



第7章 数列

第1节 数列的概念及其表示法

刷

基础

1. D 考查点 ▶ 由数列的通项公式与前 n 项和的关系求通项公式

【解析】因为 $S_n + na_n = 1$, 所以 $a_1 = \frac{1}{2}$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_n + na_n = S_{n-1} + (n-1)a_{n-1} = 1$,
所以 $(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1}$.

因为 $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $a_n \neq 0$, 所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$,

此时 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \times \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \times \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \times \cdots \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_2}{a_1} \times$

$a_1 = \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \cdots \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{n(n+1)}$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1}{2}$ 也满足

该式,

则 $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, 则 $S_n = 1 - na_n = 1 - \frac{1}{n+1}$,

若 $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} > 0.99$, 则 $n > 99$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$,

故所求 n 的最小值为 100. 故选 D.

2. $2n^2$ 考查点 ▶ 由数列的通项公式与前 n 项和的关系求前 n 项和

【解析】由 $S_n = na_{n+1} - 2n(n+1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

可得 $S_n = n(S_{n+1} - S_n) - 2n(n+1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

故 $(n+1)S_n = nS_{n+1} - 2n(n+1)$, 即 $\frac{S_{n+1}}{n+1} -$

$\frac{S_n}{n} = 2$,

故 $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 为等差数列, 且公差为 2, 首项

为 2,

故 $\frac{S_n}{n} = 2n$, 故 $S_n = 2n^2$.

一题多解

当 $n=1$ 时, $a_1 = a_2 - 4$, 则

$a_2 = 6$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = na_{n+1} - 2n(n+1) - [(n-1)a_n - 2(n-1)n] = na_{n+1} - (n-1)a_n - 4n$, 则 $a_{n+1} - a_n = 4$, 当 $n=1$ 时, $a_2 - a_1 = 4$, 故 $\{a_n\}$ 是首项为 2, 公差为 4 的等差数列, 故 $a_n = 4n - 2$, $S_n = 2n^2$.

3. B 考查点 ▶ 根据数列递推关系写出数列的项

【解析】设 $a_4 = m$, 则 $m \in [2, 3]$,

得 $a_3 = m - 1$, $a_2 = 2(m - 1) = 2m - 2$,

所以 $a_1 = 2m - 3 \in [1, 3]$. 故选 B.

4. C 考查点 ▶ 根据数列递推关系写出数列的项

【解析】在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 4$, $a_{n+1} =$

$\frac{1}{1-a_n}$, 则 $a_2 = \frac{1}{1-a_1} = \frac{1}{1-4} = -\frac{1}{3}$,

$a_3 = \frac{1}{1-a_2} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}$,



$$a_4 = \frac{1}{1-a_3} = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4, \dots,$$

以此类推可知, 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$,
 $a_{n+3} = a_n$,

所以 $S_{37} = 12(a_1 + a_2 + a_3) + a_1 = 12 \times \left(4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \right) + 4 = 57$. 故选 C.

5. C **考查点** ▶ 由数列递推关系研究数列的有关性质

【解析】 对于 A, 当 $a_n > 0$ 时, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} +$

$$\frac{1}{a_n} \geq 2 \sqrt{\frac{a_n}{2} \cdot \frac{1}{a_n}} = \sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } \frac{a_n}{2} = \frac{1}{a_n}, \text{ 即 } a_n = \sqrt{2} \text{ 时等号成立,}$$

所以 $a_n \geq \sqrt{2} (n \geq 2)$, 但 a_1 的值不确定, 所以若 $a_n > 0$, 则 $\{a_n\}$ 所有项不一定恒大于等于 $\sqrt{2}$, 故 A 错误;

对于 B, 若 $a_1 = 1$, 则 $a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_1} = \frac{3}{2}$,

$$a_3 = \frac{a_2}{2} + \frac{1}{a_2} = \frac{17}{12}, \text{ 而 } a_3 < a_2, \text{ 故 B 错误;}$$

对于 C, 若 $\{a_n\}$ 是常数列, 则 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} +$

$$\frac{1}{a_n} = a_n \Rightarrow \frac{a_n}{2} = \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_n^2 = 2, \text{ 即 } a_n = \pm\sqrt{2},$$

所以 $a_1 = \pm\sqrt{2}$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $a_1 = 2$, 所以由递推关系

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \text{ 可知 } a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{1}{a_1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} + \frac{1}{a_2} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12},$$

所以 $a_2 + \frac{a_1}{2} = \frac{5}{2}, a_3 + \frac{a_2}{2} = \frac{13}{6} < \frac{5}{2}$. 故 D 错误. 故选 C.

6. $4 - \frac{1}{2^{n-1}}$ **考查点** ▶ 累加法求数列通项公式

【解析】 由已知得当 $n \geq 2$ 时, $a_n^2 = (a_n^2 - a_{n-1}^2) + (a_{n-1}^2 - a_{n-2}^2) + \dots + (a_2^2 - a_1^2) + a_1^2 =$

$$\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-2}} + \dots + \frac{1}{2^1} + (n-1) + 4 =$$

$$\frac{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)}{1 - \frac{1}{2}} + (n-1) + 4 = n + 4 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

当 $n=1$ 时, $n+4-\frac{1}{2^{n-1}} = 1+4-1 = 4 = a_1^2$ 符合上式,

$$\text{所以 } a_n^2 - n = n + 4 - \frac{1}{2^{n-1}} - n = 4 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

7. A **考查点** ▶ 判断数列的增减性

【解析】 由等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d >$

$$0), \text{ 得 } a_n = a_1 - d + nd, \text{ 则 } \frac{a_n}{n} = \frac{a_1 - d}{n} + d,$$

当 $0 < a_1 < d$ 时, $a_1 - d < 0$, 而 $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, 则

$\frac{a_1-d}{n} < \frac{a_1-d}{n+1}$, 因此 $\frac{a_n}{n} < \frac{a_{n+1}}{n+1}$, $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为递增数列;

当 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为递增数列时, $\frac{a_n}{n} < \frac{a_{n+1}}{n+1}$, 即有

$\frac{a_1-d}{n} < \frac{a_1-d}{n+1}$, 整理得 $a_1 < d$, 不能推出 $0 < a_1 < d$,

所以“ $0 < a_1 < d$ ”是“ $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为递增数列”的充分不必要条件. 故选 A.

8. C 考查点 ▶ 数列周期性的应用

【解析】由 $a_1 = 2, a_2 = 1, a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$) 得,

$a_3 = a_2 - a_1 = -1, a_4 = a_3 - a_2 = -2, a_5 = a_4 - a_3 = -1, a_6 = a_5 - a_4 = 1, a_7 = a_6 - a_5 = 2, a_8 = a_7 - a_6 = 1, \dots$, 则 $\{a_n\}$ 是以 6 为周期的周期数列,

所以 $a_{2024} = a_{337 \times 6 + 2} = a_2 = 1$. 故选 C.

9. C 考查点 ▶ 数列前 n 项和的增减性的应用

【解析】令 $a_n = \frac{n-3}{2n-17} \geq 0$, 解得 $n \leq 3$ 或

$n > \frac{17}{2}, n \in \mathbf{N}^*$,

当 $n \leq 3$ 时, $a_n \geq 0$, 故当 $n = 1, 2$ 时, S_n 递增, 且 $S_3 = S_2$;

当 $4 \leq n \leq 8$ 时, $a_n < 0$, 故当 $n = 4, 5, 6, 7, 8$ 时, S_n 递减;

当 $n \geq 9$ 时, $a_n > 0, S_n$ 递增.

又 $a_1 = \frac{2}{15}, a_2 = \frac{1}{13}, a_3 = 0, a_4 = -\frac{1}{9}, \dots, a_8 = -5$,

所以 $S_8 < 0 < S_1$, 所以 S_n 取得最小值时的 n 的值为 8. 故选 C.

10. BCD 突破点 ▶ 判断数列的增减性、求等差数列的前 n 项和、确定数列中的最小项

【解析】对于 A 选项, 由题意知, 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为等差数列, 且 $a_n = 2n - 1, b_n = 3n + 1$,

所以 $A_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9 \times (1 + 17)}{2} = 9^2$,

$B_9 = \frac{9(b_1 + b_9)}{2} = \frac{9 \times (4 + 28)}{2} = 9 \times 16$,

因此, $\frac{A_9}{B_9} = \frac{9^2}{9 \times 16} = \frac{9}{16}$, A 错误;

对于 B 选项, 数列 $\{a_n\}$ 的各项分别为: $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \dots$,

数列 $\{b_n\}$ 的各项分别为: $4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, \dots$,

则这两个数列的公共项组成的数列 $\{c_n\}$ 的各项分别为 $7, 13, 19, 25, 31, \dots$, 可知, 数列 $\{c_n\}$ 是以 7 为首项, 6 为公差的等差数列, 所以 $c_n = 7 + 6(n - 1) = 6n + 1$,



$$\text{所以 } C_9 = \frac{9(c_1 + c_9)}{2} = \frac{9 \times (7 + 55)}{2} = 9 \times 31,$$

$$\text{故 } \frac{A_9}{C_9} = \frac{9^2}{9 \times 31} = \frac{9}{31}, \text{ B 正确;}$$

$$\text{对于 C 选项, 令 } \frac{a_n}{c_n - 2024} =$$

$$\frac{2n-1}{6n+1-2024} = \frac{2n-1}{6n-2023} < 0,$$

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $n \leq 337$,

$$\text{令 } \frac{a_n}{c_n - 2024} = \frac{2n-1}{6n-2023} > 0, \text{ 因为 } n \in$$

\mathbf{N}^* , 所以 $n \geq 338$,

$$\text{且 } \frac{a_n}{c_n - 2024} = \frac{2n-1}{6n-2023} =$$

$$\frac{\frac{1}{3}(6n-2023) + \frac{2020}{3}}{6n-2023} = \frac{1}{3} +$$

$$\frac{2020}{3(6n-2023)},$$

所以, 当 $n \leq 337$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, 数列

$$\left\{ \frac{a_n}{c_n - 2024} \right\} \text{ 递减,}$$

因此, 数列 $\left\{ \frac{a_n}{c_n - 2024} \right\}$ 的第 337 项最小, C 正确;

$$\text{对于 D 选项, 令 } x_n = \frac{a_{n+1}}{b_n b_{n+1}} =$$

$$\frac{2n+1}{(3n+1)(3n+4)},$$

$$\text{则 } x_{n+1} = \frac{2n+3}{(3n+4)(3n+7)}, \text{ 所以 } x_{n+1} - x_n =$$

$$\frac{2n+3}{(3n+4)(3n+7)} - \frac{2n+1}{(3n+1)(3n+4)} =$$

$$- \frac{6n+4}{(3n+1)(3n+4)(3n+7)} < 0,$$

$$\text{即 } x_{n+1} < x_n, \text{ 所以数列 } \left\{ \frac{a_{n+1}}{b_n b_{n+1}} \right\} \text{ 是递减数}$$

列, D 正确. 故选 BCD.

11.2 考查点 ▶ 分组(并项)求和、函数奇偶性的应用

【解析】由题意可知, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

$$\text{且 } f(x) + f(-x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1} + \frac{3^{-x} - 1}{3^{-x} + 1} = \frac{3^x - 1}{3^x + 1} +$$

$$\frac{1 - 3^x}{1 + 3^x} = 0, \text{ 即 } f(x) = -f(-x),$$

可知 $f(x)$ 为定义在 \mathbf{R} 上的奇函数,

$$\text{且 } f(x) = \frac{3^x - 1}{3^x + 1} = 1 - \frac{2}{3^x + 1}.$$

由 $y = 3^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 可知 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 且为奇函数.

$$\text{因为 } f(a_2) + f(a_3 + a_4) = 0, \text{ 所以 } f(a_3 + a_4) = -f(a_2) = f(-a_2),$$

$$\text{可得 } a_3 + a_4 = -a_2, \text{ 即 } a_2 + a_3 + a_4 = 0,$$

由 $a_{n+3} = a_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 可知, 3 为数列 $\{a_n\}$ 的周期, 则 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 0$,



又 $2\,024 = 3 \times 674 + 2$, 所以 $\sum_{i=1}^{2\,024} a_i = a_1 + a_2 = 2$.

12. $a_n = \begin{cases} 3, n=1, \\ 2n, n \geq 2 \end{cases}$ **考查点** ▶ 利用 a_n 与 S_n 关系求通项公式

【解析】 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + n + 1) - [(n-1)^2 + (n-1) + 1] = 2n$,

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 3$, 不满足上式,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n =$

$$\begin{cases} 3, n=1, \\ 2n, n \geq 2. \end{cases}$$

易错警示

求出 $n \geq 2$ 时的数列的通项公式后, 要检验数列首项是否符合该通项公式.

第2节 等差数列及其前 n 项和

刷

基础

1. B **考查点** ▶ 等差数列前 n 项和公式、等差数列基本量的计算

【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d \neq 0$),

由 $S_{15} = 5(a_5 + a_7 + a_k)$, 得 $15a_1 + \frac{15 \times 14}{2}d =$

$5[a_1 + 4d + a_1 + 6d + a_1 + (k-1)d]$,

所以 $(k-1)d = 11d$, 又 $d \neq 0$, 所以 $k = 12$.

故选 B.

2. AC **考查点** ▶ 由 S_n 求数列中的项、判定等差数列

【解析】 因为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 - 4n$,

所以 $a_1 = S_1 = 1 - 4 = -3$, 故 A 正确;

$a_2 = S_2 - S_1 = 2^2 - 4 \times 2 - (1^2 - 4 \times 1) = -1$, 则

$d = a_2 - a_1 = 2$, 故 B 错误;

$a_{10} = S_{10} - S_9 = 10^2 - 4 \times 10 - (9^2 - 4 \times 9) = 15$,

故 C 正确;

因为 $\frac{S_n}{n} = \frac{n^2 - 4n}{n} = n - 4$, 所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项

为 -3 , 公差为 1 的等差数列, 故 D 错误.

故选 AC.

3. BD **考查点** ▶ 等差数列的简单应用、求等差数列前 n 项和

【解析】 若把 200 根相同的钢管堆放成正三角形垛, 则正三角形垛从上到下每一

层的钢管根数组为首项为 1 , 公差为 1 的等差数列, 所以搭一个 n ($n \in \mathbf{N}^*$) 层的

正三角形垛所需钢管总根数为 $S_n = 1 + 2 +$

$$3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

令 $S_n = \frac{n(n+1)}{2} \leq 200$, 解得 $n = 19$ 是使得

不等式成立的 n 的最大整数值, 此时

$S_{19} = 190$, 由此可得剩余钢管有 10 根, 故

A 错误, B 正确;

$$\text{当 } n = 20 \text{ 时, } S_{20} = \frac{20 \times (20+1)}{2} = 210,$$

故再增加 10 根钢管, 则所有的钢管恰好



可以堆放成正三角形垛,故 C 错误,D 正确. 故选 BD.

4. BCD **考查点** ▶ 等差数列基本量的计算、利用二次函数的性质求等差数列前 n 项和的最值

【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则

$$\text{有 } S_5 = 5a_1 + \frac{5 \times (5-1)}{2}d = 5a_1 + 10d, S_4 =$$

$$4a_1 + \frac{4 \times (4-1)}{2}d = 4a_1 + 6d, a_6 = a_1 + 5d,$$

$$\text{由 } 4S_5 - 5S_4 = 20, a_6 = 1 \text{ 得}$$

$$\begin{cases} 4(5a_1 + 10d) - 5(4a_1 + 6d) = 10d = 20, \\ a_6 = a_1 + 5d = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d = 2, \\ a_1 = -9, \end{cases} \text{ 故 A 错误;}$$

$$S_9 = 9a_1 + \frac{9 \times (9-1)}{2}d = 9 \times (-9) + 36 \times 2 =$$

-9, 故 B 正确;

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = -9n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 =$$

$n(n-10)$, 由二次函数的性质可知,

当 $n=5$ 时, S_n 取得最小值, 故 C 正确;

$$\text{因为 } a_n = -9 + (n-1) \times 2 = 2n - 11,$$

$$\text{所以 } b_n = a_{2n} = 2 \times 2n - 11 = 4n - 11, \text{ 所以}$$

$$b_{n+1} - b_n = 4(n+1) - 11 - (4n - 11) = 4,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 为等差数列, 且公差为 4,

$$\text{首项为 } b_1 = 4 \times 1 - 11 = -7,$$

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $-7n +$

$$\frac{n(n-1)}{2} \times 4 = 2n^2 - 9n, \text{ 故 D 正确. 故}$$

选 BCD.

5. 考查点 ▶ 等差数列基本量的计算、数列不等式能成立问题、求等差数列前 n 项和

【解】 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d > 1$),

$$\because 2a_1 = a_2, \therefore 2a_1 = a_1 + d, \text{ 解得 } a_1 = d, a_2 = 2d, S_2 = a_1 + a_2 = 3d.$$

$$\text{由 } \frac{1}{a_n b_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ 可知 } \frac{1}{a_1 b_1} = \frac{1}{2}, b_1 =$$

$$\frac{2}{a_1} = \frac{2}{d}, \frac{1}{a_2 b_2} = \frac{1}{6}, b_2 = \frac{6}{a_2} = \frac{6}{2d} = \frac{3}{d},$$

$$\text{又 } T_2 = b_1 + b_2 = \frac{2}{d} + \frac{3}{d} = \frac{5}{d},$$

$$\therefore S_2 + T_2 = 3d + \frac{5}{d} = 16,$$

$$\text{即 } 3d^2 - 16d + 5 = 0, \text{ 解得 } d = 5 \text{ 或 } d = \frac{1}{3}$$

(舍去),

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 5n.$$

(2) 由 (1) 知, $a_n = 5n$,

$$\text{又由 } \frac{1}{a_n b_n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{ 可知, } \frac{1}{5n b_n} = \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\text{解得 } b_n = \frac{1}{5}n + \frac{1}{5},$$

\therefore 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{2}{5}$, 公差为 $\frac{1}{5}$ 的等

$$\text{差数列, 故 } T_n = \frac{n \left(\frac{2}{5} + \frac{n+1}{5} \right)}{2} =$$



$$\frac{n(n+3)}{10} = \frac{n^2+3n}{10},$$

若存在 $n \in \mathbf{N}^*$, 使得 $10T_n - 9n + t + t^2 < 3$, 则

$$(10T_n - 9n)_{\min} + t + t^2 < 3,$$

$$\text{又 } 10T_n - 9n = n^2 - 6n = (n-3)^2 - 9,$$

$$\therefore (10T_n - 9n)_{\min} = -9,$$

故 $-9 + t + t^2 < 3$, 整理得 $t^2 + t - 12 < 0$, 解得 $-4 < t < 3$.

故 t 的取值范围是 $(-4, 3)$.

6. C 考查点 ▶ 构造并判定等差数列

【解析】依题意, $a_{n+1} - a_n = \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)} = 1 -$

$$\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \right) = \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} + 1,$$

则 $a_{n+1} - \frac{2}{n+1} = a_n - \frac{2}{n} + 1$, 所以数列

$\left\{ a_n - \frac{2}{n} \right\}$ 是公差为 1 的等差数列,

于是 $a_{12} - \frac{2}{12} = a_2 - \frac{2}{2} + 10$, 而 $a_{12} = \frac{73}{6}$, 所

以 $a_2 = 12 - 9 = 3$. 故选 C.

7. ABD 考查点 ▶ 利用二次函数的性质求等差数列前 n 项和的最值、判定等差数列

【解析】对于 A, 由题意得 $a_n = 2n - 15$, 则

$$a_{n+1} = 2(n+1) - 15 = 2n - 13,$$

$$\text{则 } a_{n+1} - a_n = 2n - 13 - (2n - 15) = 2,$$

$$a_1 = -13,$$

则 $\{a_n\}$ 是首项为 -13 , 公差为 2 的等差数列, 故 A 正确;

对于 B, 由等差数列求和公式得 $S_n =$

$$\frac{n(-13+2n-15)}{2} = n^2 - 14n,$$

$$\text{则 } \frac{S_n}{n} = n - 14, \text{ 而 } \frac{S_{n-1}}{n-1} = n - 1 - 14 = n - 15$$

$$(n \geq 2),$$

$$\text{故 } \frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} = n - 14 - (n - 15) = 1 (n \geq 2),$$

$$\frac{S_1}{1} = -13,$$

则 $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 是首项为 -13 , 公差为 1 的等差

数列, 故 B 正确;

对于 C, $S_n = n^2 - 14n$,

由二次函数性质得当 $n = 7$ 时, S_n 取最小值, 故 C 错误;

对于 D, 令 $S_n > 0$, 即 $n^2 - 14n > 0$, 解得 $n > 14$,

则正整数 n 的最小值为 15, 故 D 正确. 故选 ABD.

8. ACD 突破点 ▶ 由递推关系判定数列是等差数列、裂项相消法求和、分组(并项)法求和

【解析】因为点 A_n 始终在直线 $y = x + 1$

上, 所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 1$,

所以数列 $\left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差



的等差数列, 所以 $\frac{a_n}{n} = n$, 则 $a_n = n^2$, A 正确;

由于 $\ln a_{n+1} - \ln a_n = \ln (n+1)^2 - \ln n^2 = 2\ln \frac{n+1}{n}$, 不是常数, 所以数列 $\{\ln a_n\}$ 不是等差数列, B 错误;

因为 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} (n \geq 2)$,

所以 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$, 故 C 正确;

$\sum_{i=1}^{2n} (-1)^i a_i = -1^2 + 2^2 - 3^2 + 4^2 - 5^2 + 6^2 - \cdots - (2n-1)^2 + (2n)^2 = (2-1)(2+1) + (4-3) \cdot (4+3) + (6-5)(6+5) + \cdots + [2n - (2n-1)][2n + (2n-1)] = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2n = \frac{2n(1+2n)}{2} = 2n^2 + n$, 故 D 正确. 故选 ACD.

9. $\frac{2n}{3}$ **突破点** ▶ 利用定义求等差数列通项公式、利用 a_n 与 S_n 关系求通项或项、判定等差数列

【解析】记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则

$$B_{n+1} \left(S_n + \frac{a_{n+1}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} a_{n+1} \right), B_1 \left(\frac{a_1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 \right),$$

$$\text{即 } \frac{\sqrt{3}}{2} a_{n+1} = \sqrt{S_n + \frac{a_{n+1}}{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2} a_1 = \sqrt{\frac{a_1}{2}},$$

$$\text{整理得 } S_n = \frac{3}{4} a_{n+1}^2 - \frac{1}{2} a_{n+1}, a_1 = \frac{2}{3},$$

$$a_2 = \frac{4}{3}.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = \frac{3}{4} a_n^2 - \frac{1}{2} a_n,$$

$$\text{所以 } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3}{4} a_{n+1}^2 - \frac{1}{2} a_{n+1} -$$

$$\left(\frac{3}{4} a_n^2 - \frac{1}{2} a_n \right), \text{即 } \frac{3}{2} (a_{n+1} + a_n) (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} + a_n,$$

$$\text{因为 } a_n > 0, \text{所以 } a_{n+1} - a_n = \frac{2}{3}.$$

$$\text{又因为 } a_2 - a_1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}, \text{所以数列}$$

$\{a_n\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $\frac{2}{3}$ 为公差的等差数列,

$$\text{所以数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = \frac{2}{3} +$$

$$(n-1) \times \frac{2}{3} = \frac{2n}{3}.$$

10. A **考查点** ▶ 等差数列前 n 项和的性质及应用

【解析】因为 $\{a_n\}$ 是等差数列, 所以 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6, S_{12} - S_9$ 成等差数列.

又 $S_3 = S_9 = 6$, 所以 $6, S_6 - 6, 6 - S_6, S_{12} - 6$



成等差数列, 所以 $6+S_{12}-6=S_6-6+6-S_6$, 所以 $S_{12}=0$. 故选 A.

- 11. D** **考查点** ▶ 等差数列的性质、利用基本不等式求最值

【解析】 $\because a_s+a_t=2a_3, \therefore s+t=6, \therefore \frac{s}{6}+\frac{t}{6}=1$, 且 $s, t \in \mathbf{N}^*$,

$$\frac{t}{6}=1, \text{ 且 } s, t \in \mathbf{N}^*,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{4}{s}+\frac{1}{t} &= \left(\frac{4}{s}+\frac{1}{t} \right) \left(\frac{s}{6}+\frac{t}{6} \right) = \\ &= \frac{2}{3}+\frac{2t}{3s}+\frac{s}{6t}+\frac{1}{6} \geq \frac{5}{6}+2\sqrt{\frac{2t}{3s} \cdot \frac{s}{6t}} = \\ &= \frac{9}{6}=\frac{3}{2}, \end{aligned}$$

当且仅当 $\frac{2t}{3s}=\frac{s}{6t}$, 即 $t=2, s=4$ 时取等号. 故选 D.

- 12. C** **考查点** ▶ 利用等差数列的性质计算两个等差数列的前 n 项和之比问题

【解析】 由等差数列的性质可知 $b_6+b_{2\,020}=b_4+b_{2\,022}=b_1+b_{2\,025}$,

$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{a_1}{b_6+b_{2\,020}}+\frac{a_{2\,025}}{b_4+b_{2\,022}} &= \frac{a_1+a_{2\,025}}{b_1+b_{2\,025}} = \\ \frac{S_{2\,025}}{T_{2\,025}} &= \frac{6 \times 2\,025}{2\,025+2\,025}=3. \text{ 故选 C.} \end{aligned}$$

- 13. C** **考查点** ▶ 等差数列前 n 项和的最值问题

【解析】 因为公差 $d>0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 所以 $a_{2\,020}<a_{2\,021}$, 又 $a_{2\,020} \cdot a_{2\,021}<0$,

所以 $a_{2\,020}<0, a_{2\,021}>0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 前 2 020 项全为负, 从第 2 021 项开始为正, 所以前 2 020 项的和 $S_{2\,020}$ 为 S_n 的最小值, 故 $n=2\,020$. 故选 C.

- 14. A** **考查点** ▶ 等差数列前 n 项和的最值问题, 充分、必要条件的判断

【解析】 若 $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n \leq S_8$, 则 S_8 是 S_n 的最大值.

因为 $\{a_n\}$ 是公差 $d \neq 0$ 的等差数列, 所以点 (n, S_n) 在关于 n 的二次函数的图象上. 当 S_8 是最大值时, 说明从第 9 项开始数列的项变为非正数, 即 $a_9 \leq 0$, 且 $a_8 \geq 0$. 所以由 “ $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n \leq S_8$ ” 可以推出 “ $a_8 \geq 0$ ”, 充分性成立.

若 $a_8 \geq 0$, 仅知道第 8 项是非负的, 但无法确定 S_8 就是 S_n 的最大值. 例如, 当公差 $d>0$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 那么 S_n 会随着 n 的增大而增大, 此时 S_8 就不是最大值, 所以由 “ $a_8 \geq 0$ ” 不能推出 “ $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n \leq S_8$ ”, 必要性不成立.

综上, “ $\forall n \in \mathbf{N}^*, S_n \leq S_8$ ” 是 “ $a_8 \geq 0$ ” 的充分不必要条件. 故选 A.

- 15. D** **考查点** ▶ 等差数列基本量的计算、等差数列前 n 项和与积有无最值的判断

【解析】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则



$$\begin{cases} S_3 = \frac{3(a_1 + a_3)}{2} = 6, \\ S_6 = \frac{6(a_1 + a_6)}{2} = 3, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} a_1 + a_3 = 4, \\ a_1 + a_6 = 1, \end{cases} \text{作差}$$

可得 $3d = -3$,

所以 $d = -1$, 则 $a_1 = 3$, 故 $a_n = a_1 + (n-1)d = 3 - (n-1) = 4 - n$,

当 $a_n > 0$ 时, $1 \leq n < 4$, 当 $a_n = 0$ 时, $n = 4$,

当 $a_n < 0$ 时, $n > 4$,

显然, 当 $1 \leq n < 4$ 时, $T_n > 0$, 当 $n \geq 4$ 时, $T_n = 0$, 所以 T_n 有最小值,

且 $S_n = \frac{n(7-n)}{2} = -\frac{1}{2}\left(n - \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{49}{8}$, 当 $n = 3$ 或 4 时, S_n 有最大值. 故选 D.

16. B 考查点 ▶ 等差数列性质的应用

【解析】数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,

当 $a_n = 1$ 时, 显然对任意的 $s, t, p \in \mathbf{N}^*$, 均满足 $2a_t = a_s + a_p$, 但不一定满足 $2t = s + p$,

即 “ $2a_t = a_s + a_p$ ” \nRightarrow “ $2t = s + p$ ”;

由数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 设该数列的公差为 d ,

若 $2t = s + p$, 则 $a_s + a_p = a_1 + (s-1)d + a_1 + (p-1)d = 2a_1 + (s+p-2)d = 2a_1 + (2t-2)d = 2[a_1 + (t-1)d] = 2a_t$,

即 “ $2a_t = a_s + a_p$ ” \Leftarrow “ $2t = s + p$ ”.

因此, “ $2a_t = a_s + a_p$ ” 是 “ $2t = s + p$ ” 的必要不充分条件. 故选 B.

17. AC 考查点 ▶ 等差数列基本量的计算、求等差数列前 n 项和、等比中项的应用、等比数列的通项公式

【解析】由题意得 $a_2^2 = a_1 a_6$, 则 $(1+d)^2 = 1+5d$, 整理得 $d^2 - 3d = 0$, 可得 $d = 0$ 或 $d = 3$,

当 $d = 0$ 时, $a_n = 1$, $S_n = n$, 则 $\frac{S_n}{n} = 1$, 即

$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 0 的等差数列, 此时 $b_n = 1$;

当 $d = 3$ 时, $a_n = 3n - 2$, $S_n = \frac{n(3n-1)}{2}$, 则

$\frac{S_n}{n} = \frac{3n-1}{2}$, 即 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 1, 公差为 $\frac{3}{2}$ 的等差数列,

此时 $b_1 = 1, b_2 = 4, b_3 = 16$, 易知 $\{b_n\}$ 的公比为 4, 故 $b_n = 4^{n-1}$.

综上, A, C 对, B, D 错. 故选 AC.

易错警示

常数列是公差为 0 的等差数列, 即公差 d 可以为 0. 在进行代数化简时, 要对 d 是否为 0 进行分类讨论, 不可随意“约掉”公差 d .



提分

1. D 考查点 ▶ 等比中项的应用、分组(并项)法求和、等差数列基本量的计算

【解析】因为 $a_3, a_5 + 1, 2a_6$ 成等比数列,



所以 $(a_5+1)^2 = a_3 \times 2a_6$, 则 $(a_1+5)^2 = (a_1+2) \times 2(a_1+5)$,

解得 $a_1 = 1$ 或 $a_1 = -5$. 当 $a_1 = -5$ 时, $a_6 = 0$, 此时与 $a_3, a_5+1, 2a_6$ 成等比数列矛盾, 故排除,

当 $a_1 = 1$ 时, $a_n = 1+n-1 = n$, 此时令 $b_n = (-1)^{n+1}a_n = (-1)^{n+1}n$,

而其前 2 025 项和为 $1-2+3-4+\cdots-2\,024+2\,025 = (1-2) + (3-4) + \cdots + (2\,023-2\,024) + 2\,025 = 1\,012 \times (-1) + 2\,025 = 1\,013$. 故选 D.

2. D 突破点 ▶ 等差数列基本量的计算

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d \neq 0$), 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_5 = 5a_3 = 10(a_5-1)$,

所以 $a_3 = 2a_5 - 2$, 即 $a_1 + 2d = 2(a_1 + 4d) - 2$,

化简得 $a_1 + 6d = 2$,

由 $|a_4| = |a_8|$ 可得 $|a_1 + 3d| = |a_1 + 7d|$, 解得 $a_1 = -5d$ 或 $d = 0$ (舍去),

代入 $a_1 + 6d = 2$ 可得 $d = 2$, 则 $a_1 = -10$, 从而 $a_n = -10 + 2(n-1) = 2n - 12$, 故 A 错误;

因为 $|a_n| = \begin{cases} 12-2n, n \leq 6, \\ 2n-12, n \geq 7, \end{cases}$ 所以数列 $\{|a_n|\}$ 最小项是 $|a_6|$, 故 B 错误;

因为 $S_n = -10n + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 - 11n = \left(n - \frac{11}{2}\right)^2 - \frac{121}{4}$,

所以 S_n 的最小值是 $S_5 = S_6 = -30$, 故 C 错误;

由 $S_n > a_n$, 即 $n^2 - 11n > 2n - 12$, 解得 $n < 1$ (舍去) 或 $n > 12$, 故 D 正确. 故选 D.

3. A 突破点 ▶ 由递推关系判定数列是等差数列、等差数列的性质

【解析】由 $2n(n+2)S_{n+1} = (n+1)(n+2) \cdot S_n + n(n+1)S_{n+2}$, 变形得到

$$\frac{2n(n+2)S_{n+1}}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+2)S_n}{n(n+1)(n+2)} + \frac{n(n+1)S_{n+2}}{n(n+1)(n+2)}, \text{ 即 } \frac{2S_{n+1}}{n+1} = \frac{S_n}{n} + \frac{S_{n+2}}{n+2},$$

故 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 设其公差为 d , 则

$$\frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + (n-1)d = a_1 + (n-1)d,$$

故 $S_n = na_1 + n(n-1)d$ ①,

则 $S_{n+1} = (n+1)a_1 + n(n+1)d$ ②,

由 ② - ① 得 $a_{n+1} = a_1 + 2nd$, 则 $a_n = a_1 + (2n-2)d$, 则 $a_{n+1} - a_n = 2d$,

则 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则 $S_5 = \frac{5(a_1+a_5)}{2} =$

$$\frac{5 \times 2a_3}{2} = 5a_3 = 25,$$

$\frac{S_{2\,025}}{2\,025} = \frac{S_5}{5} + 2\,020d$, 即 $5 + 2\,020d = 1$, 解得

$$d = -\frac{1}{505},$$



$$\text{所以 } \frac{S_n}{n} = \frac{S_5}{5} - \frac{1}{505}(n-5) = \frac{506}{101} - \frac{1}{505}n,$$

$$\text{则 } \frac{S_{1015}}{1015} = \frac{506}{101} - \frac{1}{505} \times 1015 = 3, \text{ 又 } S_{1015} = \frac{1015(a_1 + a_{1015})}{2} = 1015a_{508},$$

$$\text{故 } a_{508} = \frac{S_{1015}}{1015} = 3. \text{ 故选 A.}$$

4. D 突破点 ▶ 数列不等式恒成立问题、判定等差数列、分组(并项)法求和

【解析】 因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} - a_n = 2$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 3$ 为首项, 2 为公差的等差数列,

$$\text{所以 } a_n = 3 + 2(n-1) = 2n+1,$$

$$\text{所以 } b_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \right) = (-1)^{n+1} \cdot \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{当 } n \text{ 为偶数时, } T_n &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) + \cdots + \\ &\quad \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) - \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } n \text{ 为奇数时, } T_n &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} \right) + \cdots - \\ &\quad \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1} \right) + \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3} \right) = \\ &\quad \frac{1}{3} + \frac{1}{2n+3} \leq \frac{8}{15}, \end{aligned}$$

因为不等式 $T_n < \frac{4}{3}\lambda(3-5\lambda) (n \in \mathbf{N}^*)$ 恒

成立, 即 $(T_n)_{\max} < \frac{4}{3}\lambda(3-5\lambda) (n \in \mathbf{N}^*)$,

$$\text{所以 } \frac{8}{15} < \frac{4}{3}\lambda(3-5\lambda) (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{所以 } \frac{2}{5} < \lambda(3-5\lambda), \text{ 即 } 25\lambda^2 - 15\lambda + 2 = (5\lambda-1)(5\lambda-2) < 0,$$

解得 $\frac{1}{5} < \lambda < \frac{2}{5}$, 所以 λ 的取值范围为

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right). \text{ 故选 D.}$$

5. ABD 突破点 ▶ 求等差数列前 n 项和、求曲线的切线方程、利用导数证明不等式

【解析】 由题知切线 $l_n: y = k_n(x+1)$, 与 $x^2 - 2nx + 2y^2 = 0$ 联立, 得 $(1+2k_n^2)x^2 + (4k_n^2-2n)x + 2k_n^2 = 0$,

则由 $\Delta = 0$, 得 $(4k_n^2-2n)^2 - 8k_n^2(1+2k_n^2) = 0$,

$$\text{解得 } k_n = \frac{n}{\sqrt{4n+2}} \text{ (负值舍去)}, \text{ 故 A}$$

正确;



可得 $x_n = \frac{n-2k_n^2}{1+2k_n^2} = \frac{n}{n+1}$, $y_n = k_n(1+x_n) = \frac{n\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}(n+1)}$,

所以 $\sum_{i=1}^{2025} \ln x_i = \sum_{i=1}^{2025} \ln \frac{i}{i+1} = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{2025}{2026} = \ln \frac{1}{2026} = -\ln 2026$, 故 B 正确;

因为 $\frac{y_n^2}{x_n^2} = \frac{2n+1}{2} = n + \frac{1}{2}$, 所以 $S_n = \frac{n\left(\frac{3}{2} + n + \frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{n^2}{2} + n$, 故 C 错误;

因为 $\frac{x_n}{\sqrt{2}y_n} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, $\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,

所以 $\frac{x_n}{\sqrt{2}y_n} + \cos\left(\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \cos \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$,

设 $f(x) = x + \cos x$, 则 $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$ 且等号不恒成立,

则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = x + \cos x > f(0) = 1$,

又 $\frac{1}{\sqrt{2n+1}} > 0$, 则 $\frac{x_n}{\sqrt{2}y_n} + \cos\left(\sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \cos \frac{1}{\sqrt{2n+1}} > 1$, 故 D 正确. 故选 ABD.

6. 突破点 ▶ 由 a_n 与 S_n 的关系证明数列是等差数列、数列不等式恒成立问题、求等差数列前 n 项和

(1) 【解】因为 $\frac{S_n}{n} = a_n + (1-n)t$, $n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $\frac{S_2}{2} = a_2 - t$. 又 $S_2 = a_1 + a_2$,

所以 $a_2 - a_1 = 2t$.

又 $a_2 = a_1 + 2$, 所以 $t = 1$.

(2) 【证明】由 (1) 可得 $\frac{S_n}{n} = a_n + 1 - n$, $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $S_n = na_n + n - n^2$,

因此 $S_{n+1} = (n+1)a_{n+1} + n + 1 - (n+1)^2$,

两式相减得 $a_{n+1} = (n+1)a_{n+1} - na_n - 2n$,

得 $a_{n+1} - a_n = 2$, $n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $\{a_n\}$ 为公差为 2 的等差数列.

(3) 【解】由 (2) 得 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 2 = n^2 + (a_1 - 1)n$,

由 $n^2 < S_n < (n+1)^2$, $n \in \mathbf{N}^*$, 得 $1 < a_1 < 3 + \frac{1}{n}$.

因为 $1 < a_1 < 3 + \frac{1}{n}$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

所以 $1 < a_1 \leq 3$. 故 a_1 的取值范围为 $(1, 3]$.

7. 突破点 ▶ 等差数列基本量的计算、裂项相消法求和、利用导数证明不等式



(1)【解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ($d \neq 0$), 由 $a_1 = 1, a_2, a_4, a_8$ 成等比数列, 得 $a_4^2 = a_2 \cdot a_8$,

所以 $(1+3d)^2 = (1+d)(1+7d)$, 解得 $d=1$ 或 $d=0$ (舍去), 所以 $a_n = n$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(2)【证明】设 $f(x) = \ln x - x + 1$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1, \text{ 当 } x > 1 \text{ 时, } f'(x) < 0, f(x)$$

单调递减, 所以当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \leq f(1) = 0$, 所以 $\ln x - x + 1 \leq 0$,

由(1)可知 $a_n \geq 1$,

则有 $\ln a_n - a_n + 1 \leq 0$, 所以不等式 $\ln a_n \leq a_n - 1$ 恒成立.

(3)【证明】因为 $\left(1 + \frac{1}{b_1}\right) \left(1 + \frac{1}{b_2}\right) \cdots$

$\left(1 + \frac{1}{b_n}\right) > 0$, 所以要证

$$\left(1 + \frac{1}{b_1}\right) \left(1 + \frac{1}{b_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{b_n}\right) < e^2,$$

只需证 $\ln \left[\left(1 + \frac{1}{b_1}\right) \left(1 + \frac{1}{b_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{b_n}\right) \right] < 2$,

根据(2)可知 $\ln a_n \leq a_n - 1$, 那么 $\ln(1 + a_n) \leq a_n$,

$$\text{则 } \ln \left[\left(1 + \frac{1}{b_1}\right) \left(1 + \frac{1}{b_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{b_n}\right) \right]$$

$$= \ln \left(1 + \frac{1}{b_1}\right) + \ln \left(1 + \frac{1}{b_2}\right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)$$

$$\leq \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n}$$

$$= \frac{2}{a_1 \cdot a_2} + \frac{2}{a_2 \cdot a_3} + \cdots + \frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$$

$$= 2 \left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$$

$$= 2 \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right] = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 2,$$

$$\text{所以 } \left(1 + \frac{1}{b_1}\right) \left(1 + \frac{1}{b_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{b_n}\right) < e^2.$$

8. 突破点 ▶ 数列新定义、利用新定义求数列通项公式

(1)【解】 $\{a_n\}$ 不是“X 数列”,

依题意, $S_1 = 0, S_2 = 1, S_3 = 0, S_4 = 2$, 则 $S_1 \leq a_1 < S_2, S_3 \leq a_1 < S_4$, 不符合题意,

所以 $\{a_n\}$ 不是“X 数列”.

(2)【解】由 $S_n = 2^{n+1}$, 得当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 4$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^{n+1} - 2^n = 2^n$,

而 $a_1 = 4$ 不满足 $a_n = 2^n$, 因此 $a_n = \begin{cases} 4, & n=1, \\ 2^n, & n \geq 2, \end{cases}$

令 $S_m \leq a_n < S_{m+1}$, 即 $2^{m+1} \leq a_n < 2^{m+2}$, 则当 $n=1$ 时, 有 $2^{m+1} \leq 4 < 2^{m+2}$, 解得 $m=1$;

当 $n \geq 2$ 时, 有 $2^{m+1} \leq 2^n < 2^{m+2}$, 则 $m+1 \leq n < m+2$, 而 $m, n \in \mathbf{N}^*$, 于是 $m+1=n$,

因此对每一个 $n \in \mathbf{N}^*$ ($n \geq 2$), 有且仅有一个 $m \in \mathbf{N}^*$ 且 $m = n - 1$, 使得 $S_m \leq$

$$a_n < S_{m+1},$$

即对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 有且仅有一个 $m \in \mathbf{N}^*$, 使得 $S_m \leq a_n < S_{m+1}$, 所以 $\{a_n\}$ 为“ X 数列”.

记 $\{a_n\}$ 的“余项数列”为 $\{b_n\}$, 则 $b_n =$

$$S_{m+1} - a_n = \begin{cases} 2^{m+2} - 4, & n=1, \\ 2^{m+2} - 2^n, & n \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 4, & n=1, \\ 2^n, & n \geq 2, \end{cases}$$

$$n \in \mathbf{N}^*,$$

所以 $\{a_n\}$ 的“余项数列”的通项公式为

$$b_n = \begin{cases} 4, & n=1, \\ 2^n, & n \geq 2, \end{cases} \quad n \in \mathbf{N}^*.$$

(3) 【证明】记 $\{a_n\}$ 的“余项数列”为 $\{b_n\}$, 由 $\{a_n\}$ 是正项数列, 得 S_n 递增, 则 $S_1 \leq a_1 < S_2, b_1 = S_2 - a_1 = a_2,$

由 $a_2 < S_2$, 且 $\{a_n\}$ 为“ X 数列”, 得 $a_1 = S_1 \leq a_2 < S_2$, 由 $b_n = S_{m+1} - a_n (n \in \mathbf{N}^*)$, 得 $b_2 = S_2 - a_2 = a_1,$

因为 $\{a_n\}$ 的“余项数列” $\{b_n\}$ 为等差数列, 所以 $\{b_n\}$ 的公差 $d = b_2 - b_1 = a_1 - a_2 \leq 0,$

由 $S_m \leq a_n < S_{m+1}$, 得 $b_n = S_{m+1} - a_n > 0,$

若 $d < 0$, 则当 $n > 1 - \frac{a_2}{d}$ 时, $b_n = a_1 + (n -$

$1)d < a_2 + \left(1 - \frac{a_2}{d} - 1\right)d = 0$, 与 $b_n > 0$ 矛盾,

则 $d = 0, b_n = a_2 = a_1, b_n = S_{m+1} - a_n = a_1$, 即 $S_{m+1} - a_n - a_1 = 0.$

当 $n \geq 3$ 时, 若 $m+1 \geq n$, 则 $a_2 \leq S_{m+1} - a_n - a_1 = 0$, 与 $\{a_n\}$ 为正项数列矛盾,

则 $m+1 \leq n-1, S_n - S_{n-1} + a_1 = a_n + a_1 = S_{m+1} \leq S_{n-1},$

因此当 $n \geq 3$ 时, $S_n - a_1 \leq 2(S_{n-1} - a_1),$

$$\frac{S_n - a_1}{2^n} \leq \frac{S_{n-1} - a_1}{2^{n-1}} \leq \cdots \leq \frac{S_2 - a_1}{4} = \frac{a_2}{4} = \frac{a_1}{4},$$

即 $S_n \leq (1 + 2^{n-2})a_1$. 又 $S_1 \leq (1 + 2^{-1})a_1,$

$$S_2 = 2a_1 \leq (1 + 2^0)a_1,$$

则 $S_n \leq (1 + 2^{n-2})a_1, n \in \mathbf{N}^*$, 而 $a_1 = 1$, 所以 $S_n \leq 1 + 2^{n-2}.$

第3节 等比数列及其前 n 项和

刷基础

1. D 考查点 ▶ 等比数列基本量的计算

【解析】由 $a_2 + 4a_4 = 4a_3$ 可得 $a_2 + 4a_2q^2 = 4a_2q$, 显然 $a_2 \neq 0$, 所以 $4q^2 - 4q + 1 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{2}$. 故选 D.

2. D 考查点 ▶ 等比数列基本量的计算、等差中项的应用、等比数列的性质及应用

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$,

由已知及 $a_2a_5 = a_3a_4$, 得 $a_3a_4 = 2a_4, a_3 + 2a_6 = 2 \times \frac{5}{4}$, 所以 $a_3 = 2, a_6 = \frac{1}{4}$,

所以 $q = \sqrt[3]{\frac{a_6}{a_3}} = \frac{1}{2}$, 所以 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 8$, 故

$$S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{8\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]}{1 - \frac{1}{2}} = 15. \text{ 故}$$



选 D.

3. D **考查点** ▶ 等比数列基本量的计算

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q \neq 0$),

因为 $a_1 + a_3 = 2, a_4 + a_6 = 16$,

所以 $a_1 + a_1 q^2 = 2, a_1 q^3 + a_1 q^5 = (a_1 + a_1 q^2) q^3 = 16$,

解得 $q = 2, a_1 = \frac{2}{5}$,

所以 $a_{10} + a_{12} = a_1 q^9 + a_1 q^{11} = \frac{2}{5} \times (2^9 + 2^{11}) = 1\,024$. 故选 D.

4. C **考查点** ▶ 等比数列前 n 项和公式

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 依题意有 $q > 0$, 又 $a_1 = 1$,

当 $q = 1$ 时, $S_5 = 5 \neq 5S_3 - 4 = 11$, 故舍去,

当 $q \neq 1$ 时, 因为 $S_5 = 5S_3 - 4$, 所以

$$\frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = 5 \times \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} - 4,$$

化简得 $q^4 - 5q^2 + 4 = 0$, 即 $(q^2 - 4)(q^2 - 1) = 0$, 所以 $q = 2$,

故 $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{1-16}{1-2} = 15$, 故选 C.

5. B **突破点** ▶ 利用等比数列的通项公式求数列中的项、等比数列基本量的计算

【解析】因为 $\frac{S_2}{2} = \frac{S_6}{6} = 2$, 所以 $S_2 = 4$,

$S_6 = 12$,

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q \neq 0$),

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时, } \begin{cases} S_2 = \frac{a_1(1-q^2)}{1-q} = 4, \\ S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 12, \end{cases}$$

整理得 $q^4 + q^2 - 2 = 0$,

即 $(q^2 + 2)(q^2 - 1) = 0$, 解得 $q = 1$ (舍) 或 $q = -1$,

当 $q = -1$ 时, $S_2 = a_1 + a_2 = a_1 + a_1 q = 0 \neq 4$, 所以 $q \neq -1$;

当 $q = 1$ 时, $S_2 = 2a_1 = 4$, 解得 $a_1 = 2$, 所以 $a_{2\,025} = a_1 q^{2\,024} = 2$.

综上, $a_{2\,025} = 2$. 故选 B.

6. $\frac{80}{31}$ **9** **考查点** ▶ 等比数列基本量的计算

【解析】由题意可得该女子每天织布的尺数构成一个等比数列, 且数列的公比为 2, 前 5 项的和为 5,

设该数列首项为 a_1 , 前 n 项和为 S_n ,

则由题意得 $S_5 = \frac{a_1(1-2^5)}{1-2} = 31a_1 = 5$,

$$\therefore a_1 = \frac{5}{31},$$

$\therefore a_5 = \frac{5}{31} \times 2^4 = \frac{80}{31}$, 即该女子第 5 天所织布的尺数为 $\frac{80}{31}$.

令 $S_n = \frac{\frac{5}{31}(1-2^n)}{1-2} \geq 50$, 解得 $2^n \geq 311$,

$\therefore n \geq 9$.

\therefore 若要织布 50 尺, 该女子所需的天数至少为 9.

7. D 考查点 ▶ 求等比数列前 n 项和、利用 a_n 与 S_n 关系求通项或项、等比数列的判定

【解析】 令 $n=1$, 得 $3a_1 = 2S_1 + 1 = 2a_1 + 1$, 得 $a_1 = 1$,

由 $3a_n = 2S_n + 1$,

得当 $n \geq 2$ 时, $3a_{n-1} = 2S_{n-1} + 1$, 两式相减得, $3a_n - 3a_{n-1} = 2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n$, 即 $a_n = 3a_{n-1}$, 因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_n \neq 0$, 所以

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 3,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1 = 1$ 为首项, 3 为公比的等比数列,

所以 $S_5 = \frac{1 \times (1 - 3^5)}{1 - 3} = 121$. 故选 D.

8. BD 考查点 ▶ 由递推关系证明等比数列

【解析】 对于 A, 当 $a=b=c=0$ 时, 有 $b^2 = ac$, 此时 a, b, c 不成等比数列, A 错误;

对于 B, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2} = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n,$$

所以 $\frac{S_n}{n} = \frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2}$, 则 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} =$

$$\left[\frac{d}{2}(n+1) + a_1 - \frac{d}{2} \right] - \left(\frac{d}{2}n + a_1 - \frac{d}{2} \right) = \frac{d}{2},$$

因此若 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则

$\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 为等差数列, B 正确;

对于 C, 若 $\{a_n\}$ 为等比数列, 取 $a_n = (-1)^n$, 则当 n 为正奇数时, $\lg a_n$ 无意义, C 错误;

对于 D, 因为 $3a_{n+1} = a_n + 2a_{n+2}$, 所以 $2(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) = 0$,

又 $a_1 = 1, a_2 = 2$, 所以 $a_2 - a_1 = 1 \neq 0$, 所以

$$a_{n+1} - a_n \neq 0, \text{ 所以 } \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{2},$$

因此数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列, D 正确. 故选 BD.

9. 考查点 ▶ 分组(并项)法求和、利用 a_n 与 S_n 关系求通项或项、由递推关系证明等比数列

(1) **【证明】** 由 $S_n + a_n = n + 3$, ①

得当 $n=1$ 时, $a_1 + a_1 = 1 + 3$, 即 $a_1 = 2$;

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} + a_{n-1} = n + 2$, ②

则 ① - ② 得, $2a_n - a_{n-1} = 1$,

则 $2(a_n - 1) = a_{n-1} - 1$, 因为 $a_1 = 2$, 所以

$$a_1 - 1 = 1, \text{ 所以 } a_n - 1 \neq 0, \text{ 所以 } \frac{a_n - 1}{a_{n-1} - 1} = \frac{1}{2},$$

所以数列 $\{a_n - 1\}$ 是等比数列, 首项为 1,

公比为 $\frac{1}{2}$.



(2)【解】由(1)得, $a_n - 1 = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$$\text{即 } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1,$$

$$\text{则 } \frac{a_n}{a_n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = 1 + 2^{n-1},$$

$$\text{则 } T_n = 1 + 2^0 + 1 + 2^1 + \cdots + 1 + 2^{n-1} = n + \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n + n - 1,$$

因为 $y = 2^x$, $y = x - 1$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

所以数列 $\{2^n + n - 1\}$ 为递增数列.

$$\text{又 } T_{10} = 2^{10} + 10 - 1 = 1\,033 < 2\,025, T_{11} = 2^{11} + 11 - 1 = 2\,058 > 2\,025,$$

所以满足 $T_n > 2\,025$ 的最小正整数 n 的值为 11.

10. 突破点 ▶ 等比数列基本量的计算、错位相减法求和、裂项相消法求和、分组(并项)法求和

【解】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

$$\text{由题意可得 } \begin{cases} 3a_2 = a_1 + 2a_3, \\ 4S_2 = \frac{1}{a_1} + 8a_3, \end{cases}$$

$$\text{则 } \begin{cases} 3a_1q = a_1 + 2a_1q^2, \\ 4(a_1 + a_1q) = \frac{1}{a_1} + 8a_1q^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}, \\ q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} a_1 = -\frac{1}{2}, \\ q = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

因为数列 $\{a_n\}$ 是递减的等比数列, 所以

$$a_1 = q = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } a_n = a_1 q^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

因为 $b_{n+1} = 2b_n - 2n + 1$, 所以 $b_{n+1} - 2(n+1) - 1 = 2(b_n - 2n - 1)$.

因为 $b_1 = 3$, 所以 $b_1 - 2 \times 1 - 1 = 0$, 所以 $b_n - 2n - 1 = 0$, 故 $b_n = 2n + 1$.

$$(2) \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, } c_n = \frac{2n+1}{2^n},$$

$$\text{令 } A_n = \sum_{i=1}^n c_{2i-1},$$

$$\text{则 } A_n = \frac{3}{2^1} + \frac{7}{2^3} + \frac{11}{2^5} + \cdots + \frac{4n-1}{2^{2n-1}},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{4}A_n = \frac{3}{2^3} + \frac{7}{2^5} + \cdots + \frac{4n-5}{2^{2n-1}} + \frac{4n-1}{2^{2n+1}},$$

$$\text{两式作差可得 } \frac{3}{4}A_n = \frac{3}{2} + \frac{4}{2^3} + \frac{4}{2^5} + \cdots +$$

$$\frac{4}{2^{2n-1}} - \frac{4n-1}{2^{2n+1}} = \frac{3}{2} + \frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4^{n-1}}\right)}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{4n-1}{2^{2n+1}} =$$

$$\frac{13}{6} - \frac{12n+13}{6 \cdot 4^n},$$

$$\text{化简得 } A_n = \frac{26}{9} - \frac{12n+13}{9 \cdot 2^{2n-1}};$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } c_n = \frac{6n+19}{2^n(2n+1)(2n+5)} =$$



$$\frac{4(2n+5)-(2n+1)}{2^n(2n+1)(2n+5)} = \frac{1}{(2n+1) \cdot 2^{n-2}} - \frac{1}{(2n+5) \cdot 2^n},$$

$$\text{令 } B_n = \sum_{i=1}^n c_{2i}, \text{ 则 } B_n = \frac{1}{5 \times 2^0} - \frac{1}{9 \times 2^2} + \frac{1}{9 \times 2^2} - \frac{1}{13 \times 2^4} + \cdots + \frac{1}{(4n+1) \cdot 2^{2n-2}} - \frac{1}{(4n+5) \cdot 2^{2n}} = \frac{1}{5} - \frac{1}{(4n+5) \cdot 2^{2n}},$$

$$\text{故 } T_{2n} = A_n + B_n = \frac{139}{45} - \frac{12n+13}{9 \cdot 2^{2n-1}} - \frac{1}{(4n+5) \cdot 2^{2n}}.$$

11. B 考查点 ▶ 等比数列的通项公式

【解析】因为 $a_1 = 512$, 公比 $q = \frac{1}{4}$, 所以

$$a_n = 512 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{512}{4^{n-1}},$$

所以当 $1 \leq n \leq 5$ 时, $a_n > 1$; 当 $n \geq 6$ 时, $0 < a_n < 1$.

又 T_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积, 则当 $n = 5$ 时, T_n 取得最大值, 故选 B.

12. D 考查点 ▶ 等比数列基本量的计算

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q , 数列共有 $2n$ 项, 所有奇数项之和为 T_n , 前 n 项和为 S_n .

因为数列 $\{a_n\}$ 所有项之和是奇数项之和的 3 倍, 所以 $q \neq 1$,

$$\text{所以 } T_n = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = \frac{a_1[1 - (q^2)^n]}{1 - q^2},$$

$$S_{2n} = \frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q},$$

$$\text{所以 } \frac{S_{2n}}{T_n} = \frac{\frac{a_1(1 - q^{2n})}{1 - q}}{\frac{a_1[1 - (q^2)^n]}{1 - q^2}} = 3, \text{ 解得 } q = 2.$$

$$\text{又 } a_1 \cdot a_2 = a_1^2 \cdot q = 8,$$

所以 $a_1 = \pm 2$. 故选 D.

13. AB 考查点 ▶ 等比数列的性质及应用

【解析】对于 A, 由 $\frac{a_{2 \cdot 023} - 1}{a_{2 \cdot 024} - 1} < 0$ 可得,

$$(a_{2 \cdot 023} - 1)(a_{2 \cdot 024} - 1) < 0 (*),$$

由 $a_{2 \cdot 023} a_{2 \cdot 024} = a_{2 \cdot 023}^2 q > 1$ 可得 $q > 0$.

当 $q \geq 1$ 时, 因为 $a_1 > 1$, 所以 $a_{2 \cdot 023} > 1$, $a_{2 \cdot 024} > 1$, 所以 (*) 不成立.

所以 $0 < q < 1$, 所以 $a_{2 \cdot 023} > 1$, $0 < a_{2 \cdot 024} < 1$, (*) 成立, 故 $S_{2 \cdot 023} < S_{2 \cdot 024}$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $a_{2 \cdot 023} a_{2 \cdot 025} - 1 = a_{2 \cdot 024}^2 - 1 < 0$, 故 B 正确;

对于 C, D, 由以上分析可知 $a_{2 \cdot 023} > 1$, $0 < a_{2 \cdot 024} < 1$, 且 $0 < q < 1$,

则 $T_{2 \cdot 023}$ 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大值, 故 C 错误, D 错误. 故选 AB.

14. ACD 突破点 ▶ 求数列的最大(小)项、等比数列的单调性

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

对于 A, 由题意得 $2(S_6 + a_6) = S_4 + a_4 +$



$$S_5 + a_5,$$

则 $a_4 = 2S_6 + 2a_6 - S_4 - S_5 - a_5 = 2a_6 + 2(S_6 - S_5) = 4a_6$, 故 A 正确.

对于 B, 由 A 项, 可得 $q^2 = \frac{a_6}{a_4} = \frac{1}{4}$, $\therefore q = \pm \frac{1}{2}$,

当 $q = \frac{1}{2}$ 时, $a_n = a_2 q^{n-2} = \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{-3}{2^{n-1}}$,

此时 $a_{n+1} - a_n = \frac{-3}{2^n} - \frac{-3}{2^{n-1}} = \frac{3}{2^n} > 0$, 可知数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 故舍去.

故 $q = -\frac{1}{2}$, $\therefore a_n = \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{3}{(-2)^{n-1}}$, 故 B 错误.

对于 C, $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{3\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]$,

当 n 为奇数时, $S_n = 2\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$, 而指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,

$\therefore S_n = 2\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \in (2, 3]$;

当 n 为偶数时, $S_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$, 而指数函数 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,

$\therefore S_n = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$,

又 \therefore 函数 $y = x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore \frac{5}{6} \leq S_n - \frac{1}{S_n} \leq \frac{8}{3}$,

当 $n = 1$ 时, $S_n - \frac{1}{S_n} = \frac{8}{3}$ 为数列 $\left\{S_n - \frac{1}{S_n}\right\}$ 的最大项, 故 C 正确.

当 $n = 2$ 时, $S_n - \frac{1}{S_n} = \frac{5}{6}$ 为数列 $\left\{S_n - \frac{1}{S_n}\right\}$ 的最小项, 故 D 正确. 故选 ACD.

15. AD 考查点 ▶ 等比数列的性质及应用、等比数列基本量的计算、基本不等式求最值

【解析】由 $a_5 = a_1 q^4 = 1 > 0$, 得 $a_1 > 0$,

对于 A, 若 $q > 0$, 则 $a_n > 0$, 所以 $\{S_n\}$ 为递增数列, 故 A 正确.

对于 B, 若 $q = -1$, 则 $S_2 = 0$, 此时 $S_2, S_4 - S_2, S_6 - S_4$ 不是等比数列, 故 B 错误.

对于 C, $a_4 + a_6 = \frac{a_5}{q} + a_5 q = q + \frac{1}{q}$, 若 $q > 0$



则 $a_4 + a_6 \geq 2$, 当且仅当 $q = 1$ 时取等号;

若 $q < 0$, 则 $a_4 + a_6 = q + \frac{1}{q} = - \left[(-q) + \left(-\frac{1}{q}\right) \right] \leq -2$, 当且仅当 $q = -1$ 时取等号, 故 C 错误.

对于 D, 若 $q > 1$, 则当 $n \leq 4$ 时, $a_n < 1$, 当 $n > 5$ 时, $a_n > 1$,

因为 $T_8 = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_8 = (a_4 a_5)^4 < 1$,

$T_9 = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_9 = a_5^9 = 1$,

$T_{10} = a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_{10} = (a_6 a_5)^5 > 1$,

故 $T_n > 1$ 的 n 的最小值为 10, 故 D 正确. 故选 AD.

易错警示

在等比数列中, $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 不一定是等比数列. 与等差数列不同, 等比数列的公比不能为 0, 所以判定等比数列时一定要注意检验.

刷

提分

1. B 考查点 ▶ 等比数列的前 n 项和公式

【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 公比为 2, 且 $a_1 + a_2 = 3$, 所以 $a_1 + 2a_1 = 3$, 解得 $a_1 = 1$, 故 $a_n = 2^{n-1}$, 因为 $a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+9} = a_k(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9) = 2^{k-1} \cdot \frac{1-2^{10}}{1-2} = 2^{k+9} - 2^{k-1} = 2^{14} - 2^4$, 解得 $k = 5$, 故选 B.

2. C 考查点 ▶ 等比数列基本量的计算

【解析】在公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 2, a_2 a_6 = 8$,

所以 $a_3 a_5 = 8$, 所以 $a_5 = 4$, 所以 $\frac{a_5}{a_3} = q^2 =$

$2 = \frac{a_3}{a_1}$, 所以 $q = \pm\sqrt{2}, a_1 = 1$.

当 $q = \sqrt{2}$ 时, $S_5 - 3q = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} - 3q = \frac{1-(\sqrt{2})^5}{1-\sqrt{2}} - 3\sqrt{2} = [-1+(\sqrt{2})^5](\sqrt{2}+1) - 3\sqrt{2} = 7$;

当 $q = -\sqrt{2}$ 时, $S_5 - 3q = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} - 3q = \frac{1-(-\sqrt{2})^5}{1-(-\sqrt{2})} + 3\sqrt{2} = [1+(\sqrt{2})^5](\sqrt{2}-1) + 3\sqrt{2} = 7$.

所以 $S_5 - 3q = 7$. 故选 C.

3. C 突破点 ▶ 判断数列的增减性、求等比数列的通项公式与前 n 项和、二项展开式的应用

【解析】依题意, 各次作得的三角形都相似, 相邻两次作得的三角形的相似比为

$\frac{1}{2}$, 则 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n, a_1 = \frac{1}{4}$,

因此数列 $\{a_n\}$ 是首项、公比都为 $\frac{1}{4}$ 的等

比数列, 则 $a_n = \frac{1}{4^n}, S_n = \frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right)}{1-\frac{1}{4}} =$



$$\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right).$$

对于 A, B, $2^n a_n = \frac{1}{2^n}$, 则数列 $\{2^n a_n\}$ 是递减的等比数列, A, B 错误;

$$\text{对于 C, D, } \frac{S_n}{n} = \frac{1}{3n} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right), \quad \frac{\frac{S_{n+1}}{n+1}}{\frac{S_n}{n}} = \frac{\frac{1}{3(n+1)} \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}} \right)}{\frac{1}{3n} \left(1 - \frac{1}{4^n} \right)} = \frac{n(4^{n+1}-1)}{(n+1)(4^{n+1}-4)},$$

因为 $n(4^{n+1}-1) - (n+1)(4^{n+1}-4) = 3n + 4 - 4^{n+1} = 3n + 4 - (1+3)^{n+1} = 3n + 4 - (1 + 3C_{n+1}^1 + 9C_{n+1}^2 + \cdots + 3^{n+1}) < 3n + 4 - (1 + 3C_{n+1}^1) = 0$,

即 $0 < n(4^{n+1}-1) < (n+1)(4^{n+1}-4)$, 则

$$\frac{n(4^{n+1}-1)}{(n+1)(4^{n+1}-4)} < 1, \text{ 因此 } \frac{S_{n+1}}{n+1} < \frac{S_n}{n},$$

则数列 $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 为递减数列, C 正确, D 错误. 故选 C.

4. B 突破点 ▶ 等比数列基本量的计算、裂项相消法求和

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则

$$q > 0, \text{ 则 } a_3^2 = 9a_2a_6 = 9 \cdot \frac{a_3}{q} \cdot a_3q^3 = 9a_3^2q^2,$$

$$\text{所以 } 9q^2 = 1, \text{ 所以 } q = \frac{1}{3}. \text{ 因为 } 2a_1 + 3a_2 =$$

$$3a_1 = 1, \text{ 所以 } a_1 = \frac{1}{3},$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} = \frac{1}{3^n},$$

$$\text{所以 } \log_3 a_n = \log_3 \frac{1}{3^n} = -n,$$

$$\text{所以 } \log_3 a_{n+1} - \log_3 a_n = -(n+1) + n = -1, \quad \log_3 a_1 = -1,$$

即数列 $\{\log_3 a_n\}$ 是首项为 -1 , 公差为 -1 的等差数列,

$$\text{所以 } b_n = \log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \cdots + \log_3 a_n = -1 - 2 - 3 - \cdots - n = -\frac{n(n+1)}{2},$$

$$\text{所以 } \left\{ \frac{1}{b_n} \right\} = -\frac{2}{n(n+1)} = -\frac{2}{n} + \frac{2}{n+1},$$

$$\text{因此 } S_n = -2 + \frac{2}{2} - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \cdots - \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n+1} - 2 = -\frac{2n}{n+1}. \text{ 故选 B.}$$

5. AC 突破点 ▶ 由递推关系求通项公式、分组法求和

【解析】对于 A, 由题意得 $b_{n+1} = b_n^2 + 2b_n$, 所以 $b_{n+1} + 1 = b_n^2 + 2b_n + 1 = (b_n + 1)^2$, 所以 $\{b_n + 1\}$ 为平方递推数列, 故 A 正确;

对于 B, 由 $b_{n+1} + 1 = (b_n + 1)^2$ 得 $\lg(b_{n+1} + 1) = 2\lg(b_n + 1)$, 其中 $\lg(b_1 + 1) = 2$,

所以 $\{\lg(b_n + 1)\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $\lg(b_n + 1) = 2^n$, 所以



$b_n + 1 = 10^{2^n}$, 即 $b_n = 10^{2^n} - 1$, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $T_n = (b_1 + 1)(b_2 + 1) \cdots (b_n + 1)$, 所以 $\lg T_n = \lg(b_1 + 1) + \lg(b_2 + 1) + \cdots + \lg(b_n + 1) = 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$, 故 C 正确;

对于 D, 因为 $\frac{\lg T_n}{\lg(b_n + 1)} = \frac{2^{n+1} - 2}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$,

所以 $S_n = \left(2 - \frac{1}{2^0}\right) + \left(2 - \frac{1}{2^1}\right) + \cdots + \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2n - 2 + \frac{1}{2^{n-1}}$, 由 $S_n > 4\,048$ 得 $n \geq 2\,025$, 故 D 错误, 故选 AC.

6. ACD 突破点 ▶ 数列与函数的综合应用

【解析】对于 A, 由题知 $x_{n+1} = f(x_n) =$

$$\frac{3x_n + 2}{2x_n + 3}, x_1 = \frac{3}{2}, \text{ 得 } x_2 = \frac{3x_1 + 2}{2x_1 + 3} = \frac{3 \times \frac{3}{2} + 2}{2 \times \frac{3}{2} + 3} =$$

$$\frac{13}{12}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, } f(x_n) + f\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{3x_n + 2}{2x_n + 3} + \frac{3 + 2x_n}{2 + 3x_n} = \frac{(3x_n + 2)^2 + (2x_n + 3)^2}{(2x_n + 3)(2 + 3x_n)} = \frac{13x_n^2 + 24x_n + 13}{6x_n^2 + 13x_n + 6}, \text{ 显}$$

然 $f(x_n) + f\left(\frac{1}{x_n}\right)$ 不是定值, 故 B 错误;

$$\text{对于 C, 由 } \frac{x_{n+1} + 1}{x_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3x_n + 2}{2x_n + 3} + 1}{\frac{3x_n + 2}{2x_n + 3} - 1} =$$

$$\frac{3x_n + 2 + 2x_n + 3}{3x_n + 2 - 2x_n - 3} = 5 \frac{x_n + 1}{x_n - 1}, \text{ 又 } \frac{x_1 + 1}{x_1 - 1} = 5, \text{ 则}$$

$$\frac{x_n + 1}{x_n - 1} \neq 0, \text{ 则 } \frac{\frac{x_{n+1} + 1}{x_{n+1} - 1}}{\frac{x_n + 1}{x_n - 1}} = 5,$$

则数列 $\left\{\frac{x_n + 1}{x_n - 1}\right\}$ 是以 5 为首项, 5 为公比的等比数列, 故 C 正确;

$$\text{对于 D, 由选项 C 知 } \frac{x_n + 1}{x_n - 1} = 5^n, \text{ 则 } x_n = \frac{2}{5^n - 1} + 1,$$

$$\text{由 } 1 + \frac{1}{5^{n-1}} - x_n = 1 + \frac{1}{5^{n-1}} - \left(\frac{2}{5^n - 1} + 1\right) = \frac{3 \cdot 5^{n-1} - 1}{5^{n-1}(5^n - 1)} > 0, \text{ 得 } x_n < 1 + \frac{1}{5^{n-1}}, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 ACD.

7. B 突破点 ▶ 等差数列基本量的计算、等比数列基本量的计算

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则

$$S_{2m} - S_m = a_{m+1}b_{m+1} + a_{m+2}b_{m+2} + a_{m+3}b_{m+3} + \cdots + a_{2m}b_{2m} = q^m (a_{m+1}b_1 + a_{m+2}b_2 + a_{m+3}b_3 + \cdots + a_{2m}b_m),$$

$$\frac{S_{2m} - S_m}{q^m} - S_m = (a_{m+1} - a_1)b_1 + (a_{m+2} - a_2)b_2 +$$



$$(a_{m+3}-a_3)b_3+\cdots+(a_{2m}-a_m)b_m=md\cdot(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m),$$

$$\text{即 } \frac{7-11}{q^m}-11=\frac{-4}{q^m}-11=md\cdot(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m) \text{ ①},$$

$$\text{又 } S_{3m}-S_{2m}=a_{2m+1}b_{2m+1}+a_{2m+2}b_{2m+2}+a_{2m+3}b_{2m+3}+\cdots+a_{3m}b_{3m}=q^{2m}(a_{2m+1}b_1+a_{2m+2}b_2+a_{2m+3}b_3+\cdots+a_{3m}b_m),$$

$$\frac{S_{3m}-S_{2m}}{q^{2m}}-S_m=(a_{2m+1}-a_1)b_1+(a_{2m+2}-a_2)b_2+(a_{2m+3}-a_3)b_3+\cdots+(a_{3m}-a_m)b_m=2md(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m),$$

$$\text{即 } \frac{-208}{q^{2m}}-11=2md(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m) \text{ ②},$$

$$\text{由 ① ②, 可得 } \frac{-208}{q^{2m}}-11=2\left(\frac{-4}{q^m}-11\right) \Rightarrow$$

$$11q^{2m}+8q^m-208=0 \Rightarrow q^m=4 \text{ 或 } q^m=-\frac{52}{11}$$

(m 为正偶数, 故舍去).

$$\text{又 } S_{4m}-S_{3m}=a_{3m+1}b_{3m+1}+a_{3m+2}b_{3m+2}+a_{3m+3}b_{3m+3}+\cdots+a_{4m}b_{4m}=q^{3m}(a_{3m+1}b_1+a_{3m+2}b_2+a_{3m+3}b_3+\cdots+a_{4m}b_m),$$

$$\text{所以 } \frac{S_{4m}-S_{3m}}{q^{3m}}-S_m=(a_{3m+1}-a_1)b_1+(a_{3m+2}-a_2)b_2+(a_{3m+3}-a_3)b_3+\cdots+(a_{4m}-a_m)b_m=3md(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m) \text{ ③},$$

$$\text{由 ① ③, 可得 } \frac{S_{4m}-S_{3m}}{q^{3m}}-S_m=3\left(\frac{-4}{q^m}-11\right),$$

$$\text{即 } \frac{S_{4m}+201}{64}-11=3\times\left(\frac{-4}{4}-11\right), \text{ 解得 } S_{4m}=-1\,801. \text{ 故选 B.}$$

8. ACD 突破点 ▶ 导数的几何意义、由定义判定等比数列、求等比数列前 n 项和公式

【解析】因为 $f(x)=x^2-4$, 所以 $f'(x)=2x$.

所以曲线 $f(x)$ 在点 (x_n, x_n^2-4) 处的切线方程为 $y-(x_n^2-4)=2x_n(x-x_n)$.

对 A 选项: 在切线方程中, 令 $y=0$, 得 $-(x_n^2-4)=2x_n(x_{n+1}-x_n)$,

$$\text{所以 } x_{n+1}-x_n=\frac{4-x_n^2}{2x_n} \Rightarrow x_{n+1}=\frac{4-x_n^2}{2x_n}+x_n=\frac{4+x_n^2}{2x_n}=\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n}, \text{ 故 A 正确;}$$

对 B 选项: 由 A 选项知 $x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n}$, 易

知 $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{1}{2}\left(x+\frac{4}{x}\right)$ 在 $[2, +\infty)$ 上

单调递增, 则 $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x} \geq 2$, 又 $x_1=3$, 则

$$x_{n+1}>2, \text{ 因为 } \frac{x_1+2}{x_1-2}=5,$$

$$\frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=\frac{\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n}+2}{\frac{x_n}{2}+\frac{2}{x_n}-2}=\frac{\frac{x_n^2+4x_n+4}{2}}{\frac{x_n^2-4x_n+4}{2}}=\frac{(x_n+2)^2}{(x_n-2)^2},$$



两边取自然对数, 得 $\ln \frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2} =$

$$\ln \frac{(x_n+2)^2}{(x_n-2)^2} = 2 \ln \frac{x_n+2}{x_n-2}.$$

所以数列 $\left\{ \ln \frac{x_n+2}{x_n-2} \right\}$ 是以 $\ln 5$ 为首项, 2 为公比的等比数列, 故 B 错误;

对 C 选项: 由 B 可知, $\ln \frac{x_n+2}{x_n-2} = \ln 5 \times$

$$2^{n-1} = \ln 5^{2^{n-1}} \Rightarrow \frac{x_n+2}{x_n-2} = 5^{2^{n-1}} \Rightarrow x_n =$$

$$\frac{2(5^{2^{n-1}}+1)}{5^{2^{n-1}}-1}, \text{ 故 C 正确;}$$

对 D 选项: 因为 $x_1-2=1$,

$$\begin{aligned} \text{又 } x_{n+1}-2 &= \frac{x_n}{2} + \frac{2}{x_n} - 2 = \frac{x_n^2-4x_n+4}{2x_n} = \\ &= \frac{(x_n-2)^2}{2x_n}, \quad x_n > 2, \text{ 所以 } x_{n+1}-2 = \\ &= \frac{(x_n-2)^2}{2x_n} < \frac{(x_n-2)^2}{4}, \end{aligned}$$

设 $a_n = x_n - 2$, 则 $a_{n+1} < \frac{1}{4}a_n^2$,

$$\text{所以 } a_1 = 1, a_2 < \frac{1}{4}a_1^2 = \frac{1}{4}, a_3 < \frac{1}{4}a_2^2 <$$

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 < \left(\frac{1}{4}\right)^2, a_4 < \frac{1}{4}a_3^2 < \frac{1}{4} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 < \left(\frac{1}{4}\right)^3, \dots, a_n < \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},$$

$$\text{所以 } a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots +$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right] <$$

$$\frac{4}{3} < 2. \text{ 即数列 } \{x_n - 2\} \text{ 的前 } n \text{ 项和小于 } 2,$$

故 D 正确. 故选 ACD.

9. $\frac{(3n-1)4^n+1}{9}$ **突破点** ▶ 由递推关系求通

项公式、错位相减法求和、等比数列前 n 项和公式

【解析】 由 $\ln a_{n+2} + (-1)^n \ln a_n = 2 \ln 2$, 得

$$\ln a_{2n+1} - \ln a_{2n-1} = 2 \ln 2,$$

化简得 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = 4$, 因为 $a_1 = 1$, 所以 $\{a_{2n-1}\}$

是首项为 1, 公比为 4 的等比数列,

$$\text{则 } a_{2n-1} = 4^{n-1}a_1 = 4^{n-1},$$

由 $\ln a_{n+2} + (-1)^n \ln a_n = 2 \ln 2$, 得 $\ln a_{2n+2} +$

$$\ln a_{2n} = 2 \ln 2,$$

化简得 $a_{2n+2} = \frac{4}{a_{2n}}$, 又 $a_2 = 2$, 则 $a_{2n} = 2$.

则 $\frac{2n \cdot a_{2n-1}}{a_{2n}} = n \cdot 4^{n-1}$, 记数列

$\left\{ \frac{2n \cdot a_{2n-1}}{a_{2n}} \right\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

$$\text{则 } S_n = 1 + 2 \times 4 + 3 \times 4^2 + \dots + (n-1) \times 4^{n-2} +$$

$$n \times 4^{n-1},$$

$$\text{则 } 4S_n = 1 \times 4 + 2 \times 4^2 + 3 \times 4^3 + \dots + (n-1) \times$$



$$4^{n-1} + n \times 4^n,$$

两式相减得 $-3S_n = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{n-1} - n \cdot$

$$4^n = \frac{1-4^n}{1-4} - n \cdot 4^n = -\frac{(3n-1)4^n + 1}{3},$$

$$\text{故 } S_n = \frac{(3n-1)4^n + 1}{9}.$$

10. $\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}-1} \right)$ 突破点 ▶ 等比数列前

n 项和公式、裂项相消法求和

【解析】根据题意得，

$$\begin{aligned} T_n &= a_1 a_1 + (a_1 a_2 + a_2 a_2) + (a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_3 a_3) + \cdots + (a_1 a_n + a_2 a_n + a_3 a_n + \cdots + a_n a_n) \\ &= 2^2 + (2^3 + 2^4) + (2^4 + 2^5 + 2^6) + \cdots + (2^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+3} + \cdots + 2^{2n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2^2(1-2^1)}{1-2} + \frac{2^3(1-2^2)}{1-2} + \frac{2^4(1-2^3)}{1-2} + \cdots + \frac{2^{n+1}(1-2^n)}{1-2} \end{aligned}$$

$$= (2^3 - 2^2) + (2^5 - 2^3) + (2^7 - 2^4) + \cdots + (2^{2n+1} - 2^{n+1})$$

$$= (2^3 + 2^5 + 2^7 + \cdots + 2^{2n+1}) - (2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{n+1})$$

$$= \frac{2^3(1-2^{2n})}{1-2^2} - \frac{2^2(1-2^n)}{1-2}$$

$$= \frac{2^3(2^n-1)(2^n+1)}{3} - 2^2(2^n-1)$$

$$= \frac{4}{3}(2^{n+1}-1)(2^n-1),$$

$$\text{令 } c_n = \frac{2^n}{T_n},$$

$$\text{则 } c_n = \frac{2^n}{T_n} = \frac{2^n}{\frac{4}{3}(2^{n+1}-1)(2^n-1)} = \frac{3}{4} \times$$

$$\frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)} = \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \right),$$

则 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n =$

$$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2^1-1} - \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \right) = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}-1} \right).$$

11. 突破点 ▶ 裂项相消法求和、错位相减法求和、数列与集合的综合应用

【解】(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，所

$$\text{以公差 } d = \frac{a_4 - a_1}{4-1} = \frac{7-1}{3} = 2,$$

$$\text{所以 } a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n-1.$$

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$,

$$\text{由 } \begin{cases} a_1 + b_3 = a_2^2, \\ a_2 b_3 = 4a_3 + b_2 \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} 1 + b_1 q^2 = 9, \\ 3b_1 q^2 = 20 + b_1 q, \end{cases}$$

解得 $b_1 = q = 2$, 则 $b_n = b_1 q^{n-1} = 2^n$.

$$(2) \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, } c_n = \frac{3n^2 - 10n + 3}{2^{n+1}} =$$

$$\frac{4(n-1)^2 - (n+1)^2}{2^{n+1}} = \frac{(n-1)^2}{2^{n-1}} - \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}},$$

设数列 $\{c_n\}$ 前 $2n$ 项中奇数项的和



为 A_n ,

$$\begin{aligned} \text{则 } A_n &= \frac{0}{2^0} - \frac{2^2}{2^2} + \frac{2^2}{2^2} - \frac{4^2}{2^4} + \cdots + \frac{(2n-2)^2}{2^{2n-2}} - \\ &\frac{(2n)^2}{2^{2n}} = -\frac{n^2}{4^{n-1}}. \end{aligned}$$

当 n 为偶数时, $c_n = (2n-1)2^n$, 设数列 $\{c_n\}$ 前 $2n$ 项中偶数项的和为 B_n ,

$$\text{则 } B_n = 3 \times 4 + 7 \times 4^2 + 11 \times 4^3 + \cdots + (4n-1) \cdot 4^n,$$

$$\text{可得 } 4B_n = 3 \times 4^2 + 7 \times 4^3 + \cdots + (4n-5) \cdot 4^n + (4n-1) \cdot 4^{n+1},$$

$$\text{两式作差得 } -3B_n = 3 \times 4 + 4 \times 4^2 + 4 \times 4^3 + \cdots + 4 \times 4^n - (4n-1) \cdot 4^{n+1}$$

$$= 12 + \frac{4^3(1-4^{n-1})}{1-4} - (4n-1) \cdot 4^{n+1}$$

$$= \left(\frac{7}{3} - 4n \right) \cdot 4^{n+1} - \frac{28}{3},$$

$$\text{整理可得 } B_n = \frac{(12n-7) \cdot 4^{n+1} + 28}{9}, \text{ 所以}$$

$$T_{2n} = A_n + B_n = \frac{(12n-7) \cdot 4^{n+1} + 28}{9} - \frac{n^2}{4^{n-1}}.$$

(3) 若 $j < n+2$, 则 $2^i + 2^j \leq 2^i + 2^{n+1} \leq 2^n + 2^{n+1} = 3 \cdot 2^n$, 与已知矛盾;

若 $j > n+2$, 则 $2^i + 2^j \geq 2^i + 2^{n+3} > 3 \cdot 2^{n+1}$, 与已知矛盾, 所以 $j = n+2$,

集合 M_n 中元素个数等价于满足 $3 \cdot 2^n < 2^i + 2^j < 3 \cdot 2^{n+1}$ 的不同解 (i, j) 的个数,

又因为 $(2 + 2^{n+2}) - 3 \cdot 2^n = 2 + 2^n > 0$, 所以 $3 \cdot 2^n < 2 + 2^{n+2} < 2^2 + 2^{n+2} < \cdots < 2^n + 2^{n+2} < 2^{n+1} + 2^{n+2} = 3 \cdot 2^{n+1}$,

即 $i = 1, 2, 3, \cdots, n$, (i, j) 共有 n 个解, 故 $d_n = n$.

12. 突破点 ▶ 由递推关系研究数列的有关性质、等比数列基本量的计算、证明数列不等式

(1) 【解】① 因为 $\sqrt{a_n \cdot a_{n+2}} = a_{n+1}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 所以 $a_n \cdot a_{n+2} = a_{n+1}^2$,

且 $a_n > 0$, 所以 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$,

则数列 $\{a_n\}$ 是等比数列. 又 $2S_{n+1} = S_n + 2, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $n \geq 2$ 时, $2S_n = S_{n-1} + 2$,

两式作差得 $2a_{n+1} = a_n, n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$,

故数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $\frac{1}{2}$.

又因为 $2S_2 = S_1 + 2$, 所以 $2\left(a_1 + \frac{1}{2}a_1\right) = a_1 + 2$, 所以 $a_1 = 1$,

所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

② 由①知 $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 设数列 $\{b_n\}$ 的首项为 $b_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}$, 公比为 $\left(\frac{1}{2}\right)^k$, 其中 $m, k \in \mathbf{N}^*$,



则数列 $\{b_n\}$ 的各项和为 $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}$,

所以 $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k} \leq \frac{1}{15}$,

又因为 $0 < 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k < 1$, 所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \leq \frac{1}{15} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right] < \frac{1}{15}$, 所以 $b_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \leq \frac{1}{16}$,

当 $b_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} = \frac{1}{16}$ 时, 由 $\frac{\frac{1}{16}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k} \leq$

$\frac{1}{15}$, 得 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k \geq \frac{15}{16}$,

即 $\left(\frac{1}{2}\right)^k \leq \frac{1}{16}$, 满足题意, 所以

$(b_1)_{\max} = \frac{1}{16}$.

(2) 【证明】记 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q_n, n \in \mathbf{N}^*$, 因为

$\sqrt{a_n \cdot a_{n+2}} \geq a_{n+1}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 都成立, 且 $a_n > 0$,

所以 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \geq \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \dots \geq \frac{a_2}{a_1}$, 即 $q_{n+1} \geq q_n \geq \dots \geq q_2 \geq q_1 > 0$,

要证 $(a_1 a_{n+2})^{\frac{1}{2}} \geq (a_2 a_3 \dots a_{n+1})^{\frac{1}{n}}$,

只需证 $(a_1 a_{n+2})^n \geq (a_2 a_3 \dots a_{n+1})^2$,

只需证 $a_1^n (a_1 q_1 q_2 q_3 \dots q_{n+1})^n \geq [(a_1 q_1)(a_1 q_1 q_2) \dots (a_1 q_1 q_2 \dots q_n)]^2$,

只需证 $a_1^{2n} q_1^n q_2^n \dots q_n^n q_{n+1}^n \geq a_1^{2n} q_1^{2n} q_2^{2n-2} \dots q_{n-1}^4 q_n^2$,

只需证 $q_{n+1}^n \geq q_1^n q_2^{n-2} \dots q_{n-1}^{4-n} q_n^{2-n}$,

若 n 为奇数, 只需证 $\left(\frac{q_1}{q_{n+1}}\right)^n \left(\frac{q_2}{q_n}\right)^{n-2} \cdot$

$\left(\frac{q_3}{q_{n-1}}\right)^{n-4} \dots \left(\frac{q_{\frac{n+1}{2}}}{q_{\frac{n+3}{2}}}\right) \leq 1$,

因为 $q_{n+1} \geq q_n \geq \dots \geq q_2 \geq q_1 > 0$, 所以

$\frac{q_1}{q_{n+1}}, \frac{q_2}{q_n}, \frac{q_3}{q_{n-1}}, \dots, \frac{q_{\frac{n+1}{2}}}{q_{\frac{n+3}{2}}} \in (0, 1]$,

所以 $\left(\frac{q_1}{q_{n+1}}\right)^n \left(\frac{q_2}{q_n}\right)^{n-2} \left(\frac{q_3}{q_{n-1}}\right)^{n-4} \cdot \dots \cdot$

$\left(\frac{q_{\frac{n+1}{2}}}{q_{\frac{n+3}{2}}}\right) \leq 1$ 成立;

若 n 为偶数, 只需证 $\left(\frac{q_1}{q_{n+1}}\right)^n \left(\frac{q_2}{q_n}\right)^{n-2} \cdot$

$\left(\frac{q_3}{q_{n-1}}\right)^{n-4} \dots \left(\frac{q_{\frac{n}{2}}}{q_{\frac{n}{2}+2}}\right)^2 (q_{\frac{n}{2}+1})^0 \leq 1$,

因为 $q_{n+1} \geq q_n \geq \dots \geq q_2 \geq q_1 > 0$, 所以



$$\frac{q_1}{q_{n+1}}, \frac{q_2}{q_n}, \frac{q_3}{q_{n-1}}, \dots, \frac{q_{\frac{n}{2}}}{q_{\frac{n}{2}+2}} \in (0, 1],$$

$$\text{又 } (q_{\frac{n}{2}+1})^0 = 1,$$

$$\text{所以 } \left(\frac{q_1}{q_{n+1}}\right)^n \left(\frac{q_2}{q_n}\right)^{n-2} \left(\frac{q_3}{q_{n-1}}\right)^{n-4} \cdot \dots \cdot$$

$$\left(\frac{q_{\frac{n}{2}}}{q_{\frac{n}{2}+2}}\right)^2 (q_{\frac{n}{2}+1})^0 \leq 1 \text{ 成立.}$$

综上所述可知, 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 不等式

$$(a_1 a_{n+2})^{\frac{1}{2}} \geq (a_2 a_3 \cdots a_{n+1})^{\frac{1}{n}}.$$

专题 1 数列的通项公式的求法

刷

难关

1. C 考查点 ▶ 裂项相消法求和、累乘法求数列通项

【解析】由 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+2}$,

得当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \dots \cdot$

$$\frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1$$

$$= \frac{n-1}{n+1} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 1$$

$$= \frac{2}{n(n+1)},$$

当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 也满足上式,

$$\text{所以 } a_n = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

则 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为 $2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \right.$

$$\left. \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{7} \right) = \frac{12}{7}. \text{ 故选 C.}$$

2. B 突破点 ▶ 求等差数列前 n 项和、累乘法求数列通项

【解析】设 $\frac{a_2}{a_1} = t$, 由题意得 $A^* = \{t, 2t,$

$$2^2 t, \dots\}, \text{ 第 } n \text{ 项为 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^{n-1} t,$$

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot$

$$a_1 = t \cdot 2t \cdot 2^2 t \cdot \dots \cdot 2^{n-2} t \cdot a_1 =$$

$$2^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} t^{n-1} \cdot a_1, \text{ 当 } n=1 \text{ 时, 上式也成立.}$$

因为 $a_4=1, a_5=32$,

$$\text{所以 } 2^3 t^3 \cdot a_1 = 1, 2^6 t^4 \cdot a_1 = 32,$$

$$\text{解得 } t=4, a_1 = \frac{1}{512}, \text{ 故选 B.}$$

3. B 突破点 ▶ 利用 a_n 与 S_n 关系求通项或项

【解析】由 $S_{n+1} - 2S_n = n$, 得 $S_{n+1} + n + 2 =$

$$2(S_n + n + 1),$$

因为 $a_1=2$, 所以 $S_1+1+1=4$,

所以 $\{S_n+n+1\}$ 是首项为 4, 公比为 2 的等比数列,

$$\text{所以 } S_n + n + 1 = 4 \times 2^{n-1}, \text{ 所以 } S_n = 2^{n+1} - n -$$



1, 所以 $a_{10} = S_{10} - S_9 = 1\ 023$. 故选 B.

4. D 突破点 ▶ 累加法、求等差数列前 n 项和公式

【解析】依题意, 由 $f(x+1) - f(x) \geq x$, 得 $f(x+2) - f(x+1) \geq x+1$, 两式相加得 $f(x+2) - f(x) \geq 2x+1$,

而 $f(x+2) - f(x) \leq 2x+1$, 因此 $f(x+2) - f(x) = 2x+1$,

取 $x = n (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $f(n+2) - f(n) = 2n+1$,

所以 $f(41) = f(41) - f(39) + f(39) - f(37) + \cdots + f(5) - f(3) + f(3) - f(1) + f(1) = 79 + 75 + \cdots + 7 + 3 + 1 = \frac{79+3}{2} \times 20 + 1 = 821$.

故选 D.

5. C 突破点 ▶ 累加法与累乘法的应用、裂项相消法求和

【解析】因为 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + \sqrt{a_n}}$, 所以

$a_n > 0, a_2 = \frac{1}{2}$, 所以 $S_{2\ 025} > a_1 + a_2 = \frac{3}{2}$,

而 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} < \left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2} \right)^2$, 所以 $\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}} < \frac{1}{\sqrt{a_n}} + \frac{1}{2}$,

故 $\frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}} < \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{a_2}} - \frac{1}{\sqrt{a_1}} < \frac{1}{2}$,

由累加法可得当 $n \geq 2$ 时, $\frac{1}{\sqrt{a_n}} < 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$, 则 $\sqrt{a_n} > \frac{2}{n+1}$,

又因为当 $n = 1$ 时, $\sqrt{a_n} = \frac{2}{n+1}$, 所以

$\sqrt{a_n} \geq \frac{2}{n+1}$, A 错误;

由选项 A 知 $\sqrt{a_n} \geq \frac{2}{n+1}$, 则 $a_{n+1} =$

$\frac{a_n}{1 + \sqrt{a_n}} \leq \frac{a_n}{1 + \frac{2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+3} a_n$, B 错误;

由选项 B 知 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{n+1}{n+3}$, 故 $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{n}{n+2}$,

$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \leq \frac{n-1}{n+1}, \cdots, \frac{a_2}{a_1} \leq \frac{2}{4}$,

由累乘法可得, 当 $n \geq 2$ 时,

$a_n = \frac{a_n}{a_1} \leq \frac{n}{n+2} \times \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{(n+2)(n+1)} = 6 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$,

所以 $S_{2\ 025} \leq 1 + 6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2\ 026} - \frac{1}{2\ 027} \right) = 1 +$

$6 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2\ 027} \right) < 1 + 2 = 3$, 所以 $\frac{3}{2} < S_{2\ 025} <$

3, C 正确, D 错误. 故选 C.

6. ACD 突破点 ▶ 等差数列的应用、观察法求数列通项



【解析】对于选项 A: 当 $n \geq 2$ 时, 由 $Q_{n-1}a_n + a_n = t$, $Q_{n-1} = t - a_{n-1}$ 得, $a_n = \frac{t}{Q_{n-1}+1} = \frac{t}{t-a_{n-1}+1}$, 选项 A 正确.

对于选项 B: 当 $n=1$ 时, $Q_1 + a_1 = t$, 可得 $a_1 = \frac{t}{2}$, 可得 $a_2 = \frac{2}{3}a_1 = \frac{t}{3}$; 当 $n=2$ 时, $\frac{t}{2}a_2 + a_2 = t$, 将 $a_2 = \frac{t}{3}$ 代入得 $\frac{t^2}{6} + \frac{t}{3} = t$, 解得 $t=4$, 故 B 选项错误.

对于选项 C: 若 $t=2$, 则 $a_1 = 1$, $a_n = \frac{2}{3-a_{n-1}}$, 所以 $a_n - 1 = \frac{a_{n-1}-1}{3-a_{n-1}}$, 因为 $a_1 - 1 = 0$, 所以 $a_2 - 1 = 0, \dots, a_n - 1 = 0$, 所以 $\{a_n\}$ 为常数列, 故选项 C 正确.

对于选项 D: $\frac{1}{Q_n} - \frac{1}{Q_{n-1}} = \frac{1}{t-a_n} - \frac{1}{t-a_{n-1}} = \frac{1}{t-\frac{t}{t-a_{n-1}+1}} - \frac{1}{t-a_{n-1}} = \frac{1-a_{n-1}}{t^2-ta_{n-1}} (n \geq 2)$, 若

数列 $\left\{\frac{1}{Q_n}\right\}$ 为等差数列, 则 $\frac{1-a_{n-1}}{t^2-ta_{n-1}}$ 为常数 d .

①若 $d=0$, 则 $a_{n-1} = 1$ 且 $t^2 - ta_{n-1} \neq 0 (n \geq 2)$ 恒成立, 即 $a_n = 1$ 且 $t^2 - t \neq 0 (n \geq 1)$ 恒成立, 所以 $t=2$;

②若 $d \neq 0$, 则 $1-a_{n-1} = dt^2 - dta_{n-1} (n \geq 2)$, 所以 $\begin{cases} 1 = dt^2, \\ 1 = dt, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t = 1, \\ d = 1. \end{cases}$

综上, $t=1$ 或 $t=2$, 故选项 D 正确. 故选 ACD.

7. BCD 突破点 ▶ 由递推关系证明等比数列、构造法求数列通项

【解析】对于 B, 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, $a_{n+1} - 2a_n + a_n a_{n+1} = 0$, 则 $a_n \neq 0$, $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}$,

整理得 $1 - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{a_n} \right)$, 而 $1 - \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$, 因此数列 $\left\{1 - \frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项、公比均为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,

所以 $1 - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n}$, 解得 $a_n = \frac{2^n}{2^n - 1} = 1 + \frac{1}{2^n - 1}$, B 正确;

对于 A, $a_3 = \frac{8}{7}$, A 错误;

对于 C, $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n+1}-1} - \frac{1}{2^n-1} < 0$, 则 $a_{n+1} < a_n$, C 正确;

对于 D, $S_{10} = 2 + 1 + \frac{1}{2^2-1} + 1 + \frac{1}{2^3-1} + \dots + 1 + \frac{1}{2^{10}-1} > 11 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} = 11 +$



$$\frac{\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^9}\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{23}{2} - \frac{1}{2^{10}}, \text{ D 正确. 故}$$

选 BCD.

8. ACD **突破点** ▶ 利用导数研究函数的单调性、三角函数的化简、累乘法求数列通项

【解析】对于 B, 由 $(2n+1)\sin(a_{n+1}-a_n) = \sin(a_{n+1}+a_n)$,

得 $(2n+1)\sin a_{n+1}\cos a_n - (2n+1)\cos a_{n+1}\sin a_n = \sin a_{n+1}\cos a_n + \cos a_{n+1}\sin a_n$,

即 $2n\sin a_{n+1}\cos a_n = (2n+2)\cos a_{n+1}\sin a_n$, 整理得 $\frac{\tan a_{n+1}}{\tan a_n} = \frac{n+1}{n}$,

当 $n \geq 2$ 时, $\tan a_n = \frac{\tan a_n}{\tan a_{n-1}} \cdot \frac{\tan a_{n-1}}{\tan a_{n-2}} \cdots$

$\frac{\tan a_2}{\tan a_1} \cdot \tan a_1 = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdots \frac{2}{1} \times 1 = n$,

当 $n=1$ 时, $\tan a_1 = 1$ 满足上式, 因此 $\tan a_n = n$, B 错误;

对于 A, 由选项 B 知 $\tan a_n = n$, 则 $\tan a_2 = 2$, 即 $\cos a_2 = \frac{1}{2}\sin a_2$, 又 $\sin^2 a_2 + \cos^2 a_2 =$

$1, 0 < a_2 < \frac{\pi}{2}$, 解得 $\sin a_2 = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, A 正确;

对于 C, 当 $n \geq 2$ 时, $\tan a_n = n \geq 2 > \sqrt{3}$, 又 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$, 因此 $a_n > \frac{\pi}{3}$, 即 $a_n > 1$, C 正确;

对于 D, 由 $\tan a_n = n$, 得 $\sin a_n = n\cos a_n$, 又 $\sin^2 a_n + \cos^2 a_n = 1, \cos a_n > 0$,

因此 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a_n\right) = \cos a_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+1}$, 令函

数 $f(x) = x - \sin x$, 求导得 $f'(x) = 1 - \cos x$, 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 所

以 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $x > \sin x$,

因此 $\frac{\pi}{2} - a_n > \sin\left(\frac{\pi}{2} - a_n\right) = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+1}$, 即

$a_n < \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+1}$, D 正确. 故选 ACD.

9. 2 $2^n - 1$ **突破点** ▶ 导数的几何意义、由定义判定等比数列

【解析】因为 $f(x) = x^2 + 3x - 4$, 所以 $f'(x) = 2x + 3$.

因为 $f(a_n) = a_n^2 + 3a_n - 4, f'(a_n) = 2a_n + 3$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(a_n, f(a_n))$ 处的切线方程为 $y - (a_n^2 + 3a_n - 4) = (2a_n + 3) \cdot (x - a_n)$.

令 $y = 0$, 得 $x = \frac{a_n^2 + 4}{2a_n + 3}$, 即 $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 4}{2a_n + 3}$.

因为 $a_2 = \frac{8}{7} = \frac{a_1^2 + 4}{2a_1 + 3}$, 所以 $7a_1^2 - 16a_1 + 4 = (7a_1 - 2)(a_1 - 2) = 0$.

因为 $a_1 > 1$, 所以 $a_1 = 2$.



因为 $f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$, 所以

以 $x_1 = 1, x_2 = -4$, 所以 $b_n = \log_6 \frac{a_n + 4}{a_n - 1}$.

$$\text{因为 } \frac{a_{n+1} + 4}{a_{n+1} - 1} = \frac{\frac{a_n^2 + 4}{2a_n + 3} + 4}{\frac{a_n^2 + 4}{2a_n + 3} - 1} = \frac{a_n^2 + 8a_n + 16}{a_n^2 - 2a_n + 1} =$$

$$\left(\frac{a_n + 4}{a_n - 1} \right)^2, \text{ 所以 } b_{n+1} = 2b_n,$$

而 $b_1 = \log_6 \frac{a_1 + 4}{a_1 - 1} = 1 \neq 0$, 所以 $\{b_n\}$ 为等比数列, 且首项为 1, 公比为 2,

所以 $b_n = 2^{n-1}$, 故 $S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$.

10. 突破点 ▶ 累加法求数列通项、已知 S_n 求 a_n

【解】 (1) 由 $\{S_{n+2} - S_n\}$ 是以 $\frac{3}{4}$ 为首项,

$-\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列, 得 $S_{n+2} - S_n =$

$$\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \text{ 则 } a_3 + a_2 = \frac{3}{4}, a_4 + a_3 =$$

$$-\frac{3}{8}, \text{ 而 } a_2 = -\frac{5}{2}, \text{ 所以 } a_3 = \frac{13}{4},$$

$$a_4 = -\frac{29}{8}.$$

$$(2) S_1 = a_1 = 1, S_2 = a_1 + a_2 = -\frac{3}{2}, S_{n+2} -$$

$$S_n = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

$$\text{当 } n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^* \text{ 时, } S_{2k+1} - S_{2k-1} = \frac{3}{4} \cdot$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-2} = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}, \text{ 则 } S_{2k+1} -$$

$$S_1 = (S_3 - S_1) + (S_5 - S_3) + \cdots + (S_{2k+1} -$$

$$S_{2k-1}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^k}}{1 - \frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4^k}, \text{ 则 } S_{2k+1} = 2 -$$

$$\frac{1}{2^{2k}}, \text{ 故当 } n \text{ 为奇数且 } n \geqslant 3 \text{ 时, } S_n = 2 -$$

$$\frac{1}{2^{n-1}}, \text{ 又 } S_1 = 1 \text{ 满足上式, 所以当 } n \text{ 为奇}$$

$$\text{数时, } S_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$\text{当 } n = 2k, k \in \mathbf{N}^* \text{ 时, } S_{2k+2} - S_{2k} = \frac{3}{4} \cdot$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{2k-1} = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2k} = -\frac{3}{2} \cdot$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^k, \text{ 则 } S_{2k+2} - S_2 = (S_4 - S_2) + (S_6 -$$

$$S_4) + \cdots + (S_{2k+2} - S_{2k}) = -\frac{3}{8} \cdot \frac{1 - \frac{1}{4^k}}{1 - \frac{1}{4}} =$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4^k}, \text{ 则 } S_{2k+2} = -2 + \frac{1}{2^{2k+1}}, \text{ 故当}$$

$$n \text{ 为偶数且 } n \geqslant 4 \text{ 时, } S_n = -2 + \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ 又}$$



$S_2 = -\frac{3}{2}$ 满足上式, 所以当 n 为偶数时,

$$S_n = -2 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

综上, $\{S_n\}$ 的通项公式是 $S_n = (-1)^{n-1} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$.

(3) 由(2)知, $S_n = (-1)^{n-1} \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \left[(-1)^{n-2} \left(2 - \frac{1}{2^{n-2}} \right) \right] = (-1)^{n-1} \left(4 - \frac{3}{2^{n-1}} \right)$,

而 $a_1 = 1$ 满足上式, 因此 $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \left(4 - \frac{3}{2^{n-1}} \right)$, 则 $|S_n| - |a_n| = \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) - \left(4 - \frac{3}{2^{n-1}} \right) = \frac{2}{2^{n-1}} - 2 \leq 0$,

故 $|S_n| \leq |a_n|$.

11. 突破点 ▶ 等差中项的应用、由递推关系证明等比数列、裂项相消法求和、构造法求数列通项

(1) 【证明】已知 $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

则 $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 6a_{n+1} - 9a_n - 3a_{n+1} = 3a_{n+1} - 9a_n = 3(a_{n+1} - 3a_n)$.

又 $a_1 = 3, a_2 = 18$, 所以 $a_2 - 3a_1 = 18 - 3 \times 3 = 9 \neq 0$, 所以 $a_{n+1} - 3a_n \neq 0$,

所以 $\frac{a_{n+2} - 3a_{n+1}}{a_{n+1} - 3a_n} = 3$.

所以数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ 是以 9 为首项, 3 为公比的等比数列.

(2) 【解】由(1)知 $a_{n+1} - 3a_n = 9 \times 3^{n-1} = 3^{n+1}$, 等式两边同时除以 3^{n+1} , 得 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} -$

$$\frac{a_n}{3^n} = 1.$$

设 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$, 则 $b_1 = \frac{a_1}{3^1} = \frac{3}{3} = 1$, 且 $b_{n+1} - b_n = 1$.

所以数列 $\{b_n\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列.

所以 $b_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$.

因为 $b_n = \frac{a_n}{3^n}$, 所以 $a_n = n \cdot 3^n$.

(3) 【证明】由(2)知 $a_n = n \cdot 3^n$, 则

$$\begin{aligned} \frac{2a_n + 3^{n+1}}{a_n a_{n+1}} &= \frac{2n \cdot 3^n + 3^{n+1}}{n \cdot 3^n \cdot (n+1) \cdot 3^{n+1}} = \\ &= \frac{2n+3}{n(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{3(n+1)-n}{n(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{n \cdot 3^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}. \end{aligned}$$

所以 $S_n = \left(\frac{1}{1 \times 3^1} - \frac{1}{2 \times 3^2} \right) + \left(\frac{1}{2 \times 3^2} - \frac{1}{3 \times 3^3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n \cdot 3^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} \right) =$



$$\frac{1}{3} - \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}.$$

$$\text{所以 } c_n = (n+1) \left(\frac{1}{3} - S_n \right) = (n+1) \times \frac{1}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3^{n+1}}.$$

假设数列 $\{c_n\}$ 中存在不同的三项 c_p, c_q, c_r ($p < q < r, p, q, r \in \mathbf{N}^*$) 构成等差数列,

$$\text{则 } 2c_q = c_p + c_r, \text{ 即 } \frac{2}{3^{q+1}} = \frac{1}{3^{p+1}} + \frac{1}{3^{r+1}},$$

$$\text{两边同时乘 } 3^{r+1}, \text{ 得 } 2 \times 3^{r-q} = 3^{r-p} + 1.$$

因为 $p < q < r, p, q, r \in \mathbf{N}^*$, 所以 $r - q \geq 1$, $r - p \geq 2, r - q, r - p \in \mathbf{N}^*$,

则 $2 \times 3^{r-q}$ 是 3 的倍数, $3^{r-p} + 1$ 除以 3 余 1, 等式不成立.

所以假设不成立, 即数列 $\{c_n\}$ 中任意不同的三项都不能构成等差数列.

专题 2 数列求和的方法

刷

难关

1. A 考查点 ▶ 分组(并项)法求和

【解析】设该公司在 2024 年, 2025 年, \dots , 2033 年的销售额(单位: 万元)分别为 a_1, a_2, \dots, a_{10} .

依题意可得 $a_{n+1} = 1.3a_n - 3$ ($n = 1, 2, \dots, 9$), $a_1 = 100$, 则 $a_{n+1} - 10 = 1.3(a_n - 10)$ ($n = 1, 2, \dots, 9$),

所以数列 $\{a_n - 10\}$ 是首项为 90, 公比为 1.3 的等比数列,

$$\text{则 } a_n - 10 = 90 \times 1.3^{n-1}, \text{ 即 } a_n = 90 \times 1.3^{n-1} + 10,$$

$$\text{则 } a_1 + a_2 + \dots + a_{10} = 10 \times 10 + \frac{90 \times (1 - 1.3^{10})}{1 - 1.3} \approx 100 + 300 \times (13.79 - 1) =$$

$$3\,937,$$

故从 2024 年到 2033 年该产品的销售总额约为 3 937 万元. 故选 A.

2. C 突破点 ▶ 裂项相消法求和

【解析】因为数列 $\{2n-1\}$ 是正奇数数列, 对于数列 $\{(n+1)^2 - 1\}$, 当 n 为奇数时, 设 $n = 2k-1$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 则 $(n+1)^2 - 1 = 4k^2 - 1$, 为奇数;

当 n 为偶数时, 设 $n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}^*$), 则 $(n+1)^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k(k+1)$, 为偶

数, 所以 $c_n = \frac{1}{4n^2 - 1}$.

$$\text{又 } c_n = \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\text{所以 } c_1 + c_2 + \dots + c_{10} = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{10}{21},$$

故选 C.

3. A 突破点 ▶ 裂项相消法求和

【解析】因为 $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \dots + \frac{1}{n}a_n =$



$$2 \cdot 3^{n+1} - 6 (n \in \mathbf{N}^*) \text{ ①},$$

$$\text{所以当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = 2 \times 3^2 - 6 = 12,$$

$$\text{当 } n \geqslant 2 \text{ 时, } a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{3} a_3 + \cdots +$$

$$\frac{1}{n-1} a_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 6 \text{ ②},$$

$$\text{①}-\text{②得 } \frac{1}{n} a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 6 - (2 \cdot 3^n - 6) =$$

$$4 \cdot 3^n, \text{ 所以 } a_n = 4n \cdot 3^n (n \geqslant 2),$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 \text{ 也满足上式, 所以 } a_n = 4n \cdot 3^n,$$

$$\text{所以 } b_n = \frac{4n \cdot 3^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{3^{n+1}}{2n+3} - \frac{3^n}{2n+1},$$

记数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,

$$\text{则 } S_{15} = \left(\frac{3^2}{5} - \frac{3}{3} \right) + \left(\frac{3^3}{7} - \frac{3^2}{5} \right) + \left(\frac{3^4}{9} - \frac{3^3}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{3^{16}}{33} - \frac{3^{15}}{31} \right) = \frac{3^{16}}{33} - 1 = \frac{3^{15}}{11} - 1.$$

故选 A.

4. D 突破点 ▶ 由递推关系求通项公式、错位相减法求和、等差数列通项公式

【解析】对于 A, 因为 $a_{n+1} = 5a_n + 2 \times 5^n$, 所

以等式两边同时除以 5^{n+1} , 可得 $\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} =$

$$\frac{a_n}{5^n} + \frac{2}{5}.$$

设 $b_n = \frac{a_n}{5^n}$, 则 $b_{n+1} = b_n + \frac{2}{5}$, 又因为 $b_1 =$

$$\frac{a_1}{5} = \frac{4}{5},$$

所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $\frac{4}{5}$, 公差为 $\frac{2}{5}$ 的等差数列.

$$\text{则 } b_n = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}(n-1) = \frac{2n+2}{5}, a_n = 5^n b_n =$$

$$2(n+1) \cdot 5^{n-1}, \text{ 故 A 正确.}$$

对于 B, 由选项 A 知 $a_n = 2(n+1) \cdot 5^{n-1}$,

$$\text{则 } T_n = 4 \times 5^0 + 6 \times 5^1 + \cdots + 2n \cdot 5^{n-2} + (2n+2) \cdot 5^{n-1},$$

$$\text{则 } 5T_n = 4 \times 5^1 + 6 \times 5^2 + \cdots + 2n \cdot 5^{n-1} + (2n+2) \cdot 5^n,$$

两式相减可得 $-4T_n = 4 \times 5^0 + 2 \times 5^1 + \cdots +$

$$2 \cdot 5^{n-1} - (2n+2) \cdot 5^n = 4 + 2 \times \frac{5(1-5^{n-1})}{1-5} -$$

$$(2n+2) \cdot 5^n = 4 - \frac{5}{2}(1-5^{n-1}) - (2n+2)$$

$$\cdot 5^n = \frac{3}{2} - \left(2n + \frac{3}{2} \right) \cdot 5^n,$$

$$\text{所以 } T_n = \left(\frac{1}{2}n + \frac{3}{8} \right) \cdot 5^n - \frac{3}{8}, \text{ 故 B}$$

正确.

$$\text{对于 C, } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+2) \times 5^n}{2(n+1) \times 5^{n-1}} = \frac{5n+10}{n+1}, \text{ 故 C}$$

正确.

$$\text{对于 D, } 8T_n = (4n+3) \cdot 5^n - 3, 10a_n - 3 =$$

$$20(n+1) \cdot 5^{n-1} - 3 = 4(n+1) \cdot 5^n - 3,$$

$$\text{则 } 8T_n \neq 10a_n - 3, \text{ 故 D 错误. 故选 D.}$$

5. ABD 突破点 ▶ 累加法求数列通项、错



位相减法求和

【解析】对于 A, 因为 $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = n+1 - n = 1$, 所以 $\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = 1 - 1 = 0$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $\Delta a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$, $\Delta a_{n+1} = (n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n+3$, 所以 $\Delta a_{n+1} > \Delta a_n$, 故 B 正确;

对于 C, 因为 $\Delta a_n = (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n+1$,

所以 $b_1 = \Delta a_1 = 7$, 又当 $n \geq 2$ 时, $b_n = \Delta a_n - \Delta a_{n-1} = 6n$, 所以 $b_n = \begin{cases} 7, n=1, \\ 6n, n \geq 2, \end{cases}$ 故 C 错误;

对于 D, 因为 $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n = (n+2) \cdot 2^n$, 所以 $a_2 - a_1 = 3 \times 2^1$, $a_3 - a_2 = 4 \times 2^2$, \dots , $a_n - a_{n-1} = (n+1) \cdot 2^{n-1}$, $n \geq 2$,

所以 $a_n - a_1 = 3 \times 2^1 + 4 \times 2^2 + \dots + (n+1) \cdot 2^{n-1}$,

所以 $2(a_n - a_1) = 3 \times 2^2 + 4 \times 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n-1} + (n+1) \cdot 2^n$,

则 $-(a_n - a_1) = 3 \times 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} - (n+1) \cdot 2^n$

$$2^n = 6 + \frac{2^2 \cdot (1 - 2^{n-2})}{1 - 2} - (n+1) \cdot 2^n$$

$$= 6 + 2^n - 4 - (n+1) \cdot 2^n,$$

所以 $-a_n + a_1 = -n \cdot 2^n + 2$, 则 $a_n = n \cdot 2^n$, $n \geq 2$, 当 $n=1$ 时, $a_1 = 2$ 满足上式,

所以 $a_n = n \cdot 2^n, n \in \mathbf{N}^*$,

又因 $\Delta^2 a_n = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n = (n+3) \cdot 2^{n+1} - (n+2) \cdot 2^n = (n+4) \cdot 2^n$,

所以 $a_n + \Delta^2 a_n = n \cdot 2^n + (n+4) \cdot 2^n = (2n+4) \cdot 2^n = 2 \cdot (n+2) \cdot 2^n = 2\Delta a_n$, 故 D 正确. 故选 ABD.

6. ACD 突破点 ▶ 函数性质的应用、倒序相加法求和、基本不等式求和的最小值

【解析】对于 A, $f(x) = \frac{2 \cdot 4^x}{4^x + 4} =$

$$\frac{2 \cdot 4^x + 8 - 8}{4^x + 4} = 2 - \frac{8}{4^x + 4}, \text{ 则 } f(x) + f(2-x) =$$

$$2 - \frac{8}{4^x + 4} + 2 - \frac{8}{4^{2-x} + 4} = 4 - \frac{8}{4^x + 4} - \frac{8 \cdot 4^x}{4^{x+1} + 16} =$$

$$4 - \frac{8}{4^x + 4} - \frac{2 \cdot 4^x}{4^x + 4} = 4 - \frac{8 + 2 \cdot 4^x}{4^x + 4} = 2, \text{ 所以函}$$

数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称, A 正确.

对于 B, 令 $g(x) = f(x-1) - 1$, 则 $g(-x) = f(-x-1) - 1$, $g(x) + g(-x) = f(x-1) - 1 + f(-x-1) - 1 = f(x-1) + f(-x-1) - 2$,

由 A 知 $f(x-1) + f(-x-1) \neq 2$, 所以 $g(x) + g(-x) \neq 0$, 所以 $f(x-1) - 1$ 不是奇函数, B 错误.

对于 C, 因为 $f(3x+1) + f(2x-3) > 2$, 所以 $f(3x+1) > 2 - f(2x-3) = f(5-2x)$, 因

为 $f(x) = 2 - \frac{8}{4^x + 4}$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以

$$3x+1 > 5-2x, \text{ 解得 } x > \frac{4}{5}, \text{ C 正确.}$$

对于 D, 由 A 知, $f(x) + f(2-x) = 2$, 且



$f(1) = 1, a_n = f\left(\frac{n}{1\ 013}\right) (n \in \mathbf{N}^*)$, 则

$$S_{2\ 025} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2\ 024} + a_{2\ 025} = f\left(\frac{1}{1\ 013}\right) +$$

$$f\left(\frac{2}{1\ 013}\right) + \cdots + f\left(\frac{2\ 024}{1\ 013}\right) + f\left(\frac{2\ 025}{1\ 013}\right), \text{ 则}$$

$$S_{2\ 025} = f\left(\frac{2\ 025}{1\ 013}\right) + f\left(\frac{2\ 024}{1\ 013}\right) + \cdots +$$

$$f\left(\frac{2}{1\ 013}\right) + f\left(\frac{1}{1\ 013}\right), \text{ 则 } 2S_{2\ 025} = 2 \times 2\ 025,$$

则 $S_{2\ 025} = 2\ 025$.

$$\text{又 } S_{2\ 025} = \frac{2\ 025}{2}(a+b), \text{ 所以 } a+b=2,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{\frac{a+b}{2}}{2|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{a+b}{4|a|} +$$

$$\frac{|a|}{b} = \frac{a}{4|a|} + \frac{b}{4|a|} + \frac{|a|}{b}.$$

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } \frac{a}{4|a|} + \frac{b}{4|a|} + \frac{|a|}{b} = \frac{1}{4} + \frac{b}{4a} +$$

$$\frac{a}{b} \geq \frac{1}{4} + 2\sqrt{\frac{b}{4a} \cdot \frac{a}{b}} = \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4},$$

$$\text{当且仅当 } \frac{b}{4a} = \frac{a}{b}, \text{ 即 } b=2a, a=\frac{2}{3}, b=\frac{4}{3}$$

$$\text{时等号成立; 当 } a < 0 \text{ 时, } \frac{a}{4|a|} + \frac{b}{4|a|} +$$

$$\frac{|a|}{b} = -\frac{1}{4} + \left[\left(-\frac{b}{4a} \right) + \left(-\frac{a}{b} \right) \right] \geq -\frac{1}{4} +$$

$$2\sqrt{\left(-\frac{b}{4a} \right) \left(-\frac{a}{b} \right)} = -\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\text{当且仅当 } -\frac{b}{4a} = -\frac{a}{b}, \text{ 即 } b=-2a, a=-2,$$

$$b=4 \text{ 时等号成立, 所以若 } S_{2\ 025} = \frac{2\ 025}{2}(a+$$

$$b), b > 0, \text{ 则 } \frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{b} \text{ 的最小值为 } \frac{3}{4}, \text{ D}$$

正确. 故选 ACD.

7. -1 突破点 ▶ 导数的几何意义、数列求和的其他方法、对数的运算

【解析】由 $y = x^{n+1}$ 求导得 $y' = (n+1)x^n$,

则曲线 $y = x^{n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y-1 = (n+1)(x-1)$,

令 $y=0$, 得切线与 x 轴的交点横坐标为

$$x_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$\text{故 } \log_{2\ 025} x_1 + \log_{2\ 025} x_2 + \cdots + \log_{2\ 025} x_{2\ 024} =$$

$$\log_{2\ 025} (x_1 x_2 \cdots x_{2\ 024}) = \log_{2\ 025} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times$$

$$\frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{2\ 024}{2\ 025} \right) = \log_{2\ 025} \frac{1}{2\ 025} = -1.$$

8. 10 101 突破点 ▶ 裂项相消法求和

【解析】因为 $a_n^2 + 2\sqrt{n} \cdot a_n - 3n = 0$, 所以

$$(a_n + 3\sqrt{n})(a_n - \sqrt{n}) = 0.$$

因为 $\{a_n\}$ 为正项数列, 所以 $a_n = \sqrt{n}$, 则

$$\sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2}},$$

$$\text{当 } i \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{2}{2\sqrt{i}} < \frac{2}{\sqrt{i} + \sqrt{i-1}} = 2(\sqrt{i} -$$

$$\sqrt{i-1}),$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{a_i} < 1 + 2 \times (\sqrt{2} - 1) + 2 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + 2(\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2-1}) = 2(\sqrt{n^2} - 1) + 1 = 2n - 1 (n \geq 2),$$

$$\text{又对于 } i \in \mathbf{N}^*, \text{ 都有 } \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{2}{2\sqrt{i}} > \frac{2}{\sqrt{i} + \sqrt{i+1}} = 2(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}),$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{a_i} > 2 \times (\sqrt{2} - 1) + 2 \times (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + 2(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2}) = 2(\sqrt{n^2+1} - 1) > 2(\sqrt{n^2} - 1) = 2n - 2,$$

$$\text{所以 } 2n - 2 < \sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{a_i} < 2n - 1 (n \geq 2),$$

$$\text{故当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = \left[\sum_{i=1}^{n^2} \frac{1}{a_i} \right] = 2n - 2, \text{ 又 } b_1 = 1,$$

$$\text{所以 } \{b_n\} \text{ 的前 } 101 \text{ 项和为 } b_1 + b_2 + \cdots + b_{101} = 1 + \frac{(2+200) \times 100}{2} = 10101.$$

9. 突破点 ▶ 错位相减法求和、裂项相消法求和、等差数列的性质、分组(并项)法求和

【解】(1) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_5 = a_3 + a_4 = 19$, 而 $a_2 = 5$, 解得 $a_5 = 14$,

$$\text{则公差 } d = \frac{a_5 - a_2}{5 - 2} = 3, \text{ 则 } a_n = a_2 + (n - 2) \cdot d = 3n - 1.$$

$$\text{设等比数列 } \{b_n\} \text{ 的公比为 } q (q \neq 0), b_1 = a_1 = 2, \text{ 由 } S_{11} = 11(b_4 + 1), \text{ 得 } \frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = 11(b_1 q^3 + 1),$$

$$\text{即 } 2q^3 + 1 = a_6 = 17, \text{ 解得 } q = 2, \text{ 则 } b_n = b_1 q^{n-1} = 2^n,$$

所以数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n = 3n - 1, b_n = 2^n$.

$$(2) \text{ 由 (1) 得, 当 } n \text{ 为奇数时, } c_n = \frac{(a_n - 1)b_n - 2}{(b_n + 1)(b_{n+2} + 1)} = \frac{(3n - 2) \cdot 2^n - 2}{(2^n + 1)(2^{n+2} + 1)} = \frac{n}{2^n + 1} - \frac{n+2}{2^{n+2} + 1},$$

$$\text{则 } \sum_{i=1}^n c_{2i-1} = \frac{1}{2^1 + 1} - \frac{3}{2^3 + 1} + \frac{3}{2^3 + 1} - \frac{5}{2^5 + 1} + \cdots + \frac{2n-1}{2^{2n-1} + 1} - \frac{2n+1}{2^{2n+1} + 1} = \frac{1}{3} - \frac{2n+1}{2^{2n+1} + 1};$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } c_n = (-1)^{\frac{n}{2}} (n-1) b_n = (-1)^{\frac{n}{2}} (n-1) \cdot 2^n, c_{2i} = (-1)^i (2i-1) \cdot 2^{2i} = (2i-1) \cdot (-4)^i,$$

$$\sum_{i=1}^n c_{2i} = 1 \times (-4) + 3 \times (-4)^2 + 5 \times (-4)^3 + \cdots + (2n-1) \cdot (-4)^n,$$

$$\text{则 } -4 \sum_{i=1}^n c_{2i} = 1 \times (-4)^2 + 3 \times (-4)^3 + 5 \times (-4)^4 + \cdots + (2n-3) \cdot (-4)^n + (2n-1) \cdot (-4)^{n+1},$$

$$\text{两式相减得 } 5 \sum_{i=1}^n c_{2i} = 1 \times (-4) + 2 \times (-4)^2 +$$



$$2 \times (-4)^3 + \cdots + 2 \cdot (-4)^n - (2n-1) \cdot (-4)^{n+1} = -4 + \frac{32[1-(-4)^{n-1}]}{1-(-4)} - (2n-1) \cdot (-4)^{n+1} = \frac{12}{5} - \frac{10n-3}{5} \cdot (-4)^{n+1},$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^{2n} c_i = \sum_{i=1}^n c_{2i-1} + \sum_{i=1}^n c_{2i} = \frac{61}{75} - \frac{2n+1}{2^{2n+1}+1} - \frac{10n-3}{25} \cdot (-4)^{n+1}.$$

(3) 依题意, 数列 $\{d_n\}$ 为 $a_1, 1, 1, a_2, 1, 1, 1, 1, a_3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, a_4, \cdots, a_k, \overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{2^k \uparrow 1}, a_{k+1}, \cdots$,

其中 a_{k+1} 项前的总项数为 $k+2+2^2+\cdots+2^k = k + \frac{2(1-2^k)}{1-2} = k-2+2^{k+1}$,

易知数列 $\{k-2+2^{k+1}\}$ 是递增数列, 当 $k=9$ 时, $k-2+2^{k+1} = 7+2^{10} = 1\,031 < 2\,025$,
当 $k=10$ 时, $k-2+2^{k+1} = 8+2^{11} = 2\,056 > 2\,025$,

因此数列 $\{d_n\}$ 的前 2 025 项中, 有数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项, 有 2 015 个 1,

$$\text{所以 } T_{2\,025} = S_{10} + 2\,015 = 2 \times 10 + \frac{10 \times 9}{2} \times 3 + 2\,015 = 2\,170.$$

10. 突破点 ▶ 裂项相消法求和、数列新定义、数量积的坐标表示

(1) 【解】 $\forall G > 0, \exists n \in \mathbf{N}^*, |x_n| > G$.

(2) 【解】 对于数列 $\{y_n\}$, 当 $n=1$ 时, $A_1 = y_1 = 1 < 2$;

$$\text{当 } n \geqslant 2 \text{ 时, 因为 } y_n = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

$$\text{所以 } A_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n < 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2.$$

又 $\forall n \in \mathbf{N}^*, A_n > 0$, 所以 $0 < A_n < 2$, 所以 $\{A_n\}$ 有界;

对于数列 $\{z_n\}$, 先证当 $x > 0$ 时, $x > \ln(x+1)$,

$$\text{令 } f(x) = x - \ln(x+1), \text{ 所以 } f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} > 0 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) > f(0) = 0$, 所以 $x > \ln(x+1) (x > 0)$,

$$\text{令 } x = \frac{1}{k}, k \in \mathbf{N}^*, \text{ 则 } \frac{1}{k} > \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right), \text{ 所以}$$

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1),$$

对于 $\forall G > 0$, 取 $n = [e^G] + 1$, $[e^G]$ 表示不超过 e^G 的最大整数,

所以 $B_n > \ln(n+1) > \ln(e^G + 1) > G$, 所以



$\{B_n\}$ 无界.

(3) 【证明】记点 $P_n(a_n, b_n)$, 则由条件得 $\overrightarrow{P_{n-2}P_n} \cdot \overrightarrow{P_{n-1}P_n} = 0, n \geq 3$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$,

① 若点 P_{n-1}, P_{n-2} 重合, 则

$$\begin{cases} a_{n-1} = a_{n-2}, \\ b_{n-1} = b_{n-2}, \end{cases} \text{ 所以 } (a_n - a_{n-2})^2 +$$

$$(b_n - b_{n-2})^2 = 0, \text{ 所以 } a_n = a_{n-2};$$

② 若点 P_{n-1}, P_{n-2} 不重合, 则点 P_n 在以线段 $P_{n-1}P_{n-2}$ 为直径的圆上,

所以 $\{|P_{n-1}P_n|^2\}$ 是从第 2 项起, 每一项都小于或等于它的前一项且所有项均大于或等于零的数列. 因为 $a_n, b_n \in \mathbf{Z}$, 所以 $|P_{n-1}P_n|^2 \in \mathbf{N}$,

当 n 充分大时, 要么 $|P_{n-1}P_n|^2 = |P_{n-2}P_{n-1}|^2$, 此时 P_n 与 P_{n-2} 重合, 所以 $a_n = a_{n-2}$,

要么 $|P_{n-1}P_n|^2 = 0$, 所以当 n 充分大时, 所有点 P_n 均重合, 所以存在 $k \in \mathbf{N}^*$, 使得 $a_k = a_{k+2}$,

综上, 存在 $k \in \mathbf{N}^*$, 使得 $a_k = a_{k+2}$.

专题 3 数列不等式

刷

难关

1. D 突破点 ▶ 数列不等式恒成立问题、利用 a_n 与 S_n 关系求通项或项、确定数列中的最大项

【解析】因为 $S_n = 2a_n - 2$, 所以令 $n = 1$, 得 $a_1 = 2$,

当 $n \geq 2$ 时, 由 $\begin{cases} S_n = 2a_n - 2, \\ S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2, \end{cases}$ 得 $a_n = S_n -$

$$S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}, \text{ 即 } a_n = 2a_{n-1} (n \geq 2),$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n = 2^n, n \in \mathbf{N}^*$.

由 $\lambda a_n \geq 2 \log_2 a_n + 3$, 即 $\lambda \geq \frac{2n+3}{2^n}$ 恒成立,

令 $c_n = \frac{2n+3}{2^n}, n \in \mathbf{N}^*$, 则 $\lambda \geq (c_n)_{\max}$,

而 $c_{n+1} - c_n = -\frac{1+2n}{2^{n+1}} < 0$, 所以 $c_{n+1} < c_n$, 即数列

$\{c_n\}$ 是递减数列, 所以 $(c_n)_{\max} = c_1 = \frac{5}{2}$,

所以 $\lambda \geq \frac{5}{2}$, 即 λ 的最小值为 $\frac{5}{2}$. 故选 D.

2. ACD 突破点 ▶ 判断数列的增减性、数列不等式恒成立问题

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d > 0)$, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$,

对于 A 选项, 由已知 $a_1 = b_1$, 则 $a_1 + b_1 = a_2 = 2b_1, a_2 + b_2 = b_3 = 2b_1 + b_2$,

即 $b_1 q^2 = 2b_1 + b_1 q$, 所以 $q^2 - q - 2 = 0$, 因为 $q > 0$, 解得 $q = 2$, A 正确;

对于 B 选项, 由题意得 $d = a_2 - a_1 = b_1$, 则 $a_n = a_1 + (n-1)d = nb_1$,

$$b_n = b_1 q^{n-1} = 2^{n-1} b_1, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 且 } b_1 > 0,$$

$$\text{所以 } \frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{2^{n-1}},$$

$$\text{令 } c_n = \frac{n}{2^{n-1}}, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 则 } c_{n+1} - c_n = \frac{n+1}{2^n} -$$



$$\frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1-n}{2^n},$$

当 $n \geq 2$ 时, $c_{n+1} - c_n < 0$, 即 $c_{n+1} < c_n$, 所以数列 $\{c_n\}$ 从第三项开始递减,

当 $n \geq 3$ 时, $c_n \leq c_3 = \frac{3}{4} < 1$, 则 $a_n \neq b_n$, 故

对任意的 $m \geq 3$ 且 $m \in \mathbf{N}^*$, $a_m \neq b_m$, B 错误;

对于 C 选项, $b_n - \lambda a_n = (2^{n-1} - \lambda n) b_1$,

令 $x_n = (2^{n-1} - \lambda n) b_1$,

对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $x_{n+1} - x_n = [2^n - \lambda(n+1)] b_1 - (2^{n-1} - \lambda n) b_1 = (2^{n-1} - \lambda) b_1$,

对任意的 $\lambda < 1$, 由于 $2^{n-1} \geq 2^0 = 1$, 则 $x_{n+1} - x_n = (2^{n-1} - \lambda) b_1 > 0$, 即 $x_{n+1} > x_n$,

所以对 $\forall \lambda < 1$, 数列 $\{b_n - \lambda a_n\}$ 为递增数列, C 正确;

对于 D 选项, $\frac{b_n}{a_n} = \frac{2^{n-1}}{n}$,

则 $\sum_{k=1}^{10} \frac{b_k}{a_k} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + \frac{2^4}{5} + \frac{2^5}{6} + \frac{2^6}{7} + \frac{2^7}{8} + \frac{2^8}{9} + \frac{2^9}{10} < 1 + 1 + 2 + 2 + 4 + 6 + 10 + 16 + 29 + 52 = 123 < 150$, D 正确. 故选 ACD.

3. D 突破点 ▶ 利用定义求等差数列通项公式、数列不等式恒成立问题、错位相减法求和

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $d \neq 0$,

$\therefore \{a_n\}$ 是“和等比数列”, 且 $a_1 = 1$,

$\therefore S_2 = kS_1, S_4 = kS_2$,

$\therefore \begin{cases} 4+6d=k(2+d), \\ 2+d=k \times 1, \end{cases}$ 故 $d^2 - 2d = 0$, 解得

$d=2$ 或 $d=0$ (舍),

$\therefore a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1, b_n = \frac{n}{2^{2n-1}} = 2n \cdot$

$\left(\frac{1}{4}\right)^n, n \in \mathbf{N}^*,$

$\therefore T_n = 2 \left[1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + n \cdot$

$\left(\frac{1}{4}\right)^n \right], \frac{1}{4} T_n = 2 \left[1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2 \times$

$\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right],$ 两式相减得

$\frac{3}{4} T_n = 2 \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n - n \cdot$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right] = 2 \left[\frac{\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} - n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right],$

$\therefore T_n = \frac{8}{9} - \left(\frac{8}{9} + \frac{2n}{3}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^n,$

若不等式 $T_n > (-1)^n m + \frac{3n+4}{2^{2n-1}} - 3$ 对任意的

的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

则 $\frac{8}{9} - \left(\frac{8}{9} + \frac{2n}{3}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{3n+4}{2^{2n-1}} + 3 >$

$(-1)^n m$, 化简得 $\frac{35}{9} - \frac{5}{9} \times \frac{3n+4}{2^{2n-2}} > (-1)^n m$



恒成立,

$$\text{令 } c_n = \frac{3n+4}{2^{2n-2}}, \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } c_n - c_{n-1} = \frac{3n+4}{2^{2n-2}} -$$

$$\frac{3n+1}{2^{2n-4}} = \frac{-9n}{2^{2n-2}} < 0,$$

$$\therefore c_n < c_{n-1}, c_1 > c_2 > c_3 > \cdots > c_n,$$

$$\therefore \{c_n\} \text{ 是递减数列, 故 } y = \frac{35}{9} - \frac{5}{9} \times$$

$$\frac{3n+4}{2^{2n-2}} = \frac{35}{9} - \frac{5}{9} c_n \text{ 在 } n \in \mathbf{N}^* \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } -m < \left(\frac{35}{9} - \frac{5}{9} \times \frac{3n+4}{2^{2n-2}} \right)_{\min} = \frac{35}{9} - \frac{5}{9} \times \frac{3+4}{2^0} = 0, \text{ 解得 } m > 0,$$

$$\text{当 } n \text{ 为偶数时, } m < \left(\frac{35}{9} - \frac{5}{9} \times \frac{3n+4}{2^{2n-2}} \right)_{\min} = \frac{35}{9} - \frac{5}{9} \times \frac{3 \times 2 + 4}{2^{2 \times 2 - 2}} = \frac{5}{2},$$

故 m 的取值范围是 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$. 故选 D.

4. $\left[\frac{9}{4}, +\infty\right)$ 突破点 ▶ 等比数列前 n 项

和、数列不等式恒成立问题、函数新定义

【解析】在 $1 \sim 5^n$ 的整数中与 5^n 不互质的数有 $5, 10, \dots, 5^n - 5, 5^n$, 共有 5^{n-1} 个, 所以与 5^n 互质的数有 $5^n - 5^{n-1} = 4 \times 5^{n-1}$ (个), 因此 $\varphi(5^n) = 4 \times 5^{n-1}$.

在 $1 \sim 10^n$ 的整数中, 2 的倍数共有 $\frac{10^n}{2}$ 个,

5 的倍数共有 $\frac{10^n}{5}$ 个, 10 的倍数共有 10^{n-1}

个, 所以 $\varphi(10^n) = 10^n - \frac{10^n}{2} - \frac{10^n}{5} + 10^{n-1} = 4 \times 10^{n-1}$.

所以 $a_n = \frac{\varphi(10^n)}{\varphi(5^n)} = \frac{4 \times 10^{n-1}}{4 \times 5^{n-1}} = 2^{n-1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列,

$$\text{所以 } S_n = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1,$$

则 $S_n + n - 1 \leq \lambda a_n$ 恒成立等价于 $2^n - 2 + n \leq \lambda \cdot 2^{n-1}$ 恒成立,

即 $\lambda \geq 2 + \frac{n-2}{2^{n-1}}$ 恒成立, 所以 $\lambda \geq$

$$\left(2 + \frac{n-2}{2^{n-1}}\right)_{\max},$$

$$\text{令 } b_n = \frac{n-2}{2^{n-1}}, \text{ 则 } b_{n+1} - b_n = \frac{n-1}{2^n} - \frac{n-2}{2^{n-1}} = \frac{3-n}{2^n},$$

所以 $b_4 - b_3 = 0$, 且 $b_1 < b_2 < b_3 = b_4 > b_5 > b_6 > b_7 > \cdots$,

$$\text{所以 } \left(2 + \frac{n-2}{2^{n-1}}\right)_{\max} = 2 + b_4 = 2 + b_3 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4},$$

所以 $\lambda \geq \frac{9}{4}$, 即实数 λ 的取值范围

是 $\left[\frac{9}{4}, +\infty\right)$.

5. 突破点 ▶ 裂项相消法求和、分组(并项)



法求和、利用 a_n 与 S_n 关系求通项或项、放缩法的应用

$$(1) \text{【解】} \because 2S_n = n^2 + 5n, \text{ 即 } S_n = \frac{n^2 + 5n}{2}.$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } S_1 = \frac{1^2 + 5}{2}, \text{ 所以 } a_1 = S_1 = 3;$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = \frac{(n-1)^2 + 5(n-1)}{2},$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2 + 5n}{2} - \frac{(n-1)^2 + 5(n-1)}{2} = n+2,$$

当 $n=1$ 时, $a_1=3$ 也满足上式,

$$\therefore a_n = n+2, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$(2) \text{【解】} \because S_n = \frac{n^2 + 5n}{2}, a_n = n+2, b_n = n \cdot 2^n,$$

$$\therefore \frac{S_n + 4}{a_n b_n} = \frac{\frac{n^2 + 5n}{2} + 4}{(n+2)n \cdot 2^n} = \frac{n^2 + 5n + 8}{(n+2)n \cdot 2^{n+1}}$$

$$= \frac{(n+2)n + 3n + 8}{(n+2)n \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{3n+8}{(n+2)n \cdot 2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{4(n+2) - n}{(n+2)n \cdot 2^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+2) \cdot 2^{n+1}},$$

$$\therefore T_n = \frac{\frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{1 \times 2^0} - \frac{1}{3 \times 2^2} +$$

$$\frac{1}{2 \times 2^1} - \frac{1}{4 \times 2^3} + \frac{1}{3 \times 2^2} - \frac{1}{5 \times 2^4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} -$$

$$\frac{1}{(n+2) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + 1 + \frac{1}{4} -$$

$$\frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+2) \cdot 2^{n+1}} = \frac{7}{4} - \frac{1}{2^{n+1}} -$$

$$\frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+2) \cdot 2^{n+1}}, n \in \mathbf{N}^*.$$

$$(3) \text{【证明】由 (1) 可得 } c_n = \frac{1}{\sqrt{a_n} - 2} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{4}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{k+1}(\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) + \sqrt{k}(\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) - 4\sqrt{k}\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})}$$

$$= \frac{(\sqrt{k+1})^2 + (\sqrt{k})^2 - 2\sqrt{k}\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})}$$

$$> \frac{2\sqrt{k}\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k}\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})} = 0 (k \in \mathbf{N}^*),$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > \frac{4}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} (k \in \mathbf{N}^*),$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) > \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} =$$

$$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) (k \in \mathbf{N}^*),$$

$$\therefore c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} =$$

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} > 2(\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} -$$



$$\sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} = 2(\sqrt{n} - 1) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} = 2\sqrt{n} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}} > 2\sqrt{n} - \frac{3}{2}.$$

突破 数列新定义

刷

热点

1. **突破点** ▶ 等比数列的定义、裂项相消法求和、数列新定义

(1) 【解】由题意知 $a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2}$ 是公比为 $\frac{k+1}{k}$ 的等比数列,

$$\therefore \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{k+1}{k} \text{ 对任意 } k \in \mathbf{N}^* \text{ 恒成}$$

$$\text{立}, \therefore \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = 2 \Rightarrow a_3 = 2, a_4 = 4, \frac{a_6}{a_5} =$$

$$\frac{a_5}{a_4} = \frac{3}{2} \Rightarrow a_5 = 6, a_6 = 9, \text{ 故数列 } \{a_n\} \text{ 的}$$

“(2,4)连续子列”为 $\{1, 2, 4, 6\}$, 不是等比数列.

$$(2) \text{ 【证明】 } \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^2, k \in \mathbf{N}^*,$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{a_4}{a_2} = \left(\frac{2}{1}\right)^2, \\ \frac{a_6}{a_4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \\ \dots \\ \frac{a_{2n}}{a_{2n-2}} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*, \end{cases}$$

$$\text{各式等号左右两边分别相乘得 } \frac{a_{2n}}{a_2} = n^2 \Rightarrow$$

$$a_{2n} = n^2 (n \geq 2),$$

当 $n=1$ 时, $a_2 = 1$ 也满足上式, $\therefore a_{2n} = n^2$ (另解: 用数学归纳法证明, 由(1)知 $n=1, 2$ 时, $a_{2n} = n^2$, 假设当 $n=k$ 时, $a_{2n} = n^2$,

$$\text{即 } a_{2k} = k^2, \text{ 由条件有 } \frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = \frac{k+1}{k} \Rightarrow$$

$$a_{2k+1} = k(k+1) \Rightarrow a_{2k+2} = (k+1)^2, \text{ 所以当 } n=k+1 \text{ 时, } a_{2n} = n^2, \text{ 故 } a_{2n} = n^2).$$

$$(3) \text{ 【解】由(2)知 } \tan b_n = \frac{1}{n^2 + n + 1} =$$

$$\frac{(n+1) - n}{1 + (n+1)n}, \text{ 令 } \tan c_n = n, c_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore \tan b_n = \frac{\tan c_{n+1} - \tan c_n}{1 + \tan c_{n+1} \tan c_n} = \tan(c_{n+1} - c_n).$$

$$\text{又 } \because b_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), c_{n+1} - c_n \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\therefore b_n = c_{n+1} - c_n,$$

$$\therefore T(k, m) = b_k + b_{k+1} + \cdots + b_{k+m-1} = c_{k+1}$$

$$- c_k + c_{k+2} - c_{k+1} + \cdots + c_{k+m} - c_{k+m-1} = c_{k+m} - c_k,$$

$$\therefore \tan T(k, m) = \tan(c_{k+m} - c_k) =$$

$$\frac{\tan c_{k+m} - \tan c_k}{1 + \tan c_{k+m} \tan c_k} = \frac{k+m-k}{1 + (k+m) \cdot k} =$$

$$\frac{m}{k^2 + mk + 1}.$$

$$\text{由 } \tan T(k, m) = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{m}{k^2 + mk + 1} = \frac{1}{5},$$

$$\therefore k^2 + mk + 1 = 5m \Rightarrow m(5-k) = k^2 + 1.$$

当 $k=1$ 时, $m=\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}^*$, 舍去; 当 $k=2$ 时, $m=\frac{5}{3} \notin \mathbf{N}^*$, 舍去; 当 $k=3$ 时, $m=5 \in \mathbf{N}^*$; 当 $k=4$ 时, $m=17 \in \mathbf{N}^*$; 当 $k \geq 5$ 时, $m(5-k) \leq 0$, 与 $k^2+1>0$ 矛盾, 舍去.
 综上, $k=3, m=5$ 或 $k=4, m=17$.

2. 突破点 ▶ 数列求和的其他方法、数列新定义、数列综合

(1)【解】当 $n=3$ 时, 取自集合 $\{1, 2, 3\}$ 的交错数列有 $1; 3; 1, 2; 1, 2, 3$ 四种情况, 因此 $A_3=4$.

当 $n=4$ 时, 取自集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的交错数列有 $1; 3; 1, 2; 1, 4; 3, 4; 1, 2, 3; 1, 2, 3, 4$ 七种情况, 因此 $A_4=7$.

(2)【证明】设数列 a_1, a_2, \dots, a_m 是取自集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的交错数列,

因为 $a_1 \neq 1$ 且是奇数, 所以 $a_1 \geq 3$,

构造数列 $\{b_i\}$, $b_i = a_i - 2, i=1, 2, \dots, m$, 则 $b_i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$,

此时数列 b_1, b_2, \dots, b_m 的个数是取自集合 $\{1, 2, \dots, n-2\}$ 的所有交错数列的个数 A_{n-2} ,

因为数列 a_1, a_2, \dots, a_m 是递增数列, 所以对于每一个 $b_i \in \{1, 2, \dots, n-2\}$ 都有且仅有一个 $a_i \in \{3, 4, \dots, n\}$ 与之对应, 所以取自集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ ($n \geq 3$) 的首项不为 1 的交错数列的个数为 A_{n-2} .

(3)【解】设数列 a_1, a_2, \dots, a_m 是取自集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的交错数列,

由(2)得, 当 $a_1 \geq 3$ 时, 所有交错数列的个数为 A_{n-2} ,

当 $a_1 = 1$ 时, 若 $n=1$, 则仅有一个交错数列; 若 $n \geq 2$, 构造数列 $\{b_{j-1}\}$, $b_{j-1} = a_j - 1$ ($2 \leq j \leq m$), 则 $b_{j-1} \in \{1, 2, \dots, n-1\}$,

此时数列 b_1, b_2, \dots, b_{m-1} 的个数是取自集合 $\{1, 2, \dots, n-1\}$ 的所有交错数列的个数 A_{n-1} ,

因为数列 a_1, a_2, \dots, a_m 是递增数列, 所以数列 b_1, b_2, \dots, b_{m-1} 与数列 a_2, a_3, \dots, a_m 之间一一对应.

又因为 $a_1 = 1$, 所以数列 a_1, a_2, \dots, a_{m-1} ($m \geq 2$) 的所有交错数列的个数为 A_{n-1} ,

综上所述, $A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + 1$ ($n \geq 3$).

当 $n \geq 3$ 时, 由
$$\begin{cases} A_3 = A_2 + A_1 + 1, \\ A_4 = A_3 + A_2 + 1, \\ \dots \\ A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + 1, \end{cases} \quad \text{累加得}$$

$S_n - A_2 - A_1 = S_{n-1} - A_1 + S_{n-2} + n - 2$,

因为 $A_1 = 1, A_2 = 2$, 所以 $S_{n-2} = A_n - n$ ($n \geq 3$),

由 $A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + 1$ 及(1)得 $A_5 = 12, \dots, A_{13} = 609, A_{14} = 986, A_{15} = 1\ 596, A_{16} = 2\ 583$,

显然 $\{S_n\}$ 是递增数列,

因为 $S_{13} = A_{15} - 15 = 1\ 581, S_{14} = A_{16} - 16 = 2\ 567$,

所以 $S_{13} < 2\ 025 < S_{14}$,

所以使得 $S_n > 2\ 025$ 成立的 n 的最小值为



14.

全章综合训练

刷

真题

刷小题

1. D 命题点 ▶ 新定义数列的单调性在实际问题中的应用

【解析】由已知, $b_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$, $b_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}$, $\frac{1}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2}}$, 故 $b_1 > b_2$. 同理得 $b_2 < b_3$, $b_1 > b_3$, 又 $\frac{1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \frac{1}{\alpha_4}}}$, 故 $b_2 < b_4$. 则 $b_1 > b_3 > b_5 > b_7 > \cdots$, $b_2 < b_4 < b_6 < \cdots$, 且 $b_n < b_{n+1}$ (n 为正偶数).

由上可知, $b_1 > b_5$, 故 A 错误; $b_3 > b_9 > b_8$, 故 B 错误; $b_6 > b_2$, 故 C 错误; $b_4 < b_6 < b_7$, 故 D 正确. 故选 D.

2. B 命题点 ▶ 等差数列的前 n 项和

【解析】记 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $S_3 = 6$, $S_5 = -5$, 所以

$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 6, \\ 5a_1 + 10d = -5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 5, \\ d = -3 \end{cases}$ (另解: 因

为 $S_3 = \frac{3 \times (a_1 + a_3)}{2} = \frac{3 \times 2a_2}{2} = 3a_2 = 6$, 所以

$a_2 = 2$; 因为 $S_5 = \frac{5 \times (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5 \times 2a_3}{2} =$

$5a_3 = -5$, 所以 $a_3 = -1$, 所以 $d = a_3 - a_2 =$

-3 , 所以 $a_1 = a_2 - d = 5$),

所以 $S_6 = 6a_1 + 15d = 6 \times 5 + 15 \times (-3) = -15$

(另解: $a_6 = a_2 + 4d = 2 - 12 = -10$, $S_6 = a_6 + S_5 = -10 - 5 = -15$). 故选 B.

一题多解

因为 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$

的前 n 项和, 所以设 $S_n = An^2 + Bn$,

由 $S_3 = 6$, $S_5 = -5$, 得 $\begin{cases} 9A + 3B = 6, \\ 25A + 5B = -5, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} A = -\frac{3}{2}, \\ B = \frac{13}{2}, \end{cases}$

所以 $S_n = -\frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{2}n$, 所以 $S_6 = -\frac{3}{2} \times$

$36 + \frac{13}{2} \times 6 = -15$. 故选 B.

3. C 命题点 ▶ 等差数列前 n 项和及基本量的计算, 利用 a_n 与 S_n 的关系求通项公式

【解析】由 $S_n = -n^2 + 8n$,

可得当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = -1 + 8 = 7$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (-n^2 + 8n) - [- (n-1)^2 + 8(n-1)]$,

整理可得 $a_n = -2n + 9$,

经检验, 当 $n = 1$ 时, $a_1 = 7$ 符合上式.

综上, $a_n = -2n + 9$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 可知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.



当 $n \leq 4$ 时, $a_n > 0$;

当 $n \geq 5$ 时, $a_n < 0$,

所以 $\{|a_n|\}$ 的前 12 项和

$$T_{12} = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{12}) = \frac{4 \times (7+1)}{2} - \frac{8 \times (-1-15)}{2} = 16 + 64 = 80.$$

故选 C.

4. B 命题点 ▶ 等差数列前 n 项和公式

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because S_5 = 5a_1 + 10d, S_{10} = 10a_1 + 45d, S_5 = S_{10},$$

$$\therefore 5a_1 + 10d = 10a_1 + 45d, \text{ 即 } a_1 = -7d.$$

$$\because a_5 = a_1 + 4d = 1, \therefore d = -\frac{1}{3}, \therefore a_1 = -7d =$$

$$\frac{7}{3}. \text{ 故选 B.}$$

快解

$$\because S_5 = S_{10}, \therefore a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 0, \therefore 5a_8 = 0, \therefore a_8 = 0.$$

$$\because a_5 = 1, a_8 = 0, \therefore \text{公差 } d = -\frac{1}{3}, \text{ 则 } a_1 = a_5 - 4d = \frac{7}{3}, \text{ 故选 B.}$$

5. D 命题点 ▶ 等差数列的性质、斜率与倾斜角在数学文化中的应用

【解析】如图, 连接 OA , 延长 AA_1 与 x 轴

交于点 A_2 , 则 $OA_2 = 4OD_1$. 因为 k_1, k_2, k_3

成公差为 0.1 的等差数列, 所以 $k_1 = k_3 -$

$$0.2, k_2 = k_3 - 0.1, \text{ 所以 } CC_1 = DC_1(k_3 - 0.2),$$

$$BB_1 = CB_1(k_3 - 0.1), AA_1 = k_3 BA_1, \text{ 即 } CC_1 =$$

$$OD_1(k_3 - 0.2), BB_1 = OD_1(k_3 - 0.1),$$

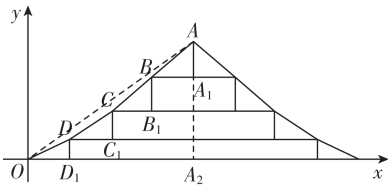
$$AA_1 = k_3 OD_1.$$

$$\text{又 } \frac{DD_1}{OD_1} = 0.5, \text{ 所以 } DD_1 = 0.5OD_1, \text{ 所以}$$

$$AA_2 = 0.5OD_1 + OD_1(k_3 - 0.2) + OD_1(k_3 - 0.1) + k_3 OD_1 = OD_1(3k_3 + 0.2).$$

$$\text{所以 } \tan \angle AOA_2 = \frac{AA_2}{OA_2} = \frac{OD_1(3k_3 + 0.2)}{4OD_1} =$$

$$0.725, \text{ 解得 } k_3 = 0.9, \text{ 故选 D.}$$



6. 95 命题点 ▶ 等差数列基本量的运算

【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

$$\because a_3 + a_4 = 7, 3a_2 + a_5 = 5,$$

$$\therefore \begin{cases} 2a_1 + 5d = 7, \\ 4a_1 + 7d = 5, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = -4, \\ d = 3. \end{cases} \therefore a_n =$$

$$3n - 7,$$

$$\therefore S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10 \times (-4 + 23)}{2} = 95.$$

7. AD 命题点 ▶ 等比数列的前 n 项和, 等比数列的通项公式

【解析】根据题意, 由 $\begin{cases} S_3 = 7, \\ a_3 = 1, \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7 \text{ ①,} \\ a_1 q^2 = 1 \text{ ②,} \end{cases} \text{ ①} \div \text{② 得 } \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 =$$



7, 化简得 $6q^2 - q - 1 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 $q = -\frac{1}{3}$ (舍去), 故 A 正确; 由 A 可知 $q = \frac{1}{2}$, 则 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 4$, 因此 $a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 则 $a_5 = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ (另解: $a_5 = a_3 \cdot q^2 = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$), 故 B 错误; $S_5 = \frac{4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{4}$, 故 C 错误; $a_n + S_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + 8 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 8$, 故 D 正确. 故选 AD.

一题多解

对于 A, 由 $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{a_3}{q^2} + \frac{a_3}{q} + a_3 = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 = 7$, 整理得 $6q^2 - q - 1 = 0$, 解得 $q = \frac{1}{2}$ 或 $q = -\frac{1}{3}$ (舍去), 故 A 正确; 对于 C, 因为 $S_3 = 7$, $a_4 = a_3 q = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $a_5 = a_4 q = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, 所以 $S_5 = S_3 + a_4 + a_5 = 7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{31}{4}$, 故 C 错误.

8. C 命题点 等比数列的求和

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q (提示: 本题中等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq \pm 1$).

因为 $S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 21S_2 = 21 \cdot \frac{a_1(1-q^2)}{1-q}$, 整理得 $1-q^6 = 21(1-q^2)$, 又 $1-q^6 = (1-q^2)(1+q^2+q^4)$, 所以 $1+q^2+q^4 = 21$, 即 $(q^2-4)(q^2+5) = 0$, 解得 $q^2 = 4$.

又 $S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q}$, $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = -5$, 所以 $\frac{S_8}{S_4} = \frac{1-q^8}{1-q^4} = 1+q^4 = 17$, 故 $S_8 = -85$, 故选 C.

9. 2 命题点 等比数列的前 n 项和公式及其性质

【解析】设该等比数列为 $\{a_n\}$ 且公比为 q ($q > 0$) (关键: 由等比数列的各项均为正数, 可知公比 $q > 0$). 若 $q = 1$, 则 $S_8 = 2S_4 = 8 \neq 68$, 所以 $q \neq 1$ (提示: 使用等比数列前 n 项和公式时, 先考虑公比是否为 1).

根据题意可得
$$\begin{cases} S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 4, \\ S_8 = \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = 68, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$q = 2$ (负值舍去).

**快解**

由解析可知,该数列的公比 q 是不为 1 的正数,由已知可得 $S_8 = S_4 + q^4 S_4 = 4 + 4q^4 = 68$ (提示:等比数列 $\{a_n\}$ 中, $S_{m+n} = S_m + q^m S_n = S_n + q^n S_m, m, n \in \mathbf{N}^*$), 解得 $q = 2$ (负值舍去).

10. -2 命题点 ▶ 等比数列的通项公式

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q \neq 0$), 则由题意, 得

$$\begin{cases} a_1 q \cdot a_1 q^3 \cdot a_1 q^4 = a_1 q^2 \cdot a_1 q^5, \\ a_1 q^8 \cdot a_1 q^9 = -8, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a_1 q = 1, \\ q^5 = -2, \end{cases} \text{ 所以 } a_7 = a_1 q^6 = a_1 q \cdot q^5 = -2.$$

11. B 命题点 ▶ 等差数列、三角函数的周期性、集合中元素的性质

【解析】因为等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{2\pi}{3}$, 即 $a_{n+3k} = a_n + 3k \times \frac{2\pi}{3} = a_n + 2k\pi, k \in \mathbf{N}^*$, $\cos a_{n+3k} = \cos a_n$, 这样集合 $S = \{\cos a_n | n \in \mathbf{N}^*\} = \{\cos a_n | n = 1, 2, 3\} = \{a, b\}$, 因此 a_1, a_2, a_3 中有两个数的余弦值相等. 满足 $y = \cos x = \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的

y 只有 $y = \frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3}$ 或

$y = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3}$, 两种情况对应

第三个数的余弦值分别为 $\cos \pi = -1$

或 $\cos 2\pi = 1$, 因此 $ab = \frac{1}{2} \times (-1)$ 或 $ab =$

$\left(-\frac{1}{2}\right) \times 1$, 均有 $ab = -\frac{1}{2}$. 故选 B.

12. ①③④ 命题点 ▶ 数列与集合的综合问题

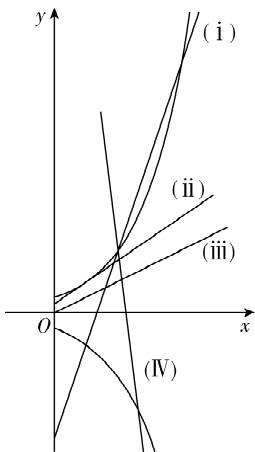
【解析】对于①, 若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等差数列,

$$\text{设 } a_n = a_1 + (n-1)d_1 = d_1 n + (a_1 - d_1), n \in \mathbf{N}^*,$$

$$b_n = b_1 + (n-1)d_2 = d_2 n + (b_1 - d_2), n \in \mathbf{N}^*,$$

故可将 a_n 与 b_n 看作是关于 n 的一次函数,

其图象最多只有一个交点, 且交点横坐标不是整数时, 不存在 k 满足 $a_k = b_k$, 故 M 中最多只有 1 个元素, ①正确.





对于②,若 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为等比数列,设 $a_n=2^n, b_n=(-2)^n$,则当 n 为偶数时, $a_n=b_n$,所以 M 中有无数个元素,②错误.

对于③,若 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列,则设 $a_n=a_1+(n-1)d, b_n=b_1q^{n-1}$.当 $q>0(q\neq 1)$ 时,由一次函数和指数函数的性质可知, M 中最多有2个元素.当 $q<0$ 且 $q\neq -1$ 时,点 (n, b_n) 分奇偶在函数 $y=b_1(-q)^{n-1}$ 和 $y=-b_1\cdot(-q)^{n-1}$ 的图象上,如图.由图可知, M 中可能有0,1,2,3个元素,当 $a_n=3n-4, b_n=-(-2)^{n-1}$ 时, $a_1=b_1=-1, a_2=b_2=2, a_4=b_4=8$,满足 M 中有3个元素,③正确.

对于④,若 $\{a_n\}$ 为递增数列,则 a_k 随 k 的增大而增大,在平面直角坐标系中,散点 (k, a_k) 由左下到右上分布;若 $\{b_n\}$ 为递减数列,则 b_k 随 k 的增大而减小,在平面直角坐标系中,散点 (k, b_k) 由左上到右下分布.

故点 (k, a_k) 与点 (k, b_k) 最多只能重合一次,即 M 中最多只有1个元素,④正确.

综上,正确结论的序号是①③④.

刷大题

1. 命题点 ▶ 等差数列与等比数列的通项公式

(1)【证明】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,则由 $a_2-b_2=a_3-b_3$,得 $a_3-a_2=b_3-b_2$,即 $d=b_1q^2-b_1q=2b_1$ ①.

又由 $a_2-b_2=b_4-a_4$,得 $a_4+a_2=b_4+b_2$,即 $2a_1+4d=b_1q^3+b_1q=10b_1$ ②.

将①代入②,得 $2a_1+8b_1=10b_1$,即 $a_1=b_1$.

(2)【解】由(1)可得 $a_m=a_1+(m-1)d=b_1+(m-1)\cdot 2b_1=2mb_1-b_1$.

又 $b_k=b_1q^{k-1}=b_1\cdot 2^{k-1}$,

则由 $b_k=a_m+a_1$,得 $b_1\cdot 2^{k-1}=2mb_1-b_1+a_1=2mb_1-b_1+b_1=2mb_1$,即 $2^{k-1}=2m$,所以 $2^{k-2}=m$.

由 $1\leq 2^{k-2}\leq 500$,得 $0\leq k-2<9$,即 $2\leq k<11$.

因为 $k\in\mathbf{N}^*$,所以 $k=2,3,4,5,6,7,8,9,10$,

所以集合 $\{k|b_k=a_m+a_1, 1\leq m\leq 500\}$ 中元素的个数为9.

2. 命题点 ▶ 等差数列的通项公式、前 n 项和及判断

【证明】若选条件①②,则证明③:

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,

\therefore 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列, $\therefore 2\sqrt{S_2}=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_3}$, $\therefore 2\sqrt{2a_1+d}=\sqrt{a_1}+\sqrt{3a_1+3d}$,两边平方整理得 $4a_1+d=2\sqrt{3a_1(a_1+d)}$,



$$\therefore (4a_1 + d)^2 = [2\sqrt{3a_1(a_1 + d)}]^2,$$

$$\therefore (2a_1 - d)^2 = 0, \therefore d = 2a_1,$$

$$\therefore a_2 = a_1 + d = 3a_1.$$

若选条件①③, 则证明②:

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $a_2 = a_1 + d = 3a_1$,

$$\therefore d = 2a_1. \therefore S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n^2a_1,$$

$$\therefore \sqrt{S_n} = n\sqrt{a_1},$$

$$\therefore \sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n} = (n+1)\sqrt{a_1} - n\sqrt{a_1} = \sqrt{a_1} \text{ (常数)},$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } \sqrt{S_1} = \sqrt{a_1},$$

\therefore 数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是以 $\sqrt{a_1}$ 为首项, $\sqrt{a_1}$ 为公差的等差数列.

若选条件②③, 则证明①:

$$\therefore \text{数列 } \{\sqrt{S_n}\} \text{ 是等差数列, } a_2 = 3a_1,$$

$$\therefore \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} = \sqrt{4a_1} - \sqrt{a_1} = \sqrt{a_1},$$

$$\therefore \sqrt{S_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)\sqrt{a_1} = n\sqrt{a_1},$$

$$\therefore S_n = n^2a_1.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n^2a_1 - (n-1)^2a_1 = (2n-1)a_1,$$

$$\text{对于 } n=1 \text{ 也成立, } \therefore a_{n+1} - a_n = (2n+1)a_1 - (2n-1)a_1 = 2a_1 \text{ (常数)},$$

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

3. 命题点 ▶ 根据递推公式求通项, 错位相减法求和

【解】(1) 因为 $4S_n = 3a_n + 4$, 所以 $4S_{n+1} = 3a_{n+1} + 4$, 两式相减得 $4a_{n+1} = 3a_{n+1} - 3a_n$, 即 $a_{n+1} = -3a_n$.

又因为 $4S_1 = 3a_1 + 4$, 所以 $a_1 = 4$, 故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 4, 公比为 -3 的等比数列.

$$\text{所以 } a_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 及题意得, } b_n = (-1)^{n-1}na_n = 4n \cdot 3^{n-1}, \text{ 所以 } T_n = 4(1 \cdot 3^0 + 2 \cdot 3^1 + 3 \cdot 3^2 + \cdots + n \cdot 3^{n-1}),$$

$$3T_n = 4(1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + \cdots + n \cdot 3^n), \text{ 两式相减可得 } -2T_n = 4(1 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} - n \cdot 3^n) = 4\left(\frac{1-3^n}{1-3} - n \cdot 3^n\right) =$$

$$(2-4n)3^n - 2,$$

$$\text{所以 } T_n = (2n-1)3^n + 1.$$

4. 命题点 ▶ 等差数列基本量的运算及通项公式、前 n 项和公式

【解】(1) 由 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, 得 $3(a_1 + d) = 3a_1 + a_1 + 2d$,

$$\text{整理得 } a_1 = d, \text{ 所以 } a_n = nd, b_n = \frac{n+1}{d}.$$

$$\text{由 } S_3 + T_3 = 21, \text{ 得 } d + 2d + 3d + \frac{2}{d} + \frac{3}{d} + \frac{4}{d} =$$

$$21, \text{ 整理得 } 2d^2 - 7d + 3 = 0, \text{ 解得 } d = 3 \text{ 或 } d = \frac{1}{2} \text{ (舍)}, \text{ 故 } a_n = 3n.$$

$$(2) \text{ 若 } \{b_n\} \text{ 是等差数列, 则 } b_1 + b_3 = 2b_2,$$

$$\text{即 } \frac{2}{a_1} + \frac{12}{a_3} = 2 \times \frac{6}{a_2},$$

$$\text{所以 } a_2a_3 + 6a_1a_2 = 6a_1a_3,$$



所以 $(a_1 + d)(a_1 + 2d) + 6a_1(a_1 + d) = 6a_1(a_1 + 2d)$, 整理得 $a_1^2 - 3a_1d + 2d^2 = 0$, 解得 $a_1 = d$ 或 $a_1 = 2d$.

①若 $a_1 = d$, 则 $a_n = nd, b_n = \frac{n+1}{d}$,

由 $S_{99} - T_{99} = 99$, 得 $50d - \frac{51}{d} = 1$, 即 $50d^2 - d - 51 = 0$, 解得 $d = -1$ (舍) 或 $d = \frac{51}{50}$;

②若 $a_1 = 2d$, 则 $a_n = (n+1)d, b_n = \frac{n}{d}$,

由 $S_{99} - T_{99} = 99$, 得 $51d - \frac{50}{d} = 1$, 即 $51d^2 - d - 50 = 0$, 解得 $d = 1$ (舍) 或 $d = -\frac{50}{51}$ (舍).

综上所述, $d = \frac{51}{50}$.

5. 命题点 ▶ 等差数列的通项公式及前 n 项和公式、分组求和

(1) 【解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $b_n = \begin{cases} a_n - 6, & n \text{ 为奇数}, \\ 2a_n, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 所以 $b_1 = a_1 - 6$,

$b_2 = 2a_2 = 2a_1 + 2d, b_3 = a_3 - 6 = a_1 + 2d - 6$.

因为 $S_4 = 32, T_3 = 16$,

所以 $\begin{cases} 4a_1 + 6d = 32, \\ (a_1 - 6) + (2a_1 + 2d) + (a_1 + 2d - 6) = 16, \end{cases}$

整理得 $\begin{cases} 2a_1 + 3d = 16, \\ a_1 + d = 7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 5, \\ d = 2, \end{cases}$

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n + 3$.

(2) 【证明】由 (1) 知 $a_n = 2n + 3$, 所以 $S_n = \frac{n[5 + (2n + 3)]}{2} = n^2 + 4n$,

$b_n = \begin{cases} 2n - 3, & n \text{ 为奇数}, \\ 4n + 6, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

当 n 为奇数时, $T_n = -1 + 14 + 3 + 22 + 7 + 30 + \cdots + (2n - 7) + (4n + 2) + 2n - 3$

$= [-1 + 3 + \cdots + (2n - 7) + (2n - 3)] + [14 + 22 + \cdots + (4n + 2)]$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{n+1}{2}(-1 + 2n - 3)}{2} + \frac{\frac{n-1}{2}(14 + 4n + 2)}{2} \\ &= \frac{3n^2 + 5n - 10}{2}. \end{aligned}$$

当 $n > 5$ 时, $T_n - S_n = \frac{3n^2 + 5n - 10}{2} - (n^2 + 4n)$

$$= \frac{n^2 - 3n - 10}{2} = \frac{(n-5)(n+2)}{2} > 0,$$

所以 $T_n > S_n$.

当 n 为偶数时, $T_n = -1 + 14 + 3 + 22 + 7 + 30 + \cdots + (2n - 5) + (4n + 6)$

$= [-1 + 3 + \cdots + (2n - 5)] + [14 + 22 + \cdots + (4n + 6)]$

$$\begin{aligned} &= \frac{\frac{n}{2}(-1 + 2n - 5)}{2} + \frac{\frac{n}{2}(14 + 4n + 6)}{2} \\ &= \frac{3n^2 + 7n}{2}. \end{aligned}$$



$$\text{当 } n > 5 \text{ 时, } T_n - S_n = \frac{3n^2 + 7n}{2} - (n^2 + 4n) =$$

$$\frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} > 0,$$

所以 $T_n > S_n$.

综上所述, 当 $n > 5$ 时, $T_n > S_n$.

6. 命题点 ▶ 数列通项公式的求解、错位相减法求和

【解】(1) $2S_n = na_n$ ①,

当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$ ②,

由①-②得, $2a_n = na_n - (n-1)a_{n-1}$,

即 $(n-1)a_{n-1} = (n-2)a_n$.

当 $n=2$ 时, $a_1 = 0$;

当 $n \geq 3$ 时, $\frac{a_{n-1}}{n-2} = \frac{a_n}{n-1}$.

\therefore 当 $n \geq 2$ 时, $\left\{\frac{a_n}{n-1}\right\}$ 为常数列, $\therefore \frac{a_n}{n-1} =$

$$\frac{a_2}{1} = 1, \therefore a_n = n-1 (n \geq 2).$$

由 $2S_n = na_n$, 当 $n=1$ 时, $2a_1 = a_1, a_1 = 0 = 1-1$.

$\therefore a_n = n-1 (n \in \mathbf{N}^*)$.

(2) 由(1)知, $\frac{a_{n+1}}{2^n} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$$T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{③},$$

$$\frac{1}{2}T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \quad \text{④},$$

$$\text{由③-④得 } \frac{1}{2}T_n = \frac{\frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} -$$

$$n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$

$$\therefore T_n = 2 - (2+n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

7. 命题点 ▶ 利用定义法证明等差数列、错位相减法的应用

(1) 【证明】已知 $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$,

等式两边同乘 $n(n+1)$, 得 $(n+1)a_{n+1} = na_n + 1$,

即 $(n+1)a_{n+1} - na_n = 1$,

又因为 $a_1 = 3$,

所以数列 $\{na_n\}$ 是首项为 3, 公差为 1 的等差数列.

(2) 【解】由(1)知, $na_n = 3 + (n-1) \times 1 = n+2$.

因为 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_mx^m$,

所以 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ma_mx^{m-1}$,

则 $f'(x) = 3 + 4x + 5x^2 + \cdots + (m+2)x^{m-1}$, ①

所以 $xf'(x) = 3x + 4x^2 + 5x^3 + \cdots + (m+2) \cdot$



$$x^m, ②$$

$$\begin{aligned} ①-②, \text{得} (1-x)f'(x) &= 3 + (x+x^2+\cdots+x^{m-1}) - (m+2)x^m \\ &= 3 + \frac{x(1-x^{m-1})}{1-x} - (m+2)x^m. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } x=-2 \text{ 时, } 3f'(-2) &= 3 + \frac{-2[1-(-2)^{m-1}]}{1-(-2)} - \\ &= (m+2) \cdot (-2)^m, \end{aligned}$$

$$\text{故 } f'(-2) = \frac{7}{9} - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m.$$

一题多解

(2) 由(1)知, $na_n = 3 + (n-1) \times 1 = n+2$.

因为 $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_mx^m$,

所以 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + ma_mx^{m-1}$,

所以 $f'(-2) = a_1 + 2a_2 \cdot (-2) + 3a_3 \cdot (-2)^2 + \cdots + ma_m \cdot (-2)^{m-1} = 3 + 4 \times (-2) + 5 \times (-2)^2 + \cdots + (m+2) \cdot (-2)^{m-1}$.

而 $(m+2) \cdot (-2)^{m-1} = \frac{3(m-1)+7}{9} \cdot (-2)^{m-1} - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m$ (关键: 利用待

定系数法将通项进行裂项), 所以

$$f'(-2) = \frac{3 \times 0 + 7}{9} \times (-2)^0 - \frac{3 \times 1 + 7}{9} \times (-2)^1 +$$

$$\begin{aligned} & \frac{3 \times 1 + 7}{9} \times (-2)^1 - \frac{3 \times 2 + 7}{9} \times (-2)^2 + \cdots + \\ & \frac{3(m-1)+7}{9} \cdot (-2)^{m-1} - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m = \\ & \frac{3 \times 0 + 7}{9} \times (-2)^0 - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m = \frac{7}{9} - \\ & \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m. \end{aligned}$$

8. 命题点 ▶ 等差与等比数列的通项公式, 错位相减法求和, 数列与排列组合的综合应用

(1) 【解】设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ,

则有 $\begin{cases} 2+d=2q+1, \\ 2+2d=2q^2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} d=3, \\ q=2, \end{cases}$ 或

$\begin{cases} d=-1, \\ q=0 \end{cases}$ (舍),

故 $a_n = 3n-1, b_n = 2^n$.

(2) ①【证明】令 $c_n = a_n b_n = (3n-1) \cdot 2^n$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n .

因为 $a_n > 0, b_n > 0$, 所以要证 $\forall t \in T_n$, 均有 $t < a_{n+1} b_{n+1}$, 即证 $S_n < a_{n+1} b_{n+1}$ (提示: 当 $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1$ 时, T_n 中的元素取最大值, 即最大元素为 S_n).

$$S_n = 2 \times 2 + 5 \times 2^2 + 8 \times 2^3 + \cdots + (3n-1) \times 2^n \quad ①,$$

$$2S_n = 2 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + 8 \times 2^4 + \cdots + (3n-4) \times 2^n + (3n-1) \times 2^{n+1} \quad ②,$$

$$\begin{aligned} ①-② \text{得, } -S_n &= 2 \times 2 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + 3 \times \\ & 2^n - (3n-1) \times 2^{n+1} = 4 + 3 \times \frac{4-2^{n+1}}{1-2} - (3n- \end{aligned}$$



$$1) \times 2^{n+1} = -8 + (4-3n) \times 2^{n+1}.$$

$$\text{所以 } S_n = 8 + (3n-4) \times 2^{n+1}.$$

即证 $8 + (3n-4) \times 2^{n+1} < (3n+2) \times 2^{n+1}$, 即证 $6 \times 2^{n+1} > 8$, 即证 $3 \times 2^{n-1} > 1$.

因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $2^{n-1} \geq 1$, 所以 $3 \times 2^{n-1} > 1$ 恒成立.

所以 $S_n < a_{n+1}b_{n+1}$, 故 $\forall t \in T_n$, 均有 $t < a_{n+1}b_{n+1}$.

②【解】当 p_1, p_2, \dots, p_n 中有 0 个 1 时, 此时元素之和为 0;

当 p_1, p_2, \dots, p_n 中有 1 个 1 时, 此时元素之和为 S_n ;

当 p_1, p_2, \dots, p_n 中有 2 个 1 时, 此时元素之和为 $(n-1)S_n = C_{n-1}^1 \cdot S_n$;

当 p_1, p_2, \dots, p_n 中有 3 个 1 时, 此时元素之和为 $\frac{(n-1)(n-2)}{2}S_n = C_{n-1}^2 \cdot S_n$;

.....

当 p_1, p_2, \dots, p_n 中有 $(n-1)$ 个 1 时, 此时元素之和为 $C_{n-1}^{n-2} \cdot S_n$;

当 p_1, p_2, \dots, p_n 中有 n 个 1 时, 此时元素之和为 S_n .

故 T_n 中所有元素之和为 $C_{n-1}^0 \cdot S_n + C_{n-1}^1 \cdot S_n + C_{n-1}^2 \cdot S_n + \dots + C_{n-1}^{n-2} \cdot S_n + C_{n-1}^{n-1} \cdot S_n = (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) \cdot S_n = 2^{n-1} \cdot S_n = 2^{n+2} + (3n-4) \cdot 2^{2n}$.

9. 命题点 ▶ 数列新定义

(1)【解】满足题意的 (i, j) 为 $(1, 2), (1, 6), (5, 6)$.

(2)【证明】因为在公差不为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_p, a_q, a_m, a_n 成等差数列 $\Leftrightarrow p, q, m, n$ 成等差数列,

当 $m > 3$ 时, $a_{15}, a_{16}, \dots, a_{4m+2}$ 可连续 4 项为一组等差数列,

故需证明序号为 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14 的项可分成三组项数为 4 的等差数列, 易知分为 $(1, 4, 7, 10), (3, 6, 9, 12), (5, 8, 11, 14)$ 三组满足题意, 所以当 $m \geq 3$ 时, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列.

(3)【证明】设 a_s, a_t, a_u, a_v 是数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 中不同的 4 项, 数列 a_s, a_t, a_u, a_v 是等差数列等价于数列 s, t, u, v 是等差数列. 因此数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列等价于数列 $1, 2, \dots, 4m+2$ 是 (i, j) -可分数列.

记集合 M 中元素的个数为 $|M|$.

令 $K_m = \{(i, j) \mid \text{数列 } 1, 2, \dots, 4m+2 \text{ 是 } (i, j)\text{-可分数列}\}$, 则 $P_m = \frac{|K_m|}{C_{4m+2}^2}$.

因为 1, 3, 5, 7 和 4, 6, 8, 10 均为等差数列, 所以 $(2, 9) \in K_2$.

由 (2) 知 $(2, 13) \in K_3$.

若 $(2, 4m+1) \in K_m$, 则由 $4m+1, 4m+3, 4m+5, 4m+7$ 和 $4m+4, 4m+6, 4m+8, 4m+10$ 均为等差数列, 可得 $(2, 4m+9) \in K_{m+2}$,

所以当 $m \geq 2$ 时, 均有 $(2, 4m+1) \in K_m$.

因为连续 4 个整数构成等差数列, 所以 $(4i+1, 4m+6) \in K_{m+1}$, $i = 0, 1, \dots, m+1$,



且 $K_m \subseteq K_{m+1}$. 若 $(u, v) \in K_m$, 则 $(u+4, v+4) \in K_{m+1}$, 故由 $(2, 4(m-i+2)+1) \in K_{m-i+2}$ 知 $(4i-2, 4m+5) \in K_{m+1}$, $i=1, 2, \dots, m$. 故 $|K_{m+1}| - |K_m| \geq 2m+2$. 由 (1) 知 $|K_1| = 3$, 可得 $|K_m| \geq m^2 + m + 1$, 因此

$$P_m \geq \frac{m^2 + m + 1}{8m^2 + 6m + 1} > \frac{1}{8}.$$

10. 命题点 ▶ 数列新定义问题

(1) 【解】由题知 $T_1 = (1, 3, 5, 7)$, $T_2 = (2, 4, 6, 8)$, $T_3 = (1, 3, 5, 7)$, 则 $T_1(A): 2, 3, 3, 4, 7, 3, 2, 9$,

则 $T_2 T_1(A): 2, 4, 3, 5, 7, 4, 2, 10$,

故 $\Omega(A) = T_3 T_2 T_1(A): 3, 4, 4, 5, 8, 4, 3, 10$.

(2) 【解】由题知每次变换数列 A 的所有项的和增加 4,

又 $2+6+4+2+8+2+4+4=32$, 故经过了 $\frac{32}{4}=8$ 次变换.

则 a_1 与 a_2, a_3 与 a_4, a_5 与 a_6, a_7 与 a_8 每组的增量和均为 8,

式中 a_3+4 与 a_4+2, a_5+8 与 a_6+2 增量和不满足, 故不存在符合题意的序列.

(3) 【证明】设 $\Omega(A): b_1, b_2, \dots, b_8$.

先证必要性.

由 (2) 知,

$$(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) = (b_3 - a_3) + (b_4 - a_4) = (b_5 - a_5) + (b_6 - a_6) = (b_7 - a_7) + (b_8 - a_8).$$

若 $b_1 = b_2 = \dots = b_8$, 则 $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8$.

再证充分性.

记 $M_1 = (1, 3, 5, 7), M_2 = (1, 3, 6, 8), M_3 = (1, 4, 5, 8), M_4 = (1, 4, 6, 7), M_5 = (2, 4, 6, 8), M_6 = (2, 4, 5, 7), M_7 = (2, 3, 6, 7), M_8 = (2, 3, 5, 8)$,

则 $M_i \in M (i=1, 2, \dots, 8)$.

记 $k = 2a_1 + a_2, m = a_1 + a_3 + a_5 + a_7$.

取 $t_1 = k - a_1, t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = \frac{m}{2}, t_6 = a_1 + a_3, t_7 = a_1 + a_5, t_8 = a_1 + a_7$.

因为数列 A 的各项均为正整数, 且 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 为偶数,

所以 $t_i (i=1, 2, \dots, 8)$ 均为正整数.

给定序列 $\Omega: \underbrace{M_1, \dots, M_1}_{t_1 \uparrow}, \underbrace{M_2, \dots, M_2}_{t_2 \uparrow}, \dots,$

$\underbrace{M_8, \dots, M_8}_{t_8 \uparrow}$, 则

$$b_1 = a_1 + t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = k + \frac{3}{2}m, b_2 = a_2 + t_5 +$$

$$t_6 + t_7 + t_8 = k + \frac{3}{2}m,$$

$$b_3 = a_3 + t_1 + t_2 + t_7 + t_8 = k + \frac{3}{2}m, b_4 = a_4 + t_3 +$$

$$t_4 + t_5 + t_6 = k + \frac{3}{2}m,$$

$$b_5 = a_5 + t_1 + t_3 + t_6 + t_8 = k + \frac{3}{2}m, b_6 = a_6 + t_2 +$$

$$t_4 + t_5 + t_7 = k + \frac{3}{2}m,$$



$$b_7 = a_7 + t_1 + t_4 + t_6 + t_7 = k + \frac{3}{2}m, b_8 = a_8 + t_2 +$$

$$t_3 + t_5 + t_8 = k + \frac{3}{2}m.$$

所以 $\Omega(A)$ 的各项都相等.

综上, 若数列 A 的各项均为正整数, 且 $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 为偶数, 则“存在序列 Ω , 使得 $\Omega(A)$ 的各项都相等”的充要条件为 “ $a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = a_5 + a_6 = a_7 + a_8$ ”.