



第8章 立体几何

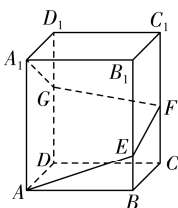
第1节 空间几何体的结构、表面积及体积

刷

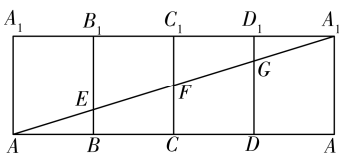
基础

1. A **考查点** ▶ 棱柱的侧面展开图及最短距离问题

【解析】将正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ (图①) 的侧面展开, 得到展开图 (图②), 当 A, E, F, G, A_1 五点共线时, $AE+EF+FG+GA_1$ 取得最小值, 且最小值为 $\sqrt{(4 \times 4)^2 + 5^2} = \sqrt{281}$. 故选 A.



图①



图②

2. A **考查点** ▶ 扇形的弧长与面积及圆锥的展开图问题

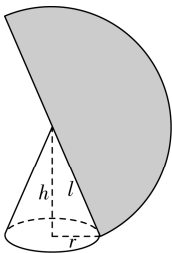
【解析】设该圆锥的母线长为 l , 圆锥的底面半径为 r , 圆锥的高为 h .

因为圆锥底面圆的周长等于扇形的弧长, 圆锥的侧面展开图是一个面积为 π 的半圆,

$$\text{所以} \begin{cases} \pi l = 2\pi r, \\ \frac{1}{2}l \times 2\pi r = \pi, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} r = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ l = \sqrt{2}, \end{cases}$$

$$\text{则该圆锥的高 } h = \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

故选 A.

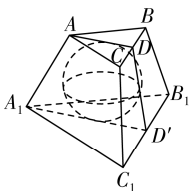


3. D **考查点** ▶ 正棱台及其有关计算、多面体与球的内切问题、棱台中截面的有关计算

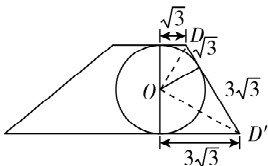
【解析】由题意可知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的高分别为 $\sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$, $\sqrt{18^2 - 9^2} = 9\sqrt{3}$.

由几何体结构特征结合题意可知内切球与上、下底面切点分别为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的重心,

如图①所示, 作截面得到图②, 设内切球球心为 O , 半径为 r ,



图①



图②

则有 $S_{\triangle DOD'} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + r^2} \times \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + r^2} = (\sqrt{3} + 3\sqrt{3})r$, 即 $r^4 - 18r^2 + 81 = 0$, 解得 $r = 3$, 所以该正三棱台的高为 6. 故选 D.

4. B 考查点 ▶ 球的表面积

【解析】设球 O 的半径为 R , $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 r , 则 $r = \frac{BC}{2\sin \angle BAC} = 2$.

因为球心 O 到平面 ABC 的距离为 1, 所以 $R^2 = r^2 + 1 = 5$, 从而球 O 的表面积为 $4\pi R^2 = 20\pi$. 故选 B.

5. C 考查点 ▶ 圆柱的侧面积的有关计算、圆锥的侧面积的有关计算

【解析】设圆锥和圆柱的底面半径为 r , 因为圆锥的轴截面是等边三角形, 所以圆锥的母线长 $l = 2r$,

则圆锥和圆柱的高 $h = \sqrt{4r^2 - r^2} = \sqrt{3}r$,

所以圆锥的侧面积 $S_1 = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l =$

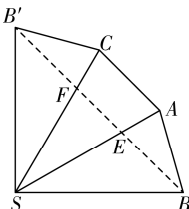
$2\pi r^2$, 圆柱的侧面积 $S_2 = 2\pi rh = 2\sqrt{3}\pi r^2$,

所以圆锥和圆柱的侧面积之比为 $\frac{S_1}{S_2} =$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故选 C.

6. A 考查点 ▶ 锥体的结构特征、棱锥的侧面积

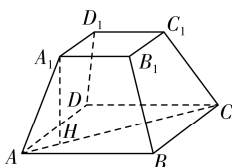
【解析】将正三棱锥 $S-ABC$ 的侧面沿侧棱 SB 剪开并展开在同一平面内, 如图, 连接 BB' , 当 E, F 分别为 BB' 与 SA, SC 的交点时, $\triangle BEF$ 的周长最小, 此时 $BB' = \sqrt{2}$, 而 $SB = SB' = 1$, $SB^2 + SB'^2 = 2 = BB'^2$, 则 $\angle BSB' = 90^\circ$, $\angle ASB = 30^\circ$, 所以三棱锥的侧面积为 $3 \times \frac{1}{2} SA \times SB \sin 30^\circ = \frac{3}{4}$. 故选 A.



7. D 考查点 ▶ 棱台的表面积



【解析】如图，连接 AC ，过点 A_1 作 $A_1H \perp AC$ ，垂足为 H ，则 $AH = \sqrt{2}$ 。因为侧棱与底面所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ，所以 $\frac{AH}{A_1A} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ，所以 $A_1A = \sqrt{10}$ ，则梯形 A_1ABB_1 的高 $h = \sqrt{A_1A^2 - \left(\frac{AB-A_1B_1}{2}\right)^2} = 3$ ，故该正四棱台的表面积是 $2^2 + 4^2 + \frac{(2+4) \times 3}{2} \times 4 = 56$ 。故选 D。

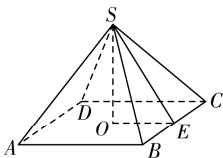


8. $(1\ 200 + 288\sqrt{3})\text{ cm}^2$ 考查点 ▶ 棱柱的侧面积

【解析】依题意，上、下两层均为底面周长为 120 cm，高为 5 cm 的正六棱柱，其侧面积 $S_1 = 2 \times 120 \times 5 = 1\ 200 (\text{ cm}^2)$ ，当球形灯球心到各面的距离等于 9 cm 时，中层正六棱柱的高 $h = 2 \times 9 - 2 \times 5 = 8 (\text{ cm})$ 。由球心与各侧面的距离为 9 cm，得中层正六棱柱底面边长为 $2 \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} (\text{ cm})$ ，因此中层正六棱柱的侧面积 $S_2 = 6 \times 6\sqrt{3} \times 8 = 288\sqrt{3} (\text{ cm}^2)$ ，所以该模型的侧面积至少为 $S = S_1 + S_2 = (1\ 200 + 288\sqrt{3})\text{ cm}^2$ 。

9. C 考查点 ▶ 锥体体积的有关计算

【解析】如图，正四棱锥 $S-ABCD$ ， $BC = 2$ ，设 O 为底面正方形 $ABCD$ 的中心， E 为 BC 的中点，连接 SO ， OE ， SE ，



由已知可得 $4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times SE = 2 \times 2 \times 2$ ，

所以 $SE = 2$ 。

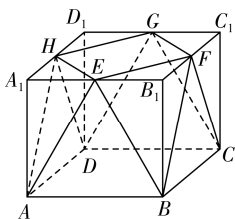
又 $OE = 1$ ，所以 $SO = \sqrt{SE^2 - OE^2} = \sqrt{3}$ ，

所以正四棱锥的体积 $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times \sqrt{3} =$

$\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 。故选 C。

10. C 考查点 ▶ 柱体体积的有关计算、锥体体积的有关计算

【解析】如图，将题中几何体补全为长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ ，则 $A_1E = A_1H = \frac{1}{2}A_1B_1 = 1$ ，





$$AA_1 = \sqrt{AE^2 - A_1E^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

所以该包装盒的容积为 $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} -$

$$4V_{A-A_1EH} = 2 \times 2 \times \sqrt{3} - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times$$

$$\sqrt{3} = \frac{10\sqrt{3}}{3}, \text{ 故选 C.}$$

11. D **考查点** ▶ 柱体体积的有关计算、弧长的有关计算

【解析】 设 \widehat{AD} 对应圆的半径为 R , \widehat{BC} 对应圆的半径为 r , “曲池”的高为 h .

因为 \widehat{AD} , \widehat{BC} 所对的圆心角相同, 设为 α , 所以由弧长公式可知,

$$l_{\widehat{AD}} = \alpha R, l_{\widehat{BC}} = \alpha r,$$

且 \widehat{AD} 的长度为 \widehat{BC} 长度的 3 倍, 所以 $R = 3r$.

因为 $AB = CD = R - r = 2$, 所以 $R = 3, r = 1$,

所以“曲池”的体积 $V = \frac{1}{4} (\pi R^2 h -$

$$\pi r^2 h) = \frac{\pi}{4} \times (3^2 - 1^2) \times 3 = 6\pi. \text{ 故选 D.}$$

12. B **考查点** ▶ 球的体积、球的表面积、台体体积的有关计算

【解析】 设实心铁球的半径为 R cm, 则 $4\pi R^2 = 1\,600\pi$, 解得 $R = 20$, 则实心铁球

的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32\,000}{3}\pi (\text{cm}^3)$.

设正四棱台的实心铁锭的高为 h cm,

因为实心铁球的体积和正四棱台的实心铁锭体积相等,

所以 $\frac{1}{3} h [(20\sqrt{\pi})^2 + (40\sqrt{\pi})^2 +$

$$\sqrt{(20\sqrt{\pi})^2 \times (40\sqrt{\pi})^2}] = \frac{32\,000}{3}\pi, \text{ 解}$$

得 $h = \frac{80}{7}$. 故选 B.

13. A **考查点** ▶ 棱锥的体积

【解析】 设正六棱锥的底面边长与高分别为 a, h ($a > 0, h > 0$), 易知六边形

$ABCDEF$ 为正六边形, 设底面 $ABCDEF$ 的中心为 O , 连接 PO, AO , 则 $AO = a$,

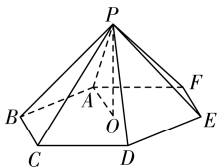
$PO \perp$ 底面 $ABCDEF$, PO 为正六棱锥 $P-$

$ABCDEF$ 的高, 所以 $S_{\text{正六边形}ABCDEF} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times$

$$a^2 \times 6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2. \text{ 因为正六棱锥 } P-ABCDEF$$

的体积为 $8\sqrt{3}$, 所以 $8\sqrt{3} = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h$,

$$\text{即 } a^2 h = 16, \text{ 则 } PA = \sqrt{a^2 + h^2} = \sqrt{\frac{16}{h} + h^2}.$$



方法一: 令 $f(h) = \frac{16}{h} + h^2, h \in (0, +\infty)$,

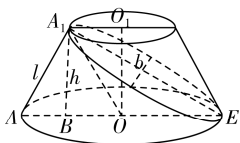


则 $f'(h) = 2h - \frac{16}{h^2}$, 令 $f'(h) = 2h - \frac{16}{h^2} = 0$, 解得 $h = 2$. 当 $h \in (0, 2)$ 时, $f'(h) < 0$, 当 $h \in (2, +\infty)$ 时, $f'(h) > 0$, 所以 $f(h)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(h)_{\min} = f(2) = 12$, 则 PA 的最小值为 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. 故选 A.

方法二: 因为 $\frac{16}{h} + h^2 = \frac{8}{h} + \frac{8}{h} + h^2 \geq 3\sqrt[3]{\frac{8}{h} \cdot \frac{8}{h} \cdot h^2} = 12$, 当且仅当 $\frac{8}{h} = h^2$, 即 $h = 2$ 时取最小值, 则 PA 的最小值为 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. 故选 A.

14. BCD 突破点 ▶ 圆台的体积、椭圆的离心率

【解析】如图, 设圆台上底面半径为 r , 则下底面半径为 $2r$, 由题意得 $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{h}{r} = \frac{2}{r} = \sqrt{3}$, 则 $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 即圆台的上底面半径 $r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 故 A 错误;



圆台的体积 $V = \frac{\pi h}{3} [r^2 + (2r)^2 + r \cdot 2r] = \frac{2\pi}{3} \times \left(\frac{4}{3} + \frac{16}{3} + \frac{8}{3} \right) = \frac{56\pi}{9}$, 故 B 正确;

因为圆台的母线长 $l = 2r$, $\angle A_1AO = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle A_1AO$ 为等边三角形, 所以 $OA = OA_1$, 所以该圆台外接球的球心就是下底面圆心 O , 所以该圆台外接球半径 $R = 2r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 所以其外接球的表面积

$S = 4\pi R^2 = 4\pi \times \frac{16}{3} = \frac{64}{3}\pi$, 故 C 正确;

用平面截该圆台, 若所截图形为椭圆, 则离心率最大时, 截面可以是过点 A_1 , E 的截面, 截面为椭圆, 设椭圆的长轴长为 $2a$, 短轴长为 $2b$, 此时该椭圆中, $2a = A_1E = 4 \Rightarrow a = 2$, 因为圆台中截面半径 $R_0 = r + \frac{r}{2} = \sqrt{3}$, 所以椭圆中 $b =$

$\sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, 所以 $e^2 = 1 -$

$\frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{8}{12} = \frac{1}{3}$, 所以 $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 又 $0 < e < 1$,

所以椭圆离心率的取值范围为 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$, 故 D 正确.

故选 BCD.

15. ACD 考查点 ▶ 棱柱、棱锥的体积

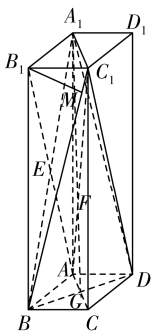
【解析】记平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V , 则 $V = 6$. 对于 A, 由平行六



面体的性质,得 $A_1B \parallel$ 平面 D_1DCC_1 , 故点 P 到平面 D_1DCC_1 的距离等于点 B 到平面 D_1DCC_1 的距离, 则 $V_{P-C_1CD} = V_{B-C_1CD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}V = 1$, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $V_{P-B_1D_1D} = \frac{1}{2}V_{P-B_1D_1DB}$, 底面面积固定, 点 P 在线段 A_1B 上位置不同, 高不同, 所以体积不为定值, 故 B 错误; 对于 C, 易知 $A_1B \parallel CD_1$, $A_1B \not\subset$ 平面 D_1B_1C , $D_1C \subset$ 平面 D_1B_1C , 故 $A_1B \parallel$ 平面 D_1B_1C , 点 P 到平面 D_1B_1C 的距离等于点 B 到平面 D_1B_1C 的距离, 故 $V_{P-D_1B_1C} = V_{B-D_1B_1C} = V_{D_1-BCB_1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}V = 1$, 故 C 正确; 对于 D, 因为 $A_1B \parallel CD_1$, $A_1B \not\subset$ 平面 D_1AC , $D_1C \subset$ 平面 D_1AC , 所以 $A_1B \parallel$ 平面 D_1AC , 点 P 到平面 D_1AC 的距离等于点 B 到平面 D_1AC 的距离, 故 $V_{P-D_1AC} = V_{B-D_1AC} = V_{D_1-BCA} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}V = 1$, 故 D 正确. 故选 ACD.

16. C 突破点 ▶ 锥体体积的有关计算

【解析】如图, 取 AB_1 与 A_1B 的交点为 E , 连接 AC 交 BD 于点 G , 则 $AG=GC$, 连接 A_1G , 交 AC_1 于点 F , 则三棱锥 $E-BFC_1$ 即为四面体 ABB_1C_1 与四面体 A_1C_1BD 的公共部分.



$$S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} \times AB \times BC_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{1+16} = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

连接 BF, EF, EC_1 (图略),

$$\begin{aligned} \text{因为 } \frac{AF}{FC_1} &= \frac{AG}{A_1C_1} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABF} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC_1}, \text{ 所以 } S_{\triangle BFC_1} = \frac{2}{3}S_{\triangle ABC_1} = \frac{2}{3} \times \\ \frac{3\sqrt{17}}{2} &= \sqrt{17}. \end{aligned}$$

过 B_1 作 $B_1M \perp BC_1$ 于点 M ,

因为 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 , $B_1M \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AB \perp B_1M$.

因为 $AB, BC_1 \subset$ 平面 ABC_1 , $AB \cap BC_1 = B$, 所以 $B_1M \perp$ 平面 ABC_1 .

所以 B_1M 为 B_1 到平面 ABC_1 的距离,

$$\text{其值为 } \frac{1 \times 4}{\sqrt{1+4^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}} = \frac{4\sqrt{17}}{17},$$

点 E 为 AB_1 的中点, 所以点 E 到平面



$$ABC_1 \text{ 的距离为 } \frac{1}{2} \times \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{2\sqrt{17}}{17}.$$

$$\text{所以 } V_{E-BFC_1} = \frac{1}{3} \times \sqrt{17} \times \frac{2\sqrt{17}}{17} = \frac{2}{3}.$$

故选 C.

17. 50π **考查点** ▶ 球、圆锥体积的有关计算

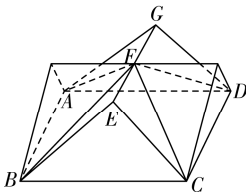
【解析】由题可得, $R^2 = 21 + (R-3)^2$, 解得 $R=5$,

$$\text{则 } V_{\text{球缺}} = \pi \times 3^2 \times 4 = 36\pi, V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi \times 21 \times 2 = 14\pi, \text{ 所以 } V_{\text{球分}} = V_{\text{球缺}} + V_{\text{圆锥}} = 50\pi.$$

18. $64+32\sqrt{2}$ **考查点** ▶ 棱柱表面积的有关计算

【解析】如图所示, 该几何体可视为两个直三棱柱 $BCE-ADG$ 挖去一个四棱锥 $F-ABCD$,

且四棱锥 $F-ABCD$ 为正四棱锥, 其斜高长为 $EC=4$. 由题意可知 $BC=4\sqrt{2}$, 故 $CD=4\sqrt{2}$,



故两个直三棱柱的表面积之和为 $2 \times \left[2 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 + (8+4\sqrt{2}) \times 4\sqrt{2} \right] = 64\sqrt{2} + 96$, 两者有公共侧面 $ABCD$, 其面积为 $4\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 32$, 而四棱锥 $F-ABCD$ 的侧面积为 $4 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 32\sqrt{2}$,

故该几何体的表面积为 $96 + 64\sqrt{2} - 32 - 32\sqrt{2} = 64 + 32\sqrt{2}$.

易错警示

在计算组合体的表面积时, 将组合体分成几个常规几何体再去计算表面积是一种常规方法. 但是一定要注意, 单独计算常规几何体表面积时, 两个几何体重叠部分的面积会被重复计算, 所以组合体的表面积等于常规几何体的表面积的和减去重叠部分的面积.

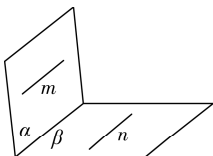
第2节 空间点、线、面的位置关系

刷

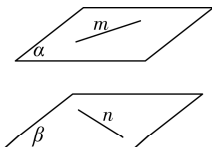
基础

1. D **考查点** ▶ 线面位置关系的判断

【解析】 $m \parallel n$ 不能推出 $\alpha \parallel \beta$, 如图①; $\alpha \parallel \beta$ 也不能推出 $m \parallel n$, 如图②. 所以“ $m \parallel n$ ”是“ $\alpha \parallel \beta$ ”的既不充分也不必要条件. 故选 D.



图①



图②

2. A **考查点** ▶ 平面的基本性质及辨析



【解析】由题设 $P \notin l$, 故存在唯一平面 β , 使得 $P \in \beta, l \subset \beta$. 设 $\alpha \cap \beta = b$, 因为 $l \parallel$ 平面 $\alpha, b \subset \beta$, 所以 $l \parallel b$, 而 $b \subset \alpha$, 故存在一条直线 b 与 l 平行, 若还有另一条直线 $c \parallel l$, 则 $b \parallel c$, 而 $P \in c, P \in b$, 矛盾, 故有且只有 1 条过点 P 且平行于直线 l 的直线, 且在平面 α 内, 故选 A.

3. D 考查点 ▶ 线面、线线位置关系的判断

【解析】 $\alpha \cap \beta = a, b \subset \alpha$, 则 a, b 可能平行也可能相交, 故 A 不正确;

$\alpha \cap \beta = a, a \parallel b$, 则可能 $b \parallel \alpha$ 且 $b \parallel \beta$, 也可能 b 在平面 α 或平面 β 内, 故 B 不正确;

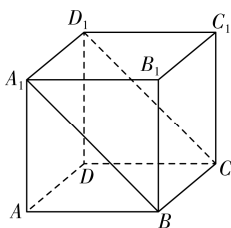
$a \parallel \beta, b \parallel \beta$, 则 a, b 可能平行、相交或异面, 故 C 不正确;

选项 D 为面面平行的性质定理的符号语言, 故 D 正确.

故选 D.

4. C 考查点 ▶ 面面位置关系的判断

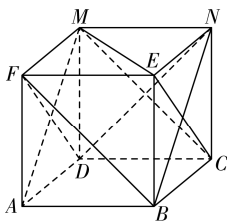
【解析】若 $l \parallel \alpha, m \parallel \alpha$, 且 $l, m \subset \beta$, 则 $\alpha \parallel \beta$ 或 α 与 β 相交, 故 A 错误; 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 取 A_1A 为 l , AD 为 m , 平面 $ABCD$ 为 α , 平面 BCC_1B_1 为 β , 符合题意, 但 $\alpha \perp \beta$, 故 B 错误;



因为 $l \perp \alpha, m \perp \beta$, 所以直线 l 的方向向量是平面 α 的法向量, 直线 m 的方向向量是平面 β 的法向量, 又 $l \perp m$, 所以两直线的方向向量垂直, 即两平面的法向量垂直, 所以 $\alpha \perp \beta$, 故 C 正确; 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 取 A_1A 为 l , AD 为 m , 平面 BCC_1B_1 为 α , 平面 A_1D_1CB 为 β , 此时符合题设, 但 α 与 β 不垂直, 故 D 错误. 故选 C.

5. ABC 考查点 ▶ 线线位置关系的判断

【解析】还原正方体, 画出正方体 $FENM-ABCD$ 的直观图, 如图所示, 由图可知, AM 与 DF 是相交直线, 故 D 错误; 设正方体的棱长为 a , 则 $CE = ME = \sqrt{2}a$, 故 C 正确; 由正方体的性质可得 AB 与 MN 平行且相等, 所以四边形 $ABNM$ 是平行四边形, 可得 $AM \parallel BN$, 故 A 正确; 连接 CM , 由正方体的性质可得 BC 与 MF 平行且相等, 所以四边形 $BCMF$ 是平行四边形, 可得 $CM \parallel BF$, 在正方形 $CDMN$ 中, $CM \perp DN$, 所以 $BF \perp DN$, 故 B 正确. 故选 ABC.

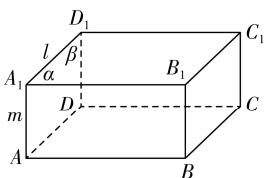


6. D 考查点 ▶ 线面位置关系的判断

【解析】由直线与平面垂直的定义可知

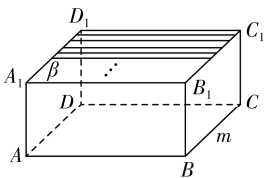


“ m 与 β 内所有的直线都垂直”是“ $m \perp \beta$ ”的充要条件,选项 A 错误;根据面面垂直的性质定理,缺少条件 $m \subset \alpha$,如图①,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,设平面 $A_1B_1C_1D_1$ 为平面 α ,平面 A_1ADD_1 为平面 β ,直线 AA_1 为 m ,则 $\alpha \cap \beta = A_1D_1 = l$,满足 $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, m \perp l$,但 $m \subset \beta$,不与平面 β 垂直,故不能推出 $m \perp \beta$,故条件“ $\alpha \perp \beta, \alpha \cap \beta = l, m \perp l$ ”不是“ $m \perp \beta$ ”的充分不必要条件,选项 B 错误;



图①

如图②,在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,设平面 $A_1B_1C_1D_1$ 为平面 β ,直线 BC 为 m ,则直线 m 与平面 β 内无数条与 B_1C_1 垂直的直线都垂直,但 $m \parallel \beta$,故由 m 与 β 内无数条直线垂直不能推出 $m \perp \beta$,所以不是 $m \perp \beta$ 的充分不必要条件,选项 C 错误;



图②

由 $l \perp \alpha, l \perp \beta$,得 $\alpha \parallel \beta$,因为 $m \perp \alpha$,所以 $m \perp \beta$.反之,由 $m \perp \beta$ 推不出 $l \perp \alpha, l \perp \beta, m \perp \alpha$,所以“ $l \perp \alpha, l \perp \beta, m \perp \alpha$ ”是“ $m \perp \beta$ ”的一个充分不必要条件,选项 D 正确.

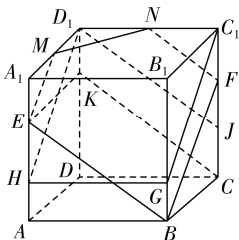
故选 D.

7. B 突破点 ▶ 点共面问题

【解析】如图,取 D_1C_1 的中点 N , D_1A_1 的中点 M ,连接 MN, NF, ME, BE, BF ,则五边形 $BEMNF$ 为过点 B, E, F 的截面,取 CF 的中点 J ,线段 DD_1 靠近 D_1 的三等分点 K ,连接 D_1J, CK, EK ,则 $NF \parallel D_1J$,又 $CJ \parallel D_1K$ 且 $CJ = D_1K$,所以四边形 CJD_1K 为平行四边形,所以 $CK \parallel D_1J$,则 $NF \parallel CK$,又 $EK \parallel BC$ 且 $EK = BC$,所以四边形 $EKCB$ 为平行四边形,所以 $EB \parallel CK$,则 $NF \parallel BE$,所以 N, F, B, E 四点共面. 分别取线段 BB_1, AA_1 靠近 B, A 的三等分点 G, H ,连接 C_1G, GH, D_1H ,同理可证 $BF \parallel C_1G, D_1H \parallel C_1G, D_1H \parallel EM$,所以 $BF \parallel EM$,所以 B, F, M, E 四点共面,所以 N, F, B, E, M 五点共面. 又 $NF = ME = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, $BE = BF = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$, $MN = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$,所以所求截面的周长为



$6\sqrt{13}+3\sqrt{2}$. 故选 B.



8. C 考查点 ▶ 线面、面面位置关系的判断

【解析】①若 $m \perp \alpha, m \subset \beta$, 则由面面垂直的判定定理得 $\alpha \perp \beta$, 故①正确;

②若 $m \perp n, m \perp \alpha$, 则 $n \parallel \alpha$ 或 $n \subset \alpha$, 故②错误;

③若 $m \parallel \alpha, \alpha \perp \beta$, 则 m 与 β 可能相交、平行或 $m \subset \beta$, 故③错误;

④若 $\alpha \cap \beta = m, n \parallel m$, 且 $n \not\subset \alpha, n \not\subset \beta$, 则由线面平行的判定定理得 $n \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 故④正确. 故选 C.

易错警示

对于命题②, 易错之处在于忽视 $n \subset \alpha$ 的情况, 对于命题③, 易错之处在于 m 与 β 可能相交、平行或 $m \subset \beta$.

第3节 直线、平面平行的判定与性质

刷

基础

1. A 考查点 ▶ 线面平行的判定定理、线面平行的性质、充要条件的证明

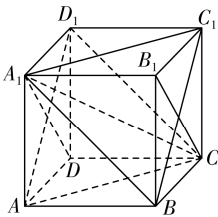
【解析】因为 $CD \parallel EF, CD \not\subset$ 平面 $BEF, EF \subset$ 平面 BEF , 所以 $CD \parallel$ 平面 BEF .

由 $CD \parallel$ 平面 $BEF, CD \subset$ 平面 PCD , 平面 $PCD \cap$ 平面 $BEF = EF$, 得 $CD \parallel EF$.

故“ $CD \parallel EF$ ”是“ $CD \parallel$ 平面 BEF ”的充要条件. 故选 A.

2. D 考查点 ▶ 线面平行、线线平行的判定

【解析】因为点 $B \in$ 平面 $A_1BC_1 \cap$ 平面 $ABCD$, 所以 $B \in l$. 又因为直线 $A_1C_1 \parallel$ 平面 $ABCD, A_1C_1 \subset$ 平面 A_1BC_1 , 所以 $A_1C_1 \parallel l$, 所以 l 是过点 B 且平行于 A_1C_1 的直线. 对于 A, 因为 $A_1C_1 \parallel l, A_1C_1 \parallel AC$, 所以 $l \parallel AC$, 故 $l \parallel CD$ 不成立, 故 A 错误; 对于 B, 因为 $l \parallel AC$, 而 $AC \cap A_1C = C$, 故 $l \parallel A_1C$ 不成立, 故 B 错误; 对于 C, 因为 $l \parallel AC, AC \cap$ 平面 $A_1B_1CD = C$, 所以 $l \parallel$ 平面 A_1B_1CD 不成立, 故 C 错误; 对于 D, 因为 $l \parallel AC$, 又 $AC \subset$ 平面 $ACD_1, l \not\subset$ 平面 ACD_1 , 所以 $l \parallel$ 平面 ACD_1 , 故 D 正确. 故选 D.

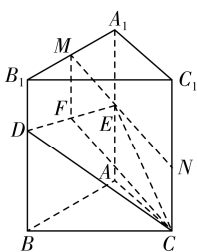


3. B 考查点 ▶ 依据线面平行的性质定理推导线段的比例关系

【解析】如图所示, 在平面 ABB_1A_1 内, 作



$MF \parallel AA_1$, 与 DE 交于点 F , 连接 CF , 则 $MF \parallel CC_1$, 所以 MF, CC_1 共面, 因为 $MN \parallel$ 平面 CDE , 平面 $MNCF \cap$ 平面 $CDE = CF$, $MN \subset$ 平面 $MNCF$, 由线面平行的性质知 $MN \parallel CF$, 所以四边形 $MFCN$ 是平行四边形, 所以 $MF = CN$. 又 M 是 A_1B_1 的中点, 所以 MF 是梯形 A_1B_1DE 的中位线, 设 $AA_1 = 6$, 则 $MF = \frac{A_1E + B_1D}{2} = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$, 即 $CN = \frac{5}{2}$, 所以 $C_1N = 6 - \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$, 所以 $\frac{C_1N}{CN} = \frac{7}{5}$. 故选 B.



4. C 考查点 ▶ 台体体积的有关计算、线面平行的性质

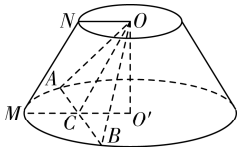
【解析】记圆台下底面圆心为 O' , 连接 $O'M$, 记 $MO' \cap AB = C$, 连接 ON, OO', OC , 显然 $ON \parallel O'M$.

因为平面 $OO'MN \cap$ 平面 $OAB = OC$, $MN \parallel$ 平面 OAB , $MN \subset$ 平面 $OO'MN$, 所以 $MN \parallel OC$,

则四边形 $OCMN$ 为平行四边形, $OC = MN = 2r$, $CM = ON = r = \frac{1}{2}R = O'C$.

在 $\triangle OO'C$ 中, $OO' \perp O'C$, $\angle COO' = 30^\circ$, 在圆 O' 中, 当且仅当 $AB \perp O'M$ 时, AB 取

最小值 6, 由 $3 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2}$, 解得 $R = 2\sqrt{3}$, 因此 $r = \sqrt{3}$, 圆台的高 $h = OO' = R \cos 30^\circ = 3$, 所以该圆台的体积 $V = \frac{1}{3}\pi(r^2 + rR + R^2)h = \frac{1}{3}\pi(3 + 6 + 12) \times 3 = 21\pi$. 故选 C.



5. 考查点 ▶ 线面平行的性质、截面问题、几何体的体积

【解】(1) 如图, 连接 CQ , 与 BC_1 交于点 H , 连接 HM . 因为 $AQ \parallel$ 平面 C_1BM , 平面 $AQC \cap$ 平面 $C_1BM = HM$, $AQ \subset$ 平面 AQC , 所以 $AQ \parallel HM$. 因为 $QB \parallel C_1C$, 所以在 $\triangle BQH$ 和 $\triangle HCC_1$ 中, 由平行线分线段成

比例定理, 可得 $\frac{QH}{HC} = \frac{QB}{C_1C} = \frac{1}{2}$. 因为 $AQ \parallel HM$, 所以 $\frac{AM}{MC} = \frac{QH}{HC} = \frac{1}{2}$.

(2) 如图, 在 BC 上取一点 S , 使 $BS = \frac{1}{3}BC$, 连接 MS, B_1S , 因为 $MS \parallel AB \parallel$

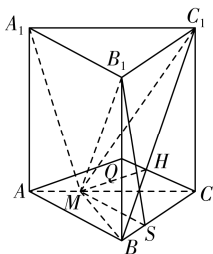
A_1B_1 , 所以四边形 MSB_1A_1 即为过 A_1, B_1, M 三点的截面. 设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面积为 S_0 , 高为 h , 体积为 V , 则 $V = S_0h$. 因为 $MS \parallel AB$, 且 $BS = \frac{1}{3}BC$, 所以

$\triangle MSC \sim \triangle ABC$, 相似比为 $\frac{2}{3}$, 根据相似三角形面积比等于相似比的平方, 可得 $\triangle MSC$ 的面积为 $\frac{4}{9}S_0$. 对于三棱台

$A_1B_1C_1-MSB_1A_1$, 根据体积公式 $V_2 = \frac{1}{3}h \times \left(S_0 + \frac{4}{9}S_0 + \sqrt{S_0 \times \frac{4}{9}S_0} \right) = \frac{1}{3}h \left(S_0 + \frac{4}{9}S_0 + \frac{2}{3}S_0 \right) = \frac{19}{27}S_0h$. 因为 $V_1 = V - V_2$,

$V = S_0h$, $V_2 = \frac{19}{27}S_0h$, 所以 $V_1 = S_0h -$

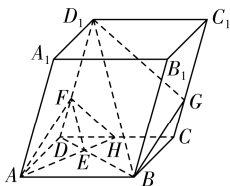
$$\frac{19}{27}S_0h = \frac{8}{27}S_0h, \text{ 则 } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{8}{27}S_0h}{\frac{19}{27}S_0h} = \frac{8}{19}.$$



6. B 考查点 ▶ 面面平行的性质

【解析】如图, 延长 AE 交 CD 于点 H , 连接 FH , 则 $\triangle DEH \sim \triangle BEA$, 因为 $\frac{DE}{DB} = \frac{1}{3}$,

所以 $\frac{DH}{AB} = \frac{DE}{EB} = \frac{1}{2}$, 因为平面 $AEF \parallel$ 平面 BD_1G , 平面 $AEF \cap$ 平面 $CDD_1C_1 = FH$,



平面 $BD_1G \cap$ 平面 $CDD_1C_1 = D_1G$, 所以 $FH \parallel D_1G$. 又四边形 CDD_1C_1 为平行四边

形, 所以 $\triangle DFH \sim \triangle C_1GD_1$, 所以 $\frac{DF}{C_1G} = \frac{DH}{C_1D_1}$, 因为 $\frac{DH}{C_1D_1} = \frac{DH}{AB} = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{DF}{C_1G} = \frac{1}{2}$, 因为 $\frac{DF}{DD_1} = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{DF}{FD_1} = \frac{1}{2}$, 所以

$FD_1 = C_1G$, $DF = CG$, 所以 $\frac{CG}{CC_1} = \frac{1}{3}$. 故

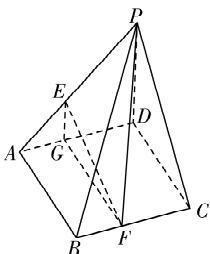
选 B.

7. BD 考查点 ▶ 线面平行、面面平行的判定与性质

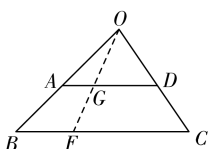
【解析】如图①, 过点 E 作 $EG \parallel PD$, 交 AD 于点 G , 连接 GF , 因为 $EG \not\subset$ 平面 PCD , $PD \subset$ 平面 PCD , 所以 $EG \parallel$ 平面 PCD .

易知 $\triangle AEG \sim \triangle APD$, 所以 $\frac{AG}{GD} = \frac{AE}{EP} = \frac{BF}{FC}$.

若 $AB \parallel CD$, 则 $GF \parallel CD$, 又 $GF \not\subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD , 所以 $GF \parallel$ 平面 PCD , 由 $EG \cap GF = G$, $EG, GF \subset$ 平面 EGF , 得平面 $EGF \parallel$ 平面 PCD , 又 $EF \subset$ 平面 EGF , 所以 $EF \parallel$ 平面 PCD , 故 B 正确.



图①



图②

若 $CD \parallel$ 平面 PAB , 因为平面 $ABCD \cap$ 平面 $PAB = AB$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $CD \parallel AB$, 由 B 分析可知 D 正确.

假设 $EF \parallel$ 平面 PCD , 连接 PF . 设平面 $EFP \cap CD = H$, 则 $EF \parallel PH$,

若 $BC \parallel$ 平面 PAD , 因为平面 $ABCD \cap$ 平面 $PAD = AD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BC \parallel AD$,

反之若 $BC \parallel AD$, 当且仅当 $BC \parallel$ 平面 PAD 时, A, C 同时正确或错误;

若 $BC \parallel AD$, 可能 $AB \parallel CD$, 也可能 AB 与 CD 相交,

若 AB 与 CD 相交, 由 $\frac{AG}{GD} = \frac{BF}{FC}$ 知延长 FG

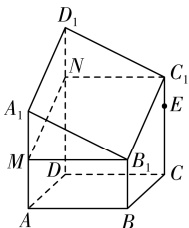
必与 AB, CD 交于同一点 O , 如图②,

由几何关系知 EF 与 PH 不平行, 故 A, C 错误.

故选 BD.

8. BCD 突破点 ▶ 面面平行的性质定理、多面体与球内切外接问题、球的表面积的计算

【解析】如图①, 取 AA_1 的中点 M , 取线段 DD_1 上靠近 D_1 的三等分点 N , 连接 B_1M, MN, NC_1 ,



图①

易知四边形 NMB_1C_1 为平行四边形, 四边形 NMA_1D_1 为平行四边形,

所以 $MN \parallel A_1D_1$, $MN \parallel B_1C_1$, 则 $B_1C_1 \parallel A_1D_1$, 所以 A_1, B_1, C_1, D_1 四点共面, 故 A 错误;

由对称性知, 此几何体的体积是底面边长为 2 的正方形, 高为 4 的长方体体积

的一半, 所以 $V = 2 \times 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$, 故 B

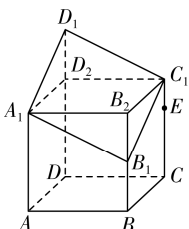
正确;

过 A_1, C_1, B, D 四点构造正方体 $ABCD -$

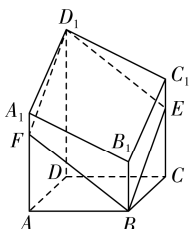


$A_1B_2C_1D_2$ (如图②),

所以外接球的直径为正方体 $ABCD - A_1B_2C_1D_2$ 的体对角线, 设外接球的半径为 R , 所以 $2R = 2\sqrt{3}$, 则 $R = \sqrt{3}$, 所以过 A_1, C_1, B, D 四点的外接球的表面积为 $4\pi R^2 = 12\pi$, 故 C 正确;



图②



图③

如图③, 由题意知, 平面 $ADD_1A_1 \parallel$ 平面 BCC_1B_1 , 平面 $ADD_1A_1 \cap$ 平面 $BED_1 = D_1F$, 平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $BED_1 = BE$,

所以 $D_1F \parallel BE$, 同理可得 $BF \parallel D_1E$,

所以四边形 BED_1F 为平行四边形, 则周长 $C = 2(BE + ED_1)$,

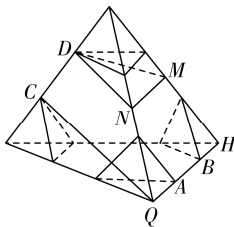
将梯形 BCC_1B_1 与梯形 CDD_1C_1 置于同一平面内, 当 B, E, D_1 三点共线时, $BE + ED_1$ 的长度最小, 最小值为 5, 所以周长的最小值为 10, 故 D 正确.

故选 BCD.

9. $3+2\sqrt{7}$ 突破点 ▶ 线面平行、面面平行的判定

【解析】如图, 补全正四面体, 连接 CQ , 取 N, M 分别为大正四面体棱的中点, 连接 DN, NM, DM , 由于 C, D, A, B 均为大四面体的棱的三等分点, 故 $DN \parallel CQ, NM \parallel AB$. 又 $CQ \subset$ 平面 $ABC, AB \subset$ 平面 $ABC, DN \not\subset$ 平面 $ABC, NM \not\subset$ 平面 ABC , 故 $DN \parallel$ 平面 $ABC, NM \parallel$ 平面 ABC , 且 $DN \cap NM = N, DN, NM \subset$ 平面 DNM , 故平面 $DNM \parallel$ 平面 ABC , 由于 $PD \parallel$ 平面 ABC , 因此 $P \in$ 平面 DNM , 故 P 点的轨迹为线段 DN, NM, DM ,

由于 $DN = DM = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{7}, MN = 3$, 所以 P 点的轨迹长度为 $DN + NM + DM = 3 + 2\sqrt{7}$.



10. 考查点 ▶ 锥体体积的有关计算、面面平行的判定与性质

(1) 【证明】如图, 连接 ME, CE, AC .

因为 M, E 分别为 PA, PD 的中点, 所以

$$ME \parallel AD, ME = \frac{1}{2}AD.$$

因为 $BC \parallel AD, BC = \frac{1}{2}AD$, 所以 $ME \parallel BC, ME = BC$,

所以四边形 $BCME$ 是平行四边形, 所以



$CE \parallel BM$.

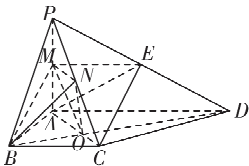
因为 $CE \not\subset$ 平面 BMN , $BM \subset$ 平面 BMN ,
所以 $CE \parallel$ 平面 BMN ,

又因为 M, N 分别为 PA, PC 的中点, 所以
所以 $MN \parallel AC$,

因为 $AC \not\subset$ 平面 BMN , $MN \subset$ 平面 BMN ,
所以 $AC \parallel$ 平面 BMN ,

因为 $CE \cap AC = C$, $CE, AC \subset$ 平面 ACE ,
所以平面 $ACE \parallel$ 平面 BMN ,

因为 $AE \subset$ 平面 ACE , 所以 $AE \parallel$ 平面 BMN .



(2) 【解】如图, 连接 BD , 设 $AC \cap BD = O$, 因为 $BC \parallel AD$, 所以 $\triangle AOD \sim \triangle COB$,

$$\text{则 } \frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2},$$

所以 $BO = \frac{1}{3}BD$, 所以 $V_{D-BMN} = 3V_{O-BMN}$.

由(1)知, $AC \parallel$ 平面 BMN , 所以 $V_{O-BMN} = V_{A-BNM} = V_{N-ABM}$,

因为 N 为 PC 的中点, 所以 $V_{N-ABM} = \frac{1}{2}V_{C-ABM}$, 则 $V_{D-BMN} = 3V_{O-BMN} = \frac{3}{2}V_{C-ABM}$,

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp BC$,

因为 $BC \parallel AD$, $AB \perp AD$, 所以 $BC \perp AB$,

因为 $AB \cap PA = A$, $AB, PA \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp$ 平面 PAB ,

即 BC 为三棱锥 $C-ABM$ 的高.

$$\begin{aligned} \text{所以 } V_{C-ABM} &= \frac{1}{3}S_{\triangle ABM} \cdot BC = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times \\ &2 \times 1 = \frac{2}{3}, \text{ 故 } V_{D-BMA} = \frac{3}{2}V_{C-ABM} = \frac{3}{2} \times \\ &\frac{2}{3} = 1. \end{aligned}$$

刷

提分

1. D 考查点 ▶ 面面平行的判定和性质的应用

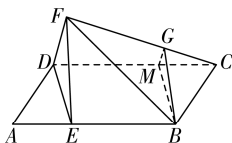
【解析】若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \cap \beta = l$, 当 $a \parallel l, b \parallel l$ 时, 则 $a \parallel b$, 所以 a, b 不一定是异面直线, 故 A 错误; 若 $a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \parallel \beta, b \parallel \beta$, 当 $\alpha \cap \beta = l$ 时, $a \parallel b \parallel l$ 也满足题意, 不一定有 $\alpha \parallel \beta$, 故 B 错误; 若 $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \parallel \beta$, 则 $a \parallel b$ 或 a, b 为异面直线, 故 C 错误; 若 $a \perp \alpha, b \perp \beta, \alpha \parallel \beta$, 则根据线面垂直的性质可得 $a \perp \beta, a \parallel b$, 故 D 正确. 故选 D.

2. C 考查点 ▶ 线面平行、面面平行的判定定理和性质定理的应用

【解析】如图, 过点 B 作 $BM \parallel DE$ 交 CD 于点 M , 连接 MG , 则四边形 $BEDM$ 是平行四边形, $DM = 2\sqrt{2}, CM = \sqrt{2}$, 由 $BM \parallel DE, DE \subset$ 平面 $FDE, BM \not\subset$ 平面 FDE , 可得 $BM \parallel$ 平面 FDE . 又 $BG \parallel$ 平面 FDE ,



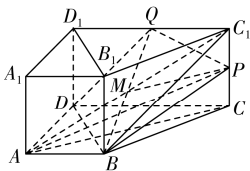
$BM \cap BG = B, BM, BG \subset \text{平面 } BGM$, 所以平面 $FDE \parallel \text{平面 } BMG$. 又平面 $FDE \cap \text{平面 } FDC = FD$, 平面 $BMG \cap \text{平面 } FDC = MG$, 所以 $MG \parallel FD$, 因此 $\frac{CG}{CF} = \frac{CM}{CD} = \frac{1}{3}$. 故选 C.

**一题多解**

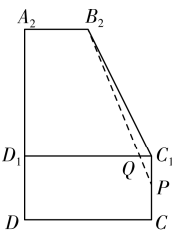
延长 CB 交 DE 的延长线于点 H , 连接 FH (图略), 则 $AD \parallel CH$, 因此 $\frac{AD}{BH} = \frac{AE}{EB} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{CB}{CH} = \frac{AD}{CH} = \frac{1}{3}$, 因为 $BG \parallel \text{平面 } FDE, BG \subset \text{平面 } CFH$, 平面 $CFH \cap \text{平面 } FDE = FH$, 所以 $BG \parallel FH$, 因此 $\frac{CG}{CF} = \frac{CB}{CH} = \frac{1}{3}$.

3. ACD 突破点 ▶ 线面平行的判断、周长和体积的相关运算

【解析】如图①, 连接 AQ, C_1B, AC_1 , 当 Q 为 C_1D_1 的中点时, $QC_1 = \frac{1}{2}D_1C_1$, 因为 $CD = C_1D_1 = 2, CD \parallel C_1D_1, AB \parallel CD, AB = 1$, 所以 $AB = QC_1 = 1, AB \parallel QC_1$, 所以四边形 ABC_1Q 为平行四边形, 所以 AC_1 与 BQ 互相平分, 设 AC_1 与 BQ 交于点 M , 连接 PM, AC , 因为 P 是棱 CC_1 的中点, 所以 $PM \parallel AC$, 因为 $AC \not\subset \text{平面 } BPQ, PM \subset \text{平面 } BPQ$, 所以 $AC \parallel \text{平面 } BPQ$, 故 A 正确;



图①



图②

连接 B_1D_1, BD, DQ , 易知 $B_1D_1 \parallel BD$, 又 $D \notin \text{平面 } BPQ, BD$ 与平面 BPQ 只能相交, 所以 B_1D_1 与平面 BPQ 只能相交, 故 B 错误; 连接 AD_1 (图略), $BP =$

$\sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$, 把四边形 ABC_1D_1 沿 C_1D_1 展开与 CDD_1C_1 在同一平面, 如图②,

则当 B_2, P, Q 三点共线时, $B_2Q + PQ$ 有最小值, 在直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD, AD \perp DC, BC = CD = 2, AB = 1$, 则 $AD =$

$\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, 所以 $AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} =$

$\sqrt{3+1} = 2$, 所以 $B_2P = \sqrt{1^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} =$

$\frac{\sqrt{29}}{2}$, 所以 $\triangle BPQ$ 周长的最小值为

$\frac{\sqrt{17} + \sqrt{29}}{2}$, 故 C 正确;

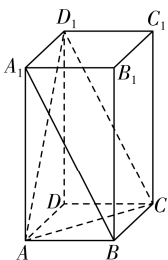


$V_{A-BPQ} = V_{Q-ABP}$, 因为 $CD \parallel C_1D_1$, $AB \parallel CD$, 所以 $AB \parallel C_1D_1$, 因为 $D_1C_1 \not\subset$ 平面 ABP , $AB \subset$ 平面 ABP , 所以 $C_1D_1 \parallel$ 平面 ABP , 故 Q 到平面 ABP 的距离为定值, 因为 $S_{\triangle ABP}$ 也为定值, 所以 V_{A-BPQ} 为定值, 故 D 正确. 故选 ACD.

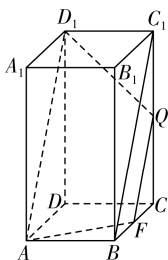
4. ABC **突破点** ▶ 判断长方体的截面形状、由面面平行证明线线平行、求异面直线所成的角

【解析】 连接 CD_1, AC , 如图①所示, 因为 $A_1D_1 \parallel BC$ 且 $A_1D_1 = BC$, 所以四边形 A_1BCD_1 为平行四边形, 所以 $CD_1 \parallel A_1B$, 所以 AD_1 与 A_1B 所成的角为 $\angle AD_1C$ 或其补角. 在 $\triangle ACD_1$ 中, $AD_1 = \sqrt{AD^2 + DD_1^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, 同理可得 $AC = 2\sqrt{2}$, $CD_1 = 2\sqrt{5}$, 由余弦定理可得 $\cos \angle AD_1C = \frac{AD_1^2 + CD_1^2 - AC^2}{2AD_1 \cdot CD_1} = \frac{20 + 20 - 8}{2 \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$,

所以异面直线 AD_1 与 A_1B 所成角的余弦值为 $\frac{4}{5}$, 故 A 正确;



图①



图②

连接 BC_1, AD_1, D_1Q , 如图②.

当 $CQ = 2$ 时, Q 为 CC_1 的中点, 因为 F, Q 分别为 BC, CC_1 的中点, 所以 $FQ \parallel BC_1$, 且 $FQ = \frac{1}{2}BC_1$.

因为 $AB \parallel C_1D_1$ 且 $AB = C_1D_1$, 所以四边形 ABC_1D_1 为平行四边形,

所以 $AD_1 \parallel BC_1$, 且 $AD_1 = BC_1$, 所以 $FQ \parallel AD_1$ 且 $FQ = \frac{1}{2}AD_1$, 所以 A, F, Q, D_1 四点共面,

所以当 $CQ = 2$ 时, 过点 A, F, Q 的截面是梯形, 故 B 正确.

当 $CQ = 3$ 时, 设平面 AFQ 交直线 A_1D_1 于点 G , 连接 AG , 如图③,

因为平面 $AA_1D_1D \parallel$ 平面 BB_1C_1C , 平面 $AFQ \cap$ 平面 $BB_1C_1C = FQ$,

平面 $AFQ \cap$ 平面 $AA_1D_1D = AG$, 所以 $FQ \parallel AG$. 因为 $AA_1 \parallel CQ$, 由等角定理结合图形可知, $\angle A_1AG = \angle CQF$,

所以 $\tan \angle A_1AG = \tan \angle CQF$, 即 $\frac{A_1G}{AA_1} = \frac{CF}{CQ}$,

可得 $A_1G = \frac{AA_1 \cdot CF}{CQ} = \frac{4 \times 1}{3} = \frac{4}{3}$.

设平面 AFQ 交直线 C_1D_1 于点 H , 连接 GH, HQ ,

因为平面 $ABCD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 平面

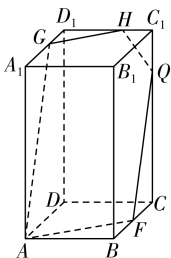


$AFQ \cap \text{平面 } ABCD = AF$,

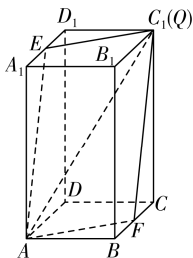
平面 $AFQ \cap \text{平面 } A_1B_1C_1D_1 = GH$, 所以 $AF \parallel GH$. 因为 $D_1H \parallel AB$, 由等角定理结合图形可得 $\angle BAF = \angle D_1HG$,

所以 $\tan \angle BAF = \tan \angle D_1HG$, 则 $\frac{D_1G}{D_1H} = \frac{BF}{AB} = \frac{1}{2}$, 且 $D_1G = A_1D_1 - A_1G = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$, 所以 $D_1H = 2D_1G = \frac{4}{3}$,

故当 $CQ = 3$ 时, 过点 A, F, Q 的截面是五边形, 故 C 正确.



图③



图④

当 $CQ = 4$ 时, 点 Q 与点 C_1 重合, 设平面 AFC_1 交棱 A_1D_1 于点 E , 连接 AE, C_1E, AC_1 , 如图④,

因为平面 $ABCD \parallel \text{平面 } A_1B_1C_1D_1$, 平面 $AFC_1 \cap \text{平面 } ABCD = AF$, 平面 $AFC_1 \cap \text{平面 } A_1B_1C_1D_1 = C_1E$, 所以 $AF \parallel C_1E$, 因为 $AB \parallel C_1D_1$, 由等角定理结合图形可知, $\angle BAF = \angle D_1C_1E$,

即 $\tan \angle BAF = \tan \angle D_1C_1E$, 所以 $\frac{BF}{AB} =$

$\frac{D_1E}{C_1D_1}$, 所以 $D_1E = BF = 1$, 则点 E 为 A_1D_1

的中点,

由勾股定理可得 $C_1E = \sqrt{C_1D_1^2 + D_1E^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$,

同理可得 $AE = C_1F = \sqrt{17}$, $AF = \sqrt{5}$, 则四边形 AEC_1F 为平行四边形,

因为 $AC_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2} = 2\sqrt{6}$, 所以 $AE^2 + C_1E^2 \neq AC_1^2$,

所以 $\angle AEC_1$ 不是直角, 故四边形 AEC_1F 不是矩形,

因此, 当 $CQ = 4$ 时, 过点 A, F, Q 的截面不是矩形, 故 D 错误.

故选 ABC.

5. 突破点 ▶ 面面平行的判定定理

【解】(1) 连接 ED (图略), 因为 F 是 BP 的中点, H 是 PC 的中点, 所以 $FH \parallel BC$, 又 $BC \parallel AD$, 所以 $FH \parallel AD$,

又 $FH \not\subset \text{平面 } AEPD$, $AD \subset \text{平面 } AEPD$, 所以 $FH \parallel \text{平面 } AEPD$,

同理 $FG \parallel \text{平面 } AEPD$, 又 $FH \cap FG = F$, $FH \subset \text{平面 } FGH$, $FG \subset \text{平面 } FGH$,

所以平面 $FGH \parallel \text{平面 } ADPE$.

因为 $CD \perp AD$, $CD \perp PD$, $AD \cap PD = D$, $AD \subset \text{平面 } PDAE$, $PD \subset \text{平面 } PDAE$,

所以 $CD \perp$ 平面 $PDAE$, 则 $\angle CED$ 就是 CE 与平面 $ADPE$ 所成的角,

又平面 $FGH \parallel$ 平面 $ADPE$, 所以 $\angle CED$ 就是直线 CE 与平面 FGH 所成的角.

因为在直角梯形 $ADPE$ 中, $AD = PD = 2EA = 2$, 所以 $DE = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{5}$,

在 $Rt \triangle CDE$ 中, $CE = \sqrt{DE^2 + CD^2} = \sqrt{5+4} = 3, CD = 2$,

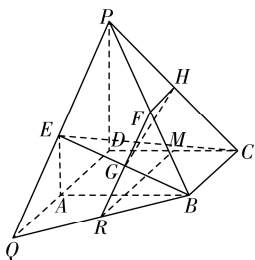
所以 $\sin \angle CED = \frac{CD}{CE} = \frac{2}{3}$,

即直线 CE 与平面 FGH 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.

(2) 延长 PE 交 DA 的延长线于点 Q , 连接 BQ , 延长 FG 与 BQ 交于点 R ,

因为 F, G 分别为 BP, BE 的中点, 所以 $FG \parallel PE$, 所以 $FR \parallel PQ$,

所以 R 是 BQ 的中点, 取 CD 的中点 M , 连接 RM , 则 RM 就是所求的直线 l .



理由如下: 由以上作图过程可知, R 是 BQ 中点, M 是 CD 中点,

所以 $RM \parallel DQ$, 即 $RM \parallel AD$, 又 $FH \parallel AD$,

所以 $RM \parallel FH$, 所以 R, M, F, H 四点共面,

所以 $R, M \in$ 平面 FGH , 又 $R, M \in$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $FGH \cap$ 平面 $ABCD = RM$,

所以 RM 就是所求的直线 l .

第4节 直线、平面垂直的判定与性质

刷基础

1. D 考查点 线面垂直的判定

【解析】由 $n \perp \alpha, l \perp n$, 得 $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$, m 与 l 可以相交、平行或异面, A 错误;

$m \subset \alpha, n \subset \alpha, l \perp m, l \perp n$, 若 $l \perp \alpha$, 则必有 m 与 n 相交, B 错误;

由 $l \perp m, m \perp \alpha$, 得 $l \parallel \alpha$ 或 $l \subset \alpha$, n 与 l 可能相交、平行或异面, C 错误;

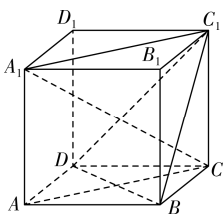
由 $l \perp \alpha, n \perp l$, 得 $n \parallel \alpha$ 或 $n \subset \alpha$, 而 $n \not\subset \alpha$, 因此 $n \parallel \alpha$, D 正确.

故选 D.

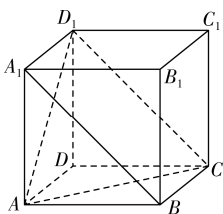
2. D 考查点 线面平行、垂直的判定

【解析】因为 $AD_1 \parallel BC_1, AD_1 \not\subset$ 平面 $C_1BD, BC_1 \subset$ 平面 C_1BD , 所以 $AD_1 \parallel$ 平面 C_1BD , 故 A 正确;

连接 A_1C_1, AC , 如图①, 易证 $BD \perp$ 平面 ACC_1A_1 , 又 $A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以 $BD \perp A_1C$, 同理可得 $C_1D \perp A_1C$, 又 $C_1D, BD \subset$ 平面 $C_1BD, C_1D \cap BD = D$, 所以 $A_1C \perp$ 平面 C_1BD , 故 B 正确;



图①



图②

连接 AD_1, CD_1 , 如图②, 由 $A_1B \parallel D_1C$, $A_1B \not\subset$ 平面 ACD_1 , $D_1C \subset$ 平面 ACD_1 , 得 $A_1B \parallel$ 平面 ACD_1 ,

所以平面 ACD_1 即为平面 α , 故 C 正确;

假设 $A_1B \perp \beta$, 因为 $AC \subset \beta$, 所以 $A_1B \perp AC$, 又 $A_1B \perp BC$, $AC, BC \subset$ 平面 $ABCD$, $AC \cap BC = C$, 所以 $A_1B \perp$ 平面 $ABCD$, 矛盾, 所以假设不成立, 故 D 错误. 故选 D.

3. B 考查点 ▶ 线面垂直的性质、棱柱的体积

【解析】 $\because CC_1 \perp$ 平面 ABC_1 , $AC_1, BC_1 \subset$ 平面 ABC_1 , $\therefore CC_1 \perp AC_1$, $CC_1 \perp BC_1$, $\because AB = BC = CA = 2$, $CC_1 = \sqrt{2}$,

$\therefore AC_1 = BC_1 = \sqrt{2}$, $\therefore \triangle AC_1B$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AC_1 \cdot BC_1 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1,$$

$$\therefore V_{\text{三棱锥}C_1-ABC} = V_{\text{三棱锥}C-ABC_1} = \frac{1}{3} CC_1 \cdot$$

$$S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times 1 = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

$$\therefore V_{\text{三棱柱}ABC-A_1B_1C_1} = 3V_{\text{三棱锥}C_1-ABC} = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}, \text{ 故选 B.}$$

4. ACD 突破点 ▶ 线面垂直的判定和性质

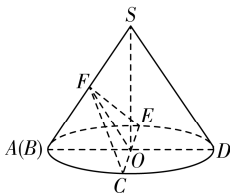
【解析】该半圆围成的圆锥侧面, 如图所示(已补全圆锥), 设底面圆圆心为 O , 连接 SO, AD, FO , 设圆锥底面半径为 r , 则 $2\pi r = 4\pi$, $\therefore r = 2$, $\therefore CE = 4$, $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 2\sqrt{3}$. $\because F$ 为线段 AS 的中点, O 为线段 AD 的中点, $\therefore FO \parallel SD$, 且 $FO = \frac{1}{2}SD = 2 = \frac{1}{2}CE$, $\therefore \angle CFE = 90^\circ$, 即

$\triangle CEF$ 为等腰直角三角形, 故选项 A 正确; 若 $SA \perp$ 平面 CEF , 而 $FO \subset$ 平面 CEF , 则 $SA \perp FO$, 在 $\text{Rt} \triangle SOA$ 中, $AO = FO = AF = 2$, $\therefore \angle OFA = 60^\circ$, 矛盾, 故选项 B 错误; $\because FO \parallel SD$, $FO \subset$ 平面 CEF , $SD \not\subset$ 平面 CEF , $\therefore SD \parallel$ 平面 CEF , 故选项 C 正确;

设点 D 到平面 CEF 的距离为 d ,

$$\therefore V_{D-CEF} = V_{F-CDE}, \text{ 即 } \frac{1}{3} \times d \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2, \text{ 解得 } d = \sqrt{3}, \text{ 即点 } D \text{ 到平面}$$

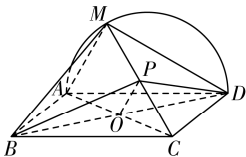
平面 CEF 的距离为 $\sqrt{3}$, 故选项 D 正确. 故选 ACD.





5. **考查点** ▶ 求异面直线所成的角、由面面垂直证线面垂直、由线面垂直证明线线垂直

(1) **【证明】**如图①,连接 AC 与 BD 交于点 O ,连接 OP ,则 O 是 AC, BD 的中点,



图①

因为 P 是 CM 的中点,所以 $OP \parallel AM$,因为 $AM \not\subset$ 平面 BDP , $OP \subset$ 平面 BDP ,所以 $AM \parallel$ 平面 BDP .

(2) **【证明】**因为矩形 $ABCD$ 所在的平面和半圆弧 AMD 所在的平面垂直,且交线为 AD ,因为 $AB \perp AD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$,所以 $AB \perp$ 平面 AMD ,

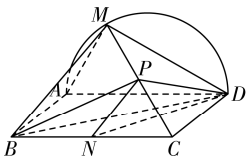
因为 $AM \subset$ 平面 AMD ,所以 $AM \perp AB$,

又 $\angle MAD = 60^\circ$, $AM \perp MD$, $AD = 4$,所以 $AM = 2$, $MD = 2\sqrt{3}$,

所以 $BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = 2\sqrt{2}$, $BD = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$,

故 $BM^2 + DM^2 = BD^2$,所以 $BM \perp DM$.

(3) **【解】**如图②,取 BC 的中点 N ,连接 NP, ND ,



图②

因为 P 为 CM 中点,所以 $NP \parallel BM$,

所以 $\angle NPD$ 即为异面直线 BM, DP 所成角或其补角,

由(2)知 $AB \perp$ 平面 AMD ,

因为 $MD \subset$ 平面 AMD ,所以 $MD \perp AB$,

由于 $AB \parallel CD$,故 $MD \perp CD$,

所以 $DP = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2}\sqrt{MD^2 + CD^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2$,

又 $ND = 2\sqrt{2}$,所以 $\cos \angle NPD = \frac{NP^2 + DP^2 - ND^2}{2NP \cdot DP} = \frac{2 + 4 - 8}{2 \times \sqrt{2} \times 2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$,

故异面直线 BM, DP 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

6. **D 考查点** ▶ 面面垂直的判定和性质

【解析】如图①,因为 $AD \parallel BC$, $AD = AB$, $\angle BAD = 90^\circ$,所以 $\angle ABD = \angle ADB = 45^\circ$,又因为 $\angle BCD = 45^\circ$, $AD \parallel BC$,所以 $\angle ADC = 135^\circ$,所以 $\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB = 135^\circ - 45^\circ = 90^\circ$,所以 $CD \perp BD$,故 B 正确;

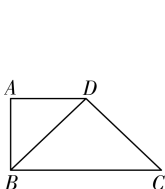
由 B 选项知 $CD \perp BD$,又因为平面 $ABD \perp$ 平面 BCD , $CD \subset$ 平面 BCD ,平面



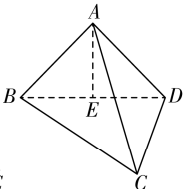
$ABD \cap \text{平面 } BCD = BD$, 所以 $CD \perp \text{平面 } ABD$, 因为 $AB \subset \text{平面 } ABD$, 所以 $CD \perp AB$, 故 A 正确;

由 A 选项分析知, $CD \perp \text{平面 } ABD$, 因为 $CD \subset \text{平面 } ADC$, 所以 $\text{平面 } ADC \perp \text{平面 } ABD$, 故 C 正确;

如图②, 过点 A 作 $AE \perp BD$, 垂足为 E, 因为 $\text{平面 } ABD \perp \text{平面 } BCD$, $AE \subset \text{平面 } ABD$, $\text{平面 } ABD \cap \text{平面 } BCD = BD$, 所以 $AE \perp \text{平面 } BCD$, 显然 $AE \not\subset \text{平面 } ABC$, 所以 $\text{平面 } ABC$ 与 $\text{平面 } BDC$ 不垂直, 故 D 错误. 故选 D.



图①



图②

7. B 考查点 ▶ 锥体体积的有关计算、面面垂直的判定与性质

【解析】分别取 AB, CD 的中点 E, F , 连接 PE, PF, EF , 则 $PE \perp AB, EF \perp AB$, 且 $PE \cap EF = E, PE, EF \subset \text{平面 } PEF$, 所以 $AB \perp \text{平面 } PEF$. 因为 $AB \subset \text{平面 } ABCD$, 所以 $\text{平面 } ABCD \perp \text{平面 } PEF$,

过点 P 作 $PO \perp EF$, 垂足为 O, 又 $\text{平面 } ABCD \cap \text{平面 } PEF = EF, OP \subset \text{平面 } PEF$, 所以 $OP \perp \text{平面 } ABCD$.

由题意可知 $PE = \sqrt{PA^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{6-1} = \sqrt{5}$, $PF = \sqrt{PC^2 - \left(\frac{1}{2}CD\right)^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$, $EF = 3$,

由余弦定理可得 $\cos \angle PFE = \frac{PF^2 + FE^2 - PE^2}{2PF \cdot FE} = \frac{2+9-5}{2 \times \sqrt{2} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

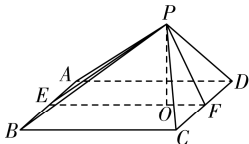
因为 $\angle PFE \in (0, \pi)$, 所以 $\angle PFE = \frac{\pi}{4}$,

故 $OF = OP = \frac{\sqrt{2}}{2}PF = 1$,

所以该四棱锥的高为 1, 则四棱锥的体积

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{四边形 } ABCD} \cdot OP = \frac{1}{3} \times 6 \times 1 = 2.$$

故选 B.



8. D 突破点 ▶ 球的截面的性质、面面垂直的判定及性质

【解析】连接 AC, BD 交于点 O, 由题意可知, 点 M 在以 O 为球心, 半径为 $\sqrt{2}$ 的球面上,

又点 M 在平面 B_1CD 上, 所以点 M 在平面 B_1CD 截球的截面圆上.

取 CD 的中点 E, AB 的中点 F, A_1B_1 的中



点 G , 连接 EF, EG, FG .

易知 $CD \perp$ 平面 EFG , 又 $CD \subset$ 平面 B_1CD , 所以平面 $B_1CD \perp$ 平面 EFG , 平面 $B_1CD \cap$ 平面 $EFG = GE$,

过点 O 作 $OO_1 \perp GE$ 于 O_1 , 又 $OO_1 \subset$ 平面 EFG , 所以 $OO_1 \perp$ 平面 B_1CD , 由 $\triangle OO_1E \sim$

$\triangle GFE$ 可得, $\frac{OO_1}{GF} = \frac{OE}{GE}$, 所以 $OO_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$,

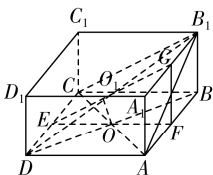
$O_1M = \sqrt{2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$, 点 M 在以 O_1

为圆心, $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 为半径的圆上.

易知 $CO_1 = \sqrt{CE^2 + EO_1^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5} = O_1M$, 所

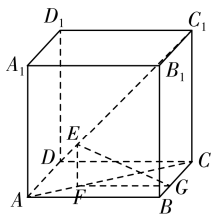
以点 C 在该圆上, 则 MC 的最大值为

$\frac{6\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.



9. ①②④ **考查点** ▶ 面面垂直的判定和性质

【解析】如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $CC_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 因为 $CC_1 \subset$ 平面 ACC_1 , 所以平面 $ACC_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 因为平面 $ACC_1 \cap$ 平面 $ABCD = AC$, $EF \subset$ 平面 ACC_1 , 且 $EF \perp AC$, 所以 $EF \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $EF \perp BC$, 又 $BC \perp FG$, $FG \cap EF = F$, $FG, EF \subset$ 平面 EFG , 所以 $BC \perp$ 平面 EFG , 故①正确;



由①分析易得 $EF \parallel CC_1$, 则有 $\frac{EF}{CC_1} = \frac{AF}{AC}$,

即得 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}AF$, 又由 $BC \perp FG, BC \perp AB$,

可得 $AB \parallel FG$, 则有 $\frac{FG}{AB} = \frac{CF}{AC}$, 即得 $FG =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}CF$, 故得 $EF + FG = \frac{\sqrt{2}}{2}AF + \frac{\sqrt{2}}{2}CF = \frac{\sqrt{2}}{2} \times$

$\sqrt{2} = 1$, 即 $EF + FG$ 为定值 1, 故②正确;

由①分析可知 $EF \perp$ 平面 $ABCD$, 因为 $FG \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $EF \perp FG$, 则

$S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2}EF \times FG \leq \frac{1}{2} \times \frac{(EF + FG)^2}{4} = \frac{1}{8}$,

当且仅当 $EF = FG = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 即当

$EF = FG = \frac{1}{2}$ 时, $\triangle EFG$ 的面积最大, 最

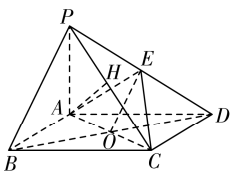
大值为 $\frac{1}{8}$, 故③错误;



由③分析知 $EF \perp FG$, 则 $EG^2 = EF^2 + FG^2 \geq \frac{(EF+FG)^2}{2} = \frac{1}{2}$, 当且仅当 $EF = FG = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 即当 $EF = FG = \frac{1}{2}$ 时, 线段 EG 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故④正确.

10. 考查点 线面垂直的判定、面面垂直的性质、点到平面的距离

【证明】(1) 如图, 在平面 PAC 内, 过点 A 作 $AH \perp PC$, 交 PC 于点 H . 因为平面 $APC \perp$ 平面 PCD , 平面 $APC \cap$ 平面 $PCD = PC$, $AH \subset$ 平面 PAC , $AH \perp PC$, 所以 $AH \perp$ 平面 PCD , 又 $CD \subset$ 平面 PCD , 所以 $AH \perp CD$. 因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $CD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp CD$, 因为 $PA \cap AH = A$, $PA, AH \subset$ 平面 PAC , 所以 $CD \perp$ 平面 PAC .



(2) **【解】**如图, 连接 BD 交 AC 于点 O , 连接 OE . 易知 OE 为 $\triangle PBD$ 的中位线, 所以 $PB \parallel OE$.

因为 $PB \not\subset$ 平面 AEC , $OE \subset$ 平面 AEC , 所以 $PB \parallel$ 平面 AEC , 所以 PB 到平面 AEC 的距离, 即为点 B 到平面 AEC 的距离. 由(1)知 $CD \perp$ 平面 PAC , 又 $AC \subset$ 平面 PAC , 所以 $CD \perp AC$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $AB \perp AC$. 因为 $AB = \frac{3}{5}BC = 3$, 所以 $AC = 4$.

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp AD$, 因为 $CD \perp$ 平面 PAC , $PC \subset$ 平面 PAC , 所以 $PC \perp CD$, 所以 $\triangle PAD, \triangle PCD$ 是直角三角形.

所以 $PD = \sqrt{PA^2 + AD^2} = \sqrt{34}$, 因为 E 是 PD 的中点, 所以 $AE = CE = \frac{1}{2}PD = \frac{\sqrt{34}}{2}$,

则 $S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{\left(\frac{\sqrt{34}}{2}\right)^2 - 2^2} = 3\sqrt{2}$, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$.

设点 B 到平面 AEC 的距离为 d , 则

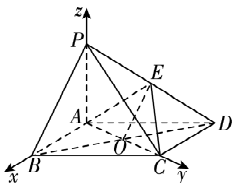
$V_{\text{三棱锥}B-AEC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACE} \cdot d = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot \frac{1}{2} PA$, 解得 $d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 即 PB 到平面 AEC 的距离为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.



一题多解

(2) (向量法) 如图, 连接 BD 交 AC 于点 O , 连接 OE . 易知 OE 为 $\triangle PBD$ 的中位线, 所以 $PB \parallel OE$.

因为 $PB \not\subset$ 平面 AEC , $OE \subset$ 平面 AEC , 所以 $PB \parallel$ 平面 AEC , 所以 PB 到平面 AEC 的距离, 即为点 B 到平面 AEC 的距离. 由 (1) 知 $CD \perp$ 平面 PAC , 又 $AC \subset$ 平面 PAC , 所以 $CD \perp AC$. 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $AB \perp AC$. 又因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 PA , AB , AC 两两垂直. 以 A 为坐标原点, AB , AC , AP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系.



则 $A(0, 0, 0)$, $B(3, 0, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $P(0, 0, 3)$, 所以 $\overrightarrow{AC} = (0, 4, 0)$, $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 3)$, $\overrightarrow{BC} = (-3, 4, 0)$,

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BC}) = \left(-\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}\right).$$

设平面 AEC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -\frac{3}{2}x + 2y + \frac{3}{2}z = 0, \\ 4y = 0, \end{cases}$$

取 $z = 1$, 则 $x = 1, y = 0$, 所以平面 AEC 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$.

则点 B 到平面 AEC 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} =$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } PB \text{ 到平面 } AEC \text{ 的距离为 } \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

刷

提分

1. D 突破点 ▶ 线面垂直的判定和性质、点到平面的距离

【解析】三棱锥 $D-ABE$ 的高即为圆柱的高, 即 $AD = 4$, 当三棱锥 $D-ABE$ 的体积最大时, 直角三角形 ABE 的面积最大, 由于 $AB = 4$, 所以当点 E 是弧 AB 的中点, 即 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形时, $\triangle ABE$ 的面积最大, 此时 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$,

$$V_{D-ABE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABE} \cdot AD = \frac{1}{3} \times 4 \times 4 = \frac{16}{3}.$$

如图, 连接 AC , 交 BD 于点 O , 所以点 O 为 AC 的中点, 所以点 C 到平面 BDE 的距离等于点 A 到平面 BDE 的距离.

设点 A 到平面 BDE 的距离为 h , 因为 $AD \perp$ 平面 ABE , $BE \subset$ 平面 ABE , 所以 $AD \perp BE$, 又 $AE \perp BE$, $AD \cap AE = A$, $AD, AE \subset$ 平面 ADE , 所以 $BE \perp$ 平面 ADE , 由于 $DE \subset$ 平面 ADE , 所以 $BE \perp DE$, $DE =$

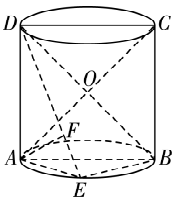
$$\sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{16 + 8} = 2\sqrt{6}, \text{ 所以}$$



$$S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{3}, \text{ 所以 } V_{D-ABE} =$$

$$V_{A-BDE} = \frac{1}{3} S_{\triangle BDE} \cdot h = \frac{16}{3}, \text{ 解得 } h = \frac{4\sqrt{3}}{3}. \text{ 故}$$

选 D.



一题多解

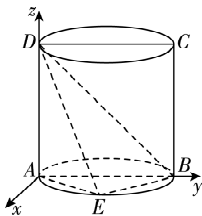
(向量法) 三棱锥 $D-ABE$

的高即为圆柱的高, 即 $AD=4$, 当三棱锥 $D-ABE$ 体积最大时, 直角三角形 ABE 的面积最大, 由于 $AB=4$, 所以当点 E 是弧 AB 的中点, 即 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形时, $\triangle ABE$ 的面积最大, 以 AB 所在直线为 y 轴, 以与 AB 垂直的直线为 x 轴, 以 AD 所在直线为 z 轴, 建立空间直角坐标系, 如图, 可得 $E(2, 2, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $D(0, 0, 4)$, $C(0, 4, 4)$, 则 $\overrightarrow{DB} = (0, 4, -4)$, $\overrightarrow{DE} = (2, 2, -4)$, $\overrightarrow{BC} = (0, 0, 4)$, 设 $\mathbf{n} = (x, y, z)$

为平面 BDE 的法向量, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{DB} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{DE} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$ 即

$$\begin{cases} 4y - 4z = 0, \\ 2x + 2y - 4z = 0, \end{cases} \text{ 令 } y = 1, \text{ 则 } z = 1, x = 1, \text{ 所以 } \mathbf{n} = (1, 1, 1), \text{ 所以点 } C \text{ 到平面 } BDE \text{ 的距离}$$

$$h = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$



2. B 突破点 ▶ 面面垂直的性质、线面、面面平行的判定和性质

【解析】 因为平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $AB \subset$ 平面 $ABCD$, $AB \perp AD$, 所以 $AB \perp$ 平面 PAD , 又因为 $AP \subset$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp AP$,

即可得 $\angle PAB = 90^\circ$, 故 A 正确;

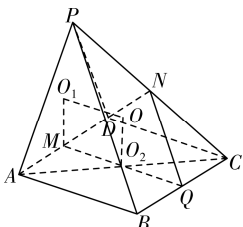
若平面 $PCD \perp$ 平面 PAB , 则两平面所成二面角为 90° , 设两平面的交线为 l , 因为 $AB \parallel CD$, $AB \not\subset$ 平面 PCD , $CD \subset$ 平面 PCD , 所以 $AB \parallel$ 平面 PCD , 又因为 l 为平面 PCD 与平面 PAB 的交线, 所以 $AB \parallel l$, 又因为 $AB \perp$ 平面 PAD , 所以 $l \perp$ 平面 PAD , 即 $\angle APD$ 就是平面 PCD 与平面 PAB 所成的二面角的平面角, 则 $\angle APD = 90^\circ$,

所以在 $\text{Rt} \triangle PAD$ 中, $PA = 3$, $AD = 4$, 所以

$$PD = \sqrt{AD^2 - AP^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}, \text{ 故 B 错误;}$$

取 BC 的中点为 Q , 连接 MQ , 则 $MQ \parallel AB$,

又因为 $MQ \not\subset$ 平面 PAB , $AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $MQ \parallel$ 平面 PAB , 连接 NQ , 又由 $NQ \parallel PB$, 同理可得 $NQ \parallel$ 平面 PAB , 又因为 $MQ \cap NQ = Q$, $MQ, NQ \subset$ 平面 MNQ , 所以平面 $MNQ \parallel$ 平面 PAB , 又因为 $MN \subset$ 平面 MNQ , 所以 $MN \parallel$ 平面 PAB , 故 C 正确;

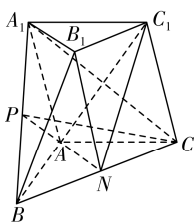


设四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心为 O , O 在平面 PAD 、平面 $ABCD$ 的射影分别为 O_1, O_2 , 且可知 O_1, O_2 分别为 $\triangle PAD$ 和四边形 $ABCD$ 的外接圆圆心, 连接 O_1M, O_1O, OO_2 , 由已知条件可知四边形 OO_1MO_2 为矩形, OA 为外接球半径, $OA^2 = OM^2 + AM^2 \geq O_2M^2 + AM^2 = 8$, 所以 $OA \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当点 O_1, M 重合时取等号, 此时 $\angle APD = 90^\circ$, $PD = \sqrt{7}$, 故 D 正确. 故选 B.

3. ABD 考查点 面面平行、线面垂直的判定和性质、多面体的体积

【解析】如图①, 取 A_1B 的中点 P , 连接 PA, PC , \because 四边形 ACC_1A_1 为菱形, $\therefore AA_1 = AC = 2$, 又 $AB = 2$, $\therefore AP \perp A_1B$, 在 $\triangle ABC$ 中, $BC^2 = 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 12$.

连接 A_1C , 在 $\triangle ACA_1$ 中, $\angle A_1AC = 120^\circ$, $A_1C^2 = 4 + 4 - 2 \times 2 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 12$, $\therefore A_1C = BC$, $\therefore CP \perp A_1B$, $\because AP, CP \subset$ 平面 ACP , $AP \cap CP = P$, $\therefore A_1B \perp$ 平面 ACP , $\because AC \subset$ 平面 ACP , $\therefore A_1B \perp AC$, 故 A 正确.



图①

如图①, 取 BC 的中点 N , 连接 B_1N, C_1N, AN , $\because B_1C_1 \parallel BC$, 且 $B_1C_1 = \frac{1}{2}BC$, $\therefore B_1C_1 \parallel CN$, $B_1C_1 = CN$, $B_1C_1 \parallel BN$, $B_1C_1 = BN$, 即四边形 B_1C_1NB 为平行四边形, 四边形 B_1C_1CN 为平行四边形, $\therefore B_1N \parallel CC_1$, $B_1N = CC_1$, $\therefore B_1N \parallel A_1A$, $B_1N = A_1A$, \therefore 四边形 ANB_1A_1 为平行四边形, $\therefore AN \parallel B_1A_1$, 又 $C_1N \parallel BB_1$, $AN \subset$ 平面 AC_1N , $B_1A_1 \not\subset$ 平面 AC_1N , $\therefore B_1A_1 \parallel$ 平面 AC_1N , 同理 $BB_1 \parallel$ 平面 AC_1N , $\therefore B_1A_1, BB_1 \subset$ 平面 A_1BB_1 , $B_1A_1 \cap$

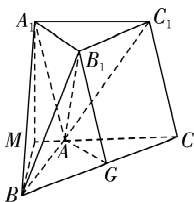


$BB_1 = B_1$, \therefore 平面 $A_1BB_1 \parallel$ 平面 AC_1N ,
 $\because AC_1 \subset$ 平面 AC_1N , $\therefore AC_1 \parallel$ 平面 A_1BB_1 ,
 故 B 正确.

如图②, 过点 A_1 作 $A_1M \perp CA$ 交 CA 的延长线于点 M , 连接 BM , $\because \angle A_1AC = \angle BAC = 120^\circ$, $AB = AA_1$, $\therefore \triangle A_1MA \cong \triangle BMA$, $\therefore BM \perp AC$, 且 $A_1M = BM = \sqrt{3}$, 又 $\because A_1B = \sqrt{6}$, $\therefore A_1M \perp BM$, 又 $A_1M \perp CA$, $BM, CA \subset$ 平面 ABC , $BM \cap CA = M$, $\therefore A_1M \perp$ 平面 ABC , 记二面角 A_1-AB-C 的平面角为 θ , $\therefore \cos \theta = \frac{S_{\text{投}}}{S_{\text{原}}} = \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle ABA_1}} =$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 故 C}$$

错误.



图②

如图②, 取 BC 的中点 G , 连接 B_1G, AG, AB_1 , 该几何体可分割为三棱柱 $A_1B_1C_1-AGC$, 三棱锥 $B-A_1AB_1$ 和三棱锥 $B-AGB_1$, 则该几何体体积 $V = V_{A_1B_1C_1-AGC} + 2V_{B-AGB_1} = V_{A_1B_1C_1-AGC} + 2V_{B_1-ABG}$, $A_1M = BM = A_1B = \sqrt{3}$, 点 A_1 到底面 ABC 的距离为

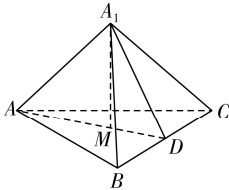
$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}, \therefore V = S_{\triangle AGC} \cdot \frac{3}{2} + 2S_{\triangle AGB} \cdot$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} + \sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}, \text{ 故 D 正}$$

确. 故选 ABD.

4. A 突破点 ▶ 证明线面垂直、由导数求函数的最值、余弦定理解三角形

【解析】由题意, $AD \perp BC, A_1D \perp BC, AD \cap A_1D = D, AD, A_1D \subset$ 平面 ADA_1 , $\therefore BC \perp$ 平面 ADA_1 , 过点 A_1 作 $A_1M \perp AD$, 垂足为 M , $\because A_1M \subset$ 平面 ADA_1 , $\therefore BC \perp A_1M$, $\because AD \cap BC = D, AD, BC \subset$ 平面 ABC , $\therefore A_1M \perp$ 平面 ABC , 即 A_1M 为三棱锥 A_1-ABC 的高.



记 $BD = a$, $\angle BAD = \theta$, 由已知易得 $AD =$

$$A_1D = \frac{a}{\tan \theta}, AA_1 = BC = 2a.$$

$$\text{由 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2a \times AD = \sqrt{3}, \text{ 得 } \frac{a^2}{\tan \theta} = \sqrt{3},$$

要使三棱锥 A_1-ABC 的体积最大, 则 A_1M 最长.



$$\therefore \cos \angle ADA_1 = \frac{AD^2 + A_1D^2 - AA_1^2}{2AD \cdot A_1D} = 1 -$$

$$2\tan^2 \theta, \sin \angle ADA_1 = \sqrt{1 - (1 - 2\tan^2 \theta)^2} = 2\sqrt{\tan^2 \theta - \tan^4 \theta}.$$

$$\therefore A_1M = A_1D \sin \angle ADA_1 = 2\sqrt{a^2(1 - \tan^2 \theta)} = 2\sqrt{3}(\tan \theta - \tan^3 \theta), \text{ 其中 } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

令 $x = \tan \theta$, 记 $f(x) = x - x^3$ ($0 < x < 1$), 则 $f'(x) = 1 - 3x^2$,

令 $f'(x) = 0$, 则 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ (舍).

当 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递增; 当 $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ 时,

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ 上单调递减.

\therefore 当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f(x)$ 有最大值, 即 A_1M 有

最大值, 此时三棱锥体积最大,

此时 $\cos \angle ADA_1 = 1 - 2\tan^2 \theta = 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$, 故选 A.

5. 考查点 ▶ 证明线面平行、线面垂直的判定、求线面角

(1) 【证明】如图, 延长 OD, CE 相交于点 A , 因为 $AB = 6$, O 为 AB 的中点,

所以 $AO = BO = 3$, 又 $AD = 1$, 所以 $AD = \frac{1}{3}AO$,

又 $DE \parallel OC$, 所以 $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$, 因为 $A'D \perp$ 平面

$CODE$, $B'O \perp$ 平面 $CODE$, 所以 $A'D \parallel$

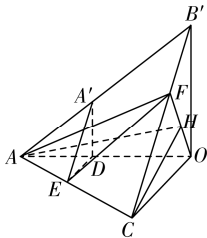
$B'O$, 而 $A'D = \frac{1}{3}B'O$, $AD = \frac{1}{3}AO$, 所以

$\triangle A'DA \sim \triangle B'AO$, 故 $\angle A'DA = \angle B'AO$,

故 A, A', B' 三点共线, 且 $\frac{AA'}{AB'} = \frac{1}{3}$, 又 $\frac{AE}{AC} =$

$\frac{1}{3}$, 所以 $A'E \parallel B'C$, 所以 A', B', C, E 四点

共面.



(2) 【解】存在. 理由如下:

由(1)知 $A'D \parallel B'O$, 因为 $B'O \subset$ 平面 $B'OC$, $A'D \not\subset$ 平面 $B'OC$,

所以 $A'D \parallel$ 平面 $B'OC$.

因为 $DE \parallel OC$, $OC \subset$ 平面 $B'OC$, $DE \not\subset$ 平面 $B'OC$, 所以 $DE \parallel$ 平面 $B'OC$, 又 $A'D \cap$

$ED = D$, $A'D, ED \subset$ 平面 $A'DE$,

所以平面 $A'DE \parallel$ 平面 $B'OC$,

由(1)知 $A'E \parallel B'C$, 取线段 $B'C$ 上靠近

B' 的三等分点 F , 连接 EF , 则 $A'E = B'F$,
又 $A'E \parallel B'F$,

所以四边形 $A'B'FE$ 为平行四边形,

所以 $EF \parallel A'B'$, 因为 $EF \not\subset$ 平面 $A'DOB'$,
 $A'B' \subset$ 平面 $A'DOB'$, 所以 $EF \parallel$ 平面 $A'DOB'$.

(3) 【解】由 (2) 可得直线 CE 与平面 ODF 所成的角即为直线 AC 与平面 OAF 所成的角, 连接 OF, AF .

过点 C 作 $CH \perp OF$ 与 OF 相交于点 H , 连接 AH ,

由 $B'O \perp$ 平面 $CODE$, $OA \subset$ 平面 $CODE$,
可得 $B'O \perp OA$,

又 $CO \perp OA$, $B'O \cap CO = O$, $B'O, CO \subset$ 平面 $OB'C$, 所以 $OA \perp$ 平面 $OB'C$, 又 $CH \subset$ 平面 $OB'C$, 所以 $OA \perp CH$, 又 $CH \perp OF$,
 $OA \cap OF = O$, $OA, OF \subset$ 平面 OAF , 所以 $CH \perp$ 平面 OAF , 所以直线 CA 在平面 OAF 上的投影为 AH , 所以 $\angle CAH$ 就是直线 AC 与平面 OAF 所成的角. 在 $\triangle FOC$

中, $CO = 3$, $CF = \frac{2}{3} \times \sqrt{3^2 + 3^2} = 2\sqrt{2}$,

$\angle FCO = 45^\circ$, 所以 $OF =$

$$\sqrt{CO^2 + CF^2 - 2CO \cdot CF \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{5},$$

所以 $CH = \frac{2S_{\triangle FOC}}{OF} =$

$$\frac{2 \times \frac{1}{2} CF \cdot \sin 45^\circ \cdot CO}{OF} = \frac{6\sqrt{5}}{5}.$$

因为 $CH \perp$ 平面 OAF , $AH \subset$ 平面 OAF , 所以 $CH \perp AH$, 易知 $AC = 3\sqrt{2}$,

$$\text{所以 } \sin \angle CAH = \frac{CH}{AC} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \times \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

所以直线 CE 与平面 ODF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$.

第 5 节 空间角和距离的求法

刷基础

1. ABD 考查点 ▶ 求异面直线所成角、线面角

【解析】如图, 连接 AC, BD , 记 $AC \cap BD = O$, 连接 PO , 由题意可知 AO, OB, OP 两两垂直. 以 O 为坐标原点, $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 则 $A(2, 0, 0), C(-2, 0, 0), D(0, -2, 0), P(0, 0, 4), E(0, 1, 2), F(0, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$. 则 $\vec{EF} = (0, -\frac{5}{3}, \frac{2}{3})$, 所以 $|\vec{EF}| = \sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{29}}{3}$, 故 A 正确.

因为 $\vec{AE} = (-2, 1, 2), \vec{CF} = (2, -\frac{2}{3}, \frac{8}{3})$,

所以 $\cos \langle \vec{AE}, \vec{CF} \rangle = \frac{\vec{AE} \cdot \vec{CF}}{|\vec{AE}| |\vec{CF}|} = \frac{\sqrt{26}}{78}$, 故

B 正确.

\overrightarrow{AE} 在 \overrightarrow{CF} 上的投影向量为 $\frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{CF}|^2}$.

$\overrightarrow{CF} = \frac{3}{52}\overrightarrow{CF}$, 故 C 不正确.

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 因为 $\overrightarrow{DC} = (-2, 2, 0)$, $\overrightarrow{PC} = (-2, 0, -4)$,

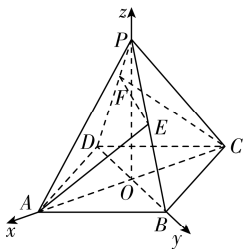
所以 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC} = -2x + 2y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = -2x - 4z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 2$, 得 $\mathbf{n} = (2, 2, -1)$.

设直线 AE 与平面 PCD 所成的角为 θ , 则

$$\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AE}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{AE}| |\mathbf{n}|} = \frac{4}{3 \times 3} =$$

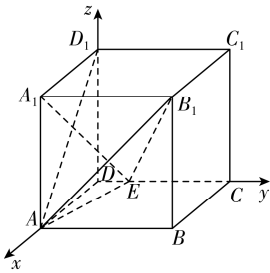
$\frac{4}{9}$, 故 D 正确.

故选 ABD.



2. ABC 考查点 ▶ 锥体体积的有关计算、线面角和二面角的求解

【解析】因为 $V_{A_1-AB_1E} = V_{E-AA_1B_1}$, $S_{\triangle AA_1B_1}$ 为定值, 且平面 $AA_1B_1B \parallel$ 平面 DCC_1D_1 , 所以点 E 到平面 AA_1B_1B 的距离不变, 即三棱锥 A_1-AB_1E 的体积为定值, 故 A 正确;



以 D 为坐标原点, AD, CD, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 设 $DE = t, 0 \leq t \leq 1$, 则 $A(1, 0, 0), D_1(0, 0, 1), B_1(1, 1, 1), E(0, t, 0)$,

因为 $\overrightarrow{EB_1} = (1, 1-t, 1), \overrightarrow{AD_1} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{EB_1} \cdot \overrightarrow{AD_1} = -1 + 0 + 1 = 0$,

所以 $EB_1 \perp AD_1$, 故 B 正确;

取平面 $ABCD$ 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$, 因为 $A_1(1, 0, 1), E(0, t, 0)$, 所以 $\overrightarrow{A_1E} = (-1, t, -1)$,

设直线 A_1E 与平面 $ABCD$ 所成的角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{A_1E} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{A_1E}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2+t^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2},$$

当 $t=0$ 时, $(\sin \theta)_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 这时直线 A_1E 与平面 $ABCD$ 所成的角 θ 的最大值为



$\frac{\pi}{4}$, 故 D 不正确;

设平面 EA_1B_1 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

因为 $\overrightarrow{A_1B_1} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{A_1E} = (-1, t, -1)$,

所以 $\begin{cases} \overrightarrow{A_1B_1} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{A_1E} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} y = 0, \\ -x + ty - z = 0, \end{cases}$

令 $x = 1$, 可得 $\mathbf{m} = (1, 0, -1)$, 取平面 AA_1B_1 的一个法向量为 $\mathbf{p} = (1, 0, 0)$,

设二面角 $E-A_1B_1-A$ 的平面角为 β ,

则 $\cos \beta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{p}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{p}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 易知二面角

$E-A_1B_1-A$ 为锐二面角,

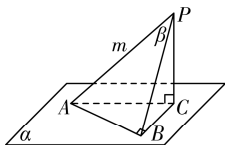
所以二面角 $E-A_1B_1-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{4}$, 故

C 正确.

故选 ABC.

3. A 突破点 ▶ 异面直线所成的角、二面角的求解

【解析】如图, 设斜线 PA 为直线 m , α 为平面 ABC , β 为平面 PAB , 且 $PC \perp \alpha$, $AB \perp BC$, $AB \perp PB$.



由图可知 $\angle PAC = \frac{\pi}{4}$, 当 n 恰为 AC 时, m

与 n 的夹角为 $\theta_1 = \angle PAC = \frac{\pi}{4}$;

当 n 为 AB 时, $\cos \angle BAC \cdot \cos \angle PAC = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{PA} = \frac{AB}{PA} = \cos \angle PAB$,

由 $\cos \angle BAC \in (0, 1)$, 知 $\cos \angle PAC > \cos \angle PAB$,

由 $y = \cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减得

$\angle PAC < \angle PAB$, 则 $\theta_1 > \frac{\pi}{4}$. 综上可知

$\theta_1 \geq \frac{\pi}{4}$.

由于 $PB \perp AB$, $CB \perp AB$, 故 $\angle PBC$ 是平面角 α 与 β 的夹角, 即 $\theta_2 = \angle PBC$,

$\sin \angle PAB \cdot \sin \angle PBC = \frac{PB}{PA} \cdot \frac{PC}{PB} = \frac{PC}{PA} =$

$\sin \angle PAC$,

由 $\sin \angle PAB \in (0, 1)$, 知 $\sin \angle PBC > \sin \angle PAC$,

由 $y = \sin x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增得

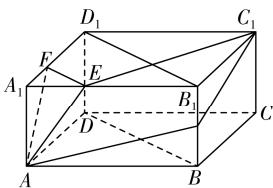
$\angle PBC > \angle PAC$, 即 $\theta_2 > \frac{\pi}{4}$, 综上可知 $\theta_2 \geq$

$\frac{\pi}{4}$. 故选 A.

4. $\frac{\sqrt{26}}{13}$ 考查点 ▶ 棱柱的展开图及最短距离问题、求异面直线所成的角

【解析】如图, 连接 B_1D_1 , 设该棱柱的高

为 h , 若沿该棱柱表面从点 A 经过棱 BB_1 上一点 E 到达点 C_1 , 则最短距离为 $\sqrt{(2+2)^2+h^2} > 4 > \sqrt{13}$, 不满足题意;



若从点 A 经过棱 A_1B_1 上的一点 E 到达点 C_1 , 则最短距离为 $\sqrt{2^2+(2+h)^2} = \sqrt{13}$, 解得 $h = 1$. 因为 $A_1E \parallel C_1D_1$, 所以

$$\frac{A_1E}{C_1D_1} = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } A_1E = \frac{1}{3}C_1D_1 = \frac{2}{3},$$

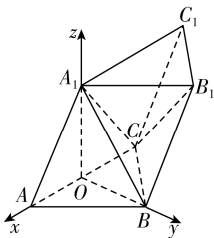
过点 E 作 $EF \parallel B_1D_1$, 与 A_1D_1 交于点 F , 易知 $BD \parallel B_1D_1$, 则 $EF \parallel BD$, 即 $\angle AEF$ 或其补角就是 AE 与 BD 所成的角, $AE =$

$$AF = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{3}, EF = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \cos \angle AEF = \frac{\frac{1}{2}EF}{AE} = \frac{\sqrt{26}}{13}.$$

5. 考查点 ▶ 证明面面平行、面面角的求解

(1)【证明】如图①, 取 AC 的中点 O , 连接 A_1O, BO . 因为 $A_1A = A_1C$, 所以 $A_1O \perp AC$, 且 $A_1O^2 + OA^2 = AA_1^2 = 4$, 因为 $AB \perp BC$, $BA = BC$, O 为 AC 的中点, 所以 $OA = OB = OC$, 所以 $A_1O^2 + OA^2 = A_1O^2 + OB^2 = 4 = A_1B^2$, 所以 $A_1O \perp BO$, 因为 $AC \cap OB = O$, $AC \subset$ 平面 ABC , $OB \subset$ 平面 ABC , 所以 $A_1O \perp$ 平面 ABC (另解: 设 O 为 A_1 在底面 ABC 的射影, 则 $A_1O \perp$ 平面 ABC , 因为 $A_1B = A_1C = A_1A$, 所以 $OA = OB = OC$, 射影 O 为底面 $\triangle ABC$ 的外心, 又 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 所以 O 恰为斜边 AC 的中点), 因为 $A_1O \subset$ 平面 ACC_1A_1 , 所以平面 $ABC \perp$ 平面 ACC_1A_1 .



图①

(2)【解】由(1)可知, $A_1O \perp$ 平面 ABC , 所以 A_1B 与平面 ABC 所成角即为 $\angle A_1BO$, 所以 $\angle A_1BO = 60^\circ$, 易知 $\triangle A_1AO \cong \triangle A_1BO$, 所以 $\angle A_1BO = \angle A_1AO = 60^\circ$, 所以 $A_1O = \sqrt{3}$, $AO = 1$.

方法一: 因为 $BA = BC$, O 为 AC 的中点, 所以 $BO \perp AC$, 易知 AO, OB, A_1O 两两垂直,

如图①所示, 以 O 为原点, 分别以 \vec{OA} , \vec{OB} , $\vec{OA_1}$ 的方向为 x 轴、 y 轴、 z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系, 则 $A_1(0, 0, \sqrt{3})$, $C(-1, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$,



所以 $\overrightarrow{A_1C} = (-1, 0, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$,

设平面 A_1B_1C 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -x + y = 0, \\ -x - \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

令 $z = 1$, 则 $x = -\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}$, 所以 $\mathbf{n}_1 = (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$, 易知平面 ABC 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (0, 0, 1)$, 设平面 A_1B_1C 与平面 ABC 的夹角为 θ , 所以 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{7} \times 1} = \frac{\sqrt{7}}{7}$,

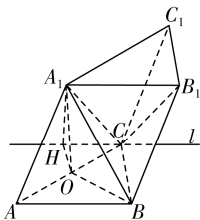
所以平面 A_1B_1C 与平面 ABC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.

方法二(几何法): 如图②, 过点 C 作 AB 的平行线 l , 因为 $AB \parallel A_1B_1$, 所以 $l \parallel A_1B_1$, 过点 O 作 $OH \perp l$, 垂足为 H , 连接 A_1H . 由(1)知 $A_1O \perp$ 平面 ABC , 又因为 $CH \subset$ 平面 ABC , 所以 $A_1O \perp CH$, 又 $OH \perp CH$, $A_1O \cap OH = O$, $A_1O, OH \subset$ 平面 A_1OH , 所以 $CH \perp$ 平面 A_1OH , 因为 $A_1H \subset$ 平面 A_1OH , 所以 $A_1H \perp CH$, 所以平面 A_1B_1C 与平面 ABC 的夹角即为 $\angle A_1HO$, 易知

$$OH = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } \tan \angle A_1HO = \frac{A_1O}{OH} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6}, \text{ 所以 } \cos \angle A_1HO = \frac{\sqrt{7}}{7}, \text{ 即平面}$$

A_1B_1C 与平面 ABC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$.



图②

6. C 考查点 ▶ 点到平面的距离、体积的最值的求解

【解析】易知 $\triangle ACD$ 为边长为 2 的等边三

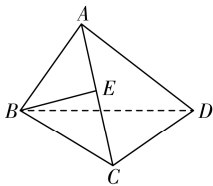
角形, 故 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$\triangle ABC$ 也是边长为 2 的等边三角形, 故当平面 $ABC \perp$ 平面 ACD 时, 点 B 到平面 ACD 的距离最大, 且最大值为 $BE =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}AC = \sqrt{3}$ (其中 E 为 AC 的中点), 故三

棱锥 $A-BCD$ 的体积的最大值为 $\frac{1}{3}S_{\triangle ACD} \cdot$

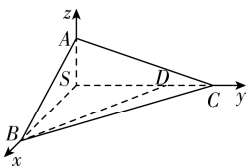
$BE = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1$, 故选 C.





7. B 考查点 ▶ 点到直线的距离的向量求法

【解析】根据题意，以 S 为坐标原点，以 SB, SC, SA 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $B(2, 0, 0), D(0, 2, 0), A(0, 0, 1), C(0, 3, 0)$ ，又点 E 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $E\left(\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}\right)$ ，

则 $\overrightarrow{EB} = \left(\frac{4}{3}, -1, -\frac{1}{3}\right), \overrightarrow{DB} = (2, -2, 0)$ ，

所以 $\cos \langle \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DB} \rangle = \frac{|\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{DB}|}{|\overrightarrow{EB}| |\overrightarrow{DB}|} =$

$$\frac{\frac{8}{3} + 2}{\sqrt{\frac{16}{9} + 1 + \frac{1}{9}} \times 2\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{52}},$$

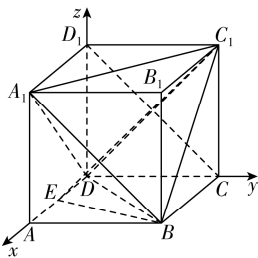
则 $\sin \langle \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DB} \rangle = \sqrt{1 - \cos^2 \langle \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DB} \rangle} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{52}}$ ，所以点 E 到直线 BD 的距离为

$$|\overrightarrow{EB}| \cdot \sin \langle \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DB} \rangle = \sqrt{\frac{16}{9} + 1 + \frac{1}{9}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{52}} = \frac{\sqrt{26}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{52}} = \frac{\sqrt{6}}{6}. \text{ 故选 B.}$$

8. C 考查点 ▶ 向量法求解异面直线所成的角、点到直线的距离、点到平面的距离

【解析】根据题意建立如图所示的空间直角坐标系，则 $B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), D_1(0, 0, 2), A_1(2, 0, 2), C_1(0, 2, 2), E(1, 0, 0)$ 。

对于 A, $\overrightarrow{D_1C} = (0, 2, -2), \overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 2)$ ，



故 $\cos \langle \overrightarrow{D_1C}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{-4}{2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$ ，故

$\langle \overrightarrow{D_1C}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{2\pi}{3}$ ，则直线 D_1C 和 BC_1 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$ ，故 A 正确；

对于 B，易得四面体 BDC_1A_1 为正四面体，则 $V_{BDC_1A_1} = V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} - 4V_{B-A_1B_1C_1} = 8 - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}$ ，故 B 正确；

对于 C, $\overrightarrow{BA_1} = (0, -2, 2), \overrightarrow{EB} = (1, 2, 0), \overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 2)$ ，设平面 BEC_1 的法向量



为 $n = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{EB} = x + 2y = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{BC_1} = -2x + 2z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 2$, 则 $n = (2, -1, 2)$, 故点 A_1 到平面 BEC_1 的距离

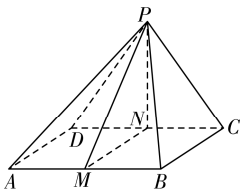
$$d = \frac{|\overrightarrow{BA_1} \cdot n|}{|n|} = \frac{|2+4|}{3} = 2, \text{ 故 C 错误;}$$

对于 D, $\overrightarrow{BE} = (-1, -2, 0)$, $\overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 2)$, 则点 C_1 到直线 BE 的距离为

$$\sqrt{\overrightarrow{BC_1}^2 - \left(\frac{\overrightarrow{BC_1} \cdot \overrightarrow{BE}}{|\overrightarrow{BE}|} \right)^2} = \sqrt{8 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}, \text{ 故 D 正确. 故选 C.}$$

9. A **考查点** ▶ 余弦定理解三角形、求直线到平面的距离

【解析】 取 AB 的中点 M , CD 的中点 N , 连接 PM, PN, MN , 如图.



因为 $PA = PB = 2$, $PC = PD = \sqrt{3}$, 所以 $PM \perp AB$, $PN \perp CD$, 易知 $MN \perp AB$, $MN \perp CD$,

又 $PM \cap MN = M$, $PM, MN \subset$ 平面 PMN , 所以 $AB \perp$ 平面 PMN , 又 $AB \subset$ 平面 PAB . 所以平面 $PMN \perp$ 平面 PAB ,

又 $AB \parallel CD$, $AB \subset$ 平面 PAB , $CD \not\subset$ 平面 PAB , 所以 $CD \parallel$ 平面 PAB ,

则直线 CD 到平面 PAB 的距离即为点 N 到平面 PAB 的距离, 即为点 N 到直线 PM 的距离.

$$\text{又 } PM = \sqrt{PA^2 - AM^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3},$$

$$PN = \sqrt{PD^2 - DN^2} = \sqrt{3 - 1} = \sqrt{2}, MN = AD = 2, \text{ 在 } \triangle PMN \text{ 中, } \cos \angle MPN =$$

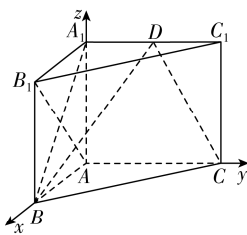
$$\frac{PM^2 + PN^2 - MN^2}{2PM \cdot PN} = \frac{\sqrt{6}}{12}, \text{ 则 } \sin \angle MPN = \frac{\sqrt{138}}{12},$$

所以点 N 到直线 PM 的距离为 $PN \cdot$

$$\sin \angle MPN = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{138}}{12} = \frac{\sqrt{69}}{6}. \text{ 故选 A.}$$

10. 考查点 ▶ 向量法求解二面角、点到平面的距离

(1) **【证明】** 由直三棱柱的性质可知 $AA_1 \perp AB$, $AA_1 \perp AC$, 四边形 AA_1B_1B 为平行四边形, 因为 $AB = AA_1$, 所以四边形 AA_1B_1B 为正方形, 所以 $AB_1 \perp A_1B$, 因为 $AA_1 \perp AC$, $AB \perp AC$, $AA_1 \cap AB = A$, $AA_1, AB \subset$ 平面 AA_1B_1B , 所以 $AC \perp$ 平面 AA_1B_1B , 又 $AB_1 \subset$ 平面 AA_1B_1B , 所以 $AC \perp AB_1$, 因为 $A_1D \parallel AC$, 所以 $AB_1 \perp A_1D$, 又因为 $A_1B \cap A_1D = A_1$, $A_1B, A_1D \subset$ 平面 A_1BD , 所以 $AB_1 \perp$ 平面 A_1BD .



(2)【解】由题易知 AB, AC, AA_1 两两垂直, 以 A 为原点, AB, AC, AA_1 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 设 $AC = 2a (a > 0)$, 则 $A(0, 0, 0), B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 2a, 0), D(0, a, \sqrt{3})$, 所以 $\overrightarrow{AC} = (0, 2a, 0), \overrightarrow{BC} = (-\sqrt{3}, 2a, 0), \overrightarrow{CD} = (0, -a, \sqrt{3})$, 设平面 BCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} -\sqrt{3}x + 2ay = 0, \\ -ay + \sqrt{3}z = 0, \end{cases} \text{ 取 } x =$$

$$\sqrt{3}, \text{ 则 } y = \frac{3}{2a}, z = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } \mathbf{n} =$$

$$\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2a}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \text{ 易知平面 } ABC \text{ 的一个法$$

向量为 $\mathbf{m} = (0, 0, 1)$, 设二面角 $A-BC-D$ 的大小为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| = |\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \times \sqrt{(\sqrt{3})^2 + \left(\frac{3}{2a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 解得}$$

$a = 1$, 所以 $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$, 平面 BCD 的一个法向量为 $\mathbf{n} = \left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$, 设点 A 到平面 BCD 的距离为 d ,

$$\text{则 } d = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{3}{\sqrt{3 + \frac{9}{4} + \frac{3}{4}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 所}$$

以点 A 到平面 BCD 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

刷

提分

1. B 考查点 锥体体积的有关计算、二面角的概念及辨析

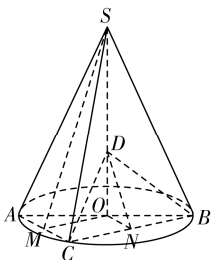
【解析】在圆 O 所在平面内, 过点 O 作 $OM \perp AC$, 垂足为 M , 作 $ON \perp BC$, 垂足为 N , 连接 SM, DN .

$\because SA = SC, DB = DC, \therefore SM \perp AC, DN \perp BC,$

$\therefore \angle SMO$ 为二面角 $S-AC-B$ 的平面角, $\angle DNO$ 为二面角 $D-BC-A$ 的平面角,

$\therefore \angle SMO = \angle DNO.$

\therefore 在 $\text{Rt} \triangle SOM$ 和 $\text{Rt} \triangle DON$ 中,





$$\tan \angle SMO = \frac{SO}{MO}, \tan \angle DNO = \frac{DO}{NO}, \therefore \frac{SO}{MO} =$$

$\frac{DO}{NO}$. $\therefore D$ 为 SO 上靠近 O 的一个三等分

点, $\therefore \frac{MO}{NO} = \frac{SO}{DO} = 3$. 设 $NO = m (m > 0)$, 则

$MO = 3m$, 设底面圆半径为 R , 圆锥高 $SO = h$.

\therefore 点 C 在圆锥底面圆上, $\therefore AC \perp BC$,

\therefore 点 O 为 AB 中点, $OM \perp AC, ON \perp BC$,

$\therefore AC = 2ON = 2m, BC = 2OM = 6m$,

$\therefore (2R)^2 = (2m)^2 + (6m)^2$, 即 $R^2 = 10m^2$,

$$\therefore V_{\text{三棱锥}S-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot$$

$$2m \cdot 6m \cdot h = 2m^2 h, V_{\text{圆锥}SO} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot h =$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10m^2 \cdot h = \frac{10}{3} \pi m^2 h,$$

$$\therefore \frac{V_{\text{圆锥}SO}}{V_{\text{三棱锥}S-ABC}} = \frac{5\pi}{3}. \text{ 故选 B.}$$

2. B 突破点 ▶ 点到直线的距离、线面角、二面角的求解

【解析】如图①, 设 O 为 $\triangle ABC$ 的中心, 连接 DO , 过点 O 作 $OE \perp RP$ 于 $E, OF \perp PQ$ 于 $F, OG \perp RQ$ 于 G , 连接 DE, DF, DG . 易知 $DO \perp$ 平面 ABC , 因为 $RP \subset$ 平面 ABC , 所以 $DO \perp RP$, 又 $OE \cap DO = O, OE, DO \subset$ 平面 DOE , 则 $RP \perp$ 平面 DOE , 又 $DE \subset$ 平面 DOE , 于是 $\angle DEO$ 是二面角 $D-PR-Q$ 的平面角, 因此 $\tan \alpha = \frac{DO}{OE}$, 同

理 $\tan \beta = \frac{OD}{OF}, \tan \gamma = \frac{OD}{OG}$, 如图②, 以 P 为

原点, AB 所在直线为 x 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系, 不妨设 $AB = 2$, 则

$$A(-1, 0), B(1, 0), C(0, \sqrt{3}), O\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

$$\text{由 } AP = PB, \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA} = 2, \text{ 得 } Q\left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right),$$

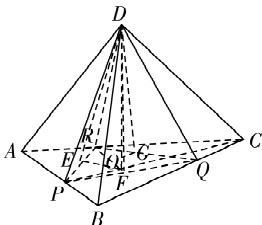
$$R\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{ 则直线 } RP \text{ 的方程为 } y =$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x, \text{ 直线 } PQ \text{ 的方程为 } y = 2\sqrt{3}x, \text{ 直线}$$

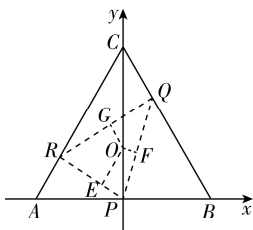
$$RQ \text{ 的方程为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{5\sqrt{3}}{9}, \text{ 于是 } OE =$$

$$\frac{2\sqrt{21}}{21}, OF = \frac{\sqrt{39}}{39}, OG = \frac{1}{3}, OF < OG < OE,$$

$\tan \alpha < \tan \gamma < \tan \beta$, 而 α, β, γ 为锐角, 所以 $\alpha < \gamma < \beta$. 故选 B.



图①



图②

3. ABD 突破点 ▶ 圆锥中截面的有关计算、台体体积的有关计算、求线面角

【解析】 $\because AB = 3CD = 12\sqrt{3}$, \therefore 圆台上底面圆的半径为 $2\sqrt{3}$, 下底面圆的半径为 $6\sqrt{3}$, $\therefore AD = 8$,

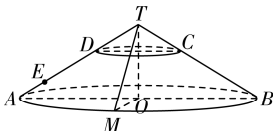
\therefore 圆台的高 $h = \sqrt{8^2 - (6\sqrt{3} - 2\sqrt{3})^2} = 4$,

\therefore 圆台的体积 $V = \frac{1}{3}\pi \times 4 \times [(2\sqrt{3})^2 + 2\sqrt{3} \times 6\sqrt{3} + (6\sqrt{3})^2] = 208\pi$, 故 A 正确.

由 $h = 4$, $BC = 8$, 得 $\sin \angle OBC = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$,

由 $\angle OBC \in (0, \frac{\pi}{2})$ 得, $\angle OBC = \frac{\pi}{6}$.

如图①, 将圆台补成圆锥, 顶点记为 T , 底面圆的圆心记为 O , 连接 TO, MO, MT .



图①

$\because M$ 为 \widehat{AB} 的中点, $\therefore MO \perp AB$.

$\because TO \perp$ 平面 AMB , $MO \subset$ 平面 AMB ,

$\therefore TO \perp MO$, $\because TO \cap AB = O$, $TO, AB \subset$ 平面 $ABCD$, $\therefore MO \perp$ 平面 $ABCD$,

$\because MO \subset$ 平面 TMO , \therefore 平面 $TMO \perp$ 平面 $ABCD$,

此时母线所在直线 TM 与平面 $ABCD$ 所成的角最大, 最大角为 $\angle MTO$, $\angle MTO =$

$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, 故 B 正确.

由 $\angle TBO = \frac{\pi}{6}$, $OB = 6\sqrt{3}$ 得, $TO = 6$, $BT =$

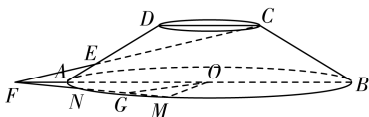
12 , $\therefore TC = 12 - 8 = 4$, 当两条母线所在直

线的夹角为 $\frac{\pi}{2}$ 时, 截面面积最大, 最大值

为 $\frac{1}{2} \times 12^2 \times \sin \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin \frac{\pi}{2} = 64$,

故 C 错误.

如图②, 在梯形 $ABCD$ 中, 连接 CE 并延长交 BA 的延长线于点 F , 连接 MF 交底面圆于点 N , 则 MN 为截面与底面圆的交线.



图②

由 $\frac{CD}{AF} = \frac{DE}{EA} = 2$ 得, $AF = 2\sqrt{3}$, $OF = 8\sqrt{3}$,



$$\therefore \tan \angle OMF = \frac{OF}{OM} = \frac{8\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{4}{3},$$

$\cos \angle OMF = \frac{3}{5}$, 取 MN 的中点 G , 连接 OG , 则 $OG \perp MN$, $MN = 2MG$,

$$\therefore MN = 2 \times 6\sqrt{3} \times \cos \angle OMF = \frac{36\sqrt{3}}{5}, \text{ 故 D}$$

正确.

故选 ABD.

4. A 突破点 ▶ 多面体与球的内切问题、立体几何中的轨迹问题、点到平面的距离

【解析】 由题意得, 正方体内切球的球心为正方体的中心, 记为点 O , 内切球半径

$$r = \frac{1}{2}. \text{ 连接 } AD_1, AC, CD_1, \because AD_1 \parallel BC_1,$$

$AD_1 \not\subset \text{平面 } A_1BC_1, BC_1 \subset \text{平面 } A_1BC_1,$

$\therefore AD_1 \parallel \text{平面 } A_1BC_1$, 同理可得 $AC \parallel \text{平面 } A_1BC_1$,

$\because AD_1, AC \subset \text{平面 } D_1AC, AD_1 \cap AC = A, \therefore \text{平面 } D_1AC \parallel \text{平面 } A_1BC_1,$

$\therefore D_1P \parallel \text{平面 } A_1BC_1, \therefore D_1P \subset \text{平面 } D_1AC$, 故点 P 的轨迹是平面 D_1AC 与正

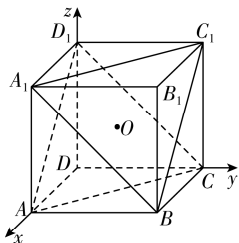
方体内切球的交线, 此交线为圆, 记圆心为 O_1 . 如图, 以 D 为原点, DA, DC, DD_1

所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 则 $A(1, 0, 0), C(0, 1, 0), D_1(0,$

$$0, 1), O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AO} =$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \therefore \overrightarrow{AC} = (-1, 1, 0), \overrightarrow{AD_1} =$$

$$(-1, 0, 1).$$



设平面 D_1AC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则

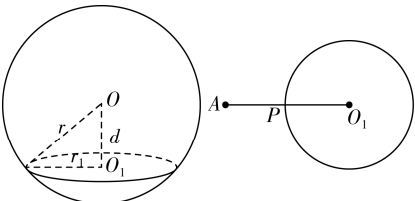
$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} \cdot \mathbf{n} = -x + y = 0, \\ \overrightarrow{AD_1} \cdot \mathbf{n} = -x + z = 0, \end{cases} \text{ 令 } x = 1, \text{ 则 } y = z = 1,$$

故 $\mathbf{n} = (1, 1, 1)$, \therefore 点 O 到平面 D_1AC 的

$$\text{距离 } d = \frac{|\overrightarrow{AO} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \therefore \text{圆 } O_1 \text{ 的}$$

$$\text{半 径 } r_1 = \sqrt{r^2 - d^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$



$$\text{由 } \overrightarrow{AO} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ 得, } AO =$$

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore AO_1 =$$



$$\sqrt{AO^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore AP \text{ 的最小值为 } AO_1 - r_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

故选 A.

5. BD 突破点 ▶ 点到平面的距离、立体几何中的轨迹问题

【解析】以 D 为坐标原点, DA, DC, DD_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图①所示的空间直角坐标系, 则 $D(0, 0, 0), B(3, 3, 0), C_1(0, 3, 3), C(0, 3, 0), M(0, 3, 2), \overrightarrow{DB} = (3, 3, 0), \overrightarrow{DC_1} = (0, 3, 3)$, 设平面 BDC_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 3x + 3y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC_1} = 3y + 3z = 0, \end{cases}$ 令 $y = 1$, 则 $x = -1, z = -1$, 所以平面 BDC_1 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (-1, 1, -1)$.

设点 C 关于平面 BDC_1 的对称点为 $Q(a, b, c)$, 则 $\overrightarrow{QC} = (-a, 3-b, -c)$,

所以 $\frac{-a}{-1} = \frac{3-b}{1} = \frac{-c}{-1}$, 解得 $a = c, b = 3 - c$, 所以

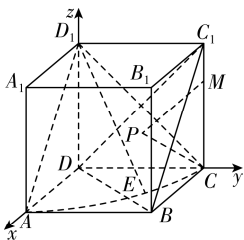
以 $Q(c, 3-c, c), \overrightarrow{DQ} = (c, 3-c, c), \overrightarrow{DC} = (0, 3, 0)$,

又点 Q, C 到平面 BDC_1 的距离相等, 所以

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DQ}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DC}|}{|\mathbf{n}|},$$

$$\text{所以 } \frac{|-c + 3 - c - c|}{\sqrt{3}} = \frac{|3|}{\sqrt{3}}, \text{ 解得 } c = 2 \text{ 或 } c = 0$$

(舍去), 所以 $Q(2, 1, 2)$, 所以 $(PC + PM)_{\min} = |QM| = 2\sqrt{2}$, 故 A 错误.



图①

因为 $DD_1 \perp$ 平面 $ABCD$, 所以当动点 E 在平面 $ABCD$ 内时, 则 $DD_1 \perp DE$,

又 $\angle DD_1E = \frac{\pi}{4}$, 所以 $DD_1 = DE$, 可得 E

的轨迹是以 D 为圆心, 3 为半径的圆弧,

且在四边形 $ABCD$ 内的圆弧是圆的 $\frac{1}{4}$,

所以动点 E 在平面 $ABCD$ 内运动轨迹的长度为 $\frac{3}{2}\pi$, 故 B 正确.

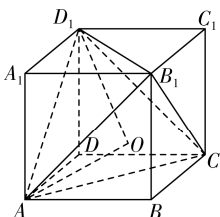
连接 AD_1 , 动点 E 的轨迹是以 DD_1 为轴, D_1 为顶点的圆锥在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 内的部分, 圆锥的底面半径为 3, 易得 $AD_1 \parallel BC_1$, 又 $AD_1 \not\subset$ 平面 BDC_1 , $BC_1 \subset$ 平面 BDC_1 , 所以 $AD_1 \parallel$ 平面 BDC_1 , 又 AD_1 是圆锥的母线, 所以平面 BDC_1 与圆锥的交线是抛物线的一部分, 故 C 错误;

如图②, 设正四面体 $D_1 - AB_1C$ 的底面正



三角形 AB_1C 的中心为 O , 连接 D_1O, AO , 由正四面体的性质可得 $D_1O \perp$ 平面 AB_1C . 由正弦定理可得 $AO = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{6}$, 所以正四面体的

高 $D_1O = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{6})^2} = 2\sqrt{3}$.



图②

设正四面体 D_1-AB_1C 的内切球的半径为 r ,

则 $V_{D_1-AB_1C} = \frac{1}{3} S_{\triangle AB_1C} \cdot D_1O = \frac{1}{3} \times 4 S_{\triangle AB_1C} \cdot r$, 所以 $r = \frac{1}{4} D_1O = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

设半径是 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的球的内接正四面体的棱长为 m , 则可将内接正四面体补形成棱长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}m$ 的正方体, 则 $\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}m = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $m = \sqrt{2} > 1.4$,

在正四面体 D_1-AB_1C 的内部有一个可以任意转动的正四面体, 则此正四面体的棱长可以是 1.4, 故 D 正确.

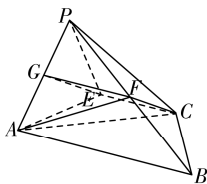
故选 BD.

6. 突破点 ▶ 证明线面平行、面面垂直, 求点到平面的距离

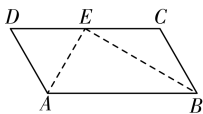
(1) 【证明】如图①, 取 PA 的中点 G , 连接 FG, EG , 因为 G, F 分别为 PA, PB 的中点, 所以 $GF \parallel AB$, 且 $GF = \frac{1}{2}AB$, 由题意

可知 $CE \parallel AB$, 且 $CE = \frac{1}{2}AB$, 则 $GF \parallel CE$

且 $GF = CE$, 所以四边形 $CFGE$ 为平行四边形, 则 $CF \parallel EG$, 又 $CF \not\subset$ 平面 PAE , $EG \subset$ 平面 PAE , 所以 $CF \parallel$ 平面 PAE .



图①



图②

(2) ①【证明】在平行四边形 $ABCD$ 中, 连接 BE , 如图②, 由题意可知 $\triangle DAE$ 是边长为 1 的等边三角形, 则 $\angle AED = \frac{\pi}{3}$, 且

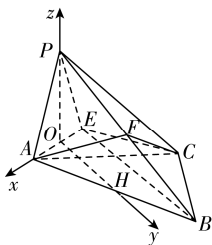
$\angle BCE = \frac{2\pi}{3}$, $BC = CE = 1$, 则 $\angle CEB = \frac{\pi}{6}$,

可知 $\angle AEB = \frac{\pi}{2}$, 即 $AE \perp EB$, 则 $BE =$



$\sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{3}$. 若 $PB = 2$, 且 $PE = 1$, 则 $PE^2 + BE^2 = PB^2$, 可知 $PE \perp EB$, 且 $AE \cap PE = E$, $AE, PE \subset$ 平面 PAE , 可得 $EB \perp$ 平面 PAE , 又因为 $EB \subset$ 平面 $ABCE$, 所以平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$.

②【解】取 AE 的中点 O , AB 的中点 H , 连接 PO, OH , 则 $PO = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $OH \parallel BE$, 可得 $OH \perp AE$. 因为 $\triangle PAE$ 为等边三角形, 所以 $PO \perp AE$, 又平面 $PAE \perp$ 平面 $ABCE$, 平面 $PAE \cap$ 平面 $ABCE = AE$, $PO \subset$ 平面 PAE , 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCE$, 平行四边形 $ABCD$ 的高即为等边三角形 DAE 的高 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 设点 F 到平面 $ABCE$ 的距离为 d , 若 $V_1 = 3V_2$, 则 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} \times (1+2) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \times \frac{1}{3} d \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $d = \frac{\sqrt{3}}{4}$, 即 $d = \frac{1}{2} PO$, 可知 F 为 PB 的中点. 易知 OA, OH, OP 两两垂直, 以 O 为原点, OA, OH, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图③,



图③

则 $P\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $E\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 0\right)$, $F\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $C\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, 可得 $\overrightarrow{PC} = \left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{PE} = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{PF} = \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 设平面 PCE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x,$

$$y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PC} = -x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PE} = -\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \end{cases} \quad \text{令}$$

$x = \sqrt{3}$, 则 $y = 1, z = -1$, 可得 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, -1)$, 所以点 F 到平面 PCE 的距离 $d =$

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PF}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{10}.$$

7. 突破点 ▶ 柱体体积的有关计算, 证明线面平行、面面平行, 面面角的向量求法

【解】(1) 因为 $AA_1 \parallel BB_1$, $BB_1 \subset$ 平面 BB_1C_1C , $AA_1 \not\subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $AA_1 \parallel$ 平面 BB_1C_1C ,



所以 $V_{B_1-BCD} = V_{D-B_1BC} = V_{A-B_1BC} = V_{B_1-ABC} = \frac{1}{3}V_{ABC-A_1B_1C_1}$, 又 $V_{B_1-BCD} = \frac{1}{2}$, 所以 $V_{ABC-A_1B_1C_1} = \frac{3}{2}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2AB = 2, AC = \sqrt{7}$,
所以 $\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{1^2 + 2^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times 1 \times 2} = -\frac{1}{2}$, 又 $\angle ABC \in (0, \pi)$,
所以 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \sin \angle ABC = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

设三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h , 则

$$V_{ABC-A_1B_1C_1} = S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{2}h = \frac{3}{2}, \text{ 解得 } h = \sqrt{3}, \text{ 所以三棱柱 } ABC-A_1B_1C_1 \text{ 的高为 } \sqrt{3}.$$

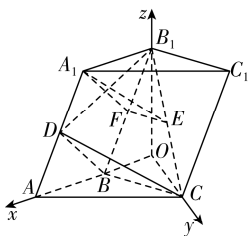
(2) 设 BB_1 的中点为 F , 连接 A_1F, EF ,
因为 $A_1D \parallel BF$ 且 $A_1D = BF$, 所以四边形 A_1DBF 为平行四边形,

所以 $A_1F \parallel BD$, 又 $A_1F \not\subset$ 平面 $BCD, BD \subset$ 平面 BCD , 所以 $A_1F \parallel$ 平面 BCD .

因为 $A_1E \parallel$ 平面 $BCD, A_1E \cap A_1F = A_1$,
 $A_1E, A_1F \subset$ 平面 A_1EF ,

所以平面 $A_1EF \parallel$ 平面 BCD , 又平面 $A_1EF \cap$ 平面 $BB_1C_1C = EF$, 平面 $BCD \cap$ 平面 $BB_1C_1C = BC$, 所以 $EF \parallel BC$,

因为 F 为 BB_1 的中点, 所以 E 为 B_1C 的中点, 所以 $\frac{B_1E}{B_1C} = \frac{1}{2}$, 即 $\lambda = \frac{1}{2}$.



(3) 过点 B_1 作 B_1O 垂直 AB 的延长线于点 O , 连接 CO .

因为侧面 AA_1B_1B 与底面 ABC 垂直, 侧面 $AA_1B_1B \cap$ 底面 $ABC = AB, B_1O \subset$ 平面 AA_1B_1B ,

所以 $B_1O \perp$ 平面 ABC ,

因为 $CB_1 \perp A_1B_1$ 且 $AB \parallel A_1B_1$, 所以 $CB_1 \perp AB$, 又 $CB_1 \cap B_1O = B_1, CB_1, B_1O \subset$ 平面 CB_1O , 所以 $AB \perp$ 平面 CB_1O ,

又 $CO \subset$ 平面 CB_1O , 所以 $AB \perp CO$, 易知 AO, OC, OB_1 两两垂直, 以 O 为坐标原点, 分别以 OA, OC, OB_1 所在直线为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 因为 $B_1O \perp$ 平面 ABC , 所以 $B_1O = \sqrt{3}$,

$OC = BC \sin \angle CBO = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, 则 $A(2, 0, 0), B(1, 0, 0), B_1(0, 0, \sqrt{3}), C(0, \sqrt{3}, 0)$, 设 $D(x_D, y_D, z_D)$,

因为 $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{BB_1}$, 则 $(x_D - 2, y_D, z_D) =$

$$\frac{1}{2}(-1, 0, \sqrt{3}), \text{ 所以 } \begin{cases} x_D = \frac{3}{2}, \\ y_D = 0, \\ z_D = \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \text{ 则 } D\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

所以 $\overrightarrow{BD} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 又 $\overrightarrow{BC} = (-1, \sqrt{3}, 0)$,

设平面 BCD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = -x + \sqrt{3}y = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \end{cases} \text{ 取 } y = 1,$$

则 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, 1, -1)$.

又 $\overrightarrow{BB_1} = (-1, 0, \sqrt{3})$,

设平面 BB_1C_1C 的法向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = -a + \sqrt{3}c = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -a + \sqrt{3}b = 0, \end{cases} \text{ 取 } b = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, 1),$$

设平面 BCD 与平面 BB_1C_1C 的夹角为 θ ,

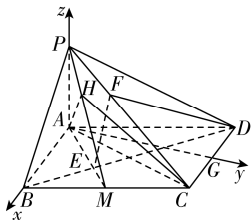
$$\text{则 } \cos \theta = \frac{|\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{3}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5},$$

所以平面 BCD 与平面 BB_1C_1C 的夹角的余弦值为 $\frac{3}{5}$.

8. 突破点 ▶ 线面角的向量求法、利用导数求函数的最值(不含参)

【解】(1) 取 CD 的中点 G , 由于四边形 $ABCD$ 是菱形, 且 $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $AG \perp CD$, 因为 $AB \parallel CD$, 所以 $AG \perp AB$,

又 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 故 AB, AG, AP 两两垂直, 以 A 为坐标原点, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AP}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(1, \sqrt{3}, 0), D(-1, \sqrt{3}, 0), P(0, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{PC} = (1, \sqrt{3}, -1), \overrightarrow{BD} = (-3, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{BP} = (-2, 0, 1)$, 由 $BE = \lambda BD, PF = \lambda PC (0 \leq \lambda \leq 1)$,

可知 $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{PF} = \lambda \overrightarrow{PC}$,

所以 $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PF} = -\lambda \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BP} + \lambda \overrightarrow{PC} = (4\lambda - 2, 0, 1 - \lambda)$, 易知 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 1)$, 因为 $EF \parallel PA$, 所以 $\overrightarrow{EF} = k \overrightarrow{PA}$, 得到 $4\lambda - 2 = 0$, 所以 $\lambda = \frac{1}{2}$.

(2) 由(1)知 $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PF} = (1, -\sqrt{3}, 1) +$



$$(\lambda, \sqrt{3}\lambda, -\lambda) = (\lambda+1, \sqrt{3}\lambda-\sqrt{3}, 1-\lambda) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2}{3}\right), \vec{BP} = (-2, 0, 1), \vec{PC} = (1, \sqrt{3}, -1),$$

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{BP} = -2x + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{PC} = x + \sqrt{3}y - z = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } x=1, \text{ 则 } z=2, y=\frac{\sqrt{3}}{3}, \mathbf{n} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}, 2\right).$$

设直线 DF 与平面 PBC 所成的角为 α ,

$$\text{则 } \sin \alpha = |\cos \langle \mathbf{n}, \vec{DF} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \vec{DF}|}{|\mathbf{n}| |\vec{DF}|} =$$

$$\frac{2}{\frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{4\sqrt{2}}{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{16}.$$

$$(3) \text{ 设 } \vec{BM} = t\vec{BC} = (-t, \sqrt{3}t, 0), t \in [0, 1], \text{ 则 } \vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = (2-t, \sqrt{3}t, 0),$$

由 H, M, P 三点共线, 不妨设 $\vec{AH} = x\vec{AM} + (1-x)\vec{AP}$, 易知 $AM \perp AP$,

$$\text{因为 } AH \perp PM, \text{ 所以 } \vec{AH} \cdot \vec{PM} = \vec{AH} \cdot (\vec{AM} - \vec{AP}) = 0, \text{ 则 } x\vec{AM}^2 - (1-x)\vec{AP}^2 = 0,$$

$$\text{所以 } x\vec{AM}^2 = 1-x,$$

$$\text{则 } x = \frac{1}{\vec{AM}^2 + 1} = \frac{1}{4t^2 - 4t + 5},$$

$$\text{即 } \vec{CH} = \vec{CA} + \vec{AH} = ((2-t)x - 1, \sqrt{3}tx - \sqrt{3}, 1-x),$$

$$\text{则 } \vec{CH}^2 = (4t^2 - 4t + 5)x^2 - (4t + 6)x + 5 = \frac{-4t - 5}{4t^2 - 4t + 5} + 5.$$

$$\text{记 } f(t) = \frac{-4t - 5}{4t^2 - 4t + 5} (t \in [0, 1]),$$

$$\text{则 } f'(t) = \frac{8(2t^2 + 5t - 5)}{(4t^2 - 4t + 5)^2},$$

$$\text{令 } 2t^2 + 5t - 5 = 0, \text{ 解得 } t = \frac{-5 + \sqrt{65}}{4} \text{ (负舍)},$$

$$\text{当 } t \in \left[0, \frac{-5 + \sqrt{65}}{4}\right] \text{ 时, } f'(t) < 0, \text{ 当 } t \in$$

$$\left(\frac{-5 + \sqrt{65}}{4}, 1\right] \text{ 时, } f'(t) > 0, \text{ 可知 } f(t) \text{ 在}$$

$$\left[0, \frac{-5 + \sqrt{65}}{4}\right] \text{ 上单调递减, 在区间}$$

$$\left(\frac{-5 + \sqrt{65}}{4}, 1\right] \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{所以 } f(t) \text{ 在 } t = \frac{-5 + \sqrt{65}}{4} \text{ 处取到极小值,}$$

也为最小值, 此时 CH 的长度最小, 此时

$$\lambda = \frac{BE}{BD} = \frac{BE}{BE+ED} = \frac{\frac{BE}{ED}}{\frac{BE}{ED}+1} = \frac{\frac{BM}{AD}}{\frac{BM}{AD}+1} =$$

$$\frac{t}{t+1} = \frac{15 - \sqrt{65}}{16}.$$



专题 1 球的接、切问题

刷

难关

1. C 考查点 ▶ 正方体的棱切球

【解析】当球 O 是正方体的棱切球时, 球

$$O \text{ 的半径 } r_1 = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

当球 O 是正方体的外接球时,

$$\text{球 } O \text{ 的半径 } r_2 = \frac{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2}}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{所以球 } O \text{ 的半径 } r \in \left[\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3}{2} \right],$$

$$\text{球 } O \text{ 的表面积 } S \in [6\pi, 9\pi].$$

故选 C.

2. A 突破点 ▶ 三棱锥的外接球

【解析】如图, 若球心 O 在三棱锥 $P-ABC$ 内, 设 O_1 为 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心. 连

$$\text{接 } PO_1, AO_1, AO. AO_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = 1, \text{ 设球}$$

$$O \text{ 的半径为 } R, \text{ 则 } OO_1 = 2 - R. \text{ 因为 } AO^2 = AO_1^2 + OO_1^2, \text{ 所以 } R^2 = 1 + (2 - R)^2, \text{ 解得 } R =$$

$$\frac{5}{4}, \text{ 三棱锥外接球的体积为 } \frac{4}{3} \times \pi R^3 =$$

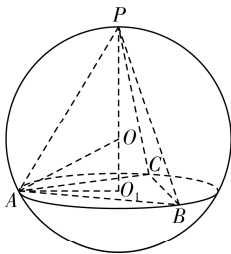
$$\frac{125\pi}{48}. \text{ 若球心 } O \text{ 在三棱锥 } P-ABC \text{ 外, 则}$$

$$OO_1 = R - 2, \text{ 同理由 } R^2 = 1 + (R - 2)^2, \text{ 解得}$$

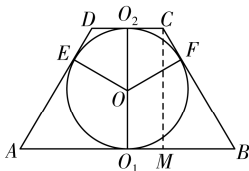
$$R = \frac{5}{4}, \text{ 此时 } OO_1 = R - 2 < 0, \text{ 不符合题意.}$$

$$\text{综上, 该三棱锥的外接球的体积为 } \frac{125\pi}{48}.$$

故选 A.



3. D 突破点 ▶ 圆台的内切球、线面角

【解析】设圆台上底面半径为 r_1 , 下底面半径为 r_2 ,如图, 取圆台的轴截面 $ABCD$, 作 $CM \perp AB$, 垂足为 M ,

设内切球 O 与梯形 $ABCD$ 的两腰分别切于点 E, F , 与上下底面分别切于点 O_2, O_1 , 可知 $BC = r_1 + r_2, BM = r_2 - r_1$.

由题意可知, 圆台的母线与底面所成角

$$B = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{则 } \frac{BM}{BC} = \frac{r_2 - r_1}{r_1 + r_2} = \frac{1}{2}, \text{ 可得 } r_2 = 3r_1,$$



则 $BC = 4r_1, BM = 2r_1, CM = \sqrt{BC^2 - BM^2} = 2\sqrt{3}r_1$, 则 $S_{\text{圆台表}} = \pi r_1^2 + 9\pi r_1^2 + \pi(r_1 + 3r_1) \times 4r_1 = 26\pi r_1^2$,

易知内切球 O 的半径 $r = \sqrt{3}r_1$,

则 $S_{\text{球}} = 4\pi \times (\sqrt{3}r_1)^2 = 12\pi r_1^2$,

所以 $\frac{S_{\text{圆台表}}}{S_{\text{球}}} = \frac{26\pi r_1^2}{12\pi r_1^2} = \frac{13}{6}$.

故选 D.

4. A 突破点 ▶ 利用导数求函数的最值、圆锥的内切球

【解析】 设圆锥的底面半径为 r , 高为 h , 则 $h^2 + r^2 = 3$,

则圆锥体积 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = -\frac{\pi}{3}h^3 + \pi h, h \in (0, \sqrt{3})$.

设 $f(h) = -\frac{\pi}{3}h^3 + \pi h, h \in (0, \sqrt{3})$,

则 $f'(h) = \pi(1-h)(1+h)$,

当 $0 < h < 1$ 时, $f'(h) > 0$, 当 $1 < h < \sqrt{3}$ 时, $f'(h) < 0$,

所以 $f(h)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, \sqrt{3})$ 上单调递减,

所以当圆锥体积取得最大值时, $h = 1, r = \sqrt{2}$.

设圆锥内切球的半径为 R , 则由圆锥轴截面的面积可得 $\frac{1}{2} \cdot 2rh = \frac{1}{2}(2r + 2\sqrt{3})R$,

解得 $R = \sqrt{6} - 2$.

故选 A.

5. C 突破点 ▶ 正方体的外接球、正四面体的内切球

【解析】 如图, 设正四面体 $ABCD$ 的底面 BCD 的中心为点 E , 连接 AE, DE . 由正四面体的性质得 $AE \perp$ 平面 BCD . 因为正四面体 $ABCD$ 的棱长为 2, 所以 $\triangle BCD$ 的高为 $2\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, 则 $DE = \frac{2}{3} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 所以正四面体 $ABCD$ 的高 $AE =$

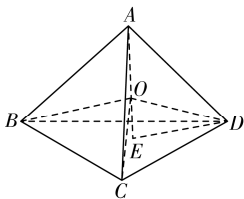
$\sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$. 设正四面体 $ABCD$

内切球的半径为 R , 球心为 O , 连接 OB, OC, OD . 由等体积法可得 $V_{\text{正四面体}ABCD} =$

$4V_{\text{正三棱锥}O-BCD}$, 即 $\frac{1}{3} \times S_{\triangle BCD} \times AE = 4 \times \frac{1}{3} \times$

$S_{\triangle BCD} \times R$, 解得 $R = \frac{1}{4}AE = \frac{\sqrt{6}}{6}$. 因为正方

体的棱长为 a , 所以正方体的外接球的半径 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}a \leq R = \frac{\sqrt{6}}{6}$, 故 $a_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. 故选 C.



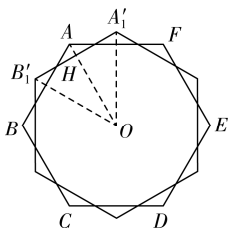
6. BCD 突破点 ▶ 多面体的外接球、异面



直线所成的角

【解析】如图作出正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 在平面 $ABCDEF$ 上的射影, 设 A_1, B_1 在下底面的射影分别为 A', B' , 连接 OA, OA', OB' , 则 OA 平分 $\angle A'OB'$, $\triangle A'OB'$ 为等边三角形, 所以异面直线 O_1A_1 与 OA 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$, 故

A 错误. 易知 OO_1 垂直于底面, 所以 $OO_1 \perp A'B'$, 又 OA 平分 $\angle A'OB'$, 所以 $OA \perp A'B'$, 因为 $OA \cap OO_1 = O, OA, OO_1 \subset$ 平面 O_1OA , 所以 $A'B' \perp$ 平面 O_1OA , 又 $A_1B_1 \parallel A'B'$, 所以 $A_1B_1 \perp$ 平面 O_1OA , 故 B 正确. 设 A_1B_1 的中点为 G , 则 G 在下底面 $ABCDEF$ 上的射影为 H , 上、下两底面间的距离为 d , 设该多面体外接球的半径为 R , 易知 $OA = 2, OH = \sqrt{3}$, 等边三角形 AA_1B_1 的高为 $\sqrt{3}$, 所以 $d^2 = (\sqrt{3})^2 - (2 - \sqrt{3})^2 = 4\sqrt{3} - 4, R^2 = 2^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \sqrt{3} + 3$, 从而所求外接球的表面积为 $(4\sqrt{3} + 12)\pi$, 故 C 正确. 设直线 AB_1 与下底面所成的角为 θ , 由 C 选项分析可知 $d = 2\sqrt{\sqrt{3} - 1}$, 所以 $\sin \theta = \frac{2\sqrt{\sqrt{3} - 1}}{2} = \sqrt{\sqrt{3} - 1}$, 故 D 正确. 故选 BCD.



7. B 突破点 ▶ 四面体的外接球

【解析】依题意, 可将四面体 $ABCD$ 补形为如图所示的直三棱柱 $ABE-FCD$. 因为 AB 与 CD 所成的角为 60° , 所以 $\angle DCF = 60^\circ$ 或 120° . 设 $CD = x, CF = y$, 四面体 $ABCD$ 的外接球半径为 R , 外接球的球心为 O , $\triangle ABE$ 的中心为 O_1 , $\triangle CDF$ 的中心为 O_2 , 连接 O_1O_2, CO_2, CO . 易知 O 为 O_1O_2 的中点, $AF \parallel$ 平面 $BCDE$, 所以点 A 到平面 $BCDE$ 的距离等于点 F 到平面

$BCDE$ 的距离, 则 $V_{A-BCD} = V_{F-BCD} = \frac{1}{3} \cdot BC \cdot$

$$S_{\triangle CDF} = \frac{1}{3} \times 2 \times \left(\frac{1}{2} xy \sin 60^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{6} xy = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{ 所以 } xy = 9.$$

$$\text{在 Rt } \triangle OCO_2 \text{ 中, } R^2 = OC^2 = OO_2^2 + CO_2^2 = 1 + \left(\frac{DF}{2 \sin \angle DCF} \right)^2 = 1 + \frac{1}{3} DF^2,$$

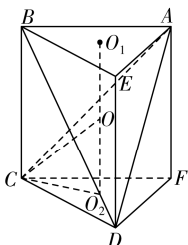
在 $\triangle CDF$ 中, 由余弦定理得 $DF^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \angle DCF$,

显然, 当 $\angle DCF = 60^\circ$ 时, DF 更小, 则外接球的半径 R 会更小, 此时 $DF^2 = x^2 + y^2 -$

$$xy, R^2 = 1 + \frac{1}{3} (x^2 + y^2 - xy) \geq 1 + \frac{1}{3} (2xy -$$

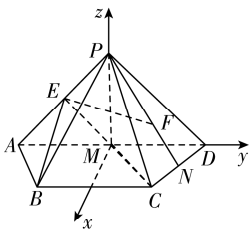


$xy) = 1 + \frac{1}{3}xy = 4$ (当且仅当 $x = y = 3$ 时取等号), 所以 $R \geq 2$, 故四面体 $ABCD$ 的外接球半径的最小值为 2. 故选 B.



8. C 突破点 ▶ 多面体的外接球

【解析】连接 EB, EC, EF , 因为 $PM \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PM \perp AD$, 以点 M 为坐标原点, MD, MP 所在直线分别为 y, z 轴, 平面 $ABCD$ 内过点 M 且垂直于 AD 的直线为 x 轴建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $C(3\sqrt{3}, 3, 0), D(0, 6, 0), P(0, 0, 6), N\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, 0\right), M(0, 0, 0), E(0, -3, 3), \vec{CE} = (-3\sqrt{3}, -6, 3),$

直线 BC 的一个方向向量为 $t = (0, 1, 0)$, 设平面 EBC 的法向量为 $m = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} m \cdot \vec{CE} = -3\sqrt{3}x - 6y + 3z = 0, \\ m \cdot t = y = 0, \end{cases}$ 取 $x = 1$,

可得 $m = (1, 0, \sqrt{3})$.

设 $\vec{PF} = \lambda \vec{PN} = \lambda \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, -6\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda, \frac{9}{2}\lambda, -6\lambda\right),$

则 $\vec{EF} = \vec{EP} + \vec{PF} = (0, 3, 3) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda, \frac{9}{2}\lambda, -6\lambda\right) = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda, \frac{9}{2}\lambda + 3, 3 - 6\lambda\right),$

因为 $EF \subset$ 平面 EBC , 所以 $\vec{EF} \cdot m = \frac{3\sqrt{3}}{2}\lambda + 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3}\lambda = 0$, 解得 $\lambda = \frac{2}{3}$, 所以

$\vec{MF} = \vec{MP} + \frac{2}{3}\vec{PN} = (0, 0, 6) + (\sqrt{3}, 3, -4) = (\sqrt{3}, 3, 2)$, 故点 F 的坐标为 $(\sqrt{3}, 3, 2)$.

设经过 F, M, C, D 四点的球的球心为 $O(a, b, c)$,



$$\text{由} \begin{cases} OM=OC, \\ OM=OD, \text{可得} \\ OM=OF, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=(a-3\sqrt{3})^2+(b-3)^2+c^2, \\ a^2+b^2+c^2=a^2+(b-6)^2+c^2, \\ a^2+b^2+c^2=(a-\sqrt{3})^2+(b-3)^2+(c-2)^2, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=\sqrt{3}, \\ b=3, \\ c=-2, \end{cases}$$

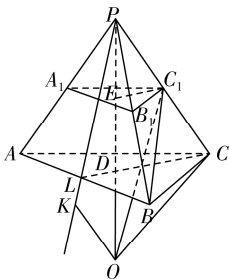
所以球 O 的半径为 $\sqrt{3+9+4}=4$,

故经过 F, M, C, D 四点的球的表面积为 $4\pi \times 16 = 64\pi$.

故选 C.

9. ACD 突破点 ▶ 正三棱台的外接球问题

【解析】如图, 延长 AA_1, BB_1, CC_1 交于点 P . 因为 $AB = 2A_1B_1$, 所以 A_1B_1 为 $\triangle PAB$ 的中位线.



因为 $AA_1 = \sqrt{6}$, 所以 $PA = 2\sqrt{6}$, 则 $PA^2 + PB^2 = 48 = AB^2$, 所以 $PA \perp PB$, 同理可得 $PA \perp PC$.

因为 $PB \cap PC = P, PB, PC \subset$ 平面 PBC , 所以 $PA \perp$ 平面 PBC , 同理可得 $PC \perp$ 平面 PAB . 又 $BC_1 \subset$ 平面 PBC , 所以 $PA \perp BC_1$, 即 $AA_1 \perp BC_1$, 故 A 正确.

设点 P 在底面 ABC 上的射影为 D , 连接

CD, PD , 则 $CD = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times AB = 4$, 所以

$$PD = \sqrt{PC^2 - CD^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 - 4^2} = 2\sqrt{2},$$

所以 $V_{\text{三棱台}ABC-A_1B_1C_1} = V_{\text{三棱锥}P-ABC} -$

$$V_{\text{三棱锥}P-A_1B_1C_1} = V_{\text{三棱锥}P-ABC} - \frac{1}{8} V_{\text{三棱锥}P-ABC} =$$

$$\frac{7}{8} V_{\text{三棱锥}P-ABC} = \frac{7}{8} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB^2 \times \sin 60^\circ \times$$

$PD = 7\sqrt{6}$, 故 B 错误.

设 PD 与平面 $A_1B_1C_1$ 的交点为 E , 球 O 的半径为 R , 连接 OD, OC, OC_1, EC_1 , 则 $EC_1 = 2$.

因为 $DE = \frac{1}{2} PD = \sqrt{2}$, 所以当球心 O 在

棱台内部时, $(\sqrt{2} - OD)^2 + 2^2 = OD^2 + 4^2$, 解



得 $OD = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$, 不符合题意, 当球心 O 在

棱台外部时, $R^2 = (OD + \sqrt{2})^2 + 2^2$ ①, 且

$R^2 = OD^2 + 4^2$ ②, 由 ①② 解得 $OD = \frac{5\sqrt{2}}{2}$,

$R = \frac{\sqrt{114}}{2}$, 所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2 =$

114π , 故 C 正确.

取 AB 的中点 L , 连接 PL, DL , 过点 O 作 CP 的平行线交直线 PL 于点 K , 因为 $PC \perp$ 平面 PAB , 所以 $OK \perp$ 平面 PAB . 易

知 $\text{Rt}\triangle PLD \sim \text{Rt}\triangle POK$, 所以 $\frac{PL}{PO} = \frac{DL}{KO}$, 所

以 $KO = \frac{DL \cdot PO}{PL} = \frac{2 \times \left(2\sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)}{2\sqrt{3}} =$

$\frac{3\sqrt{6}}{2}$, 所以球 O 被平面 A_1ABB_1 截得的圆

面的半径为 $\sqrt{R^2 - KO^2} = \sqrt{15}$, 所以截面

圆的周长为 $2\sqrt{15}\pi$, 故 D 正确. 故

选 ACD.

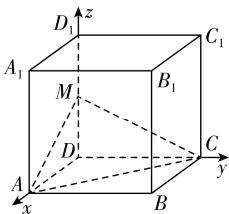
专题 2 截面、翻折问题

刷

难关

1. A 考查点 ▶ 正方体的内切球、截面面积

【解析】正方体内切球的球心 O 为正方体中心, 内切球的半径 $R = 1$, 以 D 为原点, $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 如图,



则 $O(1, 1, 1), M(0, 0, 1), A(2, 0, 0),$

$C(0, 2, 0),$

所以 $\overrightarrow{AM} = (-2, 0, 1), \overrightarrow{CM} = (0, -2, 1),$

$\overrightarrow{MO} = (1, 1, 0).$

设平面 AMC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z),$

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AM} = -2x + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CM} = -2y + z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$, 则 $y = 1,$

$z = 2$, 所以 $\mathbf{n} = (1, 1, 2),$

则 O 到平面 AMC 的距离 $d =$

$\frac{|\overrightarrow{MO} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$

设平面 ACM 截正方体的内切球所得截

面圆的半径为 r , 则 $r^2 = R^2 - d^2 = \frac{1}{3}$, 所以

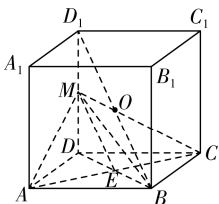


所求截面面积为 $\frac{\pi}{3}$.

故选 A.

一题多解

正方体内切球的球心 O 为正方体中心, 内切球的半径 $R=1$. 连接 BD , 设 AC, BD 的交点为 E , 连接 ME, BM, BD_1 ,



可得 $ME \parallel BD_1$, 因为 $ME \subset$ 平面 AMC , $BD_1 \not\subset$ 平面 AMC , 所以 $BD_1 \parallel$ 平面 AMC .

又点 O 在 BD_1 上,

则 O 到平面 AMC 的距离等于点 B 到平面 AMC 的距离, 设为 d ,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, S_{\triangle AMC} = \frac{1}{2} \times AC \times ME =$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{1+2} = \sqrt{6},$$

$$\text{由 } V_{B-AMC} = V_{M-ABC} \text{ 得 } \frac{1}{3} \times \sqrt{6}d = \frac{1}{3} \times 2 \times 1, \text{ 解}$$

$$\text{得 } d = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

设平面 ACM 截正方体的内切球所得截面圆的半径为 r , 则 $r^2 = R^2 - d^2 = \frac{1}{3}$,

所以所求截面面积为 $\frac{\pi}{3}$.

2. A 突破点 ▶ 异面直线所成角

【解析】在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD^2 + BD^2 = 4 = AB^2$, 则 $AD \perp BD, CB \perp BD$, 即 $BC' \perp BD$,

又平面 $BC'D \perp$ 平面 CBD , 平面 $BC'D \cap$ 平面 $CBD = BD, BC' \subset$ 平面 $BC'D$,

所以 $BC' \perp$ 平面 CBD , 又 $BC \subset$ 平面 CBD , 所以 $BC' \perp BC$.

如图, 以点 B 为原点, 直线 BC, BD, BC' 分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系,

$$\text{则 } E\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), C'(0, 0, 1), D(0, \sqrt{3},$$

$$0), A(-1, \sqrt{3}, 0), F\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

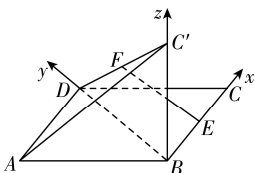
$$\text{所以 } \overrightarrow{EF} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \overrightarrow{AC'} = (1,$$

$$-\sqrt{3}, 1), \text{ 则 } |\cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AC'} \rangle| =$$

$$\frac{|\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{AC'}|}{|\overrightarrow{EF}| |\overrightarrow{AC'}|} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \times \sqrt{5}} = \frac{3}{5},$$

所以直线 EF 与 AC' 所成角的余弦值为

$$\frac{3}{5}. \text{ 故选 A.}$$



3. C 突破点 ▶ 正方体的外接球、截面面积的计算

【解析】如图,连接 BC_1, AD_1 ,

因为 $AB \perp$ 平面 BB_1C_1C , $B_1C \subset$ 平面 BB_1C_1C , 所以 $B_1C \perp AB$, 又 $B_1C \perp BC_1$, $AB \cap BC_1 = B, AB, BC_1 \subset$ 平面 ABC_1D_1 ,

所以直线 $B_1C \perp$ 平面 ABC_1D_1 ,

则 α 为过点 P 且与平面 ABC_1D_1 平行的平面, 易知点 O 在平面 ABC_1D_1 内,

则点 O 到平面 α 的距离 d 就是平面 ABC_1D_1 与平面 α 的距离.

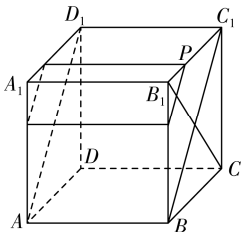
因为 $\overrightarrow{B_1P} = \frac{1}{3} \overrightarrow{B_1C_1}$, 所以 $d = \frac{2}{3} \cdot$

$$\frac{B_1C}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3},$$

又球 O 的半径 $R = 2\sqrt{3}$, 所以 α 截球 O 所

得截面圆的半径 $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{2\sqrt{19}}{3}$, 截

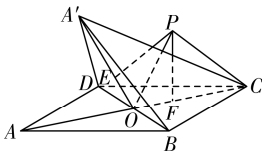
面圆的面积为 $\frac{76\pi}{9}$. 故选 C.



4. D 突破点 ▶ 翻折问题、三棱锥的外接球

【解析】在菱形 $ABCD$ 中, 由 $\angle BAD = 60^\circ$, 可知 $\triangle ABD, \triangle BCD, \triangle A'BD$ 为正三角形.

设 P 为三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球球心, 取 $\triangle A'BD, \triangle BCD$ 的中心分别为 E, F , 连接 PE, PF, PC, PO , 如图.



$$OC = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = 3, OF = \frac{1}{3} OC = 1,$$

易知 $\triangle PFO \cong \triangle PEO$, 则 $\angle POF =$

$$\frac{1}{2} \angle A'OC = 60^\circ, \text{ 则 } PO = \frac{OF}{\cos 60^\circ} = 2.$$

在 $\triangle POC$ 中, 由余弦定理得 $PC^2 = PO^2 + CO^2 - 2 \cdot PO \cdot CO \cdot \cos 60^\circ$, 解得

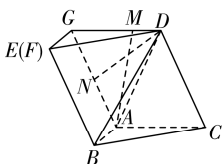
$$PC = \sqrt{7},$$

所以该球的表面积为 $4\pi \cdot (\sqrt{7})^2 = 28\pi$.

故选 D.

5. B 突破点 ▶ 翻折问题、五面体的体积

【解析】连接 AD ,



由题意可知 $AB \perp AC, AB \perp AG$, 因为 $AC \cap AG = A, AC, AG \subset \text{平面 } ACDG$,

所以 $AB \perp \text{平面 } ACDG$,

又 $AD \subset \text{平面 } ACDG$, 所以 $AB \perp AD$.

连接 BD , 易知 $\triangle BCD$ 为等边三角形, 则 $BC = BE = BD = 2$, 可得 $AD =$

$$\sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{3}.$$

易知 $\triangle ABC \cong \triangle GED$, 则 $DG = AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{3}$.

取 AG 的中点 N , 连接 DN , 则 $DN \perp AG$, 可得 $DN = \sqrt{DG^2 - GN^2} = \sqrt{2}$.

过 A 作 $AM \perp DG$, 垂足为 M ,

由 $\frac{1}{2} AG \cdot DN = \frac{1}{2} DG \cdot AM$, 得 $AM =$

$$\frac{AG \cdot DN}{DG} = \frac{2 \times \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

因为 $DG \parallel AC$, 所以 $AM \perp AC$,

因为 $AB \perp \text{平面 } ACDG, AB \subset \text{平面 } ABC$, 所以 $\text{平面 } ABC \perp \text{平面 } ACDG$,

又 $\text{平面 } ABC \cap \text{平面 } ACDG = AC, AM \subset \text{平面 } ACDG$,

所以 $AM \perp \text{平面 } ABC$,

所以该五面体的体积为 $\frac{2\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} = \sqrt{2}$. 故选 B.

6. ABD 突破点 ▶ 三棱锥与外接球、异面直线所成的角、线面角

【解析】由题意可得 $BP \perp AP, BP \perp CP$, 因为 $AP \cap CP = P, AP, CP \subset \text{平面 } PAC$, 所以 $BP \perp \text{平面 } PAC$.

在 $\triangle PAC$ 中, $PA = PC = 2\sqrt{3}, AC = 4$, AC 边上的高为 $\sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$,

所以 $V_{P-ABC} = V_{B-PAC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} \times 2 = \frac{8\sqrt{2}}{3}$, 故 A 正确.

在 $\triangle PAC$ 中, $\cos \angle APC = \frac{12+12-16}{2 \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$,

则 $\cos \langle \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BC} \rangle = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB})}{2\sqrt{3} \times \sqrt{12+4}} = \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{8\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$,

所以直线 PA 与直线 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$, 故 B 正确.

$S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} PB \cdot PC = 2\sqrt{3}$, 设点 A 到平面



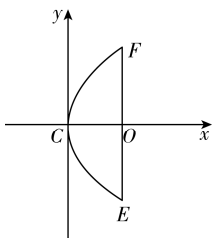
因为 $CO \cap EF = O, CO, EF \subset \text{平面 } CEF$, 所以 $SA \perp \text{平面 } CEF$, 则平面 CEF 为截面.

因为 D, O 分别为 SB, AB 的中点, 所以 $OD \parallel SA$, 所以 $OD \perp \text{平面 } CEF$,

因为 $OP \subset \text{平面 } CEF$, 所以 $OD \perp OP$, 所以 $DP = \sqrt{OD^2 + OP^2} = \sqrt{1 + OP^2}$,

则当 OP 的值最大时, DP 的值最大,

如图②为截面 CEF 的平面图,



图②

以 C 为原点, CO 所在直线为 x 轴, 建立如图②所示的平面直角坐标系,

$CO = 1, OE = OF = \sqrt{2}, O(1, 0)$, 则截口曲线的方程为 $y^2 = 2x (-\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2})$,

设 $P\left(\frac{a^2}{2}, a\right), a \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 则 OP 的长

度为 $\sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{2}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{a^4}{4} + 1}$,

所以当 $a = -\sqrt{2}$ 或 $a = \sqrt{2}$ 时, OP 的值最大, 最大值为 $\sqrt{2}$,

则 $\frac{DP}{DC}$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{1 + (\sqrt{2})^2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

故选 C.

8. BCD 突破点 ▶ 棱柱的截面、异面直线所成的角

【解析】设直线 FP 交直线 CC_1 于点 K , 设 $\vec{CK} = k\vec{CC_1} (k \neq 0)$.

因为 $\vec{CP} = \lambda \vec{CB_1} = \lambda (\vec{CB} + \vec{CC_1}) = 2\lambda \vec{CF} + \frac{\lambda}{k} \vec{CK} \left(0 < \lambda < \frac{1}{3}\right)$, F, P, K 三点共线, 所

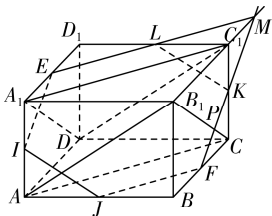
以 $2\lambda + \frac{\lambda}{k} = 1$, 解得 $k = \frac{\lambda}{1 - 2\lambda}$, 因为 $0 < \lambda < \frac{1}{3}$, 所以 $0 < k < 1$,

所以点 K 在线段 CC_1 上.

设射线 FK 与射线 B_1C_1 交于点 M , 连接 EM 交 C_1D_1 于点 L , 如图①所示.

在线段 A_1A 上取点 I , 使 $A_1I = CK$, 在线段 AB 上取点 J , 使 $AJ = C_1L$,

连接 LK, EI, IJ, JF , 易知点 F, P, K, L, E, I, J 共面, 可得经过 P, E, F 三点的直棱柱的截面为六边形 $FKLEIJ$, 故 A 错误.



图①

连接 AC, AB_1 , 如图①所示, 因为 $A_1C_1 \parallel$

AC , 所以 $\angle B_1CA$ 即为异面直线 B_1C 与 A_1C_1 所成的角, 设为 θ .

在 $\triangle AB_1C$ 中, $B_1A = B_1C = 2, AC = \sqrt{6}$, 所

以 $\cos \theta = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$, 故 B 正确.

易知平面 $A_1C_1D \parallel$ 平面 $ACB_1, B_1C \subset$ 平面 ACB_1 , 所以 $B_1C \parallel$ 平面 A_1C_1D .

点 $P \in B_1C$, 所以点 P 到平面 A_1C_1D 的距离为定值, 所以三棱锥 $P-A_1DC_1$ 的体积为定值, 故 C 正确.

将 $\triangle BCB_1$ 绕 B_1C 旋转, 使点 A_1, B_1, B, C, D 共面, 如图②所示, 连接 A_1B , 则 $A_1P + BP \geq A_1B$.

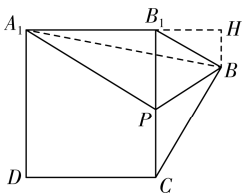
过 B 作 $BH \perp A_1B_1$, 垂足为 H .

在 $\triangle BB_1C$ 中, $BB_1 = 1, BC = \sqrt{3}, \angle B_1BC = 90^\circ$, 所以 $\angle BB_1C = 60^\circ, \angle BB_1H = 30^\circ$, 则

$$B_1H = \frac{\sqrt{3}}{2}, BH = \frac{1}{2},$$

$$\text{所以 } A_1B = \sqrt{\left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{7},$$

故 $A_1P + BP$ 的最小值为 $\sqrt{7}$, 故 D 正确. 故选 BCD.



图②

9. ACD 突破点 ▶ 直棱柱的截面、线线位置关系的判定

【解析】当 $\mu = 1$ 时, $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 则 $\overrightarrow{B_1P} = \lambda \overrightarrow{BC}$ ($0 \leq \lambda \leq 1$), 故点 P 在线段 B_1C_1 上运动,

因为 $B_1C_1 \parallel$ 平面 DBC , 所以三棱锥 $P-DBC$ 的体积为定值, 故 A 正确.

当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 取线段 BC 的中点 E , 连接 EN, B_1E, DB_1 , 如图①, 易得点 P 在线段 EN 上运动,

当点 P 与点 E 重合时, 因为底面 $ABCD$ 为菱形, 且 $\angle BAD = 60^\circ$,

所以 $DB = DC$, 因为 E 为线段 BC 的中点, 所以 $DE \perp BC$,

又 $AB = AA_1 = 4$, 所以 $DE = 2\sqrt{3}$, 由题可知 $B_1B \perp$ 平面 $ABCD$, 因为 $BE, BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $B_1B \perp BE, B_1B \perp BD$,

则 $B_1B^2 + BE^2 = B_1E^2, B_1B^2 + DB^2 = DB_1^2$, 所以 $B_1E = 2\sqrt{5}, DB_1 = 4\sqrt{2}$, 即 $DB_1^2 = B_1E^2 + DE^2$,

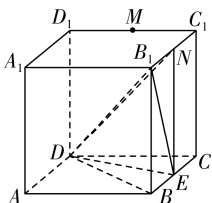
所以 $ED \perp EB_1$, 即 $PD \perp PB_1$.

连接 DN , 当点 P 与点 N 重合时, 因为 $B_1N = 2, DB_1 = 4\sqrt{2}, NE = 4$,

$NE \perp DE$, 所以 $NE^2 + DE^2 = DN^2$, 则 $DN = 2\sqrt{7}$, 即 $DB_1^2 = B_1N^2 + DN^2$,



所以 $ND \perp NB_1$, 即 $PD \perp PB_1$,
故 B 错误.



图①

当 $\lambda + \mu = \frac{1}{2}$ 时, 取 BC 中点记为 E_1 , 取 BB_1 中点记为 F , 连接 E_1F (图略), 则点 P 在线段 E_1F 上运动, 设点 C 关于直线 E_1F 的对称点为 C' ,

连接 NC' (图略), 此时点 N, E_1, C' 三点共线, 则 $PN + PC \geq NC'$, 当且仅当点 P 与点 E_1 重合时, $PN + PC$ 取得最小值 6, 故 C 正确.

当 $\lambda = 0, \mu = \frac{1}{2}$ 时, P 为 BB_1 的中点,

取 BA 上靠近点 B 的四等分点 T , 连接 DM, TP , 如图②所示, 易知 $\triangle PBT \sim \triangle DD_1M$, $PT \parallel DM$, 则 D, M, P, T 四点共面. 取线段 B_1C_1 上一点 W , 使 $C_1W = \frac{8}{3}$,

连接 MW, WP, DT , 因为 $\frac{C_1M}{AT} = \frac{C_1W}{AD} = \frac{2}{3}$,

$\angle WC_1M = \angle DAT$, 所以 $\triangle ATD \sim \triangle C_1MW$, 易知 $MW \parallel DT$, 所以 M, W, D, T 四点共面, 所以平面 DPM 截该直棱柱所得截面为五边形 $DTPWM$.

易知 $B_1W = \frac{4}{3}$, $WP = \frac{2\sqrt{13}}{3}$, $DM = 2\sqrt{5}$,

$TP = \sqrt{5}$,

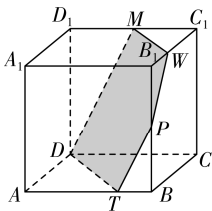
$DT = \sqrt{4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \cos 60^\circ} = \sqrt{13}$,

$MW = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 - 2 \times 2 \times \frac{8}{3} \cos 60^\circ} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$,

故平面 DPM 截该直棱柱所得截面周长为

$\frac{2\sqrt{13}}{3} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{13} + \frac{2\sqrt{13}}{3} = \frac{9\sqrt{5} + 7\sqrt{13}}{3}$,

故 D 正确.



图②

故选 ACD.

10. 突破点 ▶ 证明线面平行、已知线面角求线段长

(1) 【证明】在线段 CN 上取一点 Q , 使

得 $NQ = \frac{2}{3}NC$, 连接 PQ, BQ , 如图①.

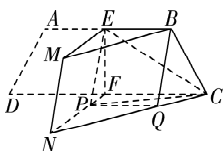


因为 $\overrightarrow{NP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{NF}$, 所以 $PQ \parallel FC$, 且 $PQ = \frac{2}{3}FC = 2$.

因为 $AB \parallel CD$, $BE = 2$, 所以 $PQ \parallel BE$, 且 $PQ = BE$,

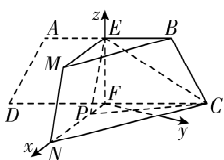
所以四边形 $EBQP$ 是平行四边形, 所以 $EP \parallel BQ$.

因为 $EP \not\subset$ 平面 $BCNM$, $BQ \subset$ 平面 $BCNM$, 所以 $EP \parallel$ 平面 $BCNM$.



图①

(2)【解】以 F 为坐标原点, FN, FE 所在直线分别为 x, z 轴, 过点 F 且垂直 FN 的直线为 y 轴, 建立如图②所示的空间直角坐标系,



图②

则 $E(0, 0, 2)$, $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $\overrightarrow{EC} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}, -2\right)$.

设 $P(a, 0, 0)$ ($a \geq 0$), 则 $\overrightarrow{EP} = (a, 0, -2)$.

设平面 CEP 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EC} = -\frac{3}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}y - 2z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{EP} = ax - 2z = 0, \end{cases}$$

令 $x = 2$, 则 $\mathbf{n} = \left(2, \frac{2\sqrt{3}(2a+3)}{9}, a\right)$.

直线 FN 的一个方向向量为 $\mathbf{m} = (1, 0, 0)$.

$$|\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} \right| = \frac{2}{\sqrt{4 + \left[\frac{2\sqrt{3}(2a+3)}{9} \right]^2 + a^2}} = \frac{2}{5},$$

解得 $a = 3$ ($a = -\frac{177}{43}$ 舍去).

故 $PF = 3$.

11. 突破点 ▶ 证明线面平行、求线面角的正弦值

(1)【证明】如图, 取 BC 的中点 Q , 连接 EQ, MQ ,

由题知, $AE \parallel BC$, $AE = \frac{1}{2}BC$, 所以 $AE \parallel BQ$ 且 $AE = BQ$,

所以四边形 $ABQE$ 为平行四边形,

所以 $EQ \parallel AB$, 又 $FC \parallel AB$, 所以 $EQ \parallel FC$.

因为 $EQ \not\subset$ 平面 PCF , $FC \subset$ 平面 PCF , 所以 $EQ \parallel$ 平面 PCF .

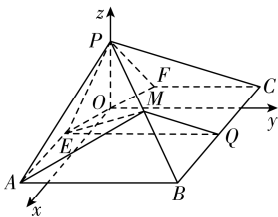


在 $\triangle PBC$ 中, M, Q 分别为 PB, BC 的中点, 所以 $MQ \parallel PC$.

因为 $MQ \not\subset$ 平面 PCF , $PC \subset$ 平面 PCF , 所以 $MQ \parallel$ 平面 PCF .

因为 $EQ \cap MQ = Q$, $EQ \subset$ 平面 EMQ , $MQ \subset$ 平面 EMQ ,

所以平面 $EMQ \parallel$ 平面 PCF , 又 $EM \subset$ 平面 EMQ , 所以 $EM \parallel$ 平面 PCF .



(2) 【解】取 EF 的中点 O , 连接 OP , 如图所示,

在 $\text{Rt} \triangle PEF$ 中, $PE = PF = 2$, $PO \perp EF$, 且 $PO = \sqrt{2}$.

因为平面 $PEF \perp$ 平面 $ABCFE$, 且平面 $PEF \cap$ 平面 $ABCFE = EF$,

所以 $PO \perp$ 平面 $ABCFE$,

以 O 为坐标原点, OP 所在直线为 z 轴, 过点 O 分别作与 BC 平行的直线为 x 轴, 与 AB 平行的直线为 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $P(0, 0, \sqrt{2})$, $A(3, -1, 0)$, $B(3, 5, 0)$, $C(-1, 5, 0)$, $F(-1, 1, 0)$, $M\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

所以 $\overrightarrow{PF} = (-1, 1, -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{CF} = (0, -4, 0)$, $\overrightarrow{AM} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

设平面 PCF 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PF} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CF} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -x + y - \sqrt{2}z = 0, \\ -4y = 0, \end{cases}$ 所

以 $\begin{cases} x = -\sqrt{2}z, \\ y = 0, \end{cases}$

取 $z = 1$, 得平面 PCF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (-\sqrt{2}, 0, 1)$, 设直线 AM 与平面 PCF 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AM}, \boldsymbol{n} \rangle|$

$$= \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AM}| |\boldsymbol{n}|} = \left| \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \times \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 1^2}} \right| = \frac{2\sqrt{10}}{15},$$

所以直线 AM 与平面 PCF 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{10}}{15}$.

专题3 动点、轨迹与探索性问题

刷

难关

1. B 考查点 ▶ 三棱锥的体积

【解析】由题意知, $AB = CD = BC = 1$, 则

$$\triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2},$$



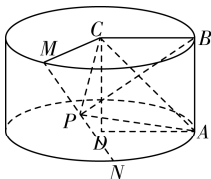
设点 P 到平面 ABC 的距离为 h ,

$$\text{则 } V_{A-PBC} = V_{P-ABC} = \frac{1}{3}h \times S = \frac{1}{6}h.$$

要使三棱锥 $A-PBC$ 的体积最大, 则需 h 最大, 根据图形可得,

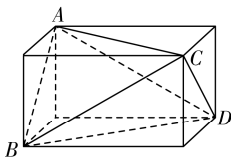
当 $MN \parallel CD$, 且 $CM \perp$ 平面 ABC 时, h 最大, 最大值为 1, 故 $(V_{A-PBC})_{\max} = \frac{1}{6}$.

故选 B.



2. C 突破点 ▶ 动点的轨迹问题、四面体的外接球

【解析】如图, 将四面体 $ABCD$ 放置在一个长方体中,



由题可知长方体的长、宽、高分别为 $2\sqrt{14}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$,

则长方体的体对角线长为

$$\sqrt{2(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{14})^2} = 6\sqrt{2},$$

则四面体 $ABCD$ 外接球的半径 $R = 3\sqrt{2}$.

因为 $MA = 4\sqrt{3}$, 动点 M 在四面体 $ABCD$ 的外接球的球面上, 所以点 M 的轨迹为一个圆, 设其半径为 r ,

$$\text{则 } r^2 + (R + \sqrt{R^2 - r^2})^2 = (4\sqrt{3})^2, \text{ 即 } r^2 + (3\sqrt{2} + \sqrt{18 - r^2})^2 = (4\sqrt{3})^2, \text{ 解得 } r = 4;$$

$$\text{或 } r^2 + (R - \sqrt{R^2 - r^2})^2 = (4\sqrt{3})^2, \text{ 即 } r^2 + (3\sqrt{2} - \sqrt{18 - r^2})^2 = (4\sqrt{3})^2, \text{ 此时无解.}$$

故所求轨迹长度为 $2\pi r = 8\pi$.

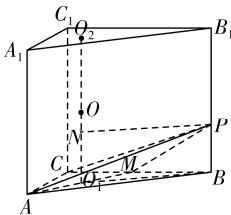
故选 C.

3. B 突破点 ▶ 基本不等式、三棱锥的外接球、球的表面积

【解析】由题易知 $\triangle ACM$ 是等腰直角三角形, 则 $\triangle ACM$ 外接圆的圆心 O_1 为 AM 的中点, 连接 BO_1 ,

过 O_1 作平面 ABC 的垂线 O_1O_2 , 则三棱锥 $P-ACM$ 外接球的球心 O 在 O_1O_2 上.

过点 P 作 $PN \perp O_1O_2$ 交 O_1O_2 于点 N , 易知四边形 $BPNO_1$ 为矩形,



在 $\triangle MBO_1$ 中, $AO_1 = O_1M = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $BM = 1$, 由

$$\text{余弦定理得 } BO_1^2 = \frac{1}{2} + 1 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times$$



$$\cos 135^\circ = \frac{5}{2},$$

$$\text{所以 } PN = BO_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

设 $OO_1 = m, BP = n$, 三棱锥 $P-ACM$ 的外接球的半径为 R ,

$$\text{则 } R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + m^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + (m-n)^2,$$

则 $n^2 + 2 = 2mn$, 当 $n = 0$ 时等式不成立, 所以 $n > 0$,

$$\text{所以 } m = \frac{n^2 + 2}{2n} = \frac{n}{2} + \frac{1}{n} \geq 2\sqrt{\frac{n}{2} \cdot \frac{1}{n}} = \sqrt{2},$$

当且仅当 $n = \sqrt{2}$ 时等号成立,

$$\text{所以 } R^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + m^2 \geq \frac{1}{2} + (\sqrt{2})^2 = \frac{5}{2},$$

则三棱锥 $P-ACM$ 的外接球表面积的最小值为 10π . 故选 B.

4. ABC 突破点 ▶ 线线平行、四面体的体积、异面直线所成角、点到平面的距离

【解析】如图, 连接 A_1D, BD ,

因为 E 是侧面 AA_1D_1D 的中心, F 是底面 $ABCD$ 的中心,

所以 E 为 A_1D 的中点, F 为 BD 的中点,

所以在 $\triangle A_1BD$ 中, EF 为 $\triangle A_1BD$ 的中位线, 即 $EF \parallel A_1B$, A 正确;

因为 $AD \parallel BC, AD \not\subset$ 平面 $A_1BC, BC \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $AD \parallel$ 平面 A_1BC ,

又点 M 在线段 AD 上运动, 所以点 M 到平面 A_1BC 的距离为定值,

又 $S_{\triangle A_1BC}$ 为定值, 所以四面体 MA_1BC 的体积为定值, B 正确;

以点 A 为坐标原点, 建立空间直角坐标系,

$$\text{则 } E(0, \sqrt{3}, 1), A_1(0, 0, 2), B(2\sqrt{3}, 0, 0), C(2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 0),$$

$$\text{则 } \overrightarrow{A_1B} = (2\sqrt{3}, 0, -2), \overrightarrow{CB} = (0, -2\sqrt{3}, 0), \overrightarrow{EB} = (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -1),$$

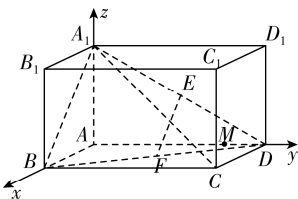
设平面 A_1BC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1B} = 2\sqrt{3}x - 2z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CB} = -2\sqrt{3}y = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1$, 则 $\mathbf{m} = (1, 0, \sqrt{3})$,

所以点 E 到平面 A_1BC 的距离 $d =$

$$\frac{|\overrightarrow{EB} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ C 正确;}$$



$$F(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{EF} = (\sqrt{3}, 0, -1), \overrightarrow{A_1C} = (2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, -2),$$

$$\text{则 } \cos \langle \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{A_1C} \rangle = \frac{\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{A_1C}}{|\overrightarrow{EF}| |\overrightarrow{A_1C}|} =$$



$$\frac{6+2}{2 \times 2\sqrt{7}} = \frac{2\sqrt{7}}{7},$$

故异面直线 EF 与 A_1C 所成的角不为 $\frac{\pi}{3}$, D 错误.

故选 ABC.

5. AC 突破点 ▶ 线线垂直的判定、线面角、四面体的体积、动点轨迹问题

【解析】当 P 为 BC 中点时, $\overrightarrow{PB_1} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1}\right) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1}) = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}\right) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}) = -1 + 0 + 0 + 1 = 0$, 所以 $PB_1 \perp BC_1$, 故 A 正确.

当点 P 与点 A_1 重合时, $\angle A_1B_1C_1 = 60^\circ$ 为直线 PB_1 与平面 BB_1C_1C 所成角, 故 B 错误.

当点 P 到平面 AB_1C_1 的距离最大时, 四面体 PAB_1C_1 的体积最大, 则点 P 可以与点 A_1 重合或点 P 在棱 BC 上,

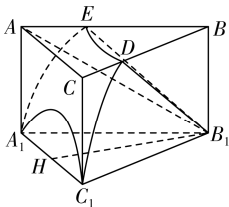
当点 P 与点 A_1 重合时, $V_{P-AB_1C_1} = V_{A_1-AB_1C_1} = V_{A-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1B_1C_1} \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$. 当点 P 在

棱 BC 上时, 易知 $BC \parallel$ 平面 AB_1C_1 , 则

$V_{P-AB_1C_1} = V_{C-AB_1C_1} = V_{A-CC_1B_1} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. 综上, 四面体 PAB_1C_1

的体积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$, 故 C 正确.

对于 D 选项, 若 $PB_1 = \sqrt{2}$,



在棱 BC 上取点 D , 使 $BD = 1$, 在棱 AB 上取点 E , 使 $BE = 1$,

取棱 A_1C_1 的中点 H , 连接 B_1H, BD, B_1E ,

如图所示, 则 $B_1H = \frac{\sqrt{6}}{2}, HC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

则点 P 的轨迹由 $\widehat{A_1E}, \widehat{C_1D}, \widehat{DE}, \widehat{A_1C_1}$ 构成, 且其所在圆的半径依次为 $A_1B_1 = \sqrt{2}$,

$B_1C_1 = \sqrt{2}, BD = 1, HC_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 圆心角依次为 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \pi$,

则 $\widehat{A_1E}, \widehat{C_1D}, \widehat{DE}, \widehat{A_1C_1}$ 的长分别为 $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$,

$\frac{\sqrt{2}\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$, 故点 P 的轨迹的长为

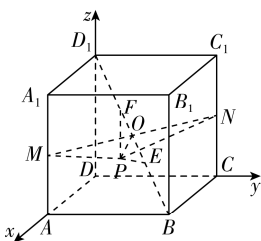
$\frac{3\sqrt{2}+1}{3}\pi$, 故 D 错误.

故选 AC.



6. $\left[-\frac{53}{3}, 9\right]$ 突破点 ▶ 空间距离公式的应用、空间向量数量积的应用

【解析】如图，以 D 为坐标原点建立空间直角坐标系，



则 $E(2, 2, 1), F(1, 1, 2)$ ，设 $P(x, y, z)$ ，
因为 $PF = 2PE$ ，

所以 $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2} = 2\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2}$ ，

整理可得 $\left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(z - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$ ，

可知点 P 的轨迹为以 $H\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 为球心， $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 为球半径的球面。

取 AA_1, CC_1 的中点分别为 M, N ，连接 MN, PM, PN ，设 MN 的中点为 O ，连接 OP ，则 O 点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ，

则 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA_1} = 2\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC_1} = 2\overrightarrow{PN}$ ，

可得 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA_1}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC_1}) = 4\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 4(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OM}) = 4\overrightarrow{PO}^2 - 4\overrightarrow{OM}^2 = 4\overrightarrow{PO}^2 - 18$ ，

又因为 $OH = \frac{5\sqrt{3}}{6} > R$ ，所以 O 在球 H 外，

则 $OH - R \leq PO \leq OH + R$ ，即 $\frac{\sqrt{3}}{6} \leq PO \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ，

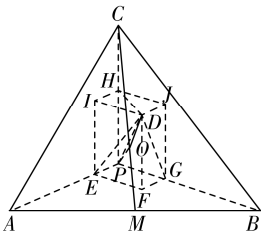
可得 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA_1}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC_1}) = 4\overrightarrow{PO}^2 - 18 \in \left[-\frac{53}{3}, 9\right]$ ，

所以 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA_1}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PC_1})$ 的取值范围是 $\left[-\frac{53}{3}, 9\right]$ 。

7. 2π 突破点 ▶ 立体几何中的轨迹问题

【解析】由题意可知 $PA = PB = PC = 3\sqrt{2}$ ，
 $AB = AC = BC = 6$ ，

则 $PA^2 + PB^2 = AB^2, PA^2 + PC^2 = AC^2, PB^2 + PC^2 = BC^2$ ，则 $PA \perp PB, PA \perp PC, PB \perp PC$ 。



图①



因为三棱锥 $P-ABC$ 为正三棱锥, 所以点 P 在底面 ABC 内的射影为 $\triangle ABC$ 的中心 O ,

取 AB 的中点 M , 连接 CM, PO , 如图①所示, 则 $CO = \frac{2}{3} CM = 2\sqrt{3}$, $PO = \sqrt{PC^2 - CO^2} = \sqrt{6}$.

设点 D 在平面 PAB , 平面 PAC , 平面 PBC 内的射影分别为 F, I, J ,

根据三棱锥 $P-ABC$ 的结构特征, 可以以 DF, DI, DJ 为棱作长方体 $PEFG-HIDJ$, 如图①所示,

则 $PA \perp$ 平面 $EFDI$, 连接 DE, DG, DH, PD , 因为 $DE \subset$ 平面 $EFDI$, 所以 $PA \perp DE$, 即 $d_1 = DE$,

同理可知 $d_2 = DG, d_3 = DH$.

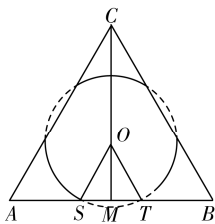
由长方体的性质可

$$\text{知} \begin{cases} d_1^2 = PH^2 + PG^2, \\ d_2^2 = PE^2 + PH^2, \\ d_3^2 = PE^2 + PG^2, \\ PD^2 = PE^2 + PG^2 + PH^2, \end{cases}$$

可得 $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 2PD^2 = 20$, 即 $PD^2 = 10$.

因为 $PO \perp$ 平面 $ABC, OD \subset$ 平面 ABC ,

所以 $PO \perp OD$, 所以 $OD = \sqrt{PD^2 - PO^2} = 2$, 可知点 D 在以点 O 为圆心, 半径 $r = 2$ 的圆上,



图②

因为 $OM < r$, 所以 AB 与圆 O 相交, 所以点 D 的轨迹为图②中的实线圆弧,

设圆 O 与 AB 交于 S, T 两点, 如图②所示, 则 $ST = 2MT = 2\sqrt{r^2 - OM^2} = 2$,

易知 $\triangle OST$ 为等边三角形, 则 $\angle SOT = \frac{\pi}{3}$,

结合对称性可知点 D 运动路径的长度为

$$2\pi r - 3 \times 2 \times \frac{\pi}{3} = 2\pi.$$

8. 考查点 ▶ 面面垂直的判定、面面角的求法

【解】(1) 平面 $AEF \perp$ 平面 PBC , 证明如下.

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD, BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp BC$.

又 $BC \perp AB, AB \cap PA = A, AB, PA \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp$ 平面 PAB .

因为 $AE \subset$ 平面 PAB , 所以 $BC \perp AE$.

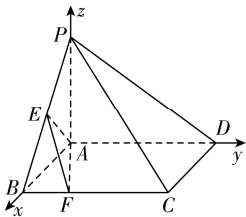
因为 $PA = AB, E$ 为线段 PB 的中点, 所以 $AE \perp PB$.

因为 $BC \cap PB = B, BC, PB \subset$ 平面 PBC ,

所以 $AE \perp$ 平面 PBC . 又 $AE \subset$ 平面 AEF , 所以平面 $AEF \perp$ 平面 PBC .



(2) 由题可知, AB, AD, AP 两两垂直, 以 A 为原点建立如图所示的空间直角坐标系, 设 $BC=2, BF=t$, 则 $t \in [0, 2]$,



则 $A(0, 0, 0), E(1, 0, 1), F(2, t, 0), P(0, 0, 2), C(2, 2, 0), D(0, 2, 0)$,

则 $\overrightarrow{AE} = (1, 0, 1), \overrightarrow{AF} = (2, t, 0), \overrightarrow{PC} = (2, 2, -2), \overrightarrow{PD} = (0, 2, -2)$.

设平面 AEF 的法向量为 $\mathbf{i} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{AE} \cdot \mathbf{i} = x_1 + z_1 = 0, \\ \overrightarrow{AF} \cdot \mathbf{i} = 2x_1 + ty_1 = 0, \end{cases}$$

令 $x_1 = t$, 则 $y_1 = -2, z_1 = -t$, 则 $\mathbf{i} = (t, -2, -t)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{j} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{j} = 2x_2 + 2y_2 - 2z_2 = 0, \\ \overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{j} = 2y_2 - 2z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y_2 = 1,$$

则 $z_2 = 1, x_2 = 0$, 则 $\mathbf{j} = (0, 1, 1)$,

由题意得 $\frac{|\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}|}{|\mathbf{i}| \cdot |\mathbf{j}|} =$

$$\frac{|-2-t|}{\sqrt{t^2 + (-2)^2 + (-t)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \cos \frac{\pi}{6} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{解得 } t = 1, \text{故 } \frac{BF}{BC} = \frac{1}{2}.$$

9. 突破点 ▶ 线线垂直的证明、线面角的应用

(1) 【证明】在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 取 BC 的中点 E , 连接 AE, A_1E , 如图所示.

在 $\triangle A_1AB$ 和 $\triangle A_1AC$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC, \\ \angle A_1AB = \angle A_1AC, \\ AA_1 = AA_1, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle A_1AB \cong \triangle A_1AC,$$

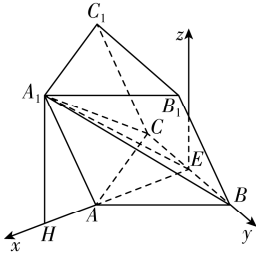
$$\therefore A_1B = A_1C.$$

由 $A_1B = A_1C, EB = EC$, 得 $A_1E \perp BC$, 同理, $AE \perp BC$.

$\because A_1E \cap AE = E, A_1E, AE \subset \text{平面 } A_1AE$,

$\therefore BC \perp \text{平面 } A_1AE$. 又 $AA_1 \subset \text{平面 } A_1AE$,

$\therefore BC \perp AA_1$.



(2) 【解】存在, 点 D 在 C_1C 上靠近 C_1 的三等分点处. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB \perp AC, AB = AC = 2$, 则 $AE = CE = BE = \sqrt{2}$.

在 $\triangle A_1AB$ 中, $\because AB = AA_1 = 2, \angle A_1AB =$

$$\frac{2\pi}{3}, \therefore A_1B = 2\sqrt{3}, \text{同理 } A_1C = 2\sqrt{3}.$$

在等腰三角形 A_1BC 中, $\because A_1B = A_1C = 2\sqrt{3}, BE = CE = \sqrt{2}, \therefore A_1E = \sqrt{10}$.

在 $\triangle AEA_1$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle A_1EA = \frac{2+10-4}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

则 $\sin \angle A_1EA = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

以 E 为原点, 直线 EA, EB 分别为 x, y 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

由 (1) 知 $BC \perp$ 平面 $A_1AE, BC \subset$ 平面 ABC, \therefore 平面 $A_1AE \perp$ 平面 ABC , 平面 $A_1AE \cap$ 平面 $ABC = EA$, 在平面 A_1AE 内过点 A_1 作 $A_1H \perp$ 平面 ABC , 交平面 ABC 于点 H , 则 H 在 EA 上.

$\because A_1H \perp$ 平面 $ABC, EH \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore A_1H \perp EH$,

$\therefore A_1H = A_1E \cdot \sin \angle A_1EA = \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \sqrt{2}$,

则 $EH = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$,

则 $A_1(2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), A(\sqrt{2}, 0, 0), B(0, \sqrt{2}, 0), C(0, -\sqrt{2}, 0)$,

则 $\overrightarrow{A_1B} = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), \overrightarrow{BC} = (0, -2\sqrt{2}, 0), \overrightarrow{AA_1} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

设平面 A_1BC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1B} = -2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = -2\sqrt{2}y = 0, \end{cases}$

令 $x = 1$, 则 $\mathbf{m} = (1, 0, -2)$,

设 $\overrightarrow{CD} = t\overrightarrow{CC_1} = t\overrightarrow{AA_1} = (\sqrt{2}t, 0, \sqrt{2}t), 0 \leq t \leq 1$,

则 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = (\sqrt{2}(t-1), -\sqrt{2}, \sqrt{2}t)$,

由直线 AD 与平面 A_1BC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{70}}{14}$,

得 $|\cos \langle \overrightarrow{AD}, \mathbf{m} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \mathbf{m}|}{|\overrightarrow{AD}| |\mathbf{m}|} =$

$\frac{|\sqrt{2}(t+1)|}{2\sqrt{5}\sqrt{t^2-t+1}} = \frac{\sqrt{70}}{14}$,

解得 $t = \frac{2}{3}$ 或 $t = \frac{3}{2}$ (舍去).

故 D 在 C_1C 上靠近 C_1 的三等分点处.

全章综合训练

刷情境

1. C 创新点 新情境

【解析】根据正切函数的周期性, 在题图②中, 平行于直线 $y = 4$ 的任一直线与曲线 $y = \tan x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} \right)$ 的两个交点的距离都为 π .

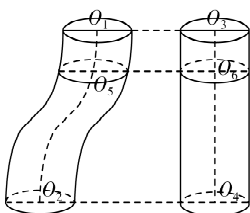
构造一个底面直径为 π , 高为 8 的圆柱 O_3O_4 , 并与水管置于同一水平面上, 用距离圆柱 O_3O_4 上底面为 h 的平面分别去截水管、圆柱 O_3O_4 , 如图③, ④所



示,则所得截面圆 O_5 、圆 O_6 的面积都为 $\frac{\pi^3}{4}$,

故根据祖暅原理,水管和圆柱 O_3O_4 的体积相等,而圆柱 O_3O_4 的体积为 $\pi \times \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times 8 = 2\pi^3$,所以水管的体积为 $2\pi^3$.

故选 C.

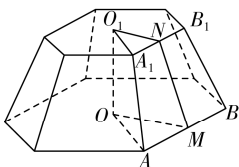


图③

图④

2. BCD 创新点 ▶ 新情境

【解析】如图,记 O_1, O 分别是正六棱台上、下底面的中心, N, M 分别是棱 A_1B_1, AB 的中点,连接 $O_1A_1, O_1N, NM, OO_1, OA, OM$,



由已知可得每个侧面等腰梯形的面积为

$$\frac{21\sqrt{3}}{6} = \frac{7\sqrt{3}}{2},$$

所以等腰梯形 ABB_1A_1 的高为 $NM =$

$$\frac{\frac{7\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} \times (3+4)} = \sqrt{3},$$

由此可得该正六棱台的高为 $OO_1 =$

$$\sqrt{3 - \frac{3}{4} \times (4-3)^2} = \frac{3}{2}, \text{A 错误};$$

由正棱台的性质可知 $NM \perp AB, OM \perp AB$, 则侧面与下底面的夹角为 $\alpha = \angle NMO$,

因为在直角梯形 $NMOO_1$ 中, $NM = \sqrt{3}$,

$$OO_1 = \frac{3}{2}, \text{所以 } \sin \alpha = \frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

易知 α 为锐角, 所以 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, B 正确;

由正棱台的性质及线面角的概念可知, 侧棱与下底面所成角为 $\theta = \angle A_1AO$,

在直角梯形 A_1AOO_1 中, $OO_1 = \frac{3}{2}, A_1O_1 =$

$$3, AO = 4, \text{得 } \tan \theta = \frac{\frac{3}{2}}{4-3} = \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } \sin \theta = \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}, \text{C 正确};$$

$$\text{该棱台上底面面积 } S_1 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 9 = \frac{27\sqrt{3}}{2},$$

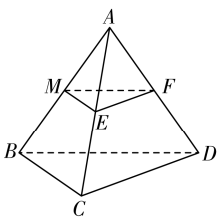


下底面面积 $S_2 = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 16 = 24\sqrt{3}$,

故该棱台的体积为 $V = \frac{1}{3} \times \left(\frac{27\sqrt{3}}{2} + 24\sqrt{3} + \sqrt{\frac{27\sqrt{3}}{2} \times 24\sqrt{3}} \right) \times \frac{3}{2} = \frac{111\sqrt{3}}{4}$, D 正确. 故选 BCD.

3.7 $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2} \right\}$ 创新点 ▶ 新定义

【解析】①情形一: 分别取 AB, AC, AD 的中点 M, E, F , 连接 ME, EF, MF , 如图所示,



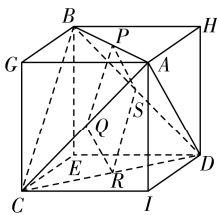
由中位线性质可知 $ME = EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

此时平面 MEF 为 Ω 的一个 1 阶等距平面,

m 为正四面体高的一半, 即 $m = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

由于正四面体有 4 个面, 故这样平行于其中一个面的 1 阶等距平面 α , 有 4 种情况, 且这些情况下的 m 均为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

②情形二: 分别取 AB, AC, CD, DB 的中点 P, Q, R, S , 连接 PQ, QR, RS, PS , 将此正四面体放置在棱长为 1 的正方体中, 如图所示, 易知 $AD \parallel$ 平面 $PQRS, BC \parallel$ 平面 $PQRS$,



则 m 为正方体棱长的一半, 即 $m = \frac{1}{2}$.

由于正四面体的六条棱中有 3 组对棱互为异面直线,

故这样平行于其中一组异面直线的 1 阶等距平面 α , 有 3 种情况, 且这些情况下的 m 均为 $\frac{1}{2}$.

综上, 当 m 的值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, α 有 4 个; 当 m 的值为 $\frac{1}{2}$ 时, α 有 3 个.



所以符合条件的 α 有 7 个, m 的所有可能取值构成的集合是 $\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

4. 创新点 ▶ 新定义

【解】(1) 由题可知 $\overrightarrow{AE} = xi + yj$, $\overrightarrow{AA_1} = 2k$, 则 $\overrightarrow{A_1E} = xi + yj - 2k$ (提示: 斜坐标的本质是将空间中的向量用基底表示后的系数),

由题可知 $i \cdot j = 0, i \cdot k = \frac{1}{2}, j \cdot k = \frac{1}{2}$.

$\because A_1E \perp$ 平面 $ABCD, \therefore \begin{cases} \overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{AB} = 0, \\ \overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} (xi + yj - 2k) \cdot i = -1 + x = 0, \\ (xi + yj - 2k) \cdot j = -1 + y = 0, \end{cases}$

则 $x = 1, y = 1$,

则 $\overrightarrow{A_1E}$ 的斜坐标为 $[1, 1, -2]$.

(2) 由题可得 $\overrightarrow{AF} = i + k, \overrightarrow{AD_1} = j + 2k$,

设平面 AD_1F 的法向量为 $a = pi + qj + mk$

(提示: 设斜坐标系下的法向量, 通过求解法向量方程组并赋值求得法向量),

由 $\begin{cases} \overrightarrow{AF} \cdot a = 0, \\ \overrightarrow{AD_1} \cdot a = 0, \end{cases}$ 得

$\begin{cases} (i + k) \cdot (pi + qj + mk) = p + \frac{m}{2} + \frac{p}{2} + \frac{q}{2} + m = 0, \\ (j + 2k) \cdot (pi + qj + mk) = q + \frac{m}{2} + p + q + 2m = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} \frac{3}{2}p + \frac{3}{2}m + \frac{q}{2} = 0, \\ 2q + p + \frac{5}{2}m = 0, \end{cases}$

取 $m = 10$, 可得 $p = -7, q = -9$,

即 $a = -7i - 9j + 10k$.

则 $|a|^2 = (-7i - 9j + 10k)^2 = 49 + 81 + 100 - 70 - 90 = 70$.

由(1)可知 $A_1E \perp$ 平面 $ABCD$,

且 $\overrightarrow{A_1E} = i + j - 2k$,

则 $|\overrightarrow{A_1E}|^2 = (i + j - 2k)^2 = 1 + 1 + 4 - 2 - 2 = 2$,

$\overrightarrow{A_1E} \cdot a = (i + j - 2k) \cdot (-7i - 9j + 10k) = -7 + 5 - 9 + 5 + 7 + 9 - 20 = -10$,

则 $|\cos \langle \overrightarrow{A_1E}, a \rangle| = \frac{|\overrightarrow{A_1E} \cdot a|}{|\overrightarrow{A_1E}| |a|} =$

$\frac{10}{\sqrt{2} \times \sqrt{70}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$,

即平面 AD_1F 与平面 $ABCD$ 的夹角的余

弦值为 $\frac{\sqrt{35}}{7}$.



刷小题

1. B 命题点 ▶ 圆柱、圆锥的侧面积公式,



圆锥的体积公式

【解析】设圆柱、圆锥的底面半径为 r ，则

圆锥的母线长为 $\sqrt{r^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{r^2 + 3}$.

又圆柱与圆锥的侧面积相等，所以

$2\pi r \cdot \sqrt{3} = \pi r \sqrt{r^2 + 3}$ ，解得 $r = 3$ ，所以圆

锥的体积 $V = \frac{1}{3} \pi \times 3^2 \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \pi$ ，故

选 B.

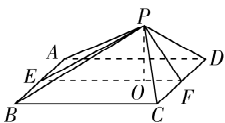
2. D 命题点 ▶ 四棱锥的结构特征，线面、面面的位置关系，棱锥的高

【解析】四棱锥的

底面是边长为 4

的正方形，且

$PA = PB = 4$ ， $PC =$



$PD = 2\sqrt{2}$ ，如图，设 AB, CD 的中点分别为

E, F ，连接 EF, PE, PF ，则 $PE \perp AB, PF \perp$

CD . $\because EF \perp CD, PF \perp CD, EF \cap PF = F$,

$EF \subset \text{平面 } PEF, PF \subset \text{平面 } PEF, \therefore CD \perp$

平面 PEF . 又 $CD \subset \text{平面 } ABCD, \therefore \text{平面}$

$PEF \perp \text{平面 } ABCD$ ，且平面 $PEF \cap \text{平面}$

$ABCD = EF$. 过点 P 作 $PO \perp EF$ 于点 O ,

则 $PO \subset \text{平面 } PEF$ ，则 $PO \perp \text{平面 } ABCD$.

在 $\triangle PEF$ 中，由题可求得 $PE = 2\sqrt{3}, PF =$

$2, EF = 4, \therefore PE^2 + PF^2 = EF^2, \therefore \angle EPF =$

90° ，根据面积相等可得 $PO \cdot EF = PE \cdot$

PF ，即 $4PO = 2\sqrt{3} \times 2$ ，得 $PO = \sqrt{3}$. 故选 D.

3. ABD 命题点 ▶ 空间几何体的综合问题

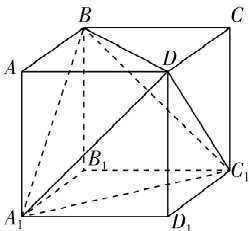
【解析】对于 A 选项，正方体内切球的直径

为 1 m，故 A 符合题意；

对于 B 选项，如图，正方体内部最大的正

四面体棱长为 $BA_1 = \sqrt{2}$ m， $\sqrt{2}$ m $>$ 1.4 m，

故 B 符合题意；

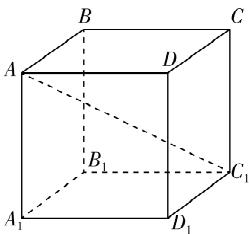


对于 C 选项，圆柱底面直径为 0.01 m，可忽

略不计，高为 1.8 m，圆柱可看作长度为

1.8 m 的线段. 如图，正方体的体对角线为

$AC_1 = \sqrt{3}$ m $<$ 1.8 m，故 C 不符合题意；



对于 D 选项，圆柱高为 0.01 m，可忽略

不计，底面直径为 1.2 m，圆柱可看作直

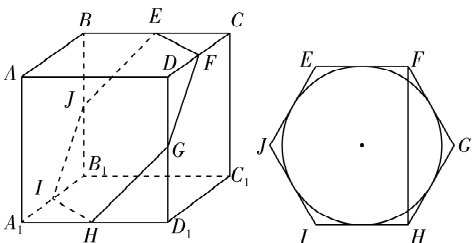


径为 1.2 m 的圆. 如图, E, F, G, H, I, J 为各棱的中点, 六边形 $EFGHIJ$ 为正六边形,

其边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m, 其内切圆直径 $FH = \sqrt{3}$

$$FG = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ m}, \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{6}{4} > (1.2)^2 = 1.44,$$

故 D 符合题意.



4. AC 命题点 ▶ 圆锥的体积、侧面积计算

【解析】对于 A, 依题意, 圆锥母线长 $l = PA = PB = 2$, $PO = PA \cdot \cos 60^\circ = 1$, $AO = BO = PA \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$, 所以底面圆的半径 $r = \sqrt{3}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \pi \cdot (\sqrt{3})^2 \cdot$

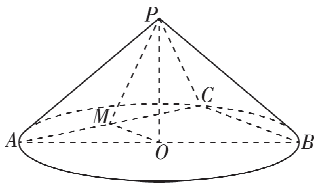
$1 = \pi$, 故 A 正确;

对于 B, 该圆锥的侧面积为 $\pi r l = \pi \cdot \sqrt{3} \cdot 2 = 2\sqrt{3} \pi$, 故 B 错误;

对于 C, 如图, 取 AC 的中点 M , 连接 PM , OM , 则 $OM \perp AC$, 又因为 $PA = PC$, 所以 $PM \perp AC$, 故 $\angle PMO$ 为二面角 $P-AC-O$ 的平面角, 即 $\angle PMO = 45^\circ$, 所以 $\tan 45^\circ = \frac{PO}{OM} = 1$, 即 $OM = 1$, 所以 $AC =$

$2\sqrt{AO^2 - OM^2} = 2 \times \sqrt{3 - 1} = 2\sqrt{2}$, 故 C 正确;

对于 D, 由选项 C 可知, $AC = 2\sqrt{2}$, $PM \perp AC$, $PM = \sqrt{PA^2 - \left(\frac{1}{2}AC\right)^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2}$, 所以 $\triangle PAC$ 的面积为 $\frac{1}{2} PM \cdot AC = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 2$, 故 D 错误. 故选 AC.



5. B 命题点 ▶ 圆锥的体积

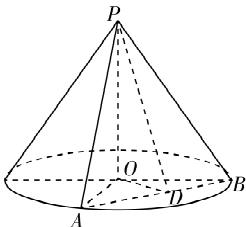
【解析】因为 $\angle AOB = 120^\circ$, $OA = OB = \sqrt{3}$, 所以 $AB = 3$. 如图, 设 AB 的中点为 D , 连接 OD , 则 $OD = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 又因为 $\triangle PAB$ 为等腰

三角形, 面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$, 连接 PD , 则有 $\frac{1}{2} \times 3 \times PD = \frac{9\sqrt{3}}{4}$, 所以 $PD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. 在 $\text{Rt} \triangle POD$

中, $PO = \sqrt{PD^2 - OD^2} = \sqrt{6}$, 所以该圆锥的体积为 $\frac{1}{3} \times \pi (\sqrt{3})^2 \times \sqrt{6} = \sqrt{6} \pi$, 故

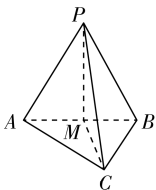


选 B.



6. A 命题点 ▶ 三棱锥体积的计算

【解析】如图,取 AB 的中点 M ,连接 PM, CM . 由题意可知, $\triangle PAB$ 与 $\triangle ABC$ 均为边长为 2 的等边三角形,则 $PM = CM = \sqrt{3}$,



又 $PC = \sqrt{6}$, 所以 $PM^2 + CM^2 = PC^2$, 所以 $PM \perp CM$. 又 $PM \perp AB$, 且 $CM \cap AB = M$, 所以 $PM \perp$ 平面 ABC . 因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}$, 所以三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot PM = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 1$, 故选 A.

7. C 命题点 ▶ 棱台的体积计算

【解析】由题意知棱台的两底面面积分别为 $1.4 \times 10^8 \text{ m}^2$ 和 $1.8 \times 10^8 \text{ m}^2$, 高为 $157.5 - 148.5 = 9(\text{m})$, 所以棱台的体积

$$V = \frac{1}{3} \times (1.4 \times 10^8 + 1.8 \times 10^8 + \sqrt{1.4 \times 10^8 \times 1.8 \times 10^8}) \times 9 = 3 \times 10^8 \times (1.4 + 1.8 + 0.6 \times \sqrt{7}) \approx 1.437 \times 10^9 \approx 1.4 \times 10^9 (\text{m}^3), \text{ 故选 C.}$$

8. CD 命题点 ▶ 三棱锥的体积、线面垂直的判定和性质

【解析】如图,连接 BD 交 AC 于 O , 连接 OE, OF . 设 $AB = ED = 2FB = 2$, 则 $AB = BC = CD = AD = 2$. 由 $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $FB \parallel ED$, 得 $FB \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $V_1 =$

$$V_{E-ACD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD} \cdot ED = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AD \cdot$$

$$CD \cdot ED = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}, V_2 =$$

$$V_{F-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot FB = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot$$

$$FB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 1 = \frac{2}{3}. ED \perp \text{平面}$$

$ABCD, AC \subset \text{平面 } ABCD$, 所以 $ED \perp AC$.

又 $AC \perp BD$, 且 $ED \cap BD = D, ED, BD \subset \text{平面 } BDEF$, 所以 $AC \perp \text{平面 } BDEF$. 又 $OF \subset \text{平面 } BDEF$, 所以 $AC \perp OF$. 易知 $BD =$

$$2\sqrt{2}, OB = OD = \sqrt{2}, OF = \sqrt{OB^2 + FB^2} = \sqrt{3}, OE = \sqrt{OD^2 + ED^2} = \sqrt{6}, EF =$$

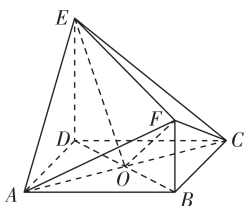
$$\sqrt{BD^2 + (ED - FB)^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2 - 1)^2} = 3, \text{ 所以 } EF^2 = OE^2 + OF^2, \text{ 所以 } OF \perp OE, \text{ 而}$$

$OE \cap AC = O, OE, AC \subset \text{平面 } ACE$, 所以 $OF \perp \text{平面 } ACE$. 又 $AC = AE = CE = 2\sqrt{2}$,

$$\text{所以 } V_3 = V_{F-ACE} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACE} \cdot OF = \frac{1}{3} \cdot$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}AC^2 \cdot OF = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 \times \sqrt{3} = 2,$$

所以有 $V_3 \neq 2V_2$, $V_3 \neq V_1$, $V_3 = V_1 + V_2$, $2V_3 = 3V_1$, 所以选项 A, B 不正确, 选项 C, D 正确, 故选 CD.



9. C 命题点 ▶ 圆锥侧面展开图、扇形的面积公式、圆锥的体积公式

【解析】设圆锥甲、乙的母线长为 R , 高分别为 $h_{\text{甲}}$, $h_{\text{乙}}$, 底面圆的半径分别为 $r_{\text{甲}}$, $r_{\text{乙}}$, 侧面展开图的圆心角分别为 $\alpha_{\text{甲}}$, $\alpha_{\text{乙}}$.

$$\text{因为 } \frac{S_{\text{甲}}}{S_{\text{乙}}} = 2, \text{ 所以 } \frac{\frac{1}{2}\alpha_{\text{甲}} R^2}{\frac{1}{2}\alpha_{\text{乙}} R^2} = 2, \text{ 得 } \frac{\alpha_{\text{甲}}}{\alpha_{\text{乙}}} = 2.$$

因为甲、乙侧面展开图的圆心角之和为 2π , 所以 $\alpha_{\text{甲}} = \frac{4\pi}{3}$, $\alpha_{\text{乙}} = \frac{2\pi}{3}$, 所以甲、乙底

面圆周长分别为 $\frac{4}{3}\pi R$, $\frac{2}{3}\pi R$, 所以 $r_{\text{甲}} =$

$$\frac{2}{3}R, r_{\text{乙}} = \frac{1}{3}R. \text{ 则 } h_{\text{甲}}^2 = R^2 - r_{\text{甲}}^2 = R^2 -$$

$$\frac{4}{9}R^2 = \frac{5}{9}R^2, h_{\text{乙}}^2 = R^2 - r_{\text{乙}}^2 = R^2 - \frac{1}{9}R^2 =$$

$$\frac{8}{9}R^2, \text{ 所以 } h_{\text{甲}} = \frac{\sqrt{5}}{3}R, h_{\text{乙}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}R. \text{ 根据}$$

圆锥的体积公式, 可得 $V_{\text{甲}} = \frac{1}{3}h_{\text{甲}} \pi r_{\text{甲}}^2 =$

$$\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3}R \times \frac{4}{9}R^2 \pi = \frac{4\sqrt{5}}{81}R^3 \pi, V_{\text{乙}} =$$

$$\frac{1}{3}h_{\text{乙}} \pi r_{\text{乙}}^2 = \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}R \times \frac{1}{9}R^2 \pi =$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{81}R^3 \pi, \text{ 所以 } \frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{10}, \text{ 故选 C.}$$

10. B 命题点 ▶ 正四面体的结构特征、圆的面积

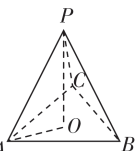
【解析】设 O 为正三角形 ABC 的中心, 连接 PO , AO , 如图. 在正三角形

$$ABC \text{ 中, } AO = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 2\sqrt{3}. \text{ 在 } \text{Rt}\triangle PAO \text{ 中, } PO =$$

$$\sqrt{PA^2 - AO^2} = \sqrt{36 - 12} = 2\sqrt{6}.$$

当 $PQ = 5$ 时, 根据勾股定理 $OQ = \sqrt{PQ^2 - PO^2} = 1 < \sqrt{3}$, 得 Q 点的轨迹是以 O 为圆心, 1 为半径的圆, 则集合 T 表示的区域的面积为 π , 故选 B.

11. B 命题点 ▶ 圆锥的侧面展开图, 母线长的计算



【解析】设圆锥的底面半径为 r , 母线长为 l , 因为圆锥的侧面展开图是一个半圆, 所以 $2\pi r = \pi l$, 即 $l = 2r = 2\sqrt{2}$, 所以圆锥的母线长为 $2\sqrt{2}$, 故选 B.

12. C **命题点** ▶ 解三角形在实际生活中的应用

【解析】由题意可知, $\cos \alpha = \frac{r}{r+36\,000} = \frac{6\,400}{6\,400+36\,000} \approx 0.15$, 所以从同步卫星上可望见的地球的表面积 $S = 2\pi r^2(1 - \cos \alpha) \approx 2\pi r^2(1 - 0.15)$, 此表面积与地球表面积之比约为 $\frac{2\pi r^2(1-0.15)}{4\pi r^2} = \frac{0.85}{2} = 0.425$, 故选 C.

13. 23 $\frac{115}{2}$ **命题点** ▶ 等比数列, 圆柱的体积

【解析】设升量器的高为 h_1 , 底面半径为 r_1 , 容积为 V_1 , 斗量器的高为 h_2 , 底面半径为 r_2 , 容积为 V_2 , 斛量器的高为 h_3 , 底面半径为 r_3 , 容积为 V_3 , 则 $r_1 = \frac{65}{2}$ mm, $r_2 = \frac{325}{2}$ mm, $r_3 = \frac{325}{2}$ mm, $h_3 = 230$ mm,

$$V_1 = \pi r_1^2 h_1 = \left(\frac{65}{2}\right)^2 \pi h_1 (\text{mm}^3), V_2 = \pi r_2^2 h_2 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \pi h_2 (\text{mm}^3), V_3 = \pi r_3^2 h_3 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230\pi (\text{mm}^3).$$

$\therefore V_1, V_2, V_3$ 成等比数列且公比 $q = 10$,

$$\therefore V_1 \cdot q^2 = V_3, \text{ 即 } \left(\frac{65}{2}\right)^2 \pi \cdot h_1 \cdot 100 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230\pi, \text{ 解得 } h_1 = \frac{115}{2} \text{ mm}, V_2 \cdot$$

$$q = V_3, \text{ 即 } \left(\frac{325}{2}\right)^2 \pi \cdot h_2 \cdot 10 = \left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230\pi, \text{ 解得 } h_2 = 23 \text{ mm}. \therefore \text{斗量器的高 } h_2 = 23 \text{ mm, 升量器的高 } h_1 = \frac{115}{2} \text{ mm}.$$

14. $\frac{\sqrt{6}}{4}$ **命题点** ▶ 圆台的体积公式

【解析】 \therefore 圆台甲、乙的上、下底面半径均相

$$\text{等}, \therefore \frac{V_{\text{甲}}}{V_{\text{乙}}} = \frac{h_{\text{甲}}}{h_{\text{乙}}} = \frac{\sqrt{[2(r_2 - r_1)]^2 - (r_2 - r_1)^2}}{\sqrt{[3(r_2 - r_1)]^2 - (r_2 - r_1)^2}} = \frac{\sqrt{3}(r_2 - r_1)}{2\sqrt{2}(r_2 - r_1)} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

15. $\frac{7\sqrt{6}}{6}$ **命题点** ▶ 棱台的体积

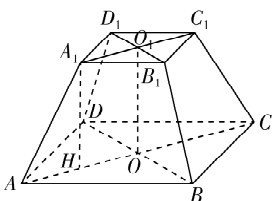
【解析】如图, 连接 AC, BD 交于点 O , 连接 A_1C_1, B_1D_1 交于点 O_1 , 连接 OO_1 , 过点 A_1 作 $A_1H \perp AC$ 于点 H , 则



OO_1 为正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高.

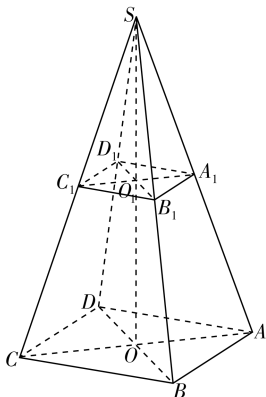
关键点

在等腰梯形 A_1ACC_1 中, $AC = \sqrt{2} AB = 2\sqrt{2}$, $A_1C_1 = \sqrt{2} A_1B_1 = \sqrt{2}$, 则 $AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$, $A_1O_1 = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $AA_1 = \sqrt{2}$, 所以 $A_1H = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以 $OO_1 = A_1H = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times (1^2 + 2^2 + \sqrt{1^2 \times 2^2}) \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$.



16. 28 命题点 ▶ 锥体、台体的体积公式

【解析】 设原正四棱锥为 $S-ABCD$, 截去的正四棱锥为 $S-A_1B_1C_1D_1$, O_1, O 分别为正四棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 上、下底面的中心, 如图.



因为 $AB = 4$, $A_1B_1 = 2$, 所以 $OA = 2\sqrt{2}$, $O_1A_1 = \sqrt{2}$. 由截面平行于底面得 $\frac{SO_1}{SO} = \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, 又 $SO_1 = 3$, 所以 $SO = 6$, $OO_1 = 3$, 所以正四棱台 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$ 上、下底面的边长分别为 2 和 4, 高为 3, 所以 $V_{\text{台}} = \frac{1}{3} \times (4 + 16 + \sqrt{16 \times 4}) \times 3 = 28$ (另解: $V_{\text{台}} = V_{S-ABCD} -$

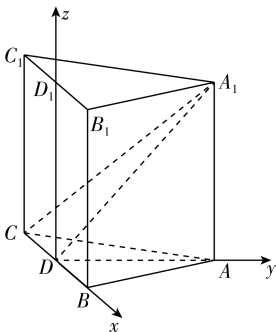
$$V_{S-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3} \times 16 \times 6 - \frac{1}{3} \times 4 \times 3 = 28).$$

17. BD 命题点 ▶ 空间线线、线面的位置关系

【解析】 如图, 取 B_1C_1 的中点 D_1 , 由正三棱柱的性质知 BC, AD, DD_1 两两垂



直,则建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$, 设正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h , 底面边长为 2, 则 $D(0,0,0)$, $A(0,\sqrt{3},0)$, $A_1(0,\sqrt{3},h)$, $B(1,0,0)$, $B_1(1,0,h)$, $C(-1,0,0)$, $C_1(-1,0,h)$.



对于 A, 由于 $\overrightarrow{AD} = (0, -\sqrt{3}, 0)$,

$\overrightarrow{A_1C} = (-1, -\sqrt{3}, -h)$,

则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0 \times (-1) + (-\sqrt{3}) \times (-\sqrt{3}) + 0 \times (-h) = 3 \neq 0$, $\therefore AD$ 与 A_1C 不垂直, 故 A 错误;

对于 B, 由于 $\overrightarrow{B_1C_1} = (-2, 0, 0)$, 平面 AA_1D 的一个法向量为 $\overrightarrow{DB} = (1, 0, 0)$,

又 $\overrightarrow{B_1C_1} \parallel \overrightarrow{DB}$, $\therefore B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1D , 故 B 正确;

对于 C, 由于 $\overrightarrow{A_1B_1} = (1, -\sqrt{3}, 0)$, 而 $\overrightarrow{AD} = (0, -\sqrt{3}, 0)$, 显然 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与 \overrightarrow{AD} 不共线, $\therefore AD$ 与 A_1B_1 不平行, 故 C 错误;

对于 D, $\because CC_1 \parallel AA_1$, $AA_1 \subset$ 平面 AA_1D , $CC_1 \not\subset$ 平面 AA_1D , $\therefore CC_1 \parallel$ 平面 AA_1D , 故 D 正确. 故选 BD.

一题多解

对于 B, $\because AA_1 \perp$ 平面 ABC , $BC \subset$ 平面 ABC , $\therefore AA_1 \perp BC$. 又 $AD \perp BC$, $AD \cap AA_1 = A$, $AD, AA_1 \subset$ 平面 AA_1D , $\therefore BC \perp$ 平面 AA_1D , 又 $B_1C_1 \parallel BC$, $\therefore B_1C_1 \perp$ 平面 AA_1D , 故 B 正确.

18. A 命题点 空间中线面之间的位置关系

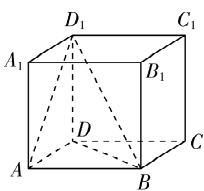
【解析】对于①, 因为 $\alpha \cap \beta = m$, $m \parallel n$, 所以当 $n \subset \alpha$ 时, $n \parallel \beta$;

当 $n \subset \beta$ 时, $n \parallel \alpha$; 当 $n \not\subset \alpha$ 且 $n \not\subset \beta$ 时, $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$, 故①正确.

对于②, 因为 $\alpha \cap \beta = m$, $m \perp n$, 所以 n 与 α, β 的位置关系为在平面内、与平面平行或相交, 故②错误.

对于③, 因为 $n \parallel \alpha$ 且 $n \parallel \beta$, $\alpha \cap \beta = m$, 所以 $m \parallel n$, 故③正确.

对于④, 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 记平面 ADD_1A_1 为 α , 平面 $ABCD$ 为 β , 则直线 AD 为 m , 记



直线 BD_1 为 n , 由正方体的性质可知 BD_1 与平面 ADD_1A_1 所成角为 $\angle AD_1B$,



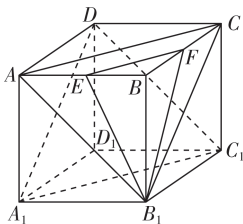
则 $\sin \angle AD_1B = \frac{AB}{BD_1}$, BD_1 与平面 $ABCD$

所成角为 $\angle DBD_1$, 则 $\sin \angle DBD_1 = \frac{DD_1}{BD_1} = \sin \angle AD_1B$, 此时 BD_1 与 AD 不垂

直, 即 m 与 n 不垂直 (另解: 若 $n \parallel \alpha, n \parallel \beta$, 此时在满足题意的情况下, $m \parallel n$), 故④错误. 故选 A.

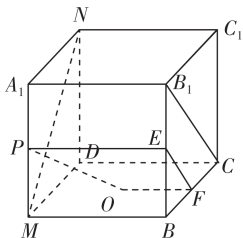
19. A 命题点 ▶ 平面与平面的垂直、平行的判定

【解析】对于 A 选项: 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 因为 E, F 分别为 AB, BC 的中点, 所以 $EF \parallel AC$, 则有 $EF \perp BD$, 又由正方体的性质可得 $EF \perp DD_1$, 又 $BD \cap DD_1 = D$, 从而 $EF \perp$ 平面 BDD_1 . 又因为 $EF \subset$ 平面 B_1EF , 所以平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1 , 所以 A 选项正确. 对于 B 选项: 因为平面 $A_1BD \cap$ 平面 $BDD_1 = BD$, 由选项 A 知平面 $B_1EF \perp$ 平面 BDD_1 , 若平面 $B_1EF \perp$ 平面 A_1BD , 则 $BD \perp$ 平面 B_1EF , 显然不成立, 所以 B 选项错误. 对于 C 选项: 由题意知直线 AA_1 与直线 B_1E 必相交, 故平面 B_1EF 与平面 A_1AC 有公共点, 所以 C 选项错误. 对于 D 选项: 如图, 连接 AC, AB_1, B_1C , 易知平面 $AB_1C \parallel$ 平面 A_1C_1D , 又因为平面 AB_1C 与平面 B_1EF 有公共点 B_1 , 故平面 A_1C_1D 与平面 B_1EF 不平行, 所以 D 选项错误. 故选 A.



20. BC 命题点 ▶ 直线与直线的位置关系

【解析】对于 A, 取 MN 的中点为 O_1 , 连接 OO_1 , 易知 $OO_1 \perp MN$, OO_1 不与 OP 平行, 且 MN, OP 在同一平面内, $\therefore MN$ 与 OP 不垂直, 故 A 错误. 对于 B, 如图①, 取 BB_1 的中点 E, BC 的中点 F , 连接 PE, OF, EF, B_1C , 则 P, O, F, E 四点共面. $\because E, F$ 分别为 BB_1, BC 的中点, $\therefore EF \parallel B_1C$. 易知 $B_1C \perp MN$, $\therefore MN \perp EF$. 又易知 $OF \perp$ 平面 BB_1C_1C , $\therefore OF \perp MN$. 又 $EF \cap OF = F, EF, OF \subset$ 平面 $PEFO$, $\therefore MN \perp$ 平面 $PEFO$, 又 $PO \subset$ 平面 $PEFO$, $\therefore MN \perp PO$, 故 B 正确.



图①

对于 C, 如图②, 连接 BD, BC_1, BD_1 .

$\because O$ 为下底面的中心, \therefore 点 O 在 BD 上且为 BD 中点, $\therefore OP \parallel BD_1$.

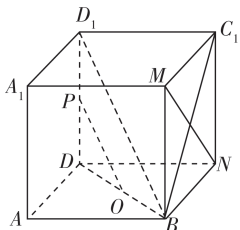


由正方体的性质可得 $MN \perp BC_1$, $D_1C_1 \perp MN$.

又 $BC_1 \cap D_1C_1 = C_1$, $BC_1, D_1C_1 \subset$ 平面 BC_1D_1 ,

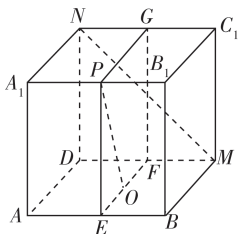
$\therefore MN \perp$ 平面 BC_1D_1 , $\therefore MN \perp BD_1$,

$\therefore OP \perp MN$, 故 C 正确.



图②

对于 D, 如图③, 取 AB, DM, NC_1 的中点分别为 E, F, G , 连接 PE, PG, EF, GF , 则点 O 在 EF 上, P, E, F, G 四点共面. 由正方体的性质可知 $PG \perp$ 平面 MC_1ND , 则 $PG \perp MN$, 假设 $MN \perp OP$, 又 $PG \cap OP = P$, $PG, OP \subset$ 平面 $PEFG$, $\therefore MN \perp$ 平面 $PEFG$, $\therefore MN \perp GF$. 易知 MN 与 GF 不垂直, 则假设不成立, 故 D 错误.



图③

21. B 命题点 ▶ 正三棱台的体积、线面角的正切值

【解析】设正三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 的高为 h . $\because AB = 6, A_1B_1 = 2, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times$

$$6 \times 6 \times \sin \frac{\pi}{3} = 9\sqrt{3}, S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}. \therefore \text{正三棱台 } ABC-A_1B_1C_1$$

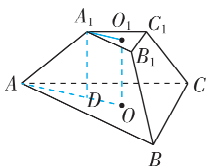
的体积 $V = \frac{1}{3} (S_{\triangle ABC} + S_{\triangle A_1B_1C_1} +$

$$\sqrt{S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle A_1B_1C_1}}) h = \frac{1}{3} \times (9\sqrt{3} + \sqrt{3} +$$

$$\sqrt{9\sqrt{3} \times \sqrt{3}}) h =$$

$$\frac{13\sqrt{3}}{3} h = \frac{52}{3}, \therefore h =$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}. \text{ 如图, 设}$$



$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中心分别为 O, O_1 , 连接 A_1O_1, O_1O, AO , 作 $A_1D \perp$ 平面 ABC 交平面 ABC 于点 D , 由几何体 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱台可知, 点 D 在 AO 上, 且四边形 A_1O_1OD 为矩形, 其中 $\angle A_1AD$ 即为直线 A_1A 与平面 ABC 所成的角. 由 $AB = 6, A_1B_1 = 2$, 可得 $OA = 2\sqrt{3}$,

$$O_1A_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \left(\text{提示: 边长为 } a \text{ 的正三角形}$$

的中心到各顶点的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{3} a \right),$

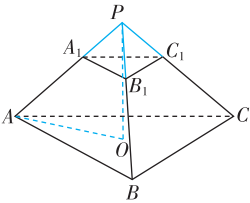


$$\therefore AD = OA - OD = OA - O_1A_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \tan \angle A_1AD = \frac{A_1D}{AD} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = 1. \text{ 故选 B.}$$

一题多解

将正三棱台补形为正三棱锥 $P-ABC$. 过点 P 作 $PO \perp$ 平面 ABC 于点 O , 连接 AO , 则 AA_1 与平面 ABC 所成的角即为 $\angle A_1AO$. 根据三角形相似



$$\text{可得, } \frac{PA_1}{PA} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$\text{故 } \frac{V_{P-A_1B_1C_1}}{V_{P-ABC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

$$\text{又 } V_{A_1B_1C_1-ABC} = \frac{52}{3}, \text{ 所以 } V_{P-A_1B_1C_1} = \frac{2}{3},$$

$$V_{P-ABC} = \frac{54}{3} = 18.$$

$$\text{又 } V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} \times PO = \frac{1}{3} \times 9\sqrt{3} \times PO =$$

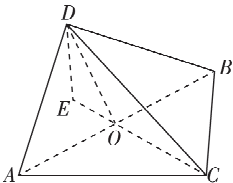
$$18, \text{ 解得 } PO = 2\sqrt{3}.$$

根据正三棱锥的结构特征可得, O 为

$\triangle ABC$ 的重心, $AO = \frac{2}{3} \times 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, 所以 $PO = AO$, 则 $\tan \angle PAO = 1$. 故选 B.

22. C 命题点 ▶ 二面角、直线与平面所成角

【解析】如图, 设 AB 的中点为 O , 连接 CO , DO , 则 $CO \perp AB$, $DO \perp AB$, A



于是 $\angle COD$ 即为二面角 $C-AB-D$ 的平面角.

关键点

过点 D 作 $DE \perp$ 平面 ABC , 则点 E 一定落在 CO 的延长线上, $\angle DCE$ 即直线 CD 与平面 ABC 所成的角. 不妨设 $AB =$

$$2, \text{ 在 Rt} \triangle EOD \text{ 中, } DO = \sqrt{3}, \angle EOD = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ, \text{ 则 } DE = \frac{\sqrt{3}}{2}, EO = \frac{3}{2}.$$

$$\text{又 } CO = \frac{1}{2}AB = 1, \text{ 所以 } EC = \frac{5}{2},$$

$$\tan \angle DCE = \frac{DE}{EC} = \frac{\sqrt{3}}{5} \quad \left(\text{另解: 在 } \triangle DOC \right.$$

中, 根据余弦定理得 $CD^2 = DO^2 + CO^2 - 2DO \cdot CO \cdot \cos 150^\circ = 3 + 1 + 3 = 7$. 所以

$$\sin \angle DCE = \frac{DE}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}, \text{ 所以 } \tan \angle DCE =$$

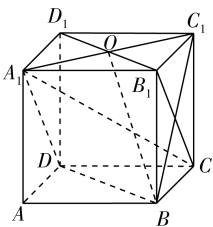
$$\frac{\sqrt{3}}{5} \Big), \text{ 故选 C.}$$

23. ABD 命题点 ▶ 线线角和线面角的



求解

【解析】如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，因为 $BC_1 \perp B_1C$ ， $BC_1 \perp A_1B_1$ ， $B_1C \cap A_1B_1 = B_1$ ，所以 $BC_1 \perp$ 平面



A_1B_1CD ，所以 $BC_1 \perp DA_1$ ， $BC_1 \perp CA_1$ ，故选项 A、B 均正确；

设 $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$ ，因为 $A_1C_1 \perp$ 平面 BB_1D_1D ，所以直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $\angle C_1BO$ ，在 $\text{Rt} \triangle C_1BO$ 中，

$$\sin \angle C_1BO = \frac{C_1O}{BC_1} = \frac{1}{2}, \text{ 故 } \angle C_1BO = 30^\circ,$$

故选项 C 错误；

直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle C_1BC = 45^\circ$ ，故选项 D 正确。

故选 ABD.

24. D 命题点 ▶ 空间角的计算

【解析】在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，设 $AB = a$ ， $BC = b$ ， $CC_1 = c$ 。连接 BD ，

因为 $BB_1 \perp$ 平面 $ABCD$ ，

所以 B_1D 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle BDB_1$ ，即 $\angle BDB_1 = 30^\circ$ ，

$$\text{所以 } \tan \angle BDB_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad \textcircled{1}$$

因为 $DA \perp$ 平面 AA_1B_1B ，所以 B_1D 与平面 AA_1B_1B 所成的角为 $\angle AB_1D$ ，即

$$\angle AB_1D = 30^\circ, \text{ 所以 } \tan \angle AB_1D = \frac{\sqrt{3}}{3} =$$

$$\frac{b}{\sqrt{a^2 + c^2}}. \quad \textcircled{2}$$

由①②可得 $a = \sqrt{2}b = \sqrt{2}c$ ，故 A 不正确。

过点 B 作线段 AB_1 的垂线，垂足为 O ，

连接 DO ，由 A 可知 $BB_1 = c$ ， $AB = \sqrt{2}c$ ，

$$AB_1 = \sqrt{3}c, \text{ 则 } BO = \frac{\sqrt{6}}{3}c, B_1O = \frac{\sqrt{3}}{3}c, AO =$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}c, \text{ 又 } AD = c, \text{ 则 } DO = \frac{\sqrt{21}}{3}c, \text{ 所以}$$

$$DO^2 + BO^2 = BD^2, \text{ 所以 } BO \perp DO.$$

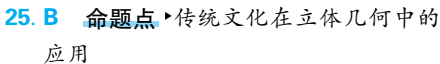
又因为 $DO \cap AB_1 = O$ ， $DO, AB_1 \subset$ 平面 AB_1D ，所以 $BO \perp$ 平面 AB_1D ，即 $BO \perp$ 平面 AB_1C_1D ，所以 AB 与平面 AB_1C_1D 所成的角为 $\angle OAB$ 。在 $\text{Rt} \triangle AOB$ 中，

$$\sin \angle OAB = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}c}{\sqrt{2}c} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 故 B 不正确. 因为}$$

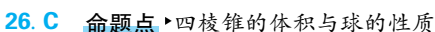
$$AC = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3}c, CB_1 = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2}c,$$

故 C 不正确。易知 B_1D 与平面 BB_1C_1C 所成的角为 $\angle DB_1C$ ，而 $DC = B_1C = \sqrt{2}c$ ，

且 $DC \perp B_1C$ ，所以 $\angle DB_1C = 45^\circ$ ，故 D 正确。故选 D。



【解析】画出赤道和纬度的截面图, OA 与地球赤道所在平面所成角为 $\angle AOB$. 因为点 A 处的纬度为北纬 40° , 所以 $\angle AOB = 40^\circ$. 过点 A 且与 OA 垂直的平面在截面图中为过点 A 的切线, 则晷针与点 A 处的水平面所成的角, 即晷针与点 A 处的切线所成的角 α , 可知 $\alpha = 40^\circ$, 故选 B.



【解析】设四棱锥为 $O-ABCD$, 高为 h . 设四边形 $ABCD$ 所在小圆半径为 r , 四边形 $ABCD$ 对角线的夹角为 α , 则

$$S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \cdot$$

$$AC \cdot BD \leq \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot 2r = 2r^2, \text{ 当且仅当}$$

四边形 $ABCD$ 为正方形时等号成立, 即当四棱锥 $O-ABCD$ 的高 h 一定时, 底面 $ABCD$ 面积的最大值为 $2r^2$. 由球的性质

知 $r^2 + h^2 = 1$, 则 $V_{O-ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2r^2 \cdot h =$

$$\frac{2}{3}(1-h^2)h = \frac{2}{3}(h-h^3). \quad \text{令 } f(h) =$$

$$\frac{2}{3}(h - h^3), f'(h) = \frac{2}{3}(1 - 3h^2), \text{ 令}$$

$$f'(h) = \frac{2}{3}(1-3h^2) = 0, \text{ 可得 } h = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (负)}$$

舍), 当 $h \in \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时, $f'(h) > 0$, 函数

$f(h)$ 单调递增, 当 $h \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ 时,

$f'(h) < 0$, 函数 $f(h)$ 单调递减, 所以当

$h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $f(h)$ 取得最大值, 即该四棱锥

的体积最大,故选 C.

27. $\frac{5}{2}$ **命题点** ▶ 圆柱、球的切接问题

【解析】设铁球的半径为 $R(0 < R < 4)$, 情形一: 两个铁球的球心都在圆柱的轴上, 且两球分别与圆柱的上、下底面相



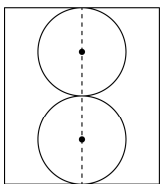
切,其轴截面如图①,则 $4R = 9$, 则 $R = \frac{9}{4}$; 情形二: 两球均分别与圆柱的一个

底面和侧面相切,其轴截面如图②,则

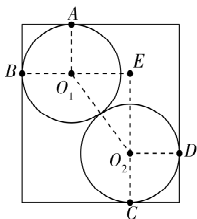
$$\begin{cases} O_1E + 2R = 8, \\ O_2E + 2R = 9, \\ O_1E^2 + O_2E^2 = O_1O_2^2 = 4R^2, \end{cases} \quad \text{解得 } R = \frac{5}{2}$$

或 $R = \frac{29}{2}$ (舍去).

由于 $\frac{9}{4} < \frac{5}{2}$, 故 R 的最大值为 $\frac{5}{2}$.



图①



图②

28.12 命题点 ▶ 球与正方体各棱相切问题

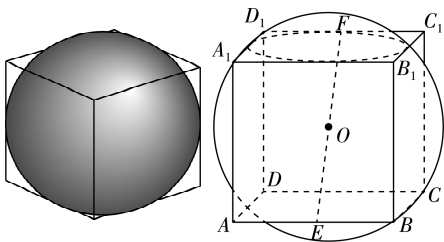
【解析】如图所示, $\because EF$ 为球的直径, 由正方体及球的对称性知, 此球的球心为正方体的中心 O . 设正方体的棱长为 2,

则 $OF = OE = \frac{1}{2} EF = \frac{1}{2} C_1B = \sqrt{2}$,

\therefore 点 O 到正方体各棱的中点的距离均

关键点

为 $\sqrt{2}$, 且正方体各面与球的交线均为圆, 此圆即为正方体各面的内切圆, \therefore 球的球面与该正方体各棱的交点共有 12 个.

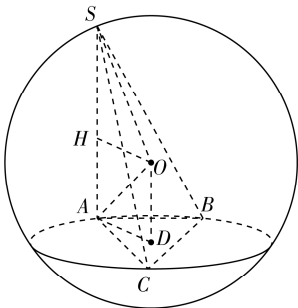


29.2 命题点 ▶ 三棱锥的外接球

【解析】如图, 设三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的球心为 O , 等边三角形 ABC 的中心为 D , 连接 OA, AD, OD , 则 $OD \perp$ 平面

ABC , $OA = 2$, $AD = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = \sqrt{3}$. 在

$\text{Rt}\triangle AOD$ 中, $OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = 1$.



连接 OS , 作 $OH \perp SA$ 于点 H . 由 $SA \perp$ 平面 ABC , $OD \perp$ 平面 ABC , 可知 $SA \parallel OD$, 所以 S, A, O, D 四点共面. 因为 $SA \perp$ 平

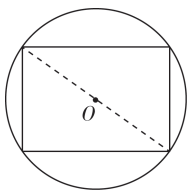


面 ABC , $AD \subset$ 平面 ABC , 所以 $SA \perp AD$, 又 $OH \perp SA$, 所以 $OH \parallel AD$, 所以四边形 $AHOD$ 为矩形, 所以 $AH = OD = 1$, $OH = AD = \sqrt{3}$. 在 $\text{Rt} \triangle SHO$ 中, 可得 $SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \sqrt{2^2 - 3} = 1$, 所以 $SA = SH + AH = 1 + 1 = 2$.

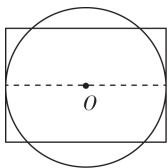
30. $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$ 命题点 正方体的外接球和棱切球

【解析】若正方体的棱与球 O 的球面有公共点, 则考虑两种临界情况:

(1) 球是正方体的外接球, 此时球面与棱的公共点是正方体的顶点, 截面如图①所示. 因为正方体的棱长为 4, O 为正方体的中心, 所以其外接球的半径为正方体体对角线长度的一半, 即 $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$.



图①



图②

(2) 球是正方体的棱切球, 即正方体与球相切于各条棱的中点, 截面如图②所示. 则棱切球的半径为 $\frac{\sqrt{4^2 + 4^2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

(提示: 正方体棱切球的球心为正方体的中心, 半径为正方体面对角线长的一半).

综上, 球 O 的半径的取值范围是 $[2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}]$.

31. BD 命题点 立体几何中点的轨迹问题、锥体的体积、线线垂直和线面垂直的判定

【解析】对于选项 A, 当 $\lambda = 1$ 时, $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1}$, $\mu \in [0, 1]$, 所以点 P 在线段 CC_1 上. 当 $\mu = 0$ 时, 点 P 与点 C 重合, 此时 $\triangle AB_1P$ 的周长为 $AB_1 + AC + B_1C = 2\sqrt{2} + 1$; 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, 点 P 为线段 CC_1 的

中点, 此时 $AP = B_1P = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

$\triangle AB_1P$ 的周长为 $AB_1 + AP + B_1P = \sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$. 所以 $\triangle AB_1P$ 的周长

不是定值, 故 A 错误. 对于选项 B, 当

$\mu = 1$ 时, $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB_1}$, $\lambda \in [0, 1]$, 所以点 P 在线段 B_1C_1 上. 因为 $B_1C_1 \parallel BC$, $B_1C_1 \not\subset$ 平面 A_1BC , $BC \subset$ 平面 A_1BC , 所以 $B_1C_1 \parallel$ 平面 A_1BC , 即点 P 到平面 A_1BC 的距离为定值. 又 $\triangle A_1BC$ 的面积为定值, 所以三棱锥 $P-A_1BC$ 的体积为定值,

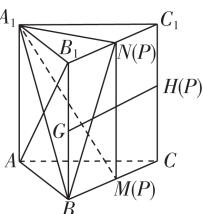


故 B 正确. 对于选项 C, 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{BP} =$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \mu\overrightarrow{BB_1}$, 设 M, N 分别为 BC, B_1C_1

的中点, 连接 MN , 则点 P 在线段 MN 上. 当 $\mu = 0$ 时, 点 P 与点 M 重合, 如图,

连接 A_1N, A_1M, A_1B . 因为 $A_1N \perp B_1C_1, A_1N \perp B_1B$, 且 $B_1C_1 \cap B_1B = B_1$, 所以 $A_1N \perp$ 平面 B_1C_1CB , 则



$A_1N \perp BC$. 又 $BC \perp MN$, 且 $A_1N \cap MN = N$, 所以 $BC \perp$ 平面 A_1NM , 又 $A_1M \subset$ 平面 A_1NM , 所以 $BC \perp A_1M$, 即 $BP \perp A_1P$. 当 $\mu = 1$ 时, 点 P 与点 N 重合, 因为 $A_1N \perp$ 平面 $B_1C_1CB, BP \subset$ 平面 B_1C_1CB , 则 $A_1N \perp BP$, 即 $A_1P \perp BP$. 所以满足 $A_1P \perp BP$ 的点 P 不唯一, 故 C 错误.

对于选项 D, 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, $\overrightarrow{BP} = \lambda\overrightarrow{BC} +$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$, 设 G, H 分别为 BB_1, CC_1 的中

点, 则点 P 在线段 GH 上, 连接 A_1B, AB_1 . 因为 $A_1B \perp AB_1$, 若 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P , 则 $A_1B \perp B_1P$. 由选项 C 知 $A_1N \perp B_1P$, 又 $A_1B \cap A_1N = A_1$, 所以 $B_1P \perp$ 平面 A_1BN , 则 $B_1P \perp BN$, 由正方形的性质知, 当且仅当点 P 与点 H 重合, 即 $\lambda = 1$ 时, $B_1P \perp BN$, 所以满足 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P 的点 P 唯一, 故 D 正确. 故选 BD.

刷大题

1. 命题点 ▶ 证明线面平行、求三棱锥的体积

(1) 【证明】因为 $\frac{OB}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以

$\text{Rt}\triangle ABO \sim \text{Rt}\triangle CBA$,

所以 $\angle BAO = \angle BCA$.

设 $AO \cap BF = Q$, 因为 $AO \perp BF$, 所以 $\angle BAO = \angle OBQ$, 所以 $\angle BCA = \angle OBQ$, 则 $BF = FC$.

同理可证 $BF = AF$, 所以 $AF = FC$, 即点 F 为 AC 的中点.

又点 E 为 AP 的中点, 所以 $EF \parallel PC$.

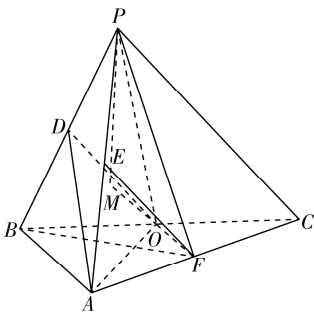
因为点 D, O 分别为 BP, BC 的中点, 所以 $DO \parallel PC$,

所以 $EF \parallel DO$.

因为 $EF \not\subset$ 平面 $ADO, DO \subset$ 平面 ADO ,

所以 $EF \parallel$ 平面 ADO .

(2) 【解】如图, 过点 P 作 $PM \perp FO$, 交 FO 的延长线于点 M , 连接 PF .



由(1)知,点 F, O 分别为 AC, BC 的中点,所以 $OF \parallel AB$,

又 $AB \perp BC$,所以 $OF \perp BC$.

因为 $PB = PC$,点 O 为 BC 的中点,所以 $BC \perp PO$.

因为 $PO \cap OF = O$,且 $PO, OF \subset$ 平面 PFO ,所以 $BC \perp$ 平面 PFO .

又 $PM \subset$ 平面 PFO ,所以 $BC \perp PM$.

又 $PM \perp FO, FO \cap BC = O$,且 $FO, BC \subset$ 平面 ABC ,所以 $PM \perp$ 平面 ABC ,

所以 PM 为三棱锥 $P-ABC$ 的高.

因为 $PO = \sqrt{PB^2 - BO^2} = 2, \angle POF = 120^\circ$,

所以 $PM = PO \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{3}$.

又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BA \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,

所以 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot PM = \frac{1}{3} \times 2\sqrt{2} \times$

$\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

2. 命题点 ▶ 面面垂直的判定、线线所成角的余弦值的求解、建系法在立体几何中的应用

(1)【证明】 $\because PA \perp$ 底面 $ABCD, AB \subset$ 底面 $ABCD, \therefore PA \perp AB$,

又 $AB \perp AD, PA \cap AD = A, PA, AD \subset$ 平面 $PAD, \therefore AB \perp$ 平面 PAD .

又 $AB \subset$ 平面 PAB, \therefore 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .

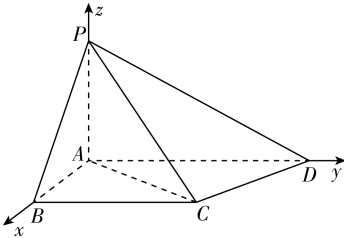
一题多解

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD, PA \subset$ 平面 PAB, \therefore 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$.

\because 平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB, AD \subset$ 平面 $ABCD, AD \perp AB$,

$\therefore AD \perp$ 平面 $PAB, \because AD \subset$ 平面 PAD, \therefore 平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .

(2) (i)【证明】 $\because PA \perp$ 底面 $ABCD, AD \subset$ 底面 $ABCD, \therefore PA \perp AD$, 又 $AB \perp AD$, 则 PA, AB, AD 两两垂直, 故以 A 为坐标原点, AB, AD, AP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则由题易知 $A(0, 0, 0), B(\sqrt{2}, 0, 0), C(\sqrt{2}, 2, 0), D(0, 1+\sqrt{3}, 0), P(0, 0, \sqrt{2})$.





设点 O 的坐标为 (x, y, z) ,

$$\therefore OB = \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + y^2 + z^2},$$

$$OC = \sqrt{(x - \sqrt{2})^2 + (y - 2)^2 + z^2},$$

$$OD = \sqrt{x^2 + (y - 1 - \sqrt{3})^2 + z^2},$$

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \sqrt{2})^2}.$$

\because 点 P, B, C, D 均在球 O 的球面上, \therefore 由

$OB = OC$, 得 $y^2 = (y - 2)^2$, 解得 $y = 1$; 由

$OB = OD$ 且 $y = 1$, 得 $(x - \sqrt{2})^2 + 1 = x^2 + 3$,

解得 $x = 0$; 由 $OB = OP$ 且 $x = 0$, 得 $2 + z^2 = (z - \sqrt{2})^2$, 解得 $z = 0$,

\therefore 点 O 的坐标为 $(0, 1, 0)$, 故点 O 在平面 $ABCD$ 内.

(ii) 【解】由 (i) 易知 $\vec{PO} = (0, 1, -\sqrt{2})$,

$$\vec{AC} = (\sqrt{2}, 2, 0),$$

$$\therefore \cos \langle \vec{PO}, \vec{AC} \rangle = \frac{\vec{PO} \cdot \vec{AC}}{|\vec{PO}| |\vec{AC}|} = \frac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

\therefore 直线 AC 与 PO 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

一题多解

(ii) $\because \vec{AC} = \vec{AB} + 2\vec{AO}, \vec{PO} = \vec{AO} - \vec{AP}$, 且 $|\vec{AC}| = \sqrt{6}, |\vec{PO}| = \sqrt{3}, \vec{AC} \cdot \vec{PO} = (\vec{AB} + 2\vec{AO}) \cdot (\vec{AO} - \vec{AP}) = \vec{AB} \cdot \vec{AO} - \vec{AB} \cdot \vec{AP} + 2\vec{AO}^2 - 2\vec{AO} \cdot \vec{AP} = 0 - 0 + 2 - 0 = 2$.

$$\therefore \cos \langle \vec{AC}, \vec{PO} \rangle = \frac{\vec{AC} \cdot \vec{PO}}{|\vec{AC}| |\vec{PO}|} = \frac{2}{\sqrt{6} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3},$$

\therefore 直线 AC 与 PO 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

3. 命题点 ▶ 线面垂直与面面垂直的判定与性质、线面角、空间向量的应用

(1) 【证明】 $\because A_1C \perp$ 平面 $ABC, BC, AC \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore A_1C \perp BC, A_1C \perp AC$. 又 $\angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore AC \perp BC$.

$\because A_1C \cap AC = C, A_1C, AC \subset$ 平面 ACC_1A_1 ,

$\therefore BC \perp$ 平面 ACC_1A_1 .

$\because BC \subset$ 平面 BCC_1B_1, \therefore 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

如图, 过点 A_1 作 $A_1D \perp CC_1$ 于点 D ,

\because 平面 $ACC_1A_1 \perp$ 平面 BCC_1B_1 , 平面

$ACC_1A_1 \cap$ 平面 $BCC_1B_1 = CC_1, A_1D \subset$ 平面 $ACC_1A_1, \therefore A_1D \perp$ 平面 BCC_1B_1 ,

$\therefore A_1D = 1$.

$\because A_1C_1 \parallel AC, \therefore A_1C \perp A_1C_1$.

由棱柱的性质知 $CC_1 = AA_1 = 2$,

$$\therefore S_{\triangle A_1C_1C} = \frac{1}{2} A_1C_1 \cdot A_1C = \frac{1}{2} CC_1 \cdot A_1D =$$

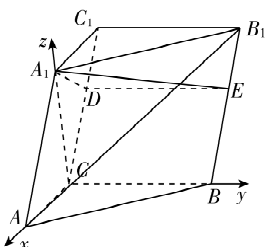
1 ①.

又 $A_1C_1^2 + A_1C^2 = CC_1^2 = 4$ ②,

联立①②, 解得 $A_1C_1 = A_1C = \sqrt{2}$.

由棱柱的性质知 $A_1C_1 = AC, \therefore A_1C = AC = \sqrt{2}$.

(2) 【解】如图, 过点 D 作 $DE \parallel BC$ 交 BB_1 于点 E , 连接 A_1E , 则 $DE \perp$ 平面 ACC_1A_1 .



$\because CC_1 \subset \text{平面 } ACC_1A_1, \therefore DE \perp CC_1.$

$\because DE \cap A_1D = D, DE, A_1D \subset \text{平面 } A_1DE,$

$\therefore CC_1 \perp \text{平面 } A_1DE.$

$\because A_1E \subset \text{平面 } A_1DE, \therefore CC_1 \perp A_1E.$

由棱柱的性质知, $AA_1 \parallel CC_1 \parallel BB_1,$

$\therefore AA_1 \perp A_1E, BB_1 \perp A_1E,$

\therefore 线段 A_1E 的长即为 AA_1 与 BB_1 的距离, $\therefore A_1E = 2,$

$\therefore DE = \sqrt{A_1E^2 - A_1D^2} = \sqrt{3}.$

易知四边形 $DEBC$ 为平行四边形,

$\therefore BC = DE = \sqrt{3}.$

由(1)知直线 CA_1, CA, CB 两两垂直, 故以点 C 为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(0, 0, 0), A(\sqrt{2}, 0, 0), B(0, \sqrt{3}, 0), B_1(-\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}),$

$\therefore \overrightarrow{AB_1} = (-2\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}), \overrightarrow{CB_1} = (-\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}), \overrightarrow{CB} = (0, \sqrt{3}, 0).$

设平面 BCC_1B_1 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z),$

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -\sqrt{2}x + \sqrt{3}y + \sqrt{2}z = 0, \\ \sqrt{3}y = 0, \end{cases}$$

令 $x = 1,$ 则 $y = 0, z = 1, \therefore \mathbf{n} = (1, 0, 1).$

设直线 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角为 $\theta,$

$$\text{则} \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AB_1}, \mathbf{n} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{AB_1} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{AB_1}| |\mathbf{n}|} \right| = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8+3+2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{13}}{13}.$$

4. 命题点 ▶ 面面垂直的判定定理、直线与平面所成的角

(1) 【证明】因为在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 中,

$AD = DC, \angle ADB = \angle CDB, DB = DB,$

所以 $\triangle ABD \cong \triangle CBD,$ 所以 $AB = CB.$

又因为 E 为 AC 的中点, 所以 $BE \perp AC.$

因为 $AD = DC, E$ 为 AC 的中点, 所以 $DE \perp AC.$

又 $BE \cap DE = E,$ 所以 $AC \perp \text{平面 } BED.$

又因为 $AC \subset \text{平面 } ACD,$ 所以平面 $BED \perp \text{平面 } ACD.$

(2) 【解】由(1)得 $AB = CB,$ 又 $\angle ACB = 60^\circ,$ 所以 $\triangle ABC$ 为等边三角形. 因为

$AB = BD = 2,$ 所以 $AB = CB = AC = 2, BE =$

$\sqrt{3}.$ 因为 $AD \perp DC, AD = DC,$ 所以 $\triangle ADC$

是等腰直角三角形, 所以 $AD = CD = \sqrt{2},$

$DE = 1.$ 因为 $DE^2 + BE^2 = BD^2,$ 所以 $DE \perp$

$BE,$ 于是在 $\triangle BED$ 中, 设 h 为 $\triangle BED$ 的

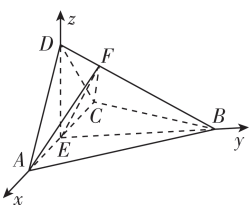
边 BD 的高, 则由等面积可得 $\frac{1}{2} \times 2 \times h =$

$\frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3},$ 即 $h = \frac{\sqrt{3}}{2}.$ 连接 $EF,$ 由(1)知



$AC \perp$ 平面 BED , 又 $EF \subset$ 平面 BED , 所以 $AC \perp EF$, 于是当 $EF \perp BD$ 时, $\triangle ACF$ 的面积最小, 此时 $EF = h = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BF = \frac{3}{2}$, $DF = \frac{1}{2}$, 所以此时 F 为线段 BD 上靠近点 D 的四等分点.

以 E 为坐标原点建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $E(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $C(-1, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{3}, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $F(0, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$,



所以 $\overrightarrow{CF} = (1, \frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4})$, $\overrightarrow{AB} = (-1, \sqrt{3}, 0)$, $\overrightarrow{AD} = (-1, 0, 1)$.

设平面 ABD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$, 则
$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -x + \sqrt{3}y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AD} = -x + z = 0, \end{cases}$$
 即 $x = \sqrt{3}y = z$, 令 $y = 1$, 则 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$.

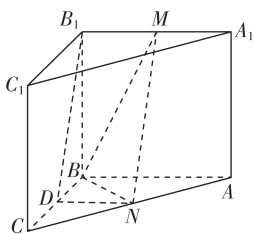
所以 $|\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{CF} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CF}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{CF}|} =$

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1 + \frac{3}{16} + \frac{9}{16}} \times \sqrt{3 + 1 + 3}} = \frac{4\sqrt{3}}{7},$$

故直线 CF 与平面 ABD 所成的角的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

5. 命题点 ▶ 线面平行的判定、面面垂直的性质及利用空间向量求线面角的正弦值

(1) 【证明】取 BC 中点 D , 连接 B_1D, DN . 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 = AB$.



因为 M, N, D 分别为 A_1B_1, AC, BC 的中点, 所以 $B_1M \parallel AB$, $B_1M = \frac{1}{2}AB$, $DN \parallel AB$, $DN = \frac{1}{2}AB$, 所以 $B_1M \parallel DN$ 且 $B_1M = DN$, 所以四边形 B_1MND 为平行四边形, 因此 $B_1D \parallel MN$.

又 $MN \not\subset$ 平面 BCC_1B_1 , $B_1D \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $MN \parallel$ 平面 BCC_1B_1 .

(2) 【解】选条件①:

因为侧面 BCC_1B_1 为正方形, 所以



$BC \perp BB_1$.

又因为平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 且平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = BB_1$, $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

又因为 $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $AB \perp BC$.

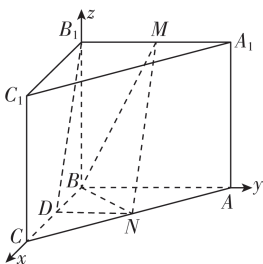
因为 $B_1D \parallel MN$, $AB \perp MN$, 所以 $AB \perp B_1D$.

又 $B_1D \cap BC = D$, 所以 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 .

因为 $BB_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 , 所以 $AB \perp BB_1$,

所以在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, BA, BC, BB_1 两两垂直,

故分别以 BC, BA, BB_1 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



因为 $AB = BC = BB_1 = 2$,

所以 $B(0, 0, 0), N(1, 1, 0), M(0, 1, 2), A(0, 2, 0)$,

所以 $\overrightarrow{BN} = (1, 1, 0), \overrightarrow{BM} = (0, 1, 2), \overrightarrow{AB} = (0, -2, 0)$.

设平面 BMN 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

由 $\begin{cases} \overrightarrow{BN} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x + y = 0, \\ y + 2z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 2$, 得 $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$.

设直线 AB 与平面 BMN 所成角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle \mathbf{n}, \overrightarrow{AB} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\mathbf{n}| |\overrightarrow{AB}|} =$

$$\frac{|4|}{3 \times 2} = \frac{2}{3},$$

所以直线 AB 与平面 BMN 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$.

选条件②:

因为侧面 BCC_1B_1 为正方形, 所以 $BC \perp BB_1$.

又因为平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 且平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = BB_1$, $BC \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 .

又因为 $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1 , 所以 $AB \perp BC$.

取 AB 中点 H , 连接 HM, HN .

因为 M, N, H 分别为 A_1B_1, AC, AB 的中点,

所以 $B_1B \parallel MH, BC \parallel HN$.

又 $BC \perp BB_1$, 所以 $HN \perp MH$.

因为 $AB = BC = 2$, 所以 $HN = BH = 1$.

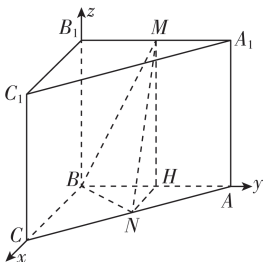
在 $\triangle MHB$ 和 $\triangle MHN$ 中, $BM = MN$, $BH = HN$, 公共边为 MH , 所以 $\triangle MHB \cong \triangle MHN$,

因此 $\angle MHB = \angle MHN = 90^\circ$, 即 $MH \perp AB$, 故 $B_1B \perp AB$.

所以在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, BA, BC, BB_1 两两垂直,

故分别以 BC, BA, BB_1 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

后同选①.



6. 命题点 ▶ 几何法证明线面平行, 向量法求二面角的正弦值

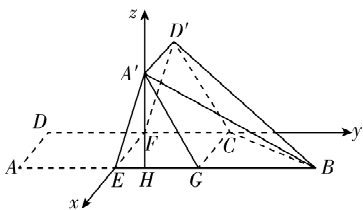
(1)【证明】如图, 过 C 作 $CG \parallel EF$ 交 EB 于 G , 连接 $A'G$. 因为 $EF \parallel AD$, $AB \parallel CD$, $\angle DAB = 90^\circ$, 所以四边形 $ADFE$ 为矩形, 四边形 $EFCG$ 为矩形, 所以 $EF \perp AD$, $EF \perp CG$, 所以 $CG \perp AD$, 所以 $CG \perp A'D'$, 所以四边形 $A'D'CG$ 为平行四边形.

所以 $CD' \parallel A'G$, 又 $A'G \subset$ 平面 $A'BE$, $CD' \not\subset$ 平面 $A'BE$, 所以 $CD' \parallel$ 平面 $A'BE$.

因为 $CF \parallel EB$, $EB \subset$ 平面 $A'BE$, $CF \not\subset$ 平面 $A'BE$, 所以 $CF \parallel$ 平面 $A'BE$.

又 $CD', CF \subset$ 平面 $CD'F$, $CD' \cap CF = C$, 所以平面 $CD'F \parallel$ 平面 $A'BE$.

因为 $A'B \subset$ 平面 $A'BE$, 所以 $A'B \parallel$ 平面 $CD'F$.



(2)【解】因为 $A'E \perp EF$, $BE \perp EF$, 所以由二面角的定义可知, $\angle A'EB$ 即为平面 $EFD'A'$ 与平面 $EFCB$ 所成的二面角, 所以 $\angle A'EB = 60^\circ$, 同理 $\angle D'FC = 60^\circ$. 又 $D'F = DF = FC$, 所以 $\triangle D'FC$ 为等边三角形. 过 A' 作 $A'H \perp EB$ 交 EB 于 H . 因为 $EF \perp EB$, $EF \perp A'E$, $A'E \cap EB = E$, $A'E, EB \subset$ 平面 $A'EB$, 所以 $EF \perp$ 平面 $A'EB$, 又 $A'H \subset$ 平面 $A'EB$, 所以 $EF \perp A'H$. 又 $A'H \perp EB$, $EB \cap EF = E$, $EB, EF \subset$ 平面 $EFCB$, 所以 $A'H \perp$ 平面 $EFCB$. 因此以 F 为坐标原点, 直线 FE 、直线 FC 、过点 F 且平行于 $A'H$ 的直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立如图所示的空间直角坐标系.

不妨设 $AD = 1$, 则 $F(0, 0, 0)$, $E(1, 0, 0)$,

$B(1,2,0), C(0,1,0), D'\left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $\overrightarrow{BC} = (-1, -1, 0)$, $\overrightarrow{CD'} = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\overrightarrow{FE} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{FD'} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

设平面 BCD' 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{BC} = -x_1 - y_1 = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{CD'} = -\frac{1}{2}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_1 = 0, \end{cases} \text{令 } x_1 = 1,$$

$$\text{则 } \mathbf{m} = \left(1, -1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

设平面 $EFD'A'$ 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FE} = x_2 = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{FD'} = \frac{1}{2}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0, \end{cases} \text{令 } y_2 = 1, \text{ 则}$$

$$\mathbf{n} = \left(0, 1, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} =$$

$$\frac{-1 + \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{7}{3}} \times \sqrt{\frac{4}{3}}} = -\frac{\sqrt{7}}{7},$$

所以 $\sin \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\sqrt{42}}{7}$, 即平面 BCD' 与平

面 $EFD'A'$ 所成二面角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{7}$.

7. 命题点 ▶ 线面平行的证明、二面角相关问题的求解

(1) 【证明】由 $BC = 1, AB = \sqrt{3}, AC = 2$ 可得,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \therefore AB \perp BC.$$

又 $PA \perp$ 底面 $ABCD, BC \subset$ 底面 $ABCD$,
 $\therefore BC \perp PA$.

又 $AB \cap PA = A, AB, PA \subset$ 平面 PAB (提示: 要着力寻找平面内的两条相交直线),
 $\therefore BC \perp$ 平面 PAB .

$\because PA \perp$ 底面 $ABCD, AD \subset$ 底面 $ABCD$,
 $\therefore AD \perp PA$.

又 $AD \perp PB$, 且 $PB \cap PA = P, PB, PA \subset$ 平面 PAB ,

$\therefore AD \perp$ 平面 $PAB, \therefore AD \parallel BC$ (提示: 垂直于同一个平面的两直线平行).

又 $BC \subset$ 平面 $PBC, AD \not\subset$ 平面 $PBC, \therefore AD \parallel$ 平面 PBC .

(2) 【解】以 D 为坐标原点, DA, DC 所在直线分别为 x, y 轴, 过点 D 且垂直于平面 $ABCD$ 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $D(0, 0, 0)$,

设 $A(x, 0, 0) (0 < x < 2)$, 则 $P(x, 0, 2)$,
 $C(0, \sqrt{4-x^2}, 0)$.

则 $\overrightarrow{AC} = (-x, \sqrt{4-x^2}, 0), \overrightarrow{AP} = (0, 0, 2)$,

$$\overrightarrow{DC} = (0, \sqrt{4-x^2}, 0), \overrightarrow{DP} = (x, 0, 2).$$

设平面 ACP 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{AP} = 0, \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x_1 \cdot (-x) + y_1 \cdot \sqrt{4-x^2} = 0, \\ 2z_1 = 0, \end{cases} \text{令 } y_1 = x,$$

$$\text{则 } x_1 = \sqrt{4-x^2}, \therefore \mathbf{n}_1 = (\sqrt{4-x^2}, x, 0).$$

设平面 CPD 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{DP} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} y_2 \cdot \sqrt{4-x^2} = 0, \\ x_2 x + 2z_2 = 0, \end{cases} \text{令}$$

$$z_2 = x, \text{则 } x_2 = -2,$$

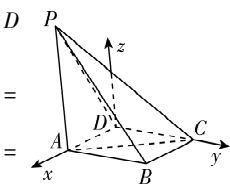
$$\therefore \mathbf{n}_2 = (-2, 0, x).$$

设二面角 $A-CP-D$

的平面角为 θ ,

$$\text{则 } |\cos \theta| =$$

$$\frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}$$



$$\frac{2\sqrt{4-x^2}}{2\sqrt{x^2+4}} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2+4}}, \text{则 } \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta =$$

$$1 - \frac{4-x^2}{x^2+4} = \left(\frac{\sqrt{42}}{7} \right)^2,$$

解得 $x = \sqrt{3}$ (负值舍去).

即 AD 的长为 $\sqrt{3}$.

8. 命题点 ▶ 余弦定理, 线面垂直的判定与性质, 二面角

$$(1) \text{【证明】} \because AD = 5\sqrt{3}, AB = 8, \overrightarrow{AE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB},$$

$$\therefore AE = 2\sqrt{3}, AF = 4.$$

$$\text{在 } \triangle AEF \text{ 中, 由余弦定理得 } EF^2 = AF^2 + AE^2 - 2AF \cdot AE \cdot \cos A = 16 + 12 - 2 \times 4 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4,$$

$$\text{则 } EF = 2,$$

$$\therefore \text{在 } \triangle AEF \text{ 中, } EF^2 + AE^2 = AF^2,$$

$$\therefore EF \perp AE.$$

$$\text{又} \because \triangle AEF \text{ 沿 } EF \text{ 翻折至 } \triangle PEF,$$

$$\therefore EF \perp PE.$$

$$\text{又} \because AE \cap PE = E, AE, PE \subset \text{平面 } PED,$$

$$\therefore EF \perp \text{平面 } PED.$$

$$\text{又} \because PD \subset \text{平面 } PED,$$

$$\therefore EF \perp PD.$$

$$(2) \text{【解】由(1)知 } EF \perp AE,$$

$$\text{又} \because CD \perp AD, \therefore CD \parallel EF.$$

$$\because EF \perp \text{平面 } PED, \therefore CD \perp \text{平面 } PED.$$

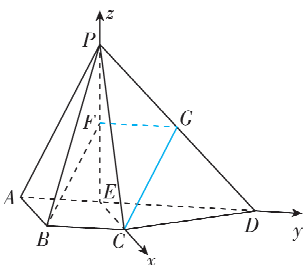
$$\text{又} \because PD \subset \text{平面 } PED, \therefore CD \perp PD.$$

$$\text{在 Rt} \triangle PCD \text{ 中, } PD = \sqrt{PC^2 - CD^2} = \sqrt{39}.$$

$$\text{又} \because ED = AD - AE = 3\sqrt{3}, \therefore PE^2 + ED^2 = PD^2,$$

$$\therefore PE \perp ED.$$

$$\therefore \text{以 } E \text{ 为原点, } EF, ED, EP \text{ 所在直线分}$$



设平面 PAB 的法向量为 $\mathbf{n} = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n} = -y_1 - 2z_1 = 0, \\ \overrightarrow{PB} \cdot \mathbf{n} = x_1 - y_1 - 2z_1 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } y_1 = 2, \text{ 则}$$

$$x_1 = 0, z_1 = -1,$$

$$\therefore \mathbf{n} = (0, 2, -1).$$

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{m} = x_2 - 2z_2 = 0, \\ \overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{m} = 2y_2 - 2z_2 = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x_2 = 2, \text{ 则}$$

$$y_2 = 1, z_2 = 1,$$

$$\therefore \mathbf{m} = (2, 1, 1),$$

$$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{30}}{30},$$

\therefore 平面 PAB 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{30}}{30}$.

10. 命题点 ▶ 线面平行、二面角的正弦值

(1) 【证明】由 $BC = 2, AD = 4$, 点 M 为 AD 的中点得 $BC = DM$. 又 $BC \parallel MD$, 所以四边形 $BCDM$ 为平行四边形, 则 $BM \parallel CD$.

又 $CD \subset$ 平面 $CDE, BM \not\subset$ 平面 CDE , 所以 $BM \parallel$ 平面 CDE .

(2) 【解】由(1)知 $BM = CD$, 又 $CD = AB$, 所以 $BM = AB = 2$,

同理易知 $AF = FM = ED = \sqrt{10}$.

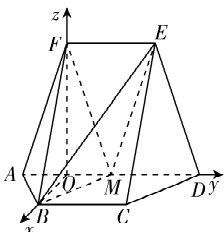
如图, 取 AM 的中点 O , 连接 OB, OF , 则

$$OF \perp AM, OB \perp AM, OF = 3, OB = \sqrt{3},$$

$$\text{又 } BF = 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } BF^2 = OF^2 + OB^2,$$

则 $OB \perp OF$,

所以可以 O 为坐标原点, OB, OD, OF 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $F(0, 0, 3), B(\sqrt{3}, 0, 0), M(0, 1, 0), E(0, 2, 3)$, 所以 $\overrightarrow{FB} = (\sqrt{3}, 0, -3), \overrightarrow{BM} = (-\sqrt{3}, 1, 0), \overrightarrow{ME} = (0, 1, 3)$.



设平面 FBM 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$,



$$\text{由} \begin{cases} \overrightarrow{FB} \cdot \mathbf{m} = \sqrt{3}x_1 - 3z_1 = 0, \\ \overrightarrow{BM} \cdot \mathbf{m} = -\sqrt{3}x_1 + y_1 = 0, \end{cases}$$

取 $z_1 = 1$, 可得 $x_1 = \sqrt{3}$, $y_1 = 3$, 则 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}, 3, 1)$.

同理可取平面 BME 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, 3, -1)$,

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{11}{13}$, 所以

$\sin \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{13}$, 即二面角 $F-BM-E$ 的正弦值为 $\frac{4\sqrt{3}}{13}$.

11. 命题点 ▶ 空间平行关系的证明和利用空间向量解决与二面角有关的问题

(1) 【证明】解法一: 依题意得 $\overrightarrow{B_2C_2} = \overrightarrow{B_2B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{DD_2} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A_2A} = \overrightarrow{A_2D_2}$, 因为 A_2, D_2, B_2, C_2 四点不共线, 所以 $B_2C_2 // A_2D_2$.

解法二: 如图, 以 CD, CB, CC_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系.

因为 $AB = 2, AA_1 = 4, AA_2 = 1, BB_2 = DD_2 = 2, CC_2 = 3$, 所以 $A_2(2, 2, 1), B_2(0, 2, 2), C_2(0, 0, 3), D_2(2, 0, 2)$,

所以 $\overrightarrow{A_2D_2} = \overrightarrow{B_2C_2} = (0, -2, 1)$, 又 A_2, D_2, B_2, C_2 四点不共线, 所以 $B_2C_2 // A_2D_2$.

解法三: 如图, 过点 A_2 作 $A_2E \perp BB_1$ 于点 E , 过点 D_2 作 $D_2F \perp CC_1$ 于点 F , 在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2$,

$AA_1 = 4$, 点 A_2, B_2, C_2, D_2 分别在棱 AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 上, 且 $AA_2 = 1, BB_2 = DD_2 = 2, CC_2 = 3$, 所以

$A_2E \parallel D_2F, B_2E \parallel C_2F$, 所以四边形 A_2EFD_2, B_2C_2FE 均为平行四边形,

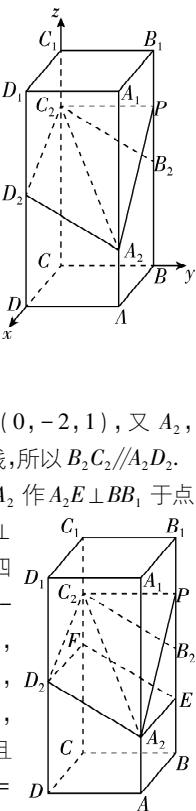
所以 $A_2D_2 \parallel EF, B_2C_2 \parallel EF$, 所以 $B_2C_2 // A_2D_2$.

(2) 【解】设 $P(0, 2, a) (0 \leq a \leq 4)$, 由 (1) 中建系可知 $A_2(2, 2, 1), C_2(0, 0, 3), D_2(2, 0, 2)$,

则 $\overrightarrow{A_2C_2} = (-2, -2, 2), \overrightarrow{A_2D_2} = (0, -2, 1), \overrightarrow{A_2P} = (-2, 0, a-1)$. 设平面 $A_2C_2D_2$ 的法向量为 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 所以

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_2C_2} \cdot \mathbf{m} = 0, \\ \overrightarrow{A_2D_2} \cdot \mathbf{m} = 0, \end{cases}$$

即





$$\begin{cases} -2x_1 - 2y_1 + 2z_1 = 0, \\ -2y_1 + z_1 = 0, \end{cases} \text{取 } y_1 = 1, \text{ 可得 } x_1 = 1, z_1 = 2,$$

所以 $m = (1, 1, 2)$.

设平面 PA_2C_2 的法向量为 $n = (x_2, y_2, z_2)$, 所以

$$\begin{cases} \overrightarrow{A_2C_2} \cdot n = 0, \\ \overrightarrow{A_2P} \cdot n = 0, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} -2x_2 - 2y_2 + 2z_2 = 0, \\ -2x_2 + (a-1)z_2 = 0, \end{cases} \text{取 } z_2 = 1, \text{ 可得}$$

$$x_2 = \frac{a-1}{2}, y_2 = \frac{3-a}{2}, \text{ 所以 } n = \left(\frac{a-1}{2}, \frac{3-a}{2}, 1 \right).$$

因为二面角 $P-A_2C_2-D_2$ 为 150° ,

$$\text{所以 } |\cos \langle m, n \rangle| = \left| \frac{m \cdot n}{|m| |n|} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } \frac{\left| \frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{2} + 2 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{a-1}{2} \right)^2 + \left(\frac{3-a}{2} \right)^2 + 1^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 解得 } a = 1 \text{ 或 } a = 3, \text{ 所以点 } P \text{ 为 } B_2B$$

的中点或 B_2B_1 的中点, 即 $B_2P = 1$.

12. 命题点 ▶ 线面平行、面面垂直的证明, 求二面角

(1) 【证明】由题意得 $AO = \sqrt{6}$, $AC =$

$$2\sqrt{3}, \sin \angle OBF = \sin \angle BAO = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin \angle ACB = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以 } \angle ACB = \angle OBF, \text{ 连}$$

接 FO , 则由 O 为 BC 的中点得 $FO \perp BC$. 又 $AB \perp BC$, 所以 $FO \parallel AB$, 故 F 为 AC 的中点.

又因为 D, E 分别为 BP, AP 的中点, 所以 $EF \parallel PC \parallel DO$, 而 $EF \not\subset$ 平面 ADO , 所以 $EF \parallel$ 平面 ADO .

(2) 【证明】由 (1) 知 $BF = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$,

$$AO = \sqrt{6}, DO = EF = \frac{\sqrt{6}}{2}, AD = \sqrt{5} DO =$$

$$\frac{\sqrt{30}}{2}, BD = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

所以 $AO^2 + DO^2 = AD^2$, 所以 $AO \perp DO$.

因为 $EF \parallel DO$, 所以 $AO \perp EF$.

又 $AO \perp BF$, $BF \cap EF = F$, $BF, EF \subset$ 平面 BEF , 所以 $AO \perp$ 平面 BEF .

又因为 $AO \subset$ 平面 ADO , 所以平面 $ADO \perp$ 平面 BEF .

(3) 【解】以 B 为原点, BA 所在直线为 x 轴, BC 所在直线为 y 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $B(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $O(0, \sqrt{2}, 0)$, $C(0, 2\sqrt{2}, 0)$.

因为 $\cos \angle ADB = -\cos \angle ADP$,

$$\text{即 } \frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{30}}{2} \right)^2 - 2^2}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{30}}{2}} =$$



$$-\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{30}}{2}\right)^2 - PA^2}{2 \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{30}}{2}},$$

解得 $PA = \sqrt{14}$.

设 $P(x, y, z)$, 由 $PB = PC = \sqrt{6}$,
 $PA = \sqrt{14}$,

$$\text{得} \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 + z^2 = 6, \\ (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 14, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = -1, \\ y = \sqrt{2}, \\ z = \sqrt{3} \text{ (舍负)}, \end{cases}$$

故 $P(-1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$, $D\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

取平面 AOC 的法向量为 $\mathbf{m}_1 = (0, 0, 1)$.

设平面 AOD 的法向量为 $\mathbf{m}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

由 $\overrightarrow{AO} = (-2, \sqrt{2}, 0)$, $\overrightarrow{OD} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 得

$$\begin{cases} -2x_2 + \sqrt{2}y_2 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}z_2 = 0, \end{cases}$$

令 $x_2 = 1$, 则 $\mathbf{m}_2 = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.

所以 $\cos \langle \mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2 \rangle = \frac{\mathbf{m}_1 \cdot \mathbf{m}_2}{|\mathbf{m}_1| |\mathbf{m}_2|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+2+3}} =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以二面角 $D-AO-C$ 的正弦值为

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

