



第3章 导数及其应用

第1节 导数的运算与几何意义

刷**基础**

1. BCD **考查点** ▶ 基本初等函数的导数公式

【解析】 $\left(\cos \frac{\pi}{7}\right)' = 0$, 故 A 错误;

$(x \ln x)' = \ln x + 1$, 故 B 正确;

$\left(\frac{x+1}{e^x}\right)' = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x}$, 故 C 正确;

$\left(\frac{1}{3}x^3 - x + 1\right)' = x^2 - 1 + 0 = x^2 - 1$, 故 D 正确.

故选 BCD.

2. -1 **考查点** ▶ 基本初等函数的导数公式

【解析】因为 $f(x) = \frac{1}{2}f'(-1)x^2 - 2x + 1$,

所以 $f'(x) = f'(-1)x - 2$, 得到

$f'(-1) = -f'(-1) - 2$, 解得 $f'(-1) = -1$.

3. AC **考查点** ▶ 求过一点的切线方程

【解析】令 $f(x) = x^3 - x$, 则 $f'(x) = 3x^2 - 1$.

设切点坐标为 $(x_0, x_0^3 - x_0)$, 则切线方程

为 $y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$, 将 $(1,$

$0)$ 代入, 整理得 $2x_0^3 - 3x_0^2 + 1 = 2x_0^3 - 2x_0^2 -$

$x_0^2 + 1 = 0$, 即 $(x_0 - 1)^2(2x_0 + 1) = 0$, 解得

$x_0 = 1$ 或 $x_0 = -\frac{1}{2}$.

当 $x_0 = 1$ 时, 切线方程为 $2x - y - 2 = 0$; 当

$x_0 = -\frac{1}{2}$ 时, 切线方程为 $x + 4y - 1 = 0$. 故

选 AC.

4. B **考查点** ▶ 已知直线垂直求参数

【解析】函数 $f(x) = \frac{a}{x} \ln(2x)$, 求导

得 $f'(x) = -\frac{a}{x^2} \ln(2x) + \frac{a}{x^2}$,

曲线 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的切线斜率为

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{a}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} \ln\left(2 \times \frac{1}{2}\right) +$$

$$\frac{a}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 4a,$$

又曲线 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的切线与直线 $y =$

$3x + 5$ 垂直,

所以 $3 \times 4a = -1$, 解得 $a = -\frac{1}{12}$.

故选 B.

5. 5 **考查点** ▶ 结合导数的几何意义求参



【解析】由题知 $f(1) = 1+a$, 且 $f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2}$, 则 $f'(1) = 2-a$,

所以切线方程为 $y - (1+a) = (2-a)(x-1)$, 又该切线过点 $(3,0)$,

所以 $0 - (1+a) = (2-a)(3-1)$, 则 $a=5$.

6. C **考查点** ▶ 公切线问题、简单复合函数的导数

【解析】根据题意, 设直线 $y=kx+b$ 与曲线 $y=e^x-1$ 的切点为 $(x_1, e^{x_1}-1)$,

与曲线 $y=e^{x-2}$ 的切点为 (x_2, e^{x_2-2}) ,

因为 $y=e^x-1$ 的导数为 $y'=e^x$, $y=e^{x-2}$ 的导数为 $y'=e^{x-2}$,

所以两曲线的切线方程分别为 $y-e^{x_1}+1=e^{x_1}(x-x_1)$, $y-e^{x_2-2}=e^{x_2-2}(x-x_2)$,

可得 $\begin{cases} e^{x_1}=e^{x_2-2}, \\ (1-x_1)e^{x_1}-1=(1-x_2)e^{x_2-2}, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x_1=-\ln 2, \\ x_2=2-\ln 2, \end{cases}$

所以切线方程为 $y-e^{-\ln 2}+1=e^{-\ln 2}(x+\ln 2)$, 即 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$,

则 $b=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}$.

故选 C.

7. $2x-2y-1=0$ (或 $2x+2y+1=0$, 两者填一个即可)

考查点 ▶ 公切线问题

【解析】设公切线与抛物线 $x^2=2y$ 相切于点 $M(x_0, \frac{1}{2}x_0^2)$,

因为 $y=\frac{1}{2}x^2$, 所以 $y'=x$,

所以抛物线 $x^2=2y$ 在点 M 处的切线方程为 $y-\frac{1}{2}x_0^2=x_0(x-x_0)$,

即 $x_0x-y-\frac{1}{2}x_0^2=0$,

又公切线与圆 $x^2+y^2-3y+\frac{1}{4}=0$ 相切, 即

与圆 $x^2+(y-\frac{3}{2})^2=2$ 相切,

故 $\frac{\left|-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_0^2\right|}{\sqrt{x_0^2+1}}=\sqrt{2}$,

解得 $x_0=\pm 1$, 所以公切线的方程为 $y=x-\frac{1}{2}$ 或 $y=-x-\frac{1}{2}$, 即 $2x-2y-1=0$ 或 $2x+2y+1=0$.



一题多解

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 + y^2 - 3y + \frac{1}{4} = 0, \\ x^2 = 2y, \end{cases} \text{ 得}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}, \\ x = \pm 1, \end{cases} \text{ 于是抛物线和圆相切, 因为 } x^2 = 2y,$$

所以 $y' = x$, 所以当切点坐标为 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 时, 切线斜率为 1, 切线方程为 $2x - 2y - 1 = 0$; 当切点坐标为 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$ 时, 切线斜率为 -1, 切线方程为 $2x + 2y + 1 = 0$.

8. $-\frac{1}{2}$ 考查点 ▶ 公切线问题、简单复合函数的导数

【解析】 $\because [\ln(2x)]' = \frac{1}{x}, (e^{2x})' = 2e^{2x},$

\therefore 曲线 $y = \ln(2x)$ 在点 $P(x_1, y_1)$ 处的切

线斜率 $k_1 = \frac{1}{x_1}$, 曲线 $y = e^{2x}$ 在点 $Q(x_2,$

$y_2)$ 处的切线斜率 $k_2 = 2e^{2x_2},$

\therefore 曲线 $y = \ln(2x)$ 在点 $P(x_1, y_1)$ 处的切

线方程为 $y = \frac{1}{x_1}(x - x_1) + y_1 = \frac{1}{x_1}x +$

$\ln(2x_1) - 1$, 曲线 $y = e^{2x}$ 在点 $Q(x_2, y_2)$ 处

的切线方程为 $y = 2e^{2x_2}(x - x_2) + y_2 =$

$2e^{2x_2}x + (1 - 2x_2)e^{2x_2}.$

$$\therefore \begin{cases} \frac{1}{x_1} = 2e^{2x_2}, \\ \ln(2x_1) - 1 = (1 - 2x_2)e^{2x_2}, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} \ln(2x_1) = -2x_2, \\ \ln(2x_1) - 1 = (1 - 2x_2)e^{2x_2}, \end{cases}$$

$\therefore 2x_1(2x_2 + 1) = 2x_2 - 1$, 易知 $2x_2 + 1 \neq 0$,

$$\therefore 2x_1 = \frac{2x_2 - 1}{2x_2 + 1},$$

$$\therefore \frac{1}{2x_1 - 1} + x_2 = \frac{1}{\frac{2x_2 - 1}{2x_2 + 1} - 1} + x_2 = \frac{1}{-2} +$$

$$x_2 = -\frac{1}{2}.$$

9. B 考查点 ▶ 反函数性质的应用、切线问题

【解析】由于 $y = e^x, y = \ln x$ 互为反函数, 所以两曲线关于直线 $y = x$ 对称,

由于点 $(-1, -1)$ 在直线 $y = x$ 上, 所以这两条切线也关于直线 $y = x$ 对称,

不妨设其中一条切线的倾斜角为 θ , 则另

一条切线的倾斜角为 $\frac{\pi}{2} - \theta$,

故这两条切线的斜率之积为 $\tan \theta \cdot$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = 1.$$

故选 B.



一题多解

设与曲线 $y = e^x$ 的切点为 $A(x_1, e^{x_1})$, 则曲线 $y = e^x$ 的切线方程为 $y - e^{x_1} = e^{x_1}(x - x_1)$, 则 $1 = x_1 e^{x_1}$,
 设与曲线 $y = \ln x$ 的切点为 $B(x_2, \ln x_2)$, 则曲线 $y = \ln x$ 的切线方程为 $y - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2)$, 则 $x_2 \ln x_2 = 1$,
 于是 $\begin{cases} x_1 e^{x_1} = 1, \\ \ln x_2 \cdot e^{\ln x_2} = 1, \end{cases}$ 由图象可知, $x_1, x_2 > 0$, 设 $h(x) = xe^x$, 则 $h'(x) = (1+x) \cdot e^x > 0$,
 则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $x_1 = \ln x_2$, 于是两条切线的斜率之积为 $e^{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = x_2 \cdot \frac{1}{x_2} = 1$, 故选 B.

10. C 突破点 ▶ 两条切线平行问题

【解析】函数 $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + ax$, 求导

得 $f'(x) = 3x^2 + 3x + a$,

依题意, $f'(x_0 + 1) = f'(x_0)$,

即 $3(x_0 + 1)^2 + 3(x_0 + 1) + a = 3x_0^2 + 3x_0 + a$,

解得 $x_0 = -1$ (另解: 抓住三次函数图象

的对称中心为 $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$, 则

$\frac{x_0 + x_0 + 1}{2} = -\frac{1}{2}$, 可得 $x_0 = -1$),

则两条切线的斜率为 $f'(0) = a$, 对应的

两个切点的坐标分别为 $(-1, \frac{1}{2} - a)$, $(0, 0)$,

故切线方程分别为 $y - (\frac{1}{2} - a) = a(x + 1)$ 和 $y = ax$, 即 $ax - y + \frac{1}{2} = 0$ 和 $ax -$

$y = 0$,

因为切线 $ax - y + \frac{1}{2} = 0$ 恒过定点

$A(0, \frac{1}{2})$, 切线 $ax - y = 0$ 恒过定点

$O(0, 0)$,

所以两平行线之间的距离的最大值为

$|OA| = \frac{1}{2}$.

故选 C.

11. $\{-\frac{6}{e^3}\} \cup [0, 2e)$ 突破点 ▶ 利用导数

研究方程的根、求过一点的切线方程

【解析】 $f'(x) = (x+2)e^x$, 设切点为 $(a, (a+1)e^a)$,

则切线方程为 $y - (a+1)e^a = (a+2)e^a \cdot (x - a)$,

将点 $M(1, t)$ 代入切线方程得, $t - (a+1)e^a = (a+2)(1-a)e^a$, 化简得 $t = (3 - a^2)e^a$.

设 $g(a) = (3-a^2)e^a$, 则 $g'(a) = -2ae^a + (3-a^2)e^a = -(a^2+2a-3)e^a = -(a+3) \cdot (a-1)e^a$.

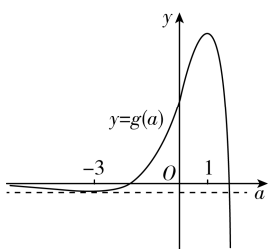
令 $g'(a) > 0$, 解得 $-3 < a < 1$, 令 $g'(a) < 0$, 解得 $a < -3$ 或 $a > 1$,

所以 $g(a)$ 在 $(-\infty, -3)$, $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-3, 1)$ 上单调递增, 且

$$g(-3) = -\frac{6}{e^3}, g(1) = 2e, \text{ 当 } a \rightarrow -\infty$$

时, $g(a) \rightarrow 0^-$, 当 $a \rightarrow +\infty$ 时, $g(a) \rightarrow -\infty$.

作出函数 $y = g(a)$ 的大致图象如图所示.



由图象可知, 要使直线 $y = t$ 与 $g(a) = (3-a^2)e^a$ 的图象有且仅有两个交点,

$$\text{则 } t \in \left\{-\frac{6}{e^3}\right\} \cup [0, 2e).$$

刷提分

1. A 考查点 ▶ 求在曲线上一点处的切线方程(斜率)

【解析】当 $x \in (0, 2]$ 时, $f'(x) = 2x - 3$,

当 $x \in (6, 8]$ 时, $f(x) = 2f(x-2) = 8f(x-6)$, 则 $f'(x) = 8f'(x-6)$,

所以 $f(7) = 8f(1) = -16$, $f'(7) = 8f'(1) = -8$,

则所求切线方程为 $y - (-16) = -8(x - 7)$, 即 $8x + y - 40 = 0$.

故选 A.

2. C 突破点 ▶ 简单复合函数的导数

【解析】设直线 $y = kx$ 与曲线 $y = e^{2x}$ 相切, 切点坐标为 (x_0, y_0) ,

对 $y = e^{2x}$ 求导得 $y' = 2e^{2x}$,

则有 $k = 2e^{2x_0}$,

$e^{2x_0} = y_0 = kx_0 = 2e^{2x_0} \cdot x_0$, 解得 $x_0 = \frac{1}{2}$, 所

以 $k = 2e$, 切点坐标为 $\left(\frac{1}{2}, e\right)$,

将曲线 $y = e^{2x}$ 绕坐标原点顺时针旋转 θ 后第一次与 x 轴相切,

$$\text{则 } \tan \theta = \frac{y_0}{x_0} = 2e.$$

故选 C.

3. C 突破点 ▶ 已知切线(斜率)求参数、利用基本不等式求代数式的最小值

【解析】设切点为 $(x_0, f(x_0))$,

$$\text{因为 } f'(x) = \frac{1}{x+m},$$

所以曲线 $f(x) = \ln(x+m)$ 的切线方程为

$$y - \ln(x_0 + m) = \frac{1}{x_0 + m}(x - x_0),$$



即 $y = \frac{x}{x_0+m} + \ln(x_0+m) - \frac{x_0}{x_0+m}$, 所

$$\text{以} \begin{cases} \frac{1}{x_0+m} = 1, \\ \ln(x_0+m) - \frac{x_0}{x_0+m} = -n, \end{cases}$$

所以 $m+n=1$, 所以 $m^2+n^2 \geq \frac{(m+n)^2}{2} = \frac{1}{2}$

(当且仅当 $m=n=\frac{1}{2}$ 时取等号).

故选 C.

4. A 突破点 ▶ 三角形面积的求解、导数的运算法则

【解析】因为 $f(x) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \cos x + \sin x$,

所以 $f'(x) = -f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin x + \cos x$,

令 $x = \frac{\pi}{3}$, 得 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}$,

即 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$,

解得 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 - \sqrt{3}$,

故 $f(x) = (2 - \sqrt{3}) \cos x + \sin x$,

则 $f(0) = 2 - \sqrt{3}$, 故切点坐标为 $(0, 2 - \sqrt{3})$,

而 $f'(x) = -(2 - \sqrt{3}) \sin x + \cos x$, 则 $f'(0) = 1$.

设曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y - (2 - \sqrt{3}) = x$, 即 $y = x + 2 - \sqrt{3}$.

因为切点坐标为 $(0, 2 - \sqrt{3})$, 所以切线与 y 轴的交点的坐标为 $(0, 2 - \sqrt{3})$,

令 $y = 0$, 得到 $x = \sqrt{3} - 2$, 所以切线与 x 轴的交点的坐标为 $(\sqrt{3} - 2, 0)$.

设所求三角形面积为 S , 故 $S = \frac{1}{2} \times |2 - \sqrt{3}| \times |\sqrt{3} - 2| = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2}$, 故 A 正确.

故选 A.

5. C 突破点 ▶ 公切线问题

【解析】设直线与曲线 $f(x) = e^x - 2m$ 相切于点 $(x_1, e^{x_1} - 2m)$,

由 $f'(x) = e^x$, 得切线斜率为 e^{x_1} ,

切线方程为 $y - e^{x_1} + 2m = e^{x_1}(x - x_1)$, 即 $y = e^{x_1}x + e^{x_1} - e^{x_1}x_1 - 2m$.

因为 $g(m) = 0$, 由 $g'(x) = 2x - m$, 得 $g'(m) = m$,

所以过点 $(m, 0)$ 与曲线 $g(x) = x^2 - mx$ 相切的直线方程为 $y = mx - m^2$.

则 $\begin{cases} e^{x_1} = m, \\ e^{x_1} - e^{x_1}x_1 - 2m = -m^2, \end{cases}$ 解得 $m = x_1 + 1$,

所以 $e^{x_1} = x_1 + 1$.

设 $n(x) = e^x - x - 1$, 则 $n'(x) = e^x - 1$,



当 $x > 0$ 时, $n'(x) > 0$, $n(x)$ 单调递增, 当 $x < 0$ 时, $n'(x) < 0$, $n(x)$ 单调递减, 所以 $n(x) \geq n(0) = 0$, 故 $e^x \geq x + 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号,

故由 $e^{x_1} = x_1 + 1$ 得 $x_1 = 0$, 所以 $m = 1$.

故选 C.

6. D 突破点 ▶ 求函数的极值、根据函数图象的交点的个数求参数范围

【解析】 设切点 $(t, t^3 - t)$, 由 $f(x) = x^3 - x$, 求导得 $f'(x) = 3x^2 - 1$,

则切线方程为 $y - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(x - t)$, 由切线过点 (a, b) ,

得 $b - (t^3 - t) = (3t^2 - 1)(a - t)$, 整理得 $b = -2t^3 + 3at^2 - a$.

令函数 $g(t) = -2t^3 + 3at^2 - a$, 求导得 $g'(t) = -6t^2 + 6at$, 由题知 $a > 0$,

当 $t < 0$ 或 $t > a$ 时, $g'(t) < 0$, 当 $0 < t < a$ 时, $g'(t) > 0$,

因此函数 $g(t)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(a, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(0, a)$ 上单调递增,

故函数 $g(t)$ 在 $t = 0$ 处取得极小值, 极小值 $g(0) = -a$, 在 $t = a$ 处取得极大值, 极大值 $g(a) = a^3 - a$.

当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $g(t) \rightarrow +\infty$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $g(t) \rightarrow -\infty$.

由过点 (a, b) 可以作曲线 $f(x) = x^3 - x$ 的三条切线, 得 $b = -2t^3 + 3at^2 - a$ 有三个不相等的实根,

即直线 $y = b$ 与曲线 $g(t)$ 有三个交点, 所以 $-a < b < a^3 - a$.

故选 D.

7. A 突破点 ▶ 利用导数研究不等式恒成立问题

【解析】 不等式 $bx + 1 \leq e^x - ax^2$ 可化为 $ax^2 + bx + 1 \leq e^x$,

令 $f(x) = ax^2 + bx + 1$, $g(x) = e^x$,

当 $a = 0$ 时, $f(x) = bx + 1$, 此时, 直线 $f(x)$ 恒过点 $(0, 1)$,

故直线 $f(x) = bx + 1$ 为曲线 $g(x) = e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线, $b = g'(0) = 1$, 此时 $a - b = -1$.

当 $a \neq 0$ 时, 曲线 $f(x)$ 亦恒过点 $(0, 1)$, 为使 $ax^2 + bx + 1 \leq e^x$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

需曲线 $f(x) = ax^2 + bx + 1$ 开口向下, 且在点 $(0, 1)$ 处与曲线 $g(x) = e^x$ 有公切线,

故 $\begin{cases} a < 0, \\ f'(0) = b = 1, \end{cases}$ 此时 $a - b < -1$.

综上, $a - b$ 的取值范围是 $(-\infty, -1]$, 所以 $a - b$ 的可能取值为 -2 . 故选 A.

8. B 考查点 ▶ 零点存在定理的应用、求过一点的切线斜率

【解析】 设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则 $y_0 = \frac{\ln x_0}{x_0}$,

又 $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 所以切线斜率为 $\frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}$,

又切线过点 $A(-5, 0)$, 所以 $\frac{\frac{\ln x_0}{x_0} - 0}{x_0 - (-5)} =$

$\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}$, 整理得 $2x_0 \ln x_0 + 5 \ln x_0 - x_0 - 5 = 0$.

令 $f(x) = 2x \ln x + 5 \ln x - x - 5$, 则 $f'(x) = 2 \ln x + \frac{5}{x} + 1$,

令 $g(x) = 2 \ln x + \frac{5}{x} + 1$, 则 $g'(x) = \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} = \frac{2x-5}{x^2} (x>0)$,

易知当 $x \in \left(0, \frac{5}{2}\right)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) > 0$,

则 $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ 上单调递减, 在区间 $\left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g\left(\frac{5}{2}\right) = 2 \ln \frac{5}{2} + 3 > 0$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(1) = -6 < 0$, $f(e) = 2e + 5 - e - 5 = e > 0$, 所以存在唯一 $x_0 \in (1, e)$, 使 $f(x_0) = 0$, 所以切线只有一条.

故选 B.

9. B 突破点 ▶ 两条切线重合 (公切线) 问题

【解析】当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 + x + 2a$, $f'(x) = 2x + 1$,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x}$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}$.

设 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ 为函数 $f(x)$ 图象上的两点, 且 $x_1 < x_2$,

当 $x_1 < x_2 < 0$, 或 $0 < x_1 < x_2$ 时, $f'(x_1) \neq f'(x_2)$, 故 $x_1 < 0 < x_2$.

$x_1 < 0$, 曲线 $f(x)$ 在点 $A(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程为 $y - (x_1^2 + x_1 + 2a) = (2x_1 + 1)(x - x_1)$;

$x_2 > 0$, 曲线 $f(x)$ 在点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的切线方程为 $y + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_2^2}(x - x_2)$.

两直线重合的充要条件是 $\frac{1}{x_2^2} = 2x_1 + 1$ ①,

$-\frac{2}{x_2} = -x_1^2 + 2a$ ②,

由①及 $x_1 < 0 < x_2$, 得 $0 < \frac{1}{x_2} < 1$,

由①②, 令 $t = \frac{1}{x_2}$, 则 $0 < t < 1$,

且 $2a = \frac{1}{4}(t^4 - 2t^2 - 8t + 1)$, 记 $y = \frac{1}{4}(t^4 - 2t^2 - 8t + 1)$,

则 $y' = t^3 - t - 2 = t(t+1)(t-1) - 2$, 易知 $y' < 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立,

则函数 $y = \frac{1}{4}(t^4 - 2t^2 - 8t + 1)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,



$$\therefore -2 < 2a < \frac{1}{4}, \therefore -1 < a < \frac{1}{8}.$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left(-1, \frac{1}{8}\right).$$

故选 B.

一题多解

当 $x < 0$ 时, $f(x) = x^2 + x + 2a$, $f'(x) = 2x + 1$,

当 $x > 0$ 时, $f(x) = -\frac{1}{x}$, $f'(x) = \frac{1}{x^2}$.

设 $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ 为函数 $f(x)$ 图象上的两点, 且 $x_1 < x_2$,

当 $x_1 < x_2 < 0$, 或 $0 < x_1 < x_2$ 时, $f'(x_1) \neq f'(x_2)$, 故 $x_1 < 0 < x_2$.

$x_2 > 0$, 曲线 $f(x)$ 在点 $B(x_2, f(x_2))$ 处的切

线方程为 $y + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_2^2}(x - x_2)$, 即 $y = \frac{1}{x_2^2}x - \frac{2}{x_2}$,

$$\frac{2}{x_2}, \text{ 则 } \begin{cases} y = \frac{1}{x_2^2}x - \frac{2}{x_2}, \\ y = x^2 + x + 2a, \end{cases}$$

则 $x^2 + \left(1 - \frac{1}{x_2^2}\right)x + 2a + \frac{2}{x_2} = 0$, $x_2 > 0$, 方程

只有一根且根为负数, 于是 $1 - \frac{1}{x_2^2} > 0$, 则

$$x_2 > 1, \text{ 且 } \Delta = \left(1 - \frac{1}{x_2^2}\right)^2 - 4\left(2a + \frac{2}{x_2}\right) = 0,$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{x_2} (0 < t < 1), \text{ 则 } 2a = \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{4} - 2t,$$

$$\text{设 } h(t) = \frac{t^4 - 2t^2 + 1}{4} - 2t (0 < t < 1), \text{ 则}$$

$h'(t) = t^3 - t - 2 < 0$, 则 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调

递减, 则 $h(t) \in \left(-2, \frac{1}{4}\right)$, 即 $2a \in$

$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$, 则 $a \in \left(-1, \frac{1}{8}\right)$. 故选 B.

10.2 突破点 ▶ 两条切线垂直问题

【解析】设函数 $f(x)$ 的图象在点 $P(x_1, f(x_1))$, $Q(x_2, f(x_2))$ ($x_1 < x_2$) 处的切线互相垂直, 且分别交 y 轴于点 A , B .

如图, $f(x) = |\ln x|$ 的零点为 1, 故 $0 < x_1 < 1$, $x_2 > 1$,

则 $P(x_1, -\ln x_1)$, $Q(x_2, \ln x_2)$,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) = \ln x$,

$$f'(x) = \frac{1}{x},$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) = -\ln x$, $f'(x) = -\frac{1}{x}$,

$$\text{则 } k_{AP} = -\frac{1}{x_1}, k_{BQ} = \frac{1}{x_2}.$$

所以 $k_{AP} \cdot k_{BQ} = -1$, 即 $x_1 x_2 = 1$.

因为 $l_{AP}: y - (-\ln x_1) = -\frac{1}{x_1}(x - x_1)$, 即

$$y = -\frac{1}{x_1}x + 1 - \ln x_1,$$

$$l_{BQ}: y - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2), \text{ 即 } y = \frac{1}{x_2}x +$$

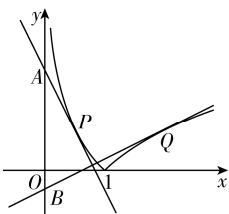


$$\ln x_2 - 1,$$

则 $A(0, 1 - \ln x_1), B(0, \ln x_2 - 1)$, 因为

$$0 < x_1 < 1, \text{ 且 } x_1 x_2 = 1,$$

$$\text{所以 } |AB| = 1 - \ln x_1 - (\ln x_2 - 1) = 2 - \ln(x_1 x_2) = 2.$$



11. $(0, 2\sqrt{e})$ 突破点 ▶ 公切线条数问题

【解析】设曲线 $y=f(x)$ 上的切点坐标为

$$(x_1, m\sqrt{x_1}), \text{ 由题意知 } x_1 > 0, \text{ 又 } f'(x) =$$

$$\frac{m}{2\sqrt{x}},$$

$$\text{则公切线的方程为 } y - m\sqrt{x_1} = \frac{m}{2\sqrt{x_1}}(x -$$

$$x_1), \text{ 即 } y = \frac{m}{2\sqrt{x_1}}x + \frac{m}{2}\sqrt{x_1}.$$

设曲线 $y=g(x)$ 上的切点坐标为 $(x_2, 3 +$

$$\ln x_2), x_2 > 0, \text{ 又 } g'(x) = \frac{1}{x},$$

则公切线的方程为 $y - (3 + \ln x_2) =$

$$\frac{1}{x_2}(x - x_2), \text{ 即 } y = \frac{1}{x_2}x + 2 + \ln x_2,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{m}{2\sqrt{x_1}} = \frac{1}{x_2}, \\ \frac{m}{2}\sqrt{x_1} = 2 + \ln x_2, \end{cases} \quad \text{消去 } x_1, \text{ 得 } \frac{m^2}{4} =$$

$$\frac{2 + \ln x_2}{x_2}, \text{ 且 } m > 0.$$

若存在两条不同的直线与曲线 $y=f(x), y=g(x)$ 均相切,

$$\text{则关于 } x_2 \text{ 的方程 } \frac{m^2}{4} = \frac{2 + \ln x_2}{x_2} (m > 0) \text{ 有}$$

两个不同的实数根.

$$\text{设 } h(x) = \frac{2 + \ln x}{x}, x > 0, \text{ 则 } h'(x) =$$

$$\frac{-1 - \ln x}{x^2},$$

$$\text{令 } h'(x) > 0, \text{ 得 } 0 < x < \frac{1}{e}; \text{ 令 } h'(x) < 0, \text{ 得}$$

$$x > \frac{1}{e},$$

所以 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递增, 在

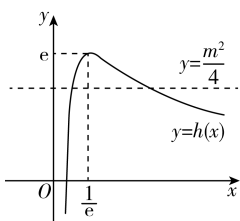
$(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{所以 } h(x)_{\max} = h\left(\frac{1}{e}\right) = e, \text{ 由 } h(x) = 0$$

$$\text{可得 } x = \frac{1}{e^2},$$

当 $x \rightarrow 0$ 且 $x > 0$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) > 0$ 且 $h(x) \rightarrow 0$,

则 $h(x)$ 的大致图象如图所示,



由图可知, $0 < \frac{m^2}{4} < e$, 又 $m > 0$, 故 $0 < m <$

$2\sqrt{e}$, 即实数 m 的取值范围为 $(0, 2\sqrt{e})$.

第2节 利用导数研究函数的单调性、极值、最值

刷

基础

1. B **考查点** ▶ 用导数判断或证明已知函数的单调性

【解析】 因为 $f(-x) = -x - \sin(-x) = -f(x)$, 且 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 所以 $f(x) = x - \sin x$ 为奇函数, 所以 $f(x^2 + 4x) < -f(3) = f(-3)$,

因为 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 且不恒等于 0, 所以函数 $f(x) = x - \sin x$ 在定义域上为增函数, 故 $x^2 + 4x < -3$, 故解集为 $(-3, -1)$. 故选 B.

2. (0, 1] **考查点** ▶ 导数的运算法则、利用导数求函数的单调区间(不含参)

【解析】 因为函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

所以 $f'(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x}$,

令 $f'(x) \leq 0$, 所以 $0 < x \leq 1$,

故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1]$.

3. D **考查点** ▶ 由函数在区间上的单调性求参数范围

【解析】 $f'(x) = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 2a$, 因为函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上不单调, 所以函数 $f'(x)$ 有零点,

所以方程 $\frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) - 2a = 0$ 有实数根, 所以直线 $y = 2a$ 与函数 $g(x) = \frac{\pi}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ 的图象有交点(且交点非函数 $g(x)$ 图象的最高点或最低点), 因为函数 $g(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, 所以

$a \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$. 故选 D.

4. ACD **突破点** ▶ 由函数在区间上的单调性求参数的值或范围、求指定项的系数

【解析】 由题意得 $f'(x) = 7(2ax + b)(ax^2 + bx + 1)^6$,

又 $f'(x) \geq 0$ 恒成立且 $f'(x)$ 不恒为 0, 故 $a = 0, b > 0$.

由 $b > a$ 知 $f(a) < f(b)$, 故 A 正确;

由函数的单调性可得, 当 $x > 1$ 时, $f(x) > f(1) = (b+1)^7$, 当 $(b+1)^7 < 2$ 时, 存在 $x_0 > 1$ 使得 $f(x_0) = 2$ 成立, 与选项矛盾.



盾,故 B 错误;

若 $b=2$, 有 $f(x) = (2x+1)^7$, 其展开式的第六项 $T_6 = C_7^5 (2x)^2 = 84x^2$, 故 $f(x)$ 的展开式中含 x^2 项的系数为 84, 故 C 正确;

由 $f(1) = (b+1)^7 = 3^7$, 解得 $b=2$, 此时 $f(x) = (2x+1)^7$,

易得 $f(x) + f(-1-x) = (2x+1)^7 + (-2x-1)^7 = 0$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 中心对称,

故 $f(e^{2^{025}}) + f(-e^{2^{025}}) = f(e^{2^{025}}) - f(e^{2^{025}} - 1) > 0$, 故 D 正确.

故选 ACD.

5. $[1, +\infty)$ **考查点** ▶ 由函数的单调区间求参数范围

【解析】 $f'(x) = \ln x + 1 - 2x + 1 = \ln x - 2x + 2$,

设 $g(x) = \ln x - 2x + 2$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}, x > 0$,

当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 即 $f'(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递减, 又 $f'(1) = 0$, 所以

当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时,

$f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在区间 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调

递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 故 $(a, +\infty) \subseteq (1, +\infty)$, 故 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

6. D **考查点** ▶ 求函数的极值、根据极值点求参数

【解析】 由函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + bx + 1}$, 求导可

得 $f'(x) = \frac{e^x [x^2 + (b-2)x + 1 - b]}{(x^2 + bx + 1)^2}$,

由题意可得 $f'(2) = 0$, 则 $4 + 2(b-2) + 1 - b = 0$, 解得 $b = -1$, 所以 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - x + 1}$.

$b=0$, 解得 $b=-1$, 所以 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - x + 1}$.

$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} .

$f'(x) = \frac{e^x (x^2 - 3x + 2)}{(x^2 - x + 1)^2} = \frac{e^x (x-1)(x-2)}{(x^2 - x + 1)^2}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$ 或 $x = 2$,

当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如表所示:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

则函数的极大值为 $f(1) = \frac{e^1}{1-1+1} = e$. 故选 D.

7. ACD **考查点** 根据极值点求参数

【解析】 函数 $f(x) = (x-a)^2(x-2)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = 3(x-a)\left(x - \frac{a+4}{3}\right)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = a, x_2 = \frac{a+4}{3}$.

① 当 $a = 1$ 时, $f'(x) = 3(x-1)\left(x - \frac{5}{3}\right)$,
由 $f'(x) > 0$, 得 $x < 1$ 或 $x > \frac{5}{3}$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < \frac{5}{3}$,

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在 $\left(1, \frac{5}{3}\right)$ 上单调递减,
此时 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点.

② 当 $\frac{a+4}{3} = 1$, 即 $a = -1$ 时, $f'(x) = 3(x+1)(x-1)$,
由 $f'(x) > 0$, 得 $x < -1$ 或 $x > 1$, 由 $f'(x) < 0$, 得 $-1 < x < 1$,

则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 1)$ 上单调递减,
此时 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点. 故 A 正确, B 错误.

若 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的一个极小值点, 则 $a = -1$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,
当 $x > 1$ 时, $2x+1 > x+2 > 1$, 所以 $f(2x+1) > f(x+2)$, 故 C 正确.

若 $x = 1$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点, 则 $a = 1$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增,
当 $0 < x < 1$ 时, $-1 < 2x-1 < 1$, $-1 < x^2-1 < 0$,
且 $2x-1 > x^2-1$,
即当 $0 < x < 1$ 时, $x^2-1 < 2x-1 < 1$, 所以 $f(x^2-1) < f(2x-1)$, 故 D 正确. 故选 ACD.

8. 考查点 求在曲线上一点处的切线方程, 根据极值点、零点求参数的最值

【解】 (1) 因为 $f(x) = (x-a)\sin ax$, 所以 $f'(x) = \sin ax + (ax-a^2)\cos ax$.

当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \sin x + (x-1)\cos x$,
 $f(0) = 0, f'(0) = 0-1 = -1$.

故曲线 $y = f(x)$ 在 origin 处的切线方程为 $y = -x$, 即 $x+y=0$.

(2) 设 x_0 既是 $f(x)$ 的零点, 也是 $f(x)$ 的极值点,

则有 $f(x_0) = (x_0-a)\sin ax_0 = 0, f'(x_0) = \sin ax_0 + (ax_0-a^2)\cos ax_0 = 0$,

由方程 $(x_0-a)\sin ax_0 = 0$, 解得 $x_0 = a$ 或 $\sin ax_0 = 0$.

① 当 $x_0 = a$ 时, $f'(x_0) = \sin ax_0 + (ax_0-a^2)\cos ax_0 = \sin a^2 = 0$,

解得 $a^2 = k\pi (k \in \mathbf{N})$, 又 $a > 0$, 故 $a = \sqrt{k\pi} (k \in \mathbf{N}^*)$;



②当 $\sin ax_0 = 0$ 时, $f'(x_0) = \sin ax_0 + (ax_0 - a^2) \cos ax_0 = a(x_0 - a) \cos ax_0 = 0$,

且易知 $\cos ax_0 \neq 0$,

又 $a > 0$, 故只有 $x_0 = a$, 结合 $\sin ax_0 = 0$, 同

①解得 $a = \sqrt{k\pi} (k \in \mathbf{N}^*)$.

综上, $a = \sqrt{k\pi} (k \in \mathbf{N}^*)$, 当 $k = 1$ 时, a 取最小值 $\sqrt{\pi}$, 经检验, 符合题意.

9. 突破点 ▶ 利用导数求函数的单调区间、极值, 利用导数研究不等式恒成立问题

(1)【解】若 $a = 0$, 则 $f(x) = xe^x$, $f'(x) = e^x(x+1)$. 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -1$.

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 的极小值为 $f(-1) = -\frac{1}{e}$.

(2)【解】由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = e^x(x+1) - ax - a = (e^x - a)(x+1) (a \in \mathbf{R})$.

因为 $a > \frac{1}{e}$, 所以 $\ln a > -1$, 由 $f'(x) > 0$, 即 $(e^x - a)(x+1) > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > \ln a$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增; 由 $f'(x) < 0$, 即 $(e^x - a)(x+1) < 0$, 解得 $-1 < x < \ln a$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, \ln a)$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -1)$ 和 $(\ln a, +\infty)$.

(3)【证明】当 $a > \frac{1}{e}$ 时, 由 (2) 知, $f(x)$ 的极大值为 $f(-1) = g(a) = -\frac{1}{e} + \frac{1}{2}a > -\frac{1}{2e} > -\frac{2}{e^2}$.

当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, $f(x)$ 无极大值.

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $\ln a < -1$, 若 $x \in (-\infty, \ln a)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 若 $x \in (\ln a, -1)$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 若 $x \in (-1, +\infty)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(\ln a) = g(a) = -\frac{1}{2}a(\ln a)^2$.

对于 $g(x) = -\frac{1}{2}x(\ln x)^2 (0 < x < \frac{1}{e})$, 可得 $g'(x) = -\ln x \left(\frac{1}{2} \ln x + 1 \right)$, 当 $x \in \left(0, \frac{1}{e^2} \right)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e} \right)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e^2} \right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e} \right)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \geq g\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{2}{e^2}$.

综上所述, $g(a) \geq -\frac{2}{e^2}$.



10. A 考查点 ▶ 利用导数求函数的最值 (不含参)、利用导数研究不等式恒成立问题

【解析】由题意,函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

当 $a \leq 0$ 时, $x^2 - a > 0$, 由 $f(x) \geq 0$ 得 $\ln x - b \geq 0$ 恒成立,

又 $y = \ln x$ 的值域为 \mathbf{R} , 故 $\ln x - b \geq 0$ 不可能恒成立, 故 $a \leq 0$ 不成立.

当 $a > 0$ 时, 由 $x^2 - a \geq 0$ 得 $x \geq \sqrt{a}$, 由 $x^2 - a < 0$ 得 $0 < x < \sqrt{a}$,

由 $\ln x - b \geq 0$ 得 $x \geq e^b$, 由 $\ln x - b < 0$ 得 $0 < x < e^b$,

又 $f(x) \geq 0$, 故 $\sqrt{a} = e^b$, 即 $a = e^{2b}$,

故 $ab = be^{2b}$, 设 $g(x) = xe^{2x}$, 则 $g'(x) = (2x+1)e^{2x}$.

当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在

$(-\infty, -\frac{1}{2})$ 上单调递减;

当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在

$(-\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

故 $g(x) \geq g(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2e}$,

故选 A.

11. 2 考查点 ▶ 利用导数求函数的最值

【解析】函数 $f(x) = \left| \ln \frac{a}{x} - 2 \right| +$

$\left| \frac{a}{x} - 1 \right|$, 令 $\frac{a}{x} = t (t > 0)$, $g(t) = |\ln t -$

$$2| + |t - 1| = \begin{cases} 3 - t - \ln t, & 0 < t \leq 1, \\ 1 + t - \ln t, & 1 < t < e^2, \\ t + \ln t - 3, & t \geq e^2, \end{cases}$$

当 $0 < t \leq 1$ 时, $g'(t) = -1 - \frac{1}{t} < 0$, 函数 $g(t)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减,

当 $1 < t < e^2$ 时, $g'(t) = 1 - \frac{1}{t} > 0$, 函数 $g(t)$ 在 $(1, e^2)$ 上单调递增,

当 $t \geq e^2$ 时, $g'(t) = 1 + \frac{1}{t} > 0$, 函数 $g(t)$

在 $[e^2, +\infty)$ 上单调递增,

因此 $g(t)_{\min} = g(1) = 2$, 所以当 $x = a$ 时, $f(x)$ 取得最小值 2.

12. 突破点 ▶ 利用导数求函数的最值 (不含参)、利用导数研究能成立问题

【解】(1) 因为函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2$,

所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - x = \frac{1-x^2}{x} (x > 0)$,

令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 1$ 或 $x = -1$ (舍去).

当 $\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $1 < x < 4$ 时, $f'(x) < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 1)$ 上单调递增,



在 $(1, 4)$ 上单调递减,

所以当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 最大

值为 $f(1) = -\frac{1}{2}$,

又 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = -\ln 2 - \frac{1}{8}$,

$f(4) = 2\ln 2 - 8$,

$f\left(\frac{1}{2}\right) - f(4) = -3\ln 2 - \frac{1}{8} + 8 > -3 - \frac{1}{8} + 8 > 0$,

所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(4)$, 所以当 $x=4$ 时,

$f(x)$ 取得最小值, 最小值为 $f(4) = 2\ln 2 - 8$,

故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ 上的最大值为 $-\frac{1}{2}$,

最小值为 $2\ln 2 - 8$.

(2) 易知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

故不等式 $f(x) > (2-a)x^2$ 可化为 $2-a <$

$\frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$.

记 $g(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{2}$, 则原不等式有解可

转化为 $2-a < g(x)_{\max}$.

易得 $g'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$, 当 $x \in (0, \sqrt{e})$

时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增,

在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减,

故 $g(x)_{\max} = g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e} - \frac{1}{2}$, 所以 $2-a <$

$\frac{1}{2e} - \frac{1}{2}$,

解得 $a > \frac{5}{2} - \frac{1}{2e}$.

所以实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2e}, +\infty\right)$.

一题多解

(2) $f(x) > (2-a)x^2$ 有解,

即 $\ln x - \frac{1}{2}x^2 - (2-a)x^2 > 0$ 有解.

设 $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2 - (2-a)x^2 = \ln x -$

$\left(\frac{5}{2}-a\right)x^2$, 则 $g'(x) = \frac{1-(5-2a)x^2}{x} (x>0)$.

若 $a \geq \frac{5}{2}$, 则 $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) > 0$, 故符合题意.

若 $a < \frac{5}{2}$, 则当 $x \in \left(0, \sqrt{\frac{1}{5-2a}}\right)$ 时,

$g'(x) > 0$; 当 $x \in \left(\sqrt{\frac{1}{5-2a}}, +\infty\right)$ 时,

$g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5-2a}}\right)$ 上单调



递增, 在 $\left(\frac{1}{\sqrt{5-2a}}, +\infty\right)$ 上单调递减,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) < 0,$$

仅需 $g\left(\frac{1}{\sqrt{5-2a}}\right) = \ln \frac{1}{\sqrt{5-2a}} - \frac{1}{2} > 0$, 则

$$\frac{5}{2} - \frac{1}{2e} < a < \frac{5}{2}.$$

综上所述, $a \in \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2e}, +\infty\right)$.

刷

提分

1. C 考查点 ▶ 已知函数最值求参数

【解析】 $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx$ ($x > 0$), 因为当

$x=1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极大值 2,

所以 $\begin{cases} f(1) = 2, \\ f'(1) = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} b+3=2, \\ a+2b=0, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} b = -1, \\ a = 2, \end{cases}$

所以 $f(x) = 2\ln x - x^2 + 3$, $f'(x) = \frac{2}{x} - 2x =$

$$\frac{2(1-x)(1+x)}{x} \quad (x > 0).$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

则 $f(x)_{\max} = f(1) = 2$, 符合题意,

所以 $f(3) = 2\ln 3 - 6$.

故选 C.

2. A 突破点 ▶ 根据函数单调性解不等式

【解析】设 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} + 2x$, 则 $g'(x) =$

$$\frac{f'(x) - f(x)}{e^x} + 2 = \frac{f'(x) - f(x) + 2e^x}{e^x},$$

$\because f(x) - f'(x) - 2e^x < 0, \therefore f'(x) - f(x) + 2e^x > 0, \therefore g'(x) > 0$,

\therefore 函数 $g(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数,

又 $f(2) = -4e^2, \therefore g(2) = \frac{f(2)}{e^2} + 4 = \frac{-4e^2}{e^2} + 4 = 0$,

由 $f(x) > -2xe^x$, 可得 $\frac{f(x)}{e^x} + 2x > 0$, 即

$$g(x) > 0 = g(2),$$

又函数 $g(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数, 所以 $x > 2$, 即所求不等式的解集为 $(2, +\infty)$.

故选 A.

一题多解

根据题意, 不妨设 $f(x) = -4e^2, f(x) > -2xe^x$, 即 $-4e^2 > -2xe^x$, 则 $xe^x > 2e^2$, 则 $x > 0$, 故排除 B, C, D.

设 $g(x) = xe^x$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x > 0$, 则函数 $g(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数, 故由 $xe^x > 2e^2$, 得 $x > 2$, 故选 A.

3. C 突破点 ▶ 构造函数比较大小

【解析】因为 $a = \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2\sqrt{2}}, b = \frac{2}{\ln 2}, c = \frac{3}{\ln 3}$,



所以构造函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x} (x > 0 \text{ 且 } x \neq 1)$,

则 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} (x > 0 \text{ 且 } x \neq 1)$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $x \in (1, e)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减;

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述, $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ 在 $(0, 1)$ 和 $(1, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $b = \frac{2}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 4} = f(4) > f(3) = \frac{3}{\ln 3} = c$.

又因为 $e < 2\sqrt{2} < 3$,

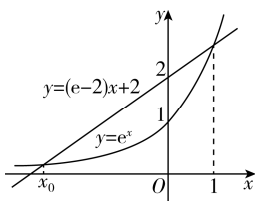
所以 $c = \frac{3}{\ln 3} = f(3) > f(2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2\sqrt{2}} = a$,

可得 $a < c < b$. 故选 C.

4. C 突破点 ▶ 求函数的极值点、新定义问题

【解析】 $f'(x) = e^x - ex + 2x - 2$, 则 $f'(1) = 0$.

令 $f'(x) = 0$, 则 $e^x = (e-2)x + 2$, 如图, 作出函数 $y = e^x$, $y = (e-2)x + 2$ 的大致图象.



由图可知函数 $y = e^x$, $y = (e-2)x + 2$ 的图象有两个交点, 即函数 $y = f'(x)$ 有两个零点 $1, x_0$, 且 $x_0 < 0$.

令 $f'(x) > 0$, 则 $x > 1$ 或 $x < x_0$; 令 $f'(x) < 0$, 则 $x_0 < x < 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 的极大值点为 x_0 , 极小值点为 1 .

函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以函数有极小值点, 无极大值点, 故 A 不符合题意.

函数 $y = -x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以函数有极大值点, 无极小值点, 故 B 不符合题意.

由 $y = x^3 - 3x$ 可得 $y' = 3x^2 - 3$, 当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时, $y' = 3x^2 - 3 > 0$; 当 $-1 < x < 1$ 时, $y' = 3x^2 - 3 < 0$, 所以函数 $y = x^3 - 3x$ 在 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, 1)$ 上单调递减, 所以其极大值点为 -1 , 极小值点为 1 , 故 C 符合题意.

$y = -x^3 + 3x = -(x^3 - 3x)$, 则由 C 选项分析可知函数 $y = -x^3 + 3x$ 的极小值点为 -1 , 极大值点为 1 , 故 D 不符合题意. 故选 C.

5. BCD 突破点 ▶ 利用导数求函数的最值

【解析】由 $f(x) = e^x - a \ln x$, 求导可得

$f'(x) = \frac{xe^x - a}{x} (x > 0)$, 易知函数 $f'(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递增,



令 $g(x) = xe^x$, 求导可得 $g'(x) = e^x(1+x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$,

又当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, 且 $a > 0$, 所以 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $g(x_0) = a$, 则 $x_0 e^{x_0} = a$, 则 $f'(x_0) = 0$,

当 $0 < x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减;

当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) \geq f(x_0) = e^{x_0} - a \ln x_0$, 又 $x_0 e^{x_0} = a$, 则 $f(x_0) = e^{x_0}(1 - x_0 \ln x_0)$,

当 $0 < a < e$, 即 $0 < x_0 < 1$ 时, $f(x) \geq f(x_0) = e^{x_0}(1 - x_0 \ln x_0) > 0$, 故 A 错误, B 可能正确.

当 $a > e$, 即 $x_0 > 1$ 时, 令 $h(x) = 1 - x \ln x (x > 1)$, 求导可得 $h'(x) = -\ln x - 1 < 0$,

则函数 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

又 $h(1) = 1 - 0 > 0$, $h(2) = 1 - 2 \ln 2 < 0$, 则存在 $x_1 \in (1, 2)$, 使得 $h(x_1) = 0$,

所以当 $x_0 > 1$ 时, $f(x_0)$ 符号不确定, 故 C, D 可能正确.

故选 BCD.

6. D 突破点 ▶ 函数单调性、极值与最值的综合应用、复合函数的单调性

【解析】 $f(x) = x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$, $x \in (0, +\infty)$,

令 $g(x) = x \ln x$, 则 $g'(x) = 1 + \ln x$,

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$,

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在

$(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减;

当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在

$(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增.

$f(x)$ 由函数 $y = e^u$ 与 $u = g(x)$ 复合而成, 而 $y = e^u$ 在定义域上单调递增,

故 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减, 在

$(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{e}$ 处取得极小值, 极小

值 $f(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$, 且无极大值,

$f(x)_{\min} = f(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{1}{e}} > e^{-1} = \frac{1}{e}$, 故不存在实数 $a \in (0, +\infty)$, 使得 $f(a) = \frac{1}{e}$.

故 A, B, C 错误, D 正确.

故选 D.

7. D 突破点 ▶ 由函数在区间上的单调性求参数范围

【解析】由题意可知 $f(x)$ 的定义域为

$(1, +\infty)$,

且 $f(x) = a^{x-1} - \log_a(x-1) = \frac{a^x}{a} -$

$$\frac{\ln(x-1)}{\ln a} = \frac{1}{a \ln a} [a^x \ln a - a \ln(x-1)],$$

记 $h(x) = a^x \ln a - a \ln(x-1)$, 因为 $f(x)$ 为其定义域上的单调函数, 所以 $h(x)$ 为其定义域上的单调函数.

若 $h(x)$ 在定义域上单调递增,

则 $h'(x) = a^x (\ln a)^2 - \frac{a}{x-1} \geq 0$ 恒成立, 即

$$(x-1) a^{x-1} \geq \frac{1}{(\ln a)^2},$$

令 $t = x-1 > 0$, 可得 $ta^t \geq \frac{1}{(\ln a)^2}$,

设 $G(t) = ta^t (t > 0)$, 因为当 $t \rightarrow 0$ 时,

$G(t) \rightarrow 0$, 所以 $ta^t \geq \frac{1}{(\ln a)^2}$ 不成立.

若 $h(x)$ 在定义域上单调递减,

则 $h'(x) = a^x (\ln a)^2 - \frac{a}{x-1} \leq 0$ 恒成立, 即

$$(x-1) a^{x-1} \leq \frac{1}{(\ln a)^2}.$$

令 $t = x-1 > 0$, 可得 $ta^t \leq \frac{1}{(\ln a)^2}$, 可知

$$(ta^t)_{\max} \leq \frac{1}{(\ln a)^2},$$

$G(t) = ta^t (t > 0)$, 则 $G'(t) = (1+t \ln a) a^t$,

令 $G'(t) = 0$, 则 $t = -\frac{1}{\ln a}$.

当 $a > 1$ 时, $t < 0$, 与 $t > 0$ 矛盾, 不成立.

当 $0 < a < 1$ 时, $t = -\frac{1}{\ln a} > 0$, 当 $t > -\frac{1}{\ln a}$ 时,

$G'(t) < 0$; 当 $0 < t < -\frac{1}{\ln a}$ 时, $G'(t) > 0$,

可知 $G(t)$ 在区间 $(0, -\frac{1}{\ln a})$ 上单调递

增, 在区间 $(-\frac{1}{\ln a}, +\infty)$ 上单调递减,

则 $G(t) \leq G(-\frac{1}{\ln a}) = -\frac{1}{\ln a} \cdot a^{-\frac{1}{\ln a}} \leq$

$$\frac{1}{(\ln a)^2}, \text{ 即 } a^{-\frac{1}{\ln a}} \leq -\frac{1}{\ln a},$$

可得 $(-\frac{1}{\ln a}) \ln a \leq \ln(-\frac{1}{\ln a})$, 即 $-1 \leq$

$\ln(-\frac{1}{\ln a})$, 解得 $\frac{1}{e^e} \leq a < 1$.

故选 D.

8. ACD 突破点 ▶ 利用导数研究函数的单调性、极值、零点

【解析】因为 $f(x) = ax^3 - 3x^2 - 1$, 所以 $f'(x) = 3ax^2 - 6x = 3x(ax - 2)$, 当 $a > 0$ 时,

令 $f'(x) = 0$, 得到 $x = 0$ 或 $x = \frac{2}{a}$, 当 $x < 0$

或 $x > \frac{2}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $0 < x < \frac{2}{a}$ 时,

$f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$,

$(\frac{2}{a}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, \frac{2}{a})$ 上单



调递减,所以 0 是 $f(x)$ 的极大值点,极大值为 $f(0) = -1$, $\frac{2}{a}$ 是 $f(x)$ 的极小值点,极小值为 $f\left(\frac{2}{a}\right) = -\frac{4}{a^2} - 1$.

当 $a=0$ 时, $f(x) = -3x^2 - 1$, 由极值的定义知, $f(x)$ 的极大值为 -1 , 无极小值.

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得到 $x = 0$ 或 $x = \frac{2}{a}$, 当 $x < \frac{2}{a}$ 或 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $\frac{2}{a} < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{2}{a}\right), (0, +\infty)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{2}{a}, 0\right)$ 上单调递增, 所以 0 是 $f(x)$ 的极大值点, 极大值为 $f(0) = -1$, $\frac{2}{a}$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f\left(\frac{2}{a}\right) = -\frac{4}{a^2} - 1$.

综上, -1 是 $f(x)$ 的极大值, 故选项 A 正确.

当 $-1 < a < 0$ 时, 由选项 A 知, $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{2}{a}, 0\right)$ 上单调递增, 由 $-1 < a < 0$, 得 $\frac{2}{a} \in (-\infty, -2)$, $-2 < a - 1 < -1$, 所以 $f(a - 1) < f(a)$, 故选项 B 错误.

当 $a > 2$ 时, $0 < \frac{2}{a} < 1$, 由选项 A 知, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0), \left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$, 单调递减区间为 $\left(0, \frac{2}{a}\right)$,

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, $f(0) = -1 < 0$, $f(2) = 8a - 12 - 1 = 8a - 13 > 0$,

由零点存在定理知, 当 $a > 2$ 时, $f(x)$ 有且仅有一个零点 x_0 , 且 $x_0 < 2$, 故选项 C 正确.

$f(x)$ 存在极小值点 x_1 , 由选项 A 知, $x_1 = \frac{2}{a}$, 得到 $a = \frac{2}{x_1}$, 因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 则 $\frac{2}{x_1} \cdot x_1^3 - 3x_1^2 - 1 = \frac{2}{x_1} \cdot x_2^3 - 3x_2^2 - 1$, 整理得到 $2x_2^3 - 3x_1x_2^2 + x_1^3 = 0$, 即 $(x_1 - x_2)^2 \cdot (x_1 + 2x_2) = 0$, 又 $x_1 \neq x_2$, 所以 $x_1 + 2x_2 = 0$, 故选项 D 正确.

故选 ACD.

9. $(2 - \ln 2, +\infty)$ 突破点 ▶ 利用导数判断或证明已知函数的单调性

【解析】 $f(x) = \ln(4-x) + \ln x + ax$ ($a > 0$) 的定义域为 $(0, 4)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x-4} + \frac{1}{x} + a = \frac{2x-4}{x(x-4)} + a,$$

$$\because x \in [1, 2], a > 0, \therefore f'(x) = \frac{2x-4}{x(x-4)} + a > 0,$$

$\therefore f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增,

$\therefore f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最大值为 $f(2) = 2\ln 2 + 2a > 4$,

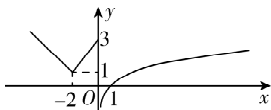
$\therefore a > 2 - \ln 2$, 即 a 的取值范围为 $(2 - \ln 2, +\infty)$.



$\ln 2, +\infty)$.

10. $3e^3 - 12$ 突破点 ▶ 利用导数求函数的最值(不含参)

【解析】作出函数 $f(x)$ 的图象如图所示.



\therefore 存在实数 $a < b < c$, 满足 $f(a) = f(b) = f(c)$,

$$\therefore a + b = -4,$$

$$\therefore af(a) + bf(b) + cf(c) = (a + b + c)f(c) = (c - 4)f(c) = (c - 4)\ln c,$$

由图可知, $1 < f(c) \leq 3$,

$$\therefore e < c \leq e^3,$$

$$\text{设 } g(x) = (x - 4)\ln x,$$

则 $g'(x) = \ln x + 1 - \frac{4}{x}$, 显然 $g'(x)$ 在 $(e, e^3]$ 上单调递增,

$$\therefore g'(e) = 2 - \frac{4}{e} > 0,$$

\therefore 当 $x \in (e, e^3]$ 时, $g'(x) > 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(e, e^3]$ 上单调递增,

$\therefore g(x)$ 在 $(e, e^3]$ 上的最大值为 $g(e^3) = 3(e^3 - 4) = 3e^3 - 12$,

$\therefore af(a) + bf(b) + cf(c)$ 的最大值为 $3e^3 - 12$.

11. 突破点 ▶ 利用导数证明不等式、求函数的单调区间(含参)

(1) **【解】** 因为当 $a = 2\sqrt{3}$ 时, $f(x) = 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}\ln x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$, 所以 $f(1) = 2\sqrt{3}$, $f'(x) = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{x} - x$,

所以 $f'(1) = -1$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - 2\sqrt{3} = -(x - 1)$,

$$\text{即 } x + y - 2\sqrt{3} - 1 = 0.$$

(2) **【解】** 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 2\sqrt{3} - \frac{a}{x} - x =$

$$\frac{-x^2 + 2\sqrt{3}x - a}{x}, \text{ 方程 } -x^2 + 2\sqrt{3}x - a = 0 \text{ 的}$$

判别式 $\Delta = 12 - 4a$, 由题知 $a > 0$.

① 当 $\Delta > 0$, 即 $a \in (0, 3)$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 有 $x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{3 - a}$, $x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{3 - a}$, 且 $x_1 > x_2 > 0$,

当 $x \in (0, x_2) \cup (x_1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$,

即函数 $y = f(x)$ 在 $(0, \sqrt{3} - \sqrt{3 - a})$ 和 $(\sqrt{3} + \sqrt{3 - a}, +\infty)$ 上单调递减;

当 $x \in (x_2, x_1)$ 时, $f'(x) > 0$, 即函数 $y = f(x)$ 在 $(\sqrt{3} - \sqrt{3 - a}, \sqrt{3} + \sqrt{3 - a})$ 上单调递增.

② 当 $\Delta \leq 0$, 即 $a \in [3, +\infty)$ 时, $f'(x) \leq 0$ 恒成立, 所以函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

综上, 当 $0 < a < 3$ 时, 单调递减区间为



$(0, \sqrt{3} - \sqrt{3-a})$ 和 $(\sqrt{3} + \sqrt{3-a}, +\infty)$,
 单调递增区间为 $(\sqrt{3} - \sqrt{3-a}, \sqrt{3} + \sqrt{3-a})$;

当 $a \geq 3$ 时, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$,
 无单调递增区间.

(3) 【证明】因为 $y=f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ,

则 $f'(x) = \frac{-x^2 + 2\sqrt{3}x - a}{x} = 0$ 有两个正根

x_1, x_2 , 则有 $\Delta = 12 - 4a > 0$, 且 $x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}$, $x_1 x_2 = a > 0$, 即 $a \in (0, 3)$,

所以 $f(x_1) + f(x_2) = 2\sqrt{3}(x_1 + x_2) - a \ln(x_1 x_2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + 1 = -a \ln a + a + 7$.

若证 $f(x_1) + f(x_2) < 9 - \ln a$, 即证 $a \ln a - \ln a - a + 2 > 0$,

构造函数 $g(x) = x \ln x - x - \ln x + 2$,

则 $g'(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, 易知 $y = g'(x)$ 在

$(0, 3)$ 上单调递增, 且 $g'(1) = -1 < 0$,

$g'(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$,

所以存在 $x_0 \in (1, 2)$ 使 $g'(x_0) = 0$, 即

$\ln x_0 = \frac{1}{x_0}$,

且当 $x \in (0, x_0)$ 时 $g'(x) < 0$, 函数 $y = g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, 3)$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $y = g(x)$ 单调递增.

所以函数 $y = g(x)$ 在 $(0, 3)$ 上有最小值, 最小值为 $g(x_0) = x_0 \ln x_0 - x_0 - \ln x_0 + 2 = 3 - \left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right)$,

又因为 $x_0 \in (1, 2)$, 所以 $x_0 + \frac{1}{x_0} \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$, 所以 $g(x_0) > 0$,

所以当 $x \in (0, 3)$ 时, $g(x) > 0$,

即 $f(x_1) + f(x_2) < 9 - \ln a$ 成立.

一题多解

(3) 因为 $y=f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ,

则 $f'(x) = \frac{-x^2 + 2\sqrt{3}x - a}{x} = 0$ 有两个正根

x_1, x_2 , 则有 $\Delta = 12 - 4a > 0$, 且 $x_1 + x_2 = 2\sqrt{3}$, $x_1 x_2 = a > 0$, 即 $a \in (0, 3)$,

所以 $f(x_1) + f(x_2) = 2\sqrt{3}(x_1 + x_2) - a \ln(x_1 x_2) - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + 1 = -a \ln a + a + 7$.

若证 $f(x_1) + f(x_2) < 9 - \ln a$, 即证 $a \ln a - \ln a - a + 2 > 0$, 即证 $(a-1) \ln a + (2-a) > 0$.

若 $0 < a \leq 1$, 则 $(a-1) \ln a + (2-a) \geq 2-a > 0$.

若 $1 < a \leq 2$, 则 $(a-1) \ln a + (2-a) > 2-a \geq 0$.



若 $2 < a < 3$, 等价于证明 $\ln a + \frac{2-a}{a-1} = \ln a -$

$$1 + \frac{1}{a-1} > 0,$$

设 $h(x) = \ln x - x + 1 (x > 0)$, 则 $h'(x) = \frac{1-x}{x}$
($x > 0$),

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x) \leq h(1) = 0$, 所以 $\ln x \leq x - 1$.

$$\text{所以 } \ln \frac{1}{a} \leq \frac{1}{a} - 1,$$

$$\text{即 } \ln a \geq 1 - \frac{1}{a}, \text{ 则 } \ln a - 1 + \frac{1}{a-1} \geq \frac{1}{a-1} -$$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a(a-1)} > 0, \text{ 得证.}$$

12. 突破点 ▶ 利用导数研究不等式恒成立问题、利用导数研究方程解的个数

【解】(1) 因为函数 $f(x) = \ln x + e^{x-1}$, 所以 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} + e^{x-1} (x > 0)$,

$$\text{令 } f'(x) = m(x), \text{ 则 } m'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x^2}$$

($x > 0$), 注意到 $m'(x)$ 为增函数, 且 $m'(1) = 0$,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $m'(x) < 0$, $f'(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $m'(x) > 0$, $f'(x)$ 单调递增,

所以当 $x = 1$ 时, $f'(x)$ 取得极小值 2, 无极大值.

(2) 由题意可知 $\ln x + e^{x-1} \geq kx - 1$ 对任意 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立,

$$\text{即 } k \leq \frac{\ln x + e^{x-1} + 1}{x} \text{ 对任意 } x \in [1, +\infty)$$

恒成立,

$$\text{设 } g(x) = \frac{\ln x + e^{x-1} + 1}{x} (x \geq 1),$$

$$\text{则 } g'(x) = \frac{(x-1)e^{x-1} - \ln x}{x^2} (x \geq 1),$$

设 $h(x) = (x-1)e^{x-1} - \ln x (x \geq 1)$, 则

$$h'(x) = xe^{x-1} - \frac{1}{x} (x \geq 1),$$

易知 $h'(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h'(x) \geq h'(1) = 0$,

则 $h(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x) \geq h(1) = 0$, 则 $g'(x) \geq 0$, 且不恒为 0,

所以 $g(x)$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \geq g(1) = 2$, 所以 $k \leq 2$,

即实数 k 的取值范围为 $(-\infty, 2]$.

(3) 由题意可知 $\ln x + e^{x-1} = kx + b$ 有唯一解, 即 $\ln x + e^{x-1} - kx - b = 0$ 有唯一解,

$$\text{即 } k = \frac{\ln x + e^{x-1} - b}{x} \text{ 有唯一解.}$$

$$\text{设 } q(x) = \frac{\ln x + e^{x-1} - b}{x},$$



因为 $k \in \mathbf{R}$, 所以 $q(x)$ 为单调函数,

则 $q'(x) = \frac{(x-1)e^{x-1} - \ln x + 1 + b}{x^2} \geq 0$ 恒

成立,

设 $r(x) = (x-1)e^{x-1} - \ln x + 1 + b$, 则 $r(x) \geq 0$ 恒成立,

$r'(x) = xe^{x-1} - \frac{1}{x}$, $r''(x) = (x+1)e^{x-1} +$

$\frac{1}{x^2} > 0$, 所以 $r'(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单

调递增,

注意到 $r'(1) = 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $r'(x) < 0$, $r(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $r'(x) > 0$, $r(x)$ 单调递增,

故只需 $r(1) = 1 + b \geq 0$ 即可, 所以 $b \geq -1$,

即 b 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

第3节 利用导数研究函数的零点

刷

提分

1. D **考查点** ▶ 求函数零点或方程根的个数

【解析】由题设 $f'(x) = 6x(x-1)$, 则 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 且 $f(0) = 1 - a$, $f(1) = -a$.

由 $2^a + a = 2$, 即 $2^a = 2 - a$, 而 $y = 2^a$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, $y = 2 - a$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,

显然 $2^0 = 1 < 2 - 0 = 2$, $2^1 = 2 > 2 - 1 = 1$, 故 $0 < a < 1$, 所以 $f(0) > 0 > f(1)$,

又 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

结合 $f(x)$ 的图象可知 $f(x)$ 共有 3 个零点.

故选 D.

2. C **考查点** ▶ 函数图象对称性的应用、求函数零点或方程根的个数

【解析】令 $h(x) = f(x) - g(x) = \ln \frac{x}{x-2} + x -$

$1 - e^x + e^{2-x}$, 其定义域为 $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$,

令 $m(x) = h(x+1) = \ln \frac{x+1}{x-1} + x - e^{x+1} + e^{1-x}$,

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, 显然 $m(x)$ 是奇函数,

则其图象关于原点对称, 所以 $h(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称.

先讨论在 $(-\infty, 0)$ 上方程 $f(x) = g(x)$ 的所有实数解的情况, 即函数 $h(x)$ 的零点情况,

因为 $h'(x) = \frac{-2}{x(x-2)} + 1 - e^x - e^{2-x}$,

$\frac{-2}{x(x-2)} + 1 < 1$, $-e^x - e^{2-x} < -2\sqrt{e^x e^{2-x}} =$

$-2e$, 所以 $h'(x) < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

又 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$, $h(-1) = -\ln 3 -$

$2 - \frac{1}{e} + e^3 > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有且只有一个零



点 x_1 ;

又 $h(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 所以 $h(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上有且只有一个零点 x_2 ,

且 $x_1 + x_2 = 2$, 即方程 $f(x) = g(x)$ 的所有实数解的和是 2.

故选 C.

3. D 突破点 根据函数零点的个数求参数范围

【解析】由函数 $f(x) = e^x - a(x-1)$, 可得 $f'(x) = e^x - a$.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = e^x - a > 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

此时 $f(x)$ 至多有一个零点, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = \ln a$,

当 $x < \ln a$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减,

当 $x > \ln a$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $x = \ln a$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 也是最小值,

又函数 $f(x) = e^x - a(x-1)$ 有两个零点, 所以 $f(\ln a) < 0$,

即 $a(2 - \ln a) < 0$, 解得 $a > e^2$,

当 $a > e^2$ 时, $\ln a > 2$,

当 $x = 1 < \ln a$ 时, $f(1) = e > 0$,

当 $x = 2\ln a > \ln a$ 时, $f(2\ln a) = a^2 - 2a\ln a + a = a(a - 2\ln a + 1)$,

设 $\varphi(a) = a - 2\ln a + 1$, 则 $\varphi'(a) = 1 - \frac{2}{a} = \frac{a-2}{a}$, $a \in (e^2, +\infty)$ 时, $\varphi'(a) > 0$,

所以 $\varphi(a)$ 在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $\varphi(a) > \varphi(e^2) = e^2 + 1 - 4 > 0$,

所以 $f(2\ln a) = a(a - 2\ln a + 1) > 0$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(1, \ln a)$ 上有且只有一个零点,

在区间 $(\ln a, 2\ln a)$ 上有且只有一个零点,

所以满足函数 $f(x) = e^x - a(x-1)$ 有两个零点的实数 a 的取值范围是 $(e^2, +\infty)$.

故选 D.

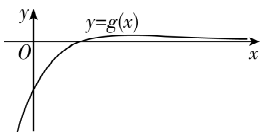
一题多解

令 $e^x - a(x-1) = 0$, 则 $x \neq$

$1, a \neq 0$, 那么 $\frac{1}{a} = \frac{x-1}{e^x}$,

设 $g(x) = \frac{x-1}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{2-x}{e^x}$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 2)$ 上单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,

且 $x > 2$ 时, $g(x) > 0$, $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, $g(x)$ 大致图象如图所示,



由 $f(x)$ 有两个零点, 可知直线 $y = \frac{1}{a}$

与 $g(x) = \frac{x-1}{e^x}$ 的图象有两个交点, 则 $0 <$

$\frac{1}{a} < g(2)$, 即 $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{e^2}$, 则 $a > e^2$, 故选 D.



4. D 突破点 ▶ 根据函数零点的个数求参数范围

【解析】 $f(x) = x^3 + 2x^2 + mx + 8, f'(x) = 3x^2 + 4x + m,$

$$f(x) = f'(x) \Rightarrow x^3 - x^2 - 4x + 8 = m(1-x),$$

显然 $x = 1$ 不满足上式, 所以 $x \neq 1$, 则

$$m = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 8}{1-x}.$$

$$\text{令 } g(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 8}{1-x} \quad (-4 \leq x < 1 \text{ 或 } 1 < x \leq 3), \text{ 则 } g'(x) = -\frac{2(x-2)(x^2+1)}{(1-x)^2} \quad \left(\text{另} \right.$$

$$\text{解: 由于 } m = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 8}{1-x}, \text{ 令 } t = 1-x, \text{ 则}$$

$$x = 1-t, \text{ 则 } m = -t^2 + 2t + \frac{4}{t} + 3, \text{ 设 } g(t) =$$

$$-t^2 + 2t + \frac{4}{t} + 3, g'(t) = -2t + 2 - \frac{4}{t^2} =$$

$$\frac{-2(t+1)[(t-1)^2+1]}{t^2} \Bigg),$$

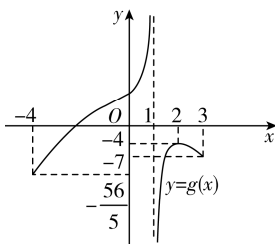
所以在 $(-4, 1), (1, 2)$ 上, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增,

在 $(2, 3)$ 上, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减,

$$\text{且 } g(-4) = -\frac{56}{5}, g(2) = -4, g(3) = -7,$$

$$x \rightarrow 1^+, g(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow 1^-, g(x) \rightarrow +\infty,$$

作出 $g(x)$ 大致图象如图所示, 则 $m \in [-7, -4)$. 故选 D.



5. A 突破点 ▶ 根据函数零点的个数求参数范围

【解析】由题意可得 $a^x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 - x -$

$$1 = 0 \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上有唯一解, 即 } a^x = \frac{1}{3}x^3 -$$

$$\frac{1}{2}ax^2 + x + 1 \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上有唯一解.}$$

$$\text{令 } g(x) = a^x, \text{ 则 } g'(x) = a^x \ln a,$$

$$\text{则 } g(0) = 1, g'(0) = \ln a,$$

$$\text{令 } h(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + x + 1, \text{ 则 } h'(x) =$$

$$x^2 - ax + 1,$$

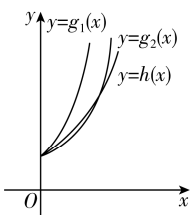
$$\text{则 } h(0) = 1, h'(0) = 1,$$

当 $0 < a < 1$ 时, 方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 中 $\Delta = a^2 - 4 < 0, h'(x)$ 图象开口向上, 则 $h'(x)$ 恒大于零, 所以 $h(x)$ 在 \mathbf{R} 上为增函数,

$g(x) = a^x$ 在 \mathbf{R} 上为减函数,

因为 $h(0) = g(0) = 1$, 所以 $g(x) = h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上无解;

当 $a > 1$ 时, $h'(0) > g'(0)$ 必须成立, 若 $h'(0) \leq g'(0)$, 会出现如图所示中 $y = g_1(x)$ 图象的情况,



即 $g(x) > h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 (提示: 指数函数的增长速度大于幂函数, 且 $h(0) = g(0) = 1$),

所以 $g(x)$ 图象只能为 $y = g_2(x)$ 图象的情况, 此时只需交点横坐标小于 1 即可,

所以令 $g(1) > h(1)$ 可得 $a > \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a + 2$,

解得 $a > \frac{14}{9}$,

又 $h'(0) > g'(0)$, 则 $1 > \ln a$, 即 $0 < a < e$,

所以实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{14}{9}, e\right)$.

故选 A.

6. ABD 突破点 ▶ 由导数求函数的最值 (不含参)

【解析】函数 $f(x) = xe^x + a \ln x + ax$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

由 $f(x)$ 有零点, 得方程 $xe^x + a \ln(xe^x) = 0$ 有正数解,

令 $xe^x = t > 0$, 即 $t + a \ln t = 0$ 有正数解, 显然

$a \neq 0$, 方程化为 $-\frac{1}{a} = \frac{\ln t}{t}$.

令函数 $g(t) = \frac{\ln t}{t}, t > 0$,

求导得 $g'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$,

当 $0 < t < e$ 时, $g'(t) > 0$, 当 $t > e$ 时, $g'(t) < 0$,

函数 $g(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $g(t)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e}$,

当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $g(t) \rightarrow -\infty$,

当 $t > 1$ 时, $g(t) > 0$, $t \rightarrow +\infty$ 时, $g(t) \rightarrow 0^+$,

因此 $-\frac{1}{a} < 0$ 或 $0 < -\frac{1}{a} \leq \frac{1}{e}$,

解得 $a \leq -e$ 或 $a > 0$, 所以 a 取到的整数值可以为 $-5, -3, 2$.

故答案为 ABD.

7. ACD 突破点 ▶ 利用导数研究双变量问题

【解析】 $g(x) = \ln x + x - 2 = e^{\ln x} + \ln x - 2 = f(\ln x)$,

又函数 $g(x) = \ln x + x - 2$ 的零点为 x_2 ,

则 $g(x_2) = f(\ln x_2) = 0$, 其中 $x_2 > 0$.

$f'(x) = e^x + 1 > 0$, 得 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数,

又 $f(x)$ 零点为 x_1 , 则 x_1 为其唯一零点.

又 $g(x_2) = f(\ln x_2) = 0$, 得 $x_1 = \ln x_2$.

注意到 $f(0) = -1 < 0$, $e \in (2.56, 2.89) \Rightarrow$

$e^{\frac{1}{2}} \in (1.6, 1.7)$,

则 $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} > 0$, 且 $x_1 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

因为 $g(x_2) = \ln x_2 + x_2 - 2 = 0$, $x_1 = \ln x_2$, 所



以 $x_1 + x_2 = \ln x_2 + x_2 = 2$, 故 A 正确.

因为 $x_1 = \ln x_2$, 所以 $2x_1 - x_2 = 2x_1 - e^{x_1}$, 令 $h(x) = 2x - e^x$, 则 $h'(x) = 2 - e^x$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, 此时 $h'(x) > h'(\frac{1}{2}) = 2 - e^{\frac{1}{2}} > 0$, 得 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递增,

所以 $x \in (0, \frac{1}{2})$ 时, $h(x) < h(\frac{1}{2}) = 1 - e^{\frac{1}{2}} < 0$, 即 $2x_1 < x_2$, 故 B 错误.

因为 $x_1 \in (0, \frac{1}{2})$, $x_1 = \ln x_2$, 则 $x_2 \in (1, e^{\frac{1}{2}})$, 故 $x_1 \neq x_2$, 则由 $x_1 + x_2 = 2$ 结合基本不等式得 $e^{x_1} + e^{x_2} > 2\sqrt{e^{x_1+x_2}} = 2\sqrt{e^2} = 2e$, 故 C 正确.

因为 $x_1 = \ln x_2$, 所以 $x_1 x_2 = x_2 \ln x_2$, 由 C 选项的分析可知 $x_2 \in (1, e^{\frac{1}{2}})$. 令 $p(x) = x \ln x$, 当 $x \in (1, e^{\frac{1}{2}})$ 时, $p'(x) = \ln x + 1 > 0$, 则 $p(x)$ 在 $(1, e^{\frac{1}{2}})$ 上单调递增, 此时 $p(x) < p(e^{\frac{1}{2}}) = \frac{\sqrt{e}}{2}$, 即 $x_1 x_2 < \frac{\sqrt{e}}{2}$. 故 D 正确.

故选 ACD.

8. C 突破点 ▶ 根据零点求函数解析式中的参数范围

【解析】由题可知, 原点为线段 AC, BD 的中点,

不妨设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(-x_1, -y_1), D(-x_2, -y_2), x_1 > 0, x_2 > 0$,

则有 $\begin{cases} y_1 = \ln(x_1 + 1), \\ -y_1 = ax_1^2 - abx_1, \end{cases} \begin{cases} y_2 = \ln(x_2 + 1), \\ -y_2 = ax_2^2 - abx_2. \end{cases}$

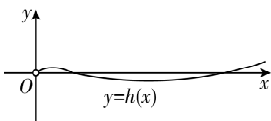
分别相加得 $\ln(x_1 + 1) + ax_1^2 - abx_1 = 0$, $\ln(x_2 + 1) + ax_2^2 - abx_2 = 0$,

相当于方程 $\ln(x + 1) + ax^2 - abx = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的实数根,

即 $h(x) = \ln(x + 1) + ax^2 - abx$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点,

显然 $h(0) = 0$, 即 $h(x) = \ln(x + 1) + ax^2 - abx$ 在 $[0, +\infty)$ 上有三个不同的零点,

作出 $h(x) = \ln(x + 1) + ax^2 - abx$ 的大致图象如图所示,



由图象可知该函数需要在 $(0, +\infty)$ 上有两个极值点.

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} + 2ax - ab = \frac{2ax^2 + (2a-ab)x + 1-ab}{x+1},$$

即 $h'(x)$ 需要在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.

当 $a \leq 0$ 时, 显然 $h'(x) = \frac{1}{x+1} + 2ax - ab$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递减, 故不可能在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.

当 $a > 0$ 时, $h'(x) =$



$\frac{2ax^2 + (2a-ab)x + 1-ab}{x+1}$ 有两个零点,

即 $2ax^2 + (2a-ab)x + 1-ab = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的实数根, 设为 x_3, x_4 ,

此时 $\Delta = (2a-ab)^2 - 8a(1-ab) > 0 \Rightarrow a(2+b)^2 - 8 > 0$,

则 $x_3x_4 = \frac{1-ab}{2a} > 0, x_3+x_4 = \frac{ab-2a}{2a} = \frac{b-2}{2} > 0$,

则 $ab < 1, b > 2$, 故 A, D 错误.

因为 $a > 0, b > 2$,

所以 $f(-2) = -2a(b-2) = 2a(2-b) < 0$, 故 B 错误.

由题可知, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = \ln(x+1) \geq 0$,

当 $x < 0$ 时, $f(x) = ax(x+b)$, 因为 $a > 0, b > 2$, 所以 $f(x) \geq f\left(-\frac{b}{2}\right) = -\frac{ab^2}{4}$, 又 $-\frac{ab^2}{4} < 0$, 故 C 正确. 故选 C.

9.1 突破点 ▶ 利用导数研究函数的零点、直线与抛物线交点相关问题

【解析】由题设有 $f'(x) = (x+1)e^x$, 则

$f'(x_0) = (x_0+1)e^{x_0}$, 且 $f(x_0) = x_0e^{x_0}$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ ($x_0 > 0$) 处的切线方程为 $y - x_0e^{x_0} = e^{x_0}(x_0+1)(x-x_0)$,

与抛物线方程联立, 得 $e^{x_0}(x_0+1)(x-x_0) + x_0e^{x_0} = ex^2$, 则 $ex^2 - e^{x_0}(x_0+1)x + x_0^2e^{x_0} = 0$,

由曲线 $y = f(x)$ 的切线与抛物线有且仅有一个公共点, 可得 $\Delta = e^{2x_0}(x_0+1)^2 - 4x_0^2e^{x_0+1} = 0$,

所以 $e^{x_0-1} = \left(2 - \frac{2}{x_0+1}\right)^2$ 且 $x_0 > 0$, 则

$e^{\frac{x_0+1}{2}-1} = 2 - \frac{2}{x_0+1}$,

令 $t = \frac{x_0+1}{2}$, 则 $t > \frac{1}{2}$, 可得 $e^{t-1} = 2 - \frac{1}{t}$, 即 $te^{t-1} - 2t + 1 = 0$,

令 $g(t) = te^{t-1} - 2t + 1, t > \frac{1}{2}$, 则 $g'(t) = (t+1)e^{t-1} - 2$,

令 $h(t) = g'(t)$, 则 $h'(t) = (t+2)e^{t-1} > 0$

在 $t \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上恒成立,

所以 $g'(t) = (t+1)e^{t-1} - 2$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 且 $g'(1) = 0$,

则在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上 $g'(t) < 0, g(t)$ 单调递减,

在 $(1, +\infty)$ 上 $g'(t) > 0, g(t)$ 单调递增, 且 $g(1) = 0$,

则 $t = \frac{x_0+1}{2} = 1$, 则 $x_0 = 1$.

10. 突破点 ▶ 已知切线(斜率)求参数、利用导数研究函数的零点

【解】(1) 由题意得 $f(x)$ 的定义域为



$$(1, +\infty), f'(x) = \frac{1}{x-1} - a^{x-1} (\ln a)^2,$$

$$\text{则 } f'(2) = 1 - a(\ln a)^2 = 1 - e,$$

$$\text{即 } a(\ln a)^2 = e,$$

$$\text{所以 } \ln[a(\ln a)^2] = \ln e = 1, \text{ 即 } \ln a + 2\ln(\ln a) = 1,$$

$$\text{令 } m = \ln a, \text{ 则 } m > 0, m + 2\ln m = 1,$$

又 $y = m + 2\ln m$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且当 $m = 1$ 时, $y = m + 2\ln m = 1$,

所以 $m = 1$, 即 $\ln a = 1$, 所以 $a = e$.

(2) 因为 $f(x)$ 有且只有两个零点, 所以 $\ln(x-1) - a^{x-1} \ln a = 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上有且只有两个大于 1 的不同的实数根, 又 $a^{x-1} \ln a = \ln(x-1)$, 所以 $(x-1)a^{x-1} \ln a = (x-1)\ln(x-1)$, 即 $(x-1)\ln(x-1) = a^{x-1} \ln a^{x-1}$ 有且只有两个大于 1 的不同的实数根,

$$\text{令 } F(x) = x \ln x, \text{ 则 } F'(x) = \ln x + 1,$$

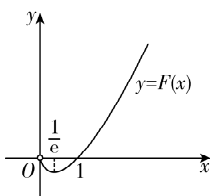
$$\text{由 } F'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{e}, \text{ 当 } x > \frac{1}{e} \text{ 时,}$$

$$F'(x) > 0, \text{ 当 } 0 < x < \frac{1}{e} \text{ 时, } F'(x) < 0,$$

所以 $F(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减

且 $F(x) < 0$, 在区间 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递

增且当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $F(x) > 0$, 作出 $F(x)$ 的大致图象如图①所示.



图①

又 $F(a^{x-1}) = F(x-1)$, $a > 1$ 且 $x > 1$, 所以 $a^{x-1} > 1$, 所以 $F(a^{x-1}) > F(1) = 0$,

要使 $F(a^{x-1}) = F(x-1)$, 则 $a^{x-1} = x-1 > 1$, 即 $\ln a = \frac{\ln(x-1)}{x-1}$ 有且只有两个大于 1 的不同的实数根.

$$\text{令 } Q(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 1,$$

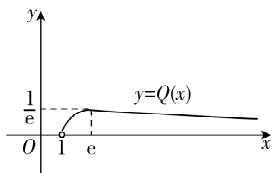
$$\text{则 } Q'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, x > 1,$$

当 $x > e$ 时, $Q'(x) < 0$, 当 $1 < x < e$ 时, $Q'(x) > 0$,

所以 $Q(x)$ 在区间 $(1, e)$ 上单调递增, 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

$$\text{又 } Q(e) = \frac{1}{e}, \text{ 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } Q(x) \rightarrow 0^+,$$

作出 $Q(x)$ 的大致图象如图②所示,



图②



所以 $0 < \ln a < \frac{1}{e}$, 即 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, 故实数

a 的取值范围是 $(1, e^{\frac{1}{e}})$.

一题多解

(2) 令 $\ln(x-1) - a^{x-1} \ln a = 0$, 设 $t = x-1 > 0$, 则 $\ln t = a^t \ln a$, 即 $\log_a t = a^t$, 且 $y = \log_a t$ 与 $y = a^t$ 的图象关于直线 $y=t$ 对称,

考虑临界情况: 若 $y = \log_a t$ 与 $y = a^t$ 相切于一点, 则切点必在直线 $y=t$ 上, 设切点为 (t_0, t_0) ,

$$\text{此时} \begin{cases} \frac{1}{t_0 \ln a} = 1, \\ a^{t_0} \ln a = 1, \end{cases} \text{ 则 } \begin{cases} a = e^{\frac{1}{e}}, \\ t_0 = e, \end{cases}$$

所以 $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, 从而仅需说明 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 不符合题意.

设 $g(t) = \ln t - a^t \ln a$, 则 $g'(t) = \frac{1}{t} - a^t (\ln a)^2$, 设 $h(t) = g'(t)$, 则 $h'(t) = -\frac{1}{t^2} - a^t (\ln a)^3 < 0$,

所以 $g'(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 由于 $\lim_{t \rightarrow 0} g'(t) > 0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} g'(t) < 0$,

由零点存在定理, 可知存在唯一的 $t_0 \in (0, +\infty)$, 使 $g'(t_0) = 0$,

则 $g(t)$ 在 $(0, t_0)$ 上单调递增, 在 $(t_0, +\infty)$ 上单调递减, 且 $\frac{1}{t_0 \ln a} = a^{t_0} \ln a$, 即 $\ln t_0 = -t_0 \ln a - 2 \ln(\ln a)$,

所以当 $a > e^{\frac{1}{e}}$ 时, $g(t) \leq g(t_0) = \ln t_0 - a^{t_0} \ln a = -\left(t_0 \ln a + \frac{1}{t_0 \ln a}\right) - 2 \ln(\ln a) < -2 + 2 = 0$,

此时函数没有零点, 不符合题意.

综上, $a \in (1, e^{\frac{1}{e}})$.

11. 突破点 ▶ 利用导数研究不等式恒成立问题、函数的零点

(1) 【解】因为 $f(x) = \tan x - ax$, 所以

$$f(0) = 0, f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - a,$$

又 $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - a$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

当 $a \leq 0$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan x > 0$, $-ax \geq 0$, 所以 $f(x) > 0$, 符合题意;

当 $a > 1$ 时, $f'(0) = 1 - a < 0$, 当 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$, 故存在唯一零点 x_0 , 使得 $f'(x_0) = 0$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 此时 $f(x) < f(0) = 0$, 不符合题意;

当 $0 < a \leq 1$ 时, $f'(x) > f'(0) = 1 - a \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 则



$f(x) > f(0) = 0$, 符合题意. 综上可知, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

(2) 【证明】①当 $a = 1$ 时 $f(x) = \tan x - x$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0$ 在定义域上恒成立,

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right) (n \in \mathbf{N}^*)$ 上单调递增, 且 $f(n\pi) = -n\pi < 0$,

当 $x \rightarrow n\pi + \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right) (n \in \mathbf{N}^*)$ 上存在唯一零点, 即为 r_n ,

则 $r_1 - \pi, r_2 - 2\pi, r_3 - 3\pi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 记

$s_i = r_i - i\pi$, 则 $s_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $\tan s_i = s_i + i\pi (i = 1, 2, \dots, n)$,

故 $f(s_1) + f(s_3) = 2f(s_2)$,

要证明 $r_1 + r_3 < 2r_2$, 即证明 $s_1 + s_3 < 2s_2$,

只需证明 $f\left(\frac{s_1 + s_3}{2}\right) < f(s_2) = \frac{f(s_1) + f(s_3)}{2}$.

构造函数 $g(x) = f(x) + f(s_1) - 2f\left(\frac{x + s_1}{2}\right)$, $x > s_1$, 且 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 则

$g'(x) = f'(x) - f'\left(\frac{x + s_1}{2}\right)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

由(1)可知, $f'(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单

调递增, 而 $\frac{\pi}{2} > x > \frac{x + s_1}{2} > 0$, 故 $f'(x) >$

$f'\left(\frac{x + s_1}{2}\right)$, 故 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

从而 $g(s_3) > g(s_1) = 0$, 故 $f\left(\frac{s_1 + s_3}{2}\right) < \frac{f(s_1) + f(s_3)}{2}$, 即 $s_1 + s_3 < 2s_2$, 即 $r_1 + r_3 < 2r_2$.

②由①可知 $r_n + \pi, r_{n+1} \in \left((n+1)\pi, (n+1)\pi + \frac{\pi}{2}\right) (n \in \mathbf{N}^*)$,

又 $\tan(r_n + \pi) = \tan r_n = r_n < r_{n+1} = \tan r_{n+1}$,

故 $r_n + \pi < r_{n+1}$, 故 $0 < r_{n+1} - r_n - \pi < \frac{\pi}{2}$,

结合(1)可得, $r_{n+1} - r_n - \pi < \tan(r_{n+1} - r_n - \pi)$

$= \frac{\tan r_{n+1} - \tan r_n}{1 + \tan r_n \tan r_{n+1}} = \frac{r_{n+1} - r_n}{1 + r_n r_{n+1}}$

$\frac{1}{\frac{1}{r_n} + 1} - \frac{1}{\frac{1}{r_{n+1}} + 1} < \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n+1}}$,

故 $r_{n+1} + \frac{1}{r_{n+1}} < r_n + \frac{1}{r_n} + \pi$, 所以 $r_n + \frac{1}{r_n} < r_1 +$



$$\frac{1}{r_1} + (n-1)\pi,$$

又 $r_1 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ 上单调递增,

$$\text{所以 } r_1 + \frac{1}{r_1} < \frac{3\pi}{2} + \frac{2}{3\pi} < \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{12} = \frac{19\pi}{12},$$

$$\text{故 } r_n + \frac{1}{r_n} < \frac{19\pi}{12} + (n-1)\pi = \left(n + \frac{7}{12}\right)\pi.$$

专题 1 隐零点

刷

难关

1. **突破点** ▶ 利用导数研究不等式恒成立问题、含参分类讨论求函数的单调区间

【解】(1) 由已知条件得 $f'(x) = e^x - a$, 在点 $(0, f(0))$ 处的切线斜率为 $f'(0) = 1 - a = 1$, 则 $a = 0$.

(2) $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = e^x - a$, 若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数;

若 $a > 0$, 由 $f'(x) = e^x - a > 0$, 得 $x > \ln a$, 由 $f'(x) = e^x - a < 0$, 得 $x < \ln a$,

则 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln a, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\infty, \ln a)$.

(3) 若 $a = 1$, 不等式化为 $(x-k)f'(x) + x + 1 = (x-k)(e^x - 1) + x + 1 > 0$,

即 $xe^x + 1 > k(e^x - 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

当 $x > 0$ 时, $e^x - 1 > 0$, 即 $k < \frac{x+1}{e^x-1} + x$ 恒成立.

$$\text{令 } g(x) = \frac{x+1}{e^x-1} + x, \text{ 则 } g'(x) = \frac{-xe^x-1}{(e^x-1)^2} + 1 = \frac{e^x(e^x-x-2)}{(e^x-1)^2}.$$

令 $h(x) = e^x - x - 2$, 由(2)知, 函数 $h(x) = e^x - x - 2$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

其中 $h(1) < 0, h(2) > 0$,

由函数零点存在定理可知 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一的零点 x_0 ($1 < x_0 < 2$), 满足 $e^{x_0} = x_0 + 2$,

所以在 $(0, x_0)$ 上 $h(x) < 0$, 在 $(x_0, +\infty)$ 上 $h(x) > 0$,

所以在 $(0, x_0)$ 上 $g'(x) < 0$, 在 $(x_0, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$,

则 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值为

$$g(x_0) = \frac{x_0+1}{e^{x_0}-1} + x_0 = \frac{x_0+1}{x_0+2-1} + x_0 = 1 + x_0,$$

又因为 $1 < x_0 < 2$, 所以 $2 < x_0 + 1 < 3$, 即 $2 < g(x_0) < 3$,

所以 $k \leq 2$, 又 k 为整数,

所以 k 的最大值为 2.

一题多解

(3) 若 $xe^x + 1 > k(e^x - 1)$,

$x > 0$, 令 $x = 1$, 则 $k < \frac{e+1}{e-1}$ 且 $k \in \mathbf{Z}$, 则 $k \leq 2$.

下证: $k = 2$ 时不等式成立, 即证明当 $x > 0$ 时 $xe^x + 1 > 2(e^x - 1)$, 等价于 $(x-2)e^x + 3 > 0$,



设 $g(x) = (x-2)e^x + 3, x > 0$, 则 $g'(x) = (x-1)e^x$,

则 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(1) = 3 - e > 0$, 得证.

则 k 的最大值为 2.

2. 突破点 ▶ 利用导数证明不等式、利用导数研究函数的零点

(1) 【解】 $a=0$ 时, $f'(x) = e^x - b$.

当 $b \leq 1$ 时, $f'(x) \geq 0$, 且不恒为 0, 则函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 此时无极值;

当 $b > 1$ 时, 在 $[0, \ln b)$ 上, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 在 $(\ln b, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 此时函数 $f(x)$ 有极小值, 极小值是 $b - b \ln b$, 无极大值.

(2) (i) 【解】当 $b=0$ 时, 因为函数 $f(x)$ 存在零点, 故 $e^x = a\sqrt{x}$ 有解, 若 $x=0$, 此时等式不成立, 所以 $x > 0$, 即 $g(x) = e^x - a\sqrt{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有零点, $g'(x) = e^x -$

$$\frac{a}{2\sqrt{x}} = \frac{2e^x\sqrt{x} - a}{2\sqrt{x}},$$

①若 $a \leq 0$, 则 $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x) > g(0) = 1$, 此时不存在零点;

②若 $a > 0$, 令 $h(x) = 2e^x\sqrt{x} - a$, 则 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(0) = -a < 0$, $h(a^2) = 2e^{a^2}a - a > 0$,

由函数零点存在定理可知存在 $x_1 \in (0, a^2)$, 使 $h(x_1) = 0$, 即满足 $2e^{x_1}\sqrt{x_1} = a$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x)_{\min} = e^{x_1} -$

$$a\sqrt{x_1} = \frac{a}{2\sqrt{x_1}} - a\sqrt{x_1} \leq 0, \text{ 解得 } x_1 \geq \frac{1}{2},$$

故 $a \geq \sqrt{2}e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2e}$. 故 a 的取值范围为 $[\sqrt{2e}, +\infty)$.

(ii) 【证明】因为函数 $f(x)$ 存在零点, 所以方程 $e^x - a\sqrt{x} - bx = 0$ 有解, 设为 x_0 , 其中 $x_0 \geq 0$,

若 $x_0 = 0$, 则 $1 - a \times 0 - b \times 0 = 0$, 该式不成立, 故 $x_0 > 0$.

故 $a\sqrt{x_0} + bx_0 - e^{x_0} = 0$, 考虑关于 a, b 的直线方程 $a\sqrt{x_0} + bx_0 - e^{x_0} = 0$,

则 $\sqrt{a^2 + b^2}$ 表示原点与直线 $a\sqrt{x_0} + bx_0 - e^{x_0} = 0$

突破点

0 上的动点 (a, b) 之间的距离,

$$\text{则 } \sqrt{a^2 + b^2} \geq \frac{e^{x_0}}{\sqrt{x_0^2 + x_0}}, \text{ 即 } a^2 + b^2 \geq \frac{e^{2x_0}}{x_0^2 + x_0},$$

$x_0 > 0$ 时, 要证 $a^2 + b^2 > 2$, 只需证 $\frac{e^{2x_0}}{x_0^2 + x_0} > 2$,

即证 $e^{2x_0} - 2x_0^2 - 2x_0 > 0$.

令 $G(x) = e^{2x} - 2x^2 - 2x$, 则 $G'(x) = 2e^{2x} -$



$$4x-2=2(e^{2x}-2x-1),$$

令 $H(x) = e^{2x} - 2x - 1$, 则 $H'(x) = 2(e^{2x} - 1) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $H(x) > H(0) = 0$.

即 $G'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时

$$G(x) > G(0) = 1 > 0, \text{ 故 } \frac{e^{2x_0}}{x_0^2 + x_0} > 2, \text{ 即 } a^2 + b^2 >$$

2 成立.

第4节 利用导数解决不等式恒成立及有解问题

刷

提分

1. A 考查点 ▶ 端点效应

【解析】 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = -f(x)$, 且 $f'(x) = 2\cos x - 3 < 0$, 所以函数 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的减函数且为奇函数, 因此 $f(ma-3) + f(a^2) > 0 \Rightarrow f(ma-3) > -f(a^2) = f(-a^2) \Rightarrow ma-3 < -a^2$, 即

$$\begin{cases} 2a-3 < -a^2, \\ -2a-3 < -a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < a < 1, \\ -1 < a < 3 \end{cases} \Rightarrow -1 < a < 1. \text{ 故}$$

选 A.

2. B 突破点 ▶ 构造函数、基本不等式的应用

【解析】令 $g(x) = f(x+1) = e^x - e^{-x} + \sin x$, 定义域为 \mathbf{R} ,

$$g(-x) = e^{-x} - e^x + \sin(-x) = e^{-x} - e^x - \sin x = -g(x),$$

故 $g(x)$ 为奇函数, 即 $f(-x+1) = -f(x+1)$,

$$g'(x) = e^x + e^{-x} + \cos x \geqslant 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} + \cos x = 2 + \cos x > 0, \text{ 当且仅当 } x=0 \text{ 时等号成立,}$$

故 $g(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数,

$$f(x^2-x-2) + f(-2x) \geqslant 0 \Rightarrow f(x^2-x-2) \geqslant -f(-2x),$$

$$\text{故 } f[(x^2-x-3)+1] \geqslant -f[(-2x-1)+1] = f[(2x+1)+1],$$

$$\text{即 } g(x^2-x-3) \geqslant g(2x+1),$$

$$\text{所以 } x^2-x-3 \geqslant 2x+1, \text{ 即 } x^2-3x-4 \geqslant 0,$$

$$\text{解得 } x \geqslant 4 \text{ 或 } x \leqslant -1.$$

故选 B.

3. B 突破点 ▶ 利用导数求函数的最值(不含参)、利用导数研究不等式恒成立问题

【解析】依题意, $\forall x > 0, f(x) > g(x) \Leftrightarrow a < xe^x - x - \ln x$ 恒成立, 令 $h(x) = xe^x - x - \ln x, x > 0$,

$$\text{求导得 } h'(x) = (x+1)e^x - 1 - \frac{1}{x} = (x+1) \cdot$$

$$\left(e^x - \frac{1}{x}\right), \text{ 令 } \varphi(x) = e^x - \frac{1}{x}, \text{ 则易知}$$

$\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\text{且 } \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0, \varphi(1) = e - 1 > 0, \text{ 则存}$$

$$\text{在 } x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{ 使得 } \varphi(x_0) = 0, \text{ 即}$$

$$e^{x_0} = \frac{1}{x_0}.$$



当 $0 < x < x_0$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $h'(x) > 0$, 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增. 由 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 得 $x_0 e^{x_0} = 1, x_0 + \ln x_0 = 0$, 因此

$$h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0 e^{x_0} - x_0 - \ln x_0 = 1,$$

则 $a < 1$, 所以 a 的最大整数值为 0.

故选 B.

4. B 突破点 ▶ 导数的几何意义、数形结合法

【解析】原不等式可化为 $2ax - a > xe^x$, 设 $f(x) = 2ax - a, g(x) = xe^x$,

则函数 $f(x) = 2ax - a$ 的图象过定点

$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 因为不等式 $xe^x - 2ax + a < 0$ 的解

集非空, 所以函数 $g(x) = xe^x$ 的图象一定有部分在函数 $f(x) = 2ax - a$ 的图象的下方, 又因为不等式 $xe^x - 2ax + a < 0$ 的解集中无整数解, 所以该部分图象对应的横坐标中没有整数,

由 $g(x) = xe^x$, 得 $g'(x) = (x+1)e^x$. 考虑临界情况: 直线 $f(x) = 2ax - a$ 与曲线 $g(x) = xe^x$ 相切时, 设切点为 (m, n) ,

则有 $\begin{cases} 2a = (m+1)e^m, \\ me^m = 2am - a, \end{cases}$ 消去 a 整理得

$$2m^2 - m - 1 = 0, \text{ 解得 } m = -\frac{1}{2} \text{ 或 } m = 1,$$

若 $m = 1$, 则切点横坐标为 1, 当直线

$f(x) = 2ax - a$ 绕点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 旋转时, 要使

不等式 $xe^x - 2ax + a < 0$ 的解集非空, 解集中一定含有整数 1, 所以不合题意, $m = 1$ 舍去;

故 $m = -\frac{1}{2}$, 则切线的斜率为 $2a =$

$$\left(-\frac{1}{2} + 1\right)e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{2e}, \text{ 解得 } a = \frac{\sqrt{e}}{4e}.$$

又由题意知原不等式无整数解, 结合图象可得当 $x = -1$ 时, $f(-1) = -2a - a =$

$$-3a, g(-1) = -\frac{1}{e}, \text{ 当 } f(-1) = g(-1) \text{ 时,}$$

解得 $a = \frac{1}{3e}$, 当直线 $f(x) = 2ax - a$ 绕点

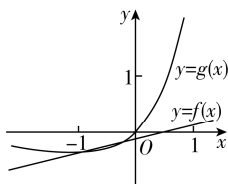
$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 旋转时,

要使不等式 $xe^x - 2ax + a < 0$ 的解集非空,

且解集中无整数解, 必有 $\frac{1}{3e} \leq a < \frac{\sqrt{e}}{4e}$, 故

实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{3e}, \frac{\sqrt{e}}{4e}\right)$.

故选 B.



5. A 突破点 ▶ 同构思想



【解析】由 $f(x) = e^x - a \ln a - a \ln(x-1) +$

$a \geq 0$ 可得 $\frac{e^x}{a} - \ln a \geq \ln(x-1) - 1$,

即 $e^{x-\ln a} + x - \ln a \geq x - 1 + \ln(x-1)$,

构造函数 $g(x) = e^x + x$, 则 $g'(x) = 1 + e^x > 0$, 故函数 $g(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数,

所以 $g(x - \ln a) \geq g(\ln(x-1))$, 则 $x - \ln a \geq \ln(x-1)$,

即 $\ln a \leq x - \ln(x-1)$, $x > 1$, 令 $h(x) = x - \ln(x-1)$, $x > 1$,

则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$, 当 $1 < x < 2$ 时,

$h'(x) < 0$, 此时函数 $h(x)$ 单调递减,

当 $x > 2$ 时, $h'(x) > 0$, 此时函数 $h(x)$ 单调递增,

所以 $\ln a \leq h(x)_{\min} = h(2) = 2$, 解得 $a \leq e^2$.

故实数 a 的取值范围为 $(0, e^2]$. 故选 A.

一题多解

已知 $f(x) = e^x - a \ln(ax -$

$a) + a$, $x > 1$, 则 $f'(x) = e^x - \frac{a}{x-1}$, 令

$h(x) = f'(x)$, 则 $h'(x) = e^x + \frac{a}{(x-1)^2} > 0$,

所以 $f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) > 0$,

由函数零点存在定理, 可知存在唯一的 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 则 $a =$

$(x_0 - 1)e^{x_0}$,

且 $f(x)$ 在 $(1, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) \geq f(x_0) =$

$e^{x_0} - (x_0 - 1)e^{x_0} [2\ln(x_0 - 1) + x_0] + (x_0 - 1) \cdot e^{x_0} = e^{x_0} \{ x_0 - (x_0 - 1) [2\ln(x_0 - 1) + x_0] \} \geq$

0 , 即 $\frac{x_0}{x_0 - 1} - 2\ln(x_0 - 1) - x_0 \geq 0$,

令 $t = x_0 - 1$, $t > 0$,

设 $g(t) = \frac{t+1}{t} - 2\ln t - (t+1) = \frac{1}{t} - t - 2\ln t$,

则 $g'(t) = -\frac{1}{t^2} - 1 - \frac{2}{t} = \frac{-(t+1)^2}{t^2} < 0$,

所以 $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且

$g(1) = 0$, 所以由 $g(t) \geq 0$ 可得 $0 < t \leq 1$, 则 $1 < x_0 \leq 2$,

因为 a 关于 x_0 单调递增, 所以 $a \in (0, e^2]$.

6. A 突破点 将不等式恒成立问题转化为函数最值问题、放缩法

【解析】不等式 $\frac{2\lambda x^2}{1+\ln x} - e^{\mu+1} \geq 0$ 对任意

$x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ 恒成立,

即 $\frac{2\lambda}{e^{\mu+1}} \geq \frac{1+\ln x}{x^2}$ 在 $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ 上恒成立,

令 $f(x) = \frac{1+\ln x}{x^2}$, $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$,

则 $f'(x) = \frac{-1-2\ln x}{x^3}$,

令 $f'(x) > 0$, 得 $\frac{1}{e} < x < e^{-\frac{1}{2}}$, 令 $f'(x) < 0$,



得 $e^{-\frac{1}{2}} < x < e$,

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, e^{-\frac{1}{2}}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(e^{-\frac{1}{2}}, e\right)$ 上单调递减,

所以 $f(x)_{\max} = f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{e}{2}$,

所以 $\frac{2\lambda}{e^{\mu+1}} \geq \frac{e}{2}$, 即 $e^{\mu} \leq \frac{4\lambda}{e^2}, \lambda > 0$.

令 $g(x) = e^x - ex, x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$, 则 $g'(x) = e^x - e$, 所以当 $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (1, e)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 所以 $g(x) \geq g(1) = 0$, 故 $e^{\mu} \geq e\mu$, 当且仅当 $\mu = 1$ 时等号成立,

所以 $e\mu \leq \frac{4\lambda}{e^2}$, 即 $\frac{\mu}{\lambda} \leq \frac{4}{e^3}$,

所以 $\frac{\mu}{\lambda}$ 的最大值为 $\frac{4}{e^3}$.

故选 A.

7. D 考查点 ▶ 求过一点的切线方程、恒成立及有解问题的综合应用

【解析】 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$, 因为 $y = e^x$ 在

$(-1, +\infty)$ 上单调递增, $y = -\frac{1}{x+1}$ 在 $(-1,$

$+\infty)$ 上单调递增, 所以 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$

在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f'(0) = e^0 - \frac{1}{0+1} = 0$, 所以当 $0 < x < 2$ 时, $f'(x) >$

$f'(0) = 0$, 故 A 错误;

由对 A 的分析可知, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得最小值, $f(0) = e^0 - \ln(0+1) - 1 = 0$, 无最大值, 故 B 错误;

由上述分析知 $f(x)_{\min} = 0$, 由题可知, $\exists x_2 \in (0, +\infty)$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$ 成立, 则 $g(x)_{\min} \leq 0$. 对于函数 $g(x) = \ln x - ax, x > 0$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 故无论 a 取什么值, 都满足 $\exists x \in (0, +\infty)$, 使得 $g(x) \leq 0$,

则 a 的取值范围为 \mathbf{R} , 故 C 错误;

不妨设切点为 $(x_0, e^{x_0} - \ln(x_0 + 1) - 1)$, $f'(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0+1}$, 则切线方程为

$y - [e^{x_0} - \ln(x_0 + 1) - 1] = \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0+1}\right)(x -$

$x_0)$, 把点 $(0, 0)$ 代入, 可得 $0 - [e^{x_0} - \ln(x_0 + 1) - 1] = \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0+1}\right)(0 - x_0)$,

即 $(x_0 - 1)e^{x_0} + \ln(x_0 + 1) + \frac{1}{x_0+1} = 0$.

令 $h(x) = (x - 1)e^x + \ln(x + 1) + \frac{1}{x+1}$,



$$x > -1,$$

$$\text{则 } h'(x) = xe^x + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = xe^x +$$

$$\frac{x}{(x+1)^2} = x \left[e^x + \frac{1}{(x+1)^2} \right],$$

$$\text{因为 } e^x + \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \text{ 对 } x > -1 \text{ 恒成立,}$$

所以当 $-1 < x < 0$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$,

故 $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $h(0) = 0$, 所以 $h(x)$ 只有一个零点为 0, 即只有 $x_0 = 0$ 时, $(x_0 - 1)e^{x_0} + \ln(x_0 +$

$$1) + \frac{1}{x_0 + 1} = 0 \text{ 成立, 故过点 } (0, 0) \text{ 作}$$

$y = f(x)$ 的切线有且只有一条, 故 D 正确. 故选 D.

方法总结

一般地, 已知函数 $y =$

$$f(x), x \in [a, b], y = g(x), x \in [c, d]$$

(1) 若 $\forall x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d]$, 总有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$;

(2) 若 $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$;

(3) 若 $\exists x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立, 故 $f(x)_{\min} < g(x)_{\max}$;

(4) 若 $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$, 有 $f(x_1) = g(x_2)$, 则 $f(x)$ 的值域是 $g(x)$ 值域的子集.

8. A 突破点 ▶ 构造函数、变量全分离

$$\text{【解析】将不等式 } e^x + 1 \geq 2 \left(a^2 x + \frac{1}{x} \right) \cdot$$

$$\ln(ax) \text{ 变形可得 } x(e^x + 1) \geq (a^2 x^2 + 1) \cdot \ln(ax)^2,$$

$$\text{即 } (e^x + 1) \ln e^x \geq [(ax)^2 + 1] \ln(ax)^2,$$

构造函数 $f(x) = (x+1) \ln x, x > 0$, 可

$$\text{得 } f'(x) = \ln x + (x+1) \cdot \frac{1}{x} = \ln x +$$

$$\frac{1}{x} + 1,$$

$$\text{令 } g(x) = f'(x) = \ln x + \frac{1}{x} + 1, \text{ 则 } g'(x) =$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, 即 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(1) = 2$, 即 $f'(x) \geq 2$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

利用 $f(x)$ 的单调性并根据 $(e^x + 1) \ln e^x \geq [(ax)^2 + 1] \ln(ax)^2$ 可得 $f(e^x) \geq f((ax)^2)$, 则有 $e^x \geq (ax)^2$,

$$\text{由 } a > 0, x > 0, \text{ 可得 } e^{\frac{x}{2}} \geq ax, \text{ 即 } a \leq \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} \text{ 对任意}$$



$x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 因此 $a \leq \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} \right)_{\min}$.

$$\text{令 } h(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x}, x \in (0, +\infty), \text{ 则 } h'(x) = \frac{\frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}}}{x^2} = \frac{e^{\frac{x}{2}} \left(\frac{1}{2}x - 1 \right)}{x^2},$$

显然当 $x \in (0, 2)$ 时, $h'(x) < 0$, 则函数 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减,

当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 则函数 $h(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(2) = \frac{e}{2}$, 即 $a \leq$

$\left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} \right)_{\min} = \frac{e}{2}$, 因此正实数 a 的最大值是 $\frac{e}{2}$. 故选 A.

9. C 突破点 ▶ 变量半分离

【解析】令 $f(x) < 0$ 得 $e^x(ax-1) < x-2$, 所以 $ax-1 < \frac{x-2}{e^x}$,

$$\text{令 } g(x) = ax-1, h(x) = \frac{x-2}{e^x},$$

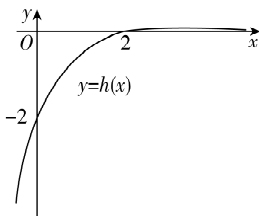
则问题转化为 $g(x) < h(x)$ 存在唯一的整数解 x_0 .

因为 $h'(x) = \frac{-x+3}{e^x}$, 所以当 $x \in (-\infty, 3)$

时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 当 $x \in (3, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

又 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$, $h(0) = -2$, $h(2) = 0$,

故可作出 $h(x)$ 的图象如图①所示.



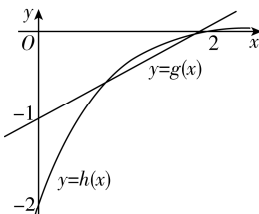
图①

$g(x) = ax-1$ 的图象过定点 $(0, -1)$,

则当 $a \leq 0$ 时, 显然 $g(x) < h(x)$ 存在无数个整数解, 不符合题意.

当 $a > 0$ 时, $g(x) < h(x)$ 的唯一整数解可以为 -1 或 1 .

当 $x_0 = 1$ 时, 如图②所示,



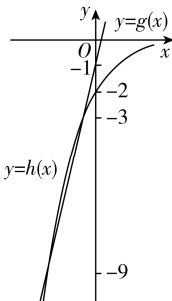
图②

则 $\begin{cases} a > 0, \\ g(2) \geq h(2), \\ g(1) < h(1), \end{cases}$ 解得 $a \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right)$.



$$\frac{1}{e} \Bigg).$$

当 $x_0 = -1$ 时, 如图③所示,



图③

$$\text{则} \begin{cases} a > 0, \\ g(-2) \geq h(-2), \\ g(-1) < h(-1), \end{cases} \text{解得 } a \in \left(3e - 1, 2e^2 - \frac{1}{2} \right].$$

综上, $a \in \left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{e} \right) \cup \left(3e - 1, 2e^2 - \frac{1}{2} \right]$. 故选 C.

10. 突破点 ▶ 端点效应

【解】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = x - 3\ln x$, 其

$$\text{中 } x > 0, \text{ 则 } f'(x) = 1 - \frac{3}{x} = \frac{x-3}{x},$$

由 $f'(x) < 0$ 可得 $0 < x < 3$, 由 $f'(x) > 0$ 可得 $x > 3$,

所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 3)$, 单调递增区间为 $(3, +\infty)$,

$$\text{所以 } f(x)_{\min} = f(3) = 3 - 3\ln 3.$$

(2) 因为 $h(x) = f(x) - g(x) = x - (a+2) \cdot \ln x - \frac{a+1}{x}$, 其中 $x > 0$,

$$\begin{aligned} \text{则 } h'(x) &= 1 - \frac{a+2}{x} + \frac{a+1}{x^2} \\ &= \frac{x^2 - (a+2)x + (a+1)}{x^2} \\ &= \frac{(x-1)[x-(a+1)]}{x^2}. \end{aligned}$$

当 $a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -1$ 时, 由 $h'(x) < 0$ 可得 $0 < x < 1$, 由 $h'(x) > 0$ 可得 $x > 1$,

此时函数 $h(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$;

当 $0 < a+1 < 1$, 即 $-1 < a < 0$ 时,

由 $h'(x) < 0$ 可得 $a+1 < x < 1$, 由 $h'(x) > 0$ 可得 $0 < x < a+1$ 或 $x > 1$,

此时, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a+1)$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a+1, 1)$;

当 $a+1 = 1$, 即 $a = 0$ 时, 对任意的 $x > 0$, $h'(x) \geq 0$, 且不恒为 0,

此时函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间;

当 $a+1 > 1$, 即 $a > 0$ 时,

由 $h'(x) > 0$ 可得 $0 < x < 1$ 或 $x > a+1$, 由 $h'(x) < 0$ 可得 $1 < x < a+1$,

此时函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0,$



$1), (a+1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, a+1)$.

综上所述, 当 $a \leq -1$ 时, 函数 $h(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$;

当 $-1 < a < 0$ 时, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a+1), (1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a+1, 1)$;

当 $a = 0$ 时, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间;

当 $a > 0$ 时, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1), (a+1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, a+1)$.

(3) 由(2)可知, 在区间 $[1, e]$ 上存在一点 x_0 , 使得 $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) < 0$, 即在区间 $[1, e]$ 上, $h(x)_{\min} < 0$. 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 则 $h(x)_{\min} = h(1) = -a \geq 0$, 不符合题意.

当 $a > 0$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $[1, a+1]$ 上单调递减, 在 $[a+1, +\infty)$ 上单调递增,

(i) 若 $a+1 \leq e$, 即 $a \leq e-1$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $[1, a+1]$ 上单调递减, 在 $[a+1, e]$ 上单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(1+a) = a - (2+a) \cdot \ln(1+a) < 0$,

设 $m(a) = a - (2+a) \ln(1+a)$, 其中 $0 < a \leq e-1$, 则 $m'(a) = -\frac{1}{1+a} - \ln(1+a) < 0$,

所以函数 $m(a)$ 在 $(0, e-1]$ 上单调递减, 则 $m(a) < m(0) = 0$, 符合题意, 故 $0 < a \leq e-1$;

(ii) 若 $a+1 > e$, 即 $a > e-1$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减,

所以 $h(x)_{\min} = h(e) = e - (a+2) - \frac{a+1}{e} < 0$, 解得 $a > \frac{e^2 - 2e - 1}{e+1}$,

因为 $\frac{e^2 - 2e - 1}{e+1} - (e-1) = \frac{e^2 - 2e - 1 - (e+1)(e-1)}{e+1} = -\frac{2e}{e+1} < 0$, 则 $a > e-1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围是 $(0, +\infty)$.

11. 突破点 ▶ 利用导数研究不等式恒成立问题

【解】(1) $f'(x) = -\frac{a}{(x+1)^2}$, $g'(x) = -\frac{b}{2x^2}$,

根据题意有 $f(1) = g(1)$, 即 $\frac{a}{2} = \frac{1+b}{2}$,

$f'(1) = g'(1)$, 即 $-\frac{a}{4} = -\frac{b}{2}$,

联立解得 $a = 2, b = 1$.

(2) 由(1)知, $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $g(x) = \frac{x+1}{2x}$,

所以函数 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4x}{(x+1)^2}$ ($x \neq -1$ 且 $x \neq 0$),

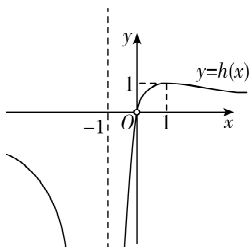
所以 $h'(x) = \frac{4(1-x^2)}{(x+1)^4}$,

因此函数 $h(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$



上单调递减,在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上单调递增, $h(1)=1$,当 $x \rightarrow -1$ 时, $h(x) \rightarrow -\infty$,当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0^-$,当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow 0^+$,

其大致图象如图,故函数 $h(x)$ 只有唯一的极大值 $h(1)=1$,无极小值.



(3) 当 $x > 1$ 时, $\frac{2}{x+1} < \frac{m \ln x}{x-1} < \frac{x+1}{2x}$ 恒成立

等价于 $\frac{2(x-1)}{x+1} < m \ln x < \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$ 恒成立,显然有 $m > 0$.

令 $F(x) = m \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$,

则需证 $F(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

而 $F'(x) = \frac{m}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{m(x+1)^2 - 4x}{x(x+1)^2}$,

当 $m \geq 1$ 时, $F'(x) \geq \frac{(x+1)^2 - 4x}{x(x+1)^2} =$

$\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$,故 $F'(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x > 1$ 时, $F(x) > F(1) = 0$,符合题意;

当 $0 < m < 1$ 时,记 $p(x) = m(x+1)^2 - 4x = mx^2 + (2m-4)x + m$,

则抛物线 $y = p(x)$ 的开口向上,对称轴

为直线 $x = \frac{2}{m} - 1 > 1$,

又 $p\left(\frac{2}{m} - 1\right) < p(1) = 4m - 4 < 0$,

所以当 $x \in \left(1, \frac{2}{m} - 1\right)$ 时, $p(x) < 0$,从而

$F'(x) = \frac{p(x)}{x(x+1)^2} < 0$,

所以 $F(x)$ 在 $\left(1, \frac{2}{m} - 1\right)$ 上单调递减,

故当 $x \in \left(1, \frac{2}{m} - 1\right)$ 时, $F(x) < F(1) = 0$,不符合题意,

所以 $m \geq 1$.

再令 $G(x) = m \ln x - \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{x} \right)$,则需证

$G(x) < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

而 $G'(x) = \frac{m}{x} - \frac{x^2+1}{2x^2} = \frac{-x^2+2mx-1}{2x^2}$,

当 $m=1$ 时, $G'(x) = \frac{-(x-1)^2}{2x^2}$,

故 $G'(x) < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $G(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以当 $x > 1$ 时, $G(x) < G(1) = 0$,符合题意;



当 $m > 1$ 时, 记 $q(x) = -x^2 + 2mx - 1$,
 则抛物线 $y = q(x)$ 的开口向下, 对称轴
 为直线 $x = m > 1$,
 又 $q(m) > q(1) = 2m - 2 > 0$,
 所以当 $x \in (1, m)$ 时, $q(x) > 0$, 从而
 $G'(x) = \frac{q(x)}{2x^2} > 0$,

所以 $G(x)$ 在 $(1, m)$ 上单调递增,
 故当 $x \in (1, m)$ 时 $G(x) > G(1) = 0$, 不
 符合题意.

综上所述, 实数 m 的取值集合为 $\{1\}$.

专题 2 同构在导数中的应用

刷

难关

1. A 突破点 ▶ 构造函数、利用函数的单调性比较数式的大小

【解析】 $\because b = \frac{\ln 2}{2}, c = \frac{\ln 3}{3}$,

\therefore 构造函数 $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 1$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = e$.

当 $1 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$.

故函数 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

由于 $b = \frac{\ln 2}{2} = \frac{2 \ln 2}{4} = \frac{\ln 4}{4} = f(4)$, $c = \frac{\ln 3}{3} = f(3)$, 且 $e < 3 < 4$, 则 $f(3) > f(4)$,
 即 $c > b$.

又 $b = \frac{\ln 4}{4} > \frac{1}{4} = a$, 所以 $a < b < c$. 故选 A.

2. B 突破点 ▶ 同构思想

【解析】由题意可知 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $a > 0$,

且 $f'(x) = e^x - \ln x - (a-1)x - \ln a = (e^x + x) - [ax + \ln(ax)]$,

若 $f(x)$ 在定义域内是增函数, 则 $f'(x) \geq 0$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

则 $e^x + x \geq ax + \ln(ax)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

方法一: 构造函数 $g(x) = x + \ln x, x > 0$, 则 $g(e^x) \geq g(ax)$,

因为 $y = \ln x, y = x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

可知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 可得

$e^x \geq ax, x > 0$, 即 $\frac{e^x}{x} \geq a$.

构造函数 $h(x) = \frac{e^x}{x}, x > 0$, 则 $h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$.

令 $h'(x) > 0$, 解得 $x > 1$; 令 $h'(x) < 0$, 解得 $0 < x < 1$.

可知 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $h(x) \geq h(1) = e$,

可得 $a \leq e$, 所以实数 a 的最大值为 e .

故选 B.



方法二: $(e^x + x) - [ax + \ln(ax)] \geq 0, x > 0,$

令 $x = 1$, 则 $e + 1 - a - \ln a \geq 0.$

设 $g(a) = e + 1 - a - \ln a, a > 0,$

则 $g'(a) = -1 - \frac{1}{a} < 0,$

则 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且

$g(e) = 0$, 则 $0 < a \leq e.$

下证 $0 < a \leq e$ 时, $(e^x + x) - [ax + \ln(ax)] \geq 0$ 恒成立,

设 $h(a) = (e^x + x) - [ax + \ln(ax)],$

则 $h'(a) = -x - \frac{1}{a} < 0,$

则 $h(a)$ 在 $(0, e]$ 上单调递减, 那么

$h(a) \geq h(e) = (e^x - ex) + [x - \ln(ex)],$

由于 $x > 0$ 时, $e^x \geq ex$ (提示: 不等式放缩), $x \geq \ln(ex)$, 则 $h(a) \geq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立, 即得证. 故选 B.

3. C 突破点 ▶ 利用导数研究不等式恒成立问题、同构思想

【解析】易知 $f(x) = a \ln x - x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

由 $f(ax) \leq e^x - ax$ 可得 $a \ln(ax) - ax \leq e^x - ax$, 即 $a \ln(ax) \leq e^x, x > 0, a > 0.$

方法一: 因为 $x \in (0, +\infty)$, 所以 $ax \ln(ax) \leq xe^x$, 即 $e^{\ln ax} \ln(ax) \leq xe^x.$

构造函数 $g(x) = xe^x, x \in (0, +\infty)$,

则 $g'(x) = (x+1)e^x > 0,$

可知函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

且 $g(x) > 0$, 而 $x < 0$ 时, $xe^x < 0$, 因此 $\ln(ax) \leq x,$

即 $\ln a + \ln x \leq x$, 所以 $\ln a \leq x - \ln x.$

令 $h(x) = x - \ln x, x \in (0, +\infty),$

则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0$, 此时 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 此时 $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

因此 $h(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 也是最小值, $h(x)_{\min} = h(1) = 1,$

即可得 $\ln a \leq h(x)_{\min} = 1$, 解得 $a \in (0, e].$

所以正实数 a 的取值范围是 $(0, e].$ 故选 C.

方法二: 设 $g(x) = a \ln(ax) - e^x, x > 0, a >$

0 , 则 $g'(x) = \frac{a}{x} - e^x$, 令 $t(x) = g'(x)$, 则

$t'(x) = -\frac{a}{x^2} - e^x < 0,$

所以 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 且

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g'(x) > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) < 0,$

由函数零点存在定理, 可知存在唯一的 $x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $g'(x_0) = 0$, 则

$a = x_0 e^{x_0},$

且 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $g(x) \leq g(x_0) = a \ln(ax_0) - e^{x_0} = e^{x_0} [x_0(2 \ln x_0 + x_0) - 1] \leq 0,$



即 $x_0 + 2\ln x_0 - \frac{1}{x_0} \leq 0$, 设 $h(x_0) = x_0 +$

$2\ln x_0 - \frac{1}{x_0}, x_0 > 0$, 则 $h'(x_0) = 1 + \frac{2}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} > 0$,

所以 $h(x_0)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(1) = 0$, 所以 $0 < x_0 \leq 1$,

因为 a 关于 x_0 单调递增, 所以 $a \in (0, e]$.

4. D 突破点 ▶ 由导数求函数的最值(不含参)、利用导数研究能成立问题

【解析】 当 $a < 0$ 时, $x < 0, f(a) = a^2 e^a < a^2 < a^2 - a = g(a)$, 符合题意.

当 $a > 0$ 时, $x > 0, f(x) \leq g(x)$, 即 $axe^x +$

$$\ln \frac{a}{x} \leq x^2 - x \Leftrightarrow axe^x + x + \ln \frac{a}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow axe^x +$$

$$x + \ln \frac{a}{x} + \ln x^2 \leq x^2 + \ln x^2 \Leftrightarrow e^{x+\ln(ax)} + [x +$$

$$\ln(ax)] \leq x^2 + \ln x^2,$$

因为 $y = x + \ln x$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

所以 $e^{x+\ln(ax)} \leq x^2$, 即 $axe^x \leq x^2 \Leftrightarrow a \leq \frac{x}{e^x}$,

由题意, 只需 $a \leq \left(\frac{x}{e^x} \right)_{\max}$.

记 $h(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $h'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

故 $h(x)_{\max} = h(1) = \frac{1}{e}$, 所以 $0 < a \leq \frac{1}{e}$,

综上, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{e}\right]$. 故选 D.

5. $[1, +\infty)$ 突破点 ▶ 利用导数研究不等式恒成立问题

【解析】 由条件得 $e^{kx-1}(kx-1) \geq x \ln x = e^{\ln x} \cdot \ln x$,

构造函数 $f(x) = xe^x (x \in \mathbf{R})$, 对其求导得 $f'(x) = (x+1)e^x$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = -1$, 所以当 $x < -1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 当 $x > -1$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

因为 $k > 0, x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$, 所以 $kx - 1 > -1, \ln x \geq -1$, 根据 $f(kx-1) \geq f(\ln x)$, 得 $kx - 1 \geq \ln x$,

即 $k \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 对任意 $x \in \left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 恒成立,

只需 $k \geq \left(\frac{\ln x + 1}{x} \right)_{\max}$.

构造函数 $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, x \in \left[\frac{1}{e},$

$+\infty\right)$, 则 $g'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$,

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = 1$, 所以当 $\frac{1}{e} \leq x < 1$

时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增;

当 $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减,



所以 $g(x)_{\max} = g(1) = 1$, 于是 $k \geq 1$, 因此实数 k 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

一题多解

令 $x = 1$, 则 $e^k(k-1) \geq 0$, 则 $k \geq 1$, 下证 $k \geq 1$ 时不等式恒成立.

若 $x \geq \frac{1}{k+1}$, 由于 $e^{kx} \geq kex$, $\ln x \leq x-1$, 则 $e^{kx}(kx-1) - ex \ln x \geq ex[k(kx-1) - (x-1)] = ex(k-1)[(k+1)x-1] \geq 0$, 当且仅当 $x=k=1$ 时等号成立;

若 $\frac{1}{e} \leq x < \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{2}$, 则 $kx < \frac{k}{1+k} < 1$,

此时 $e^{kx}(kx-1) - ex \ln x > kx-1 - ex \ln x \geq x-1 - ex \ln x$.

设 $g(x) = x-1 - ex \ln x$, $\frac{1}{e} \leq x < \frac{1}{2}$, 则

$$g'(x) = 1 - e(1 + \ln x) > 1 - e\left(1 + \ln \frac{1}{2}\right) = e\left(\frac{1}{e} - 1 + \ln 2\right),$$

因为 $\frac{1}{e} + \ln 2 > 1$ (提示: 此处可以利用 $\ln 2 \approx 0.69$), 所以 $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 + 1 = \frac{1}{e} > 0$.

综上所述, 实数 k 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

6. $\frac{1}{e}$ 突破点 ▶ 同构思想

【解析】由题意 $f'(x) = \frac{1}{x}$, 则 $\varphi(x) =$

$a(e^{ax}+1) - \ln x \cdot \left(\frac{1}{x}+1\right)$, 定义域为 $(0, +\infty)$,

故 $a(e^{ax}+1) - \ln x \cdot \left(\frac{1}{x}+1\right) \geq 0$ 恒成立,

即 $ax(e^{ax}+1) \geq (1+x) \ln x \Rightarrow \ln e^{ax}(e^{ax}+1) \geq (x+1) \ln x$,

令 $w(x) = (x+1) \ln x$, $x \in (0, +\infty)$, 则 $w(e^{ax}) \geq w(x)$,

其中 $w'(x) = \frac{1}{x}(x+1) + \ln x = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$,

令 $h(x) = w'(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$, $x \in (0,$

$+\infty)$, 则 $h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$,

令 $h'(x) > 0$ 得 $x > 1$, 令 $h'(x) < 0$ 得 $0 < x < 1$,

故 $h(x) = 1 + \frac{1}{x} + \ln x$ 在 $(0, 1)$ 上单调递

减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $h(x) \geq h(1) = 2$ 恒成立,

所以 $w(x) = (x+1) \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单

调递增,

由 $w(e^{ax}) \geq w(x)$, 可得 $e^{ax} \geq x$, 即 $ax \geq$

$\ln x$, 即 $a \geq \frac{\ln x}{x}$.



令 $u(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$, 则

$$u'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

令 $u'(x) > 0$ 得 $0 < x < e$, 令 $u'(x) < 0$ 得 $x > e$,

故 $u(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,

故 $u(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $x = e$ 处取得极大值, 也是最大值, 且 $u(e) = \frac{1}{e}$,

故 $a \geq \frac{1}{e}$, 则正实数 a 的最小值为 $\frac{1}{e}$.

7. 突破点 ▶ 利用导数研究不等式恒成立问题、构造函数

【解】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = e^{x-2} - 3$, $f'(x) = e^{x-2}$,

$$f'(2) = e^{2-2} = 1, f(2) = e^{2-2} - 3 = -2,$$

所以切点坐标为 $(2, -2)$, 切线方程为 $y + 2 = 1 \times (x - 2)$, 即 $y = x - 4$,

当 $x = 0$ 时, $y = -4$, 当 $y = 0$ 时, $x = 4$,

所以直线与 x 轴交点为 $(4, 0)$, 与 y 轴交点为 $(0, -4)$,

所以切线与坐标轴围成的三角形的面积为

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times |-4| = 8.$$

(2) 因为 $f(x) = ae^{x-2} + \ln a - 3$, $a > 0$, $f(x) \geq \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$,

所以 $ae^{x-2} + \ln a - 3 \geq \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$,

可化为 $e^{\ln a + x - 2} + \ln a + x - 2 \geq \ln(x+1) + x + 1$, $x \in (-1, +\infty)$,

即 $e^{\ln a + x - 2} + \ln a + x - 2 \geq e^{\ln(x+1)} + \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$,

令 $G(m) = e^m + m$, 则 $G'(m) = e^m + 1 > 0$,

所以 $G(m)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数,

由 $G(\ln a + x - 2) \geq G(\ln(x+1))$,

得 $\ln a + x - 2 \geq \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$,

即 $\ln a \geq \ln(x+1) - x + 2$, 即 $e^{\ln a} \geq e^{\ln(x+1) - x + 2}$, $x \in (-1, +\infty)$,

则 $a \geq (x+1)e^{-x+2}$, $x \in (-1, +\infty)$.

令 $h(x) = (x+1)e^{-x+2}$, $x \in (-1, +\infty)$, 则

$$h'(x) = e^{-x+2} - (x+1)e^{-x+2} = -xe^{-x+2},$$

令 $h'(x) = 0$, 则 $-xe^{-x+2} = 0$, 解得 $x = 0$,

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x)_{\max} = h(0) = e^2$,

因为 $a \geq (x+1)e^{-x+2}$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立, 故实数 a 的取值范围为 $[e^2, +\infty)$.



一题多解

(2) 由于 $ae^{x-2} + \ln a - 3 \geq \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$,

令 $x=0$, 则 $ae^{-2} + \ln a - 3 \geq 0$, 令 $m(a) = ae^{-2} + \ln a - 3$, 则 $m(a)$ 关于 a 单调递增, 又 $m(e^2) = 0$,

所以 $a \geq e^2$.

下证: 当 $a \geq e^2$ 时, $ae^{x-2} + \ln a - 3 \geq \ln(x+1)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上恒成立,

设 $g(a) = ae^{x-2} + \ln a - 3 - \ln(x+1)$, 则 $g(a)$ 关于 a 单调递增,

所以 $g(a) \geq g(e^2) = e^x - \ln(x+1) - 1 \geq x + 1 - x - 1 = 0$, 当且仅当 $x=0$ 时取等号 (两次放缩), 即得证.

故实数 a 的取值范围为 $[e^2, +\infty)$.

专题3 放缩在导数中的应用

刷

难关

1. **突破点** ▶ 利用导数证明不等式, 函数单调性、极值与最值的综合应用

(1) 【解】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

当 $a=1$ 时, $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) =$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = 0, \text{ 解得 } x=1.$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$.

(2) 【证明】由 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$, 解得

$$x = \frac{1}{a},$$

当 $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在

$\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减;

当 $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在

$\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

$$\text{故 } f(x) \geq f\left(\frac{1}{a}\right) = a - a \ln a.$$

设 $g(x) = x - 1 - \ln x$, $x > 0$,

$$\text{则 } g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x},$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(1) = 0$, 即 $x > 0$ 时, $x - 1 \geq \ln x \Leftrightarrow x(x-1) \geq x \ln x \Leftrightarrow -x(x-1) \leq -x \ln x$,

所以 $a - a \ln a \geq a - a(a-1) = 2a - a^2$, 当 $a=1$ 时等号成立,

$$\text{又 } (2a - a^2) - \left(4 - \frac{2}{a} - a^2\right) = 2a + \frac{2}{a} - 4 \geq$$



$2\sqrt{2a \cdot \frac{2}{a}} - 4 = 0$, 当且仅当 $a = 1$ 时等

号成立 (另解: 要证 $a - a \ln a \geq 4 - \frac{2}{a} - a^2$,

由于 $\ln a \leq a - 1$, 故 $a - a \ln a - 4 + \frac{2}{a} + a^2 \geq$

$a - a(a - 1) - 4 + \frac{2}{a} + a^2 = 2a + \frac{2}{a} - 4 \geq 0$,

当且仅当 $a = 1$ 时取等号),

故 $f(x) \geq f\left(\frac{1}{a}\right) = a - a \ln a \geq 2a - a^2 \geq 4 - \frac{2}{a} - a^2$, 当且仅当 $a = 1$ 时等号成立, 得证.

2. 突破点 ▶ 利用导数证明不等式、分类讨论求含参函数的单调区间

(1) 【解】由题知 $h(x) = ax - f(x) = ax - \ln x$, 其定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $h'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax - 1}{x}$.

当 $a \leq 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 令 $h'(x) > 0$, 解得 $x > \frac{1}{a}$, 令

$h'(x) < 0$, 解得 $0 < x < \frac{1}{a}$,

\therefore 函数 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 函数 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(2) 【证明】要证 $xf(x) > g(x) - 1$, 即证

$$x \ln x + 1 > \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}.$$

由(1)知当 $a = 1$ 时, $h(x) = x - \ln x$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore h(x) \geq h(1) = 1 - \ln 1 = 1$, 即 $x - \ln x \geq 1$,

$$\therefore \frac{1}{x} + \ln x \geq 1, \therefore 1 + x \ln x \geq x.$$

令 $H(x) = x - \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}$, 则 $H'(x) = 1 -$

$$\frac{3 \cos x (2 + \cos x) + 3 \sin^2 x}{(2 + \cos x)^2} = \frac{(\cos x - 1)^2}{(2 + \cos x)^2} \geq 0 \text{ 在}$$

$(0, +\infty)$ 上恒成立, 且不恒为 0,

$\therefore H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

\therefore 当 $x > 0$ 时, $H(x) > H(0) = 0$, 即 $x -$

$$\frac{3 \sin x}{2 + \cos x} > 0, \text{ 即 } x > \frac{3 \sin x}{2 + \cos x}, \therefore 1 + x \ln x \geq$$

$$x > \frac{3 \sin x}{2 + \cos x},$$

\therefore 原不等式成立.



专题4 双变量问题

刷

难关

1. 突破点 ▶ 含参分类讨论函数的单调性

【解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + ax - (a+1) = \frac{ax^2 - (a+1)x + 1}{x} = \frac{(x-1)(ax-1)}{x}.$$

①当 $a \leq 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$;

②当 $0 < a < 1$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$ 或 $x > \frac{1}{a}$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < \frac{1}{a}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, \frac{1}{a})$;

③当 $a = 1$ 时, 则 $f'(x) \geq 0$, 且不恒为 0, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间;

④当 $a > 1$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{a}$ 或 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $\frac{1}{a} < x < 1$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, 1)$.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$;

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(\frac{1}{a}, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, \frac{1}{a})$;

当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, 1)$.

$$(2) g(x) = f(x) + x = \ln x + \frac{a}{2}x^2 - ax,$$

则 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$g'(x) = \frac{1}{x} + ax - a = \frac{ax^2 - ax + 1}{x},$$

因为 $g(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($0 < x_1 < x_2$),

所以方程 $ax^2 - ax + 1 = 0$ 的判别式 $\Delta = a^2 - 4a > 0$, 且 $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = \frac{1}{a} > 0$, 得 $a > 4$.

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) &= \ln x_1 + \frac{a}{2}x_1^2 - ax_1 - \ln x_2 - \frac{a}{2}x_2^2 + ax_2 \\ &= \ln \frac{x_1}{x_2} + \frac{a}{2}(x_1^2 - x_2^2) - a(x_1 - x_2) \\ &= \ln \frac{x_1}{x_2} + \frac{a}{2}(x_1^2 - x_2^2) - a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{aligned}$$



$$x_2) = \ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{a}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

因为 $g(x_1) - g(x_2) \geq mx_1x_2$, 所以 $\frac{m}{a} \leq$

$$\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{x_2} - \frac{x_2}{x_1} \right),$$

令 $t = \frac{x_1}{x_2} (0 < t < 1)$, 设 $h(t) = \ln t - \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)$,

$$\text{则 } h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{t^2} \right) = \frac{-t^2 + 2t - 1}{2t^2} = \frac{-(t-1)^2}{2t^2} < 0, \text{ 则 } h(t) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调}$$

递减,

所以 $0 < t < 1$ 时, $h(t) > h(1) = 0$, 所以

$\frac{m}{a} \leq 0$, 即 $m \leq 0$, 所以实数 m 的最大值为

0.

2. 突破点 ▶ 根据极值点个数求参数, 函数新定义问题

(1) 【解】由 $f(x) = x^3 + mx^2 - 2$, 可得 $f'(x) = 3x^2 + 2mx$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0, x_2 = -\frac{2m}{3}$,

由函数 $f(x)$ 为“ M 函数”, 得 $x_1 + x_2 < 0 < f(x_1) + f(x_2)$,

$$\text{可得 } 0 + \left(-\frac{2m}{3} \right) < 0 < -2 + \left(-\frac{2m}{3} \right)^3 + m \cdot \left(-\frac{2m}{3} \right)^2 - 2, \text{ 解得 } m > 3.$$

故实数 m 的取值范围为 $(3, +\infty)$.

(2) ①【解】 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax - 1$, 求导可得

$$f'(x) = e^x - x - a, \text{ 令 } g(x) = f'(x),$$

由题意可得函数 $g(x)$ 存在两个不同的变号零点, 又 $g'(x) = e^x - 1$,

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 0$, 当 $x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,

当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \geq g(0) = 1 - a$.

又 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, 所以当 $g(0) < 0$ 时, 函数 $g(x)$ 存在两个不同的变号零点,

可得 $1 - a < 0$, 解得 $a > 1$.

故实数 a 的取值范围为 $(1, +\infty)$.

②【证明】由①可得 $g(x) = f'(x) = e^x - x - a$, 易知方程 $g(x) = 0$ 存在两个不相等的实数根,

设为 x_3, x_4 , 由①不妨设 $x_3 < 0 < x_4$.

$$\text{令 } h(x) = g(x) - g(-x) = e^x - e^{-x} - 2x,$$

求导可得 $h'(x) = e^x + e^{-x} - 2$, 由 $e^x + e^{-x} \geq 2$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, 则 $h'(x) \geq 0$, 且不恒为 0,

所以函数 $h(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数, 由 $h(0) = 0$, 则当 $x > 0$ 时 $h(x) > 0$, 可得 $g(x) > g(-x)$.



由 $g(x_3) = g(x_4) > g(-x_4)$, 且函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 则 $x_3 < -x_4$, 可得 $x_3 + x_4 < 0$.

当 $x_3 < x < 0$ 时, $f'(x) = g(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(x_3, 0)$ 上单调递减,

由 $x_3 < -x_4 < 0$, 则 $f(x_3) > f(-x_4)$, 所以 $f(x_3) + f(x_4) > f(-x_4) + f(x_4)$,

要证 $f(x_3) + f(x_4) > 0$, 只需证 $f(-x_4) + f(x_4) > 0$,

由 $f(-x_4) + f(x_4) = e^{x_4} + e^{-x_4} - x_4^2 - 2$, 则令 $F(x) = e^x + e^{-x} - x^2 - 2$,

求导可得 $F'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$, 令 $G(x) = F'(x)$, 则 $G'(x) = e^x + e^{-x} - 2 > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以函数 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则当 $x > 0$ 时, $G(x) > G(0) = 0$, 即 $F'(x) > 0$,

所以函数 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则当 $x > 0$ 时, $F(x) > F(0) = 0$,

所以不等式 $e^x + e^{-x} - x^2 - 2 > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 可得 $f(-x_4) + f(x_4) > 0$,

综上所述, $x_3 + x_4 < 0 < f(x_3) + f(x_4)$, 所以函数 $f(x)$ 为“M 函数”.

专题 5 极值点偏移问题

刷

难关

1. **突破点** ▶ 根据极值点个数求参数、利用导数证明不等式

(1) 【解】当 $m = 1$ 时, $f(x) = (x-4)e^x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2$,

则 $f'(x) = (x-3)e^x - x^2 + 3x = (x-3)(e^x - x)$.

令 $G(x) = e^x - x$, 则 $G'(x) = e^x - 1$,

当 $x > 0$ 时, $G'(x) > 0$, $G(x)$ 单调递增, 当 $x < 0$ 时, $G'(x) < 0$, $G(x)$ 单调递减,

即当 $x = 0$ 时, $G(x)$ 取极小值, 也为最小值, 且 $G(x)_{\min} = G(0) = 1 > 0$,

可得 $e^x > x$, 故 $e^x - x$ 恒为正.

令 $f'(x) > 0$ 可得 $x > 3$, 令 $f'(x) < 0$ 可得 $x < 3$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 【解】 $f'(x) = m(x-3)e^x - x^2 + 3x = m(x-3) \cdot \left(e^x - \frac{x}{m}\right)$,

分析可得, 若函数 $f(x)$ 只有唯一的极值点, 则函数 $y = e^x - \frac{x}{m}$ 无变号零点.

令 $e^x - \frac{x}{m} = 0$, 即 $m = \frac{x}{e^x}$,

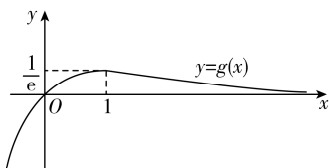
设函数 $g(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$,

令 $g'(x) > 0$ 可得 $x < 1$, 令 $g'(x) < 0$ 可得 $x > 1$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

则当 $x = 1$ 时, $g(x)$ 有极大值, 也为最大值, 且 $g(x)_{\max} = g(1) = \frac{1}{e}$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时,

$g(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0^+$,
作出函数 $g(x)$ 的大致图象如图①所示,
故实数 m 的取值范围为 $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$.



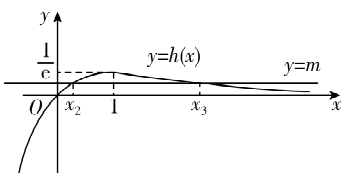
图①

(3) 【证明】 $f'(x) = m(x-3)e^x - x^2 + 3x = m(x-3) \cdot \left(e^x - \frac{x}{m}\right)$,

由函数 $f(x)$ 有三个极值点 x_1, x_2, x_3 , 分析可得 $e^x - \frac{x}{m} = 0$ 有两个均不等于 3 的不相等的实数根, 即 $m = \frac{x}{e^x}$ 有两个均不等于 3 的不相等的实数根, 设 x_1 为 3, $m = \frac{x}{e^x}$ 的两个根分别为 x_2, x_3 ($x_2 < x_3$).

令函数 $h(x) = \frac{x}{e^x}$,

由(2)的分析作出 $h(x)$ 的图象如图②所示, 现证明 $x_2 + x_3 > 2$,



图②

由图分析可得, $0 < x_2 < 1, x_3 > 1, 2 - x_2 > 1$,
要证明 $x_2 + x_3 > 2$, 即证 $x_3 > 2 - x_2$, 即证
 $h(x_3) < h(2 - x_2)$, 即证 $h(x_2) < h(2 - x_2)$,
令 $F(x) = h(x) - h(2 - x)$, 则接下来需证明
 $F(x) < 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立.

因为 $F'(x) = \frac{1-x}{e^x} - \frac{1-x}{e^{2-x}} = (1-x) \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2-x}} \right)$, $0 < x < 1$ 时, $F'(x) > 0$, 所以 $F(x)$ 在
 $(0, 1)$ 上单调递增,
所以 $0 < x < 1$ 时, $F(x) < F(1) = 0$, 即
 $h(x) < h(2-x)$, 所以 $x_2 + x_3 > 2$,
又因为 $x_1 = 3$, 所以 $x_1 + x_2 + x_3 > 5$.

2. 突破点 ▶ 利用导数证明不等式、根据极值点个数求参数

(1) 【解】由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - 1 \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $2a \geq -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

又 $-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$, 当
且仅当 $x=2$ 时, 等号成立,



所以 $2a \geq \frac{1}{4}$, 即 $a \geq \frac{1}{8}$, 故 a 的取值范围

是 $\left[\frac{1}{8}, +\infty\right)$,

(2) 【证明】若 $a=0$, 则 $f(x) = \ln x - x + 1$,

$x > 0$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 1$, 所以当 $0 < x < 1$

时, $f'(x) > 0$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1,$

$+\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x) \leq f(1) = 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时,

等号成立.

令 $g(x) = \frac{4e^{x-2}}{x^2} - 1$, $x > 0$, 则 $g'(x) =$

$$\frac{4(x^2 - 2x)e^{x-2}}{x^4} = \frac{4(x-2)e^{x-2}}{x^3},$$

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 2$, 所以当 $0 < x < 2$

时, $g'(x) < 0$, 当 $x > 2$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2,$

$+\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(2) = 0$, 当且仅当 $x = 2$ 时,

等号成立,

所以 $f(x) \leq 0 \leq g(x)$, 又等号不同时

成立,

所以 $f(x) < \frac{4e^{x-2} - x^2}{x^2}$.

(3) 【证明】由题意可知 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2ax -$

$$1 = \frac{2ax^2 - x + 1}{x},$$

因为 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$),

所以 x_1, x_2 是方程 $2ax^2 - x + 1 = 0$ 的两个不同的根,

$$\text{则} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{2a}, \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2a}, \\ \Delta = 1 - 8a > 0, \end{cases}$$

所以 $f(x_1) - f(x_2)$

$$= (\ln x_1 + ax_1^2 - x_1 + 1) - (\ln x_2 + ax_2^2 - x_2 + 1)$$

$$= \ln \frac{x_1}{x_2} + a(x_1^2 - x_2^2) - (x_1 - x_2)$$

$$= \ln \frac{x_1}{x_2} + \frac{1}{2} \times \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 + x_2} - (x_1 - x_2)$$

$$= \ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1 - x_2}{2},$$

所以要证 $f(x_1) - f(x_2) < \left(2a - \frac{1}{2}\right)(x_1 -$

$x_2)$, 即证 $\ln \frac{x_1}{x_2} - \frac{x_1 - x_2}{2} < \left(2a - \frac{1}{2}\right)(x_1 -$

$x_2)$,

即证 $\ln \frac{x_1}{x_2} < 2a(x_1 - x_2)$, 即证 $\ln \frac{x_1}{x_2} <$

$$\frac{\frac{x_1}{x_2} - 1}{\frac{x_1}{x_2} + 1}, \text{即证 } \ln \frac{x_1}{x_2} < \frac{\frac{x_1}{x_2} - 1}{\frac{x_1}{x_2} + 1}.$$

令 $t = \frac{x_1}{x_2}$ ($0 < t < 1$), 则证明 $\ln t < \frac{t-1}{t+1}$ 即可,



令 $h(t) = \ln t - \frac{t-1}{t+1}$, 则 $h'(t) = \frac{t^2+1}{t(t+1)^2} > 0$

在 $(0, 1)$ 上恒成立,

所以 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 此时

$h(t) < h(1) = 0$, 即 $0 < t < 1$ 时, $\ln t < \frac{t-1}{t+1}$,

所以原不等式 $f(x_1) - f(x_2) < \left(2a - \frac{1}{2}\right)(x_1 - x_2)$ 成立.

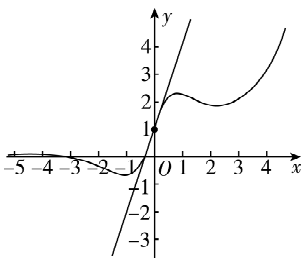
全章综合训练

刷

真题

刷小题

1. A 命题点 ▶ 导数的几何意义



【解析】因为 $f(x) = \frac{e^x + 2\sin x}{1+x^2}$, 所以

$$f'(x) = \frac{(e^x + 2\cos x)(1+x^2) - 2x(e^x + 2\sin x)}{(1+x^2)^2},$$

所以 $f'(0) = 3$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的方程为 $y = 3x + 1$, 当 $x = 0$

时, $y = 1$; 当 $y = 0$ 时, $x = -\frac{1}{3}$. 则所求三角

形的面积 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{6}$. 故选 A.

2. B 命题点 ▶ 利用导数研究函数的极值与最值

【解析】 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2}$, 由条件, 得

$$\begin{cases} f(1) = b = -2, \\ f'(1) = a - b = 0, \end{cases} \text{ 所以 } a = b = -2, \text{ 即}$$

$$f'(x) = -\frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}, \text{ 所以 } f'(2) = -\frac{2}{2} +$$

$$\frac{2}{2^2} = -\frac{1}{2}. \text{ 故选 B.}$$

3. D 命题点 ▶ 导数的几何意义

【解析】设切点为 (x_0, y_0) , 因为 $y' = e^x$, 所以曲线 $y = e^x$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$. 又因为点 (a, b) 在此切线上, 所以 $b - e^{x_0} = e^{x_0}(a - x_0)$, 整理得 $b = (a - x_0 + 1)e^{x_0}$.

令 $f(x) = (a - x + 1) \cdot e^x$, 所以 $f'(x) = (a - x)e^x$, 则当 $x < a$ 时, 函数 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增; 当 $x > a$ 时, 函数 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得最大值 $f(a) = e^a$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$ (提示: 判断极值点两侧的图象趋势). 因为过点 (a, b) 的切线有两条, 即方程 $b = (a - x_0 + 1) \cdot e^{x_0}$ 有两个不相等的实数根, 所以 $0 < b <$



e^a , 故选 D.

4.4 命题点 ▶ 导数的几何意义

【解析】由 $y = e^x + x + a$, 得 $y' = e^x + 1$. 设切点为 $P(x_0, y_0)$, 由直线 $y = 2x + 5$ 是曲线 $y = e^x + x + a$ 的一条切线, 得

$$\begin{cases} e^{x_0} + 1 = 2, \\ 2x_0 + 5 = e^{x_0} + x_0 + a, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = 0, \\ a = 4. \end{cases}$$

一题多解

设切点为 $P(x_0, y_0)$, 则

$y'|_{x=x_0} = e^{x_0} + 1 = 2$, 所以 $x_0 = 0$, 因此 $y_0 = 2x_0 + 5 = 5$. 因为点 $P(0, 5)$ 在曲线 $y = e^x + x + a$ 上, 所以 $a = 4$.

5. $\ln 2$ 命题点 ▶ 导数的几何意义

【解析】令 $f(x) = e^x + x$, 则 $f'(x) = e^x + 1$, 所以曲线 $y = e^x + x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线斜率为 $f'(0) = 2$, 所以切线方程为 $y = 2x + 1$.

1. 令 $g(x) = \ln(x+1) + a$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x+1}$.

因为直线 $y = 2x + 1$ 也是曲线 $y = g(x)$ 的

切线, 所以令 $\frac{1}{x+1} = 2$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$, 则曲

线 $y = g(x)$ 与直线 $y = 2x + 1$ 的切点坐标

为 $(-\frac{1}{2}, 0)$, 所以 $0 = a - \ln 2$, 解得 $a =$

$\ln 2$.

6. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ 命题点 ▶ 导数几何意义的应用

【解析】因为 $y = (x+a)e^x$, 所以 $y' = (x+a+1)e^x$. 设切点为 $(x_0, (x_0+a)e^{x_0})$, 则切

线方程为 $y - (x_0+a)e^{x_0} = (x_0+a+1)e^{x_0} \cdot (x-x_0)$, 将 $(0, 0)$ 代入, 整理得 $x_0^2 + ax_0 -$

$a = 0$, 由题意得 $\Delta = a^2 + 4a > 0$ (提示: 有两条过原点的切线, 则有两个切点, 即方

程有两个解), 解得 $a < -4$ 或 $a > 0$, 所以

a 的取值范围是 $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$.

7. $y = \frac{1}{e}x$ $y = -\frac{1}{e}x$ 命题点 ▶ 导数的几何意义

【解析】当 $x > 0$ 时, $y = \ln x$, 设切点为 $(x_0,$

$y_0)$, $x_0 > 0$, 则由 $y' = \frac{1}{x}$, 得切线斜率 $k =$

$\frac{1}{x_0}$. 又切线的斜率为 $\frac{y_0}{x_0}$, 所以 $\frac{1}{x_0} = \frac{y_0}{x_0}$, 解

得 $y_0 = 1$, 代入 $y = \ln x$, 得 $x_0 = e$. 所以 $k =$

$\frac{1}{e}$, 所以切线方程为 $y = \frac{1}{e}x$. 同理可求

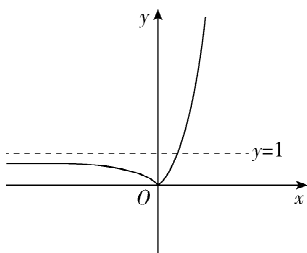
得当 $x < 0$ 时的切线方程为 $y = -\frac{1}{e}x$. 综

上, 两条切线方程分别为 $y = \frac{1}{e}x$, $y =$

$-\frac{1}{e}x$.

8. $(0, 1)$ 命题点 ▶ 利用导数的几何意义求切线方程及取值范围问题

【解析】画出 $f(x) = |e^x - 1|$ 的图象, 如图所示, 由题意知两条切线的斜率存在且不为零.



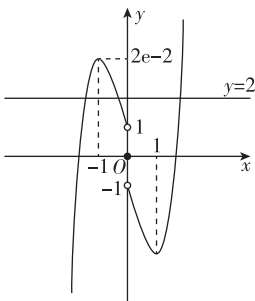
当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = 1 - e^{-x}$, $f'(x) = -e^{-x}$, 过点 $A(x_1, f(x_1))$ 的切线斜率 $k_1 = f'(x_1) = -e^{-x_1}$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = e^x - 1$, $f'(x) = e^x$, 过点 $B(x_2, f(x_2))$ 的切线斜率 $k_2 = f'(x_2) = e^{x_2}$. 因为两条切线互相垂直, 所以 $k_1 k_2 = -1$ (提示: 两直线垂直的应用), 即 $(-e^{-x_1}) e^{x_2} = -1$, 即 $e^{x_1+x_2} = 1$, 所以 $x_1 + x_2 = 0$. 过点 $A(x_1, 1 - e^{-x_1})$ 的切线方程为 $y - (1 - e^{-x_1}) = -e^{-x_1}(x - x_1)$, 令 $x = 0$, 则 $M(0, 1 - e^{-x_1} + x_1 e^{-x_1})$; 过点 $B(x_2, e^{x_2} - 1)$ 的切线方程为 $y - (e^{x_2} - 1) = e^{x_2}(x - x_2)$, 令 $x = 0$, 则 $N(0, e^{x_2} - 1 - x_2 e^{x_2})$, 则 $|AM| = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 e^{-2x_1}}$, $|BN| = \sqrt{x_2^2 + x_2^2 e^{2x_2}} = \sqrt{x_1^2 + x_1^2 e^{-2x_1}}$, 所以 $\frac{|AM|}{|BN|} = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_1^2 e^{-2x_1}}}{\sqrt{x_1^2 + x_1^2 e^{-2x_1}}} = \sqrt{\frac{1 + e^{-2x_1}}{1 + e^{-2x_1}}} = e^{x_1}$. 因为 $x_1 < 0$, 所以 $0 < e^{x_1} < 1$, 所以 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 的取值范围为 $(0, 1)$.

9. ABD 命题点 ▶ 奇函数的性质, 奇函数解析式的求解, 利用导数判断极值

【解析】 因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$ (提示: 若奇函数的定义域中包含 0, 则 $f(0) = 0$), 故 A 正确; 当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 因此 $f(-x) = [(-x)^2 - 3]e^{-x} + 2 = -f(x)$, 因此 $f(x) = -(x^2 - 3) \cdot e^{-x} - 2$ (关键: $f(-x) = -f(x)$ 的应用), 故 B 正确; 当 $x > 0$ 时, $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x + 2$, $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = (x+3)(x-1)e^x$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$, 因此 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 因此奇函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值 (提示: 奇函数在关于原点对称的区间上单调性相同), 故 D 正确; 当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq 2$, 即 $(x^2 - 3)e^x \geq 0$, 解得 $x \geq \sqrt{3}$, 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极大值, $f(-1) = -(1 - 3)e - 2 = 2e - 2 > 2$, 因此在 $(-\infty, 0)$ 上也存在满足 $f(x) \geq 2$ 的区间, 故 C 错误. 故选 ABD.

快解

对于 C, 结合选项 D 分析可作出 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示, 由图可知 C 选项错误.



**10. ACD** **命题点** ▶ 利用导数求函数的单调区间、极值

【解析】由题可得 $f'(x) = 2(x-1)(x-4) + (x-1)^2 = 3x^2 - 12x + 9$, 令 $f'(x) > 0$, 即 $3x^2 - 12x + 9 > 0$, 得 $x < 1$ 或 $x > 3$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < 3$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 所以 $x=3$ 是 $f(x)$ 的极小值点, A 正确. 当 $0 < x < 1$ 时, $0 < x^2 < x < 1$, 所以 $f(x) > f(x^2)$, B 错误. 当 $1 < x < 2$ 时, $1 < 2x-1 < 3$, 因为 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 所以 $-4 < f(2x-1) < 0$, C 正确. $f(2-x) = (2-x-1)^2(2-x-4) = (x-1)^2 \cdot (-x-2)$, 所以 $f(2-x) - f(x) = (x-1)^2 \cdot (-x-2-x+4) = (x-1)^2(-2x+2)$, 令 $(x-1)^2 \cdot (-2x+2) > 0$, 得 $x < 1$, 所以当 $-1 < x < 0$ 时, $f(2-x) > f(x)$ 成立, D 正确. 故选 ACD.

11. D **命题点** ▶ 函数的零点, 导数与函数的极值、最值

【解析】 $\because f(x) = a(x+1)^2 - 1, g(x) = \cos x + 2ax$, 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个交点, 令 $h(x) = f(x) - g(x) = ax^2 - \cos x + a - 1$, $\therefore h(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个零点. $h'(x) = 2ax + \sin x$, 令 $m(x) = 2ax + \sin x$, 则 $m'(x) = 2a + \cos x$, 当 $a \geq -\frac{\cos 1}{2}$ 时, $m'(x) > 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立, 则 $h'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增. 又 $h'(0) = 0$, \therefore 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $h(x)$ 单调递减; 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x)$ 单调递增, $\therefore h(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值也是最小值, $\therefore h(0) = 0$, 即 $a-2=0$, $\therefore a=2$. $-1 < -\frac{\cos 1}{2}$, 下面分析 $a=-1$ 时曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=g(x)$ 的交点情况. 当 $a=-1$ 时, $f(x) - g(x) = -x^2 - \cos x - 2$, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, $f(x) - g(x) < 0$, \therefore 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上没有交点. 结合选项可知, D 正确. 故选 D.

一题多解

$\because f(x) = a(x+1)^2 - 1, g(x) = \cos x + 2ax$, 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个交点, 令 $h(x) = f(x) - g(x) = ax^2 - \cos x + a - 1$, $\therefore h(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恰有一个零点. 又易知 $h(x)$ 为 $(-1, 1)$ 上的偶函数, $\therefore h(0) = 0$, 即 $a-2=0$, $\therefore a=2$. 故选 D.

12. C **命题点** ▶ 代数式的最值

【解析】若 $f(x) = (x+a) \ln(x+b) \geq 0$, 则 $f(x)$ 的最小值大于或等于 0.

$$f'(x) = \ln(x+b) + \frac{x+a}{x+b} = \ln(x+b) + 1 + \frac{a-b}{x+b} \quad (x > -b),$$

假设 $a \geq b$, 则 $x+a \geq x+b > 0$,

当 $-b < x < -b+1$ 时, $\ln(x+b) < 0$,

此时 $f(x) = (x+a) \ln(x+b) < 0$, 不满足题意.



所以 $a < b$.

则 $f'(x) = \ln(x+b) + 1 + \frac{a-b}{x+b}$ ($x > -b$) 在定义域上为增函数.

又当 $x \rightarrow -b$ 时, $f'(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$,

所以存在 $x = x_0$ 使得 $f'(x_0) = 0$, 即

$$\ln(x_0+b) = -\frac{x_0+a}{x_0+b}.$$

则 $f(x)$ 在 $(-b, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取得极小值, 也是最小值, 所以 $f(x)_{\min} = f(x_0) = (x_0+a)\ln(x_0+b) = (x_0+a) \left(-\frac{x_0+a}{x_0+b}\right) = -\frac{(x_0+a)^2}{x_0+b} \leq 0$, 又 $f(x_0) \geq$

0, 则 $x_0 = -a$, 又 $\ln(x_0+b) = -\frac{x_0+a}{x_0+b}$, 所以

$\ln(b-a) = 0$, 所以 $b-a = 1$, 所以 $b = a+1$.

所以 $a^2+b^2 = a^2+a^2+2a+1 = 2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$, 则 a^2+b^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

13. AD 命题点 ▶ 根据导数判断函数的性质

【解析】 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, 则 $f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x-a)$. A 选项, 当 $a > 1$ 时, $f'(x)$ 的零点为 $x_1 = 0, x_2 = a$, 则 $x_2 > x_1$. 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $0 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 又 $f(0) = 1 > 0, f(a) = 2a^3 - 3a^3 + 1 = 1 - a^3 < 0$, 且 $f(-a) < 0, f(2a) > 0$, 所以 $f(x)$ 有三个零点, A 正确; B 选项, 当 $a < 0$ 时, 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增, 在 $(a, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, B 错误; C 选项, 若直线 $x = b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称轴, 则 $f(x+b) = f(b-x)$, 即 $2(x+b)^3 - 3a(x+b)^2 + 1 = 2(b-x)^3 - 3a(b-x)^2 + 1$, 即 $x^3 + 3b^2x = 3abx$, 不存在 a, b 使等式恒成立 (另解: 三次函数对应的曲线不存在对称轴), 故不存在 a, b , 使得直线 $x = b$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称轴, C 错误; D 选项, 若 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心, 则 $f(1+x) + f(1-x) = 2f(1)$, 即 $2(1+x)^3 - 3a(1+x)^2 + 1 + 2(1-x)^3 - 3a(1-x)^2 + 1 = 6 - 6a$, 整理得 $(12 - 6a)x^2 - 6a + 6 = 6 - 6a$, 解得 $a = 2$, 所以存在 a , 使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的对称中心, D 正确. 故选 AD.

14. BCD 命题点 ▶ 函数的极值、二次函数零点分析

【解析】 依题意, $x > 0, f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} -$

$\frac{2c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}$. 设 $g(x) = ax^2 - bx - 2c$,

由题意 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点



x_1, x_2 (提示: 将函数极值问题转化成导函数零点问题, 注意 $g(x)$ 的两个零点均需大于 0),

所以 $\Delta = b^2 + 8ac > 0, x_1 + x_2 = \frac{b}{a} > 0, x_1 x_2 =$

$-\frac{2c}{a} > 0$, 则 $-\frac{2bc}{a^2} > 0$, 所以 $ab > 0, ac < 0,$

$bc < 0$, 故 A 错误, B 正确, C 正确, D 正确. 故选 BCD.

15. -4 命题点 ▶ 三次函数的极值点

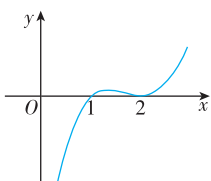
【解析】因为 $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a) = x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a$, 所以 $f'(x) = 3x^2 - 2(a+3)x + 3a + 2$.

因为 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 所以 $f'(2) = 12 - 4(a+3) + 3a + 2 = 0$, 解得 $a = 2$, 经检验, 符合题意, 所以 $f(x) = (x-1) \cdot (x-2)^2$, 所以 $f(0) = -4$.

快解

(数形

结合法) 因为 $x = 2$ 是 $f(x)$ 的极值点, 所以由数轴标根法可得 $a = 2$, 作出 $f(x)$ 的图象如



图所示, 所以 $a = 2$ 符合题意, 则 $f(x) = (x-1)(x-2)^2$, 所以 $f(0) = -4$.

16. B 命题点 ▶ 利用导数研究函数的零点、单调性、极值

【解析】对 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = 3x^2 + a$, 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 + a \geq 0$ 恒成立, 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 不可能存在 3 个零点; 当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 3x^2 + a =$

0 , 解得 $x = \pm \sqrt{-\frac{a}{3}}$, 所以函数 $f(x)$ 在

$\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{a}{3}}\right), \left(\sqrt{-\frac{a}{3}}, +\infty\right)$ 上单

调递增, 在 $\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}, \sqrt{-\frac{a}{3}}\right)$ 上单调

递减, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = -\sqrt{-\frac{a}{3}}$ 和

$x = \sqrt{-\frac{a}{3}}$ 处分别取得极大值和极小

值, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$ (提示: 注意三次函数的图象特征).

若函数 $f(x)$ 存在 3 个零点, 则必有

$f\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) > 0$, 且 $f\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) < 0$, 解

得 $a < -3$, 故选 B.

17. $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$ 命题点 ▶ 导数与函数的单调性、指数函数与对数函数的单调性

【解析】由 $f(x) = a^x + (1+a)^x$, 得 $f'(x) = a^x \ln a + (1+a)^x \cdot \ln(1+a)$, 则由题意知不等式 $a^x \ln a + (1+a)^x \ln(1+a) \geq 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立 (提示: 可导函数 $f(x)$ 在某一区间上单调, 实际上就是



在该区间上 $f'(x) \geq 0$ 恒成立(单调递增)或 $f'(x) \leq 0$ 恒成立(单调递减).

因为 $a \in (0, 1)$, 所以 $1+a \in (1, 2)$,

则 $\ln(1+a) > 0$,

所以不等式 $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -\left(\frac{1+a}{a}\right)^x$ 对任意

$x \in (0, +\infty)$ 恒成立. 因为 $1+\frac{1}{a} > 1$, 所

以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\left(1+\frac{1}{a}\right)^x > 1$,

$-\left(1+\frac{1}{a}\right)^x < -1$, 所以 $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -1$, 即

$\ln a \geq -\ln(1+a)$, 所以 $\ln a(1+a) \geq 0$,

所以 $a^2+a-1 \geq 0$, 解得 $a \leq \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ (舍

去)或 $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 又 $a \in (0, 1)$, 所以 a 的

取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$.

刷大题

- 1. 命题点** ▶ 导数的几何意义, 由函数的极值求参数的取值范围

【解】 (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = e^x - x - 1$, 则 $f'(x) = e^x - 1$, 所以 $f'(1) = e - 1$.

又 $f(1) = e - 2$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - (e - 2) = (e - 1) \cdot (x - 1)$, 即 $y = (e - 1)x - 1$.

(2) $f(x) = e^x - ax - a^3$, 则 $f'(x) = e^x - a$, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = e^x - a > 0$, 则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 无极值点, 所以 $a > 0$.

令 $f'(x) < 0$, 得 $x < \ln a$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > \ln a$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $x = \ln a$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 极小值为 $f(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a - a^3 = a - a \ln a - a^3$, 则问题转化为解不等式 $a - a \ln a - a^3 < 0$.

又 $a > 0$, 所以不等式可化为 $a^2 + \ln a - 1 > 0$.

令 $g(a) = a^2 + \ln a - 1$, 则 $g'(a) = 2a + \frac{1}{a} >$

0 恒成立,

所以 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(1) = 0$, 所以不等式 $a - a \ln a - a^3 < 0$ 的解集为 $(1, +\infty)$, 所以 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

- 2. 命题点** ▶ 利用导数研究函数的单调性、不等式证明

(1) **【解】** 因为 $f(x) = a(e^x + a) - x$, 所以 $f'(x) = ae^x - 1$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = -\ln a$,

当 x 变化时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 变化如下表:

x	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减;
当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

(2)【证明】由(1)可知当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(-\ln a) = a\left(\frac{1}{a} + a\right) + \ln a = a^2 + \ln a + 1$,

构造函数 $g(a) = a^2 + \ln a + 1 - 2\ln a - \frac{3}{2} =$

$a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$, 则 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$,

令 $g'(a) = 0$, 解得 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (负值舍去).

当 $a \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 单调递

减, 当 $a \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 时, $g'(a) > 0$, $g(a)$ 单调递增,

所以 $g(a)_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \ln \sqrt{2} > 0$,

所以当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$.

3. 命题点 ▶ 导数在不等式证明中的应用, 根据函数的极大值点求参数的取值范围

(1)【证明】设 $f(x) = x - \sin x$, 则 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > f(0) = 0$, 即 $x - \sin x > 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立,

所以 $\sin x < x$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立.

设 $g(x) = \sin x + x^2 - x$ (关键: 证明不等式 $f(x) > g(x)$ (或 $f(x) < g(x)$) 转化为证明 $f(x) - g(x) > 0$ (或 $f(x) - g(x) < 0$), 进而构造辅助函数 $h(x) = f(x) - g(x)$),

则 $g'(x) = \cos x + 2x - 1$.

设 $h(x) = \cos x + 2x - 1$, 则 $h'(x) = -\sin x + 2 > 0$,

所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) > h(0) = 0$, 即 $g'(x) > 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增,

所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 即 $\sin x + x^2 - x > 0$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立,

所以 $\sin x > x - x^2$ 在 $(0, 1)$ 上恒成立.

综上所述, 当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x < x$.

(2)【解】若 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, 则存在 $\delta \in (0, 1)$, 使得当 $x \in (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$ 时, $f(x) < f(0)$.

因为 $f(x)$ 是偶函数, 不妨设 $0 < x < 1$,

又因为 $\cos ax = \cos(-ax)$, 不妨设 $a \geq 0$.



$$f'(x) = \frac{2x - a(1-x^2) \sin ax}{1-x^2}, x \in (-1, 1)$$

(提示:分母 $1-x^2 > 0$, 只需讨论分子 $2x - a(1-x^2) \sin ax$ 的符号),

$$\text{令 } h(x) = 2x - a(1-x^2) \sin ax.$$

当 $x > 0$ 时, $\sin x < x$, 于是 $h(x) \geq 2x - a^2 x(1-x^2) = x(2 - a^2 + a^2 x^2)$. 当 $0 < x < 1$ 时, $x - x^2 < \sin x$, 于是 $h(x) < 2x - a^2 x(1-x^2)(1-ax)$.

如果找到 $\delta \in (0, 1)$, 使得当 $x \in (0, \delta)$ 时, $h(x) > 0$, 则 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \delta)$ 单调递增, 从而 $f(x) > f(0)$, 那么 $x = 0$ 就不是 $f(x)$ 的极大值点. 要使 $h(x) > 0$, 只需 $x(2 - a^2 + a^2 x^2) > 0$, 又 $a^2 x^2 > 0$, 所以只需考虑 $2 - a^2$ 的符号, 于是找到了分类讨论的标准 $\sqrt{2}$.

当 $0 \leq a \leq \sqrt{2}$ 时, $h(x) \geq x(2 - a^2 + a^2 x^2) > 0$. 当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) > 0, f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 单调递增, 从而 $f(x) > f(0)$, 因此 $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极大值点.

当 $a > \sqrt{2}$ 时, $h(x) < 2x - a^2 x(1-x^2)(1-ax)$, 为了找到 $\delta \in (0, 1)$, 使得当 $x \in (0, \delta)$ 时, $h(x) < 0$, 只需 $2x - a^2 x(1-x^2)(1-ax) < 0$, 即 $(1-x^2)(1-ax) > \frac{2}{a^2}$,

$$(1-x^2)(1-ax) > (1-x)(1-ax) > (1-ax)^2,$$

$$\text{只需 } (1-ax)^2 > \frac{2}{a^2}, \text{ 解得 } 1-ax > \frac{\sqrt{2}}{a}, \text{ 即 } 0 < x < \frac{a-\sqrt{2}}{a^2}.$$

于是当 $0 < x < \frac{a-\sqrt{2}}{a^2}$ 时, $h(x) < 2x - a^2 x(1-x^2)(1-ax) < x[2 - a^2(1-ax)^2] < 0$, 从而 $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a-\sqrt{2}}{a^2}\right)$ 单调递减. 又因为 $f(x)$ 是偶函数, 故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

综上, a 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$.

4. 命题点 ▶ 导数的几何意义、函数图象的对称性、由极值点求参数范围问题

$$\text{【解】} (1) f(x) = \left(\frac{1}{x} + a\right) \ln(x+1),$$

$$f'(x) = -\frac{\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{x} + a\right),$$

当 $a = -1$ 时, $f(1) = 0, f'(1) = -\ln 2$, 故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -\ln 2(x-1)$, 即 $x \ln 2 + y - \ln 2 = 0$.

$$(2) \text{解法一: 设 } g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = (x+a) \cdot$$

$$\ln \frac{x+1}{x}, x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty), \text{ 由题}$$

设知对于任意 $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, 都有 $g(x) = g(2b-x)$ (提示: 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = b$ 对称的充要条件是 $g(x) = g(2b-x)$),



$$\text{又 } g(2b-x) = (2b-x+a) \ln \frac{2b-x+1}{2b-x} = (x-2b-a) \ln \frac{x-2b}{x-2b-1},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} -2b-a=a, \\ -2b=1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

解法二: 设 $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则 $g(x) = (x+a) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

若存在 a, b , 使得曲线 $y = g(x)$ 关于直线 $x = b$ 对称, 则 $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ 关于直线 $x = b$ 对称, 所以 $b = -\frac{1}{2}$.

$$\text{由 } g(x) = g(-1-x) \text{ 得 } (x+a) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (-1-x+a) \ln \frac{x}{1+x},$$

$$\text{整理得 } (x+a) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (x+1-a) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

所以 $a = \frac{1}{2}$, 故存在 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$, 使得曲线 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x = b$ 对称.

$$\text{解法三: 令 } g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \text{ 则 } g(x) = (x+a) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

由题意函数 $y = g(x+b)$ 为偶函数,

$$\text{即 } g(x+b) = (x+b+a) \ln \frac{x+b+1}{x+b} \text{ 为偶函数,}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} b+a=0, \\ b+1+b=0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=-\frac{1}{2}, \end{cases}$$

所以存在 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$, 使得曲线 $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x = b$ 对称.

$$(3) f'(x) = -\frac{\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{x} + a \right) = \frac{-\ln(x+1) + \frac{ax^2+x}{x+1}}{x^2},$$

$$\text{设 } h(x) = -\ln(x+1) + \frac{ax^2+x}{x+1}, x \in (0, +\infty),$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{x(ax+2a-1)}{(x+1)^2} \quad (\text{提示: 当原函数求导后不方便判断导函数与 } 0 \text{ 的大小时, 常另设函数再次求导判断}).$$

①当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 在

$(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无极值点.



②当 $a \leq 0$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无极值点.

③当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 易得 $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a} - 2)$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a} - 2, +\infty)$ 上单调递增,

又当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) > 0$,

所以在 $(\frac{1}{a} - 2, +\infty)$ 上存在 x_0 使得 $h(x_0) = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在极值点 x_0 .

综上, a 的取值范围为 $(0, \frac{1}{2})$.

5. 命题点 ▶ 利用导数讨论函数的单调性、极值点与零点

(1) 【证明】由 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$,

$$\text{得 } f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - 3kx^2 = \frac{x^2}{x+1} - 3kx^2 = x^2 \left(\frac{1}{x+1} - 3k \right).$$

当 $x > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_0 = \frac{1}{3k} - 1$.

因为 $0 < k < \frac{1}{3}$, 所以 $0 < 3k < 1$, 则 $x_0 = \frac{1}{3k} - 1 > 0$.

当 $0 < x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的极大值

点 $x_0 = \frac{1}{3k} - 1$.

因为 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 且 $f(x_0) > f(0) = 0$ (提示: 在 $(0, x_0)$ 上 $f(x)$ 单调递增),

所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上有唯一的零点,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的零点.

(2) (i) 【证明】 $g(t) = f(x_1+t) - f(x_1-t)$,

且由 (1) 知 $x_1 = x_0 = \frac{1}{3k} - 1$, 则 $3k = \frac{1}{x_1+1}$.

则 $g'(t) = f'(x_1+t) + f'(x_1-t)$

$$= (x_1+t)^2 \left(\frac{1}{x_1+t+1} - 3k \right) + (x_1-t)^2 \left(\frac{1}{x_1-t+1} - 3k \right)$$

$$= (x_1+t)^2 \left(\frac{1}{x_1+t+1} - \frac{1}{x_1+1} \right) + (x_1-t)^2 \left(\frac{1}{x_1-t+1} - \frac{1}{x_1+1} \right)$$

$$= (x_1+t)^2 \cdot \frac{-t}{(x_1+t+1)(x_1+1)} + (x_1-t)^2 \cdot \frac{t}{(x_1-t+1)(x_1+1)}$$

$$= \frac{-t[(x_1+t)^2(x_1-t+1) - (x_1-t)^2(x_1+t+1)]}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{-t[(x_1+t)(x_1^2-t^2)+(x_1+t)^2-(x_1-t)(x_1^2-t^2)-(x_1-t)^2]}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)} \\
 &= \frac{-t[2t(x_1^2-t^2)+4x_1t]}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)} \\
 &= \frac{-2t^2(x_1^2-t^2+2x_1)}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)},
 \end{aligned}$$

因为 $t \in (0, x_1)$ 时, $x_1^2 - t^2 + 2x_1 > 0$, $(x_1 + t + 1)(x_1 - t + 1)(x_1 + 1) > 0$, $-2t^2 < 0$, 所以 $g'(t) < 0$,

则 $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 上单调递减.

(ii) 【解】 $2x_1 > x_2$, 证明如下:

由 (i) 知 $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减,

则 $g(x_1) < g(0) = f(x_1+0) - f(x_1-0) = 0$,

所以 $g(x_1) = f(x_1+x_1) - f(x_1-x_1) = f(2x_1) - f(0) = f(2x_1) - 0 = f(2x_1) < 0$.

因为 x_2 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点, 所以

$f(x_2) = 0$, 即 $f(2x_1) < f(x_2)$.

由 (1) 知 $x_2 \in (x_1, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $2x_1 > x_2$.

一题多解

(2) 根据题意 $f'(x_1) =$

$0, f(x_2) = 0$,

所以 $x_1 = x_0 = \frac{1}{3k} - 1$ 且 $\ln(1+x_2) - x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - kx_2^3 = 0$, 同时 $0 < x_1 < x_2$.

(i) $g'(t) = f'(x_1+t) + f'(x_1-t)$

$$= (x_1 + t)^2 \left(\frac{1}{x_1+t+1} - 3k \right) + (x_1 - t)^2 \left(\frac{1}{x_1-t+1} - 3k \right)$$

$$= (x_1 + t)^2 \left(\frac{1}{x_1+t+1} - \frac{1}{x_1+1} \right) + (x_1 - t)^2 \left(\frac{1}{x_1-t+1} - \frac{1}{x_1+1} \right)$$

$$= (x_1 + t)^2 \cdot \frac{-t}{(x_1+t+1)(x_1+1)} + (x_1 - t)^2 \cdot \frac{t}{(x_1-t+1)(x_1+1)}$$

$$= \frac{t}{x_1+1} \cdot \left[\frac{(x_1-t)^2}{x_1+1-t} - \frac{(x_1+t)^2}{x_1+1+t} \right],$$

$$\text{令 } \varphi(t) = \frac{(x_1+t)^2}{x_1+1+t} \quad (-x_1 < t < x_1),$$

$$\text{则 } \varphi'(t) = \frac{(x_1+t)(x_1+t+2)}{(x_1+1+t)^2},$$

当 $t \in (-x_1, x_1)$ 时, $\varphi'(t) > 0$, $\varphi(t)$ 单调递增,

当 $0 < t < x_1$ 时, $\varphi(-t) < \varphi(t)$, 所以

$$\frac{(x_1-t)^2}{x_1+1-t} < \frac{(x_1+t)^2}{x_1+1+t}.$$

所以 $g'(t) < 0$, 所以 $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减.

(ii) $2x_1 > x_2$, 证明如下: 由 (i) 知, 当 $t \in$

$(0, x_1)$ 时, $g(t)$ 单调递减, 所以 $g(t) <$

$g(0) = 0$, 所以 $f(x_1+t) < f(x_1-t)$,

令 $t = x_1$, 所以 $f(2x_1) < f(0) = f(x_2)$, 又 $0 <$

$x_1 < x_2$, 且 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $2x_1 > x_2$.



6. 命题点 ▶ 导数的几何意义、利用导数研究函数的单调性、极值、零点

(1) 【解】因为 $k = -1$, 所以 $f(x) = x - \ln(1+x) (x > -1)$,

$$\text{则 } f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} (x > -1).$$

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

综上, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-1, 0)$, 单调递增区间为 $(0, +\infty)$.

(2) 【证明】因为 $f(x) = x + k \ln(1+x)$,

$$f'(x) = 1 + \frac{k}{1+x},$$

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(t, f(t))$ 处的切线方程为 $y - [t + k \ln(1+t)] = \left(1 + \frac{k}{1+t}\right)(x - t)$,

$$\text{整理得 } y = \left(1 + \frac{k}{1+t}\right)x - \frac{kt}{1+t} + k \ln(1+t).$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y = \frac{-kt}{1+t} + k \ln(1+t), \text{ 令 } h(t) =$$

$$\frac{-kt}{1+t} + k \ln(1+t),$$

$$\text{则 } h'(t) = \frac{kt}{(1+t)^2}, \text{ 又 } k \neq 0, t > 0, \text{ 则当 } k > 0$$

时, $h'(t) > 0$, 所以 $h(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $t \in (0, +\infty)$ 时, $h(t) > h(0) = 0$;

当 $k < 0$ 时, $h'(t) < 0$, $h(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以当 $t \in (0, +\infty)$ 时, $h(t) < h(0) = 0$,

即当 $t \in (0, +\infty)$ 时, $h(t) \neq 0$, 所以 l 不经过点 $(0, 0)$.

(3) 【解】存在.

依题意, $f(x) = x + \ln(1+x)$, $A(t, t + \ln(1+t))$, $C(0, t + \ln(1+t))$,

由(2)得, 当 $k = 1$ 时, l 的方程为 $y = \left(1 + \frac{1}{1+t}\right)x - \frac{t}{1+t} + \ln(1+t)$, 所以 $B\left(0, \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}\right)$.

若 $2S_{\triangle ACO} = 15S_{\triangle ABO}$ 成立, 则 $2 \times \frac{1}{2} \times$

$$|OC| \times |AC| = 15 \times \frac{1}{2} \times |BO| \times |AC|,$$

$$\text{即 } 2|OC| = 15|BO|,$$

$$\text{即 } 2[t + \ln(1+t)] = 15\left[\ln(1+t) - \frac{t}{1+t}\right], \text{ 整}$$

$$\text{理得 } 2t - 13\ln(1+t) + \frac{15t}{1+t} = 0.$$

$$\text{令 } g(t) = 2t - 13\ln(1+t) + \frac{15t}{1+t}, t > 0,$$

$$g'(t) = \frac{2t^2 - 9t + 4}{(1+t)^2} = \frac{(2t-1)(t-4)}{(1+t)^2},$$

当 $t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 单调递

增, 当 $t \in \left(\frac{1}{2}, 4\right)$ 时, $g'(t) < 0$, $g(t)$ 单调

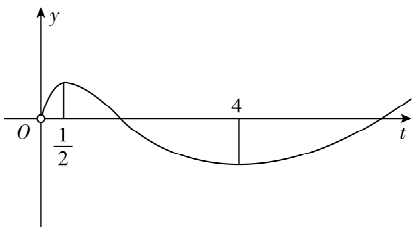
递减, 当 $t \in (4, +\infty)$ 时, $g'(t) > 0$, $g(t)$ 单

调递增,

又当 $t \rightarrow 0$ 时, $g(t) \rightarrow 0$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $g(t) \rightarrow +\infty$,

$g(t)$ 的极大值为 $g\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - 13\ln \frac{3}{2} > 0$, $g(t)$ 的极小值为 $g(4) = 20 - 13\ln 5 < 0$, 作出 $g(t)$ 的大致图象如图所示.

所以 $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点, 故有两个这样的点 A 使 $2S_{\triangle ACO} = 15S_{\triangle ABO}$.



7. 命题点 ▶ 导数与函数的单调性、最值, 函数的零点

(1) 【解】 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = e^x - a, g'(x) = a - \frac{1}{x}.$$

①当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 即 $f(x)$ 没有最小值, 不符合题意.

②当 $a > 0$ 时, 在 $(-\infty, \ln a)$ 上 $f'(x) < 0$, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 时取得极小值, 即为最小值, 最小值为 $f(\ln a) = a - a \ln a$.

在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上 $g'(x) < 0$, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 时取得极小值, 即为

最小值, 最小值为 $g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a$.

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值, 所以 $f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$, 即 $a - a \ln a = 1 + \ln a$.

因为 $a > 0$, 所以上式等价于 $\ln a - \frac{a-1}{a+1} = 0$.

令 $h(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$ ($x > 0$), 则 $h'(x) =$

$\frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $h(1) = 0 = h(a)$ 且 $a > 0$, 所以 $a = 1$.

(2) 【证明】由 (1) 知 $f(x) = e^x - x$, $g(x) = x - \ln x$. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0) = 1 > 0$;



$g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(1) = 1 > 0$. 所以曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的大致形状如图所示.

设直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 三个交点的横坐标分别为 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), 所以 $x_1 < 0, 0 < x_2 < 1, x_3 > 1$,

$$\text{且 } f(x_1) = f(x_2) = e^{x_1} - x_1 = e^{x_2} - x_2 = b,$$

$$g(x_2) = g(x_3) = x_2 - \ln x_2 = x_3 - \ln x_3 = b.$$

$$\text{所以 } e^{\ln x_2} - \ln x_2 = e^{\ln x_3} - \ln x_3 = b,$$

$$\text{即 } f(\ln x_2) = f(\ln x_3) = b.$$

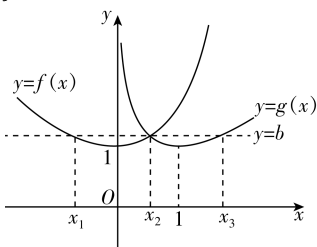
$$\text{又 } \ln x_2 < 0, \ln x_3 > 0,$$

$$\text{所以 } x_1 = \ln x_2, x_2 = \ln x_3, \textcircled{1}$$

$$\text{且 } e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2, \text{即 } e^{x_2} + \ln x_2 = 2x_2. \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 得 } x_1 + x_3 = \ln x_2 + e^{x_2} = 2x_2,$$

所以存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.



8. 命题点 ▶ 三角函数的最值, 存在、恒成立问题

$$\begin{aligned} (1) \text{【解】} f'(x) &= -5\sin x + 5\sin 5x \\ &= 5(\sin 5x - \sin x) \\ &= 5[\sin(3x+2x) - \sin(3x-2x)] \\ &= 5 \times 2\cos 3x \sin 2x \\ &= 10\sin 2x \cos 3x. \end{aligned}$$

$$\text{当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 时, } \sin 2x \geq 0,$$

$$3x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right],$$

$$\text{当 } 3x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 即 } x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \text{ 时, } \cos 3x > 0,$$

此时 $f'(x) \geq 0$ 且等号不恒成立, 故 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增;

$$\text{当 } 3x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right], \text{ 即 } x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 时, } \cos 3x < 0,$$

此时 $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减,

$$\begin{aligned} \therefore \text{当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \text{ 时, } f(x)_{\max} &= f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ &= 5\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} = 6\cos \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}. \end{aligned}$$

一题多解

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5\sin x + 5\sin 5x = \\ &= 5(\sin 5x - \sin x) = 5 \times 2\cos 3x \sin 2x = \end{aligned}$$



$$10\sin 2x\cos 3x.$$

令 $f'(x) = 0$, 即 $\sin 2x = 0$ 或 $\cos 3x = 0$, 则

$$x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}) \text{ 或 } x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbf{Z}),$$

又 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\therefore x = 0$ 或 $x = \frac{\pi}{6}$ (提示: 函数在闭区间上的最值在区间端点或极值点处取得).

①当 $x = 0$ 时, $f(0) = 5\cos 0 - \cos 0 = 4$;

②当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{4} = 3\sqrt{2}$;

③当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} = 6\cos \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$,

又 $4 < 3\sqrt{2} < 3\sqrt{3}$, \therefore 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $3\sqrt{3}$.

(2)【证明】 $\forall a \in \mathbf{R}$, $\exists k \in \mathbf{Z}$, 使得 $a = 2k\pi + a'$, 其中 $a' \in [-\pi, \pi)$.

当 $a' = 0$ 时, $[a' - \theta, a' + \theta] = [-\theta, \theta]$, 取 $y = 2k\pi + \theta$, 则 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 且 $\cos y = \cos \theta$.

当 $a' \in (0, \pi)$ 时, $a' - \theta \in (-\theta, \pi - \theta)$, $a' + \theta \in (\theta, \pi + \theta)$,

设 $y_1 = \min\{\pi, a' + \theta\}$, 则 $y_1 \in (\theta, \pi]$,

$\therefore g(x) = \cos x$ 在 $[\theta, y_1]$ 上单调递减,

$\therefore \cos y_1 < \cos \theta$,

取 $y = 2k\pi + y_1$, 则 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 且 $\cos y = \cos y_1 < \cos \theta$.

当 $a' \in [-\pi, 0)$ 时, $a' - \theta \in [-\pi - \theta, -\theta)$, $a' + \theta \in [-\pi + \theta, \theta)$,

记 $y_2 = \max\{-\pi, a' - \theta\}$, 则 $y_2 \in [-\pi, -\theta)$,

$\therefore g(x) = \cos x$ 在 $[y_2, -\theta]$ 上单调递增,

$\therefore \cos y_2 < \cos(-\theta) = \cos \theta$,

取 $y = 2k\pi + y_2$, 则 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 且 $\cos y = \cos y_2 < \cos \theta$.

综上, 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 使得 $\cos y \leq \cos \theta$.

快解

(反证法) 假设对任意 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 有 $\cos y > \cos \theta$.

由 $\cos y > \cos \theta$, 可得 $y \in (2k\pi - \theta, 2k\pi + \theta)$, $k \in \mathbf{Z}$,

则 $[a - \theta, a + \theta] \subseteq (2k\pi - \theta, 2k\pi + \theta)$, $k \in \mathbf{Z}$,

$$\therefore \begin{cases} a - \theta > 2k\pi - \theta, \\ a + \theta < 2k\pi + \theta, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \therefore \begin{cases} a > 2k\pi, \\ a < 2k\pi, \end{cases} k \in \mathbf{Z},$$

无解.

\therefore 假设不成立.

故存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 使得 $\cos y \leq \cos \theta$.

(3)【解】当 $\varphi = 0$ 时, $y = 5\cos x - \cos 5x$,

记 $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$,

$\therefore y = f(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数,

\therefore 只需考虑 $x \in [0, \pi]$ 时即可.

由(1)知 $f'(x) = 10\sin 2x\cos 3x = 20(4\cos^2 x - 3) \cdot \cos^2 x \cdot \sin x$,



当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right), x \in \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ 时, $f'(x) \geq 0$

且不恒为 0, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 时, $f'(x) \leq 0$ 且不恒为 0, $f(x)$ 单调递减,

$$\because f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}, f(\pi) = -4, \therefore f(x)_{\max} = 3\sqrt{3}, \therefore b \geq 3\sqrt{3}.$$

当 $\varphi \neq 0$ 时, 由 (2) 知 $\exists y \in \left[\varphi - \frac{5\pi}{6}, \varphi + \frac{5\pi}{6}\right]$, 使得 $\cos y \leq \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

记 $y = 5x_0 + \varphi$, 由 $y \in \left[\varphi - \frac{5\pi}{6}, \varphi + \frac{5\pi}{6}\right]$ 知 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$,

$$\therefore 5\cos x_0 - \cos(5x_0 + \varphi) = 5\cos x_0 - \cos y \geq 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

$$\therefore b_{\min} = 3\sqrt{3}.$$

一题多解

(3) 由余弦型函数周期性

可令 $\varphi \in [0, 2\pi)$.

① 当 $\varphi = 0$ 时, $5\cos x - \cos(5x + \varphi) = 5\cos x - \cos 5x$,

由 (1) 得, $f(x) = 5\cos x - \cos 5x, x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 10\sin 2x \cos 3x$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 或 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$.

当 $x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 5\cos \frac{k\pi}{2} - \cos \frac{5k\pi}{2} = 5 \cos \frac{k\pi}{2} - \cos\left(2k\pi + \frac{k\pi}{2}\right) = 4\cos \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore \cos \frac{k\pi}{2} \in \{-1, 0, 1\}$, $\therefore f\left(\frac{k\pi}{2}\right)_{\max} = 4$;

当 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) = 5\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{5k\pi}{3}\right) = 5\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{k\pi}{3}\right) = 6\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right), k \in \mathbf{Z}$,

当 $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 时, 分别有 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3}, f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$,

$\therefore f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)_{\max} = 3\sqrt{3} > 4$.

故当 $\varphi = 0$ 时, $f(x)_{\max} = 3\sqrt{3}$, 此时 $b \geq 3\sqrt{3}$.

② 当 $\varphi \in (0, 2\pi)$ 时,



令 $g(x) = 5\cos x - \cos(5x + \varphi)$, 取 $x = \frac{\pi - \varphi}{6}$,

则 $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$,

则 $g(x) = 5\cos \frac{\pi - \varphi}{6} - \cos \frac{5\pi + \varphi}{6} =$

$6\cos \frac{\pi - \varphi}{6} = 6\cos x > 6\cos \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$, 故 $b >$

$3\sqrt{3}$ (另解: 由(2)得, 取 $\theta = \frac{5\pi}{6}$, 令 $a = \varphi$,

则存在 $y \in [\varphi - \theta, \varphi + \theta]$ 使得 $\cos y \leq \cos \theta$.

设 $x = \frac{y - \varphi}{5}$, $\therefore |x| \leq \frac{\theta}{5} = \frac{\pi}{6}$, $\therefore \cos x \geq$

$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore 5\cos x - \cos(5x + \varphi) =$

$5\cos x - \cos y \geq 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \frac{5\pi}{6} = 3\sqrt{3}$).

综上所述, b 的最小值为 $3\sqrt{3}$.

9. 命题点 ▶ 导数的运算、不等式恒成立求参数范围

(1) 【解】当 $b = 0$ 时, $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax$,

$x \in (0, 2)$,

则 $f'(x) = \frac{2-x}{x} \cdot \left(\frac{x}{2-x}\right)' + a = \frac{2-x}{x} \cdot$

$\frac{2-x-(-1)x}{(2-x)^2} + a = \frac{2}{x(2-x)} + a$.

$\therefore f'(x) \geq 0, \therefore a \geq \frac{2}{x(x-2)}$ 在 $(0, 2)$ 上恒

成立.

当 $x \in (0, 2)$ 时, $x(x-2) \in [-1, 0)$,

$\therefore \frac{2}{x(x-2)} \in (-\infty, -2]$,

$\therefore a \in [-2, +\infty)$, 即 a 的最小值为 -2 .

(2) 【证明】 $\therefore f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3, x \in (0, 2)$,

$\therefore f(x+1) = \ln \frac{1+x}{1-x} + ax + a + bx^3, x \in (-1,$

$1)$.

令 $g(x) = f(x+1) - a = \ln \frac{1+x}{1-x} + ax + bx^3, x \in$

$(-1, 1)$, 则 $g(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} - ax - bx^3 =$

$-\ln \frac{1+x}{1-x} - ax - bx^3 = -g(x), \therefore g(x)$ 是定义

域为 $(-1, 1)$ 的奇函数, 其图象关于坐标原点 O 对称.

又 $\therefore f(x)$ 的图象可由 $g(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度, 再向上平移 a 个单位长度得到, \therefore 曲线 $y = f(x)$ 是中心对称图形.

(3) 【解】 $\therefore f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2$,

$\therefore f(1) = -2 \Rightarrow a = -2$,

$\therefore f(x) = \ln \frac{x}{2-x} - 2x + b(x-1)^3 > -2$ 对任意

$x \in (1, 2)$ 恒成立,



$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} - 2 + 3b(x-1)^2 = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)} + 3b(x-1)^2 = (x-1)^2 \cdot \left[\frac{2}{x(2-x)} + 3b \right].$$

$$\text{令 } m(x) = \frac{2}{x(2-x)} + 3b, \therefore \text{必有 } m(1) = 2 + 3b \geq 0 \Rightarrow b \geq -\frac{2}{3}.$$

否则若 $b < -\frac{2}{3}$, 则存在 $\delta (1 < \delta < 2)$ 使得当 $x \in (1, \delta)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(1, \delta)$ 上单调递减, $\therefore f(\delta) < f(1) = -2$.

当 $b \geq -\frac{2}{3}$ 时, 对任意 $x \in (1, 2)$, $f(x) \geq$

$$\ln \frac{x}{2-x} - 2x - \frac{2}{3}(x-1)^3,$$

$$\text{令 } h(x) = \ln \frac{x}{2-x} - 2x - \frac{2}{3}(x-1)^3, \text{ 则 } h'(x) =$$

$$\frac{2(x-1)^2}{x(2-x)} - 2(x-1)^2 = 2(x-1)^2$$

$$\left[\frac{1}{x(2-x)} - 1 \right] > 0, \text{ 对任意 } x \in (1, 2) \text{ 恒成立,}$$

$$\therefore h(x) > h(1) = -2, \text{ 符合条件.}$$

$$\text{综上可得 } b \text{ 的取值范围是 } \left[-\frac{2}{3}, +\infty \right).$$

10. 命题点 ▶ 求函数的极值、不等式恒成立求参数范围

【解】(1) 当 $a = -2$ 时,

$$f(x) = (1+2x) \ln(1+x) - x, x > -1,$$

$$f'(x) = 2 \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $f(x)$ 的极小值为 $f(0) = 0$, 无极大值.

$$(2) f(x) = (1-ax) \ln(1+x) - x, f'(x) =$$

$$-a \ln(1+x) - \frac{(a+1)x}{1+x}.$$

$$\text{令 } g(x) = f'(x),$$

$$\text{则 } g'(x) = -\frac{a}{1+x} - \frac{a+1}{(1+x)^2}.$$

因为当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 0$,

$$\text{所以 } g'(0) = -1-2a \geq 0, \text{ 得 } a \leq -\frac{1}{2}.$$

$$\text{当 } a \leq -\frac{1}{2} \text{ 时, } g'(x) \geq \frac{1}{2(1+x)} -$$

$$\frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{x}{2(1+x)^2} \geq 0, \text{ 且等号不恒成}$$

立, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f'(x) = g(x) \geq g(0) = 0$, 且等号不恒成立,

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) \geq f(0) = 0$ 恒成立,



故 a 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$.

11. 命题点 ▶ 导数在研究函数的单调性、不等式中的应用

(1) 【解】当 $a=1$ 时, $f(x) = xe^x - e^x, x \in \mathbf{R}$, 则 $f'(x) = xe^x$,

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

\therefore 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 【解】函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = (1+ax)e^{ax} - e^x$.

对于 $x \in (0, +\infty)$, 当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) = (1+ax)e^{ax} - e^x > e^{ax} - e^x \geq e^x - e^x = 0$,

$\therefore f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) > -1$, 不满足题意.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \leq e^{ax} - e^x \leq 1 - e^x < 0$ 且等号不恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) < -1$, 满足题意.

当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \leq \left(1 + \frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}} - e^x = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} - e^{\frac{x}{2}}\right)$.

令 $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - e^{\frac{x}{2}}$, 则 $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore g(x) < g(0) = 0, \therefore f'(x) = e^{\frac{x}{2}} \cdot g(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) < -1$, 满足题意.

当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $f'(x) = e^{ax} [1 + ax - e^{(1-a)x}]$.

令 $h(x) = 1 + ax - e^{(1-a)x}$,

则 $h'(x) = a + (a-1)e^{(1-a)x}$.

$\therefore h'(x)$ 为减函数,

又 $h'(0) = 2a - 1 > 0, x \rightarrow +\infty, h'(x) < 0$,

$\therefore \exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $h'(x_0) = 0$,

\therefore 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, $h(x) > h(0) = 0$,

\therefore 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) = e^{ax} \cdot h(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增.

$\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) > -1$, 不满足题意.

综上, a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

(3) 【证明】由 (2) 知当 $a = \frac{1}{2}$, 且 $x \in$

$(0, +\infty)$ 时, $f(x) < -1$, 即 $xe^{\frac{x}{2}} - e^x < -1$,

$\therefore xe^{\frac{x}{2}} < e^x - 1$.

令 $t = e^x > 1$, 则 $x = \ln t, \therefore \ln t \cdot \sqrt{t} < t - 1$.

令 $t = \frac{i+1}{i} > 1, i \in \mathbf{N}^*$,

则 $\ln \frac{i+1}{i} \sqrt{\frac{i+1}{i}} < \frac{i+1}{i} - 1 = \frac{1}{i}, \therefore \ln \frac{i+1}{i} <$

$\frac{1}{i} \sqrt{\frac{i}{i+1}} = \sqrt{\frac{1}{i(i+1)}} = \frac{1}{\sqrt{i^2+i}},$



$$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i^2+i}} > \sum_{i=1}^n \ln \frac{i+1}{i} = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln(n+1).$$

12. 命题点 ▶ 导数的几何意义, 利用导数研究函数的单调性

(1) 【解】因为 $f(x) = e^x \ln(x+1)$, $x > -1$,

$$\text{所以 } f'(x) = e^x \ln(x+1) + e^x \cdot \frac{1}{x+1},$$

所以 $f'(0) = 1$, 而 $f(0) = 0$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - 0 = x - 0$, 即 $x - y = 0$.

$$(2) \text{【解】} g(x) = f'(x) = e^x \ln(x+1) + e^x \cdot \frac{1}{x+1} = e^x \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right], x > -1,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } g'(x) &= e^x \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right] + e^x \left[\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] \\ &= e^x \left[\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] = e^x \left[\ln(x+1) + \frac{2x+1}{(x+1)^2} \right], \\ &x > -1. \end{aligned}$$

因为当 $x \geq 0$ 时, $\ln(x+1) \geq 0$, $\frac{2x+1}{(x+1)^2} > 0$, $e^x \geq 1$, 所以 $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\begin{aligned} (3) \text{【证明】} \text{ 设 } F(s) &= f(s+t) - f(s) - f(t) = e^{s+t} \ln(1+s+t) - e^s \ln(1+s) - e^t \ln(1+t), \\ \text{则 } F'(s) &= e^{s+t} \left[\ln(1+s+t) + \frac{1}{1+s+t} \right] - e^s \left[\ln(1+s) + \frac{1}{1+s} \right] \\ &= g(s+t) - g(s). \end{aligned}$$

由(2)知 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $s > 0, t > 0$, 所以 $g(s+t) > g(s)$, 即 $F'(s) > 0$, 所以 $F(s)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $F(s) > F(0) = f(0+t) - f(0) - f(t) = -f(0) = 0$, 所以对任意的 $s, t \in (0, +\infty)$, 有 $f(s+t) > f(s) + f(t)$.

13. 命题点 ▶ 导数与函数单调性、三角函数的周期性、最值

$$(1) \text{【解】} f'(x) = \cos x (\sin x \sin 2x) + \sin x (\sin x \sin 2x)' = 2 \sin x \cos x \sin 2x + 2 \sin^2 x \cos 2x = 2 \sin x \sin 3x.$$

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \text{ 时, } f'(x) > 0;$$

$$\text{当 } x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \text{ 时, } f'(x) < 0.$$

所以 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 单调递增, 在区间 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 单调递减.

(2) 【证明】因为 $f(0) = f(\pi) = 0$, 由(1)知, $f(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 的最大值为

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \text{ 最小值为 } f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

而 $f(x)$ 是周期为 π 的周期函数, 故

$$|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

(3) 【证明】由于

$$(\sin^2 x \sin^2 2x \cdots \sin^2 2^n x)^{\frac{3}{2}}$$



$$\begin{aligned} &= |\sin^3 x \sin^3 2x \cdots \sin^3 2^n x| \\ &= |\sin x| |\sin^2 x \sin^3 2x \cdots \sin^3 2^{n-1} x \sin 2^n x| \cdot |\sin^2 2^n x| \\ &= |\sin x| |f(x)f(2x) \cdots f(2^{n-1}x)| |\sin^2 2^n x| \\ &\leq |f(x)f(2x) \cdots f(2^{n-1}x)|, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \sin^2 x \sin^2 2x \cdots \sin^2 2^n x \leq \left(\frac{3\sqrt{3}}{8} \right)^{\frac{2n}{3}} = \frac{3^n}{4^n}.$$