$\because$  点  $(x_0, y_0)$  在  $C$  上,  $\therefore y_0^2 = \frac{16}{(x_0+2)^2} - (x_0-2)^2$  ( $x_0 > -2$ ), 由  $x_0 > -2$  可知  $(x_0-2)^2 \geq 0$ ,  $\therefore y_0^2 \leq \frac{16}{(x_0+2)^2}$ , 又  $x_0 > -2$ ,  $\therefore x_0+2 > 0$ ,  $\therefore 0 \leq |y_0| \leq \frac{4}{x_0+2}$ ,  $\therefore y_0 \leq \frac{4}{x_0+2}$  成立, 故 D 正确. 故选 ABD.

**快解**

A, B, D 选项分析同上; C 选项, 可用特值法, 取  $C$  上第一象限的点  $(1.5, y)$ ,  $y > 0$ , 则  $y^2 = \frac{16}{3.5^2} - (-0.5)^2 \approx 1.056 > 1$ ,  $\therefore y > 1$ , 故 C 错误.

**刷大题**

**1. 命题点** ▶ 椭圆的离心率、直线与椭圆的位置关系及三角形面积公式的应用

**【解】** (1) 将  $A(0, 3)$ ,  $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$  的坐标代

入椭圆  $C$  的方程, 可得 
$$\begin{cases} \frac{0}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1, \\ \frac{9}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$\begin{cases} a = 2\sqrt{3}, \\ b = 3, \end{cases}$  则  $c^2 = a^2 - b^2 = 3$ , 即  $c = \sqrt{3}$ ,

则  $C$  的离心率  $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ .

(2) 由 (1) 可得椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

当直线  $l$  的斜率不存在时, 直线  $l$  的方程为  $x = 3$ , 此时  $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \neq 9$ , 不符合题意, 故直线  $l$  的斜率存在.

设直线  $l$  的方程为  $y - \frac{3}{2} = k(x - 3)$ ,

令  $P(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 联立

$$\begin{cases} y = k(x - 3) + \frac{3}{2}, \\ \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} = 1, \end{cases} \quad \text{消去 } y \text{ 可得}$$

$(4k^2 + 3)x^2 - (24k^2 - 12k)x + 36k^2 - 36k - 27 = 0$ ,

$\Delta = (24k^2 - 12k)^2 - 4(4k^2 + 3)(36k^2 - 36k - 27) = 36(4k^2 + 12k + 9) = 36(2k + 3)^2 >$

$0, k \neq -\frac{3}{2}$ ,

所以 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{24k^2 - 12k}{4k^2 + 3}, \\ x_1 x_2 = \frac{36k^2 - 36k - 27}{4k^2 + 3}, \end{cases}$$

所以  $|PB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot$



$$\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} =$$

$$\frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}.$$

$$\text{又点 } A \text{ 到直线 } PB \text{ 的距离 } d = \frac{\left|3k + \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}},$$

$$S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4\sqrt{3}\sqrt{k^2+1}\sqrt{3k^2+9k+\frac{27}{4}}}{4k^2+3}.$$

$$\frac{\left|3k + \frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}} = 9,$$

解得  $k = \frac{1}{2}$  或  $\frac{3}{2}$ , 所以直线  $l$  的方程为

$$y = \frac{1}{2}x \text{ 或 } y = \frac{3}{2}x - 3.$$

## 2. 命题点 ▶ 椭圆的方程、离心率, 直线与椭圆的位置关系

【解】(1) 依题意,  $b^2 + c^2 = 4$ ,  $b = c$  (提示: 正方形的对角线互相垂直平分且相等), 解

得  $b = c = \sqrt{2}$ , 所以  $a = \sqrt{b^2 + c^2} = 2$ ,

所以椭圆  $E$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ , 离心率

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) 因为直线  $AB$  的斜率存在, 所以设直线  $AB$  的方程为  $y = kx + t$  ( $k \neq 0$ ), 联立

$$\begin{cases} y = kx + t, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (1+2k^2) \cdot$$

$x^2 + 4ktx + 2t^2 - 4 = 0$ , 由  $\Delta = 16k^2t^2 - 4(1+2k^2)(2t^2-4) = 8(4k^2-t^2+2) > 0$ , 得  $4k^2 + 2 > t^2$ .

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 则  $D(-x_2, y_2)$  (提示: 直线  $BD$  的斜率为 0, 即  $BD \parallel x$  轴, 则根据椭圆的对称性, 点  $B, D$  关于  $y$  轴对称),  $x_1 + x_2 = -\frac{4kt}{1+2k^2}$ ,  $x_1x_2 = \frac{2t^2-4}{1+2k^2}$ .

$$\text{直线 } AC \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1-1}{x_1}(x-0) + 1, \text{ 即}$$

$$y = \frac{y_1-1}{x_1}x + 1, \text{ 又直线 } AC \text{ 过点 } D, \text{ 所以 } y_2 =$$

$$\frac{y_1-1}{x_1}(-x_2) + 1, \text{ 即 } x_1y_2 = -x_2y_1 + x_2 + x_1, \text{ 即}$$

$$x_1(kx_2 + t) + x_2(kx_1 + t) = x_1 + x_2, \text{ 即}$$

$$2kx_1x_2 + (t-1)(x_1+x_2) = 0,$$

$$\text{即 } 2k \frac{2t^2-4}{1+2k^2} - \frac{4kt(t-1)}{1+2k^2} = 0, \text{ 整理得 } 4k(t-2) = 0,$$

又  $k \neq 0$ , 所以  $t = 2$ .

## 3. 命题点 ▶ 椭圆的方程、直线与椭圆的位置关系

(1) 【解】设椭圆  $C$  的左焦点为  $F_1$ , 因为点  $M$  的横坐标为 1, 且  $MF \perp x$  轴, 所

以  $c=1$ , 则  $|F_1F|=2$ ,  $|MF|=\frac{3}{2}$ .

因为  $MF \perp x$  轴, 所以  $|MF_1| = \sqrt{|MF|^2 + |F_1F|^2} = \frac{5}{2}$ , 所以  $2a = |MF_1| + |MF| = 4$ , 解得  $a=2$ , 所以  $b^2 = a^2 - c^2 = 3$ , 故椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

(2) 【证明】由题可得,  $F(1,0)$ ,  $P(4,0)$ , 所以点  $N\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ .

当直线  $AB$  与  $x$  轴不重合时, 设直线  $AB$  的方程为  $x=ty+4$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ .

由  $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x=ty+4, \end{cases}$  整理得,  $(3t^2+4)y^2 + 24ty + 36 = 0$ , 由  $\Delta > 0$  得  $t^2 > 4$ ,

根据根与系数的关系可得

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{24t}{3t^2+4}, \\ y_1 y_2 = \frac{36}{3t^2+4}, \end{cases}$$

直线  $NB$  的方程为  $y = \frac{y_2}{x_2 - \frac{5}{2}} \left( x - \frac{5}{2} \right)$ , 设

点  $Q$  的坐标为  $(1, y_Q)$ , 将  $x=1$  代入直线

$$NB \text{ 的方程得 } y_Q = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{x_2 - \frac{5}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{ty_2 + \frac{3}{2}},$$

所以  $Q$  点的坐标为  $\left( 1, \frac{-\frac{3}{2}y_2}{ty_2 + \frac{3}{2}} \right)$ .

$$\text{因为 } y_Q - y_1 = \frac{-\frac{3}{2}y_2}{ty_2 + \frac{3}{2}} - y_1$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}y_2 - y_1 \cdot \left( ty_2 + \frac{3}{2} \right)}{ty_2 + \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}(y_1 + y_2) - ty_1 y_2}{ty_2 + \frac{3}{2}}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2} \times \left( -\frac{24t}{3t^2+4} \right) - t \times \frac{36}{3t^2+4}}{ty_2 + \frac{3}{2}} = 0,$$

所以  $y_Q = y_1$ .

又  $y_1 \neq 0$ , 所以直线  $AQ$  与  $x$  轴平行, 所以  $AQ \perp y$  轴.

当直线  $AB$  与  $x$  轴重合时, 直线  $AQ$  与  $x$  轴重合, 所以  $AQ \perp y$  轴.

综上,  $AQ \perp y$  轴.

#### 4. 命题点 ▶ 双曲线的方程及几何性质、直线与双曲线的位置关系



【解】(1) 由题意得  $c=2$  ①.

$$\therefore \text{双曲线的渐近线方程为 } y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{3}x, \therefore \frac{b}{a} = \sqrt{3} \quad \text{②}.$$

$$\text{又 } c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{③}, \text{联立①②③解得 } a=1, b=\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{双曲线 } C \text{ 的方程为 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

(2) 设直线  $PQ$  的方程为  $y=kx+n$ , 由点  $P, Q$  的相对位置可知  $k>0$ , 且  $k \neq \sqrt{3}$ . 将直线  $PQ$  的方程代入  $C$  的方程得  $(3-k^2)x^2 - 2knx - n^2 - 3 = 0$ ,

$$\text{则 } \Delta = 12(n^2 + 3 - k^2) > 0, x_1 + x_2 = \frac{2kn}{3-k^2},$$

$$x_1 x_2 = -\frac{n^2 + 3}{3-k^2}. \text{ 又 } x_1 > x_2 > 0, \therefore k > \sqrt{3}, n < 0,$$

$$\text{则 } x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2}}{k^2 - 3} = \frac{2\sqrt{3(n^2 + 3 - k^2)}}{k^2 - 3}.$$

设点  $M$  的坐标为  $(x_M, y_M)$ , 则

$$\begin{cases} y_M - y_1 = -\sqrt{3}(x_M - x_1), \\ y_M - y_2 = \sqrt{3}(x_M - x_2). \end{cases}$$

$$\text{两式相减, 得 } y_1 - y_2 = 2\sqrt{3}x_M - \sqrt{3}(x_1 + x_2).$$

$$\text{又 } y_1 - y_2 = (kx_1 + n) - (kx_2 + n) = k(x_1 - x_2),$$

$$\therefore 2\sqrt{3}x_M = k(x_1 - x_2) + \sqrt{3}(x_1 + x_2),$$

$$\text{解得 } x_M = \frac{k\sqrt{n^2 + 3 - k^2} - kn}{k^2 - 3}.$$

$$\text{两式相加, 得 } 2y_M - (y_1 + y_2) = \sqrt{3}(x_1 - x_2).$$

$$\therefore y_1 + y_2 = (kx_1 + n) + (kx_2 + n) = k(x_1 + x_2) + 2n,$$

$$\therefore 2y_M = k(x_1 + x_2) + \sqrt{3}(x_1 - x_2) + 2n,$$

$$\text{解得 } y_M = \frac{3\sqrt{n^2 + 3 - k^2} - 3n}{k^2 - 3} = \frac{3}{k}x_M,$$

$$\text{因此, 点 } M \text{ 的轨迹方程为 } y = \frac{3}{k}x (x > 0),$$

其中  $k$  为直线  $PQ$  的斜率.

若选条件①②, 则证明③:

由题知直线  $AB$  的方程为  $y=k(x-2)$ , 设  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ , 不妨取点  $A$  在第一象限,

$$\text{则 } \begin{cases} y_A = k(x_A - 2), \\ y_A = \sqrt{3}x_A, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_A = \frac{2k}{k - \sqrt{3}}, \\ y_A = \frac{2\sqrt{3}k}{k - \sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$\text{同理可得 } x_B = \frac{2k}{k + \sqrt{3}}, y_B = \frac{-2\sqrt{3}k}{k + \sqrt{3}},$$

$$\text{此时 } x_A + x_B = \frac{4k^2}{k^2 - 3}, y_A + y_B = \frac{12k}{k^2 - 3}.$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标满足 } \begin{cases} y_M = k(x_M - 2), \\ y_M = \frac{3}{k}x_M, \end{cases}$$



$$\text{解得} \begin{cases} x_M = \frac{2k^2}{k^2-3} = \frac{x_A+x_B}{2}, \\ y_M = \frac{6k}{k^2-3} = \frac{y_A+y_B}{2}, \end{cases}$$

故  $M$  为线段  $AB$  的中点, 即  $|MA| = |MB|$ .

若选条件①③, 则证明②:

当直线  $AB$  的斜率不存在时, 点  $M$  即为

点  $F(2, 0)$ , 此时  $M$  不在直线  $y = \frac{3}{k}x$  上,

不符合题意.

当直线  $AB$  的斜率存在时, 设直线  $AB$  的

方程为  $y = m(x-2)$  ( $m \neq 0$ , 且  $m \neq \pm\sqrt{3}$ ),

$A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ , 不妨取点  $A$  在第一象限,

$$\text{则} \begin{cases} y_A = m(x_A-2), \\ y_A = \sqrt{3}x_A, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_A = \frac{2m}{m-\sqrt{3}}, \\ y_A = \frac{2\sqrt{3}m}{m-\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$\text{同理可得 } x_B = \frac{2m}{m+\sqrt{3}}, y_B = \frac{-2\sqrt{3}m}{m+\sqrt{3}},$$

$$\text{此时 } x_M = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2m^2}{m^2-3}, y_M = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{6m}{m^2-3},$$

由于点  $M$  同时在直线  $y = \frac{3}{k}x$  上, 故  $6m =$

$$\frac{3}{k} \cdot 2m^2,$$

解得  $k = m$ , 因此  $PQ \parallel AB$ .

若选条件②③, 则证明①:

由题知直线  $AB$  的方程为  $y = k(x-2)$ ,

设  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ , 不妨取点  $A$  在第一象限,

$$\text{则} \begin{cases} y_A = k(x_A-2), \\ y_A = \sqrt{3}x_A, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x_A = \frac{2k}{k-\sqrt{3}}, \\ y_A = \frac{2\sqrt{3}k}{k-\sqrt{3}}. \end{cases}$$

$$\text{同理可得 } x_B = \frac{2k}{k+\sqrt{3}}, y_B = \frac{-2\sqrt{3}k}{k+\sqrt{3}},$$

设线段  $AB$  的中点为  $E(x_E, y_E)$ , 则  $x_E =$

$$\frac{x_A+x_B}{2} = \frac{2k^2}{k^2-3}, y_E = \frac{y_A+y_B}{2} = \frac{6k}{k^2-3}.$$

$\therefore |MA| = |MB|$ ,  $\therefore$  点  $M$  在线段  $AB$  的垂直平分线上,

即点  $M$  在直线  $y - y_E = -\frac{1}{k}(x - x_E)$  上.

将该直线方程与  $y = \frac{3}{k}x$  联立, 解得

$$\begin{cases} x_M = \frac{2k^2}{k^2-3} = x_E, \\ y_M = \frac{6k}{k^2-3} = y_E, \end{cases}$$

即点  $M$  恰为线段  $AB$  的中点, 故点  $M$  在  $AB$  上.



## 5. 命题点 ▶ 椭圆的标准方程、几何性质, 直线与椭圆的位置关系, 三角形面积公式

【解】(1) 依题意, 设椭圆  $C$  的焦距为

$$2c (c > 0), \text{ 则 } \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 2a = 4 \end{cases} \text{ (易错: 椭圆的长轴长为 } 2a \text{),}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = 2, \\ c = \sqrt{2}. \end{cases}$$

$$\text{又 } b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2},$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 依题意可知, 直线  $l$  的斜率一定存在

(提示: 若直线  $l$  的斜率不存在, 则不能构成  $\triangle AOB$ ), 设直线  $l$  的方程为  $y = kx - 2$ ,  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ ,

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \\ y = kx - 2, \end{cases}$$

消去  $y$  整理得  $(2k^2 + 1)x^2 - 8kx + 4 = 0$ ,

由  $\Delta = 64k^2 - 16(2k^2 + 1) = 32k^2 - 16 > 0$ , 解

$$\text{得 } k \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \text{ (易错:}$$

直线与圆锥曲线相交于两个点, 则必须判断“ $\Delta > 0$ ”, 得出参数范围, 以免产生“增根”),

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8k}{2k^2 + 1}, \\ x_1 x_2 = \frac{4}{2k^2 + 1}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } |AB| &= \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \\ &= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{\frac{64k^2 - 32k^2 - 16}{(2k^2+1)^2}} = \\ &= 4\sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1}. \end{aligned}$$

$$\text{又坐标原点 } O \text{ 到直线 } l \text{ 的距离 } d = \frac{2}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$\text{所以 } \triangle AOB \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} |AB| \cdot d = \frac{1}{2} \times$$

$$4\sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1} \times \frac{2}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{4\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1},$$

$$\text{则 } \frac{4\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1} = \sqrt{2}, \text{ 解得 } k = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \in$$

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right),$$

$$\text{所以 } |AB| = 4\sqrt{1+k^2} \frac{\sqrt{2k^2-1}}{2k^2+1} = \sqrt{5}.$$

## 6. 命题点 ▶ 曲线与方程、直线与抛物线的位置关系

(1) 【解】设点  $P(x, y)$ , 由题意, 得  $|y| =$

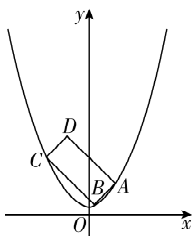
$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2},$$



化简, 得  $y = x^2 + \frac{1}{4}$ ,

所以  $W$  的方程为  $y = x^2 + \frac{1}{4}$ .

(2) 【证明】如图,



设点  $A, B, C$  的坐标分别为  $\left(a, a^2 + \frac{1}{4}\right)$ ,

$\left(b, b^2 + \frac{1}{4}\right)$ ,  $\left(c, c^2 + \frac{1}{4}\right)$ . 由于曲线  $W$  关

于  $y$  轴对称, 不妨设  $b \geq 0$ . 由于  $AB \perp BC$ , 则直线  $AB, BC$  中恰有一条的斜率大于

0, 不妨设  $AB$  的斜率  $k > 0$ , 则直线  $AB$  的

方程为  $y = k(x - b) + b^2 + \frac{1}{4}$ , 直线  $BC$  的方

程为  $y = -\frac{1}{k}(x - b) + b^2 + \frac{1}{4}$ , 将点  $A, C$  坐

标分别代入可得  $a = k - b$ ,  $c = -\frac{1}{k} - b$  (由

$a \neq b$  知  $k \neq 2b$ ),

则  $|AB| = |k - 2b| \sqrt{1 + k^2}$ ,  $|BC| =$

$\left(2b + \frac{1}{k}\right) \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}$ , 矩形  $ABCD$  的周长

$L = 2(|AB| + |BC|) = 2\left(|k - 2b| + \frac{2b}{k} +$

$\frac{1}{k^2}\right) \cdot \sqrt{1 + k^2}$ .

(i) 当  $k < 2b$  时,  $L > 2\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \sqrt{1 + k^2}$ , 记

$x = \sqrt{1 + k^2}$ , 则  $\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \sqrt{1 + k^2} = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ . 考

虑函数  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  ( $x > 1$ ), 由  $f'(x) =$

$\frac{x^4 - 3x^2}{(x^2 - 1)^2}$ , 可得  $f(x)$  在  $(1, \sqrt{3})$  单调递减, 在

$(\sqrt{3}, +\infty)$  单调递增, 在  $x = \sqrt{3}$  处取得最小

值  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 故  $L > 2f(\sqrt{1 + k^2}) \geq 2f(\sqrt{3}) =$

$3\sqrt{3}$ .

(ii) 当  $k > 2b$  时,  $L = 2\left(k - 2b + \frac{2b}{k} +$

$\frac{1}{k^2}\right) \sqrt{1 + k^2}$ .

若  $k = 1$ , 则  $L = 4\sqrt{2} > 3\sqrt{3}$ ;

若  $k > 1$ , 则  $L = 2\left[1 + \frac{1}{k^2} + (k - 2b) \cdot$

$\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right] \sqrt{1 + k^2} > 2\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \sqrt{1 + k^2} \geq$

$3\sqrt{3}$ ;



$$\text{若 } k < 1, \text{ 则 } L = 2 \left( \frac{1}{k} + 2b - 2bk + k^2 \right) \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} > 2(1 + k^2) \sqrt{1 + \frac{1}{k^2}} = 2f\left(\sqrt{1 + \frac{1}{k^2}}\right) \geq 3\sqrt{3}.$$

综上, 矩形  $ABCD$  的周长大于  $3\sqrt{3}$ .

## 7. 命题点 ▶ 直线与双曲线的位置关系、直线的斜率、三角形的面积

【解】(1) 由题设得  $\frac{4}{a^2} - \frac{1}{a^2 - 1} = 1$ , 解得  $a^2 = 2$ .

所以  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ .

设  $l$  的斜率为  $k$ ,  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  ( $x_1 \neq 2, x_2 \neq 2$ ). 当  $x_1^2 = x_2^2$  时,  $k_{AP} + k_{AQ} \neq 0$ .

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{2} - y_1^2 = 1, \\ \frac{x_2^2}{2} - y_2^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } \frac{x_2^2 - x_1^2}{2} - (y_2^2 - y_1^2) = 0,$$

$$\text{故 } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{2(y_2 + y_1)}.$$

$$\text{由 } k_{AP} + k_{AQ} = 0 \text{ 得 } \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = 0,$$

$$\text{即 } x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4 - (x_1 + x_2) - 2(y_1 + y_2) = 0.$$

①

$$\text{由 } \frac{x_1^2}{2} - y_1^2 = 1 \text{ 得 } \frac{x_1^2 - 2^2}{2} - (y_1^2 - 1) = 0, \text{ 即 } \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} = \frac{x_1 + 2}{2(y_1 + 1)}.$$

$$\text{同理可得 } \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = \frac{x_2 + 2}{2(y_2 + 1)}.$$

$$\text{由 } k_{AP} + k_{AQ} = 0 \text{ 得 } \frac{x_1 + 2}{2(y_1 + 1)} + \frac{x_2 + 2}{2(y_2 + 1)} = 0,$$

$$\text{即 } x_1 y_2 + x_2 y_1 + 4 + x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) = 0. \quad \text{②}$$

$$\text{由 ①② 得 } x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) = 0.$$

因此  $l$  的斜率为  $-1$ .

(2) 由题意, 不妨设  $AP$  的倾斜角  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $\angle PAQ$  为  $2\alpha$  或  $\pi - 2\alpha$ .

$$\text{因为 } C \text{ 的渐近线的斜率为 } \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 由 } \tan \angle PAQ = 2\sqrt{2} \text{ 得 } \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \pm 2\sqrt{2}, \text{ 解得 } \tan \alpha = \sqrt{2}.$$

$$\text{所以 } k_{AP} = \sqrt{2}, k_{AQ} = -\sqrt{2}.$$

$$\text{直线 } AP \text{ 的方程为 } y - 1 = \sqrt{2}(x - 2), \text{ 代入 } \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \text{ 得}$$

$$3x^2 + (4\sqrt{2} - 16)x + 20 - 8\sqrt{2} = 0,$$

$$\text{所以 } |AP| = \frac{4}{3}(\sqrt{6} - \sqrt{3}).$$

$$\text{直线 } AQ \text{ 的方程为 } y - 1 = -\sqrt{2}(x - 2), \text{ 代入 } \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \text{ 得}$$

$$3x^2 - (4\sqrt{2} + 16)x + 20 + 8\sqrt{2} = 0,$$

$$\text{所以 } |AQ| = \frac{4}{3}(\sqrt{6} + \sqrt{3}).$$

$$\text{又 } \sin \angle PAQ = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 所以 } \triangle PAQ \text{ 的面积}$$

$$\text{为 } \frac{1}{2} \times |AP| \times |AQ| \times \sin \angle PAQ = \frac{16\sqrt{2}}{9}.$$

**8. 命题点** ▶ 椭圆方程、直线与椭圆的位置关系、椭圆与圆的综合性问题

$$(1) \text{【解】由题意得 } c = \sqrt{2}, \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 可得}$$

$$a = \sqrt{3},$$

$$\text{从而 } b^2 = a^2 - c^2 = 3 - 2 = 1,$$

$$\therefore \text{椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1.$$

(2)【证明】设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ , 若直线  $MN \perp x$  轴, 由直线  $MN$  与曲线  $x^2 + y^2 = 1 (x > 0)$  相切可知, 直线  $MN$  的方程为  $x = 1$ , 不过点  $F$ , 不合题意,  $\therefore$  直线  $MN$  的斜率必存在且不为 0.

设直线  $MN$  的方程为  $y = kx + m (k \neq 0)$ .

由直线  $MN$  与曲线  $x^2 + y^2 = 1 (x > 0)$  相切

$$\text{知 } \frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}} = 1, \text{ 即 } 1+k^2 = m^2.$$

$$\text{将 } y = kx + m (k \neq 0) \text{ 与椭圆方程 } \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$$

$$\text{联立, 消去 } y, \text{ 化简得 } (1+3k^2)x^2 + 6kmx + 3(m^2-1) = 0,$$

$$\Delta = (6km)^2 - 4 \times 3(m^2-1)(1+3k^2) = -12m^2 + 12 + 36k^2 > 0,$$

$$\text{由根与系数的关系得 } x_1 + x_2 = \frac{-6km}{1+3k^2},$$

$$x_1 x_2 = \frac{3(m^2-1)}{1+3k^2}.$$

$$\therefore |MN| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]}$$

$$= \sqrt{(1+k^2) \left[ \left( \frac{-6km}{1+3k^2} \right)^2 - \frac{12(m^2-1)}{1+3k^2} \right]}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+k^2)(36k^2+12-12m^2)}{(1+3k^2)^2}},$$

$$\text{又 } m^2 = k^2 + 1,$$

$$\therefore |MN| = \frac{2\sqrt{6}|k|\sqrt{1+k^2}}{1+3k^2} (*).$$

若点  $M, N, F$  共线, 则  $0 = \sqrt{2}k + m$ , 即  $m = -\sqrt{2}k$ .

又  $1+k^2 = m^2, \therefore k^2 = 1$ , 代入 (\*) 式可得

$$|MN| = \frac{2\sqrt{6} \times 1 \times \sqrt{2}}{1+3} = \sqrt{3}.$$

反之, 若  $|MN| = \sqrt{3}$ ,

$$\text{则 } \frac{2\sqrt{6} \cdot |k| \cdot \sqrt{1+k^2}}{1+3k^2} = \sqrt{3},$$

$$\text{即 } 2\sqrt{2}|k| \cdot \sqrt{1+k^2} = 1+3k^2,$$

$$\text{整理得 } k^2 = 1, \text{ 又 } 1+k^2 = m^2, \therefore m^2 = 2.$$

又曲线  $x^2 + y^2 = 1 (x > 0)$  为右半圆, 则  $m$  与  $k$  异号,

$$\therefore k = 1, m = -\sqrt{2} \text{ 或 } k = -1, m = \sqrt{2},$$





即  $MN$  的方程为  $y = x - \sqrt{2}$  或  $y = -x + \sqrt{2}$ ,  
经检验,都经过点  $F$ .

因此,  $M, N, F$  三点共线的充要条件是  
 $|MN| = \sqrt{3}$ .

## 9. 命题点 ▶ 椭圆的方程, 直线的斜率公式, 椭圆与圆的综合问题及最值

【解】(1) 由题意知 
$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \\ a^2 + b^2 = 10, \end{cases} \quad \text{解}$$

$$\text{得} \begin{cases} a^2 = 9, \\ b^2 = 1, \\ c^2 = 8, \end{cases}$$

故  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ .

(2) (i) 由(1)知  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$ ,

则点  $A$  的坐标为  $(0, -1)$ ,

设  $R(x_0, y_0)$ , 则  $\overrightarrow{AP} = (m, n+1)$ ,  $\overrightarrow{AR} = (x_0, y_0+1)$ , 因为点  $R$  在射线  $AP$  上, 所以  $\overrightarrow{AP}$  与  $\overrightarrow{AR}$  同向共线, 所以  $|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AR}| = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = 3$  (提示:  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AR} = |\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AR}| \cos 0 = |\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AR}|$ ), 所以  $mx_0 + (n+1)(y_0+1) = 3$ .

因为点  $P$  不在  $y$  轴上, 所以直线  $AP$  的斜

率存在, 所以  $k_{AP} = \frac{n+1}{m} = \frac{y_0+1}{x_0} = k_{AR}$  (提示: 点  $R$  在射线  $AP$  上), 所以  $y_0 + 1 = \frac{x_0(n+1)}{m}$ .

$$\text{联立} \begin{cases} mx_0 + (n+1)(y_0+1) = 3, \\ y_0+1 = \frac{x_0(n+1)}{m}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x_0 = \frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \\ y_0 = -\frac{(n-2)(n+1) + m^2}{m^2 + (n+1)^2}, \end{cases}$$

故  $R$  的坐标为

$$\left( \frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, -\frac{(n-2)(n+1) + m^2}{m^2 + (n+1)^2} \right).$$

### 一题多解

由(1)知  $A(0, -1)$ , 因为点  $R$  在射线  $AP$  上, 所以  $\exists \lambda > 0$ , 使得  $\overrightarrow{AR} = \lambda \overrightarrow{AP}$ ,

所以  $|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AR}| = \lambda |\overrightarrow{AP}|^2 = \lambda [m^2 + (n+1)^2] = 3$ , 所以  $\lambda = \frac{3}{m^2 + (n+1)^2}$ ,

所以  $\overrightarrow{AR} = \frac{3}{m^2 + (n+1)^2} (m, n+1) =$

$$\left( \frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, \frac{3(n+1)}{m^2 + (n+1)^2} \right),$$

所以  $R \left( \frac{3m}{m^2 + (n+1)^2}, -\frac{(n-2)(n+1) + m^2}{m^2 + (n+1)^2} \right)$ .



(ii) 由 (i) 知  $P(m, n)$ ,

$$R\left(\frac{3m}{m^2+(n+1)^2}, -\frac{(n-2)(n+1)+m^2}{m^2+(n+1)^2}\right),$$

因为直线  $OR$  的斜率是直线  $OP$  的斜率的 3 倍,

$$\text{所以 } -\frac{(n-2)(n+1)+m^2}{3m} = \frac{3n}{m}, \text{ 所以 } m^2 +$$

$$(n+4)^2 = 18,$$

所以点  $P$  的轨迹方程为  $m^2 + (n+4)^2 = 18$  ( $m \neq 0$ ).

设  $Q(x_1, y_1)$ , 因为  $Q$  是  $C$  上的动点, 所以

$$\frac{x_1^2}{9} + y_1^2 = 1. \text{ 因为点 } P \text{ 的轨迹方程为 } x^2 +$$

$$(y+4)^2 = 18 (x \neq 0), \text{ 所以 } |PQ| \text{ 的最大值}$$

可转化为点  $Q$  到点  $D(0, -4)$  的距离的最大值再加上  $3\sqrt{2}$ .

因为  $|QD| = \sqrt{x_1^2 + (y_1+4)^2}$

$$= \sqrt{9 - 9y_1^2 + y_1^2 + 8y_1 + 16}$$

$$= \sqrt{-8y_1^2 + 8y_1 + 25}$$

$$= \sqrt{-8\left(y_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + 27},$$

所以当  $y_1 = \frac{1}{2}$  时,  $|QD|$  取得最大值  $3\sqrt{3}$ .

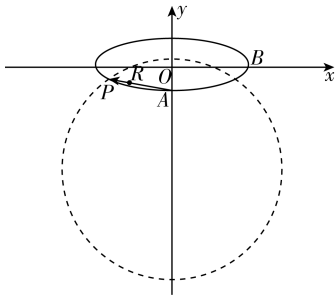
所以  $|PQ|$  的最大值为  $3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$  (另解:

设  $Q(3\cos \theta, \sin \theta)$ , 则  $|DQ|^2 =$

$$(3\cos \theta)^2 + (\sin \theta + 4)^2 = -8\sin^2 \theta + 8\sin \theta +$$

$$25 = -8\left(\sin \theta - \frac{1}{2}\right)^2 + 27 \leq 27, \text{ 所以}$$

$$|DQ|_{\max} = 3\sqrt{3}, \text{ 从而 } |PQ|_{\max} = 3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}).$$



#### 10. 命题点 ▶ 直线与抛物线的位置关系, 三角形面积的最值问题

【解】(1) 联立 
$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0, \\ y^2 = 2px, \end{cases}$$

消去  $y$  并整理得  $x^2 + (2 - 8p)x + 1 = 0$ , 由

$$(2 - 8p)^2 - 4 > 0 \text{ 得 } p > \frac{1}{2},$$

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = 8p - 2, x_1 x_2 = 1$ ,

$$\text{所以 } |AB| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} =$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{4}} \sqrt{(8p - 2)^2 - 4} = 4\sqrt{15},$$

解得  $p = 2$  (负值舍去).

(2) 由题知, 直线  $MN$  的斜率不为 0, 设

直线  $MN$  的方程为  $x = my + b$ , 由 (1) 知,

抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ ,

联立  $\begin{cases} x = my + b, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$  消去  $x$  并整理得  $y^2 -$

$$4my - 4b = 0,$$

$$\Delta = 16m^2 + 16b > 0,$$

设  $M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$ , 则  $y_3 + y_4 = 4m$ ,  
 $y_3 y_4 = -4b$ ,

$$\text{所以 } x_3 + x_4 = 4m^2 + 2b, x_3 x_4 = m^2 y_3 y_4 + mb(y_3 + y_4) + b^2 = b^2.$$

因为抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F(1, 0)$ ,

$$\text{所以 } \overrightarrow{FM} = (x_3 - 1, y_3), \overrightarrow{FN} = (x_4 - 1, y_4),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FN} = (x_3 - 1) \cdot (x_4 - 1) + y_3 y_4 = x_3 x_4 - (x_3 + x_4) + y_3 y_4 + 1 = 0,$$

$$\text{所以 } b^2 - 4m^2 - 2b - 4b + 1 = 0,$$

$$\text{所以 } m^2 = \frac{b^2 - 6b + 1}{4} \geq 0, \text{ 此时 } \Delta = 4(b - 1)^2. \text{ 若 } \Delta > 0, \text{ 则 } b \neq 1,$$

$$\text{所以 } b^2 - 6b + 1 \geq 0, \text{ 解得 } b \leq 3 - 2\sqrt{2} \text{ 或 } b \geq 3 + 2\sqrt{2},$$

设点  $F$  到直线  $MN$  的距离为  $d$ , 则

$$d = \frac{|1 - b|}{\sqrt{1 + m^2}},$$

$$\begin{aligned} \text{又 } |MN| &= \sqrt{1 + m^2} \sqrt{(y_3 + y_4)^2 - 4y_3 y_4} \\ &= \sqrt{1 + m^2} \sqrt{16m^2 + 16b} \\ &= 2\sqrt{1 + m^2} \cdot |b - 1|, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle MFN} = \frac{1}{2} |MN| d = |b - 1|^2,$$

所以当  $b = 3 - 2\sqrt{2}$  时,  $\triangle MFN$  的面积取得最小值  $(3 - 2\sqrt{2} - 1)^2 = 12 - 8\sqrt{2}$ .

## 11. 命题点 ▶ 双曲线的方程及几何性质、直线与双曲线的位置关系

(1) 【解】因为双曲线  $C$  的左焦点为  $(-2\sqrt{5}, 0)$ , 所以  $c = 2\sqrt{5}$ .

$$\text{由离心率 } e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{a} = \sqrt{5}, \text{ 得 } a = 2,$$

$$\text{所以 } b = \sqrt{c^2 - a^2} = 4,$$

$$\text{所以 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

(2) 【证明】设  $M(x_1, y_1) (x_1 < 0, y_1 > 0)$ ,  
 $N(x_2, y_2)$ , 直线  $MN$  的方程为  $x = my - 4$   
(提示: 若直线不与  $x$  轴平行或重合, 可设直线方程为  $x = my + t$ ).

因为  $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$ ,

$$\text{所以直线 } MA_1 \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 + 2} (x + 2),$$

$$2), \text{ 直线 } NA_2 \text{ 的方程为 } y = \frac{y_2}{x_2 - 2} (x - 2),$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{y_1}{x_1 + 2} (x + 2), \\ y = \frac{y_2}{x_2 - 2} (x - 2), \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得 } \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot$$

$$\frac{x_2 - 2}{y_2} = \frac{x - 2}{x + 2}.$$



$$\text{联立} \begin{cases} x = my - 4, \\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1, \end{cases} \text{消去 } x \text{ 整理得 } (4m^2 -$$

$$1)y^2 - 32my + 48 = 0,$$

则  $4m^2 - 1 \neq 0, \Delta = 256m^2 + 192 > 0$ , 则  $y_1 +$

$$y_2 = \frac{32m}{4m^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{48}{4m^2 - 1} < 0, \text{故 } -\frac{1}{2} <$$

$$m < \frac{1}{2}.$$

$$\text{所以 } my_1 y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2),$$

$$\text{所以 } \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{x_2 - 2}{y_2} = \frac{my_1 y_2 - 6y_1}{my_1 y_2 - 2y_2} =$$

$$\frac{\frac{3}{2}y_2 - \frac{9}{2}y_1}{\frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2} = -3,$$

$$\frac{3}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2$$

$$\text{所以 } \frac{x-2}{x+2} = -3, \text{解得 } x = -1,$$

所以点  $P$  在定直线  $x = -1$  上.

## 12. 命题点 ▶ 椭圆的标准方程、直线与椭圆的位置关系及定点问题

$$(1) \text{【解】由题意知} \begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \\ b = 2, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} a = 3, \\ b = 2, \\ c = \sqrt{5}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } C \text{ 的方程为 } \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1.$$

(2) 【证明】由题意可知, 直线  $PQ$  的斜率必存在且不为 0 (提示: 否则与椭圆  $C$  仅有一个交点, 不符合题意), 设直线  $PQ$  的方程为  $y - 3 = k(x + 2)$ ,  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ .

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1, \\ y - 3 = k(x + 2), \end{cases} \text{得 } (4k^2 + 9)x^2 + 8k \cdot$$

$$(2k + 3)x + 16k^2 + 48k = 0, \Delta = -1728k > 0,$$

故  $k < 0$ .

$$\text{所以} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8k(2k+3)}{4k^2+9}, \\ x_1 x_2 = \frac{16k^2+48k}{4k^2+9}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = k(x_1 + x_2) + 4k + 6 = \frac{36k + 54}{4k^2 + 9}.$$

又因为直线  $AP: y - 0 = \frac{y_1 - 0}{x_1 + 2}(x + 2)$ , 直线

$$AQ: y - 0 = \frac{y_2 - 0}{x_2 + 2}(x + 2),$$

所以  $M\left(0, \frac{2y_1}{x_1 + 2}\right), N\left(0, \frac{2y_2}{x_2 + 2}\right)$ , 所以线

段  $MN$  的中点坐标为  $\left(0, \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2}\right)$ ,

$$\text{而 } \frac{y_1}{x_1 + 2} + \frac{y_2}{x_2 + 2} = \frac{y_1(x_2 + 2) + y_2(x_1 + 2)}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} =$$

$$\frac{y_1 x_2 + y_2 x_1 + 2(y_1 + y_2)}{x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} =$$



$$\frac{2kx_1x_2 + (2k+3)(x_1+x_2) + 2(y_1+y_2)}{x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4} = \frac{108}{\frac{4k^2+9}{36}} = 3,$$

$$\frac{108}{4k^2+9}$$

故线段  $MN$  的中点为定点  $(0, 3)$ .

### 13. 命题点 ▶ 双曲线中的新定义问题

(1) 【解】因为点  $P_1(5, 4)$  在  $C: x^2 - y^2 = m (m > 0)$  上,

所以  $m = 5^2 - 4^2 = 9$ .

过点  $P_1(5, 4)$  且斜率  $k = \frac{1}{2}$  的直线方程

为  $x - 2y + 3 = 0$ .

由  $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0, \\ x^2 - y^2 = 9, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x = -3, \\ y = 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x = 5, \\ y = 4, \end{cases}$

所以  $Q_1(-3, 0), P_2(3, 0)$ ,

所以  $x_2 = 3, y_2 = 0$ .

(2) 【证明】因为点  $P_n(x_n, y_n)$  关于  $y$  轴的对称点是  $Q_{n-1}(-x_n, y_n)$ , 点  $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1}), Q_{n-1}$  在同一条斜率为  $k$  的直线上,

所以  $x_{n-1} \neq -x_n$  并且  $\frac{y_n - y_{n-1}}{-x_n - x_{n-1}} = k$ . ①

因为点  $P_{n-1}, Q_{n-1}$  都在双曲线  $C$  上, 所以

$$\begin{cases} x_n^2 - y_n^2 = 9, \\ x_{n-1}^2 - y_{n-1}^2 = 9, \end{cases}$$

两式相减, 得  $(x_n - x_{n-1})(x_n + x_{n-1}) = (y_n - y_{n-1})(y_n + y_{n-1})$ . ②

由①②得  $\begin{cases} y_n - y_{n-1} = -k(x_n + x_{n-1}), & \text{③} \\ x_n - x_{n-1} = -k(y_n + y_{n-1}). & \text{④} \end{cases}$

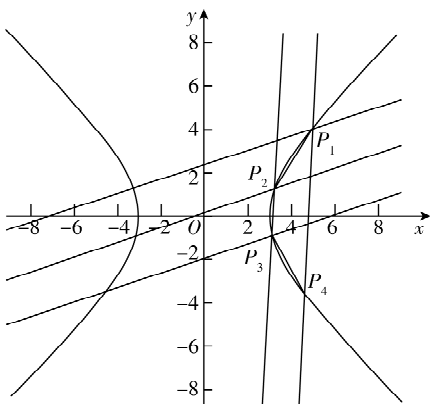
④-③, 得  $(x_n - y_n) - (x_{n-1} - y_{n-1}) = k(x_n - y_n) + k(x_{n-1} - y_{n-1})$ ,

整理得  $\frac{x_n - y_n}{x_{n-1} - y_{n-1}} = \frac{1+k}{1-k}$ .

又  $x_1 - y_1 = 1$ , 所以  $\{x_n - y_n\}$  是公比为  $\frac{1+k}{1-k}$  的等比数列.

(3) 【证明】因为  $\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}$  和  $\triangle P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$  有公共边  $P_{n+1} P_{n+2}$ , 所以若点  $P_n$  和  $P_{n+3}$  到直线  $P_{n+1} P_{n+2}$  的距离相等, 则  $S_n = S_{n+1}$ .

此时, 直线  $P_{n+1} P_{n+2}$  与  $P_n P_{n+3}$  平行, 四边形  $P_n P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3}$  是梯形, 大致图形如图所示.





以下证明：直线  $P_{n+1}P_{n+2}$  与  $P_nP_{n+3}$  平行.

记  $a = \frac{1+k}{1-k}$ , 则由  $0 < k < 1$  得  $a > 1$ .

由 (2) 及  $x_1 = 5, y_1 = 4$ , 得  $x_n - y_n = \left(\frac{1+k}{1-k}\right)^{n-1} (x_1 - y_1) = a^{n-1}$ .

又因为  $(x_n + y_n)(x_n - y_n) = x_n^2 - y_n^2 = 9$ ,

所以  $x_n + y_n = 9a^{1-n}$ ,

所以  $y_n = \frac{1}{2}(-a^{n-1} + 9a^{1-n})$ .

由 (2) 知  $y_n \neq y_{n+1}$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{y_{n+2} - y_{n+1}} &= \frac{y_{n+2} + a^{n+1} - y_{n+1} - a^n}{y_{n+2} - y_{n+1}} \\ &= 1 - \frac{2a^n(a-1)}{(9a^{-1-n} + a^n)(a-1)} = 1 - \frac{2}{9a^{-1-2n} + 1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+3} - x_n}{y_{n+3} - y_n} &= \frac{y_{n+3} + a^{n+2} - y_n - a^{n-1}}{y_{n+3} - y_n} \\ &= 1 - \frac{2a^{n-1}(a^3 - 1)}{(9a^{-2-n} + a^{n-1})(a^3 - 1)} \\ &= 1 - \frac{2}{9a^{-1-2n} + 1}, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{y_{n+2} - y_{n+1}} = \frac{x_{n+3} - x_n}{y_{n+3} - y_n}.$$

从而直线  $P_{n+1}P_{n+2}$  与  $P_nP_{n+3}$  平行,

所以  $S_n = S_{\triangle P_n P_{n+1} P_{n+2}} = S_{\triangle P_{n+1} P_{n+2} P_{n+3}} = S_{n+1}$ ,  
证明完毕.