



## 第9章 直线与圆

### 第1节 直线与方程、圆的方程

**刷****基础****1. A** **考查点** ▶ 直线的倾斜角**【解析】** 直线  $l$  的一个方向向量为 $\left(\sin \frac{4\pi}{3}, \cos \frac{4\pi}{3}\right)$ , 则直线  $l$  的斜率  $k =$ 

$$\frac{\cos \frac{4\pi}{3}}{\sin \frac{4\pi}{3}} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以直线 } l \text{ 的倾斜角}$$

为  $\frac{\pi}{6}$ . 故选 A.**2. D** **考查点** ▶ 直线的倾斜角的取值范围**【解析】** 直线  $l$  的斜率为  $k = -a^2 + 1 \leq 1$ , 设该直线的倾斜角为  $\theta$ , 则  $\tan \theta \leq 1$ , 又因为  $0 \leq \theta < \pi$ , 故  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ .

故选 D.

**3. D** **考查点** ▶ 直线的点斜式方程**【解析】** 由题意可知, 直线  $l_1$  与  $l_2$  垂直,直线  $l_1$  的斜率为  $-\frac{1}{5}$ , 所以  $l_2$  的斜率为5. 又因为  $l_2$  过点  $(1, 0)$ , 所以直线  $l_2$  的方程为  $y = 5(x - 1)$ , 即  $5x - y - 5 = 0$ . 故选 D.**4. BC** **考查点** ▶ 利用直线的斜率与倾斜角求直线方程**【解析】** 设直线  $AB$  的倾斜角为  $\alpha$ , 直线  $AC$  的倾斜角为  $\beta$ , 由题意知直线  $AC$  的斜率为  $-\frac{1}{2}$ , 则有  $\tan \beta = -\frac{1}{2}$ , 则  $\frac{3\pi}{4} < \beta < \pi$ ,依题意有  $\beta - \alpha = \frac{\pi}{4}$  或  $\beta - \alpha = \frac{3\pi}{4}$ , 当  $\beta - \alpha =$  $\frac{\pi}{4}$  时,  $\tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} = 1$ , 即

$$\frac{-\frac{1}{2} - \tan \alpha}{1 - \frac{1}{2} \tan \alpha} = 1, \text{ 解得 } \tan \alpha = -3, \text{ 即直线 } AB$$

的斜率为  $-3$ , 对比选项, 只有 B 选项满足;当  $\beta - \alpha = \frac{3\pi}{4}$  时,  $\tan(\beta - \alpha) =$ 

$$\frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \cdot \tan \alpha} = \tan \frac{3\pi}{4} = -1, \text{ 即}$$

$$\frac{-\frac{1}{2} - \tan \alpha}{1 - \frac{1}{2} \tan \alpha} = -1, \text{ 解得 } \tan \alpha = \frac{1}{3}, \text{ 即直线}$$

 $AB$  的斜率为  $\frac{1}{3}$ , 对比选项, 只有 C 选项

满足. 故选 BC.

**5. B** **考查点** ▶ 两条直线的位置关系, 充分、必要条件的判断



【解析】 $l_1 \perp l_2 \Rightarrow a(a-1)+2(1-a)=0$ , 解得  $a=2$  或  $1$ , 故甲不能推出乙, 乙能推出甲, 故甲是乙的必要不充分条件. 故选 B.

6. D 考查点 ▶ 已知直线平行求参数

【解析】若直线  $l_1: (m-2)x+3y+3=0$  与直线  $l_2: 2x+(m-1)y+2=0$  平行, 则  $(m-2)(m-1)=3 \times 2=6$ , 整理可得  $m^2-3m-4=0$ , 解得  $m=4$  或  $m=-1$ .

若  $m=4$ , 直线  $l_1: 2x+3y+3=0$  与直线  $l_2: 2x+3y+2=0$  平行, 符合题意; 若  $m=-1$ , 直线  $l_1: x-y-1=0$  与直线  $l_2: x-y+1=0$  平行, 符合题意.

综上所述,  $m=4$  或  $m=-1$ . 故选 D.

7. B 考查点 ▶ 点到直线的距离

【解析】由点  $A(4+2\cos \theta, 1+2\sin \theta)$  可知, 点  $A$  在圆  $(x-4)^2+(y-1)^2=4$  上, 圆心  $(4, 1)$  到直线  $kx-y+2=0$  的距离

$$d = \frac{|4k+1|}{\sqrt{1+k^2}},$$

由题意知  $\frac{|4k+1|}{\sqrt{1+k^2}} - 2 \geq 2$ , 即  $\frac{|4k+1|}{\sqrt{1+k^2}} \geq 4$ ,

化简可得  $16k^2+8k+1 \geq 16+16k^2$ ,

解得  $k \geq \frac{15}{8}$ . 故选 B.

8. C 突破点 ▶ 点到直线的距离, 直线与圆、抛物线的位置关系

【解析】令  $A(x_0, y_0)$ , 则  $|AB| = \sqrt{x_0^2+y_0^2-1} = \sqrt{y_0^2+2py_0-1}$ .

$y = \frac{x^2}{2p}, y' = \frac{x}{p}$ , 则直线  $l$  的斜率  $k = \frac{x_0}{p}$ ,  $l$

的方程为  $y-y_0 = \frac{x_0}{p}(x-x_0)$ , 即  $2x_0x-2py-x_0^2=0$ ,

又直线  $l$  与单位圆相切, 则  $\frac{x_0^2}{\sqrt{4x_0^2+4p^2}} =$

$1$ , 结合  $x_0^2=2py_0$  可得  $p = \frac{2y_0}{y_0^2-1}$ ,

则  $|AB| = \sqrt{y_0^2 + \frac{4y_0^2}{y_0^2-1} - 1} =$

$\sqrt{y_0^2-1 + \frac{4}{y_0^2-1} + 4} \geq \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ ,

当且仅当  $y_0^2-1 = \frac{4}{y_0^2-1}$ , 即  $y_0^2=3$ , 即  $y_0 =$

$\sqrt{3}, p=\sqrt{3}$  时取“ $=$ ”. 故选 C.

9. A 考查点 ▶ 点到直线的距离

【解析】由题知,  $f'(x) = \ln x + 1$ ,

令  $f'(x) = 2$ , 得  $x=e$ ,

又  $f(e) = e+1$ ,

所以当点  $P$  坐标为  $(e, e+1)$  时, 点  $P$  到直线  $2x-y-8=0$  的距离最短,

为  $\frac{|2e-(e+1)-8|}{\sqrt{5}} = \frac{9-e}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(9-e)}{5}$ . 故

选 A.

**10. D 考查点** 曲线关于直线的对称曲线

【解析】设点  $P(x', y')$  关于直线  $l: x+y=0$  的对称点为  $(x, y)$ , 则

$$\begin{cases} \frac{y-y'}{x-x'}=1, \\ \frac{x+x'}{2}+\frac{y+y'}{2}=0, \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} x=-y', \\ y=-x'. \end{cases} \quad \text{又点} (x, y)$$

在曲线  $C$  上,  $f(x, y)=0$ , 所以  $f(-y', -x')=0$ . 故选 D.

**11. B 突破点** 点关于直线的对称点

【解析】由题可知,  $k \neq 0$ . 设点  $O$  关于直线  $l$  的对称点为  $A(x_1, y_1)$ , 则

$$\begin{cases} \frac{x_1}{2}+\frac{y_1}{2}-1=0, \\ \frac{y_1}{x_1} \times (-1)=-1, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x_1=1, \\ y_1=1, \end{cases} \quad \text{即} A(1, 1).$$

由题意知, 直线  $y=kx$  与直线  $l$  不平行, 故  $k \neq -1$ . 记直线  $y=kx$  与直线  $l$  的交点

$$\text{为 } P, \text{ 由 } \begin{cases} y=kx, \\ x+y-1=0, \end{cases} \quad \text{得} \begin{cases} x=\frac{1}{k+1}, \\ y=\frac{k}{k+1}, \end{cases} \quad \text{即}$$

$P\left(\frac{1}{k+1}, \frac{k}{k+1}\right)$ , 故直线  $AP$  的斜率

$$\text{为 } k_{AP} = \frac{\frac{k}{k+1}-1}{\frac{1}{k+1}-1} = \frac{1}{k}, \text{ 则直线 } AP \text{ 的方程}$$

$$\text{为 } y-1 = \frac{1}{k}(x-1), \text{ 令 } y=0 \text{ 得 } x=1-k,$$

$$\text{故 } M(1-k, 0), \text{ 令 } x=0 \text{ 得 } y=1-\frac{1}{k}, \text{ 故}$$

$$\text{由对称性可得 } N\left(0, \frac{1}{k}-1\right), \text{ 由 } |\overrightarrow{MN}| =$$

$$\frac{\sqrt{13}}{6} \text{ 得 } (1-k)^2 + \left(\frac{1}{k}-1\right)^2 = \frac{13}{36}, \text{ 即}$$

$$\left(k+\frac{1}{k}\right)^2 - 2\left(k+\frac{1}{k}\right) = \frac{13}{36}, \text{ 解得 } k+\frac{1}{k} =$$

$$\frac{13}{6} \text{ 或 } k+\frac{1}{k} = -\frac{1}{6} \text{ (舍去) (提示: } k+$$

$$\frac{1}{k} \in (-\infty, -2) \cup [2, +\infty), \text{ 故 } k+$$

$$\frac{1}{k} \neq -\frac{1}{6}) \text{, 得 } k=\frac{2}{3} \text{ 或 } k=\frac{3}{2}, \text{ 若 } k=$$

$$\frac{3}{2}, \text{ 则第二次反射后光线不会与 } y \text{ 轴相}$$

$$\text{交, 故不符合题意. 经检验, } k=\frac{2}{3} \text{ 符合}$$

$$\text{题意, 故 } k=\frac{2}{3}. \text{ 故选 B.}$$

**12. A 考查点** 求圆的标准方程

【解析】点  $C(-1, -2)$  到直线  $3x-4y+10=0$  的距离为  $d = \frac{|-3+8+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 3$ ,

所以圆  $C$  的半径为  $r =$

$$\sqrt{d^2 + \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = \sqrt{9+16} = 5,$$



则圆  $C$  的方程为  $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 25$ .  
故选 A.

**13. D** **考查点** 圆的方程的应用

**【解析】** 设该圆的方程为  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ , 将  $(-2, -2), (-2, 6), (4, -2)$  代

入圆的方程可得 
$$\begin{cases} -2D - 2E + F + 8 = 0, \\ -2D + 6E + F + 40 = 0, \\ 4D - 2E + F + 20 = 0, \end{cases}$$

解得 
$$\begin{cases} D = -2, \\ E = -4, \\ F = -20, \end{cases}$$
 故圆的方程为  $x^2 + y^2 -$

$2x - 4y - 20 = 0$ ,

整理得  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$ , 当  $x = -4$  时,  $y = 2$ ; 当  $x = -3$  时,  $y = -1$  或  $5$ ; 当  $x = -2$  时,  $y = -2$  或  $6$ ; 当  $x = 1$  时,  $y = -3$  或  $7$ ; 当  $x = 4$  时,  $y = -2$  或  $6$ ; 当  $x = 5$  时,  $y = -1$  或  $5$ ; 当  $x = 6$  时,  $y = 2$ , 所以该圆经过的整点共有 12 个. 故选 D.

**14. A** **考查点** 利用相关点法求轨迹方程

**【解析】** 设线段  $OP$  的中点为  $Q(x, y)$ ,  $P(x_0, y_0)$ , 则由题意得  $(x_0 - 2)^2 + y_0^2 = 1$ ,

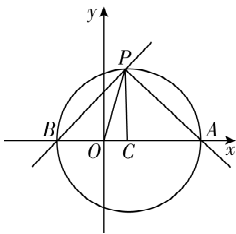
且 
$$\begin{cases} x_0 = 2x, \\ y_0 = 2y, \end{cases}$$
 即  $P(2x, 2y)$ , 所以

$(2x - 2)^2 + (2y)^2 = 1$ , 即  $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ , 所以线段  $OP$  的中点的轨迹方程为

$(x - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ . 故选 A.

**15. C** **考查点** 动点的轨迹、数形结合法求最值

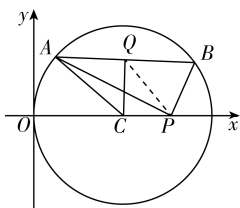
**【解析】** 由题意知直线  $ax + y - 4a = 0$  与直线  $x - ay + 2 = 0$  满足  $a \times 1 + 1 \times (-a) = 0$ , 故两直线垂直, 直线  $ax + y - 4a = 0$  过定点  $A(4, 0)$ , 直线  $x - ay + 2 = 0$  过定点  $B(-2, 0)$ , 故两直线的交点  $P$  在以  $AB$  为直径的圆上 (不含点  $A(4, 0)$ ), 该圆的方程为  $(x - 1)^2 + y^2 = 9$ , 其圆心为  $C(1, 0)$ , 半径为 3, 如图所示, 则  $|OP| \geq |CP| - |OC|$ , 当且仅当  $P, O, C$  共线, 即  $P$  位于点  $B$  时, 等号成立, 故  $|OP|$  的最小值为  $3 - 1 = 2$ . 故选 C.



**16.  $\frac{\sqrt{7}+1}{2}$**  **突破点** 求动点的轨迹方程、点

与圆上的点的距离的最值

**【解析】** 圆  $C: (x - 2)^2 + y^2 = 4$  的圆心为  $C(2, 0)$ , 半径  $r = 2$ , 由  $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$ , 得  $PA \perp PB$ , 而  $Q$  为  $AB$  中点, 则  $CQ \perp AB$ . 连接  $PQ$ , 如图所示.


$$|PQ| = \frac{1}{2} |AB| = \sqrt{r^2 - |CQ|^2}, \text{ 于是}$$
$$|PQ|^2 + |CQ|^2 = r^2, \text{ 设 } Q(x, y), \text{ 因此}$$

$$(x-3)^2 + y^2 + (x-2)^2 + y^2 = 4, \text{ 整理得}$$
$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{7}{4} \quad (\text{提示: 利用直角三角})$$

形和圆的几何性质及勾股定理建立方程), 即点  $Q$  在以  $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$  为圆心, 半径

为  $\frac{\sqrt{7}}{2}$  的圆上, 则  $|CQ| \leq \left(\frac{5}{2} - 2\right) + \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}+1}{2}$ , 所以  $|\vec{CQ}|$  的最大值为  $\frac{\sqrt{7}+1}{2}$  (提

**示:**若点在圆内,则点到圆上任意一点的距离的最大值、最小值分别为半径加、减点到圆心的距离;若点在圆外,则点到圆上任意一点的距离的最大值、最小值分别为点到圆心的距离加、减半径).

### 17. C 考查点 ▶ 两条直线的位置关系

**【解析】**因为  $l_1 \nparallel l_2$ , 所以  $a(a+1) = 2a^2$ , 解得  $a=0$  或  $a=1$ , 若  $a=0$ , 则  $l_1: x-3=0, l_2: 2x-1=0$ , 两直线平行, 符合题意; 若  $a=1$ , 则  $l_1: 2x+y-3=0, l_2: 2x+y-3=0$ , 两直线重合, 不符合题意.

综上所述,  $l_1 // l_2$  等价于  $a=0$ . 所以“ $a=0$ ”是“ $l_1 // l_2$ ”的充要条件. 故选 C.

### 易错警示

**易错警示** 忽视两条直线重合的情况.

**18.**  $3x-y=0$  或  $x+y-4=0$  **考查点** ▶ 已知截距求直线的方程

【解析】当直线过原点时,过点  $P$  的直线方程为  $y=3x$ ,直线  $y=3x$  在  $x$  轴上的截距和在  $y$  轴上的截距相等,符合题意;当直线不过原点时,设直线方程为

$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ , 则  $\frac{1}{a} + \frac{3}{a} = 1$ , 解得  $a = 4$ , 直线方程为  $x + y - 4 = 0$ . 所以所求直线方程为  $3x - y = 0$  或  $x + y - 4 = 0$ .

### 易错警示

**易错警示** 直线过原点时, 直线在  $x$  轴和  $y$  轴上的截距均为 0, 满足在  $x$  轴和  $y$  轴上的截距相等, 解题时容易遗漏这种特殊情况的讨论而导致错误.

**19.**  $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$  **考查点** ▶ 已知点与圆的位置关系求参数的取值范围

【解析】由题意得 
$$\begin{cases} 4a^2+3a>0, \\ 4a^2+4a^2-4(4a^2+3a)>0, \end{cases}$$



$$\text{解得 } -\frac{3}{2} < a < -\frac{3}{4}.$$

**易错警示**

本题易错之处在于只注意点在圆外, 得到  $4a^2 + 3a > 0$ , 而忽视圆的一般方程  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$  的条件  $D^2 + E^2 - 4F > 0$ , 即  $4a^2 + 4a^2 - 4(4a^2 + 3a) > 0$ .

## 第2节 直线与圆、圆与圆的位置关系

**刷****基础**

### 1. C 考查点 ▶ 直线与圆的位置关系

【解析】 $(2m+1)x + (m+1)y - 7m - 4 = 0$  整理为  $(2x+y-7)m + x+y-4 = 0$ ,

由  $\begin{cases} 2x+y-7=0, \\ x+y-4=0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x=3, \\ y=1, \end{cases}$  则直线恒过定点  $(3, 1)$ ,

而  $(3-1)^2 + (1-2)^2 < 9$ , 所以定点在圆内, 则直线与圆必有 2 个交点. 故选 C.

### 2. B 考查点 ▶ 直线与圆的位置关系

【解析】圆  $C$  的标准方程为  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$ , 圆心为  $C(1, 2)$ , 半径为 3, 由题可知, 直线  $l$  与直线  $2x - ay - b = 0$  垂直, 所以  $2a + ab = 0$ .

因为  $a \neq 0$ , 所以  $b = -2$ .

直线  $2x - ay - b = 0$  过圆心  $C$ , 则  $2 \times 1 - 2a + 2 = 0$ , 解得  $a = 2$ ,

所以直线  $l$  的方程为  $x + y - 1 = 0$ ,

则圆心  $C$  到直线  $l$  的距离为  $d = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ ,

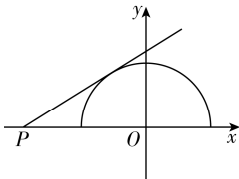
因此  $|AB| = 2\sqrt{3^2 - d^2} = 2\sqrt{9-2} = 2\sqrt{7}$ . 故选 B.

### 3. B 考查点 ▶ 直线与曲线的位置关系

【解析】由直线  $y = k(x+2)$  知其过定点  $P(-2, 0)$ ,

又由曲线  $y = \sqrt{1-x^2}$ , 可得  $x^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$ ,

在同一坐标系内作出曲线  $y = \sqrt{1-x^2}$  与直线  $y = k(x+2)$ , 如图所示,



由直线  $y = k(x+2)$ , 可得  $kx - y + 2k = 0$ ,

又由  $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 1$ , 解得  $k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

若直线  $y = k(x+2)$  与曲线  $y = \sqrt{1-x^2}$  有公共点, 则  $0 \leq k \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

即实数  $k$  的取值范围为  $\left[0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ . 故选 B.

**4. D 考查点** 圆与圆的位置关系

【解析】圆  $O_1: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$  的标准方程为  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ , 圆心为  $O_1(1, -2)$ , 半径为  $r=1$ , 圆  $O_2: x^2 + y^2 = 1$ , 圆心为  $O_2(0, 0)$ , 半径为  $R=1$ , 则  $|O_1O_2| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$ ,

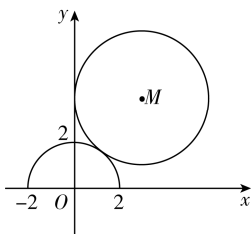
因为  $R+r=2, R-r=0, |O_1O_2| > R+r$ , 故圆  $O_1$  和圆  $O_2$  的位置关系是外离. 故选 D.

**5. B 考查点** 圆与圆的公切线问题

【解析】易知, 圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  的圆心为  $O(0, 0)$ , 半径  $r=2$ , 圆  $O': (x-2)^2 + (y+2)^2 = 20$  的圆心为  $O'(2, -2)$ , 半径  $r' = 2\sqrt{5}$ , 且  $|OO'| = 2\sqrt{2} \in (2\sqrt{5}-2, 2\sqrt{5}+2)$ , 即圆  $O$  与圆  $O'$  相交, 故公切线条数为 2. 故选 B.

**6. A 考查点** 圆与圆相切

【解析】曲线  $y = \sqrt{4-x^2}$ , 则  $y \geq 0$ , 又  $y^2 + x^2 = 4$ , 所以曲线  $y = \sqrt{4-x^2}$  表示以  $O(0, 0)$  为圆心, 2 为半径的半圆 ( $x$  轴及  $x$  轴上方部分), 圆  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2 (r > 0)$  的圆心为  $M(3, 4)$ , 半径为  $r$ , 如图所示. 又  $|OM| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ , 则  $|OM| = r+2$ , 即  $r=3$  时, 满足曲线  $y = \sqrt{4-x^2}$  与圆  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2 (r > 0)$  相切. 故选 A.

**7. C 突破点** 相交圆的公共弦所在直线的方程

【解析】圆  $M: x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$ , 即  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ , 且圆  $M$  与  $y$  轴相切于  $A$  点, 故  $A(0, 2)$ , 所以  $\frac{|AO|}{|AF|} = \frac{2}{1} = \frac{|BO|}{|BF|}$ .

设动点  $P(x, y)$ , 满足  $\frac{|PO|}{|PF|} = 2$ , 则

$|PO|^2 = 4|PF|^2$ , 则  $x^2 + y^2 = 4[x^2 + (y-3)^2]$ , 即  $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$ , 故  $P$  点的轨迹

是圆, 且  $\frac{|AO|}{|AF|} = \frac{|BO|}{|BF|} = 2$ , 故  $A, B$  两点均

在圆  $x^2 + y^2 - 8y + 12 = 0$  上, 且  $A, B$  两点均在圆  $M$  上, 故直线  $l$  的方程为两个圆的公共弦所在直线的方程, 两个圆的方程相减得  $4x - 4y + 8 = 0$ , 即  $x - y + 2 = 0$ . 故选 C.

**8. D 突破点** 圆与圆的位置关系

【解析】如图, 圆  $O$  的半径为 1, 圆  $M$  上存在点  $P$ , 过点  $P$  作圆  $O$  的两条切线, 切点分别为  $A, B$ , 使得  $\angle APB = 60^\circ$ , 则  $\angle APO = 30^\circ$ , 在  $\text{Rt} \triangle PAO$  中,  $PO = 2$ , 又



圆  $M$  的半径等于 1, 圆心坐标  $M(a, a-4)$ ,

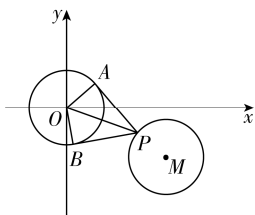
$$\therefore |PO|_{\min} = |MO| - 1, |PO|_{\max} = |MO| + 1.$$

$$\therefore |MO| = \sqrt{a^2 + (a-4)^2}, \therefore \text{由}$$

$$\sqrt{a^2 + (a-4)^2} - 1 \leq 2 \leq \sqrt{a^2 + (a-4)^2} + 1,$$

解得  $2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 则  $a$  的取值范围

为  $\left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ . 故选 D.

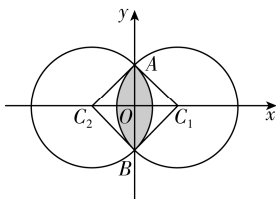


#### 9. D 突破点 ▶ 圆与圆的相交问题

【解析】依题意,  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x \leq 1, \\ x^2 + y^2 + 2x \leq 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \leq 2, \\ (x+1)^2 + y^2 \leq 2, \end{cases} \text{所以不等式组表示的区}$$

域是圆  $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 2$  与圆  $C_2: (x+1)^2 + y^2 = 2$  公共的内部区域, 如图中阴影部分所示.



$C_1(1,0), C_2(-1,0)$ , 两圆半径都是  $\sqrt{2}$ ,

设两个圆相交于  $A, B$  两点, 则  $A(0,1),$

$B(0,-1), |AC_1| = |AC_2| = |BC_1| =$

$|BC_2| = \sqrt{2}$ , 由  $|AC_1|^2 + |AC_2|^2 = |C_1C_2|^2$

得  $AC_2 \perp AC_1$ , 所以四边形  $AC_1BC_2$  是正

方形, 所以所求区域面积为  $\left[ \frac{1}{4} \times \pi \times$

$$(\sqrt{2})^2 - \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \right] \times 2 = \pi - 2. \text{ 故选 D.}$$

#### 10. A 考查点 ▶ 利用圆与圆的位置关系求参数的取值范围

【解析】因为圆  $C$  上存在点  $P$ , 使得

$\angle APB = 90^\circ$ , 所以以  $AB$  为直径的圆与

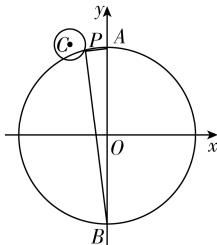
圆  $C$  有交点, 如图所示. 又以  $AB$  为直径

的圆的圆心为  $O(0,0)$ , 半径为  $b$ , 圆  $C$

的圆心为  $C(-5,12)$ , 半径为 2, 所以

$|OC| - 2 \leq b \leq |OC| + 2$ , 即  $13 - 2 \leq b \leq$

$13 + 2$ , 即  $11 \leq b \leq 15$ . 故选 A.

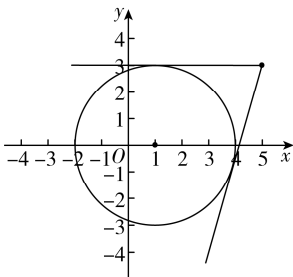






## 11. C 突破点 ▶ 圆与圆的相切问题

【解析】圆  $C_1: (x-1)^2 + y^2 = 1$ , 则  $C_1(1, 0)$ , 半径  $r_1 = 1$ , 圆  $C_2: (x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$ , 则  $C_2(a, b)$ , 半径  $r_2 = 2$ , 因为两圆外切, 所以  $|C_1C_2| = r_1 + r_2 = 3$ , 即  $\sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 3$ , 即  $(a-1)^2 + b^2 = 9$ , 则点  $(a, b)$  在以  $(1, 0)$  为圆心, 3 为半径的圆上, 即在圆  $(x-1)^2 + y^2 = 9$  上. 令  $k = \frac{b-3}{a-5}$ , 则  $k$  表示过点  $(a, b)$  与点  $(5, 3)$  的直线的斜率, 则该直线一定过点  $(5, 3)$ , 且与圆  $(x-1)^2 + y^2 = 9$  有公共点, 由题意作图, 设该直线方程为  $y-3 = k(x-5)$ , 即  $kx - y - 5k + 3 = 0$ , 则圆心  $(1, 0)$  到该直线的距离小于或等于 3, 即  $\frac{|k-5k+3|}{\sqrt{k^2+1}} \leq 3$ , 解得  $k \in \left[0, \frac{24}{7}\right]$ , 即  $\frac{b-3}{a-5}$  的取值范围是  $\left[0, \frac{24}{7}\right]$ . 故选 C.



## 12. B 考查点 ▶ 直线与圆相切的问题

【解析】由直线  $l$  的方向向量为  $(1, -2)$  知, 直线  $l$  的斜率  $k = -2$ , 设直线  $l$  的方程为  $y = -2x + b$ , 则由直线与圆相切知, 圆心  $(1, 0)$  到直线  $l$  的距离  $d = \frac{|-2+b|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ , 解得  $b = 7$  或  $b = -3$ , 所以直线  $l$  的方程为  $y = -2x + 7$  或  $y = -2x - 3$ , 即  $2x + y - 7 = 0$  或  $2x + y + 3 = 0$ , 故选 B.

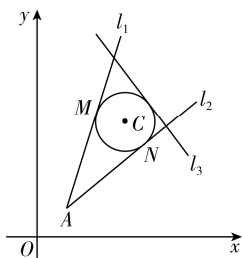
## 13. ABD 突破点 ▶ 直线与圆的位置关系、二倍角的余弦公式

【解析】依题意得圆  $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$ , 所以  $|AM| = \sqrt{|AC|^2 - 1} = 2\sqrt{3}$ , A 正确.

因为  $\cos \angle MAC = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}$ , 所以  $\cos \angle MAN =$

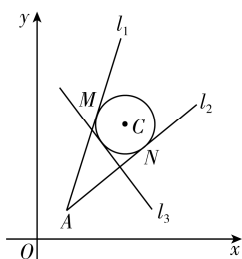
$2\cos^2 \angle MAC - 1 > 0$ , 则  $\vec{AM} \cdot \vec{AN} > 0$ , B 正确.

要使  $l_1, l_2$  与  $l_3$  围成的三角形面积最大, 则圆  $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$  是这个三角形的内切圆, 如图①. 设这个三角形的三条边长分别为  $a, b, c$ , 则这个三角形的面积  $S = \frac{1}{2}(a+b+c)$ , 此时  $a+b+c$  没有最大值, 从而  $S$  也没有最大值, C 错误.



图①

如图②,当第三条切线  $l_3$  与圆相切的切点落在另两个切点  $M, N$  与圆  $C$  构成的劣弧上时,三角形的周长最小,且等于  $|AM| + |AN|$ ,即  $4\sqrt{3}$ ,D 正确. 故选 ABD.



图②

**14. 2 考查点** ▶ 利用直线与圆、圆与圆的位置关系求参数最值

**【解析】**  $\because \odot C_1: (x-a)^2 + y^2 = 1, \therefore C_1(a, 0)$ , 半径为 1.  $\because \odot C_2: (x-1)^2 + (y+1)^2 = r^2, \therefore C_2(1, -1)$ , 半径为  $r$ . 若两圆仅有一条公切线, 则两圆内切,  $\therefore |C_1C_2| = |r - 1|$ , 由于  $|C_1C_2| = \sqrt{(a-1)^2 + 1} \geq 1$ , 故  $|r - 1| \geq 1$ , 解得  $r \geq 2$ , 即  $r$  的最小值为 2.

**15. B 考查点** ▶ 直线与圆相交的弦长问题

**【解析】** 圆  $O: x^2 + y^2 = 4$  的圆心为  $O(0, 0)$ , 半径  $r = 2$ , 直线  $l: y = \sqrt{3}(x+2)$ , 即  $\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} = 0$ , 所以圆心到直线的距离为  $d = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = \sqrt{3}$ , 所以  $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2$ . 故选 B.

**16. C 考查点** ▶ 直线与圆相交的弦长问题

**【解析】** 由题意得圆的标准方程为  $(x-1)^2 + y^2 = 4$ , 则圆心为  $C(1, 0)$ . 过圆心与点  $(2, 1)$  的直线  $l_1$  的斜率为  $k = \frac{1-0}{2-1} = 1$ . 当直线  $l$  与  $l_1$  垂直时,  $|AB|$  取得最小值, 故直线  $l$  的斜率为  $-1$ , 所以直线  $l$  的方程为  $y-1 = -(x-2)$ , 即  $x+y-3=0$ . 故选 C.

**17. D 考查点** ▶ 直线与圆的位置关系

**【解析】** 圆  $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 36$  的圆心为  $C(2, 1)$ , 半径为  $r = 6$ , 若圆  $C$  上恰有三点到直线  $l$  的距离均为 2, 则圆心到直线  $l$  的距离为  $r - 2 = \frac{|8+3-a|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 4$ , 解得  $a = -9$  或  $a = 31$ , 由于直线  $l: 4x + 3y - a = 0$  不经过第三象限, 所以直线  $l$



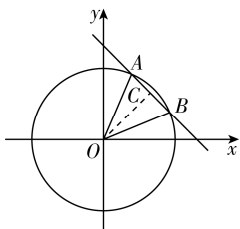
与  $y$  轴的交点的纵坐标  $\frac{a}{3} > 0$ , 故  $a =$

31. 故选 D.

**18. C** **考查点** ▶ 直线与圆相交求参数的范围

**【解析】** 设  $AB$  的中点为  $C$ , 连接  $OC$ , 则  $OC \perp AB$ , 如图.

$\therefore |\vec{OA} + \vec{OB}| \geq \sqrt{3} |\vec{AB}|, \therefore 2|\vec{OC}| \geq \sqrt{3} |\vec{AB}|, \therefore |\vec{AB}| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3} |\vec{OC}|. \therefore |\vec{OC}|^2 + \frac{1}{4} |\vec{AB}|^2 = 4, \therefore \frac{4}{3} |\vec{OC}|^2 \geq 4$ , 即  $|\vec{OC}|^2 \geq 3$ . 又  $\because$  直线  $x+y-k=0 (k>0)$  与圆  $x^2+y^2=4$  交于不同的两点  $A, B$ ,  $\therefore |\vec{OC}|^2 < 4$ , 故  $4 > |\vec{OC}|^2 \geq 3$ , 则  $4 > \left(\frac{|-k|}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 3, \therefore k > 0, \therefore \sqrt{6} \leq k < 2\sqrt{2}$ . 故选 C.



**19. C** **突破点** ▶ 直线过定点问题、圆的弦长

**【解析】**  $(1+3\lambda)x + (1+\lambda)y - 2 - 4\lambda = 0$  ( $\lambda \in \mathbf{R}$ )  $\Rightarrow x+y-2 + \lambda(3x+y-4) = 0$ , 由

$\begin{cases} x+y-2=0, \\ 3x+y-4=0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x=1, \\ y=1, \end{cases}$  故直线  $l$  过定

点  $M(1,1)$  (**提示: 过直线  $Ax+By+C=0$  与直线  $Dx+Ey+F=0$  的交点的直线系**

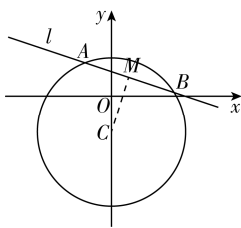
**方程是  $Dx+Ey+F+\lambda(Ax+By+C)=0$  (不含直线  $Ax+By+C=0$ )**), 又  $1^2+1^2+4-12 < 0$ , 故  $M(1,1)$  在圆  $C$  内,  $x^2+y^2+4y-12=0 \Rightarrow x^2+(y+2)^2=16$ , 故圆心  $C(0,$

$-2)$ , 半径为 4, 如图, 连接  $CM$ , 当  $CM$  与  $l$  垂直时,  $|AB|$  最小, 其中  $|CM| =$

$\sqrt{(1-0)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10}$ , 由垂径定

理得  $|AB| = 2\sqrt{4^2 - |CM|^2} = 2\sqrt{6}$ . 故

选 C.



刷

提分

**1. B** **考查点** ▶ 直线、圆上的动点之间距离的最值

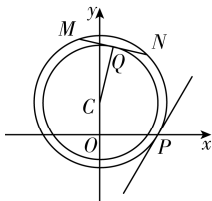
**【解析】** 由题意可得圆的标准方程为  $x^2 + (y-1)^2 = 4$ , 设圆心为  $C$ , 半径为  $r$ ,

则  $C(0,1), r=2$ , 如图. 因为  $|MN|=2$ , 所

以由垂径定理可得  $|CQ| = \sqrt{2^2 - 1^2} =$



$\sqrt{3}$ , 故点  $Q$  在以  $C(0,1)$  为圆心,  $\sqrt{3}$  为半径的圆上, 因为点  $C$  到直线  $\sqrt{3}x - y - 3 = 0$  的距离  $d = \frac{|0-1-3|}{\sqrt{3+1}} = 2$ , 所以  $|PQ|$  的最小值为  $2 - \sqrt{3}$ . 故选 B.

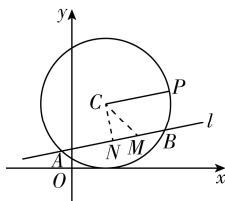


## 2. C 突破点 ▶ 直线与圆的位置关系、向量数量积的最值

【解析】由题意知, 圆  $C$  的圆心  $C(1,2)$ , 半径  $r=2$ , 直线  $l: (a+1)x + (2a-2)y - 4a = 0$ , 即  $a(x+2y-4) + x-2y = 0$ , 由  $\begin{cases} x+2y-4=0, \\ x-2y=0 \end{cases}$  得  $\begin{cases} x=2, \\ y=1, \end{cases}$  即直线  $l$  过定点

$M(2,1)$ , 连接  $CM$ , 则  $|CM| = \sqrt{2}$ , 如图, 设  $AB$  的中点为  $N$ , 连接  $CN$ , 则  $CN \perp AB$ , 且  $|CN| \in (0, \sqrt{2}]$ , 又因为  $CP \parallel AB$ , 所以  $CN \perp CP$ , 所以  $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = (\vec{PC} + \vec{CN} + \vec{NA}) \cdot (\vec{PC} + \vec{CN} + \vec{NB}) = (\vec{PC} + \vec{CN})^2 + \vec{NA} \cdot \vec{NB} = (\vec{PC} + \vec{CN})^2 - \frac{1}{4}|AB|^2 = r^2 + |CN|^2 - \frac{1}{4}(2\sqrt{r^2 - |CN|^2})^2 = 2|CN|^2 \leq 4$ , 当且

仅当  $|CN| = \sqrt{2}$  时等号成立 (另解: 可以利用极化恒等式  $a \cdot b = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2]$  的几何解释: 在本题中,  $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = \vec{PN}^2 - \vec{AN}^2 = 2|CN|^2 \leq 4$ ). 故选 C.



## 3. D 突破点 ▶ 直线与圆的位置关系与不等式综合

【解析】因为  $3\sin x - a\cos x + 2a \geq 6$ , 即  $(2 - \cos x)a \geq 3(2 - \sin x)$ , 注意到  $2 - \cos x > 0$ , 可得  $a \geq \frac{3(2 - \sin x)}{2 - \cos x}$ , 令

$$t = \frac{2 - \sin x}{2 - \cos x},$$

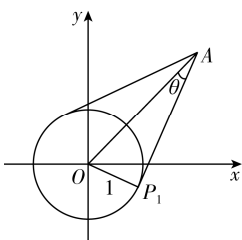
则  $t$  表示点  $A(2,2)$  与点  $P(\cos x, \sin x)$  连线的斜率, 且  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , 所以点  $P$  在圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  上, 所以  $t$  表示点  $A(2,2)$  与圆  $O: x^2 + y^2 = 1$  上的动点  $P$  连线的斜率.

方法一: 因为直线  $AP$  与圆  $O$  有公共点, 直线  $AP$  的方程为  $y - 2 = t(x - 2)$ , 即  $tx - y + 2 - 2t = 0$ , 则  $\frac{|2 - 2t|}{\sqrt{t^2 + 1}} \leq 1$ , 解得  $\frac{4 - \sqrt{7}}{3} \leq$



$t \leq \frac{4+\sqrt{7}}{3}$ , 即  $t = \frac{2-\sin x}{2-\cos x}$  的最大值为  $\frac{4+\sqrt{7}}{3}$ , 所以  $a \geq 3 \times \frac{4+\sqrt{7}}{3} = 4+\sqrt{7}$ . 故选 D.

方法二: 由图可知,  $t$  的最大值为切线  $AP_1$  的斜率, 设  $\angle OAP_1 = \theta$ , 则  $|OA| = 2\sqrt{2}$ ,  $|OP_1| = 1$ ,  $|AP_1| = \sqrt{|OA|^2 - |OP_1|^2} = \sqrt{7}$ , 可得  $\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{7}}$ ,



则  $k_{AP_1} = \tan(45^\circ + \theta) = \frac{\tan 45^\circ + \tan \theta}{1 - \tan 45^\circ \tan \theta} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{7}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{7}}} = \frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{7} - 1} = \frac{4 + \sqrt{7}}{3}$ . 所以  $a \geq 3 \times \frac{4 + \sqrt{7}}{3} = 4 + \sqrt{7}$ .

#### 4. BCD 突破点 ▶ 圆与圆的位置关系和最值问题

【解析】由题意可知, 圆  $C: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 3$  的圆心为  $C(2, 4)$ , 半径  $r = \sqrt{3}$ .

因为动直线  $l_1: x + my = 0$  过点  $(0, 0)$ , 所以  $A(0, 0)$ , 由  $mx - y - m + 3 = 0$ , 得  $m(x-1) = y-3$ , 则  $B(1, 3)$  (提示: 利用过定点的直线系方程, 求出定点的坐标), 故 A 错误;

因为  $|BC| = \sqrt{(2-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{2} < \sqrt{3}$ , 可知点  $B(1, 3)$  在圆  $C$  内部, 当  $BC \perp l_2$  时, 圆心  $C(2, 4)$  到直线  $l_2: mx - y - m + 3 = 0$  的距离最大, 最大值为  $|BC| = \sqrt{2}$ , 所以直线  $l_2$  与圆  $C$  相交的最短弦长为  $2\sqrt{r^2 - |BC|^2} = 2$ , 故 B 正确;

因为  $l_1: x + my = 0$ ,  $l_2: mx - y - m + 3 = 0$ , 且  $1 \cdot m + m \cdot (-1) = 0$ , 所以  $l_1 \perp l_2$ , 可知动点  $P$  的轨迹是以  $AB$  为直径的圆, 且该圆的圆心坐标为  $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ , 半径为

$\frac{1}{2}|AB| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ , 则两圆的圆心距为

$\sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(4 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$ , 两圆半

径之和为  $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{10}}{2}$ , 两圆半径之差为  $\sqrt{3} -$

$\frac{\sqrt{10}}{2}$ , 因为  $\sqrt{3} - \frac{\sqrt{10}}{2} < \frac{\sqrt{34}}{2} < \sqrt{3} + \frac{\sqrt{10}}{2}$ ,

所以动点  $P$  的轨迹与圆  $C$  相交, 故 C 正确;



因为  $|PA| + |PB| \leq \frac{|PA|^2 + |PB|^2}{2} = \frac{|AB|^2}{2} = \frac{10}{2} = 5$ , 当且仅当  $|PA| = |PB| = \sqrt{5}$  时, 等号成立, 所以  $|PA| + |PB|$  的最大值为 5, 故 D 正确. 故选 BCD.

### 5. AC 突破点 ▶ 直线与圆的位置关系和最值问题

【解析】直线  $l: mx - y + 2 + m = 0$ , 即  $m(x + 1) - y + 2 = 0$ , 由  $\begin{cases} x + 1 = 0, \\ -y + 2 = 0, \end{cases}$  解得  $x = -1, y = 2$ , 所以定点坐标为  $(-1, 2)$ , A 正确;

圆  $C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$  的圆心为  $(1, 2)$ , 半径为 3, 点  $(-1, 2)$  与圆心  $(1, 2)$  的距离为 2, 所以  $|MN|$  的最小值为  $2\sqrt{3^2 - 2^2} = 2\sqrt{5}$ , 此时直线  $l$  垂直于  $x$  轴, B 错误;

$\vec{CM} \cdot \vec{CN} = |\vec{CM}| \times |\vec{CN}| \cos \langle \vec{CM}, \vec{CN} \rangle = 9 \cos \langle \vec{CM}, \vec{CN} \rangle$ , 当  $\langle \vec{CM}, \vec{CN} \rangle = \pi$ , 即直线  $l$  的方程为  $y = 2$  时,  $\vec{CM} \cdot \vec{CN}$  取得最小值 -9, C 正确;

若圆  $C$  上到直线  $l$  的距离为  $\frac{3}{2}$  的点恰好有三个, 则圆心到直线  $l$  的距离为  $\frac{3}{2}$ , 所以

$$\frac{|m - 2 + 2 + m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{|2m|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{3}{2}, \text{ 整理得}$$

$16m^2 = 9m^2 + 9$ , 解得  $m = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}$ , D 错误. 故选 AC.

### 6. AD 突破点 ▶ 直线与圆的位置关系

【解析】由题意得,  $C(0, -2)$ ,  $\angle AMC = \angle ANC = 90^\circ$ , 则  $|AM| = |AN| = \sqrt{|AC|^2 - |MC|^2} = \sqrt{|AC|^2 - 8}$ .

设  $A(t, t+6)$ , 则  $|AC|^2 = (t-0)^2 + (t+6+2)^2 = 2(t+4)^2 + 32 \geq 32$ , 所以  $|AM| = \sqrt{|AC|^2 - 8} \geq \sqrt{32 - 8} = 2\sqrt{6}$ , 故 A 正确.

由于  $A(-2\sqrt{2}, 6-2\sqrt{2}), N(-2\sqrt{2}, -2)$  满足条件, 但此时  $S_{\text{四边形}AMCN} = 2S_{\triangle ACN} = |AN| \cdot |CN| = (8-2\sqrt{2}) \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2} - 8 \neq 6\sqrt{2}$ , 故 B 错误.

设点  $O$  到  $MN$  的距离为  $d$ , 以  $AC$  为直径的圆的方程为  $\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{t+4}{2}\right)^2 = \frac{t^2 + (t+8)^2}{4}$ , 即  $(x^2 + y^2 - 4y - 12) - t(x + y + 2) = 0$ , 两圆方程相减得  $MN$  的方程为  $tx + (t+8)y + 2t + 8 = 0$ , 所以  $d =$

$$\frac{|2t+8|}{\sqrt{t^2 + (t+8)^2}} = \frac{\sqrt{2} \times |t+4|}{\sqrt{(t+4)^2 + 16}}. \text{ 当 } t \neq -4 \text{ 时,}$$

$$d < \frac{\sqrt{2} \times |t+4|}{\sqrt{(t+4)^2}} = \sqrt{2}; \text{ 当 } t = -4 \text{ 时, } d = 0, \text{ 故 C}$$

错误.

由  $\angle AMC = \angle ANC = 90^\circ$  可知,  $\triangle AMN$  的



外接圆是以  $AC$  为直径的圆, 由 C 选项可知圆的方程为  $\left(x - \frac{t}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{t+4}{2}\right)^2 = \frac{t^2 + (t+8)^2}{4}$ , 即  $(x^2 + y^2 - 4y - 12) - t(x + y + 2) = 0$ , 由  $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0, \\ x + y + 2 = 0, \end{cases}$  解得

$\begin{cases} x=0, \\ y=-2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x=-4, \\ y=2 \end{cases}$ , 故该圆恒过点  $(0, -2)$

和  $(-4, 2)$  (提示: 过直线  $Ax + By + C = 0$  与圆  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$  的交点的圆系方程是  $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F + \lambda(Ax + By + C) = 0$ ), 故 D 正确. 故选 AD.

## 7. ACD 突破点 ▶ 圆与圆的位置关系

【解析】设  $N(x_N, y_N)$ , 当点  $N$  在  $y$  轴上时,  $|x_N - x_F| = 1$ , 则  $|x_P - x_F| = 2 \Rightarrow x_P = -1$ ,  $y_P = \pm 1$ , 则  $|PF| = \sqrt{5}$ , 故 A 正确;

由题意可得  $P(2x_N - 1, 2y_N)$ , 代入圆  $M$  的方程可得  $x_N^2 + y_N^2 = \frac{1}{4}$ , 可得点  $N$  在以坐

标原点  $O$  为圆心,  $\frac{1}{2}$  为半径的圆上运动, 又圆  $N$  交  $y$  轴于  $A, B$  两点, 故  $|MN| \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ , 故 B 错误;

以  $PF$  为直径的圆  $N$  的方程可写为  $(x - x_P)(x - 1) + y(y - y_P) = 0$ , 令  $x = 0$ , 可得  $x_P + y(y - y_P) = 0$ , 即  $y^2 - y_P y + x_P = 0$ , 则  $y_A, y_B$  为方程的两根, 由根与系数的关系得  $y_A y_B = x_P$ , 故 C 正确;

要证  $\cos \angle AFP = \frac{|AF|}{|PF|} = \frac{1}{|BF|}$ , 即证

$$|PF| = |FA| \cdot |FB|,$$

$|FA| \cdot |FB| = \sqrt{y_A^2 + 1} \cdot \sqrt{y_B^2 + 1} = \sqrt{y_A^2 y_B^2 + (y_A^2 + y_B^2) + 1} = \sqrt{1 - 4x_P}$  (提示: 利用两点间的距离公式表示线段的长度, 再利用根与系数的关系进行化简, 体现了用代数的方法研究几何问题的基本思想方法),

$|PF| = \sqrt{(x_P - 1)^2 + y_P^2} = \sqrt{1 - 4x_P}$ , 所以  $|PF| = |FA| \cdot |FB|$ , 即  $\cos \angle AFP = \frac{1}{|BF|}$ , 故 D 正确. 故选 ACD.

## 8. ±10 考查点 ▶ 直线与圆的位置关系

【解析】设  $P(x, y)$ , 由  $|PA| = 2|PB|$ , 得  $\sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$ , 整理得  $x^2 + y^2 = 4$ , 所以点  $P$  在以  $O(0, 0)$  为圆心, 2 为半径的圆上. 因为直线  $l: 3x + 4y + a = 0$  上有且只有一点  $P$  满足  $|PA| = 2|PB|$ , 即直线  $l: 3x + 4y + a = 0$  与圆  $x^2 + y^2 = 4$  有且只有一个公共点, 所以圆心到直线的

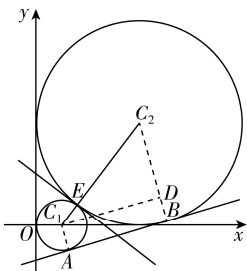
距离  $d = \frac{|a|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$ , 解得  $a = \pm 10$ .

## 9. $x=0$ (答案不唯一) 突破点 ▶ 两圆的公切线方程



【解析】由题知，圆  $C_1$  的圆心  $C_1(1,0)$ ，半径  $r_1=1$ ，圆  $C_2$  的圆心  $C_2(4,4)$ ，半径  $r_2=4$ ，则  $|C_1C_2|=5=r_1+r_2=1+4$ ，即两圆外切，设切点为  $E(m,n)$ ，则  $\overrightarrow{C_1C_2}=5\overrightarrow{C_1E}$ ，可得  $(3,4)=5(m-1,n)$ ，所以  $E\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$ 。又过点  $E$  与  $C_1C_2$  垂直的直线为两圆的内公切线，斜率为  $-\frac{3}{4}$ ，该公切线方程为  $y-\frac{4}{5}=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{8}{5}\right)$ ，整理得  $3x+4y-8=0$ 。

设两圆的一条外公切线(斜率存在)与两圆的切点分别为  $A,B$ ，连接  $C_1A,C_2B$ ，作  $C_1D\perp C_2B$ ，垂足为  $D$ (如图)，则  $|C_1C_2|=5$ ， $|C_2D|=3$ ， $|C_1D|=4$ ， $\tan\angle C_2C_1x=\frac{4}{3}$ ， $\tan\angle C_2C_1D=\frac{3}{4}$ ，



所以  $\tan\angle DC_1x$   
 $=\tan(\angle C_2C_1x-\angle C_2C_1D)$   
 $=\frac{\tan\angle C_2C_1x-\tan\angle C_2C_1D}{1+\tan\angle C_2C_1x\cdot\tan\angle C_2C_1D}$   
 $=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{7}{24}$ ，所以直线  $C_1D$  的斜率为  $\frac{7}{24}$ ，即直线  $AB$  的斜率为  $\frac{7}{24}$ 。设直线  $AB$  的方程为  $7x-24y+m=0$  ( $m<0$ )，则  $\frac{|7+m|}{\sqrt{7^2+24^2}}=1$ ，所以  $m=-32$ ，故  $AB$  的方程为  $7x-24y-32=0$ 。由图易知，另一条外公切线的方程为  $x=0$ 。故两圆的公切线方程为  $x=0$  或  $3x+4y-8=0$  或  $7x-24y-32=0$ (填其中之一即可)。

#### 10. $\frac{4}{5}$ 突破点 ▶ 与圆有关的三角形面积的最值

【解析】建立如图所示的平面直角坐标系，则  $B(0,0)$ ， $C(8,0)$ ，由  $S_{\triangle ABD}=3S_{\triangle ADC}$ ，得  $|BD|=3|CD|$ ，又  $|BC|=8$ ，所以  $|BD|=6$ ， $|CD|=2$ ，则  $D(6,0)$ 。设  $A(x,y)$ ， $y\neq 0$ ，易知  $AB,AD$  的斜率一定存在，当  $AC$  的斜率存在，即  $x\neq 8$  时，直线  $AC,AD,AB$  的斜率分别为  $k_1,k,k_2$ ，

则  $k_1=\frac{y}{x-8}$ ， $k=\frac{y}{x-6}$ ， $k_2=\frac{y}{x}$ ，又  $\angle BAD=$





$\angle CAD$ , 由到角公式得  $\frac{k-k_1}{1+kk_1} = \frac{k_2-k}{1+kk_2}$ , 即

$$(k-k_1)(1+kk_2) = (k_2-k)(1+kk_1),$$

$$\text{得} \left( \frac{y}{x-6} - \frac{y}{x-8} \right) \left( 1 + \frac{y}{x-6} \cdot \frac{y}{x} \right) =$$

$$\left( \frac{y}{x} - \frac{y}{x-6} \right) \left( 1 + \frac{y}{x-6} \cdot \frac{y}{x-8} \right), \text{整理得}$$

$$x^2 + y^2 - 18x + 72 = 0, \text{即} (x-9)^2 + y^2 = 9, \text{所以点 } A \text{ 在以 } E(9,0) \text{ 为圆心, 半径为 } 3$$

的圆上. 当  $AC$  的斜率不存在, 即  $x=8$

$$\text{时, 由} \frac{|DC|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{3} \text{ 得 } |AB| = 3|AC|,$$

$$\text{由勾股定理得 } |AC|^2 + 8^2 = |AB|^2 =$$

$$9|AC|^2, \text{解得 } |AC| = 2\sqrt{2}, \text{所以 } A \text{ 点坐标为 } (8, 2\sqrt{2}) \text{ 或 } (8, -2\sqrt{2}), \text{易知此时 } A$$

点在圆  $(x-9)^2 + y^2 = 9$  上.

综上,  $A$  点的轨迹方程为  $(x-9)^2 + y^2 = 9$

$(y \neq 0)$ . 所以当  $A$  在点  $(9, 3)$  或  $(9, -3)$

处时,  $\triangle ABC$  的面积最大, 此时  $|AB| =$

$$\sqrt{9^2 + 3^2} = 3\sqrt{10}, \quad |AC| =$$

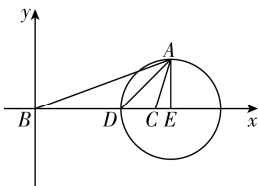
$$\sqrt{(9-8)^2 + 3^2} = \sqrt{10},$$

在  $\triangle ABC$  中, 由余弦定理得

$$\cos \angle BAC = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB| \cdot |AC|} =$$

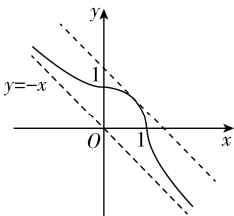
$$\frac{90 + 10 - 64}{2 \times 3\sqrt{10} \times \sqrt{10}} = \frac{3}{5}, \text{所以 } \sin \angle BAC =$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \angle BAC} = \frac{4}{5}.$$



#### 11. $[4-\sqrt{2}, 4)$ 突破点 ▶ 直线与圆的位置关系

**【解析】** 当  $x \geq 0, y \geq 0$  时, 曲线方程可化为  $x^2 + y^2 = 1$ ; 当  $x \leq 0, y \geq 0$  时, 曲线方程可化为  $y^2 - x^2 = 1$ ; 当  $x \leq 0, y \leq 0$  时, 曲线方程可化为  $-x^2 - y^2 = 1$ , 上式不成立, 故曲线  $x|x| + y|y| = 1$  不出现在第三象限; 当  $x \geq 0, y \leq 0$  时, 曲线方程可化为  $x^2 - y^2 = 1$ , 作出曲线  $x|x| + y|y| = 1$  的图象如图所示.



设  $t = x + y - 4$ , 即  $x + y - t - 4 = 0$ . 当直线  $x + y - t - 4 = 0$  与圆  $x^2 + y^2 = 1$  相切, 且切点在

第一象限时,  $\frac{|-t-4|}{\sqrt{2}} = 1$ , 且  $-t-4 < 0$ , 解

$$\text{得 } t = \sqrt{2} - 4.$$



双曲线  $x^2 - y^2 = 1, y^2 - x^2 = 1$  的渐近线方程均为  $x \pm y = 0$ , 当直线  $x + y - t - 4 = 0$  与直线  $x + y = 0$  重合时,  $t = -4$ .

所以直线  $x + y - t - 4 = 0$  与曲线  $x|x| + y|y| = 1$  有公共点时,  $-4 < t \leq \sqrt{2} - 4$ , 故  $|x + y - 4| = |t| \in [4 - \sqrt{2}, 4)$ .

12.  $\left(-\frac{15}{8}, -\frac{\sqrt{6}}{12}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty\right)$

**突破点** ▶ 直线与圆的位置关系

**【解析】** 将半圆依次沿着直线  $y = x$ , 作对称图形, 再将得到的两个半圆沿着直线  $x = 0$  作对称图形, 如图所示 (提示: 光线在镜面发生反射可以等效处理为光线进入了镜子后的空间, 因此问题就转化为光线如何与镜子内外的圆没有公共点, 光线变化的范围如图所示). 当光线与曲线  $(x - 4)^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$  相切时, 光

线所在直线的斜率为  $k_1 = \frac{1}{\sqrt{3^2 - 1}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ,

由对称性可知当光线遇射线  $l_1$  时, 反射光线若与曲线  $(x - 4)^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$  相切, 则入射光线所在直线方程为  $x = 1$ , 且该直线与圆  $x^2 + (y - 4)^2 = 1$  相切. 当光线与圆  $x^2 + (y - 4)^2 = 1$  相切但遇射线  $l_1$  时反射光线不与曲线  $(x - 4)^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$  相切时,  $\tan \theta = \frac{1}{4}$ , 所以光线所

在直线的斜率为  $k_2 = -\tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right) =$

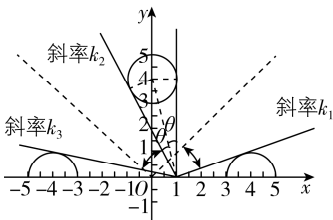
$$-\frac{1}{\tan 2\theta} = -\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} = -\frac{1 - \frac{1}{16}}{2 \times \frac{1}{4}} = -\frac{15}{8}.$$

光线与曲线  $(x + 4)^2 + y^2 = 1 (y \geq 0)$  相切

时, 光线斜率为  $k_3 = -\frac{1}{\sqrt{5^2 - 1}} = -\frac{\sqrt{6}}{12}$ , 所

以由图可知  $k$  的取值范围是

$$\left(-\frac{15}{8}, -\frac{\sqrt{6}}{12}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, +\infty\right).$$



## 全章综合训练

刷

情境

### 1. B 创新点 ▶ 新情境

**【解析】**  $\frac{y}{x-2}$  表示点  $P(x, y)$  与点  $(2, 0)$  连

线的斜率, 由题图可知, 过点  $(2, 0)$  且与以  $(0, 1)$  为圆心, 1 为半径的半圆 ( $y$  轴右侧) 相切的一条切线的斜率最小, 设切线



方程为  $y = k(x-2)$ , 即  $kx - y - 2k = 0$ , 由  $\frac{|0-1-2k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ , 解得  $k = 0$  (舍去) 或  $k = -\frac{4}{3}$ , 所以  $\frac{y}{x-2}$  的最小值是  $-\frac{4}{3}$ . 故选 B.

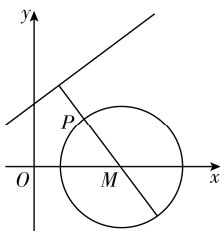
## 2. ACD 创新点 ▶ 新定义

【解析】设点  $P$  的坐标为  $(x, y)$ , 由题意

可得  $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-2)^2+y^2}} = \sqrt{2}$ , 化简可得  $(x-4)^2 + y^2 = 8$ , 故 A 正确;

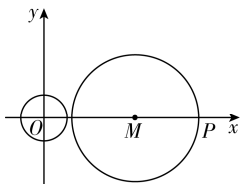
如图①, 点  $P$  在圆  $(x-4)^2 + y^2 = 8$  上, 其圆心为  $M(4, 0)$ , 半径为  $2\sqrt{2}$ , 故点  $P$  到直线  $3x - 4y + 12 = 0$  的距离的最小值为圆心  $M$  到直线的距离减半径, 即为  $\frac{|3 \times 4 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} - 2\sqrt{2} =$

$\frac{24}{5} - 2\sqrt{2}$ , 故 B 错误;



图①

如图②, 点  $P$  到圆  $x^2 + y^2 = 1$  上的点的最大距离为点  $M$  到点  $O(0, 0)$  的距离加圆  $M$  和圆  $O$  的半径, 即  $4 + 1 + 2\sqrt{2} = 5 + 2\sqrt{2}$ , 故 C 正确;



图②

若到直线  $kx - y - 2k = 0$  的距离为  $\sqrt{2}$  的点  $P$  至少有 3 个, 则圆心  $M$  到直线  $kx - y - 2k = 0$  的距离小于或等于其半径减去  $\sqrt{2}$ , 即

$\frac{|4k - 2k|}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq \sqrt{2}$ , 解得  $-1 \leq k \leq 1$ , 故 D 正

确. 故选 ACD.

## 3. 创新点 ▶ 新定义

【解】(1) 由题可知, 直线族  $mx + ny = 1$  ( $m, n \in \mathbf{R}$ ) 中的每一条直线都是圆  $M$  上对应点处的切线, 故圆心  $M$  到该直线族的

距离满足  $\frac{|m \cdot 0 + n \cdot 3 - 1|}{\sqrt{m^2 + n^2}} = 2$ , 所以  $m,$

$n$  满足  $5n^2 - 4m^2 - 6n + 1 = 0$ .

(2) 将点  $N(x_0, y_0)$  代入  $y = tx - t^2$  ( $t \in \mathbf{R}$ ), 可得关于  $t$  的方程  $t^2 - x_0 t + y_0 = 0$ , 因为点  $N(x_0, y_0)$  不在直线族  $y = tx - t^2$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) 的任意一条直线上, 故方程  $t^2 - x_0 t + y_0 = 0$  无实数解, 所以  $\Delta = x_0^2 - 4y_0 < 0$ , 那么  $y_0 > \frac{x_0^2}{4}$ ,



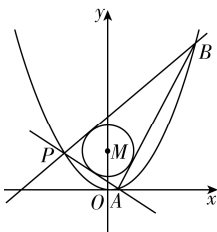
故  $y_0 > 0$ .

因为区域  $y > \frac{x^2}{4}$  的边界为抛物线  $x^2 = 4y$ ,

所以联立  $y = tx - t^2$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) 与  $x^2 = 4y$ , 可得  $x^2 - 4tx + 4t^2 = 0$ , 由  $\Delta' = 0$ , 可知直线族  $\Omega$ :  $y = tx - t^2$  ( $t \in \mathbf{R}$ ) 中的每一条直线均为抛物线  $x^2 = 4y$  在对应点处的切线.

因此直线族  $\Omega$  的包络曲线  $E$  的方程为  $x^2 = 4y$ .

(3) 如图, 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), P(2u, u^2)$ , 则  $k_{PA} = \frac{y_1 - u^2}{x_1 - 2u} = \frac{x_1 + 2u}{4}$ , 故直线  $PA$ :  $(x_1 + 2u)x - 4y - 2ux_1 = 0$ .



因为直线  $PA$  与圆  $M$  相切, 所以

$$\frac{|12 + 2ux_1|}{\sqrt{(x_1 + 2u)^2 + 16}} = 2, \text{ 结合 } x_1^2 = 4y_1 \text{ 可得}$$

$$(u^2 - 1)y_1 + 2ux_1 + 5 - u^2 = 0 \text{ ①, 同理可得}$$

$$(u^2 - 1)y_2 + 2ux_2 + 5 - u^2 = 0 \text{ ②, 由①②可得}$$

$$\text{直线 } AB: (u^2 - 1)y + 2ux + 5 - u^2 = 0 \quad (u^2 \neq 1).$$

$$\text{联立 } \begin{cases} (u^2 - 1)y + 2ux + 5 - u^2 = 0, \\ x^2 = 4y, \end{cases} \text{ 可得 } x^2 +$$

$$\frac{8ux}{u^2 - 1} + \frac{20 - 4u^2}{u^2 - 1} = 0, \text{ 由一元二次方程根与}$$

$$\text{系数的关系可得 } x_1 + x_2 = -\frac{8u}{u^2 - 1}, x_1 \cdot$$

$$x_2 = \frac{20 - 4u^2}{u^2 - 1}.$$

$$\text{因此 } |AB| = \frac{4(u^2 + 1)\sqrt{u^4 - 2u^2 + 5}}{(u^2 - 1)^2}, \text{ 由于}$$

$$\text{点 } P(2u, u^2) \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离 } d =$$

$$\frac{u^4 + 2u^2 + 5}{u^2 + 1}, \text{ 所以 } \triangle PAB \text{ 的面积 } S =$$

$$\frac{2\sqrt{u^4 - 2u^2 + 5}}{(u^2 - 1)^2} \times (u^4 + 2u^2 + 5).$$

$$\text{令 } u^2 - 1 = m, \text{ 则 } m \geq -1, \text{ 且 } m \neq 0, \text{ 则}$$

$$S = f(m) = 2 \left( m + \frac{8}{m} + 4 \right) \sqrt{1 + \frac{4}{m^2}} \quad (m \geq$$

$$-1, \text{ 且 } m \neq 0), \text{ 由 } f'(m) = 2 \sqrt{1 + \frac{4}{m^2}} \cdot$$

$$\frac{(m - 4)(m^3 + 4m^2 + 8m + 16)}{m^4 + 4m^2} = 0 \quad (m \geq -1,$$

$$\text{且 } m \neq 0), \text{ 解得 } m = 4, \text{ 当 } m \in [-1, 0)$$

$$\text{时, } f'(m) < 0; \text{ 当 } m \in (0, 4) \text{ 时, } f'(m) < 0;$$

$$\text{当 } m \in (4, +\infty) \text{ 时, } f'(m) > 0, \text{ 所以 } f(m)$$

$$\text{在 } [-1, 0), (0, 4) \text{ 上单调递减, 在 } (4,$$

$$+\infty) \text{ 上单调递增, 所以 } S_{\min} = f(4) = 10\sqrt{5}$$

$$(\text{当且仅当 } u^2 = 5 \text{ 时取等}), \text{ 所以 } \triangle PAB$$



的面积  $S$  的最小值是  $10\sqrt{5}$ .

刷

真题

1. D **命题点** 圆的方程、点到直线的距离公式

【解析】圆  $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0$  的标准方程为  $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$ , 圆心坐标为  $(1, -3)$ , 因此圆心到直线  $x - y + 2 = 0$  的距离  $d = \frac{|1+3+2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 3\sqrt{2}$ , 故选 D.

2. A **命题点** 圆的性质

【解析】依题意可知圆心坐标为  $(a, 0)$ , 又直线  $2x + y - 1 = 0$  是圆的一条对称轴, 所以圆心在该直线上, 即  $2a + 0 - 1 = 0$ , 解得  $a = \frac{1}{2}$ , 故选 A.

3. B **命题点** 点到直线的距离及抛物线的焦点坐标

【解析】抛物线  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) 的焦点为  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ , 由题意, 得  $\frac{\left|\frac{p}{2} + 1\right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$ , 解得  $p = 2$ . 故选 B.

4. B **命题点** 圆的方程、性质以及点到直线的距离公式

【解析】因为过点  $(2, 1)$  的圆与两坐标轴都相切, 所以可设圆心坐标为  $(a, a)$  ( $a > 0$ ), 且圆的半径  $r = a$ , 所以圆的标准方程为  $(x-a)^2 + (y-a)^2 = a^2$ . 将点  $(2, 1)$  的坐标代入圆的方程, 得  $(2-a)^2 + (1-a)^2 = a^2$ , 得  $a^2 - 6a + 5 = 0$ , 解得  $a = 1$  或  $a = 5$ , 所以圆心坐标为  $(1, 1)$  或  $(5, 5)$ . 故点  $(1, 1)$  到直线  $2x - y - 3 = 0$  的距离为  $\frac{|2 \times 1 - 1 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 点  $(5, 5)$  到直线  $2x - y - 3 = 0$  的距离为  $\frac{|2 \times 5 - 5 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 故选 B.

5.  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$  (或写成一般方程式  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$ ) **命题点** 直线方程和圆的方程

【解析】不妨设  $A(3, 0), B(0, 1)$ , 则线段  $AB$  的垂直平分线方程为  $y - \frac{0+1}{2} = -\frac{1}{k_{AB}} \cdot \left(x - \frac{3+0}{2}\right)$  (提示: 利用垂径定理找到弦的垂直平分线是求出圆的方程的关键), 即  $y = 3x - 4$ . 联立  $\begin{cases} y = 3x - 4, \\ 2x + y - 1 = 0, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \end{cases}$  即圆心  $M(1, -1)$ , 圆的半径为  $\sqrt{(3-1)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{5}$ , 所以  $\odot M$  的方程为  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$ .

6. B **命题点** 点到直线的距离公式、直线与圆的位置关系



【解析】由题易知圆心  $(0, -2)$  到直线  $y =$

$$\sqrt{3}x+2 \text{ 的距离 } d = \frac{|0 - (-2) + 2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} = 2,$$

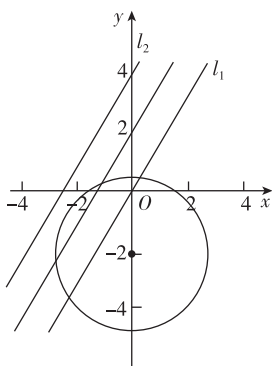
因为圆上到直线  $y = \sqrt{3}x + 2$  的距离为 1 的点有且仅有两个, 所以  $|d - r| < 1$ , 即  $|2 - r| < 1$ , 所以  $1 < r < 3$ , 故选 B.

### 一题多解

设与直线  $y = \sqrt{3}x + 2$  距离为 1 的平行直线的方程为  $y = \sqrt{3}x + c (c \neq 2)$ , 由  $\frac{|c - 2|}{2} = 1$  得  $c = 0$  或 4,

记  $l_1: y = \sqrt{3}x$ ,  $l_2: y = \sqrt{3}x + 4$ , 则圆与  $l_1, l_2$  共有两个交点, 由于圆心  $(0, -2)$  位于直线  $l_1$  下方, 所以圆只能与  $l_1$  相交且与  $l_2$

相离, 所以  $\frac{|\sqrt{3} \times 0 - (-2)|}{2} < r < \frac{|\sqrt{3} \times 0 - (-2) + 4|}{2}$ , 即  $1 < r < 3$ . 故选 B.



## 7. C 命题点 ▶ 等差中项, 直线与圆的位置关系

【解析】因为  $a, b, c$  成等差数列, 所以  $a -$

$2b + c = 0$ , 则直线方程为  $ax + \frac{a+c}{2}y + c = 0$ , 即

$$a\left(x + \frac{y}{2}\right) + c\left(\frac{y}{2} + 1\right) = 0, \text{ 令 } \begin{cases} x + \frac{y}{2} = 0, \\ \frac{y}{2} + 1 = 0, \end{cases} \text{ 解}$$

得  $\begin{cases} x = 1, \\ y = -2, \end{cases}$  所以直线恒过点  $P(1, -2)$ . 圆

$x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0$  化为标准方程得  $x^2 + (y + 2)^2 = 5$ , 则圆心  $C$  为  $(0, -2)$ , 半径  $r = \sqrt{5}$ ,

则  $|PC| = 1$ , 当  $PC \perp AB$  时,  $|AB|$  取得最小值, 此时  $|AB| = 2\sqrt{5 - |PC|^2} = 4$ , 故选 C.

## 8. B 命题点 ▶ 直线与圆相切、二倍角的正弦公式

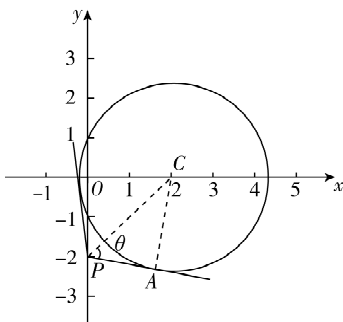
【解析】设圆  $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$  为圆  $C$ , 化简得  $(x - 2)^2 + y^2 = 5$ , 圆心为  $C(2, 0)$ , 半径  $r = \sqrt{5}$ . 如图, 设  $\angle CPA = \theta$ , 则  $\alpha = 2\theta$ ,

$$\sin \theta = \frac{|CA|}{|CP|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{(2-0)^2 + [0 - (-2)]^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \text{ 易知 } \cos \theta > 0, \text{ 则 } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \text{ 所以}$$



$\sin \alpha = \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$ . 故选 B.



### 9. C 命题点 ▶ 直线与圆的位置关系

**【解析】**将圆的一般方程化为标准方程  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ , 令  $x-y=z$ , 则直线  $x-y=z$  与圆有公共点, 且当直线与圆相切时,  $z$  取得最大或最小值. 设直线  $x-y=z$  与圆相切, 则有  $\frac{|2-1-z|}{\sqrt{2}} = 3$ , 整理得

$|1-z| = 3\sqrt{2}$ , 解得  $z = 1 + 3\sqrt{2}$  或  $z = 1 - 3\sqrt{2}$ , 所以  $x-y$  的最大值为  $1 + 3\sqrt{2}$ , 故选 C.

### 10. ACD 命题点 ▶ 圆上的点到直线的距离的最值、直线和圆相切求切线长

**【解析】**由题意知, 圆  $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 16$  的圆心  $C(5, 5)$ , 半径  $r=4$ . 又  $A(4, 0)$ ,  $B(0, 2)$ , 则直线  $AB$  的方程为  $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$ , 即  $x+2y-4=0$ , 则圆心  $C(5, 5)$

到直线  $AB$  的距离  $d = \frac{|5+2 \times 5-4|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{11\sqrt{5}}{5}$ . 对于选项 A, 因为点  $P$  到直线  $AB$

的距离的最大值为  $d+r = \frac{11\sqrt{5}}{5} + 4$ , 且

$\left(\frac{11\sqrt{5}}{5} + 4\right) - 10 = \frac{11\sqrt{5}}{5} - 6 = \frac{11\sqrt{5}-30}{5} < 0$ , 所以点  $P$  到直线  $AB$  的距离小于 10, 故 A

正确.

对于选项 B, 因为点  $P$  到直线  $AB$  的距离

的最小值为  $d-r = \frac{11\sqrt{5}}{5} - 4$ , 且  $\left(\frac{11\sqrt{5}}{5} - 4\right) -$

$2 = \frac{11\sqrt{5}}{5} - 6 < 0$ , 所以点  $P$  到直线  $AB$  的距

离小于 2, 故 B

错误.

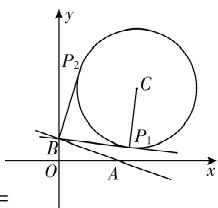
对于选项 C, 当直线  $PB(P_1B)$  与圆  $C$  相切时,  $\angle PBA$  最小, 如图. 因为  $|CB| =$

$\sqrt{(5-0)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{34}$ ,  $|CP| = r = 4$ ,

所以  $|PB| = \sqrt{|CB|^2 - |CP|^2} =$

$\sqrt{(\sqrt{34})^2 - 4^2} = 3\sqrt{2}$ , 故 C 正确;

对于选项 D, 当  $\angle PBA$  最大时, 直线  $PB$





$(P_2B)$  与圆  $C$  也相切, 由圆的切线性质知, 此时切线长  $|PB| = 3\sqrt{2}$ , 故 D 正确. 故选 ACD.

### 11. ABD 命题点 ▶ 点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系

【解析】圆心  $(0,0)$  到直线  $ax+by-r^2=0$  的距离  $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ , 若点  $A$  在圆上, 则

$$a^2+b^2=r^2, \text{ 则 } d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{r^2}{|r|} = |r|, \text{ 所}$$

以直线  $l$  与圆  $C$  相切, 故 A 正确; 若点  $A$

在圆内, 则  $a^2+b^2 < r^2$ , 则  $d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}} >$

$\frac{r^2}{|r|} = |r|$ , 所以直线  $l$  与圆  $C$  相离, 故 B

正确; 若点  $A$  在圆外, 则  $a^2+b^2 > r^2$ , 则

$$d = \frac{r^2}{\sqrt{a^2+b^2}} < \frac{r^2}{|r|} = |r|, \text{ 所以直线 } l \text{ 与圆}$$

$C$  相交, 故 C 错误; 若点  $A$  在直线  $l$  上,

则  $a^2+b^2-r^2=0$ , 即  $a^2+b^2=r^2$ , 则点  $A$  也

在圆  $C$  上,  $d=|r|$ , 所以直线  $l$  与圆  $C$  相

切, 故 D 正确.

### 12. C 命题点 ▶ 直线与圆的位置关系

【解析】由题意可知, 直线  $l: y=kx+m$  恒过定点  $A(0, m)$ , 由于  $l$  截圆的弦长最小值为 2, 即当直线  $l$  与直线  $OA$  垂直时 ( $O$  为坐标原点), 弦长取得最小值 (提示: 要使弦长最小, 则圆心到直线的距离最大), 于是  $2^2 = \left(\frac{1}{2} \times 2\right)^2 + |OA|^2 = 1+m^2$ , 解

得  $m = \pm\sqrt{3}$ . 故选 C.

### 13. D 命题点 ▶ 直线与圆的位置关系

【解析】由题意可知  $\odot M: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ , 所以圆心  $M(1, 1)$ , 半径为 2. 因为  $PA, PB$  是  $\odot M$  的切线, 所以  $PA \perp AM$ ,  $PB \perp BM$ . 由圆的对称性可知  $PM \perp AB$ ,

$$\text{所以 } S_{\text{四边形}PAMB} = \frac{1}{2} |PM| |AB| = 2S_{\triangle PAM} =$$

$|PA| \cdot |AM|$  (提示: 根据圆的切线长定理知  $|AM| = |BM|$ ), 所以  $|PM| \cdot |AB|$

取得最小值时,  $|PA| \cdot |AM|$  取得最小

值. 又  $|AM| = 2$  为定值, 所以当  $|PA|$  最小

时,  $|PM| \cdot |AB|$  最小. 因为  $|PA| =$

$$\sqrt{|PM|^2 - |AM|^2} = \sqrt{|PM|^2 - 4}, \text{ 所以当}$$

$|PM|$  取得最小值时,  $|PA|$  最小. 又因为

$P$  为直线  $2x+y+2=0$  上的动点, 所以当

$PM \perp l$  时,  $|PM|$  取得最小值. 此时直线

$$PM \text{ 的方程为 } y-1 = \frac{1}{2}(x-1), \text{ 与直线 } l$$

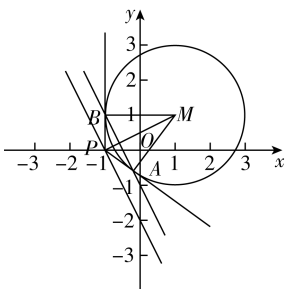
联立, 可得  $P(-1, 0)$ .

由圆的切线结论知切点弦  $AB$  所在直线

$$\text{方程为 } (-1-1) \cdot (x-1) + (0-1)(y-1) =$$

4, 即  $2x+y+1=0$ , 故选 D.





14. 2 或 -2 或  $\frac{1}{2}$  或  $-\frac{1}{2}$  (填一个即可)

**命题点** ▶ 直线与圆的位置关系

**【解析】**由题知,  $\odot C$  的半径  $r=2$ , 圆心  $C(1, 0)$ . 设圆心  $C$  到直线  $x-my+1=0$  的距离为  $d$ , 则弦长  $|AB|=2\sqrt{4-d^2}$ , 所以  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{4-d^2} \cdot d = \frac{8}{5}$ , 解得  $d^2 = \frac{4}{5}$  或  $d^2 = \frac{16}{5}$ , 所以  $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  或  $d = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ . 由点到直线的距离公式可知, 当

$d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  时,  $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 解得  $m = \pm 2$ ;

当  $d = \frac{4\sqrt{5}}{5}$  时,  $\frac{2}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ , 解得  $m = \pm \frac{1}{2}$ . 综上,  $m = \pm 2$  或  $\pm \frac{1}{2}$ .

15.  $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$  **命题点** ▶ 直线与圆的位置关系、点到直线的距离公式

**【解析】**由题意知点  $A(-2, 3)$  关于直线  $y=a$  的对称点为  $A'(-2, 2a-3)$  (提示: 点  $(x_0, y_0)$  关于直线  $y=a$  的对称点为  $(x_0, 2a-y_0)$ ), 所以  $k_{A'B} = \frac{3-a}{2}$ , 所以直线

$A'B$  的方程为  $y = \frac{3-a}{2}x + a$ , 即  $(3-a)x - 2y + 2a = 0$ . 由题意知圆  $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 1$  的圆心为  $(-3, -2)$ , 半径为 1, 又直线  $(3-a)x - 2y + 2a = 0$  与圆  $(x+3)^2 + (y+2)^2 = 1$  有公共点, 所以圆心到直线  $A'B$  的距离  $d = \frac{|-3(3-a) + 2 \times 2 + 2a|}{\sqrt{(3-a)^2 + (-2)^2}} \leq 1$

(易错: 公共点个数可能是 1 或 2, 易漏 “=”), 整理得  $6a^2 - 11a + 3 \leq 0$ , 解得  $\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{3}{2}$ , 所以实数  $a$  的取值范围

是  $\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{2}\right]$ .