



第2章 函数及其性质

第1节 函数的概念及其表示

刷**基础****1. D** **考查点** ▶ 具体函数的定义域、值域

【解析】由 $y = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ 有意义可得 $2x-x^2 > 0$, 所以 $x^2-2x < 0$, 解得 $0 < x < 2$, 所以函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ 的定义域 $M = (0, 2)$.

由 $0 < x < 2$, 可得 $y = 2x-x^2 = -(x-1)^2 + 1 \in (0, 1]$

所以函数 $y = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ 的值域 $N = [1, +\infty)$,

所以 $M \cap N = [1, 2)$.

故选 D.

2. C **考查点** ▶ 复合函数的值域

【解析】令 $t = \tan x$, 则 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan x} = \left(\frac{1}{3}\right)^t$,

因为 $t = \tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增,

且 $\tan \frac{\pi}{4} = 1$, 所以 $t = \tan x \in (-\infty, 1]$.

又 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$ 单调递减,

所以 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t \in \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$, 即 $f(x)$ 的

值域是 $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$. 故选 C.

3. $\{-1, 0, 1\}$ **考查点** ▶ 复杂函数的值域、函数新定义

【解析】令 $y = \frac{x}{x^2+3x+4}$, 由 $x \in \mathbf{R}$, 则有

$$yx^2 + (3y-1)x + 4y = 0,$$

当 $y=0$ 时, 有 $x=0$;

当 $y \neq 0$ 时, 则有 $\Delta = (3y-1)^2 - 16y^2 = -7y^2 - 6y + 1 = -(7y-1)(y+1) \geq 0$,

解得 $-1 \leq y \leq \frac{1}{7}$, 又 $y \neq 0$, 即 $-1 \leq y < 0$ 或

$0 < y \leq \frac{1}{7}$.

综上所述可得 $-1 \leq y \leq \frac{1}{7}$, 则 $f(x) =$

$$\frac{x}{x^2+3x+4} + \frac{8}{9} = y + \frac{8}{9} \in \left[-\frac{1}{9}, \frac{65}{63}\right],$$

故 $y = [f(x)]$ 的值域是 $\{-1, 0, 1\}$.

4. 1 **考查点** ▶ 求函数解析式中的参数

【解析】因为函数 $f(x) = \frac{x}{x^2+a}$ ($x \neq 0$) 满

足 $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$,

则 $\frac{x}{x^2+a} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+a} = \frac{x}{1+ax^2}$, 即 $1+ax^2 = x^2+a$,



所以 $(a-1)(x^2-1)=0$,

所以 $a-1=0$, 解得 $a=1$, 经检验符合题意.

5.8 突破点 ▶ 列方程求解析式

【解析】用 y 替换 $f(x) \cdot f\left(f(x) + \frac{2}{x}\right) = 1$

中的 x 得 $f(y)f\left(f(y) + \frac{2}{y}\right) = 1$, 记

$y = f(x) + \frac{2}{x}$, 则 $f(x)f(y) = 1$, 则

$$f\left(f(y) + \frac{2}{y}\right) = f(x).$$

因为函数 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上单调

递减, 所以 $f(y) + \frac{2}{y} = x$.

因为 $f(x)f(y) = 1$,

$$\text{所以 } \frac{x^2 f(x)}{x f(x) + 2} = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow (x f(x) + 1)(x f(x) -$$

$$2) = 0 \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{x} \text{ 或 } f(x) = \frac{2}{x}, \text{ 又函}$$

数 $f(x)$ 在定义域 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x) = \frac{2}{x}$ 满足题设条件.

$$\text{所以 } y = f(2^x - 4^x) = \frac{2}{2^x - 4^x} =$$

$$\frac{2}{-\left(2^x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}}, x < 0,$$

$$\text{当 } 2^x = \frac{1}{2}, \text{ 即 } x = -1 \text{ 时, 函数 } y = f(2^x - 4^x)$$

取最小值, 为 8.

6. B 考查点 ▶ 求分段函数值、指数幂的运算、对数的运算

【解析】将 $x = -1$ 代入, 得到 $f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 0$,

所以 $f(f(-1)) = f(0)$,

将 $x = 0$ 代入, 得到 $f(0) = e^0 + \ln 1 = 1$.

因此, $f(f(-1)) = f(0) = 1$.

故选 B.

7. C 考查点 ▶ 解分段函数不等式、求指数函数在区间内的值域

【解析】由题意可知当 $x \leq 0$ 时, $0 < 2^x \leq 1$,

故 $f(x) = 1 - 2^x < 1$, 满足题意;

当 $x > 0$ 时, 令 $\log_3(x+1) \leq 1$, 即 $0 < x+1 \leq 3$, 解得 $-1 < x \leq 2$, 所以 $0 < x \leq 2$.

综上, $x \leq 2$.

故选 C.

8. C 考查点 ▶ 已知分段函数的值求参数或自变量

【解析】由题意可知 $m > 0$,

当 $0 < m < 1$ 时, $m+1 > 1$, 所以由 $f(m) =$

$$f(m+1) \text{ 得 } \sqrt{m} = 3m \Rightarrow m = \frac{1}{9};$$

当 $m \geq 1$ 时, $m+1 > 1$, 所以由 $f(m) = f(m+1)$ 得 $3(m-1) = 3m$, 无解.

$$\text{综上, } m = \frac{1}{9}.$$

故选 C.



9. C 突破点 ▶ 根据分段函数的值域求参数范围

【解析】当 $x \leq 1$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + \frac{5}{2} = (x-1)^2 + \frac{3}{2}$ 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减,

此时 $f(x) \in \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$.

当 $x > 1$ 时, $f(x) = x + \frac{a}{x} - 1$.

①若 $a \leq 1$, 则 $f(x) = x + \frac{a}{x} - 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $f(x) \in (a, +\infty)$,

又函数 $f(x)$ 的值域 $D \subseteq \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, 不合题意;

②若 $a > 1$, 则 $f(x) = x + \frac{a}{x} - 1 \geq 2\sqrt{a} - 1$, 当且仅当 $x = \sqrt{a} > 1$ 时, 等号成立,

又函数 $f(x)$ 的值域 $D \subseteq \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$, 则

$$\begin{cases} 2\sqrt{a} - 1 \geq \frac{3}{2}, \\ \sqrt{a} > 1, \end{cases} \text{ 解得 } a \geq \frac{25}{16}.$$

综上所述, $a \geq \frac{25}{16}$.

故选 C.

10. D 考查点 ▶ 分段函数的值与抽象函数综合

【解析】根据题设函数, 由 $f(8) = 1$ 逆推, 可有以下六种情况:

① $f(8) = 1 \rightarrow f(7) = 2 \rightarrow f(6) = 4 \rightarrow f(5) = 8 \rightarrow f(4) = 16 \rightarrow f(3) = 32 \rightarrow f(2) = 64 \rightarrow f(1) = 128$ (提示: 由条件 $f(8) = 1$ 和选项特点, 考虑根据分段函数式进行逆推, 在求函数值过程中, 要考虑条件的满足, 以及可能出现的所有情况, 再进行判断即可);

② $f(8) = 1 \rightarrow f(7) = 2 \rightarrow f(6) = 4 \rightarrow f(5) = 8 \rightarrow f(4) = 16 \rightarrow f(3) = 32 \rightarrow f(2) = 64 \rightarrow f(1) = 21$;

③ $f(8) = 1 \rightarrow f(7) = 2 \rightarrow f(6) = 4 \rightarrow f(5) = 8 \rightarrow f(4) = 16 \rightarrow f(3) = 5 \rightarrow f(2) = 10 \rightarrow f(1) = 20$;

④ $f(8) = 1 \rightarrow f(7) = 2 \rightarrow f(6) = 4 \rightarrow f(5) = 8 \rightarrow f(4) = 16 \rightarrow f(3) = 5 \rightarrow f(2) = 10 \rightarrow f(1) = 3$;

⑤ $f(8) = 1 \rightarrow f(7) = 2 \rightarrow f(6) = 4 \rightarrow f(5) = 1 \rightarrow f(4) = 2 \rightarrow f(3) = 4 \rightarrow f(2) = 8 \rightarrow f(1) = 16$;

⑥ $f(8) = 1 \rightarrow f(7) = 2 \rightarrow f(6) = 4 \rightarrow f(5) = 1 \rightarrow f(4) = 2 \rightarrow f(3) = 4 \rightarrow f(2) = 1 \rightarrow f(1) = 2$.

综上, 对于 A, 由情况⑥可知 A 不正确;

对于 B, C, 由情况①可知 B 不正确, C 也不正确;

对于 D, 由以上分析知 $f(4) \leq 16$, 故 D 正确.



故选 D.

11. C 考查点 ▶ 抽象函数的定义域

【解析】由于 $f(x+1)$ 的定义域为 $[-2, 2]$, 故 $x \in [-2, 2]$, 则 $x+1 \in [-1, 3]$,

因此 $g(x) = \frac{f(x-1)}{\sqrt{2x-1} \cdot (x-2)}$ 的定义域

满足 $\begin{cases} -1 \leq x-1 \leq 3, \\ 2x-1 > 0, \\ x-2 \neq 0 \end{cases}$ (易错: $x+1, x-1$ 范

围一致), 解得 $\frac{1}{2} < x \leq 4$ 且 $x \neq 2$,

故定义域为 $(\frac{1}{2}, 2) \cup (2, 4]$,

故选 C.

易错警示

对于抽象函数, 若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, 则复合函数 $y=f(g(x))$ 的定义域由不等式组 $a \leq g(x) \leq b$ 求出; 若复合函数 $y=f(g(x))$ 的定义域为 $[a, b]$, 则函数 $f(x)$ 的定义域为 $g(x) (x \in [a, b])$ 的值域.

第 2 节 函数的基本性质

刷

基础

1. C 考查点 ▶ 判断函数的单调性

【解析】对于 A, $f(1.5) = |1.5 - 2| = 0.5, f(2) = 0$, 由于 $f(1.5) > f(2)$, 故 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上不是单调递增的, A 错误;

对于 B, $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, B 错误;

对于 C, 当 $x > 1$ 时, $y = x - 1$ 单调递增, 且函数值恒为正, 故 $y = \frac{1}{x-1}$ 单调递减, 所以

$y = \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{x-1}$ 单调递增, C 正确;

对于 D, $y = \ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $y = -\ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, D 错误. 故选 C.

2. B 考查点 ▶ 求函数的单调区间

【解析】由 $\log_2(x^2 - 2x) \geq 0$ 且 $x^2 - 2x > 0$, 得 $x^2 - 2x \geq 1$, 即 $x \leq 1 - \sqrt{2}$ 或 $x \geq 1 + \sqrt{2}$,

所以函数 $f(x) = \sqrt{\log_2(x^2 - 2x)}$ 的定义域为 $(-\infty, 1 - \sqrt{2}] \cup [1 + \sqrt{2}, +\infty)$ (提示: 求单调区间先要求定义域).

因为 $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ 在 $(-\infty, 1 - \sqrt{2}]$ 上单调递减, 在 $[1 + \sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增,

又函数 $y = \log_2 x$ 为增函数,

所以函数 $y = \log_2(x^2 - 2x)$ 在 $(-\infty, 1 - \sqrt{2}]$ 上单调递减, 在 $[1 + \sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增,

又函数 $y = \sqrt{x}$ 为增函数,

所以函数 $f(x) = \sqrt{\log_2(x^2 - 2x)}$ 的单调递增区间为 $[1 + \sqrt{2}, +\infty)$.

故选 B.



3. D 考查点 ▶ 已知函数的单调性求参数范围

【解析】由 $x^2 - 6x + 5 \geq 0$, 可得 $x \leq 1$ 或 $x \geq 5$,

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$.

又因为 $t = x^2 - 6x + 5$ 在 $[5, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 1]$ 上单调递减,

$y = \sqrt{t}$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以由复合函数的单调性可知 $f(x) =$

$\sqrt{x^2 - 6x + 5}$ 在区间 $[5, +\infty)$ 上单调递增, $a \geq 5$.

故选 D.

4. B 考查点 ▶ 判断函数的单调性、已知二次函数单调区间求参数范围

【解析】函数 $f(x) = ax^2 + 2$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

当 $1 < x_1 < x_2 < 2$ 时, $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -5 \Leftrightarrow$

$f(x_1) - f(x_2) < -5x_1 + 5x_2 \Leftrightarrow f(x_1) + 5x_1 < f(x_2) + 5x_2$.

令函数 $h(x) = f(x) + 5x = ax^2 + 5x + 2$, 依题

意, 对任意的 $1 < x_1 < x_2 < 2$, $h(x_1) < h(x_2)$

恒成立,

因此函数 $h(x) = ax^2 + 5x + 2$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增.

当 $a < 0$ 时, 需满足 $-\frac{5}{2a} \geq 2$, 解得 $-\frac{5}{4} \leq$

$a < 0$, 因此 $-\frac{5}{4} \leq a < 0$ 时满足题意;

当 $a = 0$ 时, 函数 $h(x) = 5x + 2$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, 满足题意;

当 $a > 0$ 时, $-\frac{5}{2a} \leq 1$ 恒成立, 因此 $a > 0$ 时满足题意.

综上, 实数 a 的取值范围是

$\left[-\frac{5}{4}, +\infty\right)$. 故选 B.

5. BCD 考查点 ▶ 求函数的最值

【解析】易知 $f(x) = 2\sin x$ 的最大值为 $m = 2$, 最小值为 $n = -2$, 则 $m - n = 4$, 所以选项 A 错误;

因为 $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$ 在区间

$\left[\frac{2}{5}, 2\right]$ 上单调递减, 所以 $f(x) = \frac{x+1}{x}$ 的

最大值为 $m = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$, 最小值为 $n =$

$\frac{3}{2}$, 则 $m - n = 2$, 所以选项 B 正确;

$f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x} = \sqrt{-(x-2)^2 + 4}$, 令

$u = -(x-2)^2 + 4$, $y = \sqrt{u}$, 当 $x \in [0, 4]$ 时,

$u \in [0, 4]$, 又 $u = -(x-2)^2 + 4$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增, 在区间 $[2, 4]$ 上单调递

减, $y = \sqrt{u}$ 在区间 $[0, 4]$ 上单调递增, 所以

以 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x}$ 的最大值为 $m = 2$, 最小值为 $n = 0$, 则 $m - n = 2$, 所以选项 C

正确;



令 $t = 2^x, x \in [0, 1]$, 则 $y = t^2 - t$, 且 $t = 2^x \in [1, 2]$, 易知 $y = t^2 - t$ 在区间 $[1, 2]$ 上单调递增, 所以 $y = t^2 - t$ 在区间 $[1, 2]$ 上的最大值为 $m = 2$, 最小值为 $n = 0$, 则 $m - n = 2$, 所以选项 D 正确. 故选 BCD.

6. $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \{0\}$ 考查点 ▶ 根据函数的最值求参数

【解析】当 $a > 0$ 时, $f(x) = ax - 1$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增,

且当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 显然 $f(x)$ 不存在最小值, 故舍去;

当 $a = 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, 则当 $x \geq 0$

时, $f(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$,

所以 $f(x)$ 的最小值为 -1 , 符合题意;

当 $a < 0$ 时, 当 $x \geq a$ 时, $f(x) = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(a, \frac{1}{2}\right)$ 上单

调递减, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4},$$

当 $x < a$ 时, $f(x) = ax - 1$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递减,

要使函数存在最小值, 则

$$\begin{cases} a^2 - 1 \geq -\frac{1}{4}, \\ a < 0, \end{cases} \text{ 解得 } a \leq -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{此时 } f(x)_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

综上所述, a 的取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \{0\}$.

7. A 考查点 ▶ 由奇偶性判断充分、必要条件

【解析】若 $k = 1$, 则 $f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$, 所以

$$f(-x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x), \text{ 故充分性}$$

成立;

若函数 $f(x) = \frac{1 - ke^x}{1 + ke^x}$ 为奇函数, 则

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \frac{1 - ke^{-x}}{1 + ke^{-x}} = -\frac{1 - ke^x}{1 + ke^x},$$

所以 $\frac{e^x - k}{e^x + k} = \frac{ke^x - 1}{ke^x + 1}$ 恒成立, 则 $k = \pm 1$, 则必

要性不成立.

故“ $k = 1$ ”是“函数 $f(x) = \frac{1 - ke^x}{1 + ke^x}$ 为奇函

数”的充分不必要条件.

故选 A.

8. B 考查点 ▶ 由奇偶性求参数

【解析】因为 $f(x) = (x - 4)^3 \cos \omega x (\omega > 0)$,

所以 $f(x + a) = (x + a - 4)^3 \cos [\omega(x + a)] (\omega > 0)$.



因为存在常数 $a \in \mathbf{R}$, 使 $f(x+a)$ 为偶函数, 则 $a=4$,

此时 $y = \cos [\omega(x+a)] = \cos(\omega x + 4\omega)$ 为奇函数,

所以 $4\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\omega = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $\omega > 0$,

所以 ω 的最小值为 $\frac{\pi}{8}$.

故选 B.

9. x^3+x (答案不唯一) **考查点** ▶ 由奇偶性求函数解析式

【解析】 由 $\begin{cases} f(x) - g(x) = -x, \\ f(-x) - g(-x) = x \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} f(x) - g(x) = -x, \\ f(-x) + g(x) = x \end{cases} \Rightarrow f(-x) = -f(x),$$

所以 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数且是奇函数, 构造 $f(x) = x^3$,

所以 $g(x) = f(x) + x = x^3 + x$ 满足条件.

10. D **考查点** ▶ 判断函数的对称性

【解析】 由 $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 3 =$

$$4 - \frac{2}{e^x + 1} + \sin x, \text{ 定义域为 } \mathbf{R},$$

$$\text{得 } f(-x) = 4 - \frac{2}{e^{-x} + 1} + \sin(-x) = 4 -$$

$$\frac{2e^x + 2 - 2}{1 + e^x} - \sin x = 2 + \frac{2}{1 + e^x} - \sin x,$$

所以 $f(-x) + f(x) = 6$, 则 $f(-x_0) = 6 - f(x_0) = 7$.

故选 D.

11. B **突破点** ▶ 由函数的周期性求函数值

【解析】 由 $f(x+3) = -f(x)$ 可得 $f(x+6) = -f(x+3) = f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 的周期为 6, 由 $f(1-2x) = f(1+2x)$ 可得函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,

所以 $f(2) = f(0)$, 又 $f(1) = 2, f(2) = f(1) - f(0)$,

所以 $f(2) = f(0) = 1$, 又 $f(3) = -f(0) = -1, f(4) = -f(1) = -2$,

$f(5) = -f(2) = -1, f(6) = f(0) = 1$,

所以 $\sum_{k=1}^{17} f(k) = 3[f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)] - f(6) = 3 \times (2 + 1 - 1 - 2 - 1 + 1) - 1 = -1$.

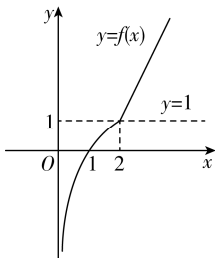
故选 B.

12. D **考查点** ▶ 应用函数单调性解不等式

【解析】 因为当 $x \in (0, 2]$ 时, $f(x) =$



$\log_2 x$ 单调递增, 此时 $f(x) \leq f(2) = 1$,
当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f(x) = 2x - 3$ 单调递增, 此时 $f(x) > 1$,



所以 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & 0 < x \leq 2, \\ 2x - 3, & x > 2 \end{cases}$ 是定义在 $(0, +\infty)$ 上的增函数.

所以若 $f(a+1) - f(2a-1) \geq 0$, 即 $f(a+1) \geq f(2a-1)$,

则 $a+1 \geq 2a-1 > 0$, 得 $\frac{1}{2} < a \leq 2$,

故选 D.

13. A 考查点 根据函数的单调性及奇偶性解不等式、基本不等式的应用

【解析】 由 $f(a \cdot 2^x) - f(4^x + 1) \leq 0$, 得 $f(a \cdot 2^x) \leq f(4^x + 1)$,

因为函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数,

所以 $f(a \cdot 2^x) \leq f(4^x + 1)$ 可化为 $f(|a \cdot 2^x|) \leq f(|4^x + 1|)$.

又 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $|a \cdot 2^x| \leq |4^x + 1|$, 则 $|a|2^x \leq 4^x + 1$,

所以 $|a| \leq 2^x + \frac{1}{2^x}$.

因为 $2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2\sqrt{2^x \cdot \frac{1}{2^x}} = 2$, 当且仅当

$2^x = \frac{1}{2^x}$, 即 $x = 0$ 时取等号,

所以 $|a| \leq 2$, 解得 $-2 \leq a \leq 2$,

即 a 的取值范围是 $[-2, 2]$,

故选 A.

14. D 考查点 函数对称性的应用、根据函数的单调性解不等式

【解析】 因为 $m, n (m \neq n)$ 为关于 x 的方程 $x^2 - 2x + t^2 - 3 = 0$ 的两个解,

则 $\Delta = 4 - 4(t^2 - 3) = 16 - 4t^2 > 0$, 解得 $-2 < t < 2$,

由根与系数的关系可得 $m + n = 2$,

因为函数 $f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的函数, $f(1+x) = -f(1-x)$,

即 $f(1+x) + f(1-x) = 0$,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 则 $f(m) + f(n) = 0, f(1) = 0$.

因为对任意 $x_1, x_2 \in [1, +\infty) (x_1 < x_2)$,

均有 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

则该函数在 $(-\infty, 1]$ 上也单调递增,

从而可知, 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上为增函数,

由 $f(m) + f(n) + f(t) > 0$ 可得 $f(t) > 0 = f(1)$,

解得 $t > 1$, 所以 $1 < t < 2$,

所以关于 t 的不等式 $f(m) + f(n) + f(t) > 0$



0 的解集为 $(1, 2)$.

故选 D.

15. D 考查点 ▶ 构造函数法比较函数值的大小关系

【解析】令 $f(x) = e^x + x$, 显然 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 又 a, b, c 为正数, 所以 $e^c + c = e^a + 2a > e^a + a$, 即 $f(c) > f(a)$, 所以 $c > a$;

令 $g(x) = e^x + 2x$, 则 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 又 $e^a + 2a = e^b + 3b > e^b + 2b$, 即 $g(a) > g(b)$, 所以 $a > b$.

综上可得 $c > a > b$. 故选 D.

16. D 突破点 ▶ 根据函数的单调性和对称性比较大小

【解析】定义在 \mathbf{R} 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(4-x)$,

则 $f(x)$ 的图象的对称轴是直线 $x = 2$,

所以 $f(x) = f(4-x) = -f(-x)$,

则 $f(x+4) = -f(x)$,

则 $f(x+8) = -f(x+4) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的周期是 8,

所以 $b = f\left(\frac{7}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $c = f(-13) = f(3) = f(1)$,

因为 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上单调递增,

所以 $b = f\left(\frac{1}{2}\right) < c = f(1) < a = f\left(\frac{7}{4}\right)$.

故选 D.

17. C 考查点 ▶ 函数性质的综合应用

【解析】 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 因为

$f(-x) = 2^{\cos(-x)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos(-x)} = 2^{\cos x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的偶函数, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 故 A 正确;

对于任意的 $x \in \mathbf{R}$, $f(\pi-x) = 2^{\cos(\pi-x)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos(\pi-x)} = 2^{-\cos x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\cos x} =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} + 2^{\cos x} = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故 B 正确;

因为 $f(\pi+x) = 2^{\cos(\pi+x)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos(\pi+x)} =$

$2^{-\cos x} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-\cos x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} + 2^{\cos x} = f(x)$, 所以 π 为函数 $f(x)$ 的一个周期, 故 2π 不是函数 $f(x)$ 的最小正周期, 故 C 错误;

因为 $-1 \leq \cos x \leq 1$, 设 $t = 2^{\cos x} \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$, $g(t) = t + \frac{1}{t}$, 因为 $t + \frac{1}{t} \geq 2$,

当且仅当 $t = \frac{1}{t}$, 即 $t = 1$ 时等号成立, 所以函数 $f(x)$ 的最小值为 2, 故 D 正确.

故选 C.

18. C 考查点 ▶ 判断抽象函数的性质

【解析】令 $x = -1$, 得 $f(2-1) = f(1) -$



$f(1) = 0$, 即 $f(1) = 0$, $\therefore f(2+x) + f(-x) = 0$, 故函数 $f(x)$ 的图象关于 $(1, 0)$ 对称.

又 $\because f(2x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称, 故 $f(2x) = f(2(2-x)) = f(4-2x)$, $\therefore f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称.

$\therefore f(x) = f(4-x) = -f(-2+x)$, 则 $f(x+4) = f(x)$, $\therefore f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数.

$f(x+2)$ 的图象是将 $f(x)$ 的图象向左平移 2 个单位得到的, 故 $f(x+2)$ 的图象关于 y 轴对称, $f(x+2)$ 是偶函数, 故 A 错误;

$f(x+1)$ 的图象是将 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位得到的, 故 $f(x+1)$ 的图象关于原点对称, $f(x+1)$ 是奇函数, 故 B 错误;

由 $f(2+x) + f(-x) = 0$, 得 $f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, 由 $f(-x+2) = f(x+2)$, 得 $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right)$,

$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 C 正确;

依题意, 得 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(1) = 0$,

$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(2) = 1$, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$f(3) = 0$, $f\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(4) = -1$,

$\therefore \sum_{k=1}^8 f\left(\frac{k}{2}\right) = 0$, $\therefore \sum_{k=1}^{2025} f\left(\frac{k}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, 故 D 错误.

故选 C.

19. D 考查点 ▶ 已知函数的单调性求参数范围

【解析】由 $x^2 - 4x - 5 > 0 \Rightarrow (x+1)(x-5) > 0 \Rightarrow x < -1$ 或 $x > 5$.

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(5, +\infty)$ 上单调递增.

又函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $a \geq 5$.

即 a 的取值范围为 $[5, +\infty)$.

故选 D.

易错警示

本题除了考虑单调性还应注意: 函数 $f(x) = \lg(x^2 - 4x - 5)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 说明真数在 $(a, +\infty)$ 上大于 0 恒成立.

20. C 考查点 ▶ 由函数奇偶性及单调性解不等式

【解析】因为 $f(x)$ 是奇函数, 则 $f(a+1) + f(1-a^2) > 0$ 可化为 $f(a+1) > -f(1-a^2) = f(a^2-1)$.

又 $f(x)$ 在 $[0, 4)$ 上单调递减且 $f(x)$ 是



定义在 $(-4, 4)$ 上的奇函数, 所以 $f(x)$ 在 $(-4, 4)$ 上单调递减, 则

$$\begin{cases} -4 < a+1 < 4, \\ -4 < a^2-1 < 4, \\ a+1 < a^2-1, \end{cases} \text{解得 } -\sqrt{5} < a < -1 \text{ 或 } 2 < a <$$

$\sqrt{5}$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\sqrt{5}, -1) \cup (2, \sqrt{5})$. 故选 C.

易错警示

本题得出 $f(a+1) > f(a^2-1)$ 且函数 $f(x)$ 在 $(-4, 4)$ 上单调递减后, 最容易出错的点是直接令 $a+1 < a^2-1$, 求出 a 的取值范围, 忽视了 $a+1$ 与 a^2-1 都应该在 $(-4, 4)$ 内, 导致错解.

刷

提分

1. D **考查点** ▶ 根据函数单调性求参数范围

【解析】 已知函数 $f(x) = x^2 - mx + 1$ 与函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称,

若 $g(x)$ 在区间 $(-2, -1)$ 上单调递增,

则 $f(x)$ 在区间 $(3, 4)$ 上单调递减 (**关键: 根据对称性利用已知函数的条件**), 故

$$\frac{m}{2} \geq 4, \text{解得 } m \geq 8.$$

故选 D.

2. D **突破点** ▶ 应用函数的单调性解不等式

【解析】 因为函数 $g(x) = a - 2^{-x}$ 与 $h(x) = \ln(x+1)$ 均是增函数,

所以函数 $y = f(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数只需满足 $g(0) \leq h(0)$, 即 $a - 1 \leq 0$, 解得 $a \leq 1$.

由 $f(a+x^2) \geq f(x)$ 得 $a+x^2 \geq x$, 即 $a \geq -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ 恒成立,

所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$

取得最大值 $\frac{1}{4}$, 所以 $a \geq \frac{1}{4}$, 即 $a \in$

$$\left[\frac{1}{4}, 1\right],$$

所以实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$.

故选 D.

3. D **突破点** ▶ 构造函数法比较函数值的大小关系

【解析】 已知 $e^a + 2\ln b = \frac{1}{b} - a$, 将等式进

行移项可得 $e^a + a = \frac{1}{b} - 2\ln b$, 又 $2\ln b =$

$$\ln b^2, \text{则 } e^a + a = \frac{1}{b} + \ln \frac{1}{b^2}.$$

因为 $b > 1$, 所以 $\frac{1}{b} + \ln \frac{1}{b} > \frac{1}{b} + 2\ln \frac{1}{b} =$

$$\frac{1}{b} + \ln \frac{1}{b^2} > \frac{1}{b^2} + \ln \frac{1}{b^2}, \text{所以 } \frac{1}{b} + \ln \frac{1}{b} > e^a +$$

$$a > \frac{1}{b^2} + \ln \frac{1}{b^2}.$$

令 $f(x) = e^x + x$, 由函数 $y = e^x$ 及函数 $y = x$



均在 \mathbf{R} 上单调递增 (另解: 对 $f(x)$ 求导可得 $f'(x) = e^x + 1 > 0$), 可得 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.

因为 $e^a + a = f(a)$, $\frac{1}{b^2} + \ln \frac{1}{b^2} = e^{\ln \frac{1}{b^2}} + \ln \frac{1}{b^2} = f\left(\ln \frac{1}{b^2}\right)$, $\frac{1}{b} + \ln \frac{1}{b} = e^{\ln \frac{1}{b}} + \ln \frac{1}{b} = f\left(\ln \frac{1}{b}\right)$, 所以 $f\left(\ln \frac{1}{b}\right) > f(a) > f\left(\ln \frac{1}{b^2}\right)$, 根据 $f(x)$ 的单调性可知 $\ln \frac{1}{b} > a > \ln \frac{1}{b^2}$, 即 $\ln \frac{1}{b} > \ln e^a > \ln \frac{1}{b^2}$, 再根据对数函数的性质, 可知 $b^{-1} > e^a > b^{-2}$, 故 C 错误, D 正确.

若 $b = e$, 此时 $e^a + a = \frac{1}{e} - 2$, 且 $-2 < a < -1$,

而 $\left(e^{-\frac{7}{4}} - \frac{7}{4}\right) - \left(\frac{1}{e} - 2\right) = \frac{1}{e\sqrt[4]{e^3}} - \frac{1}{e} +$

$\frac{1}{4} > \frac{1}{3e} - \frac{1}{e} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{2}{3e} = \frac{3e-8}{12e} > 0$, 所

以 $e^{-\frac{7}{4}} - \frac{7}{4} > \frac{1}{e} - 2 = e^a + a$, 则 $-2 < a < -\frac{7}{4}$,

此时 $a^2 > \frac{49}{16} > b$, 排除 A.

若 $b = e^n$ ($n > 0$), 此时 $e^a + a = e^{-n} - 2n$, 且 $-2n < a < -n$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $e^n > 4n^2$, 此时必有 $a^2 < 4n^2 < e^n = b$, 排除 B. 故选 D.

4. BCD 考查点 ▶ 判断抽象函数的周期、对称性

【解析】令 $x = y = 0$, 得 $f(0) - f(0) = f(-1)f(-1)$, 所以 $f(-1) = 0$. 令 $x = 0$, 得 $f(-y) - f(y) = f(-1)f(y-1) = 0$, 即 $f(-y) = f(y)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $g(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -g(x)$, 又 $g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 $g(x)$ 为奇函数, 故 A 错误;

令 $x = 1$, $f(1-y) - f(1+y) = f(0)f(y-1) = 2f(y-1)$, 即 $f(y+1) = -f(y-1)$, 则 $f(y-2+1) = -f(y-2-1) \Rightarrow f(y-1) = -f(y-3) = -f(y+1) \Rightarrow f(y) = f(y+4)$, 所以 4 是 $f(x)$ 的一个周期, 故 B 正确;

令 $x = 1$, $f(1-y) - f(1+y) = f(0)f(y-1) = 2f(y-1)$, 所以 $f(1-y) + f(1+y) = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 又 $f(x)$ 的周期为 4, $2\ 025 = 506 \times 4 + 1$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(2\ 025, 0)$ 对称, 故 C 正确;

令 $x = 1, y = -1$, 得 $f(2) - f(0) = f(0) \cdot f(-2) = 2f(2)$, 即 $f(2) = -2$, 令 $x = 1, y = 2$, 得 $f(-1) - f(3) = 2f(1)$, 所以 $f(3) = 0$, 所以 $f(0) + f(1) + f(2) + f(3) = 2 + 0 + (-2) + 0 = 0$,

所以 $\sum_{i=0}^{2\ 025} f(i) = f(2\ 024) + f(2\ 025) = f(0) + f(1) = 2$, 故 D 正确.

故选 BCD.

5. C 突破点 ▶ 函数周期性的应用、函数图



象对称性的应用、函数奇偶性的应用、正弦函数图象的应用

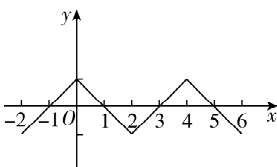
【解析】对于函数 $f(x)$ ，有 $f(4-x) = f(x)$ ，则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称，

由 $f(2-x) = -f(x)$ ，得函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(1,0)$ 对称，

所以 $f(4-x) = -f(2-x)$ ，所以 $f(2-x) = -f(-x)$ ，

则 $f(4-x) = f(-x)$ ，故函数 $f(x)$ 的周期为 4，且 $f(-x) = f(x)$ ，故函数 $f(x)$ 为偶函数。

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,0]$ 上单调递增，则函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示，



由对称性可得 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$ ，

所以 $\sum_{k=1}^{10} f(k) = [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] \times 2 + f(9) + f(10) = 0 + f(1) + f(2) = f(2) \neq 0$ ，故 A 错误；

由于 $f(0.9) + f(1.1) = 0$ ， $f(1.1) > f(1.2)$ ，所以 $f(0.9) + f(1.2) < 0$ ，故 B 错误；

$f(\log_2 80) = f(\log_2 16 + \log_2 5) = f(4 + \log_2 5) = f(\log_2 5)$ ， $\frac{5}{2} = \log_2 2^{\frac{5}{2}} = \log_2$

$\sqrt{32} > \log_2 5 > 2$ ，所以 $f(2.5) > f(\log_2 80)$ ，故 C 正确；

$f\left(\ln \frac{1}{2}\right) = f(-\ln 2) = f(\ln 2)$ ，且 $0 < \ln 2 < 0.7$ ，

因为 $\frac{\pi}{3} > 1 > \frac{\pi}{4}$ ，所以 $\sin \frac{\pi}{3} > \sin 1 >$

$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.7$ ，故 $1 > \sin 1 > \ln 2 > 0$ ，

所以 $f(\sin 1) < f\left(\ln \frac{1}{2}\right)$ ，故 D 错误。

故选 C。

6. C 考查点 ▶ 抽象函数与复合函数性质的综合应用

【解析】因为 $G(x) = f(2+3x) - 1$ 为奇函数，所以 $G(-x) = -G(x)$ ，即 $f(2-3x) - 1 = -[f(2+3x) - 1]$ ，所以 $f(2-3x) + f(2+3x) = 2$ ， $f(2-x) + f(2+x) = 2$ ，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,1)$ 对称，A 正确。

在 $f(2-x) + f(2+x) = 2$ 中，令 $x=0$ ，得 $2f(2) = 2$ ，得 $f(2) = 1$ ，因为函数 $F(x) = f(1+x) - (1+x)$ 为偶函数，所以 $F(-x) = F(x)$ ， $f(1-x) - (1-x) = f(1+x) - (1+x)$ ，所以 $f(1+x) - f(1-x) = 2x$ ，令 $x=1$ ，得 $f(2) - f(0) = 2$ ，所以 $1 - f(0) = 2$ ，得 $f(0) = -1$ ，B 正确。



因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2, 1)$ 对称, $f(0) = -1$, 所以 $f(4) = 3, f(0) \neq f(4)$, 所以 4 不是 $f(x)$ 的周期, C 错误.

在 $f(2-x) + f(2+x) = 2$ 中, 令 $x = 1$, 得 $f(1) + f(3) = 2$. 又 $f(4) = 3, f(2) = 1$, 所以 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 6$, D 正确. 故选 C.

7. D 突破点 ▶ 应用函数的性质解不等式

【解析】因为定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 为奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^x - a$, 所以当 $x < 0$ 时, $-x > 0, f(x) = -f(-x) = -e^{-x} + a$, 当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$,

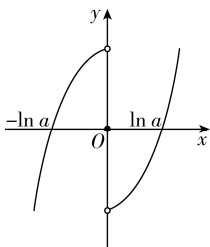
$$\text{令 } e^x - a \geq -e^{-x} + a, \text{ 即 } a \leq \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

因为 $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 2\sqrt{\frac{e^x}{2} \cdot \frac{e^{-x}}{2}} = 1$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立, 所以 $a \leq 1$.

若 $a \leq 1$, 则函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 又 $x - |a - 1| \leq x$, 所以 $f(x - |a - 1|) \leq f(x) = -f(-x)$,

即 $f(-x) + f(x - |a - 1|) \leq 0$ 恒成立, 故 $a \leq 1$ 满足题意, 排除选项 A;

若 $a > 1$, 则 $a - 1 > 0$, 函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上不单调, 图象如图所示,



又 $f(-x) + f(x - |a - 1|) \leq 0$, 即 $f(x - (a - 1)) \leq f(x)$,

可理解为函数 $f(x - (a - 1))$ 的图象在函数 $f(x)$ 的图象下方或与函数 $f(x)$ 的图象重合,

所以由图象可得 $a - 1 \geq 2\ln a$, 即 $2\ln a - a + 1 \leq 0$,

$$\text{令 } g(a) = 2\ln a - a + 1 (a > 1),$$

$$\text{则 } g(2\,025) = 2\ln 2\,025 - 2\,024 < 0, g$$

$$(3) = 2\ln 3 - 2 = 2(\ln 3 - 1) > 0,$$

$$g(e^2) = 2\ln e^2 - e^2 + 1 = 5 - e^2 < 0.$$

故选 D.

8. C 突破点 ▶ 函数性质与不等式综合

【解析】因为函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, 定义域为 \mathbf{R} ,

$$\text{函数 } f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x}{x^2 + 1} = -f(x), \text{ 所}$$

以函数 $f(x)$ 是奇函数.

对任意 $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right]$, 都有 $f(x) + f(4x - a) \leq 0$ 恒成立,

$$\text{则 } f(x) \leq -f(4x - a) = f(a - 4x),$$

$$\text{所以 } \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{a - 4x}{(a - 4x)^2 + 1},$$

$$\text{化简得 } (5x - a)(4x^2 - ax + 1) \leq 0,$$

$$\text{所以} \begin{cases} 5x-a \leq 0, \\ 4x^2-ax+1 \geq 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} 5x-a \geq 0, \\ 4x^2-ax+1 \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} (5x)_{\max} \leq a, \\ a \leq \left(4x + \frac{1}{x}\right)_{\min} \end{cases} \text{或} \begin{cases} (5x)_{\min} \geq a, \\ a \geq \left(4x + \frac{1}{x}\right)_{\max}. \end{cases}$$

令 $y = 4x + \frac{1}{x}$, 则 $y = 4x + \frac{1}{x}$ 在 $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ 时单调递减, $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$ 时单调递增,

$$\text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } \left(4x + \frac{1}{x}\right)_{\min} = 4;$$

$$\text{当 } x = \frac{1}{3} \text{ 时, } 4x + \frac{1}{x} = \frac{13}{3}, \text{ 当 } x = \frac{3}{5} \text{ 时, } 4x + \frac{1}{x} = \frac{61}{15} < \frac{13}{3},$$

$$\text{所以 } \left(4x + \frac{1}{x}\right)_{\max} = \frac{13}{3}.$$

$$\text{对任意 } x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right], (5x)_{\min} = \frac{5}{3},$$

$$(5x)_{\max} = 3,$$

$$\text{所以 } 3 \leq a \leq 4.$$

故选 C.

9.3 突破点 ▶ 根据两函数图象交点的个数求参数

【解析】 根据函数解析式 $f(x) = |x| + \frac{4}{|x|+1}$ 可知函数的定义域为 \mathbf{R} ,

$$\text{且满足 } f(-x) = |-x| + \frac{4}{|-x|+1} = |x| + \frac{4}{|x|+1}$$

$$= f(x), \text{ 故 } f(x) \text{ 为偶函数.}$$

$$\text{当 } x \in [0, +\infty) \text{ 时, 可得 } f(x) = x + \frac{4}{x+1} =$$

$$x+1 + \frac{4}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} - 1 = 3,$$

$$\text{当且仅当 } x+1 = \frac{4}{x+1}, \text{ 即 } x=1 \text{ 时, 等号}$$

成立,

由对勾函数的性质可知, 函数 $f(x)$ 在 $[0,$

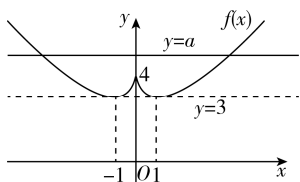
$1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

且在 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得最小值,

$$f(x)_{\min} = f(1) = 3,$$

由对称性可得 $f(-1) = 3$, 且 $f(0) = 4$,

由偶函数性质可知其图象如图所示,



因为函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y=a$ 有两个交点, 由图象可知 $a=3$ 或 $a>4$,

所以 a 的最小值为 3.

10.-1 突破点 ▶ 函数的性质与数列综合

【解析】 因为 $a_1 = 0$, $a_{n+1} - a_n = 2$ 或 $a_{n+1} - a_n = -2$,



又 $a_{2\ 026} = (a_{2\ 026} - a_{2\ 025}) + (a_{2\ 025} - a_{2\ 024}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = 4\ 050$,

设 2 025 个差中有 x 个 2 和 y 个 -2, 故

$$\begin{cases} 2(x-y) = 4\ 050, \\ x+y = 2\ 025, \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} x = 2\ 025, \\ y = 0, \end{cases}$$

即数列 $\{a_n\}$ 前 2 026 项成等差数列, 公差为 $d=2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{2\ 025} \frac{x+a_{n+1}}{x+a_n} = \frac{x+a_1+d}{x+a_1} + \frac{x+a_2+d}{x+a_2} + \cdots + \\ &\frac{x+a_{2\ 025}+d}{x+a_{2\ 025}} = \frac{d}{x+a_1} + \frac{d}{x+a_2} + \cdots + \frac{d}{x+a_{2\ 025}} + \\ &2\ 025. \end{aligned}$$

$$\text{令 } h(x) = f(x - a_{1\ 013}) - 2\ 025 =$$

$$\frac{d}{x+a_1-a_{1\ 013}} + \frac{d}{x+a_2-a_{1\ 013}} + \cdots + \frac{d}{x+a_{2\ 025}-a_{1\ 013}},$$

$$\text{即 } h(x) = \frac{d}{x-1\ 012d} + \cdots + \frac{d}{x-d} + \frac{d}{x} + \frac{d}{x+d} + \cdots + \frac{d}{x+1\ 012d},$$

$$\text{则 } h(-x) = \frac{d}{-x-1\ 012d} + \cdots + \frac{d}{-x-d} + \frac{d}{-x} +$$

$$\frac{d}{-x+d} + \cdots + \frac{d}{-x+1\ 012d}$$

$$= -\frac{d}{x+1\ 012d} - \cdots - \frac{d}{x+d} - \frac{d}{x} - \frac{d}{x-d} - \cdots -$$

$$\frac{d}{x-1\ 012d} = -h(x),$$

所以 $y=h(x)$ 为奇函数, 结合题设易知

$$a = -a_{1\ 013} = -2\ 024, b = 2\ 025,$$

$$\text{故 } \frac{a}{b-1} = -1.$$

专题 抽象函数

刷

难关

1. D **突破点** ▶ 应用抽象函数性质比较大小

【解析】 根据题意, 函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x+2)$ 为偶函数, 所以 $f(x+2) = f(-x+2)$, 即 $f(x) = f(4-x)$, 又 $f(x)-1$ 为奇函数, 所以 $f(x)-1 = -[f(-x)-1]$, 则 $f(x)+f(-x) = 2$, 即 $f(x) = 2-f(-x)$, 所以 $f(4+x) = 2-f(x)$, 则 $f(x+8) = 2-f(x+4) = 2-[2-f(x)] = f(x)$, 即函数 $f(x)$ 的周期为 8.

又 $f(x)$ 在区间 $[6, 8]$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-2, 0]$ 上也单调递增, 又 $f(x)-1$ 为奇函数, 所以 $f(0) = 1$, 所以 $f(-1) < 1$, 而 $a = f(-33) = f(-1) < 1$, $b = f(19) = f(3) = f(1) = 2-f(-1) > 1$, $c = f(88) = f(0) = 1$, 所以 $a < c < b$. 故选 D.

2. D **突破点** ▶ 求抽象函数的函数值

【解析】 根据 $f(x+2)+f(x)=f(4)$, 以 $x+2$ 代换 x 得 $f(x+4)+f(x+2)=f(4)$ (**提示: 赋变量, 转化抽象关系式**), 所以 $f(x+4) = f(x+2) = f(4) - f(x+2)$.



$4) = f(x)$, 可知函数 $f(x)$ 的周期为 4.

因为 $f(2x+1)$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $f(-2x+1) + f(2x+1) = 0$, 即 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称,

$$\text{于是 } f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right) = 0, f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right) = f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,$$

由 $f(x+4) + f(x+2) = f(4)$, 取 $x=0$ 得 $f(4) + f(2) = f(4)$, 即 $f(2) = 0$,

则 $f(4) = f(0) = -f(2) = 0$, 因此 $f(x+2) + f(x) = 0$, 取 $x = \frac{3}{2}$, 得 $f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right) = 0$,

$$\text{于是 } f\left(\frac{1}{2}\right) + 2f\left(\frac{3}{2}\right) + 3f\left(\frac{5}{2}\right) + 4f\left(\frac{7}{2}\right) = \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)\right] + 3\left[f\left(\frac{5}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right)\right] + f\left(\frac{3}{2}\right) + f\left(\frac{7}{2}\right) = 0,$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^5 kf\left(k - \frac{1}{2}\right) = 5f\left(\frac{9}{2}\right) = 5f\left(4 + \frac{1}{2}\right) = 5f\left(\frac{1}{2}\right) = 5.$$

故选 D.

3. A 突破点 ▶ 利用函数奇偶性及对称性比较函数值的大小关系

【解析】不妨设 $F(x) = f(-1-x)$,

由 $F(x)$ 是偶函数, 得 $F(-x) = F(x)$,

即 $f(-1+x) = f(-1-x)$,

即函数 $y = f(x)$ 的图象关于直线 $x = -1$ 对称, 且 $f(-2-x) = f(x)$.

因为 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, -1]$ 上单调递增,

所以 $y = f(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $x_1 < 0, x_2 > 0$, 且 $x_1 + x_2 + 2 > 0$, 所以 $-2 - x_2 < x_1$,

若 $x_1 \leq -1$, 则 $-2 - x_2 < x_1 \leq -1$, 则 $f(-2 - x_2) < f(x_1)$, 即 $f(x_2) < f(x_1)$;

若 $-1 < x_1 < 0$, 因为 $x_2 > 0$, 则 $x_2 > x_1 > -1$, 所以 $f(x_2) < f(x_1)$.

综上所述可得, $f(x_1) > f(x_2)$. 故选 A.

4. B 突破点 ▶ 抽象函数不等式、由抽象函数的周期性求函数值的范围

【解析】由题知, $f(x) = f(x-1) - f(x-2)$,

设 $f(1) = x, f(2) = y$,

则 $f(3) = y - x, f(4) = -x, f(5) = -y$,

$f(6) = -y + x, f(7) = x = f(1)$,

所以函数 $f(x)$ 的周期为 6.

故 $f(35) = f(5) = -y, f(25) = f(1) = x$,

$f(30) = f(6) = -y + x, f(10) = f(4) = -x$.

由 $f(35) > f(25)$, 得 $-y > x$, 即 $x + y < 0$,

由 $f(30) > f(10)$, 得 $-y + x > -x$, 即 $2x - y > 0$,

所以 $\begin{cases} y - 2x < 0, \\ 2x + 2y < 0, \end{cases}$ 可得 $y < 0, x$ 无法确定.

所以 $f(20) = f(2) = y < 0 < 1\,000, f(30) = -y + x$ 无法判断.

综上所述, $f(20) < 1\,000$ 一定正确. 故



选 B.

5. ABD **突破点** ▶ 抽象函数性质的综合应用

【解析】令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = f(0) + 2f(0) \Rightarrow f(0) = 0$,

令 $x = 0$, 得 $f(y) = f(-y) + 2f(y) \Rightarrow f(-y) = -f(y)$, 故 $f(x)$ 为奇函数, 所以选项 B 正确, 选项 C 错误.

令 $x = y = \frac{\pi}{2}$, 得 $f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\pi) = 0$,

令 $y = \pi$, 得 $f(x + \pi) = f(x - \pi) + 2f(\pi) \cos x \Rightarrow f(x + 2\pi) = f(x) \Rightarrow f(x + 4\pi) = f(x)$,

所以选项 A 正确.

令 $x = \frac{\pi}{2}$, 得 $f\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - y\right) + 2f(y) \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2} + y\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$,

所以 $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$,

令 $y = \frac{\pi}{2}$, 得 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos x$.

因为 $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $f(-y) = -f(y)$,

所以 $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos x \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin x$,

故选项 D 正确.

故选 ABD.

6. ACD **突破点** ▶ 由函数对称性求函数值

【解析】令 $x = 1, y = -1$, 可得 $g(0) = g(2)g(0)$, 因为 $g(0) > 0$, 所以 $g(2) = 1$, $h(2) = 4$,

令 $x = 0$, 则 $g(1) = g(1)g(y+1)$, 所以 $g(1) = 0$ 或 $g(y+1) = 1$,

若 $g(y+1) = 1$, 则 $h(y+1) = 0$, 与 $h(2) = 4$ 矛盾, 故 $g(1) = 0$, A 对;

令 $x = -1, y = -1$, 得 $g(2) = g(0)g(0) = 1$, 则 $g(0) = 1$,

令 $y = -1$, 得 $g(1-x) = g(0)g(1+x)$, 即 $g(1-x) = g(1+x)$,

即函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 对等式 $g(1-x) = g(1+x)$ 两边求导得 $-g'(1-x) = g'(1+x)$,

即 $-h(1-x) = h(1+x)$,

所以函数 $h(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称,

因为 $g(1+x) = g(1-x)$, 即 $f'(1+x) = f'(1-x)$, 所以 $f(1+x) = -f(1-x) + c$ (c 为常数),

无法判断 $f(x)$ 的图象是否关于点 $(1, 0)$ 对称, B 错, C 对;

因为函数 $h(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称,



所以 $h(0)+h(2)=h(-1)+h(3)=h(-2)+h(4)=\cdots=h(-2\ 023)+h(2\ 025)=0$,

所以 $\sum_{i=-2\ 023}^{2\ 025} h(i)=0$, D 对.

故选 ACD.

7. C 突破点 ▶ 累加法求函数解析式

【解析】由题知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{Z} , 且满足 $f(x)+f(y)=f(x+y)-2xy+2$, $f(1)=2$,

取 $x=y=1$, 得 $f(1)+f(1)=f(2)-2+2$, 则 $f(2)=4$, 取 $x=y=2$, 得 $f(2)+f(2)=f(4)-2\times 2\times 2+2$, 则 $f(4)=14$, 故 A 错误;

取 $y=1$, 得 $f(x)+f(1)=f(x+1)-2x+2$, 则 $f(x+1)-f(x)=2x$,

所以 $f(x)-f(x-1)=2(x-1)$, $f(x-1)-f(x-2)=2(x-2)$, \cdots , $f(2)-f(1)=2$,

将以上各式相加, 得 $f(x)-f(1)=\frac{(x-1)[2(x-1)+2]}{2}=x^2-x$,

又因为 $f(1)=2$, 所以 $f(x)=x^2-x+2$,

令 $f(x)=x$, 则 $x^2-x+2=x$, 即 $x^2-2x+2=0$,

因为 $\Delta=4-4\times 2<0$, 所以方程无解, 故 B 错误;

$f\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)+2=x^2+\frac{7}{4}$,

其对称轴为直线 $x=0$, 故 C 正确;

$f\left(x-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(x-\frac{1}{2}\right)+2=x^2-2x+\frac{11}{4}$,

其对称轴为直线 $x=1$, 故 D 错误.

故选 C.

8. D 突破点 ▶ 应用抽象函数性质解不等式

【解析】令 $x=y=1$, 得 $f(1)=f(1)+f(1)$, 故 $f(1)=0$;

令 $x=y=-1$, 得 $f(1)=f(-1)+f(-1)$, 故 $f(-1)=0$;

令 $y=-1$, 得 $\frac{f(-x)}{x^2}=\frac{f(x)}{x^2}+\frac{f(-1)}{(-1)^2}$, 即 $\frac{f(-x)}{x^2}=\frac{f(x)}{x^2}$.

令 $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$, 则 $g(x)$ 的定义域为 $\{x \mid x \neq 0\}$, 且 $g(-x)=g(x)$, 故 $g(x)$ 为偶函数.

设 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 且 $x_1 > x_2$,

则 $g(x_1)-g(x_2)=\frac{f(x_1)}{x_1^2}-\frac{f(x_2)}{x_2^2}=\frac{f\left(x_2 \cdot \frac{x_1}{x_2}\right)}{x_2^2 \cdot \frac{x_1^2}{x_2^2}}-\frac{f(x_2)}{x_2^2}=\frac{f(x_2)}{x_2^2}+\frac{f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\frac{x_1^2}{x_2^2}}-$



$$\frac{f(x_2)}{x_2^2} = \frac{f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\frac{x_1^2}{x_2^2}},$$

$$\because x_1 > x_2 > 0, \therefore \frac{x_1}{x_2} > 1,$$

$$\because x > 1 \text{ 时, } f(x) > 0,$$

$$\therefore f\left(\frac{x_1}{x_2}\right) > 0, \frac{f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\frac{x_1^2}{x_2^2}} > 0,$$

$$\therefore g(x_1) - g(x_2) > 0, \text{ 即 } g(x_1) > g(x_2),$$

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减.

$$\text{由 } (2x-1)^2 f(x) > x^2 f(2x-1) \text{ 得 } \frac{f(x)}{x^2} >$$

$$\frac{f(2x-1)}{(2x-1)^2}, \text{ 即 } g(x) > g(2x-1),$$

$$\therefore \begin{cases} x \neq 0, \\ 2x-1 \neq 0, \\ |x| > |2x-1|, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{1}{3} < x < 1 \text{ 且 } x \neq \frac{1}{2},$$

$$\text{故不等式的解集为 } \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right).$$

故选 D.

9. $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

突破点 根据抽象函数的奇偶性及单调性解不等式

【解析】 设 $g(x) = xf(x)$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. 因为对任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$,

且 $x_1 \neq x_2$, 都有 $\frac{x_1 f(x_1) - x_2 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$, 所

以 $g(x) = xf(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

又 $f(x)$ 为奇函数及 $f(1) = 0$, 所以

$g(-x) = -xf(-x) = xf(x) = g(x)$, 则 $g(x)$

为偶函数, 且 $g(1) = g(-1) = 0$, 故 $g(x)$

在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以 $g(x+1)$ 在

$(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, +\infty)$ 上

单调递减.

当 $x=0$ 时, $xf(x+1) = 0$, 不满足题意. 所以

若 $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0,$

$+\infty)$, 则 $xf(x+1) < 0 \Leftrightarrow f(x+1) < 0, x > 0$ 或

$f(x+1) > 0, x < 0$ 且 $x \neq -1$.

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x+1) < 0 \Rightarrow \frac{g(x+1)}{x+1} < 0,$$

即 $g(x+1) < 0$, 解得 $x < -2$ 或 $x > 0$, 故 $x > 0$;

当 $x < 0$ 且 $x \neq -1$ 时, $f(x+1) > 0 \Rightarrow$

$$\frac{g(x+1)}{x+1} > 0, \text{ 即 } (x+1)g(x+1) > 0, \text{ 得}$$

$$\begin{cases} x+1 < 0, \\ g(x+1) < 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x+1 > 0, \\ g(x+1) > 0, \end{cases} \text{ 解得 } x < -2$$

或 $-1 < x < 0$.

综上, 不等式 $xf(x+1) < 0$ 的解集为

$(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

第3节 基本初等函数

刷

基础

1. C 考查点 对数的运算性质的应用

【解析】因为 $2 = \log_3 9 < \log_3 18 < \log_3 27 = 3$, 所以 $0 < \log_3 18 - 2 < 1$.

因为 $f(x) = 2f(x-1)$, 所以 $f(\log_3 18) = 2^2 f(\log_3 18 - 2) = 2^2 \times 3^{\log_3 18 - 2} = 8$.

故选 C.

2. C 考查点 ▶ 指数式与对数式的互化

【解析】由 $6^b = 18$, 得 $b = \log_6 18$, 又 $a = \log_3 6$, 所以 $ab - \log_3 2 = \log_3 6 \cdot \log_6 18 - \log_3 2 = \log_3 6 \cdot (\log_6 6 + \log_6 3) - \log_3 2 = \log_3 6 - \log_3 2 + 1 = \log_3 3 + 1 = 2$. 故选 C.

3. A 考查点 ▶ 指数式与对数式的互化

【解析】令 $\log_6 x = m$, $\log_4 y = n$, 则 $x = 6^m$, $y = 4^n$,

由 $9^{\log_6 x} - 4^{\log_6 x} + x = 0$, $9^{\log_4 y} + 6^{\log_4 y} - y = 0$,
得 $9^m - 4^m + 6^m = 0$, $9^n + 6^n - 4^n = 0$,

则 $\left(\frac{3}{2}\right)^{2m} - 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^m = 0$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 = 0$,

则 $\left(\frac{3}{2}\right)^m, \left(\frac{3}{2}\right)^n$ 均为方程 $t^2 + t - 1 = 0$ ($t > 0$) 的根,

则 $\left(\frac{3}{2}\right)^m = \left(\frac{3}{2}\right)^n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 即 $m = n$,

所以 $\frac{y}{x} = \frac{4^n}{6^m} = \left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

故选 A.

4. ACD 考查点 ▶ 指数式与对数式的互化、由基本不等式比较大小

【解析】令 $3^x = 4^y = 5^z = k$, 则 $k > 1$, $x = \log_3 k$, $y = \log_4 k$, $z = \log_5 k$.

A 选项: $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \log_k 3 + \log_k 5 = \log_k 15 <$

$\log_k 16 = \frac{2}{y}$, 故 A 正确;

B 选项: $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \log_k 3 + 2\log_k 4 = \log_k 48 <$

$\log_k 125 = \frac{3}{z}$, 故 B 错误;

C 选项: $\frac{3x}{4y} = \frac{3\log_k 4}{4\log_k 3} = \log_{81} 64 < 1$, 故 $3x <$

$4y$, $\frac{4y}{5z} = \frac{4\log_k 5}{5\log_k 4} = \log_{1024} 625 < 1$, 故 $4y < 5z$,

从而 $3x < 4y < 5z$, 故 C 正确;

D 选项: 由 A 知 $\frac{2}{y} > \frac{1}{x} + \frac{1}{z} > \frac{2}{\sqrt{xz}}$, 则 $xz >$

y^2 , 故 D 正确.

故选 ACD.

5. B 考查点 ▶ 求幂函数的值、求幂函数的解析式

【解析】设 $f(x) = x^\alpha$, 则 $2 = 4^\alpha$, $\therefore \alpha = \frac{1}{2}$,

即 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, $\therefore f(3) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$, 故选 B.

6. C 考查点 ▶ 根据函数零点的个数求参数范围、判断一般幂函数的单调性

【解析】由 $y = x^{\frac{1}{3}}$, $y = x^{\frac{1}{2}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单



调递增,

若存在实数 t 使得方程 $f(x) = t$ 有两个不同的正实数根,

只需 $m^{\frac{1}{3}} > m^{\frac{1}{2}} \Rightarrow m^2 > m^3 \Rightarrow m^2(m-1) < 0$,
又 $m > 0$, 所以 $0 < m < 1$.

故选 C.

7. C 考查点 ▶ 幂函数的单调性

【解析】若 $f(x) = (m^2 + m + 1)x^{m-1}$ 是幂函数, 则 $m^2 + m + 1 = 1$, 解得 $m = 0$ 或 $m = -1$.

当 $m = 0$ 时, $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$,

由反比例函数的性质得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $m = -1$ 时, $f(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$,

由幂函数的性质得 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减时, $m = 0$ 或 $m = -1$,

即当 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减时, 无法推出 $m = -1$, 充分性不成立,

当 $m = -1$ 时, 可以推出 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 必要性成立.

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减是 $m = -1$ 的必要不充分条件, 故 C 正确.
故选 C.

8. $f(x) = \frac{1}{x}$ (答案不唯一) 考查点 ▶ 判断

一般幂函数的单调性、判断常见幂函数的奇偶性

【解析】若幂函数 $f(x) = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $a < 0$,

函数为奇函数, 取 $a = -1$, 即 $f(x) = \frac{1}{x}$ 满足要求.

9. B 考查点 ▶ 判断指数型函数的奇偶性和单调性

【解析】 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x) =$

$$\frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)}, \text{ 则 } f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{2(e^{-x} + 1)} =$$

$$-\frac{e^x - 1}{2(e^x + 1)} = -f(x),$$

故 $f(x)$ 是奇函数.

由于 $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^x + 1}$, 函数

$y = e^x + 1$ 单调递增, 故 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增.

故选 B.

10. A 考查点 ▶ 比较指数幂的大小

【解析】已知 $f(x) = e^{|x|}$, 其定义域为 \mathbf{R} ,
且 $f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|} = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是偶函数.

那么 $f(-3) = f(3)$.

当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = e^x$.

因为 $e > 1$, 所以 $f(x) = e^x$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $5 > 3 > 2$, 且 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(5) > f(3) > f(2)$.



又因为 $f(-3) = f(3)$, 所以 $f(5) > f(-3) > f(2)$.

故选 A.

11. B **考查点** ▶ 由指数(型)函数的单调性求参数的取值范围

【解析】 设 $t = ax^2 - 2x + 1$, 则 $y = a^t$,

由复合函数的单调性及题意可知, 当 $a > 1$ 时, $t = ax^2 - 2x + 1$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递增,

所以只需 $\frac{1}{a} \leq 0$, 则 $a < 0$, 与 $a > 1$ 矛盾;

当 $0 < a < 1$ 时, $t = ax^2 - 2x + 1$ 在区间 $[0, 2]$ 上单调递减,

所以 $\frac{1}{a} \geq 2$, 即 $0 < a \leq \frac{1}{2}$.

故 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

故选 B.

12. A **考查点** ▶ 求已知指数型函数的最值、不等式能成立(有解)问题

【解析】 因为存在 $x \in (-\infty, 0]$ 满足 $x^2 - 3^x + a < 0$ ($a \in \mathbf{R}$),

即存在 $x \in (-\infty, 0]$ 满足 $a < -x^2 + 3^x$.

令 $f(x) = -x^2 + 3^x, x \in (-\infty, 0]$,

因为 $y = -x^2$ 与 $y = 3^x$ 在 $(-\infty, 0]$ 上均单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 所以

所以 $f(x)_{\max} = f(0) = 1$,

所以 $a < 1$, 即 a 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.

故选 A.

13. B **考查点** ▶ 已知指数型函数的奇偶性求参数

【解析】 函数 $f(x) = \frac{(2-a) \cdot 3^x - a \cdot 3^{-x}}{x^2 + 1}$,

分母 $x^2 + 1$ 恒大于 0, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处有定义. 因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(0) = 0$.

可得 $f(0) = \frac{(2-a) \cdot 3^0 - a \cdot 3^{-0}}{0^2 + 1} = 0$, 即

$\frac{(2-a) \times 1 - a \times 1}{1} = 0$, 解得 $a = 1$.

$a = 1$ 时, $f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{x^2 + 1}$, 经检验, $f(-x) =$

$\frac{3^{-x} - 3^x}{x^2 + 1} = -f(x)$ 满足题意.

故选 B.

14. $\frac{3}{2}$ **突破点** ▶ 已知指数型函数的对称性求参数

【解析】 函数 $f(x) = \frac{a^x}{a^x - a}$ 的定义域为

$(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ (**关键:** 定义域关于 $x = 1$ 对称, 则对称中心横坐标就是 1),

$f(2-x) = \frac{a^{2-x}}{a^{2-x} - a} = \frac{a^2}{a^2 - a \cdot a^x} = \frac{a}{a - a^x} =$

$\frac{a - a^x + a^x}{a - a^x} = 1 - \frac{a^x}{a^x - a} = 1 - f(x)$,

即 $f(2-x) + f(x) = 1$, 函数 $f(x)$ 的图象



关于点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 对称.

又函数 $f(x)$ 的图象关于点 (m, n) 对称,
则 $m=1, n=\frac{1}{2}$, 所以 $m+n=\frac{3}{2}$.

快解

函数 $f(x) = \frac{a^x}{a^x - a}$ 的定义域为 $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, 又 $f(0) + f(2) = \frac{a^0}{a^0 - a} + \frac{a^2}{a^2 - a} = \frac{1}{1-a} + \frac{a^2}{a^2 - a} = \frac{-a + a^2}{a^2 - a} = 1$, 所以若函数 $f(x)$ 的图象有对称中心, 则对称中心为点 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 所以 $m+n=\frac{3}{2}$.

15. C 突破点 ▶ 对数型函数的单调性

【解析】令 $u(x) = x^2 - ax + 3, g(x) = \log_3 u(x)$, 则 $f(x)$ 可视为由 $u(x)$ 和 $g(x)$ 构成的复合函数,

由对数函数的性质得 $g(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增,

因为 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减,

所以由复合函数性质得 $u(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减.

由二次函数的性质得 $u(x) = x^2 - ax + 3$

图象的对称轴为直线 $x = \frac{a}{2}$,

显然 $u(x)$ 的图象开口向上, 故

$$\begin{cases} \frac{a}{2} \geq 1, \\ 1 - a + 3 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{易错: 题目隐含了 } u(x) \text{ 在}$$

区间 $(0, 1)$ 上大于零恒成立, 所以 $u(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上最小值要大于零),

解得 $2 \leq a \leq 4$,

则 a 的最大值为 4, 故 C 正确.

故选 C.

16. D 考查点 ▶ 应用对数函数的单调性比较大小

【解析】因为 $a = \log_4 3 < \log_4 4 = 1, b =$

$\log_5 3 < 1, c = \log_4 5 > 1$, 其中 $a = \frac{\lg 3}{\lg 4}, b =$

$\frac{\lg 3}{\lg 5}$, 所以 $a - b = \frac{\lg 3}{\lg 4} - \frac{\lg 3}{\lg 5} =$

$\frac{\lg 3 \times (\lg 5 - \lg 4)}{\lg 4 \times \lg 5} > 0$ (提示: 作差是常用的比较大小的方法), 所以 $c > a > b$,

故选 D.

方法总结**比较对数值大小的方法**

(1) 若底数为同一常数, 可由对数函数的单调性直接进行判断, 若底数为同一字母, 则需对底数进行分类讨论;

(2) 若底数不同, 真数相同, 可以先用换底公式化为同底后, 再进行比较;

(3) 若底数与真数都不同, 常借助 1, 0 等中间量进行比较.

17. D 考查点 ▶ 根据对数型函数的值域求参数

【解析】令 $t = ax - x^2$,



$y = \log_4 t$ 在定义域内为增函数, 且最大值为 1,

可知 $t = ax - x^2$ 的最大值为 4 (提示: 转化为 $t = ax - x^2$ 的最大值为 4),

则 $\frac{a^2}{4} = 4$, 解得 $a = \pm 4$,

经验证, $a = \pm 4$ 均满足题意.

故选 D.

18. C 考查点 ▶ 函数图象的识别

【解析】因为 $f(x) = \log_a x$, $g(x) = a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ 在同一坐标系中,

所以 $f(x)$, $g(x)$ 的单调性一定相反, 且 $f(x)$, $g(x)$ 图象均不过原点, 故排除 A, D;

在 B, C 选项中, 过原点的图象为幂函数 $h(x) = x^a$ 的图象,

由图象可知 $0 < a < 1$, 所以 $f(x) = \log_a x$ 单调递减, $g(x) = a^{-x}$ 单调递增, 故排除 B,

故选 C.

19. C 考查点 ▶ 判断函数的奇偶性、对数函数图象的应用

【解析】函数 $f(x) = \frac{\ln |x| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x}$

的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 则定义域关于原点对称.

因为 $f(x) = \frac{\ln |x| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x} = \frac{\ln |x| \cos x}{x}$,

$f(-x) = \frac{\ln |-x| \cos(-x)}{-x} = -\frac{\ln |x| \cos x}{x} = -f(x)$,

所以函数 $f(x)$ 为奇函数, 图象关于原点对称,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $\ln |x| < 0$, $\cos x > 0$, 故 $f(x) < 0$,

选项 ABD 都不同时符合以上所有特征, 选项 C 符合以上特征,

故函数 $f(x) = \frac{\ln |x| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{x}$ 的部分图象大致为选项 C 的图象.

故选 C.

20. D 考查点 ▶ 对数型复合函数的单调性、奇偶性的应用

【解析】因为 $x^2 + 3 \geq 3$, 所以函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 3)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

则定义域关于原点对称, 且 $f(-x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 3) = f(x)$,

所以 $f(x)$ 为偶函数.

又 $x \geq 0$ 时, $u = x^2 + 3$ 单调递增, 而 $y = \log_{\frac{1}{2}} u$ 单调递减,

所以 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 3)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单



调递减,

根据对称性知 $x < 0$ 时, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 3)$ 单调递增.

函数 $y = \log_2 m$ 中, $m > 0$,

由 $f(\log_2 m) < f(2)$ 得 $|\log_2 m| > 2$, 解得 $0 < m < \frac{1}{4}$ 或 $m > 4$.

故选 D.

21. A 突破点 ▶ 函数奇偶性的应用、用导数判断或证明已知函数的单调性、比较对数式的大小

【解析】因为函数 $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) + kx$ ($k \in \mathbf{R}$) 是偶函数,

且 $f(1) = \ln(e^2 + 1) + k, f(-1) = \ln(e^{-2} + 1) - k$,

所以 $f(1) = f(-1)$, 即 $\ln(e^2 + 1) + k = \ln(e^{-2} + 1) - k$,

解得 $k = -1$. 故 $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$, 其定义域关于原点对称,

此时 $f(-x) = \ln(e^{-2x} + 1) + x = \ln\left(\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}\right) + x = \ln(e^{2x} + 1) - \ln e^{2x} + x = \ln(e^{2x} + 1) - 2x + x = \ln(e^{2x} + 1) - x = f(x)$,

故 $f(x) = \ln(e^{2x} + 1) - x$ 是偶函数, 符合题意.

而 $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} - 1 = \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} - \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} + 1} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$,

令 $f'(x) < 0, x \in (-\infty, 0)$, 令 $f'(x) > 0, x \in (0, +\infty)$,

故 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

而 $\log_5 0.3 > \log_5 5^{-1} = -1$, 且 $f(k) = f(-1)$, 得到 $f(\log_5 0.3) < f(k)$,

而由偶函数性质得 $f(\log_{0.5} 0.3) = f(-\log_{0.5} 0.3) = f\left(-\log_{0.5} \frac{3}{10}\right) = f\left(\log_{0.5} \frac{10}{3}\right)$,

而 $\log_{0.5} \frac{10}{3} < \log_{0.5} 0.5^{-1} = -1$,

则 $f\left(\log_{0.5} \frac{10}{3}\right) > f(k)$,

得到 $f(\log_5 0.3) < f(k) < f(\log_{0.5} 0.3)$ 成立, 故 A 正确.

故选 A.

刷

提分

1. B 突破点 ▶ 指数式与对数式的互化、对数的运算

【解析】由题意可得 $a = \log_2 3, b^3 = 3$, 即

$b = 3^{\frac{1}{3}}, c = \frac{3}{2}$.

对数函数 $y = \log_2 x$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数,

则 $a = \log_2 3 > \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} = c$,

幂函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则



$$b = 3^{\frac{1}{3}} < \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} = c, \text{ 故 } a > c > b.$$

故选 B.

2. D 考查点 ▶ 利用同构思想求参数

【解析】由 $a-1 = \ln(4-a)$, 可得 $e^{a-1} = 4-a$, $e^{a-1} = 3-(a-1)$, 即 $e^{a-1} + (a-1) - 3 = 0$, 由 $be^b = e^3$, 可得 $b = e^{3-b}$, 所以 $\ln b = 3-b = 3-e^{\ln b}$, 即 $e^{\ln b} + \ln b - 3 = 0$.

构造函数 $f(x) = e^x + x - 3$, 因为函数 $y = e^x$ 和函数 $y = x - 3$ 都是 \mathbf{R} 上的增函数, 所以函数 $f(x) = e^x + x - 3$ 为增函数, 由 $f(a-1) = f(\ln b) = 0$, 得 $a-1 = \ln b$, 又因为 $\ln b = 3-b$, 得 $a-1 = 3-b$, 所以 $a+b = 4$.

故选 D.

3. BCD 突破点 ▶ 应用指数函数的单调性解不等式

【解析】由题意可得 $e^y + 2y > e^x + 2x$, 构造函数 $f(x) = e^x + 2x$ (关键: 构造函数, 应用函数单调性解决问题), 显然其单调递增, 故 $x < y$.

$x^3 < y^3 \Leftrightarrow x < y$, 故“ $x < y$ ”是“ $\frac{e^y - e^x}{2} > x - y$ ”的充要条件, 故 A 错误;

由 $\log_3(y-x) > 0$ 得 $y > x+1 > x$, 能推出 $x < y$, 反之不成立, 所以“ $\log_3(y-x) > 0$ ”是“ $\frac{e^y - e^x}{2} > x - y$ ”的充分不必要条件, 故 B 正确;

由 $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$ 可得 $0 < x < y$, 故 $\frac{e^y - e^x}{2} > x - y$,

反之不成立, 故“ $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$ ”是“ $\frac{e^y - e^x}{2} > x - y$ ”的充分不必要条件, 故 C 正确;

$|x| < y \Rightarrow 0 < x < y$ 或 $x < 0 < y$, 故“ $|x| < y$ ”是“ $\frac{e^y - e^x}{2} > x - y$ ”的充分不必要条件, 故 D 正确.

故选 BCD.

4. B 突破点 ▶ 根据必要不充分条件求参数的取值范围、由对数函数的单调性解不等式

【解析】 $p: f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 得 $m > 0$,

考虑 $q: g(m) > 0$.

当 $m < 2$ 时, $g(m) > 0$ 等价于 $\frac{m}{2-m} > 0$, 得 $0 < m < 2$ ①.

当 $m \geq 2$ 时, $g(m) > 0$ 等价于 $\log_a m > 1$.

若 $0 < a < 1$, 由 $\log_a m > 1$, 可得 $m < a$, 又 $m \geq 2$, 此时解集为 \emptyset ,

结合①知 $g(m) > 0$ 的解集为 $(0, 2)$, 符合题意;

若 $1 < a < 2$, 由 $\log_a m > 1$, 可得 $m > a$, 又 $m \geq 2$, 此时解集为 $[2, +\infty)$,

结合①知 $g(m) > 0$ 的解集为 $(0, +\infty)$, 不符合题意;

若 $a \geq 2$, 由 $\log_a m > 1$, 可得 $m > a$, 又 $m \geq 2$,



此时解集为 $(a, +\infty)$,

结合①知 $g(m) > 0$ 的解集为 $(0, 2) \cup (a, +\infty)$, 符合题意.

综上所述, a 的取值范围是 $(0, 1) \cup [2, +\infty)$.

故选 B.

5. BC 考查点 ▶ 指数型函数的性质的应用

【解析】 $g(x) = 3 \times 3^x - \frac{1}{3} \times 3^{-x} = 3^{x+1} - 3^{-(x+1)}$, 则 $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ 的图象向左平移 1 个单位长度后所得图象对应的函数为 $g(x)$.

因为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(x) + f(-x) = 3^x - 3^{-x} + 3^{-x} - 3^x = 0$, 所以 $f(x)$ 为奇函数且图象的对称中心为 $(0, 0)$, 又 $f(x)$ 单调递增, 则 $f(x)$ 有且仅有一个零点,

故可知 $g(x)$ 有且仅有一个零点, 且 $g(x)$ 的图象关于点 $(-1, 0)$ 对称, 故 A 错误, B 正确;

因为 $g(x) = f(x+1)$, $f(x)$, $g(x)$ 的图象分别关于原点和 $(-1, 0)$ 对称,

所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象关于原点和点 $(-1, 0)$ 连线的中点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 对称, 故 C 正确;

若 $f(a) = f(b+1) = g(b)$, 又 $f(x)$, $g(x)$ 单调递增, 则 $a-b=1$, 故 D 错误.

故选 BC.

6. B 突破点 ▶ 函数奇偶性的定义与判断、对数型复合函数的单调性

【解析】函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

$$f(-x) = \ln(\sqrt{e^{-2x} + 3e^{-x} + 1} - e^{-x} - 1) + \frac{x}{2} =$$

$$\ln\left(\sqrt{\frac{1+3e^x+e^{2x}}{e^{2x}}} - \frac{1}{e^x} - 1\right) + \frac{x}{2}$$

$$= \ln\left(\frac{\sqrt{1+3e^x+e^{2x}} - 1 - e^x}{e^x}\right) + \frac{x}{2}$$

$$= \ln(\sqrt{1+3e^x+e^{2x}} - 1 - e^x) - \ln e^x + \frac{1}{2}x$$

$$= \ln(\sqrt{e^{2x}+3e^x+1} - e^x - 1) - \frac{x}{2} = f(x),$$

故函数 $f(x)$ 为偶函数.

令 $t = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} (t \geq 2)$, 则 $e^x + e^{-x} = t^2 - 2$,

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{e^{2x}+3e^x+1} - e^x - 1}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$= \ln\left(\sqrt{\frac{e^{2x}+3e^x+1}{e^x}} - \frac{e^x+1}{e^{\frac{x}{2}}}\right)$$

$$= \ln\left[\sqrt{e^x+e^{-x}+3} - \left(e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}\right)\right],$$

所以 $f(x)$ 可转化为 $h(t) = \ln(\sqrt{t^2+1} -$

$t) = \ln \frac{1}{\sqrt{t^2+1}+t}$, 由复合函数的单调性可

得, $h(t)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递减,

故 $h(t)$ 在 $t=2$ 处取得最大值,

故选 B.

**7. A 突破点** ▶ 比较指数式、对数式的大小

【解析】因为 $f(x), g(x)$ 分别为 \mathbf{R} 上的奇函数和偶函数，

所以 $f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$ ，

由 $g\left(x + \frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{3}{2} - x\right)$ ，得 $g(x) = g(2 - x)$ ，

所以 $g(-x) = g(2+x) = g(x)$ ，可得 $g(x)$ 的周期为 2.

又 $f(x) + g(x) = e^x - \cos x, 0 \leq x \leq 1$ ，

可得 $f(-x) + g(-x) = -f(x) + g(x) = e^{-x} - \cos x$ ，

两式相加可得 $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - \cos x +$

$e^{-x} - \cos x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x} - 2\cos x)$ ，

所以 $g'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x} + 2\sin x)$ ，当

$x \in [0, 1]$ 时，因为 $y = e^x, y = -e^{-x}, y = 2\sin x$ 都单调递增，所以 $g'(x)$ 单调递增，

且 $g'(x) \geq g'(0) = \frac{1}{2}(e^0 - e^{-0} + 2\sin 0) =$

0，所以 $g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增，

$g(a) = g\left(\frac{2\,025}{2}\right) = g\left(1\,012 + \frac{1}{2}\right) =$

$g\left(\frac{1}{2}\right)$ ， $g(b) = g\left(\log_3 \frac{1}{2}\right) = g(\log_3 2)$ ，

$\log_3 \sqrt{3} = \log_3 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} < \log_3 2 < \log_3 3 = 1$ ，

$\frac{1}{2} > c = e^{-1} = \frac{1}{e} > 0$ ，

所以 $g(c) < g(a) < g(b)$ 。

故选 A.

8. $2^{-x} - 3 \times 2^x$ 突破点 ▶ 函数奇偶性的应用、指数函数的判定

【解析】 $\because a=2$ 时， $f(x)$ 的图象关于原点对称，故此时 $f(x)$ 为奇函数，

$\therefore f(-x) = -f(x)$ ，即 $g(-x) + 2 \cdot 2^{-x} = -[g(x) + 2 \cdot 2^x]$ ，

$\therefore g(x) + 2^{x+1} + g(-x) + 2^{1-x} = 0$ ①.

$\because a=4$ 时， $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称，故此时 $f(x)$ 为偶函数，

$\therefore f(-x) = f(x)$ ，即 $g(-x) + 4 \cdot 2^{-x} = g(x) + 4 \cdot 2^x$ ，

$\therefore g(x) + 2^{x+2} - g(-x) - 2^{2-x} = 0$ ②.

①②两式相加得， $2g(x) + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{1-x} - 2^{2-x} = 0$ ，

整理得， $g(x) = 2^{-x} - 3 \times 2^x$ 。

9. 2 026 突破点 ▶ 利用同构思想求参数

【解析】 $\log_{2\,025} m + m - 2\,026 = 0 \Rightarrow$

$\log_{2\,025} m + m = 2\,026 \Rightarrow \log_{2\,025} m +$

$2\,025^{\log_{2\,025} m} = 2\,026$ ，

$2\,025^n + n - 2\,026 = 0 \Rightarrow 2\,025^n + n = 2\,026$ ，

设 $f(x) = 2\,025^x + x$ ，则 $f(\log_{2\,025} m) = f(n)$ ，

由于 $f(x) = 2\,025^x + x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增，



故 $\log_{2\ 025} m = n$,

故 $\log_{2\ 025} m + 2\ 025^n = n + 2\ 025^n = 2\ 026$.

一题多解

$$\log_{2\ 025} m = -m + 2\ 026,$$

$$2\ 025^n = -n + 2\ 026,$$

设 $y = \log_{2\ 025} x$ 与 $y = -x + 2\ 026$ 图象的交点为 $A(m, \log_{2\ 025} m)$,

$y = 2\ 025^x$ 与 $y = -x + 2\ 026$ 图象的交点为 $B(n, 2\ 025^n)$,

由于 $y = \log_{2\ 025} x$ 和 $y = 2\ 025^x$ 互为反函数,

即 $y = \log_{2\ 025} x$ 和 $y = 2\ 025^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称,

而直线 $y = -x + 2\ 026$ 和直线 $y = x$ 垂直, 所以直线 $y = -x + 2\ 026$ 关于直线 $y = x$ 对称,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -x + 2\ 026, \\ y = x, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x = 1\ 013, \\ y = 1\ 013, \end{cases}$$

所以 $A(m, \log_{2\ 025} m)$ 与 $B(n, 2\ 025^n)$ 关于点 $(1\ 013, 1\ 013)$ 对称,

故 $\frac{\log_{2\ 025} m + 2\ 025^n}{2} = 1\ 013$, 所以 $\log_{2\ 025} m + 2\ 025^n = 2\ 026$.

10. $\frac{8}{9}$ 突破点 ▶ 已知对数型函数的值域求参数范围

【解析】若函数 $f(x) = \ln(2ax^2 - bx + c)$ 的值域为 \mathbf{R} ,

记 $g(x) = 2ax^2 - bx + c$, 则 $g(x)_{\min} \leq 0$, 故 $\Delta = b^2 - 8ac \geq 0$,

由 $a \geq b \geq c > 0$, 得 $c \leq \frac{b^2}{8a}$, 且 $a + b \geq a + c \geq b + c > 0$,

所以 $\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{c+a} \geq \frac{1}{a+b} > 0$, 又 $a \geq b \geq c > 0$,

所以 $\frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{c+a} \geq \frac{c}{a+b} > 0$,

故 $\max\left\{\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}\right\} = \frac{a}{b+c}$.

则由 $0 < c \leq \frac{b^2}{8a}$ 且 $0 < \frac{b}{a} \leq 1$,

可得 $\frac{a}{b+c} \geq \frac{b}{b+c} \geq \frac{b}{b+\frac{b^2}{8a}} = \frac{1}{1+\frac{b}{8a}} \geq$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{8}} = \frac{8}{9},$$

当且仅当 $\begin{cases} a = b, \\ c = \frac{b^2}{8a}, \end{cases}$ 即 $a = b = 8c > 0$ 时等号

成立.

所以 $\max\left\{\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}\right\}$ 的最小值

为 $\frac{8}{9}$.

第4节 函数的图象

刷

基础

1. AD 考查点 ▶ 对数函数图象的应用、函



数图象的变换

【解析】由题意可得, 函数 $y = \ln x$ 的图象纵坐标不变, 横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{e}$, 可得到函数 $y = \ln(ex)$ 的图象, 故选项 C 错误, 选项 D 正确.

$$\because y = \ln(ex) = \ln x + 1,$$

\therefore 将函数 $y = \ln x$ 的图象向上平移一个单位长度可得到函数 $y = \ln(ex)$ 的图象, 故选项 A 正确, 选项 B 错误.

故选 AD.

2. A 考查点 ▶ 函数图象变换

【解析】由 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$

知, $y = f\left(1 - \frac{1}{2}x\right)$ 中 $1 - \frac{1}{2}x > -1, x < 4$, 不符合图 2, 故排除 B, D;

对于 C, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = -f(0) > 0$, 不满足图 2, 故 C 错误;

将函数 $y = f(x)$ 的图象关于 y 轴对称变换, 得到 $y = f(-x)$ 的图象, 向右平移 1 个单位得到 $y = f(1-x)$ 的图象, 最后纵坐标不变, 横坐标变为原来的一半, 得到函数 $y = f(1-2x)$ 的图象可能为图 2.

故选 A.

3. D 考查点 ▶ 函数图象的识别

【解析】因为 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 关于原点对称,

$$\text{且 } f(-x) = \cos(-x) \cdot \ln(2^{-x} + 2^x) = \cos x \cdot \ln(2^{-x} + 2^x) = f(x),$$

所以 $f(x)$ 为偶函数, 其函数图象关于 y 轴对称, 故排除 A, C.

因为 $f(0) = \ln 2 > 0$, 故排除 B.

故选 D.

4. D 考查点 ▶ 用导数判断或证明已知函数的单调性

【解析】 $f(x) = \frac{e^x(2x-1)}{x-1}$, 定义域为 $\{x \mid x \neq 1\}$,

$$\therefore f'(x) = \frac{[e^x(2x-1) + 2e^x](x-1) - e^x(2x-1)}{(x-1)^2} = \frac{e^x(2x^2-3x)}{(x-1)^2},$$

令 $f'(x) > 0$, 得 $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $x \in (0, 1) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$, $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 上单调递减, 排除 A, C.

当 $x < 0$ 时, $2x-1 < 0$, $x-1 < 0$, $e^x > 0$, 所以 $f(x) > 0$, 排除 B,

只有 D 中图象符合题意. 故选 D.

**快解**(特值法) 当 $x=0$ 时, $f(0)=1$;当 $x=-1$ 时, $f(-1)=\frac{3}{2e}<1=f(0)$, 故排除

A, C. 排除 B 选项的方法同上. 故选 D.

5. A 考查点 根据函数图象选择解析式**【解析】**由图可知, 当 $x<0$ 时, $f(x)>0$, 故排除 B, D;设 $f(x)=\frac{e^{x+1}}{x^2}$, 则 $f(1)=e^2>3$, 故排除 C.

故选 A.

6. A 突破点 根据函数图象选择解析式**【解析】**由图可知, 函数图象对应的函数为偶函数, 排除 C;

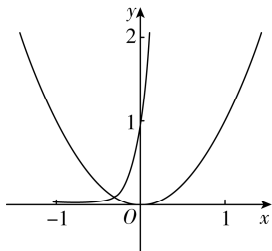
由图可知, 函数的定义域不是实数集, 排除 B;

由图可知, 当 $x\rightarrow+\infty$ 时, $y\rightarrow-\infty$,而对于 D 选项, 当 $x\rightarrow+\infty$ 时, $y\rightarrow 0$, 排除 D.

故选 A.

第5节 函数与方程**刷****基础****1. B 考查点** 零点存在定理的应用**【解析】**取 $m=0$ 易得命题 p 为假命题, 故命题 $\neg p$ 为真命题;构造函数 $f(x)=2\,025^x-x^2$, 其中 $x<0$,因为函数 $y=2\,025^x$, $y=-x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上均为增函数,所以函数 $f(x)=2\,025^x-x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上为增函数,因为 $f(-1)=\frac{1}{2\,025}-1<0$, $f(0)=1>0$,则 $f(-1)\cdot f(0)<0$,所以函数 $f(x)=2\,025^x-x^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上有且只有一个零点, 命题 q 为真命题.因此, $\neg p$ 和 q 都是真命题.

故选 B.

快解数形结合, 画出函数 $y=2\,025^x$, $y=x^2$ 的图象, 如图所示, 函数 $y=2\,025^x$, $y=x^2$ 的图象在 $(-\infty, 0)$ 上只有 1 个交点.**2. B 考查点** 判断零点所在的区间**【解析】**因为 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$, $y=-x^{\frac{1}{5}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上均单调递减,则 $f(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x-x^{\frac{1}{5}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调

递减,

可得 $f(0) = \left(\frac{1}{4}\right)^0 - 0^{\frac{1}{5}} = 1 - 0 = 1 > 0$.

因为幂函数 $y = x^{\frac{1}{5}}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递

增, 所以 $f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}} - \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{5}} > 0$,

且函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续不间断,

则 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{5}\right)$ 上无零点, 故 A 错误;

因为 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

则 $f\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}} < 0$, 则

$f\left(\frac{1}{5}\right)f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$, 且函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续不间断,

故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right)$ 上存在零点, 故 B 正确;

因为 $f(1) = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} < 0$, 且函数 $f(x)$

在 $(0, +\infty)$ 上连续不间断,

则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{4}, 1\right)$ 上无零点, 故 C 错误;

计算 $f(4) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 - 4^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{4}\right)^4 - \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{5}} < 0$,

且函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续不间断, 则 $f(x)$ 在 $(1, 4)$ 上无零点, 故 D 错误.

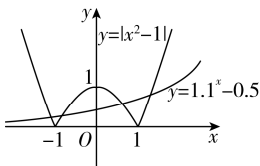
故选 B.

3. B 考查点 ▶ 求函数零点的个数

【解析】由 $f(x) = 0$, 得 $|x^2 - 1| = 1.1^x - 0.5$,

作出函数 $y = |x^2 - 1|$, $y = 1.1^x - 0.5$ 的大致图象 (提示: 将函数的零点个数问题转化为函数 $y = |x^2 - 1|$, $y = 1.1^x - 0.5$ 的图象的交点个数问题),

如图所示,



由图可知, 这两个函数的图象有 4 个交点, 则 $f(x)$ 的零点个数为 4.

故选 B.

4. C 考查点 ▶ 正弦函数图象的应用、求函数零点或方程根的个数、对勾函数求最值

【解析】令函数 $t = x + \frac{1}{x}$, 根据“对勾函

数”的性质可知, 函数 $t = x + \frac{1}{x}$ 在

$\left(\frac{1}{10}, 1\right]$ 上单调递减, 在 $[1, 10)$ 上单调递增,

且 $t(1) = 2, t\left(\frac{1}{10}\right) = t(10) = 10.1$.

所以当 $x \in \left(\frac{1}{10}, 10\right)$ 时, $t \in [2, 10.1)$,

由 $y = \sin t = 0 \Rightarrow t = k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

只有当 $k=1, 2, 3$ 时, t 的值分别对应 $\pi, 2\pi, 3\pi \in [2, 10.1)$.

又因为 $x + \frac{1}{x} = \pi, 2\pi, 3\pi$ 在 $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ 上各有 2 个解, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{10}, 10\right)$ 上有 6 个零点. 故选 C.

5. C 突破点 ▶ 求函数零点的个数

【解析】令 $\sin x = |e^x - 1|$,

当 $x=0$ 时, $\sin 0 = |e^0 - 1|$,

故 $x=0$ 是 $\sin x = |e^x - 1|$ 的一个根.

当 $x \in (0, 2\pi]$ 时, $\sin x = e^x - 1$.

令 $f(x) = e^x - 1 - \sin x, x \in (0, 2\pi]$ (提示: 将图象的交点个数问题转化为函数的零点个数问题),

则 $f'(x) = e^x - \cos x > 1 - \cos x \geq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $x \in (0, 2\pi]$ 上单调递增,

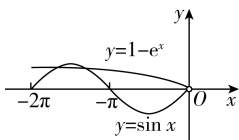
所以 $f(x) > f(0) = 0$,

所以 $x \in (0, 2\pi]$ 时, $e^x - 1 > \sin x$, 即方程 $\sin x = |e^x - 1|$ 在 $x \in (0, 2\pi]$ 上无实数根.

当 $x \in [-2\pi, 0)$ 时, $\sin x = 1 - e^x$,

$y = 1 - e^x$ 在 $x \in [-2\pi, 0)$ 上单调递减, 且 $y = 1 - e^x < 1$,

如图所示,



$y = 1 - e^x$ 与 $y = \sin x$ 的图象在 $x \in [-2\pi, 0)$ 上有两个交点,

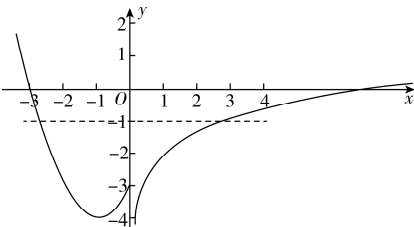
所以方程 $\sin x = |e^x - 1|$ 在 $x \in [-2\pi, 0)$ 上有两个不同的根.

综上所述, 当 $x \in [-2\pi, 2\pi]$ 时, 曲线 $y = \sin x$ 与 $y = |e^x - 1|$ 的交点个数为 3.

故选 C.

6. D 考查点 ▶ 根据函数零点的个数求参数范围

【解析】画出函数 $f(x)$ 的图象, 如图所示,



设 $f(x) = t$, 则原方程可化为 $t^2 + (a+1)t + a = 0$, 解得 $t = -1$ 或 $t = -a$.

由图可知当 $t = -1$ 时, $f(x) = -1$ 有 2 个根.

因为原方程有 4 个不同的实数根, 则 $f(x) = -a$ 有 2 个根,



所以 $-a = -4$ 或 $-3 < -a < -1$ 或 $-a > -1$,
解得 $a = 4$ 或 $1 < a < 3$ 或 $a < 1$, 则实数 a 的
取值范围为 $(-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup \{4\}$.
故选 D.

方法总结**复合函数的零点问题解题****思路**

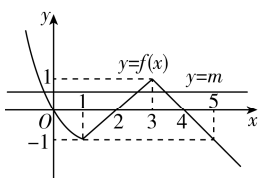
(1) 先看外层零点, 把外层零点一一列出: t_1, t_2, t_3, \dots ;

(2) 再从内层函数图象上作直线, $y = t_1, y = t_2, \dots$, 交点个数即为复合函数的零点个数.

7. $[-1, 1]$ 考查点 根据函数零点的个数求参数范围

【解析】 因为 $f(x) = \begin{cases} x(x-2), & x \leq 1, \\ x-2, & 1 < x \leq 3, \\ 4-x, & x > 3, \end{cases}$ 作

出 $f(x)$ 的大致图象如图所示,



则 $g(x)$ 至少有 2 个零点等价于直线 $y = m$ 与 $y = f(x)$ 的图象至少有 2 个交点, 由图可知 $-1 \leq m \leq 1$, 即实数 m 的取值范围为 $[-1, 1]$.

8. $(-1, 4]$ 考查点 根据零点所在的区间求参数范围

【解析】 当 $x \in [1, 4)$ 时, 由 $f(x) = kx - 4 + x \log_2 x = 0$, 可得 $k + \log_2 x - \frac{4}{x} = 0$.

令 $g(x) = k + \log_2 x - \frac{4}{x}$, 因为函数 $y = \log_2 x, y = k - \frac{4}{x}$ 均在 $[1, 4)$ 上单调递增,

所以函数 $g(x) = k + \log_2 x - \frac{4}{x}$ 在 $[1, 4)$ 上

单调递增.

因为函数 $f(x)$ 在区间 $[1, 4)$ 内有零点, 所以函数 $g(x)$ 在区间 $[1, 4)$ 内有零点,

所以 $\begin{cases} g(1) = k - 4 \leq 0, \\ g(4) = k + 1 > 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < k \leq 4$, 因

此实数 k 的取值范围是 $(-1, 4]$.

9. D 考查点 比较零点的大小

【解析】 因为 $x = 1$ 时, $x\sqrt{x} - 1 = 0$, 又因为

$y = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ 单调递增, 所以 $a = 1$;

若 $0 < x \leq 1$, 则 $x \lg x \leq 0$, 所以 $x \lg x - 1 = 0$ 时, $x > 1$, 即 $b > 1$;

若 $x \geq 1$, 则 $xe^x > 1$, 所以 $xe^x - 1 = 0$ 时, $0 < x < 1$, 即 $0 < c < 1$.

综上所述, $0 < c < 1 = a < b$,

故选 D.

10. A 考查点 求零点的和

【解析】 由 $\sqrt{1+x^2} - x > |x| - x \geq 0$, 得函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ,

又 $f(-x) + f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} + x) - x^3 +$



$\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+x^3=0$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数(提示:求零点的和的问题经常需要分析函数图象的对称性),

函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,0)$ 对称, 则函数 $f(x+2)$ 的图象关于点 $(-2,0)$ 对称,

由 $\forall x \in \mathbf{R}, g(x-4)+g(-x)=0$, 得函数 $g(x)$ 的图象关于点 $(-2,0)$ 对称,

因此函数 $h(x)$ 的图象关于点 $(-2,0)$ 对称, 由函数 $h(x)$ 恰有 2 025 个零点,

得函数 $h(x)$ 的一个零点为 $x=-2$, 其余零点关于直线 $x=-2$ 对称,

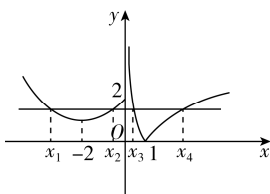
所以所有零点之和为 $1\,012 \times (-4) + (-2) = -4\,050$.

故选 A.

11. $\frac{129}{8}$ 突破点 ▶ 函数多零点的最值

【解析】作出函数图象可得 $\frac{x_1+x_2}{2} = -2$,

$$-\log_2 x_3 = \log_2 x_4,$$



从而得 $x_3 x_4 = 1$, 且 $-\log_2 x_3 \in (1, 2]$, 从而得 $\frac{1}{x_3} \in (2, 4]$,

$$\therefore \text{原式} = \frac{1}{x_3^2} - \frac{x_3^2(x_1+x_2)}{2} = \frac{1}{x_3^2} + 2x_3^2 \quad (\text{提示:多元问题通过消元变为单元问题}),$$

$$\therefore \frac{1}{x_3} \in (2, 4], \therefore \frac{1}{x_3^2} \in (4, 16],$$

$$\text{令 } t = \frac{1}{x_3^2}, \text{ 则 } f(t) = t + \frac{2}{t}, t \in (4, 16],$$

$\therefore f(t)$ 在 $(4, 16]$ 上单调递增,

$$\therefore f(t) \in \left(\frac{9}{2}, \frac{129}{8} \right],$$

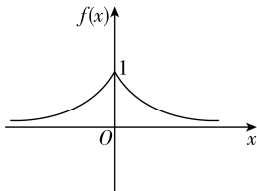
$$\therefore \text{最大值为 } \frac{129}{8}.$$

12. $(0, 1)$ 考查点 ▶ 根据函数零点的个数求参数范围

【解析】函数 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$ 是偶函数, 大致图象如图所示(易错:带渐近线作图),

$$\text{方程 } f^2(x) - (a+1)f(x) + a = 0,$$

$$\text{分解因式得 } [f(x)-1] \cdot [f(x)-a] = 0,$$



解得 $f(x) = 1$ 或 $f(x) = a$,

由函数 $f(x)$ 的图象可知, $f(x) = 1$ 只有 1 个根, 所以 $f(x) = a$ 需有 2 个根才满足题意,



所以实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$.

刷**提分**

1. D 考查点 ▶ 判断函数零点所在的区间

【解析】函数 $f(x) = 2^x + x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

$$f(-1) = -\frac{1}{2} < 0, f(0) = 1 > 0, \text{故 } f(x) \text{ 的零点 } a \in (-1, 0) \text{ (提示:应用零点存在定理判断零点所在区间)},$$

由 $h(x) = \log_2 x + x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

得 $h\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} < 0, h(1) = 1 > 0,$

$$\text{因此 } h(x) \text{ 的零点 } b \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), \text{则 } a < b < 1.$$

故选 D.

2. B 突破点 ▶ 零点存在定理的应用、求等差数列前 n 项和

【解析】令 $f(x) = x^2 + \log_{n+1} x^n - n^2 - 3n$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$$\text{因为 } f(n) = n^2 + \log_{n+1} n^n - n^2 - 3n = n \log_{n+1} n - 3n < n - 3n = -2n < 0,$$

$$f(n+1) = (n+1)^2 + \log_{n+1} (n+1)^n - n^2 - 3n = 1 > 0,$$

所以由零点存在定理可得 $n < x_n < n+1$, 则

$$\frac{n}{2} < \frac{x_n}{2} < \frac{n+1}{2},$$

当 n 为正奇数时, 设 $n = 2k+1 (k \in \mathbf{N})$,

$$\text{则 } k + \frac{1}{2} < \frac{x_n}{2} < k+1, \text{则 } a_n = \left\lfloor \frac{x_n}{2} \right\rfloor = k,$$

当 n 为正偶数时, 设 $n = 2k (k \in \mathbf{N}^*)$,

$$\text{则 } k < \frac{x_n}{2} < k + \frac{1}{2}, \text{则 } a_n = \left\lfloor \frac{x_n}{2} \right\rfloor = k,$$

所以 $S_{2\,025} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + \cdots +$

$$(a_{2\,024} + a_{2\,025}) = 0 + 1 \times 2 + 2 \times 2 + \cdots + 1\,012 \times$$

$$2 = \frac{(2 + 2 \times 1\,012) \times 1\,012}{2} = 1\,012 \times 1\,013.$$

故选 B.

3. C 突破点 ▶ 函数零点的应用

【解析】易知 x_1, x_2, x_3 是 $f(x)$ 的零点,

在 $f(1+x)f(3-x) \leq 0$ 中, 令 $x = 1$ 得

$$[f(2)]^2 \leq 0, \text{所以 } f(2) = 0, \text{所以 } x_1, x_2,$$

x_3 中有一个为 2, 设另外两个零点为 a, b

$$(a < b), \text{则 } f(x) = (x-2)(x-a)(x-b).$$

所以 $f(1+x)f(3-x) = -(x-1)^2(x+1-a)(x+1-b)(3-x-a)(3-x-b) = -(x-1)^2(x+1-a)(x+1-b)(x+a-3)(x+b-3)$, 由 $f(1+x)f(3-x) \leq 0$, 得 $(x+1-a)(x+1-b)(x+a-3)(x+b-3) \geq 0$ 恒成立, 又 $1-a > 1-b, 1-a \neq a-3$, 所以 $1-a = b-3$ 且 $1-b = a-3$, 所以 $a+b = 4$, 所以 $x_1 + x_2 + x_3 = a+b+2 = 6$. 故选 C.

4. ABD 突破点 ▶ 指数幂的运算、对数的运算、判断零点所在的区间



【解析】设函数 $f(x) = e^x + x - 2$, 显然为增函数, $f(0) = -1 < 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2} > 0$, 由已知 $f(x_1) = 0$, 故 $0 < x_1 < \frac{1}{2}$, 故 A 正确;

由 $x_2 \ln x_2 = 1 - 2x_2$, 有 $e^{\ln \frac{1}{x_2}} + \ln \frac{1}{x_2} - 2 = 0$,

则 $x_1 = \ln \frac{1}{x_2}$, $e^{x_1} = \frac{1}{x_2}$, 又 $e^{x_1} = 2 - x_1$, 则

$x_2(2 - x_1) = 1$, 故 B 正确;

由 $0 < \ln \frac{1}{x_2} < \frac{1}{2}$, 得 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{e}} < x_2 < 1$, 则 $x_2 > x_1$, 故 C 错误;

由 $x_2(2 - x_1) = 1$ 得 $x_1 = 2 - \frac{1}{x_2}$, 则 $x_2 - x_1 =$

$x_2 + \frac{1}{x_2} - 2$, 由于 $\frac{1}{2} < x_2 < 1$, 得 $0 < x_2 + \frac{1}{x_2} -$

$2 < \frac{1}{2}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

5. D 突破点 ▶ 求函数零点或方程根的个数

【解析】因为 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2, & x \leq 0, \\ |\ln x|, & x > 0, \end{cases}$ 当

$x \leq 0$ 时, $f(x) = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在

$(-1, 0)$ 上单调递增, 且 $f(-1) = 1$,

$f(0) = f(-2) = 2$.

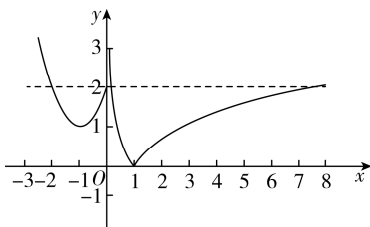
当 $x > 0$ 时, $f(x) = |\ln x| =$

$\begin{cases} \ln x, & x \geq 1, \\ -\ln x, & 0 < x < 1, \end{cases}$ 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上

单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

且 $f(e^{-2}) = f(e^2) = 2$.

作出函数 $y = f(x)$ 的图象, 如图所示,



令 $f(x) - 2 = t$, 则有 $f(t) = 2$,

易得此时有 4 个解, 分别为 $t_1 = -2, t_2 =$

$0, t_3 = e^{-2}, t_4 = e^2$,

结合图象可得,

当 $t = -2$ 时, 即 $f(x) = 0$, 有 1 个解;

当 $t = 0$ 时, 即 $f(x) = 2$, 有 4 个解;

当 $t = e^{-2}$ 时, 即 $f(x) = 2 + e^{-2}$, 有 3 个解;

当 $t = e^2$ 时, 即 $f(x) = 2 + e^2$, 有 3 个解.

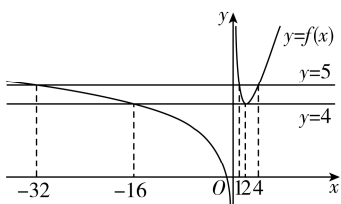
所以原方程共有 $1 + 4 + 3 + 3 = 11$ 个解.

故选 D.

6. B 突破点 ▶ 根据零点或方程根的个数求最值

【解析】画出 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{4}{x}, & x > 0, \\ \log_2(-x), & x < 0 \end{cases}$ 的图

象, 如图所示,



令 $f(x) = t$, 则 $g(t) = t^2 + at + b = 0$,

根据 $f(x)$ 的图象可知, 要满足题意, $g(t) = 0$ 必须有两个不等实根 t_1, t_2 ($t_1 < t_2$),

且 $f(x) = t_1$ 有两个整数根, $f(x) = t_2$ 有三个整数根,

结合图象, 当 $y = t_1$ 与 $y = x + \frac{4}{x}$ 相切时满足要求,

根据对勾函数性质得, $y = x + \frac{4}{x}$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增,

故当 $x = 2$ 时, $y = x + \frac{4}{x}$ 取得最小值, 最小

值为 $y = 2 + \frac{4}{2} = 4$, 故 $t_1 = 4$,

又 $y = \log_2 |-x| = \log_2 (-x)$, $x < 0$, 其在定义域内单调递减,

令 $\log_2 (-x) = 4$, 解得 $x = -16$,

故 $f(x) = t_1 = 4$ 时, 有两个整数根, 分别为 2 和 -16.

由图象可知, $f(x) = t_2$ 的三个整数根中, 必有根小于 2,

显然只有 $x = 1$ 满足要求, 此时 $f(1) = 1 + 4 = 5$, 故 $t_2 = 5$,

令 $x + \frac{4}{x} = 5$, 解得另一个根为 4,

又 $\log_2 (-x) = 5$, 解得 $x = -32$,

故五个整数根分别为 -32, -16, 1, 2, 4,

所以最大整数解和最小整数解之积为 $-32 \times 4 = -128$.

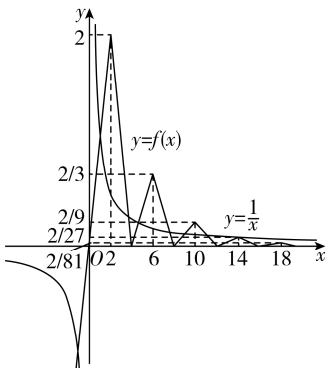
故选 B.

7. B 突破点 ▶ 求函数零点或方程根的个数

【解析】依题意, $g(x) = 0 \Leftrightarrow xf(x) - 1 = 0$,

显然 $x \neq 0$, 则 $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x}$,

在同一坐标系内作出函数 $y = f(x)$, $y = \frac{1}{x}$ 的图象, 如图,



当 $x \leq 2$ 时, 由 $f(x) = \frac{1}{x}$, 得 $x = \frac{1}{x}$, 解得



$$x = \pm 1,$$

当 $2 < x < 4$ 时, 由 $f(x) = \frac{1}{x}$, 得 $x^2 - 4x + 1 =$

0, 则 $x = 2 + \sqrt{3}$,

所以当 $x < 4$ 时, 函数 $g(x)$ 有 3 个零点;

当 $x \geq 4$ 时, $f(6) = \frac{2}{3} > \frac{1}{6}$, $f(10) = \frac{2}{9} >$

$\frac{1}{10}$, $f(14) = \frac{2}{27} > \frac{1}{14}$, $f(18) = \frac{2}{81} < \frac{1}{18}$,

观察图象知, 在区间 $(4, 8)$, $(8, 12)$,

$(12, 16)$ 上, 函数 $g(x)$ 各有 2 个零点,

当 $x \in [4k, 4(k+1))$, $k \in \mathbf{N}^*$ 时,

$$f(x)_{\max} = f(4k+2) = \frac{2}{3^k},$$

$$\text{令 } h(k) = \frac{\frac{1}{4k+2}}{f(4k+2)} = \frac{3^k}{8k+4}, \quad h(k+1) -$$

$$h(k) = \frac{3^{k+1}}{8k+12} - \frac{3^k}{8k+4} =$$

$$\frac{k \cdot 3^k}{(2k+3)(2k+1)} > 0,$$

函数 $h(k)$ 对 $k \in \mathbf{N}^*$ 是递增的, $h(3) =$

$$\frac{27}{28} < 1, \quad h(4) = \frac{81}{36} > 1,$$

因此当 $k \in \{1, 2, 3\}$ 时, $\frac{2}{3^k} > \frac{1}{4k+2}$, 当 $k \in$

\mathbf{N}^* , $k \geq 4$ 时, $\frac{2}{3^k} < \frac{1}{4k+2}$,

则当 $x \geq 16$ 时, 函数 $g(x)$ 无零点, 所以函数 $g(x)$ 的零点个数为 9.

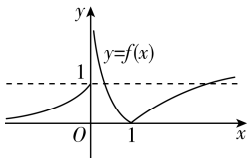
故选 B.

8. B 考查点 根据函数零点的个数求参数范围

【解析】由函数 $g(x) = [f(x)]^2 - 2(m+2)f(x) + 4m$ 恰有 5 个零点,

得方程 $[f(x)]^2 - 2(m+2)f(x) + 4m = 0$ 有 5 个不同的实数根,

在平面直角坐标系中作出函数 $y = f(x)$ 的图象,



令 $t = f(x)$, 观察图象知, 当 $0 < t \leq 1$ 时, 直线 $y = t$ 与 $y = f(x)$ 的图象有 3 个交点,

当 $t > 1$ 时, 直线 $y = t$ 与 $y = f(x)$ 的图象有 2 个交点,

$$\text{令 } h(t) = t^2 - 2(m+2)t + 4m,$$

由函数 $g(x)$ 有 5 个零点, 得 $h(t) = 0$ 有两个不等实根 t_1, t_2 ($t_1 < t_2$), 且 $t_1 \in (0, 1]$, $t_2 \in (1, +\infty)$,

$$\text{因此 } \begin{cases} \Delta = 4(m+2)^2 - 16m > 0, \\ h(0) = 4m > 0, \\ h(1) = 2m - 3 \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{解得 } 0 < m \leq \frac{3}{2},$$

所以实数 m 的取值范围是 $\left(0, \frac{3}{2}\right]$.

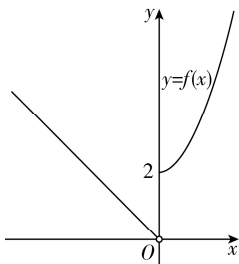


故选 B.

9. B 突破点 根据函数零点或方程根的个数求参数

【解析】当 $a=0$ 时, $f(x) = \begin{cases} x^2+2, & x \geq 0, \\ |x|, & x < 0, \end{cases}$ 作

出函数 $f(x)$ 的图象如图(1)所示(提示:已知零点个数求参数范围的主要方法为数形结合法,即将函数的解析式或者方程进行适当的变形,把函数的零点或方程的根的问题转化为两个熟悉的函数图象的交点问题,再结合图象求参数的取值范围),



图(1)

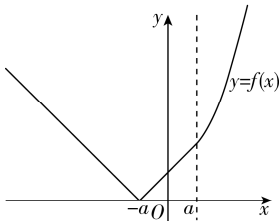
由图(1)可知,当 $0 < k < 2$ 时,关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有且只有一个实根,不符合题意;

当 $a > 0$ 时, $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2, & x \geq a, \\ x + a, & -a < x < a, \\ -x - a, & x \leq -a, \end{cases}$ 此

时 $f(x)$ 的大致图象如图(2)所示,

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -a)$ 上单调递减,在 $(-a, a)$ 上单调递增,在 $(a, +\infty)$ 上单调递增,

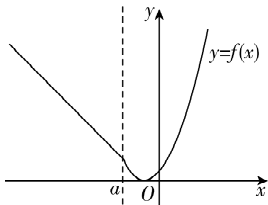
由题意可得 $a^2 - a^2 + 2 = |2a| = 2a$, 解得 $a = 1$;



图(2)

若 $a < 0$, 则 $f(x) = \begin{cases} x^2 - ax + 2, & x \geq a, \\ -x - a, & x < a, \end{cases}$ 此

时 $f(x)$ 的大致图象如图(3)所示,



图(3)

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递减,在

$(a, \frac{a}{2})$ 上单调递减,在 $(\frac{a}{2}, +\infty)$ 上单调递增,

由题意可得 $\begin{cases} a^2 - a^2 + 2 = -2a, \\ \Delta = a^2 - 8 \geq 0, \end{cases}$ 此时 a

无解.

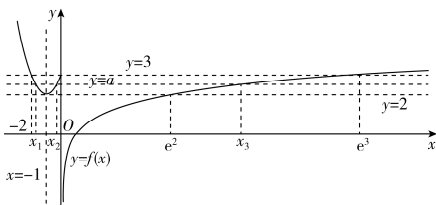
综上所述, $a = 1$.

故选 B.

10. e^3 突破点 ▶ 求多零点最值

【解析】由题得 $f(-1) = 2, f(0) = 3$, 当 $f(x) = 3$ 时, $x = -2, 0, e^3$; 当 $f(x) = 2$ 时, $x = -1, e^2$.

故作出 $f(x)$ 的图象如图所示,



因为存在实数 x_1, x_2, x_3 且 $x_1 < x_2 < x_3$, 使得 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = a$,

所以直线 $y = a$ 与 $y = f(x)$ 的图象有三个交点,

所以 $2 < a \leq 3$, 且 $-2 \leq x_1 < -1 < x_2 \leq 0 < e^2 < x_3 \leq e^3, x_1 + x_2 = -2$,

所以 $x_3(x_1 + x_2 + \ln x_3) = e^a(-2 + a)$ (提示: 消元, 化多元为单元),

设 $g(a) = e^a(-2 + a), 2 < a \leq 3$, 则 $g'(a) = e^a(-2 + a) + e^a = (a - 1)e^a > 0$ 恒成立,

所以函数 $g(a)$ 在 $(2, 3]$ 上单调递增, 所以函数 $g(a)_{\max} = g(3) = e^3$,

所以 $x_3(x_1 + x_2 + \ln x_3)$ 的最大值为 e^3 .

第 6 节 函数模型及其应用

刷基础

1. D 考查点 ▶ 指数式与对数式的互化、对数函数模型的应用

【解析】设北极星与牛郎星的亮度分别为

$$I_1, I_2, \text{依题意, } \begin{cases} 2 = -\frac{5}{2} \lg \frac{I_1}{I_0}, \\ 0.8 = -\frac{5}{2} \lg \frac{I_2}{I_0}, \end{cases}$$

$$\text{两式相减得 } -\frac{5}{2} \lg \frac{I_1}{I_2} = \frac{6}{5},$$

$$\text{解得 } \frac{I_1}{I_2} = 10^{-\frac{12}{25}}.$$

故选 D.

2. A 考查点 ▶ 指数函数模型的应用

【解析】由题意可知, $0.5P_0 = P_0 e^{-10k}$, 即

$$0.5 = e^{-10k}, \text{即 } k = \frac{\ln 2}{10}.$$

设消除 60% 的污染物对应时间为 t_1 , 则

$$0.4P_0 = P_0 e^{-kt_1} \text{ ①};$$

设消除 80% 的污染物对应时间为 t_2 , 则

$$0.2P_0 = P_0 e^{-kt_2} \text{ ②}.$$

$$\text{①②两式相除可得, } 2 = e^{-k(t_1 - t_2)},$$

$$\text{即 } \ln 2 = -k(t_1 - t_2),$$

$$\text{所以 } t_2 - t_1 = 10,$$

即从消除 60% 的污染物到消除 80% 的污染物大约需要经历 10 h.

故选 A.

3. D 考查点 ▶ 指数函数模型的应用



【解析】由题意可知 $\begin{cases} 194 = e^b + 2, \\ 50 = e^{22k+b} + 2, \end{cases}$

$$\text{即 } \begin{cases} b = \ln 192, \\ \ln 48 = 22k + b, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} b = \ln 192, \\ \ln \frac{1}{4} = 22k, \\ k = \frac{1}{22}, \end{cases} \text{ 即 } y =$$

$$e^{\frac{\ln \frac{1}{4}}{22}x + \ln 192} + 2,$$

$$\text{当 } x = 33 \text{ 时, } y = e^{\frac{\ln \frac{1}{4}}{22} \times 33 + \ln 192} + 2 = e^{\ln \frac{1}{8} + \ln 192} + 2 = e^{\ln 24} + 2 = 26.$$

故选 D.

4. ABD 考查点 ▶ 对数函数模型的应用

【解析】记 i 级地震的能量为 E_i ,

若 $M \leq 2$, 则 $\lg E = 4.8 + 1.5M \leq 7.8$, 所以 $E \leq 10^{7.8} < 10^8$, 故 A 项正确;

若 $M > 4$, 则 $\lg E = 4.8 + 1.5M > 10.8$, 所以 $E > 10^{10.8} > 10^{10}$, 故 B 项正确;

$$\lg E_5 - \lg E_4 = 4.8 + 1.5 \times 5 - 4.8 - 1.5 \times 4 =$$

$$1.5, \text{ 则 } \frac{E_5}{E_4} = 10^{1.5} \neq 100, \text{ 故 C 项错误;}$$

$$\lg E_3 - \lg E_7 = 4.8 + 1.5 \times 3 - 4.8 - 1.5 \times 7 =$$

$$-6, \text{ 则 } \frac{E_3}{E_7} = \frac{1}{10^6}, \text{ 故 D 项正确.}$$

故选 ABD.

5. D 突破点 ▶ 构建函数模型解决实际问题

【解析】设 2025 年后第 x 年该市全年用于垃圾分类的资金开始超过 1.28 亿元, 则 $5\,000(1+20\%)^x > 12\,800$, 即 $1.2^x > 2.56$,

$$\text{则 } x \cdot \lg 1.2 > \lg 2.56 = \lg \frac{256}{100} = \lg 256 - 2 = 8\lg 2 - 2,$$

$$\text{即 } x > \frac{8\lg 2 - 2}{\lg 1.2} \approx \frac{8 \times 0.301 - 2}{0.079} \approx 5.16.$$

所以 $x = 6$, 即 2031 年该市全年用于垃圾分类的资金开始超过 1.28 亿元.

故选 D.

6. 4 突破点 ▶ 构建函数模型解决实际问题

【解析】设至少经过 n 个小时后才能驾驶, 则有 $60 \times (1-30\%)^n < 20$,

$$\text{即 } 0.7^n < \frac{1}{3}, \text{ 两边同时取对数,}$$

$$\text{得 } \lg 0.7^n < \lg \frac{1}{3}, \text{ 即 } n \lg 0.7 < \lg \frac{1}{3},$$

$$\text{因为 } \lg 0.7 < 0, \text{ 所以 } n > \frac{\lg \frac{1}{3}}{\lg 0.7} = \frac{\lg 3^{-1}}{\lg \frac{7}{10}} =$$

$$\frac{-\lg 3}{\lg 7 - \lg 10} \approx \frac{-0.48}{0.85 - 1} = 3.2,$$

所以 $n \geq 4$, 即至少经过 4 个小时才能驾驶.

全章综合训练

刷

情境

1. C 创新点 ▶ 新情境

【解析】假设经过 n 天，“进步”是“退步”的 2 倍，

$$\text{则} \left(\frac{1.01}{0.99} \right)^n = 2, \text{即} \left(\frac{101}{99} \right)^n = 2,$$

$$\text{解得 } n = \log_{\frac{101}{99}} 2 = \frac{\lg 2}{\lg 101 - \lg 99} = \frac{0.301\ 030}{2.004\ 321 - 1.995\ 635} \approx 35,$$

即经过约 35 天，“进步”是“退步”的 2 倍。

故选 C.

2. D 创新点 ▶ 新定义

【解析】 $f(x)$ 的周期为 1, 则 $f(x+1) = f(x) = f(x-1)$, 从而有 $f(x-1) - f(x) = 0$, 因此 $f(x)$ 具有性质 $R(-1)$, 但 $f(x+1) + f(x) = 2f(x) = 0$ 不一定成立, A 错误;

$f(x) = \sin \pi x, f(x+1) = \sin(x+1)\pi = \sin(x\pi + \pi) = -\sin x\pi = -f(x)$, 所以 $f(x+1) + f(x) = 0$, 所以 $f(x)$ 具有性质 $R(1)$, B 错误;

若 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 满足性质 $R(\lambda)$, 则 $f(x+\lambda) + \lambda f(x) = a^{x+\lambda} + \lambda a^x = a^x(a^\lambda + \lambda) = 0$, 所以 $a^\lambda + \lambda = 0$, 从而 $\lambda = -a^\lambda < 0$, C 错误;

偶函数 $f(x)$ 满足性质 $R(-1)$, 即 $f(x-1) - f(x) = 0$, 又 $f(x)$ 是偶函数,

所以 $f(1-x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 图象关于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称, D 正确.

故选 D.

3. B 创新点 ▶ 新定义

【解析】由于 $y = 2^x + t$ 为增函数, 故 $f(x) = \log_4(2^x + t)$ 为增函数,

$$\text{则} \begin{cases} \log_4(2^a + t) = \frac{a}{4}, \\ \log_4(2^b + t) = \frac{b}{4}, \end{cases} \text{即} \begin{cases} 2^a + t = 4^{\frac{a}{4}} = 2^{\frac{a}{2}}, \\ 2^b + t = 4^{\frac{b}{4}} = 2^{\frac{b}{2}}, \end{cases}$$

所以 a, b 是方程 $2^x - 2^{\frac{x}{2}} + t = 0$ 的两个实数根.

设 $m = 2^{\frac{x}{2}}$, 则 $m > 0$, 关于 m 的方程为 $m^2 - m + t = 0$ 有两个不等的正实根,

$$\text{所以} \begin{cases} 1^2 - 4t > 0, \\ t > 0, \end{cases} \text{解得 } 0 < t < \frac{1}{4}.$$

故选 B.

4. A 创新点 ▶ 新定义

【解析】因为函数 $y = e^x, y = -e^{-x}, y =$

$$x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0 \end{cases} \text{均在 } \mathbf{R} \text{ 上为增函数,}$$

所以 $f(x) = e^x - e^{-x} + x|x|$ 在 \mathbf{R} 上为增函数, 且 $f(0) = 0$,

故 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的唯一零点, 要使 $f(x)$ 和 $g(x)$ 互为“ π 亲近函数”,

则存在 $x_2 - 0 \in (-\pi, \pi)$, 使得 $g(x_2) = f(0) = 0$, 即 $g(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内存在零点,

所以方程 $a \sin x = -\cos^2 x + 3 = \sin^2 x + 2$ 有



解, 令 $\sin x = t$, 则 $t \in [-1, 1]$,

故 $at = t^2 + 2$, 易知 $t = 0$ 不是此方程的解;

当 $t \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ 时, 有 $a = t + \frac{2}{t}$, 由

对勾函数的性质可知, $t + \frac{2}{t} \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$,

故 a 的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

故选 A.

5. C 创新点 ▶ 新定义

【解析】由隐对称点的定义可知函数 $f(x)$ 的图象上存在关于原点对称的点, 设 $g(x)$ 的图象与函数 $f(x) = x^2 + 4x (x > 0)$ 的图象关于原点对称,

令 $x < 0$, 则 $-x > 0$, 所以 $f(-x) = x^2 - 4x$,

所以 $g(x) = -f(-x) = -x^2 + 4x (x < 0)$,

因为 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x > 0, \\ mx + 2, & x \leq 0, \end{cases}$ 又 $f(0) = 2 \neq -f(0)$,

所以函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x > 0, \\ mx + 2, & x \leq 0 \end{cases}$ 的图象存在

“隐对称点”等价于 $g(x)$ 与 $f(x)$ 的图象在 $(-\infty, 0)$ 上有交点, 即方程 $mx + 2 = -x^2 + 4x (x < 0)$ 有实数根, 则 $m = -x - \frac{2}{x} + 4$,

又 $-x - \frac{2}{x} + 4 \geq 2\sqrt{-x \times \left(-\frac{2}{x}\right)} + 4 = 2\sqrt{2} + 4$,

当且仅当 $-x = -\frac{2}{x}$, 即 $x = -\sqrt{2}$ 时等号成立, 所以 $m \geq 2\sqrt{2} + 4$.

故选 C.

6. AC 创新点 ▶ 新定义

【解析】 $[t] = 1$, 则 $1 \leq t < 2$;

$[t^2] = 2$, 则 $2 \leq t^2 < 3$, 即 $2^{\frac{1}{2}} \leq t < 3^{\frac{1}{2}}$;

$[t^3] = 3$, 则 $3 \leq t^3 < 4$, 即 $3^{\frac{1}{3}} \leq t < 4^{\frac{1}{3}}$;

$[t^4] = 4$, 则 $4 \leq t^4 < 5$, 即 $4^{\frac{1}{4}} \leq t < 5^{\frac{1}{4}}$;

...

$[t^n] = n$, 则 $n \leq t^n < n+1$, 即 $n^{\frac{1}{n}} \leq t < (n+1)^{\frac{1}{n}}$, 故 A 正确;

当 $n=1$ 时, $[1, 2) \subseteq [\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 显然错误, 故 B 错误;

设 $A_n = [n^{\frac{1}{n}}, (n+1)^{\frac{1}{n}})$, $n \in \mathbf{N}^*$, 根据题意, $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \neq \emptyset$,

① $A_2 \subseteq A_1$, 即 $A_1 \cap A_2 = A_2$,

② $3^{\frac{1}{3}} > 2^{\frac{1}{2}}$, $4^{\frac{1}{3}} < 3^{\frac{1}{2}}$, 则 $A_3 \subseteq A_2$, 即 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_3$,

③ $A_4 = [4^{\frac{1}{4}}, 5^{\frac{1}{4}})$, $A_5 = [5^{\frac{1}{5}}, 6^{\frac{1}{5}})$, $A_3 \cap A_4 \neq \emptyset$, $A_4 \cap A_5 = \emptyset$,

可得 $3^{\frac{1}{3}}$ 是所有区间左端点中的最大值,

且 $6^{\frac{1}{5}} < 3^{\frac{1}{3}} < 5^{\frac{1}{4}}$,

故使得 $[t] = 1$, $[t^2] = 2$, \dots , $[t^n] = n$, $n \in$



N^* 同时成立的 n 的最大值是 4,

故 C 正确, D 错误.

故选 AC.

刷

真题

1. $(-\infty, 0) \cup (0, 1]$ **命题点** ▶ 函数的定义域

【解析】因为 $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{1-x}$, 所以

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 1-x \geq 0, \end{cases} \text{ 解得 } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1].$$

2. 0 (答案不唯一) 1 **命题点** ▶ 根据分段函数的最值求参数

【解析】若 $a = 0$, 则函数 $f(x) =$

$$\begin{cases} 1, x < 0, \\ (x-2)^2, x \geq 0 \end{cases} \text{ 存在最小值 } 0, \text{ 所以 } a \text{ 的}$$

一个取值可以为 0. 若 $a < 0$, 则当 $x < a$ 时,

$f(x) = -ax + 1$ 单调递增, 函数 $f(x)$ 不可能存在最小值. 若 $0 < a \leq 2$, 则当 $x < a$ 时,

$f(x) = -ax + 1 \in (-a^2 + 1, +\infty)$; 当 $x \geq a$ 时, $f(x) = (x-2)^2 \in [0, +\infty)$, 若函数

$f(x)$ 存在最小值, 则 $-a^2 + 1 \geq 0$, 解得 $0 < a \leq 1$. 若 $a > 2$, 则当 $x < a$ 时, $f(x) = -ax +$

$1 \in (-a^2 + 1, +\infty)$; 当 $x \geq a$ 时, $f(x) = (x-2)^2 \in [(a-2)^2, +\infty)$, 若函数 $f(x)$

存在最小值, 则 $-a^2 + 1 \geq (a-2)^2$, 不等式无解.

综上, $0 \leq a \leq 1$, 所以 a 的最大值为 1.

3. $\frac{37}{28}$ $3 + \sqrt{3}$ **命题点** ▶ 分段函数的求值问题、不等式的解法

【解析】因为 $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \frac{7}{4}$, 所

以 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4} + \frac{4}{7} - 1 =$

$\frac{37}{28}$. 当 $x \leq 1$ 时, 由 $1 \leq -x^2 + 2 \leq 3$, 解得

$-1 \leq x \leq 1$; 当 $x > 1$ 时, 由 $1 \leq x + \frac{1}{x} - 1 \leq$

3, 解得 $1 < x \leq 2 + \sqrt{3}$, 综上所述, $1 \leq f(x) \leq$

3 的解集为 $[-1, 2 + \sqrt{3}]$, 所以 $[a, b] \subseteq$

$[-1, 2 + \sqrt{3}]$, 所以 $(b-a)_{\max} = 2 + \sqrt{3} - (-1) = 3 + \sqrt{3}$.

4. 1 **命题点** ▶ 含绝对值函数的最值

【解析】由题意得 $f(x) =$

$$\begin{cases} 2x-1-2\ln x, x > \frac{1}{2}, \\ 1-2x-2\ln x, 0 < x \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \text{ 当 } x > \frac{1}{2} \text{ 时,}$$

$f'(x) = 2 - \frac{2}{x} = \frac{2x-2}{x}$, 则当 $x \in$

$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在

$\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递减; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时,

$f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递

增. 所以当 $x > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)_{\min} = f(1) = 1$. 当



$$0 < x \leq \frac{1}{2} \text{ 时, } f'(x) = -2 - \frac{2}{x} = \frac{-2x-2}{x},$$

则 $f'(x) < 0$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上恒成立, 所以

以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2}]$ 上单调递减, 所以当

$0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, 函数 $f(x)_{\min} = f(\frac{1}{2}) = 2\ln 2 = \ln 4 > 1$. 综上所述, 函数 $f(x)$ 的最小值为 1.

5. A 命题点 ▶ 利用函数的周期性与奇偶性求函数值

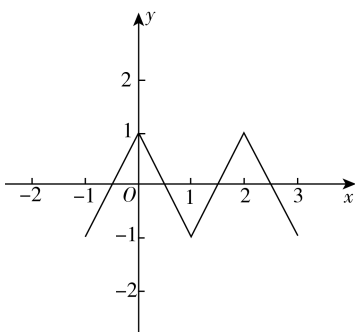
【解析】 由 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上且周期为 2

的偶函数可得, $f(-\frac{3}{4}) = f(\frac{3}{4}) =$

$f(\frac{3}{4} + 2) = f(\frac{11}{4})$. 因为当 $2 \leq x \leq 3$ 时,

$f(x) = 5 - 2x$, 所以 $f(\frac{11}{4}) = 5 - 2 \times \frac{11}{4} =$

$-\frac{1}{2}$, 即 $f(-\frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}$. 故选 A.



6. B 命题点 ▶ 分段函数的单调性

【解析】 当 $x < 0$ 时, 函数 $f(x) = -x^2 - 2ax -$

$a = -(x+a)^2 + a^2 - a$, 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,$

$0)$ 上单调递增, 则有 $-a \geq 0$, 即 $a \leq 0$; 当

$x \geq 0$ 时, 函数 $f(x) = e^x + \ln(x+1)$, 函

数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增. 因为函

数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 所以 $-a \leq e^0 +$

$\ln(0+1) = 1$, 解得 $a \geq -1$. 综上所述可得 $-1 \leq$

$a \leq 0$. 故选 B.

快解

当 $a = 1$ 时, $f(x) =$

$\begin{cases} -(x+1)^2, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0, \end{cases}$ 显然函数 $f(x) =$

$-(x+1)^2$ 在 $(-\infty, 0)$ 上不单调, 可排除 C

选项和 D 选项; 当 $a = -2$ 时, $f(x) =$

$\begin{cases} -(x-2)^2 + 6, & x < 0, \\ e^x + \ln(x+1), & x \geq 0, \end{cases}$ 当 x 从 0 的左侧趋近

于 0 时, $f(x) \rightarrow 2$, 而 $f(0) = 1$, 所以函

数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上不单调, 可排除 A. 故选 B.

7. B 命题点 ▶ 抽象函数的性质

【解析】 由 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$, 且当

$x < 3$ 时, $f(x) = x$ 知 $f(1) = 1, f(2) = 2,$

$f(3) > f(2) + f(1) = 3, f(4) > f(3) + f(2) >$

$3 + 2 = 5, f(5) > f(4) + f(3) > 5 + 3 = 8,$

$f(6) > f(5) + f(4) > 8 + 5 = 13, f(7) >$

$f(6) + f(5) > 13 + 8 = 21, f(8) > f(7) +$

$f(6) > 21 + 13 = 34, f(9) > f(8) + f(7) > 34 +$

$21 = 55, f(10) > f(9) + f(8) > 55 + 34 = 89,$



没有推出 $f(10) > 100$, 故 A 错误;

以此类推, 类似斐波那契数列,

$$f(11) > f(10) + f(9) > 89 + 55 = 144,$$

$$f(12) > f(11) + f(10) > 144 + 89 = 233,$$

$$f(13) > f(12) + f(11) > 233 + 144 = 377,$$

$$f(14) > f(13) + f(12) > 377 + 233 = 610,$$

$$f(15) > f(14) + f(13) > 610 + 377 = 987,$$

$$f(16) > f(15) + f(14) > 987 + 610 = 1\,597 >$$

1 000, 则 $f(20) > f(16) > 1\,000$, 故 B 正确;

由 $f(x) > f(x-1) + f(x-2)$ 知 $f(x)$ 取比 $f(x-1) + f(x-2)$ 大的数, 所以 $f(x)$ 无最大值, 故 C, D 错误. 故选 B.

8. ABC 命题点 ▶ 抽象函数求值、函数的奇偶性、判断函数的极值点

【解析】对于 A, 令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = 0$, 故 A 正确;

对于 B, 令 $x = y = 1$, 得 $f(1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$, 所以 $f(1) = 0$, 故 B 正确;

对于 C, 令 $x = y = -1$, 得 $f(1) = f(-1) + f(-1) = 2f(-1) = 0$, 所以 $f(-1) = 0$, 所以 $f(-xy) = y^2 f(-x) + x^2 f(y) = y^2 [f(x) + x^2 f(-1)] + x^2 f(y) = y^2 f(x) + x^2 f(y) = f(xy)$ 在定义域 \mathbf{R} 上恒成立, 所以 $f(x)$ 是偶函数, 故 C 正确;

对于 D, 函数 $f(x) = 0$ 为常数函数, 且满足 $f(xy) = y^2 f(x) + x^2 f(y)$, 而常数函数没有极值点, 故 D 错误. 故选 ABC.

9. C 命题点 ▶ 根据函数单调性求参数取值范围

【解析】 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$, 由 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 单调递增可知, 当 $x \in (1, 2)$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立. 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 不符合题意. 当 $a > 0$ 时, 设 $h(x) = ae^x - \frac{1}{x}$, 则 $h'(x) = ae^x + \frac{1}{x^2} > 0$, 则 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 单调递增, 所以只需 $f'(1) = h(1) = ae^1 - 1 \geq 0$, 解得 $a \geq e^{-1}$, 故选 C.

10. D 命题点 ▶ 函数的奇偶性

【解析】因为函数 $f(x) = \frac{xe^x}{e^{ax} - 1}$ 是偶函数, 且定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 所以 $f(-x) = f(x)$, 即 $\frac{xe^x}{e^{ax} - 1} = \frac{-xe^{-x}}{e^{-ax} - 1}$, 即 $\frac{xe^x}{e^{ax} - 1} = \frac{-xe^{-x} \cdot e^{ax}}{1 - e^{ax}} = \frac{-xe^{ax-x}}{1 - e^{ax}} = \frac{xe^{ax-x}}{e^{ax} - 1}$, 所以 $a - 1 = 1$, 即 $a = 2$, 故选 D.

11. C 命题点 ▶ 利用函数的单调性比较大小

【解析】由题易知 $a > 0, b > 0, c > 0$. $\frac{a}{b} = 0.9e^{0.1} = (1 - 0.1)e^{0.1}$. 令 $f(x) = (1 - x)e^x$, 则 $f'(x) = -xe^x$, 所以当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 所以 $0 < f(0.1) < f(0) = 1$, 所以 $a < b$. 因为当 $x > 0$ 时, $1 + x < e^x$, 所以 $\ln(1 + x) < x$, 即 $\frac{\ln(1 + x)}{x} <$



1, 所以 $0 < \frac{c}{b} = -9\ln 0.9 = 9\ln \frac{10}{9} = 9\ln \left(1 + \frac{1}{9}\right) < 1$, 从而 $c < b$. $a - c = 0.1e^{0.1} + \ln(1 - 0.1)$. 令 $g(x) = xe^x + \ln(1-x)$ ($0 < x < 1$), 则 $g'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{1-x} = \frac{(1-x^2)e^x - 1}{1-x}$, 再令 $h(x) = (1-x^2)e^x - 1$ ($0 < x < 1$), 则 $h'(x) = (1-2x-x^2)e^x$, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = \sqrt{2} - 1$ (舍负), 当 $x \in (0, \sqrt{2} - 1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 所以 $h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增, 所以 $g(x) > 0$, 所以 $g(0.1) > 0$, 即 $a > c$. 综上, $c < a < b$. 故选 C.

12. BC **命题点** ▶ 抽象函数的奇偶性、周期性和图象的对称性

【解析】 因为 $f\left(\frac{3}{2} - 2x\right)$ 为偶函数, 所以直线 $x = \frac{3}{2}$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴, 点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 为 $g(x)$ 图象的对称中心. 因为 $g(2+x)$ 为偶函数, 所以直线 $x = 2$ 是 $g(x)$ 图象的对称轴, 所以 $f(x)$ 图象的对称中心的横坐标为 2, 纵坐标为常数, 设常数为 C . 所以 $f(x)$ 的周期 $T = 4 \times \left(2 - \frac{3}{2}\right) = 2$, $g(x)$ 的周期也为 2. 所以 $f(0) = f(2) = C$, 故 A 不正确; $g\left(-\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, 故 B 正确; 由直线 $x = \frac{3}{2}$ 为 $f(x)$ 图象的对称轴且 $T = 2$, 得 $f(4) = f(2) = f(1)$, $f(-1) = f(1)$, 故 C 正确; 由点 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 为 $g(x)$ 图象的对称中心且 $T = 2$, 得 $g(-1) = g(1) = -g(2)$, 故 D 不正确. 故选 BC.

13. D **命题点** ▶ 抽象函数的奇偶性、周期性及其图象的对称性

【解析】 因为 $y = g(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 所以 $g(2-x) = g(2+x)$, 而 $f(x) + g(2-x) = 5$, 故 $f(-x) + g(2+x) = 5$, 故 $f(x) = f(-x)$, $f(x)$ 为偶函数. 由 $g(2) = 4$, $f(0) + g(2) = 5$, $g(2) - f(-2) = 7$, 得 $f(0) = 1$, $f(-2) = f(2) = -3$, 由 $g(x) = f(x-4) + 7$, 且 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = 2$ 对称, 可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = -2$ 对称, 则 $f(-2-x) = f(-2+x) = f(2+x)$, 则 $f(x) = f(x+4)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 又由 $f(1) + g(1) = 5$, $g(1) - f(-3) = g(1) - f(1) = 7$, 得 $f(1) = f(-3) = f(3) = -1$, 又 $f(4) = f(0) = 1$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = 6f(1) + 6f(2) + 5f(3) + 5f(4) = 6 \times (-1) + 6 \times (-3) + 5 \times (-1) + 5 \times 1 = -24$, 故选 D.

14. A **命题点** ▶ 构造函数, 利用函数的单



调性比较小

【解析】构造函数 $h(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 -$

$\cos x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $g(x) = h'(x) =$
 $-x + \sin x, g'(x) = -1 + \cos x \leq 0$, 所以

$g(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 所以

$g(x) \leq g(0) = 0$, 且 $g(x)$ 不恒为 0, 因

此, $h(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 所以

$a - b = h\left(\frac{1}{4}\right) < h(0) = 0$, 即 $a < b$. $\frac{c}{b} =$

$\frac{4\sin \frac{1}{4}}{\cos \frac{1}{4}} = \frac{\tan \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}$, 显然当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

时, $\tan x > x$, 所以 $\frac{c}{b} = \frac{\tan \frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} > 1$, 即 $b < c$.

因此 $c > b > a$. 故选 A.

15. D 命题点 ▶ 函数的基本性质

【解析】因为 $f(x+1)$ 是奇函数, $x \in \mathbf{R}$, 所以 $f(-x+1) = -f(x+1)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称, 且 $f(1) = 0$. 由 $f(x+2)$ 是偶函数, 得 $f(-x+2) = f(x+2)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $f(x) = -f(-x+2) = -f(x+2)$, 所以 $f(x) = f(x+4)$, 所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数. 又 $f(0) = -f(2) = -4a - b, f(3) = f(1) = a + b = 0$, 所以 $f(0) + f(3) = -3a = 6$, 所以 $a = -2, b = 2$, 所以 $f\left(\frac{9}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{5}{2}$, 故选 D.

16. D 命题点 ▶ 函数的性质与不等式的求解

【解析】奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减, 且 $f(-2) = 0$. 由 $xf(x-1) \geq 0$, 得

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ f(x-1) \leq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x > 0, \\ f(x-1) \geq 0, \end{cases} \quad \text{即}$$

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ -2 \leq x-1 \leq 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x > 0, \\ 0 \leq x-1 \leq 2, \end{cases} \quad \text{解得 } -1 \leq$$

$x \leq 0$ 或 $1 \leq x \leq 3$. 故选 D.

17. D 命题点 ▶ 函数的奇偶性和单调性

【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $\left\{x \mid x \neq \pm \frac{1}{2}\right\}$, 且 $f(-x) = \ln|-2x+1| - \ln|-2x-$



$1| = \ln|2x-1| - \ln|2x+1| = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数. 当 $x > 0$ 时, $f(x) =$

$$\begin{cases} \ln(2x+1) - \ln(1-2x), & 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \ln(2x+1) - \ln(2x-1), & x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad \text{当 } 0 <$$

$x < \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \ln \frac{2x+1}{1-2x} = \ln \left(-1 - \frac{2}{2x-1} \right)$, 易知 $f(x)$ 单调递增; 当 $x > \frac{1}{2}$

时, $f(x) = \ln \frac{2x+1}{2x-1} = \ln \left(1 + \frac{2}{2x-1} \right)$, 易

知 $f(x)$ 单调递减. 因为 $f(x)$ 为奇函数,

且在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上连续, 所以 $f(x)$ 在

$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $(-\infty,$

$-\frac{1}{2})$ 和 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递减, 故

选 D.

18.2 命题点 ▶ 根据函数的奇偶性求参数

【解析】 $\because f(x) = (x-1)^2 + ax + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (x-1)^2 + ax + \cos x$, $\therefore f(-x) = (-x-1)^2 - ax + \cos(-x) = (x+1)^2 - ax + \cos x$.

由于 $f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(x) = f(-x)$,

$\therefore (x-1)^2 + ax + \cos x = (x+1)^2 - ax + \cos x$, 即 $4x = 2ax$, $\therefore a = 2$.

19. x^2 (答案不唯一) 命题点 ▶ 函数的奇偶性和单调性、导数的应用

【解析】由条件②可知, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 由条件③可知, $f(x)$ 可能为偶函数, 再结合条件①, 可构造函数 $f(x) = x^2$ 等.

20. B 命题点 ▶ 指数式与对数式的互化、指数式比较大小

【解析】由题意知 $\log_2 x = 1 + \log_3 y = 3 + \log_5 z$,

令 $\log_2 x = 1 + \log_3 y = 3 + \log_5 z = k$, 则 $x = 2^k$, $y = 3^{k-1}$, $z = 5^{k-3}$,

k	x	y	z	大小关系	结论
0	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{125}$	$x > y > z$	A 正确
3	8	9	1	$y > x > z$	C 正确
6	64	243	125	$y > z > x$	D 正确

下面证明: 选项 B 错误.

若 $x > z$, 则 $2^k > 5^{k-3}$, 即 $\left(\frac{5}{2}\right)^k < 5^3$, 两边同



时取自然对数,得 $k \ln \frac{5}{2} < 3 \ln 5$, 即 $k <$

$\frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}}$; 若 $z > y$, 则 $5^{k-3} > 3^{k-1}$, 即 $\left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} >$

5^2 , 两边同时取自然对数, 得 $(k-1) \cdot$

$\ln \frac{5}{3} > 2 \ln 5$, 即 $k > \frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1$ (下面比较

$\frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}}$ 和 $\frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1$ 的大小). 因为

$$\frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}} - \left(\frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1 \right) = \frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}} - \frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} - 1 =$$

$$\frac{\ln 5 \left(3 \ln \frac{5}{3} - 2 \ln \frac{5}{2} \right)}{\ln \frac{5}{2} \ln \frac{5}{3}} - 1,$$

因为 $\left(\frac{5}{3}\right)^3 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{27} - \frac{25}{4} = -\frac{175}{108} <$

0 , 所以 $\left(\frac{5}{3}\right)^3 < \left(\frac{5}{2}\right)^2$, 即 $3 \ln \frac{5}{3} <$

$2 \ln \frac{5}{2}$, 所以 $\frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}} < \frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1$, 所以 $k <$

$\frac{3 \ln 5}{\ln \frac{5}{2}}$ 与 $k > \frac{2 \ln 5}{\ln \frac{5}{3}} + 1$ 不可能同时成立,

故 B 错误. 故选 B.

一题多解

令 $x = e^{x_1}, y = e^{x_2}, z = e^{x_3}$, 比较 x, y, z 的大小, 只需比较 x_1, x_2, x_3 的大小.

由题意得, $2 + \log_2 e^{x_1} = 3 + \log_3 e^{x_2} = 5 +$

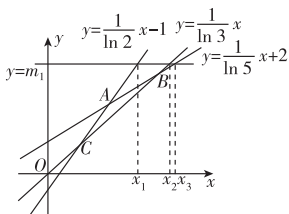
$\log_5 e^{x_3}$, 即 $2 + \frac{1}{\ln 2} x_1 = 3 + \frac{1}{\ln 3} x_2 = 5 + \frac{1}{\ln 5} x_3$.

即 $\frac{1}{\ln 2} x_1 - 1 = \frac{1}{\ln 3} x_2 = \frac{1}{\ln 5} x_3 + 2$. 在同一

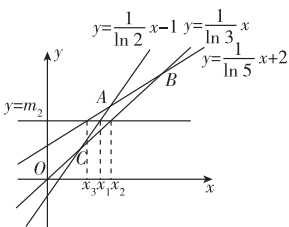
平面直角坐标系内画出函数 $y = \frac{1}{\ln 2} x - 1$,

$y = \frac{1}{\ln 3} x$ 和 $y = \frac{1}{\ln 5} x + 2$ 的大致图象, 如图

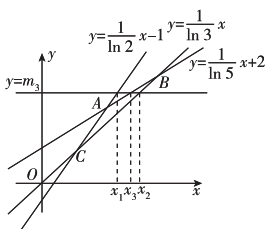
所示 $\left(\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 5} \right)$.



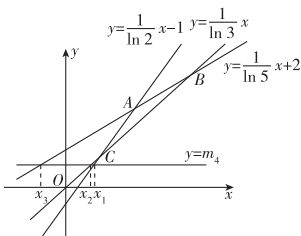
图①



图②



图③



图④

设直线 $y = \frac{1}{\ln 2}x - 1$ 与直线 $y = \frac{1}{\ln 5}x + 2$ 的交点为 A , 直线 $y = \frac{1}{\ln 2}x - 1$ 与直线 $y = \frac{1}{\ln 3}x$ 的交点为 C , 直线 $y = \frac{1}{\ln 3}x$ 与直线 $y = \frac{1}{\ln 5}x + 2$ 的交点为 B .

如图①: 当 $y = m_1$ (直线 $y = m_1$ 在点 B 的上方) 时, 此时 $x_3 > x_2 > x_1$, 即 $z > y > x$, 选项中没有;

如图②: 当 $y = m_2$ (直线 $y = m_2$ 在点 C 的上方, 且在点 A 的下方) 时, 此时 $x_2 > x_1 > x_3$, 即 $y > x > z$, 排除 C ;

如图③: 当 $y = m_3$ (直线 $y = m_3$ 在点 A 的上方, 且在点 B 的下方) 时, 此时 $x_2 > x_3 > x_1$, 即 $y > z > x$, 排除 D ;

如图④: 当 $y = m_4$ (直线 $y = m_4$ 在点 C 的下方) 时, 此时 $x_1 > x_2 > x_3$, 即 $x > y > z$, 排除 A . 不存在选项 B 的情况. 故选 B .

21. D 命题点 ▶ 对数运算

【解析】由题意可得
$$\begin{cases} 2. 1 = \frac{S-1}{\ln N_1}, \\ 3. 15 = \frac{S-1}{\ln N_2}, \end{cases}$$



两式相除得 $2.1 \ln N_1 = 3.15 \ln N_2$,
 即 $\ln N_1^{2.1} = \ln N_2^{3.15}$, 所以 $N_1^{2.1} = N_2^{3.15}$, 即
 $N_1^{2 \times 1.05} = N_2^{3 \times 1.05}$. 故选 D.

22. A 命题点 ▶ 利用函数单调性和图象的对称性比较大小

【解析】由题意得 $f(x) = f(2-x)$, 则函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称 (提示: 根据 $y = -(x-1)^2$ 的图象判断), 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $1 > \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $b = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) > f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = a$, $c = f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = f\left(2 - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ (关键: 利用对称性将 a, b, c 放在函数 $f(x)$ 的同一单调区间内进行比较).

因为 $\frac{\sqrt{2}}{2} < 2 - \frac{\sqrt{6}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $b > c > a$, 故选 A.

23. C 命题点 ▶ 函数的性质

【解析】依题意可知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 又 $f(-x) = \frac{1}{1+2^{-x}} = \frac{2^x}{1+2^x}$, 所以 $f(-x) + f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} + \frac{1}{1+2^x} = 1$, 故选 C.

24. D 命题点 ▶ 对数运算、图象判断

【解析】对于 A 选项, 当 $T=220, P=1\ 026$ 时, $\lg P = \lg 1\ 026 > \lg 10^3 = 3$, 根据题图可知, 二氧化碳处于固态;

对于 B 选项, 当 $T=270, P=128$ 时, $\lg P = \lg 128 \in (2, 3)$, 根据题图可知, 二氧化碳处于液态;

对于 C 选项, 当 $T=300, P=9\ 987$ 时, $\lg P = \lg 9\ 987 < \lg 10^4 = 4$, 且 $\lg P$ 接近于 4, 根据题图可知, 二氧化碳处于固态;

对于 D 选项, 当 $T=360, P=729$ 时, $\lg P = \lg 729 \in (2, 3)$, 根据题图可知, 二氧化碳处于超临界状态. 故选 D.

25. A 命题点 ▶ 指数、对数的互化, 基本不等式的应用

【解析】因为 $9^m = 10$, 所以 $m = \log_9 10$. 又因为 $\lg 11 \times \lg 9 < \left(\frac{\lg 11 + \lg 9}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 99}{2}\right)^2 < 1 = \lg 10 \times \lg 10$ (提示: 利用基本不等式求出两个正实数乘积的取值范围), 所以 $\frac{\lg 10}{\lg 9} > \frac{\lg 11}{\lg 10}$, $\log_9 10 > \log_{10} 11$.

$a = 10^m - 11 = 10^{\log_9 10} - 11 > 10^{\log_{10} 11} - 11 = 11 - 11 = 0$, 所以 $a > 0$.

因为 $\lg 10 \times \lg 8 < \left(\frac{\lg 10 + \lg 8}{2}\right)^2 = \left(\frac{\lg 80}{2}\right)^2 < \left(\frac{\lg 81}{2}\right)^2 = \lg 9 \times \lg 9$, 所以 $\frac{\lg 10}{\lg 9} < \frac{\lg 9}{\lg 8}$, $\log_9 10 < \log_8 9$. $b = 8^m - 9 = 8^{\log_9 10} - 9 < 8^{\log_8 9} - 9 = 9 - 9 = 0$, 所以 $b < 0$. 综上, $a > 0 > b$, 故选 A.

**26. C** 命题点 ▶ 对数式比较大小

【解析】因为 $a = \log_5 2 < \log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2} = c, b = \log_8 3 > \log_9 3 = \frac{1}{2} = c$, 所以 $b > c > a$. 故选 C.

27. B 命题点 ▶ 对数运算、对数函数的单调性、构造函数比较大小及利用导数研究函数的单调性

【解析】 $a = 2\ln 1.01 = \ln 1.01^2 = \ln 1.0201 > b$.

令 $g(x) = \ln(1+x) - \sqrt{1+2x} + 1$, 则 $b - c = g(0.02)$. $g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+2x}} =$

$\frac{\sqrt{1+2x} - (1+x)}{(1+x)\sqrt{1+2x}}$, 当 $x \geq 0$ 时, $1+x =$

$\sqrt{(1+x)^2} \geq \sqrt{1+2x}$, 则 $g'(x) \leq 0$, $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 则

$g(0.02) < g(0) = 0$, 所以 $b < c$. 令 $f(x) =$

$2\ln(1+x) - \sqrt{1+4x} + 1$, 则 $a - c =$

$f(0.01)$. $f'(x) = \frac{2}{1+x} - \frac{2}{\sqrt{1+4x}} = 2 \cdot$

$\frac{\sqrt{1+4x} - (1+x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}}$, 当 $0 \leq x < 2$ 时,

$\sqrt{1+4x} \geq \sqrt{1+2x+x^2} = 1+x$, 则 $f'(x) \geq 0$, $f(x)$ 在 $[0, 2)$ 上单调递增, 所以

$f(0.01) > f(0) = 0$, 所以 $a > c$. 综上, $b < c < a$. 故选 B.

28. 64 命题点 ▶ 对数方程的求解

【解析】因为 $\frac{1}{\log_8 a} - \frac{1}{\log_a 4} = \frac{3}{\log_2 a} - \frac{1}{2}$.

$\log_2 a = -\frac{5}{2}$, 所以 $(\log_2 a + 1)(\log_2 a - 6) = 0$. 又 $a > 1$, 故 $\log_2 a = 6$, 解得 $a = 64$.

29. D 命题点 ▶ 利用函数的性质判断函数图象对应的解析式

【解析】由图象可知函数 $y = f(x)$ 是偶函

数, 而函数 $y = \frac{x}{1-|x|}, y = \frac{x}{|x|-1}$ 是奇函

数, 故 A, B 错误;

当 $x > 1$ 时, 由题图知 $f(x) > 0$, 且此时 $x^2 > 1$, 即 $x^2 - 1 > 0, 1 - x^2 < 0$, 所以当 $x > 1$

时, $y = \frac{|x|}{1-x^2} < 0, y = \frac{|x|}{x^2-1} > 0$, 故 C 错误, D

正确. 故选 D.

快解

当 $x = 2$ 时, 由题图知 $f(x) > 0$.

对于 A, $f(2) = \frac{2}{1-|2|} < 0$, 故 A 错误; 对于

B, $f(2) = \frac{2}{2-1} > 0$; 对于 C, $f(2) = \frac{2}{1-4} < 0$,

故 C 错误; 对于 D, $f(2) = \frac{2}{4-1} > 0$.

当 $x = -2$ 时, 由题图知 $f(x) > 0$, 对于

B, $f(-2) = \frac{-2}{2-1} < 0$, 故 B 错误; 对于 D,

$f(-2) = \frac{2}{4-1} > 0$, 故 D 正确. 故选 D.



30. B 命题点 ▶ 函数的奇偶性、函数图象的识别

【解析】令函数 $f(x) = -x^2 + (e^x - e^{-x}) \sin x$, $x \in [-2.8, 2.8]$,

因为 $f(-x) = -x^2 + (e^{-x} - e^x) \sin(-x) = -x^2 + (e^x - e^{-x}) \sin x = f(x)$,

所以函数 $y = f(x)$ 是偶函数, 排除选项 A, C.

令 $x = 1$, 则 $f(1) = -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin 1$.

因为 $1 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$,

所以 $\sin 1 \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

又 $e \approx 2.7$, 所以 $e - \frac{1}{e} > 2$, 所以

$\left(e - \frac{1}{e}\right) \sin 1 > \sqrt{2}$,

所以 $f(1) = -1 + \left(e - \frac{1}{e}\right) \sin 1 > 0$, 排除选项 D, 故选 B.

31. A 命题点 ▶ 根据函数图象判断其解析式

【解析】对于 B, 当 $x = 1$ 时, $y = \frac{x^3 - x}{x^2 + 1} = 0$,

不符合题意, 故排除选项 B; 对于 D, 当 $x =$

3 时, $y = \frac{2 \sin x}{x^2 + 1} > 0$, 不符合题意, 故排除

选项 D; 对于 C, 当 $x \in (0, 1)$ 时, 函数

$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 的导函数 $y' = \frac{-2x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2} =$

$\frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} > 0$, 所以函数 $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ 在 $(0, 1)$

上单调递增, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $y =$

$\frac{2x}{x^2 + 1} < 1$. 又 $x \in (0, 1)$ 时, $\cos x < 1$, 所以

在 $(0, 1)$ 上 $y = \frac{2x \cos x}{x^2 + 1} < 1$, 不符合题意,

故排除 C 选项. 故选 A.

32. ACD 命题点 ▶ 对数的运算及实际应用

【解析】设燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车的声压级分别为 L_1, L_2, L_3 , 由题知 p_0, p_1, p_2, p_3 均大于 0, $\therefore L_1 - L_2 = 20 \times$

$\lg \frac{p_1}{p_0} - 20 \times \lg \frac{p_2}{p_0} = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2} \geq 0, \therefore \frac{p_1}{p_2} \geq$

1, $\therefore p_1 \geq p_2$, 故 A 正确;

$\therefore L_2 - L_3 = 20 \times \lg \frac{p_2}{p_3} \geq 10, \therefore \lg \frac{p_2}{p_3} \geq \frac{1}{2},$

$\therefore \frac{p_2}{p_3} \geq \sqrt{10}, \therefore p_2 \geq \sqrt{10} p_3$, 故 B

错误;

$\therefore L_3 = 20 \times \lg \frac{p_3}{p_0} = 40, \therefore \frac{p_3}{p_0} = 100, \therefore p_3 =$

$100p_0$, 故 C 正确;

$\therefore L_1 - L_2 = 20 \times \lg \frac{p_1}{p_2} \leq 90 - 50 = 40,$

$\therefore \lg \frac{p_1}{p_2} \leq 2, \therefore \frac{p_1}{p_2} \leq 100,$



$\therefore p_1 \leq 100p_2$, 故 D 正确.

故选 ACD.

33. C **命题点** ▶ 函数模型的实际应用及对数运算

【解析】 将 $L = 4.9$ 代入 $L = 5 + \lg V$, 得

$$\lg V = -0.1, \text{ 即 } V = 10^{-0.1} = 10^{-\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt[10]{10}} \approx$$

0.8, 故选 C.