



第 12 章 概率与统计

第 1 节 随机事件的概率、古典概型、相互独立事件及概率

刷**基础**

1. BD 考查点 ▶ 互斥事件、对立事件的辨析

【解析】事件 $H =$ “选择一门文科学科”，包含“选择思想政治”“选择历史”“选择地理”，所以事件 $G =$ “选择思想政治”，包含于事件 H ，故事件 G, H 可以同时发生，不是互斥事件，故 A 错误；

事件 $F =$ “选择一门理科学科”与事件 $H =$ “选择一门文科学科”不能同时发生，且必有一个事件发生，故 F 和 H 是互斥事件也是对立事件（提示：两个事件，若有且仅有一个发生，则这两个事件为对立事件，对立事件一定是互斥事件），故 B 正确；

由题意可知 $P(F) = \frac{2}{5}, P(G) = \frac{1}{5}$ ，所以

$P(F) + P(G) = \frac{3}{5} \neq 1$ ，故 C 错误；

事件 $E =$ “选择生物学”与事件 $H =$ “选择一门文科学科”不能同时发生，所以 E 和 H 是互斥事件，所以 $P(E \cup H) = P(E) + P(H)$ ，故 D 正确。故选 BD。

2. $\frac{7}{12}$

突破点 ▶ 互斥事件的概率求解

【解析】记“一号列车准点到站”为事件 M ，“二号列车准点到站”为事件 N ，则

$$P(M) = \frac{1}{3}, P(N) = \frac{3}{4}, P(M + \bar{N}) = \frac{1}{2}.$$

因为 $P(M + \bar{N}) = P(M) + P(\bar{N}) - P(M\bar{N})$ ，

所以 $P(M\bar{N}) = \frac{1}{12}$ ，又 $P(M) = P(MN) +$

$P(M\bar{N})$ ，则 $P(MN) = \frac{1}{4}$ 。又 $P(N) =$

$P(MN) + P(\bar{M}N)$ ，即 $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + P(\bar{M}N)$ ，所

以 $P(\bar{M}N) = \frac{1}{2}$ 。故 $P(A + B) = P(A \cup$

$B) = P(M\bar{N} + \bar{M}N) = P(M\bar{N}) + P(\bar{M}N) =$

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

3. A 考查点 ▶ 古典概型

【解析】不超过 20 的素数有 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19，共 8 个。从中随机抽取 2 个，有 $C_8^2 = 28$ 种情况，其中孪生素数有 $\{3, 5\}, \{5, 7\}, \{11, 13\}, \{17, 19\}$ ，共 4 种情况，则这 2 个素数是孪生素数的概率为

$$\frac{4}{28} = \frac{1}{7}. \text{ 故选 A.}$$

4. A 考查点 ▶ 古典概型

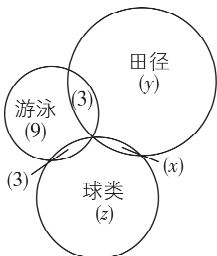
【解析】依题意可得这 4 人恰有 3 人上同



一节车厢的概率为 $\frac{C_4^3 A_{12}^2}{12^4} = \frac{11}{432}$. 故选 A.

5. A 考查点 ▶ 古典概型与 Venn 图

【解析】设同时参加田径比赛和球类比赛的人数为 x , 只参加田径比赛的人数为 y , 只参加球类比赛的人数为 z , 只参加游泳比赛的有 $15 - 3 - 3 = 9$ 人, 作出 Venn 图.



由 Venn 图得
$$\begin{cases} 3+x+y=8, \\ 3+x+z=14, \\ 9+3+3+x+y+z=28, \end{cases} \quad \text{解得}$$

$x=3, y=2, z=8$, 所以只参加田径一项比赛的人数为 2. 从该班参加比赛的同学中随机抽取 1 人进行访谈, 则抽取到的同学只参加田径一项比赛的概率为 $\frac{2}{28} = \frac{1}{14}$. 故选 A.

6. $\frac{15}{28}$ 考查点 ▶ 古典概型与对数函数

【解析】因为 $\log_m n < 0$, 所以 $0 < m < 1, n > 1$ 或 $m > 1, 0 < n < 1$, 从 $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2, 3, 4, 6, 9$ 中任取两个不同的数作为 m, n , 共有 $A_8^2 = 56$ 种取法, 其中对数值为负数的取法有 $C_3^1 C_5^1 + C_5^1 C_3^1 = 30$ 种, 所以 $P(A) = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$.

7. B 考查点 ▶ 计算古典概型问题的概率、独立事件的判断

【解析】对于 A, 事件 A 和事件 B 可以同时发生, 即抽取丁袋, 事件 A 与事件 B 不互斥, 故 A 错误;

对于 B, $P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$, 事件 A 与事件 B 相互独立, 故 B 正确;

对于 C, 事件 A 与事件 $B \cup C$ 可以同时发生, 即抽取丁袋, 事件 A 与事件 $B \cup C$ 不对立, 故 C 错误;

对于 D, $P(A) = \frac{1}{2}, P(B \cap C) = \frac{1}{4},$

$P(A \cap (B \cap C)) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B \cap C),$

事件 A 与事件 $B \cap C$ 不独立, 故 D 错误. 故选 B.

8. $\frac{7}{9}$ 考查点 ▶ 求解相互独立事件的概率



【解析】由题意，甲签约，乙、丙没有签约的概率 $P_1 = \frac{3}{4} \times \left(1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ ；甲未签约，乙、丙都签约的概率 $P_2 = \left(1 - \frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{36}$ ；甲、乙、丙三人都签约的概率 $P_3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ 。所以至少一人签约的概率为 $\frac{2}{3} + \frac{1}{36} + \frac{1}{12} = \frac{7}{9}$ 。

刷

提分

1. C 考查点 ▶ 古典概型

【解析】由题意可知，组成没有重复数字的五位数有 $A_5^5 = 120$ 个。若五位数中数字 1, 2, 3 按从小到大的顺序排列，则符合题意的五位数有 $\frac{120}{A_3^3} = 20$ 个，所以所求的概率 $P = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$ 。故选 C。

2. A 突破点 ▶ 古典概型与平面向量结合

【解析】 $a = (4, 2)$, $b = (m, n)$ 且 a, b 不能作为基底，则 $4n = 2m$ ，即 $m = 2n$ 。当 $m = 2$ 时， $n = 1$ ；当 $m = 4$ 时， $n = 2$ ；当 $m = 6$ 时， $n = 3$ ，两次投掷得到点数的情况有 $6 \times 6 = 36$ 种，所以所求的概率 $P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ 。故选 A。

3. C 突破点 ▶ 古典概型与组合结合

【解析】由题知，抽取的两道题分为两道历史题，两道地理题和历史、地理各一道题三种情况，至少答对一道题有答对一道题和答对两道题两种情况，

则所求概率为 $\frac{C_{10}^2}{C_{16}^2} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \right) + \frac{C_6^2}{C_{16}^2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) + \frac{C_6^1 C_{10}^1}{C_{16}^2} \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{45}{120} \times \frac{8}{9} + \frac{15}{120} \times \frac{3}{4} + \frac{60}{120} \times \frac{5}{6} = \frac{27}{32}$ 。
故选 C。

一题多解

抽取的两道题分为两道历史题，两道地理题和历史、地理各一道三种情况，且都没答对的概率为 $\frac{C_{10}^2}{C_{16}^2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \right) + \frac{C_6^2}{C_{16}^2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \right) + \frac{C_6^1 C_{10}^1}{C_{16}^2} \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{32}$ ，故至少答对一道题的概率为 $1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32}$ 。

4. C 突破点 ▶ 对立事件、相互独立事件的辨析



【解析】抛掷三枚质地均匀的硬币，样本空间 $\Omega = \{(\text{正}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{正}), (\text{正}, \text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{反}, \text{反})\}$ ，共 8 个样本点，

事件 $A = \{(\text{正}, \text{正}, \text{正})\}$, $B = \{(\text{正}, \text{正}, \text{反}), (\text{正}, \text{反}, \text{正}), (\text{反}, \text{正}, \text{正})\}$, $C = \{(\text{正}, \text{反}, \text{反}), (\text{反}, \text{正}, \text{反}), (\text{反}, \text{反}, \text{正})\}$.

对于 A，事件 A, B, C 中任何两个事件都不能同时发生，事件 A, B, C 两两互斥，故 A 正确；

对于 B, $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$ ，故 B 正确；

对于 C，事件 A 与 $B \cup C$ 可以同时不发生，所以事件 A 与事件 $B \cup C$ 不是对立事件，故 C 错误；

对于 D, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$, $P(B \cup C) = P(B) + P(C) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{3}{4}$,

$P((A \cup B) \cap (B \cup C)) = P(B) = \frac{3}{8} =$

$P(A \cup B)P(B \cup C)$ ，则事件 $A \cup B$ 与 $B \cup C$ 相互独立，故 D 正确. 故选 C.

5. ABD 突破点 ▶ 对立事件及独立事件的概率

【解析】由对立事件的概率公式可得

$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ，故 A 正确；

因为 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - P(A \cap B) \leq \frac{3}{4}$ ，当且仅当 $A \cap B = \emptyset$ 时，等号成立，又因为 $A \cap B \subseteq A$ ，

$A \cap B \subseteq B$ ，所以 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{4} - P(A \cap B) \geq \frac{3}{4} -$

$\min\{P(A), P(B)\} = \frac{3}{4} - P(B) = \frac{1}{2}$ ，当且仅当 $B \subseteq A$ 时，等号成立，综上所述，

$\frac{1}{2} \leq P(A \cup B) \leq \frac{3}{4}$ ，故 B 正确；

由题干信息无法确定 A, B 的包含关系，故 C 错误；

因为 $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ，所以

$P(A\bar{B}) = \frac{3}{8} = P(A)P(\bar{B})$ ，则 A, \bar{B} 独立，

进而可知，A 与 B 相互独立，故 D 正确. 故选 ABD.

6. C 突破点 ▶ 计算古典概型的概率、独立事件的判断



【解析】依题意,依次抛掷两枚质地均匀的骰子,基本事件总数为 $6 \times 6 = 36$,其中事件 $A = "x + y = 7"$ 包含的样本点有 $(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$, 共 6 个; 事件 $B = "xy = 2k - 1 (k \in \mathbf{N}^*)"$ 包含的样本点有 $(1, 1), (3, 3), (5, 5), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 5), (5, 1), (5, 3)$, 共 9 个; 事件 $C = "x \leq 3"$ 包含的样本点有 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)$, 共 18 个.

A 与 B 不能同时发生,但是能同时不发生,故不是对立事件,故 B 错误;

因为 A 与 B 不能同时发生,所以 A 与 B 是互斥事件,则 $P(AB) = 0$. 又 $P(A) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{9}{6 \times 6} = \frac{1}{4}$, 所以 $P(AB) \neq P(A)P(B)$, 所以 A 与 B 不相互独立,故 A 错误;

事件 AC 包含的样本点有 $(1, 6), (2, 5), (3, 4)$, 共 3 个, 又 $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{2}$, 所以 $P(A)P(C) = \frac{1}{12}$, 则 $P(AC) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(A)P(C)$, 所以 A 与 C 相互

独立,故 C 正确;

事件 BC 包含的样本点有 $(1, 1), (3, 3), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 5)$, 共 6 个, 因为 $P(BC) = \frac{1}{6} \neq P(B)P(C)$, 所以 B 与 C 不相互独立,故 D 错误. 故选 C.

7. C 突破点 ▶ 计算古典概型问题的概率、独立事件的判断、独立事件的乘法公式

【解析】样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 这是一个古典概型, 可得 $P(A) = \frac{1}{2}$,

$P(B) = \frac{1}{2}$, 即 $P(ABC) = \frac{1}{4}P(C)$,

$P(BC) \neq \frac{1}{2}P(C)$, 从而 $n(C) = 4n(ABC)$ 且 $n(C) \neq 2n(BC)$.

由 $n(C) \neq 2n(BC)$ 可得事件 $C \neq \emptyset$. 又因为 $n(AB) = 2$, 所以 $n(ABC) = 1$ 或 2.

(1) 若 $n(ABC) = 2$, 则 $n(C) = 8$, 即 $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $BC = \{5, 6, 7, 8\}$, 此时不满足 $n(C) \neq 2n(BC)$.

(2) 若 $n(ABC) = 1$, 则 $n(C) = 4$, $n(BC) \neq 2$ 且 $BC \neq \emptyset$, 又因为 $AB = \{6, 8\}$, 所以 $ABC = \{6\}$ 或 $ABC = \{8\}$, 即 $n(BC) = 1$ 或 3.

①若 $n(BC) = 1, ABC = \{6\}$, 此时 $C = \{1, 2, 3, 6\}$ 或 $C = \{1, 2, 4, 6\}$ 或 $C = \{1, 3, 4, 6\}$ 或 $C = \{2, 3, 4, 6\}$, 也就是从事件 $\{1,$



2,3,4} 4 个样本点中选 3 个,再加入 6 这个样本点,即有 4 个满足条件的事件 C ;

②若 $n(BC) = 1, ABC = \{8\}$, 同理也有 4 个满足条件的事件 C ;

③若 $n(BC) = 3, ABC = \{6\}$, 此时 $C = \{1, 5, 6, 7\}$ 或 $C = \{2, 5, 6, 7\}$ 或 $C = \{3, 5, 6, 7\}$ 或 $C = \{4, 5, 6, 7\}$,

即从事件 $\{1, 2, 3, 4\}$ 4 个样本点中选 1 个,再加入 5,6,7 这 3 个样本点,即有 4 个满足条件的事件 C ;

④若 $n(BC) = 3, ABC = \{8\}$, 同理也有 4 个满足条件的事件 C .

综上所述,满足条件的事件 C 共计 $4 \times 4 = 16$ 个. 故选 C.

8. $\frac{16}{75}$ 突破点 ▶ 独立事件的概率

【解析】若两次取球后,乙袋中恰有 4 个球,则两次取球均为同色.

若第一次取球均取到红球,其概率为

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{1}{5},$$

第一次取球后甲袋中有 4 个红球和 2 个白球,乙袋中有 1 个红球和 4 个白球,

第二次取到同色球的概率为 $\frac{4}{6} \times \frac{1}{5} +$

$$\frac{2}{6} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5},$$

此时乙袋中恰有 4 个小球的概率是 $\frac{1}{5} \times$

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{25};$$

若第一次取球均取到白球,其概率为

$$\frac{2}{5} \times \frac{4}{6} = \frac{4}{15},$$

第一次取球后甲袋中有 3 个红球和 3 个白球,乙袋中有 2 个红球和 3 个白球,

第二次取到同色球的概率为 $\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} +$

$$\frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2},$$

此时乙袋中恰有 4 个小球的概率是 $\frac{4}{15} \times$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{15}.$$

所以操作两次后,乙袋中恰有 4 个小球

的概率是 $\frac{2}{25} + \frac{2}{15} = \frac{16}{75}$.

9. $\frac{5}{8}$ 突破点 ▶ 古典概型与函数恒成立

【解析】易知 $a > 0$, 由 $x > 4$, 可得 $x - 4 > 0$,

$$\text{则 } f(x) = ax + \frac{x}{x-4} = ax + 1 + \frac{4}{x-4} = a(x-4) +$$

$$\frac{4}{x-4} + 4a + 1 \geq 4\sqrt{a} + 4a + 1 = (2\sqrt{a} + 1)^2,$$

当且仅当 $x = \sqrt{\frac{4}{a}} + 4$ 时, 等号成立,



故 $f(x)_{\min} = (2\sqrt{a}+1)^2$.

则不等式 $f(x) > b$ 恒成立可转化为 $(2\sqrt{a}+1)^2 > b$ 恒成立,

因为 a 从 1, 2, 3, 4 四个数中任取一个, b 从 4, 8, 12, 16, 20, 24 六个数中任取一个, 所以构成 (a, b) 的所有基本事件总数为 24.

易知 $(2\sqrt{1}+1)^2 = 9, (2\sqrt{2}+1)^2 = 9+4\sqrt{2} \in (12, 16), (2\sqrt{3}+1)^2 = 13+4\sqrt{3} \in (16, 20), (2\sqrt{4}+1)^2 = 25$.

设事件 $A =$ “不等式 $f(x) > b$ 恒成立”, 则事件 A 包含的样本点为 $(1, 4), (1, 8), (2, 4), (2, 8), (2, 12), (3, 4), (3, 8), (3, 12), (3, 16), (4, 4), (4, 8), (4, 12), (4, 16), (4, 20), (4, 24)$, 共 15 个, 因此不等式 $f(x) > b$ 恒成立的概率为 $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

第 2 节 条件概率与全概率公式

刷

基础

1. B 考查点 ▶ 条件概率

【解析】设事件“两人中至少有一人选择大理古城”为 A , 事件“两人选择的景点不同”为 B , 则 $P(A) = \frac{2 \times 4 + 1}{25} = \frac{9}{25}$,

$$P(AB) = \frac{2 \times 4}{25} = \frac{8}{25}, P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{8}{9}. \text{ 故选 B.}$$

一题多解

设事件“两人中至少有一人选择大理古城”为 A , 事件“两人选择的景点不同”为 B , 事件 A 含有的样本点数 $n(A) = C_2^1 C_4^1 + 1 = 9$, 事件 AB 含有的样本点数 $n(AB) = C_2^1 C_4^1 = 8$, 所以所求概率

$$P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{8}{9}.$$

2. B 考查点 ▶ 条件概率及对立事件的概率

【解析】由 $P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{2}{3}$ 且

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}, \text{ 得 } P(\bar{A}B) = \frac{1}{2},$$

$$\text{由 } P(\bar{A}|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{3}{4},$$

$$\text{得 } P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{3}{4}P(\bar{B}),$$

由于 $P(\bar{A}B) + P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})$, 所以 $\frac{1}{2} +$

$$\frac{3}{4}P(\bar{B}) = \frac{3}{4}, \text{ 则 } P(\bar{B}) = \frac{1}{3},$$

故 $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = \frac{2}{3}$. 故选 B.

3. $\frac{5}{11}$ 考查点 ▶ 条件概率

【解析】设第 1 位顾客抽中“隐形战机歼-35A”模型为事件 A , 第 2 位顾客抽中“隐形战机歼-20S”模型为事件 B ,

$$\text{则 } P(AB) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{33}{50}, \text{ 故 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{33}{50}} = \frac{5}{11},$$

所以在第 2 位顾客抽中“隐形战机歼-20S”模型的条件下, 第 1 位顾客抽中“隐形战机歼-35A”模型的概率为 $\frac{5}{11}$.

4. D 考查点 ▶ 全概率公式

【解析】根据题意, 由全概率公式可得 $P(M) = P(A)P(M|A) + P(B)P(M|B) = 0.5 \times 0.8 + 0.5 \times 0.7 = 0.75$. 故选 D.

方法总结

利用全概率公式的思路

- (1) 按照确定的标准, 将一个复杂事件分解为若干个互斥事件 $A_i (i=1, 2, \dots, n)$;
- (2) 求 $P(A_i)$ 和所求事件 B 在各个互斥事件 A_i 发生条件下的概率 $P(B|A_i)$;
- (3) 代入全概率公式计算.

5. B 考查点 ▶ 利用贝叶斯公式求概率

【解析】设选择邮件投诉维权为事件 A ,

维权成功为事件 B , 则 $P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} +$

$$\frac{3}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{13}{100} = \frac{4}{5}, P(AB) = \frac{3}{10} \times \frac{9}{10} =$$

$\frac{27}{100}$, 所以在维权成功的条件下, 选择邮

件投诉维权的概率 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} =$

$$\frac{\frac{27}{100} \times \frac{5}{4}}{\frac{4}{5}} = \frac{27}{80}. \text{ 故选 B.}$$

6. C 考查点 ▶ 全概率公式

【解析】设“解出第一问”为事件 A , “解出第二问”为事件 B , 由题意可得 $P(A) =$

$$\frac{6}{10} = 0.6, P(B|\bar{A}) = 0.1, P(\bar{B}|A) = 0.7,$$

则 $P(\bar{A}) = 0.4, P(B|A) = 0.3$, 所以

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = 0.18, P(\bar{A}B) =$$

$$P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.04, \text{ 所以 } P(B) =$$

$$P(AB) + P(\bar{A}B) = 0.22. \text{ 故选 C.}$$

7. BC 突破点 ▶ 条件概率、全概率公式

【解析】对于 A, 甲选择 1 号箱, 奖品在 2 号箱里, 主持人打开 3 号箱的概率为 1,

即 $P(B_3|A_2) = 1$, 故 A 错误;

$$\text{对于 B, } P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3},$$

$$P(B_3|A_1) = \frac{1}{2}, P(B_3|A_2) = 1, P(B_3|A_3) =$$



0, 则 $P(B_3) = P(A_1)P(B_3|A_1) + P(A_2)P(B_3|A_2) + P(A_3)P(B_3|A_3) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} + 1 + 0\right) = \frac{1}{2}$, 因此 $P(A_1|B_3) = \frac{P(A_1B_3)}{P(B_3)} = \frac{P(A_1)P(B_3|A_1)}{P(B_3)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, 故 B 正确;

对于 C, D, 若继续选择 1 号箱, 则获得奖品的概率为 $\frac{1}{3}$; 若换号, 选择剩下的那个箱子, 则获得奖品的概率为 $\frac{1}{2}$, 甲换号后中奖概率增大, 故 C 正确, D 错误. 故选 BC.

刷

提分

1. A 考查点 ▶ 全概率公式求概率, 贝叶斯公式求概率

【解析】记事件 A : 检查结果呈阳性, 事件 B : 被检查确实患 X 疾病. 由题意可知, $P(B) = 0.0004$, $P(\bar{B}) = 0.9996$, $P(A|B) = 0.99$, $P(A|\bar{B}) = 0.001$, 所以 $P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = 0.0004 \times 0.99 + 0.9996 \times 0.001 = 0.0013956$, 因此这种检验方法在该地区的误诊率为 $P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B})P(A|\bar{B})}{P(A)} = \frac{0.9996 \times 0.001}{0.0013956} \approx 0.716$.

故选 A.

2. A 突破点 ▶ 条件概率

【解析】记事件 A : 甲参观珠海国际航展中心, 事件 B : 甲与乙不到同一观展区, 则 $P(A) = \frac{1}{3}$.

因为每个观展区至少有 1 人, 每人只参观一个观展区, 则先将 4 个人分为三组, 再将这三组分配给三个展区, 样本点的总数为 $n(\Omega) = C_4^2 A_3^3 = 36$.

当事件 A, B 同时发生时, 若有 2 人参观珠海国际航展中心, 则另外 1 人为丙或丁, 此时不同的参观情况种数为 $2A_2^2 = 4$; 若只有甲参观珠海国际航展中心, 将另外 3 人分成两组, 再将这两组分配给另外两个展区, 此时不同的参观情况种数为 $C_3^2 A_2^2 = 6$, 因此 $P(AB) = \frac{n(AB)}{n(\Omega)} = \frac{4+6}{36} =$

$\frac{5}{18}$, 由条件概率公式可得 $P(B|A) =$

$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{5}{18} \times 3 = \frac{5}{6}$. 故选 A.

3. BCD 突破点 ▶ 条件概率与数列

【解析】掷两枚硬币向上的结果有: (正、



正), (正、反), (反、正), (反、反), 共有 4 种情况, 记事件 A : 向上的结果为一正一反, 记事件 B : 向上的结果为同正或同反, 则 $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$, 故 A 错误;

设事件 E : 第一次投篮的人是甲, 事件 F : 第二次投篮的人是乙, 则 $P(EF) = \frac{1}{2} \times$

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, P(F) = P(EF) + P(\bar{E}F) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}, \text{ 则}$$

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{7}{12}} = \frac{4}{7}, \text{ 故 B 正确;}$$

第二次投篮的人是甲的概率为 $1 - P(F) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$, 故 C 正确;

已知 $a_1 = \frac{1}{2}$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_{n-1} \cdot \frac{1}{3} + (1 - a_{n-1}) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)$, 即 $6a_n + a_{n-1} = 3$, 故 D 正确. 故选 BCD.

4. $\frac{2}{5}$ 突破点 ▶ 计算条件概率、利用全概率公式求概率

【解析】 由于六件货物的质量之和不是 3 的倍数, 因而不可能出现三个箱子的质量都相同的情况.

设事件 A 表示存在两个箱子, 它们的质量相同且同时最小, 事件 B 表示第一、二个箱子的质量均不小于第三个箱子的质量.

考虑三个箱子的摆放顺序, 可得 $P(B|A) = \frac{C_2^1 A_2^2}{A_3^3} = \frac{2}{3}$.

当 A 发生时, 这两个箱子的货物组合只能是 $\{1, 4\}$ 和 $\{2, 3\}$, $\{1, 5\}$ 和 $\{2, 4\}$, $\{2, 5\}$ 和 $\{3, 4\}$ 三种可能, 故 $P(A) = \frac{C_3^1 A_3^2}{C_6^2 C_4^2} = \frac{1}{5}$; 当 A 不发生时, \bar{A} 表示仅有一个箱子的质量最小, 易知 $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{3}$.

故 $P(B) = P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$.

5. 突破点 ▶ 计算条件概率、利用全概率公式求概率

【解】 (1) 设试验一次, “取到甲袋”为事件 A_1 , “取到乙袋”为事件 A_2 , “试验结果为红球”为事件 B_1 , “试验结果为白球”为事件 B_2 .

$P(B_1) = P(A_1)P(B_1|A_1) + P(A_2)P(B_1|A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{10} = \frac{11}{20}$, 所以首次试



验结束的概率为 $\frac{11}{20}$.

(2) (i) 因为 B_1, B_2 是对立事件,

$P(B_2) = 1 - P(B_1) = \frac{9}{20}$, 所以 $P(A_1 |$

$$B_2) = \frac{P(A_1 B_2)}{P(B_2)} = \frac{P(B_2 | A_1) P(A_1)}{P(B_2)} =$$

$$\frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{2}}{\frac{9}{20}} = \frac{1}{9}, \text{ 所以选到的袋子为甲袋的}$$

概率为 $\frac{1}{9}$.

(ii) 由 (i) 得 $P(A_2 | B_2) = 1 - P(A_1 |$

$B_2) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$, 所以方案①中取到红

球的概率为 $P_1 = P(A_1 | B_2) P(B_1 | A_1) +$

$$P(A_2 | B_2) P(B_1 | A_2) = \frac{1}{9} \times \frac{9}{10} + \frac{8}{9} \times$$

$$\frac{2}{10} = \frac{5}{18}.$$

方案②中取到红球的概率为 $P_2 = P(A_2 |$

$B_2) P(B_1 | A_1) + P(A_1 | B_2) P(B_1 | A_2) =$

$$\frac{8}{9} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{37}{45}.$$

因为 $\frac{37}{45} > \frac{5}{18}$, 所以方案②中取到红球的

概率更大.

第3节 离散型随机变量及其分布列、期望与方差

刷

基础

1. D 考查点 ▶ 离散型随机变量分布列及期望的性质、离散型随机变量的方差

【解析】由题知 $m+n+0.5=1$, 则 $m+n=0.5$, 故 A 正确;

由 $E(X) = m+0.6+3n+0.8=2.7$, 得 $m+3n=1.3$, 联立 $m+n=0.5$, 得 $m=0.1, n=0.4$, 则 $P(X>2) = P(X=3) + P(X=4) = 0.4+0.2=0.6$, 故 D 错误;

$E(3X-1) = 3E(X) - 1 = 8.1 - 1 = 7.1$, 故 B 正确;

$D(X) = (1-2.7)^2 \times 0.1 + (2-2.7)^2 \times 0.3 + (3-2.7)^2 \times 0.4 + (4-2.7)^2 \times 0.2 = 0.81$, 故 C 正确. 故选 D.

2. ABD 考查点 ▶ 离散型随机变量的均值与方差

【解析】 $\xi=0$ 表示停止取球时没有取到黄球, 所以 $P(\xi=0) = \frac{1}{3}$, 故 A 正确;

随机变量 ξ 的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$P(\xi=1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3},$$

$$P(\xi=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \text{ 故 } \xi \text{ 的分布列为}$$



ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

所以 $E(\xi) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$, 故

B 正确;

$E(3\xi+1) = 3E(\xi) + 1 = 3 \times 1 + 1 = 4$, 故 C 错误;

$$D(\xi) = \frac{1}{3} \times (0-1)^2 + \frac{1}{3} \times (1-1)^2 + \frac{1}{3} \times (2-1)^2 = \frac{2}{3}, D(3\xi+1) = 9 \times D(\xi) = 6, \text{ 故}$$

D 正确. 故选 ABD.

3. D 考查点 ▶ 离散型随机变量的均值及方差的实际应用、二项分布的均值及方差

【解析】由题可知方案(1)中这四位同学抽到自己准备的书的概率均为 $\frac{1}{4}$, 易知

$$X \sim B\left(4, \frac{1}{4}\right),$$

由二项分布的数学期望公式与方差公式

$$\text{可知 } E(X) = 4 \times \frac{1}{4} = 1, D(X) = 4 \times \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}.$$

由题可知 Y 的所有可能取值为 0, 1, 2, 4,

$$P(Y=0) = \frac{3 \times 3 \times 1 \times 1}{A_4^4} = \frac{9}{24}, P(Y=1) =$$

$$\frac{C_4^1 \times 2 \times 1 \times 1}{A_4^4} = \frac{8}{24}, P(Y=2) = \frac{C_4^2 \times 1 \times 1}{A_4^4} = \frac{6}{24},$$

$$P(Y=4) = \frac{1}{A_4^4} = \frac{1}{24},$$

$$\therefore E(Y) = 0 \times \frac{9}{24} + 1 \times \frac{8}{24} + 2 \times \frac{6}{24} + 4 \times \frac{1}{24} =$$

$$1, D(Y) = (0-1)^2 \times \frac{9}{24} + (1-1)^2 \times \frac{8}{24} +$$

$$(2-1)^2 \times \frac{6}{24} + (4-1)^2 \times \frac{1}{24} = 1,$$

$\therefore E(X) = E(Y), D(X) < D(Y)$. 故选 D.

4. 考查点 ▶ 独立事件的乘法公式、离散型随机变量的均值

【解】(1) 设事件 A 表示“ M 被击中”, 则

$$P(A) = p_1 + (1-p_1)p_2 + (1-p_1)(1-p_2)p_3 =$$

$$\frac{4}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{59}{60}.$$

(2) 设射击的总次数为 X , 则 X 的所有可能取值为 1, 2, 3.

若按甲、乙、丙的顺序射击, 则 $P(X=$

$$1) = p_1, P(X=2) = (1-p_1)p_2, P(X=3) =$$

$$(1-p_1)(1-p_2), \text{ 所以 } E_1(X) = p_1 +$$

$$2(1-p_1)p_2 + 3(1-p_1)(1-p_2) = p_1p_2 - 2p_1 -$$

$$p_2 + 3.$$

若按丙、乙、甲的顺序射击, 同理得

$$E_2(X) = p_2p_3 - 2p_3 - p_2 + 3.$$

$$\text{所以 } E_1(X) - E_2(X) = (p_1p_2 - 2p_1 - p_2 + 3) -$$

$$(p_2p_3 - 2p_3 - p_2 + 3) = p_1p_2 - 2p_1 - p_2p_3 + 2p_3 =$$



$(p_1 - p_3)(p_2 - 2)$, 又因为 $p_1 > p_2 > p_3, p_2 < 2$, 所以 $E_1(X) - E_2(X) < 0$.

所以要使射击总次数的数学期望较小, 应该让甲先射击.

5. 考查点 ▶ 离散型随机变量的分布列和均值, 全概率公式

【解】(1) 记 $A_i =$ “随机选择 i 个选项作答”, $i=1, 2, 3, B =$ “小张该题得 0 分”.

$$P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{3}, P(A_3) = \frac{1}{6},$$

$$P(B|A_1) = \frac{C_1^1}{C_4^1} = \frac{1}{4}, P(B|A_2) = \frac{C_3^1 C_1^1}{C_4^2} = \frac{1}{2}, P(B|A_3) = \frac{C_3^2 C_1^1}{C_4^3} = \frac{3}{4},$$

$$\text{则 } P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i) P(B|A_i) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{12}.$$

(2) 记小王用策略一得分为随机变量 X , X 的可能取值为 0, 2, 3; 记小王用策略二得分为随机变量 Y , Y 的可能取值为 0, 4, 6.

$$P(X=0) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^1}{C_4^1} + \frac{1}{2} \times \frac{C_1^1}{C_4^1} = \frac{3}{8},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{3}{8},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^1}{C_4^1} = \frac{1}{4}.$$

小王用策略一得分 X 的分布列为

X	0	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{故 } E(X) = 0 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$P(Y=0) = \frac{1}{2} \times \frac{C_2^2}{C_4^2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2} + \frac{1}{2} \times \frac{C_3^1}{C_4^2} =$$

$$\frac{2}{3}, P(Y=4) = \frac{1}{2} \times \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{4}, P(Y=6) =$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{12}.$$

小王用策略二得分 Y 的分布列为

Y	0	4	6
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$$\text{故 } E(Y) = 0 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{4} + 6 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{2}.$$

6. 突破点 ▶ 离散型随机变量的分布列、均值与方差, 频率估计概率

【解】(1) 由题表可知 200 名顾客中愿意购买第一款新品的人数为 $40 + 80 + 20 = 140$,

用频率估计概率, 从顾客中随机抽取 1 人, 估计该名顾客愿意购买第一款新品的

概率为 $\frac{140}{200} = 0.7$.



(2) 用频率估计概率, 由题表可知从青少年组中抽取 1 人, 愿意购买第二款新品的

的概率为 $\frac{30}{30+30} = \frac{1}{2}$;

从中年组中抽取 1 人, 愿意购买第二款

新品的概率为 $\frac{60}{60+40} = \frac{3}{5}$;

从老年组中抽取 1 人, 愿意购买第二款

新品的概率为 $\frac{30}{30+10} = \frac{3}{4}$.

由题意, X 的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{20},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{11}{40},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{4} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{40},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{40}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{11}{40} + 2 \times \frac{9}{20} + 3 \times \frac{9}{40} = \frac{37}{20}.$$

(3) 用频率估计概率, 由题表可知顾客愿

意购买第 1 款新品的概率为 $\frac{40+80+20}{200} =$

$\frac{7}{10}$; 顾客愿意购买第 2 款新品的概率为

$\frac{30+60+30}{200} = \frac{3}{5}$; 顾客愿意购买第 3 款新

品的概率为 $\frac{50+80+10}{200} = \frac{7}{10}$. 所以

$$E(\xi_1) = E(\xi_3) = 1 \times \frac{7}{10} + 0 \times \left(1 - \frac{7}{10}\right) =$$

$$\frac{7}{10}, E(\xi_2) = 1 \times \frac{3}{5} + 0 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } D(\xi_1) = D(\xi_3) = \left(\frac{7}{10} - 1\right)^2 \times \frac{7}{10} +$$

$$\left(\frac{7}{10} - 0\right)^2 \times \left(1 - \frac{7}{10}\right) = \frac{21}{100},$$

$$D(\xi_2) = \left(\frac{3}{5} - 1\right)^2 \times \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5} - 0\right)^2 \times$$

$$\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{24}{100}, \text{ 所以 } D(\xi_2) > D(\xi_1) =$$

$$D(\xi_3).$$

刷

提分

1. B 突破点 ▶ 求离散型随机变量的均值、



求等比数列前 n 项和

【解析】由题意, 在第 $X (1 \leq X \leq 99)$ 次结束抛掷的概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^X$, 在第 100 次结束的概率为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{99}$,

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + 99 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{99} + 100 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{99},$$

$$\text{则 } \frac{1}{2}E(X) = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \cdots + 98 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{99} + 199 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{100},$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{1}{2}E(X) &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{99} + \\ &200 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{100} - 199 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{2} + \\ &\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{99} + \left(\frac{1}{2}\right)^{100} = 1 \\ &- \left(\frac{1}{2}\right)^{100}, \end{aligned}$$

$$\text{所以 } E(X) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{99} < 2. \text{ 故选 B.}$$

2. BC 考查点 ▶ 离散型随机变量的均值与方差

【解析】 $E(X) = -1 \times 0.1 + 0 \times 0.3 + 2 \times 0.6 = 1.1$, $E(Y) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.4 = 1.1$, 故 A 错误;

$$D(X) = (-1-1.1)^2 \times 0.1 + (0-1.1)^2 \times 0.3 + (2-1.1)^2 \times 0.6 = 1.29,$$

$$D(Y) = (0-1.1)^2 \times 0.3 + (1-1.1)^2 \times 0.3 + (2-1.1)^2 \times 0.4 = 0.69, \text{ 故 B 正确;}$$

因为 $E(X) = E(Y)$, 所以总期望 $= 1.1 \times 10\,000 = 11\,000$ (元), 故 C 正确;

设投资甲 m 元, 投资乙 $(10\,000 - m)$ 元, 方差和 $= 1.29 \cdot m^2 + 0.69 \cdot (10\,000 - m)^2 = 1.98m^2 - 13\,800m + 0.69 \times 10\,000^2$, 易知当 $m = 5\,000$ 时, 方差和不取最小值, 故 D 错误. 故选 BC.

3. B 突破点 ▶ 离散型随机变量的均值及分布列、等比数列各项的和

【解析】 $X=1$, 即投掷 1 次到达终点, 故第一次投掷的点数为 3, 故 $P(X=1) = \frac{1}{6}$;

$X=2$, 即投掷 2 次到达终点, 故第一次投掷的点数为 3, 第二次投掷的点数可根据第一次投掷的点数来唯一确定, 两次投掷的点数有以下情况: $(1, 2), (2, 1), (4, 1), (5, 2), (6, 3)$,

$$\text{故 } P(X=2) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6};$$

$X=3$, 即投掷 3 次到达终点, 前两次投掷均没有到达终点,

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{6} = \\ &\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}; \end{aligned}$$

.....



$X=n$, 即投掷 n 次到达终点, 前 $(n-1)$ 次投掷均没有到达终点,

$$P(X=n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6}.$$

$$\text{故 } E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \cdots + n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \times \frac{1}{6} + \cdots, \textcircled{1}$$

$$\frac{5}{6}E(X) = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} + \cdots + n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n \times \frac{1}{6} + \cdots, \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{1}{6}E(X) &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6} + \cdots + \left(\frac{5}{6}\right)^n \times \frac{1}{6} + \cdots \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{6} - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{5}{6}} = \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n+1} \right] \approx 1, \text{ 故 } E(X) = 6. \text{ 故选 B.}$$

4. 突破点 ▶ 离散型随机变量的分布列、均值, 条件概率

【解】(1) 设事件 A = “更换电视机”, 事件 B = “更换洗衣机”.

因为 $P(A) = 0.6$, 所以 $P(\bar{A}) = 0.4$.

因为 $P(\bar{A}\bar{B}) = 0.2$, $P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) = 0.4$, 且 $P(AB) + P(\bar{A}B) + P(A\bar{B}) + P(\bar{A}\bar{B}) = 1$,

所以 $P(AB) = 1 - P(\bar{A}B) - P(A\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - 0.4 - 0.2 = 0.4$.

由全概率公式 $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$, 得 $P(A\bar{B}) = P(A) - P(AB) = 0.2$,

所以 $P(\bar{A}B) = 0.2$, 同理可得 $P(B) = 0.6$, 所以 $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.4$,

则 $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.2}{0.4} = 0.5$, 所以居

民甲在不更换洗衣机的条件下更换电视机的概率为 0.5.

(2) 由题意知 X 的可能取值为 3 500, 4 000, 4 500, 5 000, 5 500,

$$P(X=3\,500) = \frac{C_2^2}{C_5^3} = \frac{1}{10}, P(X=4\,000) =$$

$$\frac{C_2^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{1}{5}, P(X=4\,500) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_5^3} = \frac{2}{5},$$

$$P(X=5\,000) = \frac{C_2^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{1}{5}, P(X=5\,500) =$$

$$\frac{C_2^2}{C_5^3} = \frac{1}{10}.$$

所以 X 的分布列为

X	3 500	4 000	4 500	5 000	5 500
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$



$$\begin{aligned} \text{则 } E(X) &= 3\,500 \times \frac{1}{10} + 4\,000 \times \frac{1}{5} + 4\,500 \times \frac{2}{5} \\ &+ 5\,000 \times \frac{1}{5} + 5\,500 \times \frac{1}{10} = 4\,500. \end{aligned}$$

5. 突破点 ▶ 求离散型随机变量的均值及分布列、独立事件的乘法公式

【解】(1) (i) 设小刘第 i 次抽到特别喜欢的款式为事件 A_i ,

则小刘第二次才抽到特别喜欢的款式的

概率为 $P(A_2 \bar{A}_1) = P(\bar{A}_1)P(A_2 | \bar{A}_1) =$

$$\frac{19}{20} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{20} \quad \left(\text{提示: 也可以用 } P(A_2 \bar{A}_1) = \right.$$

$$\left. \frac{C_{19}^1 C_1^1}{A_{20}^2} = \frac{1}{20} \right).$$

(ii) X 的可能取值为 $1, 2, 3, \dots, 20$, 则

$$P(X = k) = \frac{A_{19}^{k-1} \cdot A_1^1}{A_{20}^k} = \frac{1}{20}, \quad k = 1, 2, 3,$$

$\dots, 20$,

所以 X 的分布列为

X	1	2	\dots	19	20
P	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	\dots	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$\text{则 } E(X) = 1 \times \frac{1}{20} + 2 \times \frac{1}{20} + \dots + 20 \times \frac{1}{20} =$$

$$(1 + 2 + \dots + 20) \times \frac{1}{20} = \frac{(1+20) \times 20}{2} \times$$

$$\frac{1}{20} = \frac{21}{2}.$$

(2) 记 $p = \frac{1}{20} = 0.05$, Y 的可能取值为 $1,$

$2, 3, \dots, 10$.

因为前 9 次 (包含第 9 次) 没有保底, 则

$P(Y = k) = (1-p)^{k-1}p = 0.95^{k-1} \times 0.05$, 其中 $k = 1, 2, \dots, 9$,

$P(Y = 10) = (1-p)^9 p + (1-p)^9 (1-p) = (1-p)^9 = 0.95^9$, 所以 Y 的分布列为

Y	1	2	\dots	9	10
P	$0.95^0 \times 0.05$	$0.95^1 \times 0.05$	\dots	$0.95^8 \times 0.05$	0.95^9

$$\text{则 } E(Y) = 1 \times 0.95^0 \times 0.05 + 2 \times 0.95^1 \times 0.05 + \dots + 9 \times 0.95^8 \times 0.05 + 10 \times 0.95^9.$$

$$\text{记 } S = 1 \times 0.95^0 + 2 \times 0.95^1 + \dots + 9 \times 0.95^8,$$

$$\text{则 } 0.95S = 1 \times 0.95^1 + 2 \times 0.95^2 + \dots + 9 \times 0.95^9,$$

$$\text{两式相减, 得 } 0.05S = 1 \times 0.95^0 + 0.95^1 + \dots + 0.95^8 - 9 \times 0.95^9 = 20 - 29 \times 0.95^9,$$

$$\text{所以 } E(Y) = 0.05S + 10 \times 0.95^9 = 20 - 19 \times 0.95^9 \approx 8.03 \approx 8.$$

6. 突破点 ▶ 由频率分布直方图求平均数、离散型随机变量的方差与期望

【解】(1) 该厂商生产口罩质量指标值的平均数为 $(105 \times 0.005 + 115 \times 0.040 + 125 \times 0.030 + 135 \times 0.020 + 145 \times 0.005) \times 10 = 123$;

$$(0.005 + 0.040) \times 10 = 0.45 < 0.6,$$



$(0.005+0.040+0.030) \times 10 = 0.75 > 0.6$,
故第 60 百分位数落在 $[120, 130)$ 内, 设
其为 x , 则 $(0.005+0.040) \times 10 + (x-120) \times 0.030 = 0.6$,

解得 $x = 125$, 故第 60 百分位数为 125.

(2) 一级口罩与二级口罩的个数比为

$$\frac{0.020+0.005}{0.005+0.040+0.030} = \frac{1}{3},$$

现从样本口罩中利用分层随机抽样的方法随机抽取 8 个口罩, 则一级口罩有 $8 \times \frac{1}{1+3} = 2$ 个, 二级口罩有 $8 \times \frac{3}{1+3} = 6$ 个,

再从中抽取 3 个, 记其中一级口罩个数为 η , η 的可能取值为 0, 1, 2,

$$P(\eta=0) = \frac{C_6^3}{C_8^3} = \frac{5}{14}, P(\eta=1) = \frac{C_2^1 C_6^2}{C_8^3} = \frac{15}{28},$$

$$P(\eta=2) = \frac{C_2^2 C_6^1}{C_8^3} = \frac{3}{28},$$

故 η 的分布列为

η	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

数学期望为 $E(\eta) = 0 \times \frac{5}{14} + 1 \times \frac{15}{28} + 2 \times \frac{3}{28} = \frac{3}{4}$,

方差为 $D(\eta) = \left(0 - \frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{5}{14} + \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{15}{28} + \left(2 - \frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{3}{28} = \frac{45}{112}$.

(3) X 的可能取值为 0, n , $2n$,

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{\pi}{n^2}\right) \left(1 - \frac{2\cos \frac{\pi}{n}}{n}\right) = 1 - \frac{\pi}{n^2} - \frac{2\cos \frac{\pi}{n}}{n} + \frac{2\pi \cos \frac{\pi}{n}}{n^3},$$

$$P(X=n) = \frac{\pi}{n^2} \left(1 - \frac{2\cos \frac{\pi}{n}}{n}\right) + \frac{2\cos \frac{\pi}{n}}{n}.$$

$$\left(1 - \frac{\pi}{n^2}\right) = \frac{\pi}{n^2} - \frac{4\pi \cos \frac{\pi}{n}}{n^3} + \frac{2\cos \frac{\pi}{n}}{n},$$

$$P(X=2n) = \frac{\pi}{n^2} \cdot \frac{2\cos \frac{\pi}{n}}{n} = \frac{2\pi \cos \frac{\pi}{n}}{n^3},$$

$$\text{故 } E(X) = 0 + n \left(\frac{\pi}{n^2} - \frac{4\pi \cos \frac{\pi}{n}}{n^3} + \frac{2\cos \frac{\pi}{n}}{n} \right) + 2n \cdot \frac{2\pi \cos \frac{\pi}{n}}{n^3} = \frac{\pi}{n} + 2\cos \frac{\pi}{n},$$

令 $t = \frac{1}{n} \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$, 设 $f(t) = 2\cos \pi t + \pi t$, 则 $E(X) = f(t)$.

因为 $f'(t) = \pi - 2\pi \sin \pi t = 2\pi \left(\frac{1}{2} - \sin \pi t\right)$,

$$\sin \pi t \Bigg),$$

当 $t \in \left(0, \frac{1}{6}\right)$ 时, $f'(t) > 0$, 当 $t \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$ 时, $f'(t) < 0$,

所以 $f(t)$ 在 $t \in \left(0, \frac{1}{6}\right)$ 上单调递增, 在 $t \in \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$ 上单调递减,

当 $t = \frac{1}{6}$, 即 $n = 6$ 时, $E(X) = f(t)$ 取最大值.

第4节 超几何分布、二项分布和正态分布

刷基础

1. C 考查点 ▶ 二项分布的均值及概率

【解析】由题意知, 每组中各个坑是否发芽相互独立, 每个坑不发芽的概率为 $(1-p)$, 设每组不发芽的坑数为 X , 则 $X \sim B(5, 1-p)$, 因为每个试验组没有发芽的坑数的平均数为 $5 \times (1-p) = \frac{1}{3}$, 解得 $p = \frac{14}{15}$, 所以每粒种子的发芽率为 $\frac{14}{15}$. 故选 C.

2. BC 考查点 ▶ 超几何分布, 二项分布

【解析】由 $X \sim B\left(n, \frac{1}{3}\right)$, 得 $E(X) = \frac{1}{3}n$, 则 $E(2X+1) = \frac{2}{3}n+1$, 故 A 正确;

由 $X \sim B\left(n, \frac{1}{3}\right)$, 得 $D(X) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}n = \frac{2}{9}n$, 则 $D(2X+1) = 4D(X) = \frac{8}{9}n$, 故 B 错误;

由 $X \sim B\left(n, \frac{1}{3}\right)$, 得 $P(X=1) = C_n^1 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, $P(X=n-1) = C_n^{n-1} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, 故 $P(X=1) = P(X=n-1)$ 不恒成立, 故 C 错误;

当样本总数远大于抽取数目时, 可以用二项分布近似估计超几何分布, 故 D 正确. 故选 BC.

易错警示

超几何分布的抽取是不放回地抽取, 各次抽取不独立, 二项分布的抽取是有放回地抽取, 各次抽取相互独立. 当超几何分布所对应的总体数量很大且抽取数量很小时可以近似地看作二项分布.

3. BCD 考查点 ▶ 超几何分布的方差

【解析】由题意, 随机变量 X 服从超几何分布, 即 $X \sim H(5, 3, 3)$, 所以 $P(X=k) = \frac{C_3^k C_2^{3-k}}{C_5^3}$, $k=1, 2, 3$, 故 A 错误;



根据超几何分布的方差的计算公式得,

$$D(X) = n \cdot \frac{M}{N} \cdot \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}, \text{ 所以}$$

$$D(X) = 3 \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{2}{4} = \frac{9}{25}, \text{ 故 B}$$

正确;

根据全概率公式, $P(Y_2=1) =$

$$P(Y_2=1|Y_1=1) + P(Y_2=1|Y_1=0) =$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}, \text{ 故 C 正确;}$$

根据条件概率, 可得 $P(Y_1=1|Y_2=1) =$

$$\frac{P(Y_1=1, Y_2=1)}{P(Y_2=1)} = \frac{\frac{3}{5} \times \frac{2}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{2}, \text{ 故 D 正}$$

确. 故选 BCD.

4. $\frac{3}{2}$ 考查点 ▶ 超几何分布的均值

【解析】设盒中共有 k 个球, 则 $\frac{C_3^2}{C_k^2} = \frac{1}{5}$, 解

得 $k=6$, 依题意 X 满足超几何分布

$$X \sim H(6, 3, 3), \text{ 故 } E(X) = 3 \times \frac{3}{6} = \frac{3}{2}.$$

5. 考查点 ▶ 二项分布的分布列及均值, 频率分布直方图

【解】(1) $0.010 \times 10 \times 5 + 0.020 \times 10 \times 15 + 0.015 \times 10 \times 25 + 0.030 \times 10 \times 35 + 0.025 \times 10 \times 45 = 29$, 故均值为 29.

(2) 设 1 次试验中正确识别图象数量不少于 20 个的概率为 p ,

$$\text{则 } p = 0.015 \times 10 + 0.030 \times 10 + 0.025 \times 10 = 0.7, \text{ 则 } X \sim B(3, 0.7).$$

$$P(X=0) = C_3^0 \times 0.7^0 \times 0.3^3 = 0.027;$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times 0.7^1 \times 0.3^2 = 0.189;$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times 0.7^2 \times 0.3^1 = 0.441;$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times 0.7^3 \times 0.3^0 = 0.343,$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	0.027	0.189	0.441	0.343

$$E(X) = 0 \times 0.027 + 1 \times 0.189 + 2 \times 0.441 + 3 \times 0.343 = 2.1 \text{ (另解: } E(X) = 3 \times 0.7 = 2.1 \text{)}.$$

6. 突破点 ▶ 建立二项分布模型解决实际问题, 超几何分布的均值及分布列

【解】(1) 由题可得, 抽取的 10 件产品中, 一等品有 4 件, 非一等品有 6 件, 所以 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10},$$



$$P(X=3) = \frac{C_4^3 C_6^0}{C_{10}^3} = \frac{1}{30},$$

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{30} = \frac{6}{5}.$$

(2) 从采购的产品中有放回地随机抽取 3 件产品, 记抽到四等品的数量为 Y ,

$$\text{则 } Y \sim B\left(3, \frac{1}{5}\right),$$

$$\text{所以 } P(Y=1) = C_3^1 \times \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{125}.$$

(3) 由题意得, 方案二的产品的平均售价为

$$24 \times \frac{40}{100} + 22 \times \frac{30}{100} + 18 \times \frac{10}{100} + 16 \times \frac{20}{100} =$$

21.2 (元/件), 因为 $21 < 21.2$, 所以从采购商的角度考虑, 应该选择方案一.

7. B 考查点 ▶ 正态分布求概率

【解析】易得 $\frac{0.4+4.2}{2} = 2.3$, 由正态分布

的对称性可得 $P(0.4 < X \leq 2.3) =$

$$P(2.3 \leq X < 4.2) = 0.23,$$

$$\text{故 } P(X > 0.4) = P(0.4 < X \leq 2.3) + 0.5 = 0.73. \text{ 故选 B.}$$

8. ABD 考查点 ▶ 正态分布的实际应用

【解析】 A 生产线产品质量指标值的均值为 83, B 生产线产品质量指标值的均值为 80, 因为 $83 > 80$, 所以 A 生产线产品质量指标值的均值高于 B 生产线产品质量指标值的均值, 故 A 正确;

该企业产品质量指标值的均值是 $83 \times \frac{2}{3} + 80 \times \frac{1}{3} = 82$, 故 B 正确;

A 生产线产品质量指标值的标准差为 $\sqrt{36} = 6$, B 生产线产品质量指标值的标准差为 $\sqrt{25} = 5$, 因为 $6 > 5$, 所以 A 生产线产品质量指标值的标准差高于 B 生产线产品质量指标值的标准差, 故 C 错误;

根据正态分布知 $P(X < \mu_A - 3\sigma_A) = P(Y < \mu_B - 3\sigma_B)$, 即 $P(X < 83 - 3 \times 6) = P(X < 65) = P(Y < 80 - 3 \times 5) = P(Y < 65)$,

故 A, B 两条生产线的产品质量指标值低于 65 的概率相同, 故 D 正确. 故选 ABD.

9. 突破点 ▶ 正态分布的性质

【解】(1) (i) 比赛结束时恰好进行了 3

局, 甲夺冠的概率 $P_1 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}$,

乙夺冠的概率 $P_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$,

所以比赛结束时恰好进行了 3 局的概率



$$P = P_1 + P_2 = \frac{27}{125} + \frac{8}{125} = \frac{35}{125} = \frac{7}{25}.$$

(ii) X 的可能取值为 2, 3.

$$\text{因为 } P(X=2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{13}{25},$$

$$P(X=3) = 1 - P(X=2) = \frac{12}{25},$$

所以 X 的分布列为

X	2	3
P	$\frac{13}{25}$	$\frac{12}{25}$

$$\text{故 } E(X) = 2 \times \frac{13}{25} + 3 \times \frac{12}{25} = \frac{62}{25}.$$

(2) 因为本赛季参赛选手总得分 Y 近似地服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$,

所以参赛选手可获得“参赛纪念证书”的

$$\text{概率 } P(\mu - \sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) = \frac{1}{2}P(\mu - \sigma \leq$$

$$Y \leq \mu + \sigma) + \frac{1}{2}P(\mu - 2\sigma \leq Y \leq \mu + 2\sigma) \approx$$

$$\frac{1}{2} \times 0.6827 + \frac{1}{2} \times 0.9545 = 0.8186.$$

$$200 \times 0.8186 = 163.72 \approx 164,$$

所以估计获得“参赛纪念证书”的选手人数为 164.

刷

提分

1. A 考查点 ▶ 正态分布的实际应用

【解析】因为 $X \sim N(30, 2^2)$, 所以 $\mu = 30$, $\sigma = 2$, 所以 $P(26 \leq X \leq 34) \approx 0.9545$, 根据正态曲线的对称性可得 $p_0 = P(X \geq 26) = P(26 \leq X \leq 34) + P(X > 34) \approx 0.9545 + \frac{1 - 0.9545}{2} = 0.97725 \approx 0.977$. 故选 A.

2. ACD 突破点 ▶ 超几何分布的概率及均值

【解析】设从甲、乙、丙三个社团分别抽取 x, y, z 人, 则

$$\frac{x}{14} = \frac{y}{21} = \frac{z}{14} = \frac{7}{14+21+14}, \text{ 解得 } x=2, y=$$

3, $z=2$, 所以从甲、乙、丙三个社团抽取的人数分别为 2, 3, 2, 故 A 正确;

易知随机变量 X 服从超几何分布, 不服从二项分布, 故 B 错误;

随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3,

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 C_2^2}{C_7^3} = \frac{1}{7}, P(X=2) = \frac{C_5^2 C_2^1}{C_7^3} =$$

$$\frac{4}{7},$$

$$P(X=3) = \frac{C_5^3 C_2^0}{C_7^3} = \frac{2}{7},$$

则随机变量 X 的分布列为



X	1	2	3
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

$E(X) = 1 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{4}{7} + 3 \times \frac{2}{7} = \frac{15}{7}$, 故 C 正确;

因为 $P(A) = P(X=3) = \frac{2}{7}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

3. 突破点 ▶ 正态分布, 古典概型, 分层随机抽样

【解】(1) 因为抽样比为 $\frac{9}{20+30+40} = \frac{1}{10}$,

所以在 $[40, 50)$ 分数段抽取 $20 \times \frac{1}{10} = 2$

人, 在 $[50, 60)$ 分数段抽取 $30 \times \frac{1}{10} = 3$

人, 在 $[60, 70)$ 分数段抽取 $40 \times \frac{1}{10} = 4$ 人.

设事件 A : 这 4 人中至少有 2 人来自前 2

组, 则 $P(A) = 1 - \frac{C_4^4 + C_4^3 C_5^1}{C_9^4} = \frac{5}{6}$.

(2) (i) $\mu \approx \bar{x} = 45 \times \frac{20}{200} + 55 \times \frac{30}{200} + 65 \times$

$\frac{40}{200} + 75 \times \frac{60}{200} + 85 \times \frac{30}{200} + 95 \times \frac{20}{200} = 70.5$,

$\sigma \approx 14.31$,

所以 $\mu - \sigma = 56.19, \mu + \sigma = 84.81, \mu + 2\sigma = 99.12, \mu - 2\sigma = 41.88$.

所以 $P(56.19 \leq Z \leq 99.12) = P(\mu - \sigma \leq$

$Z \leq \mu + 2\sigma) = \frac{1}{2}P(\mu - 2\sigma \leq Z \leq \mu + 2\sigma) +$

$\frac{1}{2}P(\mu - \sigma \leq Z \leq \mu + \sigma) \approx 0.8186$.

(ii) 对于方案 2: 设学生所获赠学习视频小时数为 Y , 则 Y 的所有可能取值为 40, 30, 10.

$P(Y=40) = P(Z \leq 56.19) = P(Z \leq \mu - \sigma) \approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.6827) = 0.15865$,

$P(Y=30) = P(56.19 < Z \leq 84.81) = P(\mu - \sigma < Z \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$,

$P(Y=10) = P(Z \geq 84.81) = P(Z \geq \mu + \sigma) \approx \frac{1}{2} \times (1 - 0.6827) = 0.15865$.

$E(Y) = 40 \times 0.15865 + 30 \times 0.6827 + 10 \times 0.15865 = 28.4135 \approx 28 > 25$,

所以方案 2 该平台赠送的学习视频总时长更多.

4. 突破点 ▶ 错位相减法求和, 求离散型随机变量的均值, 超几何分布的均值

【解】(1) 因为共 20 道试题, 甲能答对其中的 15 道题, 甲答题总得分 $X=10$, 即甲在随机选中的 3 道题中答对 2 道题, 答

错 1 道题，

所以甲答题总得分 $X=10$ 的概率 $P(X=$

$$10) = \frac{C_{15}^2 C_5^1}{C_{20}^3} = \frac{35}{76}.$$

(2) 设甲答对题目的个数为 ξ ，则

$$\xi \sim H(20, 3, 15), \text{ 则 } E(\xi) = \frac{3 \times 15}{20} = \frac{9}{4}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } E(X) = E(5\xi) = \frac{45}{4} = 11.25.$$

由题意可知，乙答题总得分 Y 的取值范围为 $\{0, 5, 10, \dots, 100\}$ ，

$$P(Y=0) = \frac{1}{4}, P(Y=5) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4}, P(Y=$$

$$10) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}, \dots, P(Y=100) = \left(\frac{3}{4}\right)^{20},$$

$$E(Y) = \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{10}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \frac{95}{4} \times$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{19} + 100 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{20},$$

$$\text{记 } S = \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{10}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots +$$

$$\frac{95}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{19},$$

$$\text{则 } \frac{3}{4}S = \frac{5}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{10}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots +$$

$$\frac{95}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{20},$$

$$\text{则 } \frac{1}{4}S = \frac{5}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{5}{4} \times$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^3 + \dots + \frac{5}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{19} - \frac{95}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{20} =$$

$$\frac{15}{4} \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{19} \right] - \frac{95}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{20},$$

$$\text{所以 } S = 15 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{19} \right] - 95 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{20},$$

$$E(Y) = 15 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{19} \right] - 95 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{20} +$$

$$100 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{20} = 15 - 15 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{19} + 5 \times$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{20} = 15 - 15 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{20},$$

$$\text{因为 } \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0.06, \text{ 所以 } E(Y) =$$

$$14.946, \text{ 则 } E(Y) > E(X), \text{ 所以从期望角度乙胜出.}$$

5. 突破点 ▶ 二项分布的均值

【解】(1) 记“破解后信息字符为‘ β ’”为事件 M ，“在破解后信息字符中有 β 的情况下，传递信息字符为 β ”为事件 N ，

由于传递信息字符为 α, β, γ 时，均有 $\frac{1}{3}$

的可能破解后信息字符为 β ，则 $P(M) =$

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}, P(N) = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } P(MN) =$$

$$P(M)P(N) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}, \text{ 所以}$$



$$P(N|M) = \frac{P(MN)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

(2) 由(1)可知,若传递信息字符为 β , 则被破解正确的概率为 $\frac{1}{3}$, X 所有可能的取值为 $0, 1, 2, 3$,

$$P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}, P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

因为 $X \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right)$, 所以 $E(X) = 3 \times \frac{1}{3} = 1$.

(3) 记“传递信息字符只有一种”为事件 A , “传递信息字符只有两种”为事件 B , “传递信息字符有三种”为事件 C , “破解后信息字符均为 ' β '”为事件 Y , 事件 A 中, 由(1)可知, 传递信息字符为 α, β, γ 中的某一个,

$$\text{故 } P(A) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}, P(Y) = [P(M)]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

$$P(AY) = P(A)P(Y) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{64} = \frac{1}{576}.$$

事件 B 中, 传递信息字符为 α, β, γ 中的某两个, 且有 1 个字符被传递了 2 次, 顺序有 C_3^2 种,

$$\text{故 } P(B) = C_3^2 C_2^1 C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$P(Y) = [P(M)]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

$$P(BY) = P(B)P(Y) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{64} = \frac{1}{96}.$$

事件 C 中, 传递信息字符中 α, β, γ 各一次, 顺序不定, $P(C) = A_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{9},$

$$P(Y) = [P(M)]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}, P(CY) =$$

$$P(C)P(Y) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{64} = \frac{1}{288},$$

$$\text{则 } P_1 = P(A|Y) = \frac{P(AY)}{P(Y)} = \frac{1}{576} \times 64 = \frac{1}{9},$$

$$P_2 = P(B|Y) = \frac{P(BY)}{P(Y)} = \frac{1}{96} \times 64 = \frac{2}{3},$$

$$P_3 = P(C|Y) = \frac{P(CY)}{P(Y)} = \frac{1}{288} \times 64 = \frac{2}{9},$$

所以 $P_1 < P_3 < P_2$.

第5节 随机抽样与用样本估计总体

刷基础

1. C 考查点 ▶ 随机数表

【解析】由题意可知,得到的编号依次为 231,023,147,098,513,⋯,则得到的第 5 个编号是 513. 故选 C.

2. 8 考查点 ▶ 分层随机抽样

【解析】田径队运动员的总人数是 $28 + 21 = 49$ 人,14 人的样本占总体的比例为

$$\frac{14}{49} = \frac{2}{7} \quad \left(\text{提示: 在按比例分配的分层随} \right.$$

$$\text{机抽样中, 抽样比} = \frac{\text{样本容量}}{\text{总体容量}} =$$

$$\frac{\text{各层样本容量}}{\text{各层个体总量}} \Big), \text{于是应该在男运动员}$$

中随机抽取 $28 \times \frac{2}{7} = 8$ 人.

3. 13 考查点 ▶ 分层随机抽样的均值与方差

【解析】3 个年级抽取的学生人数分别为

$$3, 3, 4, \text{ 则 } \bar{W} = \frac{1}{10} \times (3 \times 48 + 3 \times 52 + 4 \times 55) =$$

$$52, \text{ 故样本的方差 } s^2 = \frac{3}{10} \times [4 +$$

$$(48 - 52)^2] + \frac{3}{10} \times [10 + (52 - 52)^2] +$$

$$\frac{4}{10} \times [1 + (55 - 52)^2] = 13.$$

4. AC 考查点 ▶ 统计图表

【解析】对于 A, 根据题图可知, 大学生使用购物类 APP 占比为 25.7%, 故 A 正确;

对于 B, 根据题图可知, 大学生使用 APP 是为了学习与生活需要的占比为 $34.3\% + 14.0\% = 48.3\%$, 故 B 错误;

对于 C, 根据题图可知, 使用 APP 偏好情况中 7 个占比数字的极差是 $25.7\% - 2.7\% = 23\%$, 故 C 正确;

对于 D, 根据题图可知, APP 使用目的中 6 个占比数字从小排到大分别为 0.6%, 8.4%, 14.0%, 16.3%, 26.4%, 34.3%, 又 $6 \times 40\% = 2.4$, 所以 40% 分位数是 14.0%, 故 D 错误. 故选 AC.

5. ABD 考查点 ▶ 中位数、极差、百分位数、方差

【解析】甲、乙的得分从小到大排列如下:

甲: 7.0, 8.3, 8.9, 8.9, 9.2, 9.3,

乙: 8.1, 8.5, 8.6, 8.6, 8.7, 9.1,

故去掉最高分和最低分可得, 甲得分的中位数为 8.9, 乙得分的中位数为 8.6, 故 A 正确;

甲得分的极差为 $9.3 - 7.0 = 2.3$, 乙得分

的极差为 $9.1 - 8.1 = 1$, 故 B 正确;

$6 \times 75\% = 4.5$, 所以甲得分的第 75 百分位数为 9.2, 乙得分的第 75 百分位数为 8.7, 故 C 错误;

由题图可以看出甲得分的波动比乙大, 故甲得分的方差大于乙得分的方差, 故 D 正确. 故选 ABD.

6. BCD **考查点** ▶ 由频率分布直方图估计平均数, 众数

【解析】 由于频率分布直方图中所有矩形的面积之和为 1,

则 $(a + 0.015 + 0.045 + 0.030 + a) \times 10 = 1$, 得 $a = 0.005$, 故 A 错误;

消费金额在区间 $[20, 30)$ 内的人数最多, 所以这 100 名学生消费金额的众数为 $\frac{20+30}{2} = 25$, 故 B 正确;

这 100 名学生消费金额的平均数为 $0.05 \times 5 + 0.15 \times 15 + 0.45 \times 25 + 0.3 \times 35 + 0.05 \times 45 = 26.5$, 故 C 正确;

消费金额在区间 $[0, 10)$ 内的人数为 $100 \times 0.05 = 5$, 消费金额在区间 $[10, 20)$ 内的人数为 $100 \times 0.15 = 15$, 根据按比例分配的分层随机抽样的方法, 从区间 $[0, 10)$ 内抽取的人数为 $\frac{5}{5+15} \times 8 = 2$, 故 D 正

确. 故选 BCD.

7. C **考查点** ▶ 频数分布表、中位数、平均数

【解析】 将 100 名学生的身高从小到大排列, 100 名学生身高的中位数是第 50 名和第 51 名学生身高的平均值,

第 50 名和第 51 名学生的身高均不小于 160 cm, 所以 100 名学生身高的中位数不小于 160 cm, 故 A 错误;

100 名学生中身高低于 165 cm 的学生有 60 名, 所以 100 名学生中身高低于 165 cm 的学生所占比例为 60%, 故 B 错误;

100 名学生身高的极差的最大值小于 $180 - 150 = 30$. 最小值大于 $175 - 155 = 20$, 所以极差介于 20 cm 至 30 cm 之间, 故 C 正确; 若同一组中的数据都用右端点值来估计, 则这 100 名学生身高的平均值的最大值小于 $\frac{1}{100} \times (155 \times 10 + 160 \times 20 + 165 \times 30 + 170 \times 25 + 175 \times 10 + 180 \times 5) = 166$, 所以平均值不一定介于 160 cm 至 165 cm 之间, 故 D 错误. 故选 C.

8. BD **考查点** ▶ 由频率分布直方图计算频率, 估计中位数、平均数

【解析】 因为 $(0.001 + 0.002 + 2a + 0.0015 + 0.0005) \times 100 = 1$, 所以 $a = 0.0025$, 则年收入落在区间 $[400, 700)$ 内的小型民营企业的频率为 $0.25 +$



$0.25+0.15=0.65$, 故 A 错误;

样本中年收入低于 500 万元的小型民营企业的频率为 $(0.001+0.002+0.0025) \times 100=0.55>0.5$, 故 B 正确;

因为年收入在 400 万元以内的小型民营企业的频率为 0.3, 所以该工业园区有 30% 的小型民营企业能享受到减免税政策, 故 C 错误;

因为 $0.1+0.2=0.3$, 所以中位数应该在 $[400, 500)$ 内, 设中位数为 $400+x$, 则 $0.0025x=0.2$, 解得 $x=80$, 所以中位数约为 480, 平均数约为 $250 \times 0.1 + 350 \times 0.2 + (450+550) \times 0.25 + 650 \times 0.15 + 750 \times 0.05 = 480$, 中位数等于平均数, 故 D 正确. 故选 BD.

9. C 突破点 ▶ 极差

【解析】因为 $6 \times 80\% = 4.8$, 所以 $x_5 = 12$,

$$\text{又 } \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 x_i = 12,$$

所以 $x_1 + x_2 + 3x_5 + x_6 = 72$, 即 $x_1 + x_2 + x_6 = 36$,

因为 $x_6 > x_5 = 12$, 所以 x_6 的值可能是 13, 14, 15,

当 $x_6 = 13$ 时, $x_1 + x_2 = 23$, 因为 $x_1 < x_2 < 12$, 且 x_1, x_2 为整数, 所以 $x_1 + x_2 = 23$ 不可能;

当 $x_6 = 14$ 时, $x_1 + x_2 = 22$, 因为 $x_1 < x_2 < 12$, 且 x_1, x_2 为整数, 所以 $x_1 + x_2 = 22$ 不可能;

当 $x_6 = 15$ 时, $x_1 + x_2 = 21$, 因为 $x_1 < x_2 < 12$, 且 x_1, x_2 为整数,

所以当且仅当 $x_1 = 10, x_2 = 11$ 时, $x_1 + x_2 = 21$,

所以所求极差为 $15-10=5$. 故选 C.

10. C 考查点 ▶ 平均数、中位数、众数、方差

【解析】由于平均数为 3, 中位数为 4, 所以这 5 个数从小到大排列后, 第 3 个数是 4, 当第 3, 4, 5 个数为 4, 4, 4 时, 这 3 个数的总和为 12, 第 1, 2 个数的总和为 3, 故这 5 个数可以是 1, 2, 4, 4, 4, 故 A 错误;

由于中位数为 3, 众数为 5, 所以这 5 个数从小到大排列后, 第 3 个数是 3, 则第 4 和第 5 个数为 5, 所以这 5 个数可以是 1, 2, 3, 5, 5, 故 B 错误;

由于平均数为 4, 方差为 1.2, 设 5 次出现的点数分别为 $x_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$, 则

$$\frac{1}{5} [(x_1-4)^2 + (x_2-4)^2 + (x_3-4)^2 + (x_4-4)^2 + (x_5-4)^2] = 1.2, \text{ 若有一个数为 } 1, \text{ 不妨取 } x_1 = 1, \text{ 则 } (x_2-4)^2 + (x_3-4)^2 + (x_4-4)^2 + (x_5-4)^2 = -3, \text{ 不合题意, 则一定没有出现点数 } 1, \text{ 故 C 正确;}$$

由中位数为 4, 方差为 1.6, 所以这 5 个数从小到大排列后, 第 3 个数是 4, 平均



数的最小值为 2.8, 设这 5 个数从小到大排列后为 $x_1, x_2, 4, x_4, x_5$, 则

$$\frac{1}{5}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (4 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2] = 1.6, (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (4 - \bar{x})^2 + (x_4 - \bar{x})^2 + (x_5 - \bar{x})^2 = 8,$$

若 $x_1 = 1$, 则 $(1 - \bar{x})^2 \leq 8, (4 - \bar{x})^2 \leq 8$, 若取平均数为 3, 则 $(1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + (4 - 3)^2 + (x_4 - 3)^2 + (x_5 - 3)^2 = 8$, $(x_2 - 3)^2 + (x_4 - 3)^2 + (x_5 - 3)^2 = 3$, 则 $x_2 = 2, x_4 = x_5 = 4$ 符合要求, 故 D 错误. 故选 C.

11.8.8 突破点 ▶ 平均数、方差

【解析】 $x_1, x_2, \dots, x_6, y_1, y_2, \dots, y_9$ 的平均值为 $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_6 + y_1 + y_2 + \dots + y_9}{15} =$

$$\frac{6 \times 3 + 9 \times 8}{15} = 6,$$

又 $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 3)^2 + \dots + (x_6 - 3)^2 = 4 \times 6 = 24$, 即 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 - 6(x_1 + x_2 + \dots + x_6) + 6 \times 3^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 - 6 \times 6 \times 3 + 6 \times 3^2 = 24$,

所以 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 = 78$,

$$(y_1 - 8)^2 + (y_2 - 8)^2 + \dots + (y_9 - 8)^2 = 2 \times 9 = 18,$$

同理可得 $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_9^2 = 594$,

所求方差为 $s^2 = \frac{1}{15}[(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 6)^2 + \dots + (x_6 - 6)^2 + (y_1 - 6)^2 + (y_2 - 6)^2 + \dots + (y_9 - 6)^2] = \frac{1}{15}[x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_9^2 - 12(x_1 + x_2 + \dots + x_6 + y_1 + y_2 + \dots + y_9) + 15 \times 6^2] = \frac{78 + 594 - 12 \times (6 \times 3 + 9 \times 8) + 15 \times 6^2}{15} = 8.8$.

12.4 9³⁶ 突破点 ▶ 百分位数

【解析】因为 $2\,025 = 3^4 \times 5^2$, 所以 3^4 整除 $2\,025$, 且 3^5 不能整除 $2\,025$,

所以 $\text{Pot}_3 2\,025 = 4$.

根据题意 $3^2 = 9$ 整除 s , 且 $3^3 = 27$ 不能整除 s ,

因为 $s < 40$, 所以 s 的所有可能取值为 9, 18, 36, 所以 $A = \{9, 18, 36\}$,

所以根据已知条件 a^b 有 $9^{18}, 9^{36}, 18^9, 18^{36}, 36^9, 36^{18}$ 六种可能,

从小到大排序为 $18^9, 36^9, 9^{18}, 36^{18}, 9^{36}, 18^{36}$,

因为 $6 \times 80\% = 4.8$, 所以样本数据的 80% 分位数是第 5 个数 9^{36} .

第 6 节 成对数据的统计分析

刷

基础

1.D 考查点 ▶ 判断正、负相关, 样本相关



系数的意义及辨析,残差的分析

【解析】由题图可知,样本数据的两变量 x, y 负相关,故 A 错误;由题图可知, B 点相对于其他点,偏离直线较远,故去掉 B 点后,回归直线拟合的效果更好,故 B, C 错误, D 正确. 故选 D.

2. ABC 考查点 ▶ 线性回归分析

【解析】因为经验回归直线的斜率为 0.14, 所以 y 与 x 正相关, 故 A 正确;

由表格中的数据可得 $\bar{x} = \frac{3+4+5+m}{4} = 3 + \frac{m}{4}$,

$\frac{m}{4}, \bar{y} = \frac{0.1+0.2+0.4+0.5}{4} = 0.3$, 所以样

本中心点为 $\left(3 + \frac{m}{4}, 0.3\right)$, 将样本中心点的坐标代入经验回归方程得 $0.14 \times \left(3 + \frac{m}{4}\right) - 0.33 = 0.3$, 解得 $m = 6$, 故 B 正

确(提示:求解经验回归方程的关键是确定 \hat{a}, \hat{b} , 应充分利用经验回归直线过样本点的中心 (\bar{x}, \bar{y}));

当 $x = 3$ 时, $\hat{y} = 0.14 \times 3 - 0.33 = 0.09$, 所以当 $x = 3$ 时, 残差为 $0.1 - 0.09 = 0.01$, 故 C 正确;

因为 y 与 x 正相关, 所以样本相关系数 r 为正数, 故 D 错误. 故选 ABC.

3. 考查点 ▶ 线性回归分析

【解】(1) 易得 $\bar{x} = \frac{1}{4} \times (10+12+14+16) =$

$13, \bar{y} = \frac{1}{4} \times (62+86+112+132) = 98,$

$\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (-3) \times (-36) + (-1) \times (-12) + 1 \times 14 + 3 \times 34 = 236,$

故 $r = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^4 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{236}{\sqrt{20 \times 2792}} = \frac{236}{4 \times \sqrt{3490}} \approx \frac{59}{59.1} \approx 0.998.$

则 $|r| > 0.75$ (提示:对于样本相关系数 r , 当 $r > 0$ 时, 两个变量正相关; 当 $r < 0$ 时, 两个变量负相关; $|r|$ 越接近于 1, 两个变量的相关性越强), 故可用线性回归模型拟合.

(2) $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2} = \frac{236}{20} =$

$11.8, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 98 - 11.8 \times 13 = -55.4,$

故经验回归方程为 $\hat{y} = 11.8x - 55.4.$

4. 突破点 ▶ 非线性回归分析

【解】(1) 由残差图可知模型①的残差值比较分散和远离横轴, 所以模型①的残

差平方和大于模型②的残差平方和,所以应选择模型②.

(2) (i) 对于模型②: $\hat{y} = \hat{b} \ln x + \hat{a}$, 令 $t =$

$$\ln x, \text{ 可得 } \hat{y} = \hat{b}t + \hat{a}, \text{ 则 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^6 t_i y_i - 6\bar{t} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^6 t_i^2 - 6\bar{t}^2} =$$

$$\frac{388.1 - 6 \times 1.1 \times 48.7}{9.4 - 6 \times 1.1^2} \approx 31.2, \hat{a} = \bar{y} -$$

$\hat{b}\bar{t} \approx 48.7 - 31.2 \times 1.1 \approx 14.4$, 可得 $\hat{y} = 31.2t + 14.4$, 所以 y 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y} = 31.2 \ln x + 14.4$.

(ii) 由 (i) 可得 $\hat{y} = 31.2 \ln x + 14.4 = 3u + 2.6x$, 整理可得 $3u = 31.2 \ln x + 14.4 - 2.6x$,

令 $f(x) = 31.2 \ln x + 14.4 - 2.6x, x \geq 1$, 则

$$f'(x) = \frac{31.2}{x} - 2.6 = \frac{31.2 - 2.6x}{x},$$

令 $f'(x) > 0$, 解得 $1 \leq x < 12$; 令 $f'(x) < 0$, 解得 $x > 12$,

可知 $f(x)$ 在 $[1, 12)$ 内单调递增, 在 $(12, +\infty)$ 内单调递减,

所以当 $x = 12$ 时, $3u = f(x)$ 取到最大值, 即 u 取得最大值, 所以第 12 年营销成本的预测值最大.

5. 考查点 ▶ 用样本估计总体、独立性检验

【解】(1) 样本中, 身高在 175 cm 及以上的

频率为 $\frac{27+24}{100} = 0.51$,

用该频率估计该校男生身高在 175 cm 及以上的频率,

则该校 2 000 名男生中身高在 175 cm 及以上的人数约为 $2\,000 \times 0.51 = 1\,020$.

(2) 列 2×2 列联表如下:

	身高在 [170, 180)	身高不在 [170, 180)	合计
合格	40	30	70
不合格	10	20	30
合计	50	50	100

$$\text{所以 } \chi^2 = \frac{100 \times (40 \times 20 - 30 \times 10)^2}{50 \times 50 \times 70 \times 30} \approx$$

4.762, 因为 $3.841 < 4.762$, 所以依据小概率值 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, 1 000 米测试成绩合格与身高在 $[170, 180)$ 范围内有关.

方法总结

独立性检验的一般步骤

(1) 根据样本数据制成 2×2 列联表;

(2) 根据公式 $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ 计算;

(3) 比较 χ^2 与临界值的大小关系, 作统计推断.



刷

提分

1. D 考查点 ▶ 独立性检验

【解析】依题意可得 2×2 列联表如下：

	男生	女生	合计
篮球迷	90	20	110
非篮球迷	60	30	90
合计	150	50	200

$$\text{所以 } \chi^2 = \frac{200 \times (30 \times 90 - 20 \times 60)^2}{150 \times 50 \times 110 \times 90} \approx 6.06 <$$

6.635,

所以没有 99% 的把握认为是否是篮球迷与性别有关, 进而没有 99.5% 的把握认为是否是篮球迷与性别有关, 故 A, B 错误;

又 $\chi^2 \approx 6.06 > 3.841 > 2.706$, 最准确的是在犯错误的概率不超过 0.05 的前提下, 可以认为是否是篮球迷与性别有关, 故 C 错误, D 正确. 故选 D.

2. ABD 突破点 ▶ 线性回归分析, 样本相关系数

【解析】由题表得, $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (1+2+3+4+$

$$5) = 3, \bar{y} = \frac{1}{5} \times (2.4+3.1+4+5+5.5) = 4.$$

$$\therefore \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \therefore \hat{b} = \frac{\bar{y} - \hat{a}}{\bar{x}} = \frac{4 - 1.57}{3} = 0.81, \text{ 故}$$

A 正确;

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = (1-3) \times (2.4-4) + (2-3) \times (3.1-4) + (3-3) \times (4-4) + (4-3) \times (5-4) + (5-3) \times (5.5-4) = 8.1,$$

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2 = 10,$$

$$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = (2.4-4)^2 + (3.1-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + (5.5-4)^2 = 6.62, r =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{8.1}{\sqrt{10 \times 6.62}}, \therefore r > 0, \text{ 故 B 正确;}$$

经验回归方程为 $\hat{y} = 0.81\hat{x} + 1.57$, 并不意味着 x 每增加 1, y 一定增加 0.81, 会有一定的浮动, 故 C 错误;

$$r^2 = \frac{6.561}{6.620}, \sum_{i=1}^5 (y_i - \hat{y}_i)^2 = (2.4 - 2.38)^2 + (3.1 - 3.19)^2 + (4 - 4)^2 + (5 - 4.81)^2 + (5.5 - 5.62)^2 = 0.059,$$

$$\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2 = 6.62,$$



$$\therefore R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^5 (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2} = 1 - \frac{0.059}{6.62} = \frac{6.561}{6.620}, \therefore r^2 = R^2, \text{故 D 正确. 故选 ABD.}$$

- 3. 突破点** ▶ 样本相关系数的计算、求经验回归方程、根据经验回归方程进行数据预测

【解】(1) 由题设, $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$, 所以

$$\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = (1-3)^2 + (2-3)^2 + \cdots + (5-3)^2 = 10,$$

所以 $r =$

$$\frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{8.1}{\sqrt{10} \times \sqrt{7.5}} \approx \frac{8.1}{8.66} \approx 0.94, \text{故应选模型②.}$$

$$(2) \bar{u} = \frac{1+4+9+16+25}{5} = 11, \bar{y} = \frac{0.8+1.1+1.5+2.4+4.2}{5} = 2,$$

$$\text{所以 } \sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2 = (1-11)^2 + (4-11)^2 + \cdots + (25-11)^2 = 374,$$

$$\text{所以 } \hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2} = \frac{52.1}{374} \approx$$

0.14,

$$\text{又 } 2 = \frac{52.1}{374} \times 11 + \hat{n}, \text{ 则 } \hat{n} \approx 0.47, \text{ 故 } \hat{y} = 0.14u + 0.47,$$

所以经验回归方程为 $\hat{y} = 0.14x^2 + 0.47$, 故当 $x = 6$ 时, 有 $\hat{y} = 0.14 \times 36 + 0.47 = 5.51$ (厘米),

所以预测第 6 天种子的胚芽长度为 5.51 厘米.

- 4. 突破点** ▶ 求离散型随机变量的分布列及期望、完善列联表、独立性检验解决实际问题

【解】(1) 由题意, 男性有 $100 \times \frac{9}{9+11} = 45$ (人), 女性有 $100 - 45 = 55$ (人), 补全 2×2 列联表如表所示:

性别	评价		合计
	喜欢	不喜欢	
男性	15	30	45
女性	35	20	55
合计	50	50	100

(2) 零假设 H_0 : 性别因素与评价结果

无关,

由 2×2 列联表, 可得 $\chi^2 = \frac{100 \times (20 \times 15 - 30 \times 35)^2}{50 \times 50 \times 45 \times 55} = \frac{100}{11} \approx 9.091 > 7.879$,

所以依据 $\alpha = 0.005$ 的独立性检验, 可推断 H_0 不成立,

即能认为性别因素与评价结果有关系.

(3) 由题意得随机选取的 3 人中, 不喜欢的有 2 人, 喜欢的有 1 人, 则 X 的所有可能取值为 150, 200, 250, 300,

且评价结果为“不喜欢”的观众“建言”被采用的概率为 $\frac{1}{4}$,

评价结果为“喜欢”的观众“建言”被采用的概率为 $\frac{1}{2}$,

则 $P(X=150) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{32}$, $P(X=200) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{4} = \frac{15}{32}$,

$P(X=250) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{32}$, $P(X=300) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$,

故分布列如下表:

X	150	200	250	300
P	$\frac{9}{32}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{1}{32}$

$E(X) = 150 \times \frac{9}{32} + 200 \times \frac{15}{32} + 250 \times \frac{7}{32} + 300 \times \frac{1}{32} = 200$.

5. 突破点 ▶ 独立性检验解决实际问题, 利用全概率公式求概率, 绘制 2×2 列联表, 独立重复试验的概率问题

【解】(1) 依题意, 列出 2×2 列联表如下:

	5 局 3 胜	7 局 4 胜	合计
甲胜	$0.8m$	$0.9m$	$1.7m$
乙胜	$0.2m$	$0.1m$	$0.3m$
合计	m	m	$2m$

$\chi^2 = \frac{2m(0.08m^2 - 0.18m^2)^2}{m \times m \times 1.7m \times 0.3m} = \frac{2m}{51}$, 依据小

概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验,

当 $m \geq 170$ 时, $\chi^2 > 6.635$, 赛制对甲队获胜场数有影响;

当 $m \leq 169$ 时, $\chi^2 < 6.635$, 赛制对甲队获胜场数没有影响.

(2) 设甲赢得比赛的概率为 P_{2n} , 设 $A =$



“进行 $2n$ 局比赛甲最终获胜”, B = “第一局甲赢”, C = “第二局甲赢”, 则当 $n \geq 2$ 时,
 $P_{2n} = P(A) = P(\overline{BC})P(A|\overline{BC}) + P(\overline{BC})P(A|\overline{BC}) + P(BC)P(A|BC) + P(\overline{B}\overline{C})P(A|\overline{B}\overline{C})$,
 而 \overline{BC} 发生及 $B\overline{C}$ 发生意味着前 2 局比赛甲恰好赢一局, 则甲在 $2n$ 局比赛后最终获胜当且仅当甲在后续的 $2n-2$ 局比赛中赢的局数要大于 $n-1$,

因此 $P(A|\overline{BC}) = P(A|\overline{BC}) = P_{2n-2}$;

在 BC 发生的条件下, 甲已经赢了前 2 局, 则甲最终获胜当且仅当甲在后续的 $2n-2$ 局比赛中赢的局数要大于或等于 $n-1$, 则 $P(A|BC) = P_{2n-2} + C_{2n-2}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^{n-1}$;

在 $\overline{B}\overline{C}$ 发生的条件下, 甲输掉前 2 局, 则甲最终获胜当且仅当甲在后续的 $2n-2$ 局比赛中赢的局数要大于 n , 而这个事件的概率等于甲在后续的 $2n-2$ 局比赛中赢的局数大于 $n-1$ 的概率减去甲在后续的 $2n-2$ 局比赛中恰好赢 n 局的概率,

故 $P(A|\overline{B}\overline{C}) = P_{2n-2} - C_{2n-2}^n p^n (1-p)^{n-2}$.

因此 $P_{2n} = 2p(1-p)P_{2n-2} + p^2[P_{2n-2} + C_{2n-2}^{n-1}p^{n-1}(1-p)^{n-1}] + (1-p)^2[P_{2n-2} - C_{2n-2}^n p^n (1-p)^{n-2}] = [2p(1-p) + p^2 + (1-p)^2]P_{2n-2} + C_{2n-2}^{n-1}p^{n+1}(1-p)^{n-1} - C_{2n-2}^n p^n (1-p)^n = P_{2n-2} + \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}p^n(1-p)^{n-1}[1-p-(1-2p)n]$,

令 $P_{2n} - P_{2n-2} \geq 0$, 得 $n \leq \frac{1-p}{1-2p} \left(0 < p < \frac{1}{2} \right)$,

则当 $p = \frac{3}{8}$ 时, $n \leq \frac{1-\frac{3}{8}}{1-2 \times \frac{3}{8}} = \frac{5}{2}$, 所以当

$n=2$, 即 $2n=4$ 时, P_{2n} 最大, 即进行 4 局比赛时, 甲俱乐部获胜的概率最大.

专题 概率统计与其他知识的综合

刷

难关

1. 突破点 ▶ 概率与函数的综合应用

【解】(1) 由题意可知甲第 2 局赢的概率

$$P = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}, \text{ 所以乙}$$

第 2 局赢的概率为 $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$.

(2) (i) $i \geq 2$ 时, $P_i = \frac{1}{3}P_{i-1} + \frac{1}{2}(1 -$

$P_{i-1}) = -\frac{1}{6}P_{i-1} + \frac{1}{2}$, 所以 $P_i - \frac{3}{7} =$

$-\frac{1}{6}\left(P_{i-1} - \frac{3}{7}\right)$, 又 $P_1 - \frac{3}{7} = \frac{1}{14}$, 所以数

列 $\left\{P_i - \frac{3}{7}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{14}$, 公比为 $-\frac{1}{6}$ 的



等比数列, 所以 $P_i - \frac{3}{7} = \frac{1}{14} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^{i-1}$,

所以 $P_i = \frac{1}{14} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^{i-1} + \frac{3}{7}$.

(ii) $e^{P_i} - \ln(P_i + 1) + k \geq 0$, 即 $k \geq \ln(P_i + 1) - e^{P_i}$.

令 $f(x) = \ln(x+1) - e^x, x > -1$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - e^x (x > -1)$, 易知 $f'(x)$ 在 $(-1, +\infty)$

上单调递减, 且 $f'(0) = 0$,

所以当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

显然 $P_i > 0 (i \in \mathbf{N}^*)$, 因此要求 $\ln(P_i + 1) - e^{P_i}$ 的最小值, 即求 P_i 的最大值,

又 $P_i = \frac{1}{14} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^{i-1} + \frac{3}{7}$, 当 i 为偶数

时, $P_i < \frac{3}{7}$, 当 i 为奇数时, $P_i > \frac{3}{7}$,

从而 P_i 的最大值在 i 为奇数时取得, 且

在 i 为奇数时, $P_i = \frac{1}{14} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{i-1} + \frac{3}{7}$ 是单调递减的,

P_i 的最大值为 $P_1 = \frac{1}{14} + \frac{3}{7} = \frac{1}{2}$,

所以 $k \geq \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) - e^{\frac{1}{2}}$.

又 $f(x) = \ln(x+1) - e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调

递减, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) < f(0)$,

而 $f(0) = \ln(1+0) - e^0 = -1$,

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) - e^{\frac{1}{2}} > -2$,

所以 $-2 < \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) - e^{\frac{1}{2}} < -1$, 所以满

足 $k \geq \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) - e^{\frac{1}{2}}$ 的整数 k 的最小值为 -1 .

2. 突破点 ▶ 离散型随机变量的分布列、概率与等比数列的综合应用

(1) 【解】棋子跳 1 格的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$,

则跳 2 格的概率为 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, 棋子跳动

3 次后, X 的所有可能取值为 3, 4, 5, 6,

$$P(X=3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

$$P(X=4) = C_3^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9},$$

$$P(X=5) = C_3^2 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9},$$

$$P(X=6) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

所以 X 的分布列为

X	3	4	5	6
-----	---	---	---	---



P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$
-----	----------------	---------------	---------------	----------------

(2) ①【证明】由题意可得 $p_{n+2} = \frac{2}{3}p_{n+1} +$

$$\frac{1}{3}p_n \quad (0 \leq n \leq 17, n \in \mathbf{N}),$$

即 $p_{n+2} - p_{n+1} = -\frac{1}{3}(p_{n+1} - p_n)$, 又 $p_0 = 1$,

$p_1 = \frac{2}{3}$, 则 $p_1 - p_0 = -\frac{1}{3}$, 故数列 $\{p_{n+1} - p_n\}$

$(0 \leq n \leq 18, n \in \mathbf{N})$ 是等比数列.

②【解】由①可得当 $0 \leq n \leq 18, n \in \mathbf{N}$ 时,

有 $p_{n+1} - p_n = -\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}$,

则 $p_n - p_{n-1} = \left(-\frac{1}{3}\right)^n, p_{n-1} - p_{n-2} =$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}, \dots, p_1 - p_0 = -\frac{1}{3}$,

累加得 $p_n - p_0 = \frac{-\frac{1}{3}\left[1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} =$

$\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{4}$, 即 $p_n = \frac{1}{4} \cdot$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, 故

$p_{19} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{19}, p_{20} = 1 - p_{19}$,

有 $3a \cdot p_{19} - 8a \cdot p_{20} = 3a \cdot p_{19} - 8a \cdot (1 -$

$p_{19}) = a(11p_{19} - 8) = a\left[\frac{33}{4} + \frac{11}{4} \cdot$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{19} - 8\right] = \frac{a}{4}\left[1 + 11 \cdot$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{19}\right] > 0$, 故此种规则对游戏组织

者有利.

3. 突破点 ▶ 随机变量的分布列与数学期望, 独立事件的概率, 等比数列

【解】(1) 由题意得, 随机变量 X 的所有

可能取值为 2, 3, 4, 可得 $P(X=2) =$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, P(X=3) = C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9},$

$P(X=4) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$

所以 X 的分布列为

X	2	3	4
P	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$

数学期望 $E(X) = 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times \frac{4}{9} + 4 \times$

$\frac{4}{9} = \frac{10}{3}.$

(2) 由这 n 人的合计得分为 $n+1$ 分, 得其



中只有 1 人计划既参观罗田天堂寨又游

览东坡赤壁, 所以 $P_n = C_n^1 \cdot \frac{2}{3} \cdot$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2n}{3^n}, \sum_{i=1}^n P_i = \frac{2}{3} + \frac{2 \times 2}{3^2} + \frac{2 \times 3}{3^3} + \cdots + \frac{2n}{3^n}, \text{ 则 } \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n P_i = \frac{2}{3^2} + \frac{2 \times 2}{3^3} + \frac{2 \times 3}{3^4} + \cdots + \frac{2n}{3^{n+1}},$$

由两式相减可得 $\frac{2}{3} \sum_{i=1}^n P_i = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} +$

$$\frac{2}{3^3} + \cdots + \frac{2}{3^n} - \frac{2n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} -$$

$$\frac{2n}{3^{n+1}}, \text{ 所以 } \sum_{i=1}^n P_i = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^n}.$$

(3) 在随机抽取的若干人的合计得分为 $n-1$ 分的基础上再抽取 1 人, 则这些人的合计得分可能为 n 分或 $n+1$ 分, 记“合计得 n 分”为事件 A , “合计得 $n+1$ 分”为事件 B , A 与 B 是对立事件,

因为 $P(A) = a_n, P(B) = \frac{2}{3}a_{n-1}$, 所以 $a_n +$

$$\frac{2}{3}a_{n-1} = 1 (n \geq 2),$$

$$\text{即 } a_n - \frac{3}{5} = -\frac{2}{3} \left(a_{n-1} - \frac{3}{5}\right) (n \geq 2),$$

因为 $a_1 = \frac{1}{3}, a_1 - \frac{3}{5} = \frac{1}{3} - \frac{3}{5} = -\frac{4}{15}$, 则

数列 $\left\{a_n - \frac{3}{5}\right\}$ 是首项为 $-\frac{4}{15}$, 公比为

$-\frac{2}{3}$ 的等比数列, 所以 $a_n - \frac{3}{5} =$

$$-\frac{4}{15} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} (n \geq 1), a_n =$$

$$-\frac{4}{15} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \frac{3}{5} (n \geq 1), \text{ 所以随着抽}$$

取人数的无限增加, a_n 趋近于常数 $\frac{3}{5}$.

4. 突破点 ▶ 复数, 随机变量的分布列, 全概率公式

【解】(1) 一次操作后可能的复数为 $1, i, \sqrt{3}, \sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, \sqrt{3}+i$.

(2) 一次操作后复数的模所有可能的取值为 $1, \sqrt{3}, 2$, 由 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, 故

X 的所有可能取值为 $1, \sqrt{3}, 2, 3, 2\sqrt{3}, 4$,

$$P(X=1) = \frac{1}{9}, P(X=\sqrt{3}) = \frac{2}{9}, P(X=$$

$$2) = \frac{2}{9}, P(X=3) = \frac{1}{9}, P(X=2\sqrt{3}) = \frac{2}{9},$$

$$P(X=4) = \frac{1}{9},$$

所以 X 的分布列为

X	1	$\sqrt{3}$	2	3	$2\sqrt{3}$	4
-----	---	------------	---	---	-------------	---



P	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
-----	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------	---------------

(3) 若 z_n^2 为实数, 则 $\arg(z_n^2) = 0$ 或 π .

而 $1, i, \sqrt{3}, \sqrt{3}i, 1+\sqrt{3}i, \sqrt{3}+i$ 的辐角主值分别是 $0, \frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$,

设在 n 次操作中, 得到 $i, \sqrt{3}i$ 的次数为 a_n , 得到 $1+\sqrt{3}i$ 的次数为 b_n , 得到 $\sqrt{3}+i$ 的次数为 c_n ,

于是 $\arg(z_n^2) = a_n \cdot \pi + b_n \cdot \frac{2\pi}{3} + c_n \cdot$

$\frac{2\pi}{6} - k_0\pi = \left(a_n + \frac{2b_n+c_n}{3} - k_0\right)\pi, k_0 \in \mathbf{N},$

且 k_0 为偶数,

从而 $a_n + \frac{2b_n+c_n}{3} - k_0 = t_0 \in \{0, 1\}$, 即

$2b_n+c_n = 3(t_0+k_0-a_n)$,

因此所求的概率 Q_n 即为 $2b_n+c_n$ 是 3 的整数倍的概率. 下面研究 Q_{n+1} 与 Q_n 之间的关系.

(i) $2b_n+c_n$ 是 3 的整数倍, 且第 $n+1$ 次操作得到的复数是 $1, i, \sqrt{3}, \sqrt{3}i$ (概率为 $\frac{2}{3}$);

(ii) $2b_n+c_n$ 被 3 除余 1, 且第 $n+1$ 次操作得到的复数是 $1+\sqrt{3}i$ (概率为 $\frac{1}{6}$).

(iii) $2b_n+c_n$ 被 3 除余 2, 且第 $n+1$ 次操作得到的复数是 $\sqrt{3}+i$ (概率为 $\frac{1}{6}$);

因此由全概率公式可以得到 $Q_{n+1} = \frac{2}{3}Q_n + \frac{1}{6}(1-Q_n) = \frac{1}{2}Q_n + \frac{1}{6}$, 变形得

$Q_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}\left(Q_n - \frac{1}{3}\right)$, 其中 $Q_1 = \frac{2}{3}$, 故

$Q_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$.

5. 突破点 ▶ 频率分布直方图, 频率与概率, 统计与函数交汇

【解】(1) 由中位数为 87.5, 得 $5(c+0.02+a)+2.5b=2.5b+5(0.04+0.02)=$

0.5 , 则 $\begin{cases} b=0.08, \\ c+a=0.04, \end{cases}$

由平均值为 87, 得 $5c \times 72.5 + 0.1 \times 77.5 + 5a \times 82.5 + 5b \times 87.5 + 0.2 \times 92.5 + 0.1 \times 97.5 = 87$, 则 $72.5c + 82.5a = 3.2$, 联立解得 $c=0.01, a=0.03$, 所以 $a=0.03, b=0.08, c=0.01$.

(2) 以频率作为概率, 每件产品的质量指标值 M 与利润 y (单位: 万元) 及对应概率关系为

质量指标值 M	$[70, 75)$	$[75, 80)$	$[80, 85)$	$[85, 90)$	$[90, 100]$
-----------	------------	------------	------------	------------	-------------



利润 y (万元)	$-\frac{10}{x}$	$\frac{10\cos x}{x}$	$2x$	$\frac{x}{5}$	$-\frac{5}{3x}$
P	0.05	0.1	$5a$	$5b$	0.3

依题意, $5a+5b=1-0.05-0.1-0.3$,

即 $b=0.11-a$,

每件产品的利润 $y = -\frac{0.5}{x} + \frac{\cos x}{x} + 10ax +$

$bx - \frac{0.5}{x} = \frac{\cos x - 1}{x} + (9a + 0.11)x$,

$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

由对任意的 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 生产该产品一

定能盈利, 得 $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), y > 0$ 恒成立,

此时 $y > 0$, 即 $\cos x - 1 + (9a + 0.11)x^2 > 0$,

令 $f(x) = \cos x - 1 + (9a + 0.11)x^2, x \in \left(0,$

$\frac{\pi}{2}\right)$,

求导得 $f'(x) = -\sin x + 2(9a + 0.11)x$,

令 $g(x) = -\sin x + 2(9a + 0.11)x, x \in \left(0,$

$\frac{\pi}{2}\right)$,

求导得 $g'(x) = -\cos x + 2(9a + 0.11)$, 而

$0 < \cos x < 1, a \geq 0$,

当 $2(9a + 0.11) \geq 1$, 即 $a \geq \frac{13}{300}$ 时, g'

$(x) > 0$, 函数 $f'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递

增, 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f'(x) \rightarrow 0$,

所以 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单

调递增, 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 所以

$f(x) > 0$, 符合题意;

当 $0 < 2(9a + 0.11) < 1$ 时, 则存在 $x_0 \in$

$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $g'(x_0) = 0$,

由 $g'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 得当

$x \in (0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $f'(x)$ 在

$(0, x_0)$ 上单调递减,

则当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$

在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 则 $f(x) < 0$, 不符

合题意.

由 $b = 0.11 - a$, 及 $b \geq 0$, 得 $a \leq 0.11$, 因此

$\frac{13}{300} \leq a \leq \frac{11}{100}$.

所以 a 的取值范围是 $\left[\frac{13}{300}, \frac{11}{100}\right]$.

6. 突破点 ▶ 正态分布, 二项分布, 概率与函数的交汇

【解】(1) 因为当 $X \sim \pi(\lambda)$, 且 $\lambda = 100$



时,可近似地认为 $X \sim N(\lambda, \lambda)$, 即 $X \sim N(100, 100)$,

这里 $\mu = 100, \sigma = \sqrt{100} = 10$,

所以 $P(110 < X < 120) = P(100 + 10 < X < 100 + 2 \times 10) = P(\mu + \sigma < X < \mu + 2\sigma)$

$$= \frac{1}{2} [P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) - P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma)] \approx \frac{0.9545 - 0.6827}{2} = 0.1359 \approx 0.136.$$

(2) ①若 $X \sim B(1000, 0.001)$, 则 $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.999^{1000} - C_{1000}^1 \cdot 0.999^{999} \cdot 0.001 \approx 0.2642$.

②若 $X \sim \pi(\lambda)$, 其中 $\lambda = np = 1$, 则 $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} \approx 0.2642$.

比较计算结果,可以发现利用二项分布计算的结果与利用泊松分布计算的结果是相等的,说明在某些特定情形下,可以用泊松分布来计算二项分布.

(3) 由于 $X \sim \pi(\lambda)$, 所以 $P(X > 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$, 由泊松分布的概率公式可得 $P(X = 0) = e^{-\lambda}$, $P(X = 1) = \lambda e^{-\lambda}$, 所以 $P(X > 1) = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} = 1 - (1 + \lambda)e^{-\lambda}$,

因为 $P(X > 1) < 0.01$, 即 $(1 + \lambda)e^{-\lambda} > 0.99$.

构造函数 $g(x) = \frac{x+1}{e^x} (x > 0)$, 则 $g'(x) = -\frac{x}{e^x} < 0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

由于 $g(1) = \frac{2}{e} < \frac{2}{2.5} = 0.8 < 0.99$, $g(0) = 1$, 所以 $0 < x < 1$,

又因为 $g(0.1) = \frac{1+0.1}{e^{0.1}}$, 需要比较 $\frac{1+0.1}{e^{0.1}}$

与 0.99 的大小, 而 $0.99 = 1 - 0.1^2$, 所以相当于比较 $e^{-0.1}$ 与 $1 - 0.1$ 的大小,

构造函数 $h(x) = e^x - x - 1 (-0.2 < x < 0)$, 所以 $h'(x) = e^x - 1$, 对任意的 $x \in (-0.2, 0)$, $h'(x) < 0$ 恒成立, 所以函数 $h(x)$ 在 $(-0.2, 0)$ 上单调递减, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow 0$, 所以 $h(-0.1) = e^{-0.1} + 0.1 - 1 > h(0) = 0$, 所以 $e^{-0.1} > 1 - 0.1$, 即 $\frac{1+0.1}{e^{0.1}} >$

$1.1 \times 0.9 = 0.99$, 又 $g(0.2) = \frac{1+0.2}{e^{0.2}}$, 需

要比较 $\frac{1+0.2}{e^{0.2}}$ 与 0.99 的大小, 而 $0.99 = 1 - 0.1^2$, 所以相当于比较 $[1 - (-0.2)]e^{-0.2}$ 与 $1 - \left(-\frac{0.2}{2}\right)^2$ 的大小.



构造函数 $m(x) = (1-x)e^x - \left(1 - \frac{1}{4}x^2\right)$,

其中 $-0.5 < x < 0$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $m(x) \rightarrow$

$0, m'(x) = -xe^x + \frac{1}{2}x = x\left(\frac{1}{2} - e^x\right)$, 当 $x \in$

$(-0.5, 0)$ 时, $m'(x) > 0$, 所以函数 $m(x)$

在 $(-0.5, 0)$ 上单调递增, 即 $m(-0.2) <$

0 , 即 $[1 - (-0.2)]e^{-0.2} < 1 - \left(-\frac{0.2}{2}\right)^2$, 即

$\frac{1+0.2}{e^{0.2}} < 0.99$, 因此 λ 的最大值为 0.1 .

全章综合训练

刷

真题

刷小题

1. A 命题点 ▶ 古典概型、对立事件的概率

【解析】甲、乙两位参赛同学抽取主题的结果共有 $6 \times 6 = 36$ (种), 抽到相同主题的结果共有 6 种, 所以甲、乙两位参赛同学抽到相同主题的概率为 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, 则甲、乙两位参赛同学抽到不同主题的概率为

$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$, 故选 A.

2. D 命题点 ▶ 古典概型概率的计算

【解析】从 2 至 8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数, 共有 $C_7^2 = 21$ (种) 不同的结果, 这 2 个数互质的情况有 $\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}, \{7, 8\}$, 共 14 种. 所以这 2 个数互质的概率 $P = \frac{14}{21} = \frac{2}{3}$. 故选 D.

3. $\frac{1}{2}$ 命题点 ▶ 古典概型的概率计算, 排列组合的应用

【解析】列举法: 假设乙固定按照 2, 4, 6, 8 的顺序, 则甲所有的可能如表所示.

1 3 5 7√	5 1 3 7√
1 3 7 5√	5 1 7 3
1 5 3 7√	5 3 1 7√
1 5 7 3	5 3 7 1
1 7 3 5√	5 7 1 3
1 7 5 3√	5 7 3 1
3 1 5 7√	7 1 3 5√
3 1 7 5	7 1 5 3√
3 5 1 7	7 3 1 5√
3 5 7 1	7 3 5 1√
3 7 1 5	7 5 1 3
3 7 5 1	7 5 3 1

从中找均小于 2, 4, 6, 8 与有 3 个数字分别小于 2, 4, 6, 8 的情况, 此时甲得 0 分或 1 分, 符合上述情况的有表中打√的 12 种情况.

那么甲的总得分不小于 2 分也有 12 种



情况,由古典概型概率公式得所求概率

为 $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ (说明:固定乙的顺序,将甲的情况排列出来,去挑选,也可以从中判断甲有 2 个及以上的数字超过乙的. 如果改变乙的顺序,其情况是类似的).

4. $\frac{7}{15}$ 命题点 ▶ 排列组合与概率的综合

【解析】记取出的三个球上的数字按先后顺序分别为 a, b, c , 则共有 $A_6^3 = 120$ (种)

可能. 由题知, $|m - n| = \left| \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{3} \right| = \left| \frac{a+b-2c}{6} \right| \leq 0.5$, 即 $|a+b-2c| \leq 3$, 所以

$2c-3 \leq a+b \leq 2c+3$, 其中 (a, b) 的不同取法共有 $A_6^2 = 30$ (种), 对应的 $a+b$ 的取值如表所示. 根据对称性知, $c=1$ 或 6 时, 均有 2 种可能 (提示: $c=1$ 时, $a=2, b=3$ 或 $a=3, b=2$; $c=6$ 时, $a=4, b=5$ 或 $a=5, b=4$); $c=2$ 或 5 时, 均有 10 种可能 (提示: $c=2$ 时, (a, b) 的值可为 $(1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1), (3, 4), (4, 3)$, 共 10 种情况, 同理可分析 $c=5$ 的情况); $c=3$ 或 4 时, 均有 16 种可能 (提示: $c=3$ 时, (a, b) 的值可为 $(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 2), (2, 6), (6, 2), (4, 5), (5, 4)$, 共 16 种情况, 同理可分析 $c=4$ 时的情况), 故满足条件的共有 $2 \times 2 + 2 \times 10 + 2 \times 16 = 56$ (种) 可能, 故所求概率 $P = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$.

$a+b$ 的取值表

b	a					
	1	2	3	4	5	6
1		3	4	5	6	7
2	3		5	6	7	8
3	4	5		7	8	9
4	5	6	7		9	10
5	6	7	8	9		11
6	7	8	9	10	11	

5. ABD 命题点 ▶ 相互独立事件的概率、 n 重伯努利试验

【解析】对于 A 选项, 采用单次传输方案, 依次发送 1, 0, 1, 依次收到 1, 0, 1 的概率为 $(1-\beta)(1-\alpha)(1-\beta) = (1-\alpha)(1-\beta)^2$, 所以 A 选项正确.

对于 B 选项, 采用三次传输方案, 发送 1, 依次收到 1, 0, 1 的概率为 $(1-\beta)\beta(1-\beta) = \beta(1-\beta)^2$, 所以 B 选项正确.

对于 C 选项, 采用三次传输方案, 发送 1, 依次收到 1, 1, 1 (即译码为 1) 的概率为 $(1-\beta)(1-\beta)(1-\beta) = (1-\beta)^3$; 发送 1, 依次收到 1, 0, 1 (即译码为 1), 0, 1, 1 (即译



码为 1), $1, 1, 0$ (即译码为 1) 的概率为 $3(1-\beta)\beta(1-\beta) = 3(1-\beta)^2\beta$, 于是译码为 1 的概率为 $(1-\beta)^3 + 3(1-\beta)^2\beta$, 所以 C 选项不正确.

对于 D 选项, 采用三次传输方案, 发送 0, 依次收到 $0, 0, 0$ (即译码为 0) 的概率为 $(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha) = (1-\alpha)^3$; 发送 0, 依次收到 $0, 0, 1$ (即译码为 0), $0, 1, 0$ (即译码为 0), $1, 0, 0$ (即译码为 0) 的概率为 $3(1-\alpha)\alpha(1-\alpha) = 3(1-\alpha)^2\alpha$, 于是译码为 0 的概率为 $(1-\alpha)^3 + 3(1-\alpha)^2\alpha$.

采用单次传输方案, 发送 0, 译码为 0 的概率为 $1-\alpha$. 依题意, 有 $(1-\alpha)^3 + 3(1-\alpha)^2\alpha > 1-\alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 即 $-2\alpha^2 + \alpha > 0$,

$$\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

令函数 $f(\alpha) = -2\alpha^2 + \alpha$, $\alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 则

$f(\alpha) = \alpha(1-2\alpha) > 0$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上恒成立,

所以 D 选项正确. 故选 ABD.

6. A 命题点 ▶ 条件概率

【解析】从该地的中学生中任取一名学生, 记 A 表示事件: “取到的学生爱好滑冰”, B 表示事件: “取到的学生爱好滑雪”. 由题设知 $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.7$, 由 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 得 $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.7 = 0.4$.

故所求的概率为 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.4}{0.5} =$

0.8. 故选 A.

7. D 命题点 ▶ 相互独立事件的概率, 不等式比较大小

【解析】设该棋手在第二盘与甲比赛连胜两盘的概率为 $p_{\text{甲}}$, 第二盘与乙比赛连胜两盘的概率为 $p_{\text{乙}}$, 第二盘与丙比赛连胜两盘的概率为 $p_{\text{丙}}$, 则 $p_{\text{甲}} = p_1 p_2 (1-p_3) + p_1 p_3 \cdot (1-p_2) = p_1 p_2 + p_1 p_3 - 2p_1 p_2 p_3$, $p_{\text{乙}} = p_1 p_2 (1-p_3) + p_2 p_3 (1-p_1) = p_1 p_2 + p_2 p_3 - 2p_1 p_2 p_3$, $p_{\text{丙}} = p_1 p_3 (1-p_2) + p_2 p_3 (1-p_1) = p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2p_1 p_2 p_3$, 所以 $p_{\text{丙}} - p_{\text{甲}} = p_2(p_3 - p_1) > 0$, $p_{\text{丙}} - p_{\text{乙}} = p_1(p_3 - p_2) > 0$, 所以 $p_{\text{丙}}$ 最大, 故选 D.

8. B 命题点 ▶ 相互独立事件的判断

【解析】由题意可知, 甲表示事件“第一次取出的球的数字是 1”, 记为 $(1, i)$, $i = 1, 2, \dots, 6$; 乙表示事件“第二次取出的球的数字是 2”, 记为 $(j, 2)$, $j = 1, 2, \dots, 6$; 丙表示事件“两次取出的球的数字之和是 8”, 记为 (m, n) , $m, n = 1, 2, \dots, 6$ (提示: 注意是“有放回”), 且 $m+n=8$; 丁表示事件“两次取出的球的数字之和是 7”, 记为 (p, q) , $p, q = 1, 2, \dots, 6$, 且 $p+q=7$. 则

$$P(\text{甲}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, P(\text{乙}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, P(\text{丙}) =$$



$$\frac{5}{36}, P(\text{丁}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, P(\text{甲丙}) = 0,$$

$$P(\text{甲丁}) = \frac{1}{36}, P(\text{乙丙}) = \frac{1}{36}, P(\text{丙丁}) = 0,$$

故 $P(\text{甲丁}) = P(\text{甲})P(\text{丁})$ (提示: 若事件 A, B 满足 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则事件 A, B 相互独立), 故选 B.

9. $\frac{61}{25}$ 命题点 ▶ 离散型随机变量的分布列与数学期望

【解析】由题意得 $X = 1, 2, 3$ (关键: $X = 1$ 表示三次取出的都是同一个数字的球, $X = 2$ 表示三次取出了两个不同数字的球, $X = 3$ 表示三次取出的球的数字各不相同).

$$P(X=1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{5}{125}; P(X=3) =$$

$$A_5^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{60}{125} \text{ (提示: 选出 3 个不同数}$$

$$\text{字的小球并排序)}; P(X=2) = C_5^2 \times 2 \times \frac{A_3^3}{A_2^2} \times$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{60}{125} \text{ (提示: 假设所取球的数字}$$

$$\text{为 1 和 2, 式中“2”表示两种组合“1, 1, 2”和“1, 2, 2”, “}\frac{A_3^3}{A_2^2}\text{”表示“除序”)} \text{ (另}$$

$$\text{解: } P(X=2) = 1 - P(X=1) - P(X=3) = \frac{60}{125} \text{).}$$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{5}{125} + 2 \times \frac{60}{125} + 3 \times \frac{60}{125} = \frac{61}{25}.$$

一题多解

$$\text{令 } X_i = \begin{cases} 1, & \text{球 } i \text{ 至少被取出一次,} \\ 0, & \text{球 } i \text{ 没被取出过,} \end{cases}$$

$$\text{则 } X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5,$$

$$E(X_i) = P(\text{球 } i \text{ 至少被取出一次}) = 1 -$$

$$P(\text{球 } i \text{ 没被取出过}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125}.$$

$$\text{故 } E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) +$$

$$E(X_4) + E(X_5) = 5 \times \frac{61}{125} = \frac{61}{25}.$$

10. BC 命题点 ▶ 正态分布

【解析】由题可得 $X \sim N(1.8, 0.1^2)$, $Y \sim N(2.1, 0.1^2)$, 所以 $P(X > 2) = P(X > \mu + 2\sigma) < P(X > \mu + \sigma) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587 < 0.2$, 故 A 错误, B 正确; $P(Y > 2) = P(Y > \mu_1 - \sigma_1) \approx 0.8413 > 0.5$, 故 C 正确, D 错误. 故选 BC.

11. C 命题点 ▶ 计算一组数据的平均数

【解析】平均数为 $\frac{1}{5} \times (2 + 8 + 14 + 16 + 20) = 12$. 故选 C.

12. C 命题点 ▶ 数据的统计分析

【解析】A 选项, 因为 $6 + 12 + 18 = 36 < 50$,



$36+30=66>50$, 所以 100 块稻田亩产量的中位数不小于 1 050 kg, A 错误; B 选项, 因为 100 块稻田中亩产量低于 1 100 kg 的稻田有 66 块, 所占比例为 $66\%<80\%$, 所以 B 错误; C 选项, 100 块稻田亩产量的极差的最大值小于 $1\ 200-900=300$, 最小值大于 $1\ 150-950=200$, 所以极差介于 200 kg 至 300 kg 之间, C 正确; D 选项, 同一组中的数据都用左端点值来估计, 则这 100 块稻田亩产量的平均值的最小值为 $\frac{1}{100} \times (6 \times 900 + 12 \times 950 + 18 \times 1\ 000 + 30 \times 1\ 050 + 24 \times 1\ 100 + 10 \times 1\ 150) = 1\ 042 > 1\ 000$, 所以平均值不介于 900 kg 至 1 000 kg 之间, D 错误. 故选 C.

13. BD 命题点 ▶ 样本的数据特征

【解析】对于选项 A: $\because x_1, x_6$ 不确定, $\therefore x_1, x_2, \dots, x_6$ 的平均数不确定, 如 1, 2, 2, 2, 2, 4 的平均数不等于 2, 2, 2, 2 的平均数, 故 A 错误;

对于选项 B: 不妨设 $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, 则

x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数为 $\frac{x_3+x_4}{2}$, $x_1, x_2, x_3,$

x_4, x_5, x_6 的中位数为 $\frac{x_3+x_4}{2}$, 故 B 正确;

对于选项 C: $\because x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 的波动性不小于 x_2, x_3, x_4, x_5 的波动性, $\therefore x_2, x_3, x_4, x_5$ 的标准差不大于 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 的标准差 (提示: 标准差反映数据的离散程度, 数据越离散, 标准差越大), 故 C 错误;

对于选项 D: 不妨设 $x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, 则

$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5 \leq x_6$, $\therefore x_5 - x_2 \leq x_6 - x_1$, 即 x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 的极差 (定义: 极差为样本数据的最大值减去最小值), 故 D 正确.

故选 BD.

14. D 命题点 ▶ 分层随机抽样、组合数、分步乘法计数原理

【解析】由题意知初中部和高中部人数

之比为 $\frac{400}{200} = \frac{2}{1}$, 则从初中部和高中部

抽取的人数分别为 40, 20, 所以不同的抽样结果共有 $C_{400}^{40} \cdot C_{200}^{20}$ 种, 故选 D.

15. C 命题点 ▶ 频率分布直方图的应用与数据分析

【解析】由频率分布直方图知年收入低于 4.5 万元的农户比率估计为 $(0.02 + 0.04) \times 1 = 0.06 = 6\%$, 故 A 正确; 年收入不低于 10.5 万元的农户比率估计为 $(0.04 + 0.02 \times 3) \times 1 = 0.10 = 10\%$, 故 B 正确; 该地农户家庭年收入的平均值约为 $3 \times 0.02 + 4 \times 0.04 + 5 \times 0.10 + 6 \times 0.14 + 7 \times 0.20 + 8 \times 0.20 + 9 \times 0.10 + 10 \times 0.10 +$



$11 \times 0.04 + 12 \times 0.02 + 13 \times 0.02 + 14 \times 0.02 = 7.68 > 6.5$, 故 C 错误; 年收入介于 4.5 万元至 8.5 万元之间的农户比率约为 $(0.10 + 0.14 + 0.20 + 0.20) \times 1 = 0.64 > 0.5$, 故 D 正确. 故选 C.

刷大题

1. 命题点 ▶ 频率分布直方图、平均数、条件概率

【解】(1) 估计该地区这种疾病患者的平均年龄为 $0.001 \times 10 \times 5 + 0.002 \times 10 \times 15 + 0.012 \times 10 \times 25 + 0.017 \times 10 \times 35 + 0.023 \times 10 \times 45 + 0.020 \times 10 \times 55 + 0.017 \times 10 \times 65 + 0.006 \times 10 \times 75 + 0.002 \times 10 \times 85 = 47.9$ 岁.

(2) 估计该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间 $[20, 70)$ 的概率 $P = 0.012 \times 10 + 0.017 \times 10 + 0.023 \times 10 + 0.020 \times 10 + 0.017 \times 10 = 0.89$.

(3) 设事件 A : 此人患这种疾病, 事件 B : 此人年龄位于区间 $[40, 50)$, 则由题意知 $P(AB) = 23\% \times 0.1\% = 0.023\%$, $P(B) = 16\%$,

所以若此人年龄位于 $[40, 50)$,

则此人患这种疾病的概率 $P(A|B) =$

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.023\%}{16\%} \approx 0.0014.$$

2. 命题点 ▶ 相互独立事件的概率, 离散型随机变量的期望

【解】(1) 甲参加第一阶段比赛, 则该队进入第二阶段的概率 $P_1 = 1 - (1 - 0.4)^3 = 0.784$.

第二阶段乙进行投篮, 则乙至少投中一次的概率 $P_2 = 1 - (1 - 0.5)^3 = 0.875$,

故甲、乙所在队的比赛成绩不少于 5 分的概率 $P = 0.784 \times 0.875 = 0.686$.

(2) (i) 若甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分, 则第二阶段的 3 次投篮全中.

当甲参加第一阶段比赛时, 甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_3 = [1 - (1 - p)^3]q^3$,

当乙参加第一阶段比赛时, 甲、乙所在队的比赛成绩为 15 分的概率为 $P_4 = [1 - (1 - q)^3]p^3$,

则 $P_3 - P_4 = [1 - (1 - p)^3]q^3 - [1 - (1 - q)^3]p^3 = 3pq(q - p)[p + q(1 - p)]$.

因为 $1 \geq q > p > 0$, 所以 $q - p > 0$, 所以 $P_3 - P_4 > 0$, 即 $P_3 > P_4$,

故应该由甲参加第一阶段比赛.

(ii) 若甲参加第一阶段比赛, 则设该队比赛成绩为 X 分, X 的所有可能取值为 0, 5, 10, 15, 进入第二阶段的概率为 $1 - (1 - p)^3$, 未进入第二阶段的概率为 $(1 - p)^3$,

则 $P(X = 0) = (1 - p)^3 + [1 - (1 - p)^3](1 - q)^3$,

$P(X = 5) = [1 - (1 - p)^3]C_3^1 q(1 - q)^2$,



$$P(X=10)=[1-(1-p)^3]C_3^2q^2(1-q),$$

$$P(X=15)=[1-(1-p)^3]q^3,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } E(X) &= 5 \times [1-(1-p)^3]C_3^1q(1-q)^2 + 10 \times \\ &[1-(1-p)^3]C_3^2q^2(1-q) + 15 \times [1-(1-p)^3] \cdot \\ &q^3 = 15pq(p^2-3p+3). \end{aligned}$$

若乙参加第一阶段比赛,则设该队的比赛成绩为 Y 分,

$$\text{同理可得 } E(Y) = 15pq(q^2-3q+3),$$

$$\begin{aligned} \text{则 } E(X)-E(Y) &= 15pq(p^2-3p-q^2+3q) \\ &= 15pq(p-q)(p+q-3), \end{aligned}$$

因为 $1 \geq q > p > 0$, 所以 $pq > 0, p-q < 0, p+q-3 < 0$,

所以 $E(X)-E(Y) > 0$, 即 $E(X) > E(Y)$.

故应该由甲参加第一阶段的比赛.

3. 命题点 ▶ 离散型随机变量的期望

【解】(1) 设一份保单索赔次数为 Y , 则

$$\begin{aligned} P(Y \geq 2) &= P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) = \\ &\frac{60}{1\,000} + \frac{30}{1\,000} + \frac{10}{1\,000} = \frac{1}{10}, \end{aligned}$$

\therefore 一份保单索赔次数不少于 2 的概率为 $\frac{1}{10}$.

(2) (i) X 的可能取值为 0.4, -0.4, -1.2, -2, -2.6, 则

$$P(X=0.4) = \frac{800}{1\,000} = \frac{4}{5},$$

$$P(X=-0.4) = \frac{100}{1\,000} = \frac{1}{10},$$

$$P(X=-1.2) = \frac{60}{1\,000} = \frac{3}{50},$$

$$P(X=-2) = \frac{30}{1\,000} = \frac{3}{100},$$

$$P(X=-2.6) = \frac{10}{1\,000} = \frac{1}{100},$$

$$\begin{aligned} \therefore EX &= 0.4 \times \frac{4}{5} - 0.4 \times \frac{1}{10} - 1.2 \times \frac{3}{50} - 2 \times \\ &\frac{3}{100} - 2.6 \times \frac{1}{100} \\ &= 0.32 - 0.04 - 0.072 - 0.06 - 0.026 \\ &= 0.122. \end{aligned}$$

(ii) 保单的保费调整后, 无索赔保单的保费为 0.384 万元, 有索赔保单的保费为 0.48 万元.

毛利润 X 的可能取值为 0.384, -0.32, -1.12, -1.92, -2.52,

$$\begin{aligned} \therefore \text{此时 } EX &= 0.384 \times \frac{4}{5} - 0.32 \times \frac{1}{10} - 1.12 \times \\ &\frac{3}{50} - 1.92 \times \frac{3}{100} - 2.52 \times \frac{1}{100} = 0.3072 - 0.032 - \\ &0.0672 - 0.0576 - 0.0252 = 0.1252, \end{aligned}$$

\therefore 调整后的保单毛利润的数学期望的估计值大于调整前的保单毛利润数学期望的估计值.

4. 命题点 ▶ 二项分布

(1) 【解】设事件 A : 打完 3 个球后, 甲比乙多得 3 分, 即甲赢了 3 个球, 则 $P(A) = p^3$, 则 $p_3 = p^3$.



设事件 B : 打完 4 个球后, 甲比乙多得 2 分, 即甲赢了 3 个球, 输了 1 个球, 则 $P(B) = C_4^3 p^3 (1-p)$,

设事件 C : 打完 4 个球后, 甲比乙多得 4 分, 即甲赢了 4 个球, 则 $P(C) = p^4$.

则 $p_4 = P(B) + P(C) = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p)$.

(2) 【解】易知 $q_4 = 4(1-p)^3 p + (1-p)^4 = (1-p)^3(3p+1)$, $q_3 = (1-p)^3$,

因此 $\frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = \frac{3p^3(1-p)}{3p(1-p)^3} = \frac{p^2}{(1-p)^2} = 4$,

解得 $p = 2$ (舍去) 或 $p = \frac{2}{3}$.

(3) 【证明】易知 $p_{2m+2} = p_{2m+1} + pC_{2m+1}^{m+1}p^{m+1} \cdot (1-p)^m$,

$$q_{2m+2} = q_{2m+1} + qC_{2m+1}^{m+1}q^{m+1}p^m,$$

$$p_{2m+1} = p_{2m} - (1-p)C_{2m}^{m+1}p^{m+1}(1-p)^{m-1},$$

$$q_{2m+1} = q_{2m} - pC_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^{m-1},$$

$$\text{则 } \frac{p_{2m+1} - p_{2m}}{q_{2m+1} - q_{2m}} = \frac{-C_{2m}^{m+1}(1-p)^m p^{m+1}}{-C_{2m}^{m+1}(1-p)^{m+1} p^m} = \frac{p}{1-p} > 1,$$

$$\text{则 } p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m},$$

$$\text{即 } p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}.$$

$$\begin{aligned} & (p_{2m+2} - p_{2m}) - (q_{2m+2} - q_{2m}) \\ &= C_{2m+1}^{m+1}p^{m+2}q^m - C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m - (C_{2m+1}^{m+1}q^{m+2}p^m - C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m) \end{aligned}$$

$$= C_{2m+1}^{m+1}p^{m+2}q^m - C_{2m+1}^{m+1}q^{m+2}p^m - (C_{2m}^{m+1}p^{m+1}q^m - C_{2m}^{m+1}q^{m+1}p^m)$$

$$= C_{2m+1}^{m+1}p^m q^m (p^2 - q^2) - C_{2m}^{m+1}p^m q^m (p - q)$$

$$= C_{2m+1}^{m+1}p^m q^m (p - q) - C_{2m}^{m+1}p^m q^m (p - q)$$

$$= p^m q^m (p - q) (C_{2m+1}^{m+1} - C_{2m}^{m+1}) > 0,$$

$$\text{因此 } p_{2m+2} - p_{2m} > q_{2m+2} - q_{2m},$$

$$\text{即 } p_{2m+2} - q_{2m+2} > p_{2m} - q_{2m}.$$

$$\text{综上, } p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}.$$

一题多解

(3) 先考虑 p_{2m+1} 与 p_{2m} 的关系, 令 X_n 表示打 n 个球后甲的得分, 则若打 $2m$ 个球后有 $X_{2m} \geq m+2$, 那无论如何都会有 $X_{2m+1} \geq m+2$; 如果 $X_{2m} = m+1$, 那么需要最后一个球甲得分, 才能使得 $X_{2m+1} \geq m+2$; 如果 $X_{2m} < m+1$, 那无论如何都不能得到 $X_{2m+1} \geq m+2$, 因此 $p_{2m+1} = P(X_{2m+1} \geq m+2) = P(X_{2m+1} \geq m+2 | X_{2m} \geq m+2) \cdot P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m+1} \geq m+2 | X_{2m} = m+1) P(X_{2m} = m+1) = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m+1) p = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m+1) - P(X_{2m} = m+1) q = p_{2m} - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m$,

同理有 $q_{2m+1} = q_{2m} - C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^m$,

$$\begin{aligned} p_{2m+1} - q_{2m+1} &= p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m \\ &= p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^{m+1} \cdot (pq)^m (q - p) < p_{2m} - q_{2m}. \end{aligned}$$

先考虑 p_{2m+2} 与 p_{2m} 的关系, 当已经有



$X_{2m} \geq m+2$ 时, 无论如何都会有 $X_{2m+2} \geq m+2$; 当 $X_{2m} = m+1$ 时, 只要保证接下来甲不连输两球即可; 当 $X_{2m} = m$ 时, 接下来甲必须赢两球; 当 $X_{2m} < m$ 时, 无论如何都不符合要求, 因此 $p_{2m+2} = P(X_{2m+2} \geq m+2) = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m)p^2 + P(X_{2m} = m+1)[1 - (1-p)^2] = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m) + P(X_{2m} = m+1) + (p^2 - 1)P(X_{2m} = m) - (1-p)^2P(X_{2m} = m+1) = P(X_{2m} \geq m) + (p^2 - 1)C_{2m}^m p^m q^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m+1} = p_{2m} + P(X_{2m} = m) + (p^2 - 1)C_{2m}^m p^m q^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m+1}$,
 同理 $q_{2m+2} = q_{2m} + P(X_{2m} = m) + (q^2 - 1)C_{2m}^m q^m p^m - C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^{m+1}$,
 因此 $p_{2m+2} - q_{2m+2} = p_{2m} - q_{2m} + (p^2 - q^2)C_{2m}^m p^m q^m > p_{2m} - q_{2m}$.
 综上, $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$.

5. 命题点 ▶ 用频率估计概率、独立性检验

【解】(1) 根据题表数据可知, 超声波检查结果不正常的有 200 人, 其中患该疾病的有 180 人, 因此估计超声波检查结果不正常者患该疾病的概率 $p = \frac{180}{200} = \frac{9}{10}$

(易错: 注意该问所求概率中用到的数据, 数据找错, 计算也就出错).

(2) 零假设为 H_0 : 超声波检查结果与患该疾病无关.

$$\chi^2 = \frac{1\,000 \times (20 \times 20 - 180 \times 780)^2}{200 \times 800 \times 800 \times 200} = 765.625 > 10.828.$$

根据小概率值 $\alpha = 0.001$ 的独立性检验, 超声波检查结果与患该疾病有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.001.

6. 命题点 ▶ 频率分布直方图、函数的解析式及最值

【解】(1) 设 X 为患病者指标, Y 为未患病者指标, 由患病者指标的频率分布直方图, 知 $p(c) = P(X \leq c) = (c - 95) \times 0.002 = 0.5\%$, 解得 $c = 97.5$.

则 $q(c) = P(Y > c) = (100 - 97.5) \times 0.010 + 5 \times 0.002 = 0.035 = 3.5\%$.

(2) 当 $95 \leq c \leq 100$ 时,

$$p(c) = (c - 95) \times 0.002, q(c) = (100 - c) \times 0.010 + 5 \times 0.002,$$

$$\text{所以 } f(c) = p(c) + q(c) = -0.008c + 0.82;$$

当 $100 < c \leq 105$ 时,

$$p(c) = 5 \times 0.002 + (c - 100) \times 0.012, q(c) = (105 - c) \times 0.002,$$

$$\text{所以 } f(c) = p(c) + q(c) = 0.01c - 0.98.$$

综上所述,

$$f(c) = \begin{cases} -0.008c + 0.82, & 95 \leq c \leq 100, \\ 0.01c - 0.98, & 100 < c \leq 105. \end{cases}$$

由一次函数的单调性知, 函数 $f(c)$ 在



$[95, 100]$ 上单调递减, 在 $(100, 105]$ 上单调递增,

所以 $f(c)_{\min} = f(100) = -0.008 \times 100 + 0.82 = 0.02$.

综合自测一

刷

综合

1. B 考查点 ▶ 交集的运算、指数不等式和绝对值不等式的解法

【解析】集合 $A = \{x | 2^x \leq 4\} = \{x | x \leq 2\}$.

由 $|x-1| < 3$ 得 $-2 < x < 4$, 所以 $B = \{x | -2 < x < 4\}$, 故 $A \cap B = \{x | -2 < x \leq 2\}$. 故选 B.

2. C 考查点 ▶ 由函数的奇偶性求参数

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-x) = 5e^x + (a-1)e^{-x} = f(x) = (a-1)e^x + 5e^{-x}$, 整理得 $(a-1)(e^x - e^{-x}) = 5(e^x - e^{-x})$, 故 $a-1 = 5$, 得 $a = 6$. 故选 C.

一题多解

因为 $f(x)$ 是偶函数, 所以 $f(-1) = f(1)$, 即 $\frac{a-1}{e} + 5e = (a-1)e + \frac{5}{e}$, 所以 $\frac{a-6}{e} - (a-6)e = 0$, 即 $(a-6) \cdot \left(\frac{1}{e} - e\right) = 0$, 所以 $a = 6$. 故选 C.

3. C 考查点 ▶ 向量的数量积、垂直关系的向量表示

【解析】由 $|a+b| = |a-b|$, 得 $a^2 + b^2 + 2a \cdot b = a^2 + b^2 - 2a \cdot b$, 则 $a \cdot b = 0$, 由 $(a - \lambda b) \perp (a + \mu b)$, 得 $(a - \lambda b) \cdot (a + \mu b) = 0$, 则 $a^2 - \lambda\mu b^2 = 0$, 而 a, b 为单位向量, 所以 $\lambda\mu = 1$. 故选 C.

一题多解

设 $\vec{OA} = a, \vec{OB} = b$, 由 $|a+b| = |a-b|$, 可知以 OA, OB 为邻边的平行四边形的两条对角线的长度相等, 所以该平行四边形为矩形, 所以 $a \perp b$, 即 $a \cdot b = 0$. 以下同上.

4. A 考查点 ▶ 三角恒等变换

【解析】(二倍角公式和两角和的正切公式) 由 $\tan \alpha \cdot \tan(\alpha + \beta) = 1$ 得 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{\tan \alpha}$, 则 $\tan(2\alpha + 2\beta) = \tan[2(\alpha + \beta)] = \frac{2}{\tan \alpha} = \frac{2}{\frac{1}{\tan \alpha}} = 2 \tan \alpha$.

$$\begin{aligned} \beta)] &= \frac{2 \tan(\alpha + \beta)}{1 - \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{2}{\tan \alpha}}{1 - \frac{1}{\tan^2 \alpha}} = \frac{\frac{2}{\tan \alpha}}{\frac{\tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha}} = \frac{2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha - 1}, \end{aligned}$$

所以 $\tan(3\alpha + 2\beta) = \tan[\alpha + (2\alpha + 2\beta)] = \frac{\tan \alpha + \tan(2\alpha + 2\beta)}{1 - \tan \alpha \cdot \tan(2\alpha + 2\beta)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\tan \alpha + \frac{2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha - 1}}{1 - \tan \alpha \cdot \frac{2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha - 1}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & \frac{\tan^3 \alpha + 2 \tan \alpha - \tan \alpha}{\tan^2 \alpha - 1} \\
 &= \frac{\tan^2 \alpha - 1}{\tan^2 \alpha - 1 - 2 \tan^2 \alpha} \\
 &= \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}{-\tan^2 \alpha - 1} = -\tan \alpha = m, \text{ 故 } \tan(\alpha + \\
 & \beta) = \frac{1}{\tan \alpha} = -\frac{1}{m}, \text{ 故选 A.}
 \end{aligned}$$

快解

方法一 (角的关系): 由 $\tan \alpha \cdot \tan(\alpha + \beta) = 1$ 可得 $2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\beta = -2\alpha + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $m = \tan(3\alpha + 2\beta) = \tan(3\alpha - 4\alpha + \pi + 2k\pi) = -\tan \alpha$, 则 $\tan(\alpha + \beta) = \frac{1}{\tan \alpha} =$

$$-\frac{1}{m}.$$

方法二 (特例法): 因为 $\tan 30^\circ \cdot \tan 60^\circ = 1$, 可设 $\alpha = 30^\circ, \alpha + \beta = 60^\circ$, 即 $\beta = 30^\circ$, 所以 $\tan(3\alpha + 2\beta) = \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} = m$, 所以 $\tan(\alpha + \beta) = \tan 60^\circ = \sqrt{3} = -\frac{1}{m}.$

5. A 考查点 ▶ 古典概型

【解析】不妨记 5 名志愿者为 a, b, c, d, e , 假设 a 连续参加了两天社区服务, 再从剩余的 4 人中抽取 2 人分别参加星期六、星期日的社区服务, 有 $A_4^2 = 12$ (种) 情况, 同理, b, c, d, e 连续参加两天社区服务, 也各有 12 种方法, 所以恰有 1 人连续参加两天社区服务有 $5 \times 12 = 60$ (种) 情况. 总的情况数为 $C_5^2 C_3^2 = 100$. 故恰有 1 人连续参加两天社区服务的概率为 $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$. 故选 A.

6. B 考查点 ▶ 充分条件和必要条件的判断、等差中项的应用

【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 a_2, a_8, a_5 成等差数列, 可得 $2a_8 = a_2 + a_5$, 即 $2a_1 q^7 = a_1 q + a_1 q^4$, 由 $a_1 q \neq 0$, 可得 $2q^6 - q^3 - 1 = 0$, 解得 $q = 1$ 或 $q = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$, 当 $q = 1$ 时, $S_9 = 9a_1, S_3 = 3a_1, S_6 = 6a_1$, 不满足 $2S_9 = S_3 + S_6$, 故充分性不成立; 由 S_3, S_9, S_6 成等差数列, 可得 $2S_9 = S_3 + S_6$, 显然 $q \neq 1$, 故有 $\frac{2a_1(1-q^9)}{1-q} = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} + \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$, 由 $a_1 q \neq 0$, 且 $q \neq 1$, 化简得 $2q^6 - q^3 - 1 = 0$, 解得 $q = 1$ (舍去) 或 $q = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$, 当 $q = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$ 时, $2a_8 = 2a_1 q^7 =$



$2a_1q \times \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \right)^6 = \frac{1}{2}a_1q$, 而 $a_2 + a_5 = a_1q(1 + q^3) = a_1q \left[1 + \left(\sqrt[3]{-\frac{1}{2}} \right)^3 \right] = \frac{1}{2}a_1q$, 故 $2a_8 = a_2 + a_5$, 即 a_2, a_8, a_5 成等差数列, 故必要性成立. 综上可得, “ a_2, a_8, a_5 成等差数列” 是 “ S_3, S_9, S_6 成等差数列” 的必要不充分条件. 故选 B.

7. D 考查点 ▶ 双曲线的离心率

【解析】 令 $|AF_2| = t$, 由 $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AF_2}$ 得 $|AB| = 3t, |BF_2| = 2t$, 由双曲线定义得 $|AF_1| - |AF_2| = 2a, |BF_1| - |BF_2| = 2a$, 则 $|AF_1| = t + 2a, |BF_1| = 2t + 2a$. 在 $\triangle ABF_1$ 中, $\angle F_1AB = \frac{\pi}{3}$, 由余弦定理可得 $|AF_1|^2 + |AB|^2 - 2|AF_1| \cdot |AB| \cdot \cos \angle F_1AB = |BF_1|^2$, 则 $(t + 2a)^2 + (3t)^2 - 2(t + 2a) \cdot 3t \cos \frac{\pi}{3} = (2t + 2a)^2$, 整理得 $3t^2 - 10at = 0$, 解得 $t = \frac{10}{3}a$ 或 $t = 0$ (舍去), 所以 $|AF_1| = t + 2a = \frac{16}{3}a, |AF_2| = t = \frac{10}{3}a$. 设双曲线 C 的焦距为 $2c$, 在 $\triangle AF_1F_2$ 中, 由余弦定理得 $|AF_1|^2 + |AF_2|^2 - 2|AF_1| \cdot |AF_2| \cos \angle F_1AB = |F_1F_2|^2$, 得 $\left(\frac{16}{3}a \right)^2 + \left(\frac{10}{3}a \right)^2 - 2 \cdot \frac{16}{3}a \cdot \frac{10}{3}a \cos \frac{\pi}{3} = (2c)^2$, 整理得 $\frac{196}{9}a^2 = 4c^2$, 则离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{7}{3}$. 故选 D.

8. B 突破点 ▶ 利用导数研究不等式恒成立问题

【解析】 因为 $f'(x) = e^x + 2$, 不等式 $f'(x) < \left(a + \frac{2}{x} \right) (\ln a + \ln x)$ ($a \geq 2$) $\Leftrightarrow e^x + 2 < \left(a + \frac{2}{x} \right) (\ln a + \ln x) \Leftrightarrow e^x + 2 < a(\ln a + \ln x) + \frac{2(\ln a + \ln x)}{x} \Leftrightarrow e^x + 2 < a \ln(ax) + \frac{2 \ln(ax)}{x} \Leftrightarrow xe^x + 2x < ax \ln(ax) + 2 \ln(ax) \Leftrightarrow xe^x + 2x < \ln(ax) \cdot e^{\ln(ax)} + 2 \ln(ax)$, 所以问题等价于当 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3 \right]$ 时, 不等式 $xe^x + 2x < \ln(ax) \cdot e^{\ln(ax)} + 2 \ln(ax)$ 恒成立, 设 $g(x) = xe^x + 2x, x \in [0, +\infty)$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x + 2 > 0$, 所以函数 $g(x) = xe^x + 2x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $xe^x + 2x < \ln(ax) \cdot e^{\ln(ax)} + 2 \ln(ax)$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3 \right]$ 上恒成立, 可以转



化为 $g(x) < g(\ln(ax))$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上

恒成立 (**关键:** 观察不等式的特点, 利用

同构的思想将问题转化为 $g(x) <$

$g(\ln(ax))$ 在 $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上恒成立), 即

$x < \ln(ax)$ 对 $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 恒成立, 即 $a >$

$\frac{e^x}{x}$ 对 $\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 恒成立, 即 $a >$

$\left(\frac{e^x}{x}\right)_{\max}, x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$. 设 $h(x) = \frac{e^x}{x}, x \in$

$\left[\frac{1}{2}, 3\right]$, 则 $h'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$, 令 $h'(x) <$

0 , 得 $\frac{1}{2} \leq x < 1$; 令 $h'(x) > 0$, 得 $1 < x \leq 3$,

所以函数 $h(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递减,

在 $(1, 3]$ 上单调递增. $h(3) = \frac{e^3}{3}$,

$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2e^{\frac{1}{2}}$, 又 $\frac{e^3}{3} > 2e^{\frac{1}{2}}$, 所以

$h(x)_{\max} = \frac{e^3}{3}$, 所以 $a > \frac{e^3}{3}$, 即实数 a 的取

值范围为 $\left(\frac{e^3}{3}, +\infty\right)$. 故选 B.

9. ABD **考查点** ▶ 复数的运算、复数的几何意义

【解析】 对于 B, 由 $1+2i$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的根, 得 $(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0$, 整理得 $a+b-3+(4+2a)i=0$, 因此

$\begin{cases} a+b-3=0, \\ 4+2a=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-2, \\ b=5, \end{cases}$ 所以方程为

$x^2-2x+5=0$ (**另解:** 由 $1+2i$ 是方程 $x^2+ax+b=0$ 的根可知, $1-2i$ 也是方程 $x^2+ax+b=0$ 的根, 由根与系数的关系知 $-a=(1+2i)+(1-2i)=2, b=(1+2i) \cdot (1-2i)=5$, 所以 $a=-2, b=5$), 故 B 正确.

对于 A, 根据方程 $x^2-2x+5=0$, 可得 $\Delta=(-2)^2-4 \times 1 \times 5=-16 < 0$, 所以方程无实数根, 故 A 正确;

对于 C, $z=1-2i$, 则 $\bar{z}=1+2i$, 故 \bar{z} 在复平面内对应的点的坐标为 $(1, 2)$, 在第一象限, 故 C 错误;

对于 D, $\frac{z}{1+i} = \frac{1-2i}{1+i} = \frac{(1-2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$

$\frac{-1-3i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, 所以 $\left|\frac{z}{1+i}\right| =$

$\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ (**另解:**

$\left|\frac{z}{1+i}\right| = \frac{|z|}{|1+i|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$), 故 D 正确.

故选 ABD.

10. ABD **考查点** ▶ 四面体与外接球问题、异面直线所成的角、线面角

【解析】 如图所示, 取 BD 的中点 E , 连接 $A'E, CE$,

因为 $\triangle A'BD$ 和 $\triangle BDC$ 为等边三角形, 所以 $A'E \perp BD, CE \perp BD$,

因为 $A'E \cap CE = E, A'E \subset \text{平面 } A'EC, CE \subset \text{平面 } A'EC$, 所以 $BD \perp \text{平面 } A'EC$, 又 $A'C \subset \text{平面 } A'EC$, 所以 $BD \perp A'C$, 故 A 正确;

因为 $BD \perp \text{平面 } A'EC$, 所以 A' 在平面 BCD 内的射影在直线 EC 上,

故 $\angle A'CE$ 为直线 $A'C$ 与平面 BCD 所成的角,

因为 $\angle A'BC = \frac{\pi}{2}, A'B = BC = 2$,

所以 $A'C = 2\sqrt{2}$,

又 $A'E = EC = \sqrt{3}$, 所以在 $\triangle A'EC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle A'CE = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2}{2 \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, 故 B 正确;

因为 $S_{\triangle A'EC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \sqrt{2}$, $BD \perp \text{平面 } A'EC$, 所以 $V_{\text{四面体 } A'BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle A'EC} \cdot BD = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times 2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 故 C 错误;

如图, 设点 O_1, O_2 分别为 $\triangle A'BD$ 和 $\triangle BDC$ 的外心, 过 O_1, O_2 分别作 $O_1O \perp \text{平面 } A'BD, O_2O \perp \text{平面 } BDC, O_1O \cap O_2O = O$, 则点 O 为四面体 $A'BCD$ 外接球的球心, 连接 CO ,

易知 $CO_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}, EO_2 = EO_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

在 $\triangle A'EC$ 中, $\frac{A'C}{2} = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{2}$, 则 $A'C$

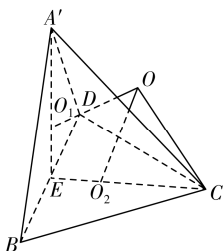
边上的高为 $\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 1$,

$\tan \frac{\angle A'EC}{2} = \sqrt{2}$, 故 $OO_2 = EO_2 \cdot$

$\tan \frac{\angle A'EC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$,

则 $OC^2 = OO_2^2 + CO_2^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 2$,

则四面体 $A'BCD$ 外接球的表面积为 $4\pi \times 2 = 8\pi$, 故 D 正确.



故选 ABD.

11. AC 突破点 ▶ 函数奇偶性、周期性的应用

【解析】由 $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$ 知, $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故

A 正确; $f\left(\frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

故 B 错误; 奇函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 且 $f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调递增, 由 $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$

知, $f(x)$ 是周期为 4 的函数, 所以 $f(x)$ 在区间 $[2023, 2025]$ 上单调递增, 故 C 正确; 由 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对

称, $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 且 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单

调递增知, 方程 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 在 $[-1, 1]$ 上

有一根为 $\frac{2}{3}$, 再结合对称性可得 $f(x) =$

$\frac{\sqrt{3}}{3}$ 在 $[1, 3]$ 上有一根为 $\frac{4}{3}$, 则在一个周

期内 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 有两根, 故 $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

在 $[0, 201]$ 上所有根的和为 $2 \times (1+5+$

$9+\dots+201) - \left(202 - \frac{2}{3}\right) = 10100 \frac{2}{3}$, 故

D 错误. 故选 AC.

12. 9 考查点 ▶ 导数的几何意义、基本不等式

【解析】设切点坐标为 (x_0, y_0) ,

因为曲线 $y = \ln(x+b)$, 则 $y' = \frac{1}{x+b}$, 直线

$y = x - a$ 的斜率为 1, 所以 $\frac{1}{x_0+b} = 1$, 又因

为 $y_0 = x_0 - a = \ln(x_0+b) = \ln 1 = 0$, 所以

$x_0 = a$, 所以 $a+b=1$.

因为 a, b 为正实数,

所以 $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b} \right) = 1 + \frac{4a}{b} + \frac{b}{a} + 4 \geq$

$2\sqrt{\frac{4a}{b} \times \frac{b}{a}} + 5 = 9$,

当且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$, 即 $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$ 时取

等号, 故 $\frac{1}{a} + \frac{4}{b}$ 的最小值为 9.

13. 3 考查点 ▶ 动点轨迹问题、抛物线定



义的应用

【解析】设 $M(x, y)$, 因为点 M 满足

$$|MA| = \frac{1}{2}|MB|, \text{ 所以 } \sqrt{(x-5)^2+y^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(x-8)^2+y^2},$$

两边平方整理得 $(x-4)^2+y^2=4$,

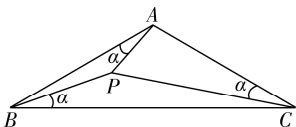
即点 M 的轨迹为圆心坐标为 $(4, 0)$, 半径为 2 的圆,

则 $|NF|+|MN| \geq 4+1-2=3$, 当且仅当 N, F, M 三点共线, 且点 M 的坐标为 $(2, 0)$ 时, 等号成立.

故 $|NF|+|MN|$ 的最小值是 3.

14. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ 考查点 ▶ 正弦定理、余弦定理解三角形

【解析】因为 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 1, 1, $\sqrt{3}$, 不妨设 $AB=1, AC=1, BC=\sqrt{3}$, 如图,



由余弦定理得 $\cos \angle BAC = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2 \times AB \times AC} = \frac{1+1-3}{2} = -\frac{1}{2}$, 得

$\angle BAC = 120^\circ$, 故 $\angle ABC = 30^\circ, \angle ACB = 30^\circ$. 在 $\triangle ABP$ 中, $\angle APB = 180^\circ - \alpha - (30^\circ - \alpha) = 150^\circ$, 由正弦定理得 $\frac{BP}{\sin \alpha} =$

$\frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, 则 $BP = 2 \sin \alpha$. 在

$\triangle PBC$ 中, $\angle CPB = 180^\circ - \alpha - (30^\circ - \alpha) = 150^\circ$, 由正弦定理得 $\frac{BP}{\sin(30^\circ - \alpha)} =$

$\frac{BC}{\sin \angle CPB} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$, 则 $2 \sin \alpha =$

$2\sqrt{3} \sin(30^\circ - \alpha)$,

则 $\sin \alpha = \sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha \right)$, 得

$\frac{5}{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha$, 故 $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$.

15. 考查点 ▶ 由递推关系证明数列是等差数列、求等差数列前 n 项和

(1) 【证明】 $\because 2S_n - a_n = n^2, \therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} - a_{n-1} = (n-1)^2$,

两式相减得 $2S_n - a_n - (2S_{n-1} - a_{n-1}) = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$,

又 $\because 2S_n - a_n - (2S_{n-1} - a_{n-1}) = 2S_n - 2S_{n-1} - a_n + a_{n-1} = a_n + a_{n-1}$,

$\therefore a_n + a_{n-1} = 2n-1$,



$$\therefore (a_{n+1} + a_n) - (a_n + a_{n-1}) = [2(n+1) - 1] - (2n-1) = 2, \text{ 且 } a_2 + a_1 = 3,$$

\therefore 数列 $\{a_{n+1} + a_n\}$ 是首项为 3, 公差为 2 的等差数列.

(2) 【解】由 (1) 知 $a_n + a_{n-1} = 2n - 1 (n \geq 2)$,

$$\therefore S_{20} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots + (a_{19} + a_{20}) = 3 + 7 + 11 + \cdots + 39 = \frac{10 \times (3 + 39)}{2} = 210.$$

16. 考查点 ▶ 证明线面垂直、面面角的向量求法

(1) 【证明】因为三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱, 所以 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 又 $AC \subset$ 平面 ABC , 所以 $AC \perp AA_1$.

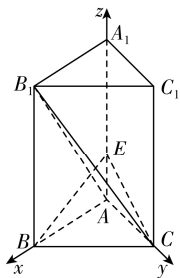
因为 $AB \perp AC, AB \cap AA_1 = A, AB, AA_1 \subset$ 平面 BAA_1B_1 ,

所以 $AC \perp$ 平面 BAA_1B_1 , 因为 $BE \subset$ 平面 BAA_1B_1 , 所以 $AC \perp BE$,

又因为 $BE \perp AB_1, AC \cap AB_1 = A, AC, AB_1 \subset$ 平面 AB_1C ,

所以 $BE \perp$ 平面 AB_1C .

(2) 【解】 AB, AC, AA_1 两两垂直, 以 A 为坐标原点, AB, AC, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,



则 $A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(0, 2, 0), B_1(2, 0, 4)$,

设 $E(0, 0, t)$, 则 $\overrightarrow{BE} = (-2, 0, t), \overrightarrow{AB_1} = (2, 0, 4)$,

因为 $BE \perp AB_1$, 所以 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AB_1} = -2 \times 2 + t \times 4 = 0$, 解得 $t = 1$,

所以 $E(0, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{CE} = (0, -2, 1), \overrightarrow{CB} = (2, -2, 0)$.

设平面 CBE 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CE} = -2y + z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CB} = 2x - 2y = 0, \end{cases} \text{ 令 } y = 1, \text{ 则 } x = 1, z = 2,$$

所以平面 CBE 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 1, 2)$.

又平面 ABE 的一个法向量为 $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$,

设平面 CBE 与平面 ABE 的夹角为 θ ,

$$\text{则 } \cos \theta = |\cos \langle \vec{AC}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\vec{AC} \cdot \vec{n}|}{|\vec{AC}| \cdot |\vec{n}|} =$$

$$\frac{2}{2 \times \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6},$$

所以平面 CBE 与平面 ABE 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

17. 考查点 ▶ 利用导数研究函数的零点问题、利用导数证明不等式

$$(1) \text{【解】} f'(x) = a(x-1)(x-3),$$

因为 $a > 0$, 所以当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

所以 $f(1) = 0$ 或 $f(3) = 0$ 时, $f(x)$ 有两个零点,

解得 $a = 3$ 或 $a = -1$ (舍), 故 $a = 3$.

$$(2) \text{【证明】} x \in (1, 3) \text{ 时, } \ln(3-x) < \ln 2 < 1,$$

结合函数的单调性可知, 当 $2 \leq x < 3$ 时, $\ln(3-x) \leq 0$, $f(x) > -4$, $f(\ln(3-x)) \leq -4$,

此时不等式 $f(\ln(3-x)) < f(x)$ 成立.

下面证明 $1 < x < 2$ 时的情况.

设 $0 < x_0 < 1$, 满足 $f(x) = f(x_0)$,

则原不等式等价于 $f(\ln(3-x)) < f(x_0) \Leftrightarrow \ln(3-x) < x_0$,

考虑到三次函数图象极值点附近的非对称性,

$$\text{令 } h(x) = f(2-x) - f(x) = -2x^3 + 6x^2 - 6x + 2 \quad (1 < x < 2), \text{ 则 } h'(x) = -6x^2 + 12x - 6 = -6(x-1)^2 < 0,$$

故 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 则 $h(x) < h(1) = 0$, 故当 $1 < x < 2$ 时, $f(2-x) < f(x) = f(x_0)$, 则 $x_0 > 2-x$.

$$\text{令 } g(x) = \ln x - x + 1 \quad (1 < x < 2),$$

当 $1 < x < 2$ 时, $g'(x) = \frac{1-x}{x} < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减,

所以 $g(x) < g(1) = 0$, 则当 $1 < x < 2$ 时, $\ln x < x-1$, 又 $3-x \in (1, 2)$, 所以 $\ln(3-x) < 2-x < x_0$,

故原不等式得证.

18. 突破点 ▶ 椭圆的标准方程、直线与椭圆的位置关系

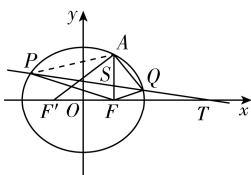
$$(1) \text{【解】由 } \triangle AFF' \text{ 的面积为 } \frac{3}{2}, \text{ 得 } \frac{1}{2} \times 2c \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \text{ 解得 } c = 1, \text{ 所以 } a^2 - b^2 = 1 \text{ ①.}$$



因为点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上, 所以 $\frac{1^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{b^2} = 1$ ②.

联立①②解得 $\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 3, \end{cases}$ 所以椭圆 C 的标

准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.



(2) ①【证明】设 $Q(x_1, y_1), P(x_2, y_2)$, 易知直线 l 的斜率不为 0, 设 $l: x = ty + 4$,

$$\text{联立} \begin{cases} x = ty + 4, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

消去 x 得 $(3t^2 + 4)y^2 + 24ty + 36 = 0$, 直线 l 与线段 AF 相交于 S , 与椭圆 C 交于 P, Q 两点, 则 $t < 0$ 且 $\Delta = (24t)^2 - 4 \times 36 \times (3t^2 + 4) > 0$, 得 $t < -2$,

$$\text{所以 } y_1 + y_2 = \frac{-24t}{3t^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{36}{3t^2 + 4},$$

$$\begin{aligned} \text{因为 } k_{QF} + k_{PF} &= \frac{y_1}{x_1 - 1} + \frac{y_2}{x_2 - 1} = \frac{y_1}{ty_1 + 3} + \frac{y_2}{ty_2 + 3} \\ &= \frac{2ty_1 y_2 + 3(y_1 + y_2)}{(ty_1 + 3)(ty_2 + 3)} \\ &= \frac{2t \cdot \frac{36}{3t^2 + 4} + 3 \cdot \frac{-24t}{3t^2 + 4}}{(ty_1 + 3)(ty_2 + 3)} = 0, \end{aligned}$$

所以 $\angle PFS = \angle QFS$.

②【解】连接 AP , 由 $S_{\triangle AQS} = S_{\triangle PFS}$ 得

$$|QS| \cdot |AS| = |PS| \cdot |FS|, \text{ 即 } \frac{|AS|}{|FS|} = \frac{|PS|}{|QS|}, \text{ 又 } \angle ASP = \angle FSQ,$$

所以 $\triangle ASP \sim \triangle FSQ$,

所以 $\angle PAF = \angle QFS$, 又 $\angle PFS = \angle QFS$,

所以 $\angle PAF = \angle PFA$, 所以 $|PA| = |PF|$,

所以 P 为线段 AF 的中垂线 $y = \frac{3}{4}$ 与椭圆 C 的交点.

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{3}{4}, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} x = \frac{\sqrt{13}}{2}, \\ y = \frac{3}{4} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{13}}{2}, \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

故点 P 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{3}{4}\right)$ 或



$$\left(-\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{3}{4}\right).$$

19. 突破点 ▶ 不同进制数的互化、集合新定义

【解】(1) 由题知, $f(3)$ 表示集合 $\{4, 5, 6\}$ 中“Z20 数”的个数, $f(4)$ 表示集合 $\{5, 6, 7, 8\}$ 中“Z20 数”的个数,

由于 $4 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, $1 + 0 + 0 = 1 \neq 3$, 故 4 不是“Z20 数”,

由于 $5 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, $1 + 0 + 1 = 2 \neq 3$, 故 5 不是“Z20 数”,

由于 $6 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, $1 + 1 + 0 = 2 \neq 3$, 故 6 不是“Z20 数”,

故 $f(3) = 0$,

由于 $7 = 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, $1 + 1 + 1 = 3$, 故 7 是“Z20 数”,

由于 $8 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$, $1 + 0 + 0 + 0 = 1 \neq 3$, 故 8 不是“Z20 数”,

故 $f(4) = 1$.

(2) $f(2^n + 2)$ ($n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$) 表示集合 $\{2^n + 3, 2^n + 4, \dots, 2^{n+1} + 4\}$ 中在二进制表示下恰有 3 个 1 的所有元素的个数.

因为 $\{2^n + 3, 2^n + 4, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ 中在二进制表示下恰有 3 个 1 的数都是从右起第 $(n+1)$ 位数字是 1, 再在后面 n 位中找两个位置放 1, 其余位置放 0 而得到的, 故该集合中有 C_n^2 个“Z20 数”.

又 $2^{n+1}, 2^{n+1} + 1, 2^{n+1} + 2, 2^{n+1} + 3, 2^{n+1} + 4$ 的二进制表示分别为

$$(100 \cdots 0000)_2, (100 \cdots 0001)_2,$$

$$(100 \cdots 0010)_2, (100 \cdots 0011)_2,$$

$$(100 \cdots 0100)_2,$$

其中只有 $2^{n+1} + 3$ 的二进制表示中恰有 3 个 1,

所以当 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $f(2^n + 2) = C_n^2 + 1$.

(3) 设 T 表示所有的“Z20 数”组成的集合, 因为在二进制表示下,

在 $(n+1)$ 的二进制表示的最右边的数字后面添加一个 0, 恰为 $2(n+1)$ 在二进制下表示的数,

故 $(n+1)$ 与 $2(n+1)$ 同时属于 T , 或者同时不属于 T ,

集合 $\{n+2, n+3, \dots, 2(n+1)\}$ 比 $\{n+1, n+2, \dots, 2n\}$ 恰少了一个 $(n+1)$, 多了 $(2n+1), (2n+2)$ 两个数, 因此 $f(n+1) = \begin{cases} f(n), & 2n+1 \notin T, \\ f(n)+1, & 2n+1 \in T, \end{cases}$

由 $f(1) = 0$, 且对任意正整数 s , 都存在正整数 n 使得 $f(n) \geq s$,

结合递推关系可知存在正整数 n 使



得 $f(n) = s$.

当 $s = 1$ 时, 易知 $f(4) = f(5) = 1$, 故 $s = 1$ 不符合题意.

当 $s \geq 2, s \in \mathbf{N}^*$ 时, 假设恰有一个 $n (n \geq 6, n \in \mathbf{N}^*)$ 使得 $f(n) = s$, 则 $f(n-1) = s-1, f(n+1) = s+1$,

当且仅当 $2n-1 \in T, 2n+1 \in T$ 时成立,

由二进制表示知 n 必有 $2^k + 2 (k \geq 2, k \in \mathbf{N}^*)$ 的形式, 故 $s = f(n) = f(2^k + 2) = C_k^2 + 1 (k \geq 2, k \in \mathbf{N}^*)$.

故使得 $f(n) = s$ 只有唯一解的全体 s 由正整数 $C_k^2 + 1 (k \geq 2, k \in \mathbf{N}^*)$ 给出, 且唯一解为 $n = 2^k + 2 (k \geq 2, k \in \mathbf{N}^*)$.

方法总结

求解以集合为背景的新定义问题的策略

(1) 紧扣新定义, 首先分析新定义的特点, 把新定义的本质弄清楚, 应用到具体的解题过程中.

(2) 用好集合的性质, 解题时要善于从试题中发现可以使用的集合的性质.

(3) 有公共元素的集合问题可考虑使用 Venn 图法.

综合自测二

刷

综合

1. D **考查点** ▶ 集合的交集运算、分式不等式的解法

【解析】因为 $\frac{4+2x}{2-x} \geq 0 \Rightarrow$

$\begin{cases} (4+2x)(2-x) \geq 0, \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow -2 \leq x < 2$, 所以

$B = \{x | -2 \leq x < 2\}$, 所以 $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1\}$. 故选 D.

2. A **考查点** ▶ 复数的除法运算、i 的周期性

【解析】因为 $\bar{z} = \frac{2+i}{i^{2025}} = \frac{2+i}{(i^4)^{506} \cdot i} = \frac{2+i}{i} =$

$\frac{(2+i)i}{i \cdot i} = -(-1+2i) = 1-2i$, 所以 $z = 1+2i$,

z 在复平面内对应的点为 $(1, 2)$, 位于第一象限. 故选 A.

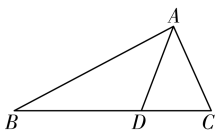
3. D **考查点** ▶ 向量的线性运算、平面向量基本定理

【解析】根据题意, AD 为 $\angle BAC$ 的平分线, $AB = 2AC$, 则点 D 到 AB, AC 的距离相

等, 得 $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = 2$, 即 $BD = 2CD$, 所

以 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}$, 所以 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) =$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, 即 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{2}{3}\mathbf{b}$. 故选 D.



4. D 考查点 ▶ 探求命题为真的充要条件、根据函数的单调性求参数值、函数奇偶性的应用

【解析】 因为 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 则 $f(0) = 0$, 且 $x > 0$ 时, $f(x) = -x^2 + ax + 5 - a$, 若 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递增,

$$\text{则} \begin{cases} 5-a \geq 0, \\ \frac{a}{2} \geq 2, \end{cases} \text{解得 } 4 \leq a \leq 5, \text{故“} f(x) \text{在} [-2, 2] \text{上单调递增”的充要条件是“} 4 \leq a \leq 5 \text{”. 故选 D.}$$

5. D 考查点 ▶ 统计中的数字特征

【解析】 甲球员 5 场篮球比赛的得分可以是 20, 22, 28, 30, 30, 故 A, B 错误; 乙球员 5 场篮球比赛的得分可以是 20, 25, 25, 25, 30, 故 C 错误; 对 D, 设乙球员 5 场篮球比赛的得分为 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , 且 $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, 因为 5 个数据有 1 个是 30, 平均数是 25, 方差是 10, 所以

$$\frac{1}{5} [(x_1 - 25)^2 + (x_2 - 25)^2 + (x_3 - 25)^2 + (x_4 - 25)^2 + (x_5 - 25)^2] = 10, \text{所以}$$

$$(x_1 - 25)^2 + (x_2 - 25)^2 + (x_3 - 25)^2 + (x_4 - 25)^2 + (x_5 - 25)^2 = 50, \text{若 } x_4 > 30, \text{则}$$

$$x_5 > 30, \text{所以 } (x_1 - 25)^2 + (x_2 - 25)^2 + (x_3 - 25)^2 + (x_4 - 25)^2 + (x_5 - 25)^2 > 50 \text{ 矛盾, 所以 } x_5 = 30, x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 30, \text{且}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25 \times 5 - 30 = 95, \text{又 } 5 \times 25\% = 1.25, \text{所以乙球员连续 5 场比赛得分的下四分位数为 } x_2, \text{因为 } (x_1 - 25)^2 +$$

$$(x_2 - 25)^2 + (x_3 - 25)^2 + (x_4 - 25)^2 = 25, \text{所以 } x_1 \geq 20, \text{若 } x_1 = 20, \text{则 } x_2 = x_3 = x_4 = 25, \text{所以 } x_2 > 21, \text{若 } x_1 = 21, \text{则 } x_2 \geq 22, \text{所以}$$

$$x_2 > 21, \text{若 } x_1 \geq 22, \text{则 } x_2 \geq 22, \text{综上所述, 乙球员连续 5 场比赛得分的下四分位数大于 21, 故 D 正确.}$$

$$\text{故选 D.}$$

6. C 考查点 ▶ 抛物线的焦点弦问题

【解析】 由题意知, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 显然直线 AB 的斜率不为 0, 设直线 AB 的方程为

$$x = my + \frac{p}{2}, \text{由} \begin{cases} x = my + \frac{p}{2}, \\ y^2 = 2px \end{cases} \text{得, } y^2 - 2pmy - p^2 = 0, \text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{则 } y_1 + y_2 = 2pm, y_1 y_2 = -p^2. \text{因为直线 } OA, OB \text{ 斜率之和为 2, 所以 } \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = 2, \text{即 } y_1 x_2 + y_2 x_1 =$$



$$2x_1x_2 \Rightarrow y_1 \left(my_2 + \frac{p}{2} \right) + y_2 \left(my_1 + \frac{p}{2} \right) =$$

$$2 \frac{y_1^2}{2p} \cdot \frac{y_2^2}{2p} \Rightarrow 2my_1y_2 + \frac{p}{2}(y_1 + y_2) = \frac{y_1^2y_2^2}{2p^2} \Rightarrow$$

$$-2mp^2 + mp^2 = \frac{p^2}{2} \Rightarrow m = -\frac{1}{2}, \text{ 所以直线 } AB$$

的斜率为-2. 故选 C.

一题多解

方法一: 由题意知,

 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 显然直线 AB 的斜率存在, 设直线 AB 的方程为 $y = k\left(x - \frac{p}{2}\right)$, 由

$$\begin{cases} y = k\left(x - \frac{p}{2}\right) \\ y^2 = 2px \end{cases} \text{ 得, } k^2x^2 - (k^2 + 2)px +$$

$$\frac{k^2p^2}{4} = 0, \text{ 设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 +$$

$$x_2 = \frac{(k^2 + 2)p}{k^2}, x_1x_2 = \frac{p^2}{4}. \text{ 因为直线 } OA, OB$$

斜率之和为 2, 所以 $\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = 2$, 即 $y_1x_2 +$

$$y_2x_1 = 2x_1x_2 \Rightarrow kx_2\left(x_1 - \frac{p}{2}\right) + kx_1\left(x_2 - \frac{p}{2}\right) = 2x_1x_2 \Rightarrow 2kx_1x_2 - \frac{kp}{2}(x_1 + x_2) = 2x_1x_2 \Rightarrow$$

$$2k \frac{p^2}{4} - \frac{kp}{2} \cdot \frac{(k^2 + 2)p}{k^2} = \frac{p^2}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} - \frac{k^2 + 2}{2k} =$$

$$\frac{1}{2} \Rightarrow k = -2, \text{ 所以直线 } AB \text{ 的斜率为 } -2. \text{ 故选 C.}$$

方法二: 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 因为直线 AB 过焦点 F , 根据抛物线焦点弦的性质可知 $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}, y_1y_2 = -p^2$. 直线 OA, OB 斜率之和为 2, 即 $\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = 2$, 由于 $x_1 =$

$$\frac{y_1^2}{2p}, x_2 = \frac{y_2^2}{2p}, \text{ 所以 } \frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} = \frac{2p}{y_1} + \frac{2p}{y_2} =$$

$$\frac{2p(y_1 + y_2)}{y_1y_2}. \text{ 又因为 } y_1y_2 = -p^2, \text{ 所以}$$

$$\frac{2p(y_1 + y_2)}{y_1y_2} = \frac{2p(y_1 + y_2)}{-p^2} = \frac{2(y_1 + y_2)}{-p} = 2,$$

进而推出 $y_1 + y_2 = -p$, 所以直线 AB 的斜

$$\text{率为 } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{2p} - \frac{y_1^2}{2p}} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{(y_2 + y_1)(y_2 - y_1)}{2p}} =$$

$$\frac{2p}{y_2 + y_1} = \frac{2p}{-p} = -2. \text{ 故选 C.}$$

7. B 考查点 函数性质的综合应用

【解析】由 $f(x+4) + f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = -f(x+4)$, 则 $f(x+4) = -f(x+8)$, 所以 $f(x) = f(x+8)$, 即 $f(x)$ 是周期为 8 的函



数,由 $f(x+2)$ 为奇函数,得 $f(-x+2) = -f(x+2)$, 则 $f(-x) = -f(x+4)$, 所以 $f(-x) = f(x)$, 即 $f(x)$ 是偶函数, 由 $f(1) = f(-1) = 1$, 得 $f(3) = f(5) = -1, f(7) = 1$, 结合周期性, 对于 $k \in \mathbf{N}^*$, $f(2k-1)$ 依次为 $1, -1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, \dots$,

所以 $f(2k-1)$ 是周期为 4 的函数, 则 $f(1) + 2f(3) + 3f(5) + 4f(7) = 1 - 2 - 3 + 4 = 0$,

$5f(9) + 6f(11) + 7f(13) + 8f(15) = 5 - 6 - 7 + 8 = 0, \dots$,

$13f(25) + 14f(27) + 15f(29) + 16f(31) = 13 - 14 - 15 + 16 = 0$,

$17f(33) + 18f(35) + 19f(37) + 20f(39) = 17 - 18 - 19 + 20 = 0, \dots$, 综上, 易知 $n < 19$

时, $\sum_{k=1}^n kf(2k-1) > -20, n = 19$ 时,

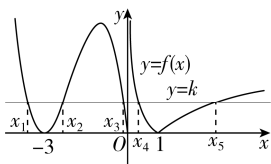
$\sum_{k=1}^n kf(2k-1) = -20$. 所以正整数 n 的最小值为 19. 故选 B.

8. D **考查点** ▶ 分段函数的性质及应用、函数图象的应用、根据函数零点的个数求参数范围、用导数判断或证明已知函数的单调性

【解析】 因为当 $x \leq 0$ 时, $f(x) = -x(x+3)^2 = -x^3 - 6x^2 - 9x$, 所以 $f'(x) = -3x^2 - 12x - 9 = -3(x+3)(x+1)$. 当 $x \in (-\infty, -3)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (-3, -1)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减. 所以 $f(x)_{\text{极小值}} = f(-3) = 0$, $f(x)_{\text{极大值}} = f(-1) = 4$.

当 $x > 0$ 时, $f(x) = |\ln x| = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$

所以函数在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 作出函数的图象, 如图所示.



由此可得 $0 < k < 4$, 当 $x \leq 0$ 时, 令 $-x(x+3)^2 = k$, 解得 $x = -4$ 或 $x = -1$, 所以 $-4 < x_1 < -3 < x_2 < -1 < x_3 < 0 < x_4 < 1 < x_5$, 又 $|\ln x_4| = |\ln x_5|$, 所以 $\ln x_4 + \ln x_5 = \ln x_4 x_5 = 0$, 所以 $x_4 x_5 = 1$.

由题意可得 x_1, x_2, x_3 是方程 $k = -x^3 - 6x^2 - 9x$, 即 $x^3 + 6x^2 + 9x + k = 0$ 的三个根, 所以 $x^3 + 6x^2 + 9x + k = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, 即 $x^3 + 6x^2 + 9x + k = x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - x_1x_2x_3$, 所以 $k = -x_1x_2x_3$, 即 $x_1x_2x_3 = -k \in (-4, 0)$, 所以



$$\frac{x_1 x_2 x_3}{x_4 x_5} = x_1 x_2 x_3 = -k \in (-4, 0). \text{ 故选 D.}$$

9. AD **考查点** ▶ 正弦(型)函数的对称轴及单调性、函数图象变换、三角恒等变换

【解析】对于 A, $f(x) = \cos^2 2x + \frac{1}{2} \sin 4x -$

$$\frac{1}{2} = \frac{1 + \cos 4x}{2} + \frac{1}{2} \sin 4x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin 4x +$$

$$\frac{1}{2} \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right), \text{ 函数 } f(x) \text{ 的}$$

最小正周期 $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $x \in \left(-\frac{3\pi}{16}, \frac{\pi}{8}\right)$, 所以 $4x +$

$\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$, 而函数 $y = \sin x$ 在区间

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 上不单调, 故函数 $f(x)$ 在区

间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 上不单调, 故 B 错误;

对于 C, 由 $4x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbf{Z}), \text{ 不可能取到 } x = \frac{\pi}{8},$$

故 C 错误;

对于 D, 由 $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 4x$ 的图象向左平移

$\frac{\pi}{16}$ 个单位长度, 得 $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left[4 \left(x + \right. \right.$

$$\left. \frac{\pi}{16} \right) \Big] = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) \text{ 的图象, 故 D}$$

正确.

故选 AD.

10. ABD **考查点** ▶ 求圆的弦长、椭圆的焦点三角形问题

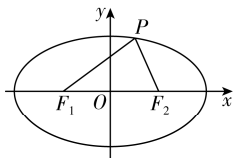
【解析】 $a = 2, b = \sqrt{2}, c = \sqrt{2}$, 记 $|PF_2| = t$,

则 $|PF_1| = 4 - t$, 因为 $PF_1 \perp PF_2$, 所以

$(-t + 4)^2 + t^2 = 8$, 解得 $t = 2$, 所以

$\triangle F_1PF_2$ 的面积为 $\frac{1}{2} |PF_1| |PF_2| =$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, \text{ 故 A 正确.}$$



若 $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$, 则 $|PF_2| = |PF_1| = 2$,

所以 $P(0, \sqrt{2}), F_2(\sqrt{2}, 0)$, 所以直线

PF_2 的方程为 $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} = 1$, 即 $x + y - \sqrt{2} =$

0, 故圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 的圆心到直线 PF_2

距离 $d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$, 所以直线 PF_2 被圆 O

截得的弦长为 $2\sqrt{4 - d^2} = 2\sqrt{4 - 1} =$

$2\sqrt{3}$, 故 B 正确.

由椭圆的性质可知 $a-c \leq |F_1P| \leq a+c$,
即 $2-\sqrt{2} \leq |F_1P| \leq 2+\sqrt{2}$, 若 $\triangle F_1PF_2$
是以 P 为顶点的等腰三角形, 则点 P 位于
椭圆的上顶点或下顶点, 满足条件的
点 P 有 2 个; 若 $\triangle F_1PF_2$ 是以 F_1 为顶
点的等腰三角形, 则 $|F_1P| = |F_1F_2| =$
 $2\sqrt{2}$, 则满足条件的点 P 有 2 个; 同理,
若 $\triangle F_1PF_2$ 是以 F_2 为顶点的等腰三角
形, 满足条件的点 P 有 2 个, 故使得
 $\triangle F_1PF_2$ 为等腰三角形的点 P 共 6 个,
故 C 错误.

设 $P(2, 0), M(x_1, y_1), N(-x_1, -y_1),$
 $R\left(\frac{2-x_1}{2}, \frac{-y_1}{2}\right), k_{PM} = \frac{y_1}{x_1-2}, k_{MR} =$
 $\frac{y_1 + \frac{y_1}{2}}{x_1 - \frac{2-x_1}{2}} = \frac{3y_1}{3x_1-2}$, 因为 $k_{PM} = -k_{MR}$, 所以
 $x_1 = \frac{4}{3}$, 所以点 R 的横坐标为 $\frac{2-x_1}{2} =$
 $2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

11. BCD **考查点** ▶ 用导数判断或证明已知函数的单调性、数学归纳法、数列新定义

【解析】 对于 A, 若 $a_1 \in (0, 1), a_{n+1} =$
 $2a_n - \sin a_n$, 取 $a_1 = \frac{19}{20}$, 由 $0 < \frac{19}{20} < 1 < \frac{\pi}{3}$,
则 $\sin \frac{19}{20} < \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $a_2 = 2a_1 -$
 $\sin a_1 = \frac{19}{10} - \sin \frac{19}{20} > \frac{19}{10} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{19-5\sqrt{3}}{10} >$
 1 , 故 A 错误.

对于 B, 若 $a_1 \in (0, 1), a_{n+1} = \ln(2-a_n) +$
 a_n , 设 $f(x) = \ln(2-x) + x, x \in (0, 1)$,
则 $f'(x) = -\frac{1}{2-x} + 1 = \frac{1}{x-2} + 1 = \frac{x-1}{x-2} > 0$,
故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 所以
 $f(0) < f(x) < f(1)$, 即 $\ln 2 < f(x) < 1$, 故任
意 $a_n \in (0, 1)$, 则 $a_{n+1} \in (\ln 2, 1)$, 由
 $a_1 \in (0, 1)$, 依次递推可知 $a_n \in (0, 1)$,
故数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_n| < 1$, 则数列 $\{a_n\}$
为“H 数列”, 故 B 正确.

对于 C, 首先证明 $\forall a, b \in (-1, 1)$, 都有
 $\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$. 证明: 对 $\forall a, b \in (-1, 1)$, 则
有 $\frac{a+b}{1+ab} - 1 = \frac{a+b-1-ab}{1+ab} = \frac{(a-1)(1-b)}{1+ab} <$
 0 , 且 $\frac{a+b}{1+ab} - (-1) = \frac{a+b+1+ab}{1+ab} =$
 $\frac{(a+1)(b+1)}{1+ab} > 0$,



所以 $-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$, 即 $\left| \frac{a+b}{1+ab} \right| < 1$, 故由上

所证结论可知, 若无穷数列 A_k 为“ H 数列”, 则数列 A_k 中任意项 a_n , 都满足 $|a_n| < 1$, 则任意两项 a_m, a_n , 都有

$\left| \frac{a_m + a_n}{1 + a_m a_n} \right| < 1$. 依次类推可知经过任意

次 T 变换操作后, 新数列 A_{k+1} 仍为“ H 数列”, 故 C 正确.

对于 D, 由于每次 T 变换操作中都是增加一项, 删除两项, 所以对数列 $A_0: \frac{1}{2},$

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$ 经过一次 T 变换, 则项数

减少一项, 故对 $(n-1)$ 项的数列 A_0 可进行 $(n-2)$ 次 T 变换操作, 且最后数列 A_{n-2} 只剩下一项. 对于任意 $a, b \in (-1,$

$1)$, 定义运算 $a \odot b = \frac{a+b}{1+ab}$. 下面证明这种

运算满足交换律与结合律. 证明: 由

$a \odot b = \frac{a+b}{1+ab}$, 则 $b \odot a = \frac{b+a}{1+b \cdot a} = \frac{a+b}{1+ab}$, 所

以 $a \odot b = b \odot a$, 即该运算满足交换律,

由 $a \odot (b \odot c) = a \odot \frac{b+c}{1+bc} = \frac{a + \frac{b+c}{1+bc}}{1 + a \cdot \frac{b+c}{1+bc}} =$

$\frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$, 且 $(a \odot b) \odot c = \frac{a+b}{1+ab} \odot c =$

$\frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \frac{a+b}{1+ab} \cdot c} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$, 故 $a \odot (b \odot c) =$

$(a \odot b) \odot c$, 即该运算满足结合律, 由上所证结论可知, A_{n-2} 中的项与实施的 T 变换具体操作顺序无关, 不妨选择

$\left\{ \left[\left(\frac{1}{2} \odot \frac{1}{3} \right) \odot \frac{1}{4} \right] \odot \dots \right\} \odot \frac{1}{n}$ 的依

序操作过程求 A_{n-2} . 当 $n=3$ 时, $A_0: \frac{1}{2},$

$\frac{1}{3}$, 由 $\frac{1}{2} \odot \frac{1}{3} = \frac{5}{7}$, 得 $A_1: 1 - \frac{2}{7}$; 当 $n=$

4 时, $A_0: \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, 由 $\frac{1}{2} \odot \frac{1}{3} = \frac{5}{7},$

$\frac{1}{4} \odot \frac{5}{7} = \frac{9}{11}$, 得 $A_2: 1 - \frac{2}{11}$; 当 $n=5$ 时,

$A_0: \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, 由 $\frac{1}{2} \odot \frac{1}{3} = \frac{5}{7},$

$\frac{1}{4} \odot \frac{5}{7} = \frac{9}{11}, \frac{1}{5} \odot \frac{9}{11} = \frac{14}{16}$, 得 $A_3: 1 -$

$\frac{2}{16}$; 当 $n=6$ 时, $A_0: \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6},$

由 $\frac{1}{2} \odot \frac{1}{3} = \frac{5}{7}, \frac{1}{4} \odot \frac{5}{7} = \frac{9}{11}, \frac{1}{5} \odot$

$\frac{9}{11} = \frac{14}{16}, \frac{1}{6} \odot \frac{14}{16} = \frac{20}{22}$, 得 $A_4: 1 -$



$\frac{2}{22}; \dots\dots$. 由数列 $7 = \frac{3^2+3+2}{2}$, $11 = \frac{4^2+4+2}{2}$, $16 = \frac{5^2+5+2}{2}$, $22 = \frac{6^2+6+2}{2}$, 故

猜想: $A_{n-2}: 1 - \frac{2}{\frac{n^2+n+2}{2}} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2} (n > 2,$

$n \in \mathbf{N}^*)$. 记 b_{n-2} 为数列 A_{n-2} 中仅剩的一项 ($n > 2, n \in \mathbf{N}^*$), 设 $a_n = \frac{1}{n+1}$, 则由

题意可知数列 $\{b_k\}$ 满足 $b_1 = a_1 \odot a_2$, $b_{k+1} = b_k \odot a_{k+2}, k \in \mathbf{N}^*, k \leq n-2$.

下面用数学归纳法证明: $b_{n-2} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2}$

($n > 2, n \in \mathbf{N}^*$). (i) 当 $n = 3$ 时, $b_1 =$

$$a_1 \odot a_2 = \frac{1}{2} \odot \frac{1}{3} = \frac{5}{7}, \text{ 又 } \frac{3^2+3-2}{3^2+3+2} = \frac{10}{14} =$$

$$\frac{5}{7}, \text{ 故当 } n = 3 \text{ 时, } b_{n-2} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2} \text{ 成立;}$$

(ii) 假设当 $n = k (k \geq 3, k \in \mathbf{N}^*)$ 时,

$$b_{n-2} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2} (n > 2, n \in \mathbf{N}^*) \text{ 成立, 即}$$

$$b_{k-2} = \frac{k^2+k-2}{k^2+k+2}, \text{ 下面证明当 } n = k+1 \text{ 时,}$$

$$b_{n-2} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2} (n > 2, n \in \mathbf{N}^*) \text{ 也成立. 则}$$

$$\text{当 } n = k+1 \text{ 时, } b_{k+1-2} = b_{k-1} = b_{k-2} \odot a_k =$$

$$\frac{k^2+k-2}{k^2+k+2} \odot \frac{1}{k+1} = \frac{\frac{k^2+k-2}{k^2+k+2} + \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{k^2+k-2}{k^2+k+2} \cdot \frac{1}{k+1}}$$

$$= \frac{(k+1)(k^2+k-2) + k^2+k+2}{(k+1)(k^2+k+2) + k^2+k-2}$$

$$= \frac{(k+1)(k^2+k) - 2k + k^2 + k}{(k+1)(k^2+k) + 2k + k^2 + k}$$

$$= \frac{(k+1)^2 + k - 1}{(k+1)^2 + k + 3} = \frac{(k+1)^2 + k + 1 - 2}{(k+1)^2 + k + 1 + 2}, \text{ 故当}$$

$$n = k+1 \text{ 时, } b_{n-2} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2} (n > 2, n \in \mathbf{N}^*)$$

也成立, 得证. 综合 (i) (ii) 可得, 对

$$\text{任意 } n > 2, n \in \mathbf{N}^*, b_{n-2} = \frac{n^2+n-2}{n^2+n+2} \text{ 成立, 故}$$

D 正确.

故选 BCD.

12. $\frac{3}{4}$ 考查点 ▶ 和差角的正弦公式、正切

公式的应用、基本不等式求和的最小值

【解析】因为 $\sin \beta = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = 3\sin \alpha \cos(\alpha + \beta)$,

所以 $\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \cos(\alpha + \beta) \sin \alpha = 3\sin \alpha \cos(\alpha + \beta)$,

即 $\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha = 4\cos(\alpha + \beta) \sin \alpha$, 即 $\tan(\alpha + \beta) = 4\tan \alpha$.

$$\text{又 } \tan \beta = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan(\alpha + \beta)} =$$



$$\frac{3\tan \alpha}{1+4\tan^2 \alpha} = \frac{3}{\frac{1}{\tan \alpha} + 4\tan \alpha} \leq \frac{3}{4},$$

当且仅当 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ 时等号成立, 所以

$\tan \beta$ 的最大值是 $\frac{3}{4}$.

13. 330 考查点 ▶ 数字排列问题、求指定项的系数

【解析】 当个位数字为 0 时, 其他三个数位为 1, 2, 3 这三个数字任意排列, 有 $A_3^3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$ (种) 情况.

当个位数字为 2 时, 千位不能为 0, 所以千位有 2 种选择 (从 1, 3 中选), 百位从剩下的 2 个数字中选, 十位再从剩下的 1 个数字中选,

根据分步乘法计数原理, 共有 $2 \times C_2^1 = 2 \times 2 = 4$ (种) 情况.

所以 $n = 6 + 4 = 10$.

根据二项展开式的通项公式 $T_{r+1} = C_n^r a^{n-r} b^r$, 对于 $(1+x)^k$, 展开式中 x^3 项的系数为 C_k^3 ($k = 3, 4, \dots, 10$).

那么 $(1+x)^3 + (1+x)^4 + \dots + (1+x)^{10}$ 展开式中 x^3 项的系数为 $C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + \dots + C_{10}^3$.

由组合数的性质 $C_n^r + C_n^{r-1} = C_{n+1}^r$, 且 $C_3^3 = C_4^4$, 得 $C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 + \dots + C_{10}^3 = C_4^4 + C_4^3 + C_5^3 + \dots + C_{10}^3 = C_5^4 + C_5^3 + \dots + C_{10}^3 = \dots = C_{11}^4$.

可得 $C_{11}^4 = \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 330$.

14. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ 考查点 ▶ 证明线面垂直、利用正弦函数的有界性求最值

【解析】 因为 $BC \perp AA'$, $BC \perp AB$, $AB \cap AA' = A$, $AB, AA' \subset$ 平面 $ABB'A'$, 所以 $BC \perp$ 平面 $ABB'A'$, 因为 $BC \parallel$ 平面 α , $BC \subset$ 平面 $BCC'B'$, 且平面 $BCC'B' \cap$ 平面 $\alpha = B'C'$,

所以 $BC \parallel B'C'$, 又因为 $BB' \parallel CC'$, 所以四边形 $BCC'B'$ 为平行四边形, 所以 $BC = B'C'$, 同理可得, $AD \parallel A'D'$, 且 $AD = A'D'$, 又因为 $AD \parallel BC$, 且 $AD = BC$,

所以多面体 $ABB'A'-DCC'D'$ 为直四棱柱.

关键点

如图, 作 $BM \parallel A'B'$ 交 AA' 于点 M , $A'B' \subset$ 平面 $A'B'C'D'$, $BM \not\subset$ 平面 $A'B'C'D'$, 则 $BM \parallel$ 平面 $A'B'C'D'$, 因为 $BC \parallel$ 平面 $A'B'C'D'$, 且 $BC \cap BM = B$, $BC, BM \subset$ 平面 BCM , 所以平面 $BCM \parallel$ 平面 $A'B'C'D'$, 又因为 $BC \perp$ 平面 $ABB'A'$, 所以设 $\angle ABM = \theta$, 作 $AN \perp A'B'$ 交 $A'B'$ 于点 N , 所以 $BC \perp AN$, 即 $B'C' \perp AN$, 又 $A'B' \cap B'C' = B'$, $A'B', B'C' \subset$ 平面 $A'B'C'D'$, 所以 $AN \perp$ 平面 $A'B'C'D'$, 所以 $\angle AA'N$ 就是直线 AA' 与平面 α 所成角, 即

(2) 由 (1) 得 $\angle BAC = \angle ABC = \angle ACB = \frac{\pi}{3}$,



因为 $a = 2R \cdot \sin \angle BAC = 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} =$

2, 所以 $a = b = c = 2$,

所以在 $\triangle BCD$ 中, $BC = BD = 2$,

$$\angle CBD = \frac{2\pi}{3},$$

所以 $CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2 \cdot BD \cdot$

$$BC \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = 12, \text{ 所以 } CD = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{所以 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times BC \times BD \times \sin \angle CBD =$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

设 $\triangle BCD$ 的内心为 P , 内切圆半径为 r ,

$$\text{则 } S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BCP} + S_{\triangle BDP} + S_{\triangle CDP} = \frac{1}{2} (BC + BD + CD) r,$$

$$\text{所以 } r = \frac{2S_{\triangle BCD}}{BC + BD + CD} = \frac{2\sqrt{3}}{4 + 2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} - 3.$$

16. 考查点 ▶ 利用导数研究函数的极值、利用导数研究不等式恒成立问题

【解】(1) 函数 $f(x) = xe^x$ 的定义域为 \mathbf{R} , 求导得 $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$,

令 $f'(x) > 0$, 解得 $x > -1$, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增,

令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < -1$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减,

所以函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极小

值 $f(-1) = -\frac{1}{e}$, 无极大值.

(2) 不等式 $f(x) - \ln x + ax \geq 1$ 恒成立, 即 $xe^x - \ln x + ax - 1 \geq 0, x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

不等式等价于 $a \geq -e^x + \frac{1 + \ln x}{x}, x \in (0, +\infty)$ 恒成立,

令 $g(x) = -e^x + \frac{1 + \ln x}{x}, x > 0$ (**关键: 由恒成立的不等式分离参数, 构造函数**),

$$\text{则 } g'(x) = -e^x + \frac{\frac{1}{x} \cdot x - (1 + \ln x)}{x^2} = -e^x + \frac{-\ln x}{x^2} = -\frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2},$$

令 $h(x) = x^2 e^x + \ln x, x > 0$,

则 $h'(x) = (2x + x^2) e^x + \frac{1}{x} > 0$, 函数

$h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $h\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\frac{1}{e}-2} - 1 < 0, h(1) = e > 0$, 则

存在唯一 $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使得 $h(x_0) =$

$$x_0^2 e^{x_0} + \ln x_0 = 0,$$



则 $x_0 e^{x_0} = \frac{1}{x_0} \cdot \ln \frac{1}{x_0}$, 即 $x_0 e^{x_0} = \ln \frac{1}{x_0} \cdot$

$e^{\ln \frac{1}{x_0}}$, 于是 $f(x_0) = f\left(\ln \frac{1}{x_0}\right)$,

由(1)知, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $x_0 = \ln \frac{1}{x_0} = -\ln x_0$.

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0, g'(x) > 0$, 则函数 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0, g'(x) < 0$, 则函数 $g(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减,

因此 $g(x)_{\max} = g(x_0) = -e^{x_0} + \frac{1 + \ln x_0}{x_0} =$

$-e^{-\ln x_0} + \frac{1 - x_0}{x_0} = -1$, 则 $a \geq -1$,

所以实数 a 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

17. 考查点 ▶ 二面角的向量求法、线面平行的性质

(1) 【证明】在题图①中, $BC = 2$,

$\angle BAC = 30^\circ$, 所以 $AB = 4, AC = 2\sqrt{3}$,

因为 E 为 AC 的中点, $EF \perp AB$, 所以

$AE = \sqrt{3}, AF = \frac{3}{2}$.

因为 $FG = \frac{1}{2}$, 所以点 G 在题图①中 AB

的中点位置, 所以 $EG \parallel BC$,

在题图②中, 因为 $EG \subset$ 平面 $PEG, BC \not\subset$ 平面 PEG ,

所以 $BC \parallel$ 平面 PEG ,

因为 $BC \subset$ 平面 PBC , 平面 $PEG \cap$ 平面 $PBC = l$, 所以 $BC \parallel l$.

(2) 【解】在题图②中, 因为 $EF \perp PF$, $EF \perp BF$, $PF \cap BF = F$, $PF, BF \subset$ 平面 PBF ,

所以 $EF \perp$ 平面 PBF ,

又 $EF \subset$ 平面 $EFBC$, 所以平面 $PFB \perp$ 平面 $EFBC$,

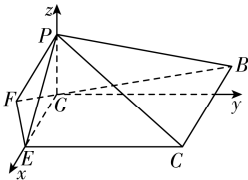
因为平面 $PFB \cap$ 平面 $EFBC = FB, PG \perp FB, PG \subset$ 平面 PFB , 所以 $PG \perp$ 平面 $EFBC$.

由(1)知 $AF = \frac{3}{2}$, 即 $PF = \frac{3}{2}$, 又 $GF =$

$\frac{1}{2}$, 所以 $PG = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$,

过点 G 在平面 $GECB$ 内作 $Gy \perp EG$,

以 G 为坐标原点, GE, Gy, GP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,





则 $P(0, 0, \sqrt{2}), E(1, 0, 0), C(1, \sqrt{3}, 0), B(-1, \sqrt{3}, 0)$,

所以 $\overrightarrow{PC} = (1, \sqrt{3}, -\sqrt{2}), \overrightarrow{EC} = (0, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{BP} = (1, -\sqrt{3}, \sqrt{2})$.

设平面 PEC 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{PC} = x + \sqrt{3}y - \sqrt{2}z = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{EC} = \sqrt{3}y = 0, \end{cases}$$

令 $x = 2$, 解得 $z = \sqrt{2}$,

所以 $\mathbf{n}_1 = (2, 0, \sqrt{2})$.

设平面 PBC 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (m, n, a)$,

$$\text{则} \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{PC} = m + \sqrt{3}n - \sqrt{2}a = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{BP} = m - \sqrt{3}n + \sqrt{2}a = 0, \end{cases}$$

令 $n = \sqrt{2}$, 解得 $a = \sqrt{3}$, 所以 $\mathbf{n}_2 = (0, \sqrt{2}, \sqrt{3})$,

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ 所以 } \sin \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

所以二面角 $E-PC-B$ 的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

18. 考查点 ▶ 离散型随机变量分布列、条件概率的计算、求离散型随机变量的期望

【解】(1) (i) 设第 1 次抽到优级品为事件 A , 第 2 次抽到一级品为事件 B ,

$$\text{则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{4}{5}.$$

(ii) 根据题意可知 X 的取值可能为 2, 3, 4, 5.

$$\text{则 } P(X=2) = \frac{A_2^2}{A_6^2} = \frac{1}{15}, P(X=3) =$$

$$\frac{C_4^1 C_2^1 A_2^2}{A_6^3} = \frac{2}{15}, P(X=4) = \frac{A_4^4 + C_2^1 C_4^2 A_3^3}{A_6^4} =$$

$$\frac{4}{15}, P(X=5) = \frac{C_2^1 C_4^3 A_4^4 + C_2^1 C_4^1 A_4^4}{A_6^5} = \frac{8}{15}.$$

则 X 的分布列为

X	2	3	4	5
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$

$$\text{所以 } E(X) = 2 \times \frac{1}{15} + 3 \times \frac{2}{15} + 4 \times \frac{4}{15} + 5 \times \frac{8}{15} = \frac{64}{15}.$$

(2) 设在 10 次抽检中至少有 8 次抽到优级品的概率为 $f(p)$,

$$\text{则 } f(p) = C_{10}^8 p^8 (1-p)^2 + C_{10}^9 p^9 (1-p) + p^{10} = 45p^8 (1-p)^2 + 10p^9 (1-p) + p^{10} = p^8 (36p^2 - 80p + 45), \text{ 其中 } 0 < p < 1,$$



因为 $f'(p) = 360p^7(p-1)^2 > 0$, 所以 $f(p)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增.

注意到 $f\left(\frac{3}{4}\right) = 7 \times \left(\frac{3}{4}\right)^9$, 所以 $p \geq \frac{3}{4}$,

故 p 的最小值为 $\frac{3}{4}$.

19. 考查点 ▶ 求双曲线的标准方程、根据直线与双曲线的位置关系求参数范围

(1) 【解】在直线 l 中, 令 $y=0$, 得 $x=-1$, 则直线 l 与 x 轴交于点 $(-1, 0)$, 所以 $a=1$. 又因为双曲线 E 的离心率 $\frac{c}{a} = \sqrt{5}$,

所以 $c = \sqrt{5}$, 故 $b^2 = c^2 - a^2 = 4$.

所以双曲线 E 的标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) (i) 【解】经检验, 当一条切线斜率不存在时,

若 $T(1, 2)$, 显然另一条切线斜率存在, 设切线方程为 $y-2 = k_1(x-1)$,

联立双曲线方程得 $(k_1^2 - 4)x^2 - 2k_1(k_1 - 2)x + (k_1 - 2)^2 + 4 = 0$,

则 $\Delta = 4k_1^2(k_1 - 2)^2 - 4(k_1^2 - 4)[(k_1 - 2)^2 + 4] = 0$,

解得 $k_1 = 2$, 而双曲线渐近线方程为 $y = \pm 2x$, 则此时不符合题意.

若 $T(-1, 0)$, 则此时只有一条切线, 显然不合题意,

则两条切线斜率均存在, 设切线斜率为 k , 切线方程为 $y = k(x-t) + (t+1)$,

与双曲线方程联立得 $(k^2 - 4)x^2 - 2k(kt - t - 1)x + (kt - t - 1)^2 + 4 = 0$,

令 $\Delta_1 = 4k^2(kt - t - 1)^2 - 4(k^2 - 4)[(kt - t - 1)^2 + 4] = 0$.

整理得 $(kt - t - 1)^2 - k^2 + 4 = 0$, 由于 $k \neq \pm 2$, 所以 $t \neq -\frac{1}{3}$ 且 $t \neq 1$.

又整理可得 $(t^2 - 1)k^2 - 2t(t+1)k + t^2 + 2t + 5 = 0$.

由题意, k 有两个不同实根, 所以 $t^2 - 1 \neq 0$, 且 $\Delta_2 = 4t^2(t+1)^2 - 4(t^2 - 1)(t^2 + 2t + 5) > 0$.

整理得 $4(t+1)(-3t+5) > 0$, 解得 $-1 < t < \frac{5}{3}$.

综上所述, t 的取值范围是

$$\left(-1, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 1\right) \cup \left(1, \frac{5}{3}\right).$$

(ii) 【证明】设 $M(x_1, y_1), P(x_2, y_2)$.

则直线 MT 和 PT 的方程分别为 $x_1x - \frac{y_1}{4}y = 1, x_2x - \frac{y_2}{4}y = 1$.

联立得点 $T\left(\frac{y_1 - y_2}{x_2y_1 - x_1y_2}, \frac{4(x_1 - x_2)}{x_2y_1 - x_1y_2}\right)$.



又点 T 在直线 l 上, 代入整理得 $x_2y_1 - x_1y_2 = 4(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)$. ①

在直线 MT 中, 令 $x = -1$, 则 $y = \frac{-4(x_1+1)}{y_1}$, 得点 $N\left(-1, \frac{-4(x_1+1)}{y_1}\right)$.

$$k_{PN} = \frac{y_2 + \frac{4(x_1+1)}{y_1}}{x_2+1} = \frac{y_1y_2 + 4(x_1+1)}{(x_2+1)y_1},$$

故直线 PN 方程为 $y = \frac{y_1y_2 + 4(x_1+1)}{(x_2+1)y_1} \cdot (x - x_2) + y_2$.

设直线 PN 与直线 l 交点为 A , 联立两直线方程得 $\frac{y_1y_2 + 4(x_1+1)}{(x_2+1)y_1} (x - x_2) + y_2 = x + 1$.

$$\text{解得 } x_A = \frac{(x_2 - y_2 + 1)y_1 + 4(x_1 + 1)x_2}{y_1y_2 + 4(x_1 + 1) - (x_2 + 1)y_1}.$$

设直线 MQ 与直线 l 交点为 B ,

$$\text{同理可得 } x_B = \frac{(x_1 - y_1 + 1)y_2 + 4(x_2 + 1)x_1}{y_1y_2 + 4(x_2 + 1) - (x_1 + 1)y_2}.$$

由①式, 作差, x_A 减 x_B 的分子有 $(x_2 - y_2 + 1)y_1 + 4(x_1 + 1)x_2 - (x_1 - y_1 + 1)y_2 - 4(x_2 + 1)x_1 = x_2y_1 - x_1y_2 - [4(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)] = 0$,

作差, x_B 减 x_A 的分母有 $y_1y_2 + 4(x_2 + 1) - (x_1 + 1)y_2 - [y_1y_2 + 4(x_1 + 1) - (x_2 + 1)y_1] = x_2y_1 - x_1y_2 - [4(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2)] = 0$.

则可得 x_A 和 x_B 表达式的分子、分母分别相等.

故 A, B 两点重合, 所以直线 PN 与 MQ 的交点在定直线 $l: y = x + 1$ 上.

