



第6章 平面向量、复数

第1节 平面向量的线性运算、基本定理及坐标运算

刷

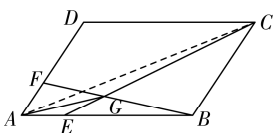
基础

1. D **考查点** ▶ 已知向量共线(平行)求参数

【解析】 A, B, C 三点共线 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{BC}$, 设 $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$, 即 $\lambda a - b = k(a + \mu b)$, 由于 a, b 不共线, 则 $\begin{cases} \lambda = k, \\ k\mu = -1, \end{cases}$ 消去 k 可得 $\lambda\mu = -1$. 因此 A, B, C 三点共线的充要条件为 $\lambda\mu = -1$. 故选 D.

2. A **考查点** ▶ 向量加法的法则及几何应用、向量的线性运算

【解析】如图所示, 连接 AC ,



因为 B, G, F 三点共线, 所以可设 $\overrightarrow{AG} = x\overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{AF}$, 所以 $\overrightarrow{AG} = xa + \frac{1-x}{3}b$. 因为 C, G, E 三点共线, 所以可设 $\overrightarrow{AG} = y\overrightarrow{AE} + (1-y)\overrightarrow{AC}$.

因为 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b$, 所以 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = a + b$, 所以 $\overrightarrow{AG} = \frac{y}{4}a + (1-y)(a + b) =$

$\left(1 - \frac{3}{4}y\right)a + (1-y)b$, 所以 $xa + \frac{1-x}{3}b =$

$\left(1 - \frac{3}{4}y\right)a + (1-y)b$, 即 $\begin{cases} x = 1 - \frac{3}{4}y, \\ \frac{1-x}{3} = 1-y, \end{cases}$ 解

得 $x = \frac{2}{5}, y = \frac{4}{5}$, 所以 $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}a + \frac{1}{5}b$, 故选 A.

3. $-\frac{2}{5}$ **考查点** ▶ 平面向量共线定理的推论

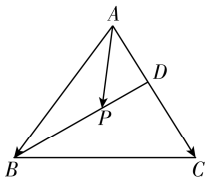
【解析】如图所示,

因为 $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DC}$, 所以 $\overrightarrow{AC} = \frac{7}{3}\overrightarrow{AD}$, 所以

$\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB} + \frac{7}{5}\overrightarrow{AD}$. 因为 $B,$

P, D 三点共线, 所以 $m + \frac{7}{5} = 1$, 解得

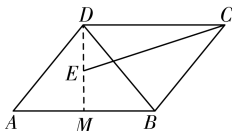
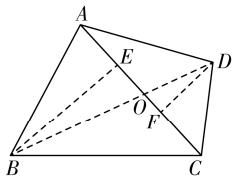
$m = -\frac{2}{5}$.



4. B **考查点** ▶ 用基底表示向量、平面向量基本定理的应用、用定义求向量的数



量积

【解析】如图,取 AB 的中点 M ,连接 DM .因为 $\frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DA}|} = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{DB}|}$, 所以 $|\overrightarrow{DE}| \cdot$ $\cos \angle EDA = |\overrightarrow{DE}| \cos \angle EDB$, 即 $\cos \angle EDA = \cos \angle EDB$, 所以点 E 在 $\angle BDA$ 的平分线上.因为 $DA = DB$, 所以点 E 在线段 DM 上,不妨设 $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{DM}$, $\lambda \in [0, 1]$, 所以 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \lambda \overrightarrow{DM}$.易知 $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{CD}$, 所以 $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \lambda \left(\overrightarrow{CB} - \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} \right) = \left(1 - \frac{\lambda}{2} \right) \overrightarrow{CD} +$ $\lambda \overrightarrow{CB}$. 因为 $\overrightarrow{CE} = x \overrightarrow{CB} + y \overrightarrow{CD}$, 所以 $x + y = 1 - \frac{\lambda}{2} + \lambda = 1 + \frac{\lambda}{2}$. 因为 $\lambda \in [0, 1]$, 所以 $x +$ $y = 1 + \frac{\lambda}{2} \in \left[1, \frac{3}{2} \right]$. 故选 B.**5. A 突破点** ▶ 利用平面向量基本定理求参数、基本不等式“1”的妙用求最值【解析】如图,连接 BD , 设 AC 与 BD 交于点 O , 过点 B 作 $BE \perp AC$ 于点 E , 过点 D 作 $DF \perp AC$ 于点 F . $\because \triangle ABC$ 的面积是 $\triangle ACD$ 的面积的 2 倍, $\therefore 2DF = BE$, 易知 $\triangle OFD \sim \triangle OEB$, 根据相似三角形的性质可知, $2\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$, $\therefore 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO}) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$, $\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} +$ $\frac{2}{3} \overrightarrow{AD}$.设 $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AO} = \frac{1}{3} \lambda \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \lambda \overrightarrow{AD}$, $\therefore \overrightarrow{AC} =$ $\left(\frac{1}{x} - 4 \right) \overrightarrow{AB} + \left(1 - \frac{1}{y} \right) \overrightarrow{AD}$, $\therefore \frac{1}{x} - 4 = \frac{1}{3} \lambda$, $1 - \frac{1}{y} = \frac{2}{3} \lambda$, 即 $1 - \frac{1}{y} = \frac{2}{x} - 8$, $\therefore \frac{2}{x} +$ $\frac{1}{y} = 9$, 即 $\frac{1}{9} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right) = 1$, $\therefore 2x + y =$ $(2x + y) \times \frac{1}{9} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{9} \left(4 + 1 + \frac{2x}{y} +$ $\frac{2y}{x} \right) \geq \frac{1}{9} \left(5 + 2 \sqrt{\frac{2x}{y} \times \frac{2y}{x}} \right) = 1$, 当且仅当 $\frac{2x}{y} = \frac{2y}{x}$, 即 $x = y = \frac{1}{3}$ 时取等号, $\therefore 2x + y$

的最小值为 1. 故选 A.

6. A 考查点 ▶ 利用坐标解决三点共线问



题、平面向量线性运算的坐标表示

【解析】根据题意, $\overrightarrow{AB} = (-1, \cos \alpha)$, $\overrightarrow{BC} = (2, 0)$, $\overrightarrow{CD} = (2, 2\sin \alpha)$, 则 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (4, 2\sin \alpha)$, 若 A, B, D 三点共线, 则 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{BD}$, 则有 $4\cos \alpha = -2\sin \alpha$, 变形可得 $\tan \alpha = -2$. 故选 A.

7. D 考查点 ▶ 由向量共线求参数、利用坐标计算向量的模、平面向量线性运算的坐标表示

【解析】设 $\overrightarrow{OP} = (x, y)$, 因为向量 $\overrightarrow{OA} = (-1, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (2, 4)$, 所以 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (x, y) - (-1, 2) = (x+1, y-2)$, $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = (2, 4) - (x, y) = (2-x, 4-y)$. 因为 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PB}$, 所以 $\begin{cases} x+1=2(2-x) \\ y-2=2(4-y) \end{cases}$, 解得

$\begin{cases} x=1 \\ y=\frac{10}{3} \end{cases}$, 所以 $\overrightarrow{OP} = \left(1, \frac{10}{3}\right)$. 故 $|\overrightarrow{OP}| =$

$\sqrt{1^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{109}}{3}$. 故选 D.

8. A 考查点 ▶ 判断充分不必要条件、由向量平行求参数

【解析】由 $a // b$, 得 $x(x-1) = 2$, 解得 $x = 2$ 或 $x = -1$, 所以“ $x = 2$ ”是“ $a // b$ ”的充分不必要条件, 故选 A.

易错警示

非零向量共线分为“同向共线”和“反向共线”.

9. BD 考查点 ▶ 平行向量(共线向量)、利用坐标计算向量的模、求投影向量

【解析】若 $b = 0$, 则显然有 $a // b, b // c$, 但 a 与 c 没有限制条件, 故 $a // c$ 未必成立, 故 A 错误;

a 在 b 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|^2} \cdot b = \frac{10}{5}b = (4, 2)$, 故 B 正确;

与向量 $(1, 2)$ 共线的单位向量为 $e = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ 或 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, -\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, 故 C 错误;

若向量 $a = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, $b = (2, 1)$,

则 $|a - b| = \sqrt{(\cos \alpha - 2)^2 + (\sin \alpha - 1)^2} =$

$\sqrt{6 - 2(2\cos \alpha + \sin \alpha)} = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}\cos(\alpha - \varphi)} \leq$

$\sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + 1$, 其中 $\cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

$\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 当且仅当 $\alpha - \varphi = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

时, $|a - b|$ 取得最大值 $\sqrt{5} + 1$, 故 D 正确. 故选 BD.

易错警示

向量共线不具有传递性, 本题 A 选项易忽略 $b = 0$ 的限制条件.

第2节 平面向量的数量积及其应用

刷

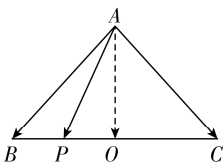
基础

1. C 考查点 ▶ 求向量的数量积、平面向量



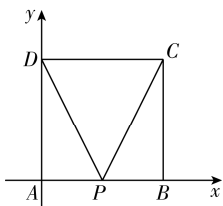
数量积的几何意义

【解析】如图，记 BC 的中点为 O ，连接 AO ，由题可知， $AO \perp BC$ ， $AO = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$ ， $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ ，所以 $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 2\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AO} = 2|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AO}| \cos \angle PAO = 2|\overrightarrow{AO}|^2 = 10$ 。故选 C。



2. D 考查点 ▶ 向量数量积的坐标表示、求向量数量积的最值

【解析】以 A 为坐标原点， AB, AD 所在直线分别为 x, y 轴，建立平面直角坐标系，如图所示。



则 $A(0,0), B(4,0), C(4,4), D(0,4), P(4\lambda, 0)$ 。

因为 $\overrightarrow{PC} = (4 - 4\lambda, 4), \overrightarrow{DP} = (4\lambda, -4)$ ， $(\lambda > 0)$ ，所以 $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{DP} = 4\lambda(4 - 4\lambda) - 16 = -16\lambda^2 + 16\lambda - 16 = -16\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)^2 - 12$ ，

所以当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时， $\overrightarrow{PC} \cdot \overrightarrow{DP}$ 取得最大值 -12 。故选 D。

3. A 考查点 ▶ 求投影向量、向量数量积的坐标表示、利用坐标计算向量的模

【解析】因为 $\mathbf{a} = (3, 4), \mathbf{b} = (2, -1)$ ，所以 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \times 2 + 4 \times (-1) = 2, |\mathbf{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，则向量 \mathbf{b} 在向量 \mathbf{a} 方向上的投影向量为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a} = \frac{2}{25} \cdot \mathbf{a} = \frac{2}{25} (3, 4) = \left(\frac{6}{25}, \frac{8}{25}\right)$ 。故选 A。

4. A 考查点 ▶ 求投影向量、用定义求向量的数量积

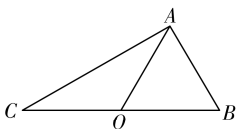
【解析】因为 $2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ，所以 O 是 BC 的中点，如图所示。因为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心为 O ，所以 BC 为圆 O 的直径。又 $|\overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{AB}|$ ，则 $|AO| = |BO| = |AB|$ ，即

$\angle ABC = 60^\circ$ ，所以 $\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} =$

$\frac{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cos 60^\circ}{|\overrightarrow{BC}|} \cdot \frac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = \frac{1}{2} \frac{|\overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{BC}|} \cdot$

$\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|\overrightarrow{BA}|}{2|\overrightarrow{BA}|} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$ ，所以 \overrightarrow{BA}

在 \overrightarrow{BC} 上的投影向量为 $\frac{1}{4} \overrightarrow{BC}$ 。故选 A。



5. C **考查点** ▶ 数量积的运算律、充要条件的证明

【解析】 由 $e_1 \perp e_2$, 得 $e_1 \cdot e_2 = 0$.

由 $|2e_1 + e_2| = |e_1 - 2e_2|$, 得 $|2e_1 + e_2|^2 = |e_1 - 2e_2|^2$, 即 $4e_1^2 + 4e_1 \cdot e_2 + e_2^2 = e_1^2 - 4e_1 \cdot e_2 + 4e_2^2$, 则 $e_1 \cdot e_2 = 0$.

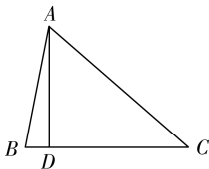
所以“ $e_1 \perp e_2$ ”是“ $|2e_1 + e_2| = |e_1 - 2e_2|$ ”的充要条件. 故选 C.

6. B **考查点** ▶ 垂直关系的向量表示、利用平面向量基本定理求参数

【解析】 如图所示, 由题意可知 B, C, D 三点共线, 设 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + (1-m)\overrightarrow{AC}$.

又 $AD \perp BC$ 于点 D , 则 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = [m\overrightarrow{AB} + (1-m)\overrightarrow{AC}] \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-m)\overrightarrow{AC}^2 - m\overrightarrow{AB}^2 + (2m-1)\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 则 $9(1-m) - 4m + \frac{(2m-1)}{2} \times 2 \times 3 = 0$, 即 $-7m + 6 = 0$, 解

得 $m = \frac{6}{7}$, 则 $\overrightarrow{AD} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$. 故选 B.



7. A **考查点** ▶ 数量积的运算律、求向量的模

【解析】 因为 $|a + b| = \sqrt{19}$, 所以 $(a+b)^2 = 19$, 即 $a^2 + 2a \cdot b + b^2 = 19$, 所以 $2a \cdot b = 6$, 则 $|a - b| = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{a^2 - 2a \cdot b + b^2} = \sqrt{4 - 6 + 9} = \sqrt{7}$. 故选 A.

8. B **突破点** ▶ 求投影向量及向量的模

【解析】 由题意得, \overrightarrow{AB} 在 \overrightarrow{AC} 上的投影向量为 $|\overrightarrow{AB}| \cos \angle BAC \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} =$

$\frac{1}{2} \cos \angle BAC \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$, 所以

$\cos \angle BAC = \frac{1}{2}$.

又 $\angle BAC \in (0, \pi)$, 故 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$.

因为 $BP = 2PC$, 所以 $\overrightarrow{PC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, 所以

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} -$

$\overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, 所以 $|\overrightarrow{AP}|^2 =$

$\left| \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \right|^2 = \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \cdot$

$\overrightarrow{AB} = \frac{4}{9} \times 6^2 + \frac{1}{9} \times 3^2 + \frac{4}{9} \times 6 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} =$

$16 + 1 + 4 = 21$, 所以 $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{21}$. 故选 B.



9. D **考查点** ▶ 数量积的运算律、向量夹角的计算

【解析】因为 $a \cdot (a+b) = a^2 + a \cdot b = 3$, $|a| = 2$, 所以 $a \cdot b = -1$. 又 $a \cdot b = |a||b|\cos\langle a, b \rangle$, 所以 $\cos\langle a, b \rangle = \frac{-1}{2 \times 1} = -\frac{1}{2}$. 又 $0 \leq \langle a, b \rangle \leq \pi$, 所以 $\sin\langle a, b \rangle \geq 0$, 所以向量 a 与 b 夹角的正弦值为 $\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

10. A **考查点** ▶ 向量夹角的计算、投影向量

【解析】由 $|a-b| = 1$, 得 $|a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = 1$ ①.

由 $|a+b| = \sqrt{7}$, 得 $|a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 = 7$ ②.

由 ②-①, 得 $a \cdot b = \frac{3}{2}$, 由 $\frac{a \cdot b}{|a|} \cdot \frac{a}{|a|} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{|a|}$, 得 $\frac{a}{|a|} = \frac{a}{|a|}$, 所以 $|a| = 1$, 则 $|b| = \sqrt{3}$.

设 a 与 b 的夹角为 θ , 则 $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $\theta \in [0, \pi]$, 所以 $\theta = \frac{\pi}{6}$. 故选 A.

11. B **考查点** ▶ 平面向量数量积的定义, 充分、必要条件的判断

【解析】若 $a \cdot b < 0$, 则 a 与 b 的夹角可能为 180° , 不一定是钝角, 因此充分性不成立;

若 a 与 b 的夹角为钝角, 则可得 $\cos\langle a, b \rangle < 0$, 因此可得 $a \cdot b = |a||b|\cos\langle a, b \rangle < 0$, 所以必要性成立, 即“ $a \cdot b < 0$ ”是“ a 与 b 的夹角为钝角”的必要不充分条件. 故选 B.

易错警示

本题易忽略反向共线时 $a \cdot b < 0$, 此时 a 与 b 的夹角为 180° .



刷提分

1. B **考查点** ▶ 由向量共线(平行)求参数、平面向量数量积的定义、向量夹角的计算

【解析】由题意可知 $a \cdot b = |a||b| \cdot \cos\langle a, b \rangle = -|a||b|$, $\therefore \cos\langle a, b \rangle = -1$.

又 $\langle a, b \rangle \in [0, \pi]$, $\therefore \langle a, b \rangle = \pi$, $\therefore a \parallel b$ 且 a 与 b 反向, $\therefore m \times (-1) = 2(m^2 - 5)$, $\therefore m = 2$ 或 $m = -\frac{5}{2}$. 当 $m = 2$ 时, $b = (2, -1) = a$, 不符合题意; 当 $m = -\frac{5}{2}$ 时, $b =$

$-\frac{5}{4}a$, 符合题意. $\therefore m = -\frac{5}{2}$, 故选 B.

2. A **考查点** ▶ 向量夹角的计算、数量积的运算律、垂直关系的向量表示

【解析】因为 $a = (1, -\sqrt{3})$, 所以 $|a| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. 因为 $(3a-b) \perp a$, 所以



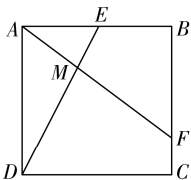
$(3a-b) \cdot a = 0$, 即 $3a^2 - a \cdot b = 0$, 所以 $a \cdot b = 12$, 所以 $|2a-b|^2 = 4a^2 - 4a \cdot b + b^2 = 16 - 48 + b^2 = 16$, 所以 $b^2 = 48$, 所以 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = \frac{12}{2 \times 4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $\langle a, b \rangle \in [0, \pi]$, 所以 $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{6}$. 故选 A.

3. A 突破点 ▶ 平面向量数量积的运算、向量夹角的计算

【解析】由题意, $\angle EMF$ 为 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AF}$ 的夹角, 而 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$,

所以 $|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE})^2} = \sqrt{\overrightarrow{DA}^2 + 2\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE}^2} = \sqrt{16 + 0 + 4} = 2\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{AF}| = \sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF})^2} = \sqrt{\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BF}^2} = \sqrt{16 + 0 + 9} = 5$, $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 - 12 + 8 + 0 = -4$.

综上, $\cos \angle EMF = \frac{\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{AF}}{|\overrightarrow{DE}| |\overrightarrow{AF}|} = -\frac{4}{2\sqrt{5} \times 5} = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$. 故选 A.

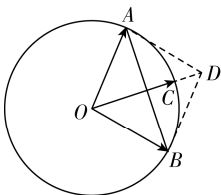


4. A 考查点 ▶ 数量积的运算律、向量垂直的坐标表示

【解析】由 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$, 得 $\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$, 化简得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, 所以 $AB \perp AC$. 又 $\overrightarrow{AB} = (3, m), \overrightarrow{AC} = (1, \sqrt{3})$, 所以 $3 + \sqrt{3}m = 0$, 解得 $m = -\sqrt{3}$, 所以 $\overrightarrow{AB} = (3, -\sqrt{3})$, 则 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+3} = 2$, 所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3}$, 故选 A.

5. C 突破点 ▶ 充要条件的证明、向量加法法则及减法法则的几何应用、垂直关系的向量表示

【解析】由平面向量 a, b, c 为两两不共线的单位向量, 设 $a = \overrightarrow{OA}, b = \overrightarrow{OB}, c = \overrightarrow{OC}$, 如图所示, 四边形 $OADB$ 为边长为 1 的菱形.





若 $(a-b) \cdot c=0$, 则 $a-b$ 与 c 垂直, $a-b=\overrightarrow{BA}$, 即 $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{OC}$, 而 $a+b=\overrightarrow{OD}$, 且 $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{BA}$,

所以 $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}$ 共线, 即 $a+b$ 与 c 共线;

若 $a+b$ 与 c 共线, 即 $\overrightarrow{OD}=\lambda \overrightarrow{OC}$ 且 $\lambda \neq 0$, 而 $\overrightarrow{OD} \perp \overrightarrow{BA}$, 即 $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{BA}$, 所以 $a-b$ 与 c 垂直, 故 $(a-b) \cdot c=0$.

所以“ $(a-b) \cdot c=0$ ”是“ $a+b$ 与 c 共线”的充要条件. 故选 C.

6. BD 突破点 ▶ 平面向量基本定理的应用、向量夹角的坐标表示、向量在几何中的应用、求投影向量

【解析】对于 A, 若 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 不共线, 且 $\overrightarrow{AP}=t \overrightarrow{AB} (t \in \mathbf{R})$, 则 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$, 则 $\overrightarrow{OP}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{OA}$, 即 $\overrightarrow{OP}=t \overrightarrow{OB}+(1-t) \overrightarrow{OA}$, A 错误;

对于 B, 向量 $a=(x, 2x), b=(-3x, 2)$, 且

a 与 b 的夹角为钝角, 则 $\begin{cases} -3x^2+4x < 0, \\ 2x-(-6x^2) \neq 0, \end{cases}$

解得 $x < -\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{1}{3} < x < 0$ 或 $x > \frac{4}{3}$, 则 x 的

取值范围是 $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, 0\right) \cup$

$\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ (易错: 忘记排除反向共线的

情况), B 正确;

对于 C, \overrightarrow{AB} 在 \overrightarrow{AC} 上的投影向量为

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}}{\sqrt{12+4}}.$$

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\sqrt{12+4}} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \overrightarrow{AC} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \text{ 则 } \overrightarrow{AB}$$

在 \overrightarrow{AC} 上的投影向量的坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, C 错误;

对于 D, 点 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, 则 $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$, 即 $\overrightarrow{HA} \cdot (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{HC} \cdot (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA}) = 0$, 则 $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC}$, 从而得 $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$,

由 $\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$ 可得, $|\overrightarrow{HA}|^2 + |\overrightarrow{HB}|^2 + |\overrightarrow{HC}|^2 - 2 \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HC} = |\overrightarrow{HA}|^2 + |\overrightarrow{HB}|^2 + |\overrightarrow{HC}|^2 - 2 \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HB}$, 则 $|\overrightarrow{HB}|^2 + (\overrightarrow{HA} - \overrightarrow{HC})^2 = (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA})^2 + |\overrightarrow{HC}|^2$, 即 $|\overrightarrow{HB}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 = |\overrightarrow{HC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$; 由 $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$, 可得 $|\overrightarrow{HA}|^2 + |\overrightarrow{HB}|^2 + |\overrightarrow{HC}|^2 - 2 \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HA} = |\overrightarrow{HA}|^2 + |\overrightarrow{HB}|^2 + |\overrightarrow{HC}|^2 - 2 \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC}$, 则 $|\overrightarrow{HC}|^2 + (\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HA})^2 = (\overrightarrow{HC} - \overrightarrow{HB})^2 + |\overrightarrow{HA}|^2$, 即 $|\overrightarrow{HC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{HA}|^2$, 故 $|\overrightarrow{HA}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{HB}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 = |\overrightarrow{HC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2$, D



正确. 故选 BD.

7. AD 突破点 ▶ 数量积的坐标表示、判断等差和等比数列、求投影向量

【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 .

由已知得 $c_n \parallel b_n$, 则 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n+1}}{n+1}$, 则数列

$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为常数列, 即 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1}$, 所以 $a_n = na_1$, 则 $a_{n+1} - a_n = (n+1)a_1 - na_1 = a_1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, A 正确;

由 $c_n \perp b_n$, 得 $(n+1)a_{n+1} = -na_n$, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = -\frac{n}{n+1}$, 不为定值, 所以数列 $\{a_n\}$ 不是等比数列, B 错误;

由已知得 $b_1 = (1, 2)$, $c_1 = (a_1, a_2)$, $c_2 = (a_2, a_3)$, 由 $c_1 \cdot b_1 = c_2 \cdot b_1$, 得 $a_1 + 2a_2 = a_2 + 2a_3$, 即 $a_1 + a_2 = 2a_3$, 无法确定 $c_1 = c_2$ (另解: 若 $c_1 \cdot b_1 = c_2 \cdot b_1 = 0$, 即 $c_1 \perp b_1, c_2 \perp b_1$, 则无法确定 $c_1 = c_2$), C 错误;

$a_n = 2n - 3$, 则 $c_1 = (a_1, a_2) = (-1, 1)$, 又 $b_3 = (3, 4)$, 所以向量 c_1 在向量 b_3 上的投影向量为 $\frac{c_1 \cdot b_3}{|b_3|} \cdot \frac{b_3}{|b_3|} = \left(\frac{3}{25}, \frac{4}{25}\right)$, D 正确. 故选 AD.

8. A 突破点 ▶ 数量积的运算律、向量的模、轨迹问题

【解析】因为 a, b 为单位向量, 且 $|a - 2b| = \sqrt{7}$, 所以 $|a - 2b|^2 = a^2 + 4b^2 - 4a \cdot b = 7$, 则 $a \cdot b = -\frac{1}{2}$, 所以 $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = -\frac{1}{2}$. 因为 $\langle a, b \rangle \in [0, \pi]$, 所以 $\langle a, b \rangle = \frac{2\pi}{3}$.

不妨设 $\vec{OA} = a = (1, 0)$, $\vec{OB} = b = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\vec{OC} = c = (x, y)$, 因为 $c^2 - 4a \cdot c + 3 = 0$, 所以 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, 即点 $C(x, y)$ 的轨迹为圆, 且圆心为 $M(2, 0)$, 半径 $r = 1$.

又 $|c - (b - a)| = \left| (x, y) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1, 0) \right| = \left| \left(x + \frac{3}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right| = \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$, 设点 $P\left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 则 $|c - (b - a)| = \left| (x, y) - \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1, 0) \right| = |PC|$, 根据点与圆的位置关系可得 $|PC|_{\min} = |PM| - r = \sqrt{13} - 1$, 故 $|c - (b - a)|$ 的最小值为 $\sqrt{13} - 1$. 故选 A.

9. $-\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$ 12($\sqrt{2} - 1$)



突破点 ▶ 用基底表示向量、求向量的数量积

【解析】由 $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{PC}$, $\overrightarrow{CQ} = 2\overrightarrow{QD}$, 得 $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{QD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$,

则 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DQ}) - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}) = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

设 $\angle BAP = \theta \in (0, \varphi]$ 且 $\tan \varphi = \frac{2}{3} \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$, 即 $\varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\angle DAQ = \frac{\pi}{4} - \theta$,

所以 $|\overrightarrow{AP}| = \frac{3}{\cos \theta}$, $|\overrightarrow{AQ}| = \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)}$,

所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AQ}| \cos \angle PAQ = \frac{3}{\cos \theta} \times \frac{2}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta} =$

$\frac{6}{\frac{\cos 2\theta + 1}{2} + \frac{\sin 2\theta}{2}} = \frac{12}{\sqrt{2} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 1}$, 而

$2\theta + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, 2\varphi + \frac{\pi}{4}\right]$, $2\varphi + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{7\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right)$,

所以 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ 的最小值为 $\frac{12}{\sqrt{2} + 1} = 12(\sqrt{2} - 1)$.

第3节 复数

刷

基础

1. D 考查点 ▶ 复数的除法运算、求复数的实部与虚部

【解析】因为 $i^{2025} = i$, 所以 $zi^{2025} = zi = 2 - i$, 则 $z = \frac{2-i}{i} = -1 - 2i$, 所以 z 的实部为 -1 , 虚部为 -2 , 则 z 的实部与虚部之和为 -3 . 故选 D.

2. B 考查点 ▶ 复数的四则运算、求复数的虚部

【解析】已知 $\frac{z-2}{3z-4} = i$, 等式两边同时乘 $3z-4$, 可得 $z-2 = i(3z-4)$, 整理得 $z(1-3i) = 2-4i$, 则 $z = \frac{2-4i}{1-3i} = \frac{(2-4i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{14+2i}{10} = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}i$.

所以 z 的虚部为 $\frac{1}{5}$. 故选 B.

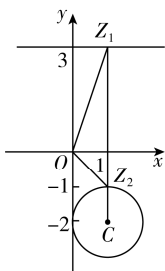
3. A 考查点 ▶ 复数的几何意义

【解析】复数 $2-i$, $-1+3i$ 对应的点为 $M(2, -1)$, $N(-1, 3)$, 所以 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = (-1, 3) - (2, -1) = (-3, 4)$, 对应的复数为 $-3+4i$. 故选 A.

4. B 突破点 ▶ 复数的几何意义



【解析】由复数 z_1 的虚部为 3, 可知在复平面内, 复数 z_1 对应的点在直线 $y=3$ 上. 设 $z_1 = \overrightarrow{OZ_1}, z_2 = \overrightarrow{OZ_2}$, 又复数 z_2 满足条件 $|z_2 - 1 + 2i| = 1$, 可得复数 z_2 表示的点在以 $C(1, -2)$ 为圆心, 半径为 1 的圆上. 而 $|z_2 - z_1| = |\overrightarrow{OZ_2} - \overrightarrow{OZ_1}| = |\overrightarrow{Z_1Z_2}|$, 则表示直线 $y=3$ 上的点到圆 $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$ 上的点的距离. 如图所示, 当点 C, Z_2, Z_1 三点共线 (点 Z_2 在点 C, Z_1 之间) 且 CZ_1 与直线 $y=3$ 垂直时距离最小, $|z_2 - z_1|_{\min} = 3 - (-2) - 1 = 4$. 故选 B.



5. C 考查点 ▶ 复数的四则运算

【解析】 $\because (2+i) \cdot z = 5, \therefore z = \frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 2-i$. 故选 C.

6. B 考查点 ▶ 复数的四则运算

【解析】由复数的几何意义可知 $z = 2+3i$, 则 $\frac{z-1}{1-i} = \frac{1+3i}{1-i} = \frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i$. 故选 B.

7. D 考查点 ▶ 复数的四则运算

【解析】由 $\frac{z+i}{z-1} = 2i$, 得 $z = \frac{3i}{-1+2i} = \frac{3i(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{6}{5} - \frac{3}{5}i$, 故选 D.

8. B 考查点 ▶ 共轭复数、复数的运算

【解析】由 $(3+4i)z = 5i$, 得 $z = \frac{5i}{3+4i} = \frac{5i \cdot (3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{20+15i}{25} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$, 所以 $\bar{z} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$. 故选 B.

9. BC 考查点 ▶ 求复数的模、共轭复数的概念及计算

【解析】设 $z = a+bi, a, b \in \mathbf{R}$, 由 $|z-1| = |z| = 1$, 得 $\begin{cases} \sqrt{(a-1)^2 + b^2} = 1, \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $a = \frac{1}{2}, b = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

对于 A, $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 不是实数, A 错误;

对于 B, $|\bar{z}| = |a-bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, B 正确;

对于 C, $z + \bar{z} = a+bi + a-bi = 2a = 1$, C 正确;

对于 D, 由 $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 得 $\bar{z} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 由



$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 得 $\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, 可知 $z \neq \bar{z}$, 因此 $\frac{z}{\bar{z}} \neq 1$, D 错误. 故选 BC.

10. A 考查点 ▶ 复数的模

【解析】设 $z = a + bi$, $a, b \in \mathbf{R}$, 则 $|z - 2i|^2 = |a + (b - 2)i|^2 = a^2 + (b - 2)^2$, 而 $z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. 由 $a^2 + (b - 2)^2 = a^2 + b^2$, 解得 $b = 1$, 故 $z = a + i$, 于是 $|z| = \sqrt{a^2 + 1} \geq 1$, 故 $|z|$ 的最小值为 1. 故选 A.

11. B 考查点 ▶ 复数范围内方程的根

【解析】因为复数 $z = 1 + i$ 且复数 z 是方程 $x^2 + ax + 2 = 0$ 的一个根, 所以 $(1 + i)^2 + a(1 + i) + 2 = 0$, 即 $(a + 2) + (2 + a)i = 0$, 则 $a + 2 = 0$, 解得 $a = -2$. 故选 B.

12. D 考查点 ▶ 复数相等、求复数中参数的值

【解析】因为 $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$), 所以 $\bar{z} = x - yi$,

由 $(2 + i)(1 - i) = \bar{z} + x$, 得 $(2 + i)(1 - i) = 2x - yi$, 即 $3 - i = 2x - yi$,

所以 $\begin{cases} 2x = 3, \\ y = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = 1, \end{cases}$ 所以 $x + y = \frac{5}{2}$. 故选 D.

13. $-\frac{2}{3}$ 考查点 ▶ 已知复数的类型求参数、复数代数形式的乘法运算

【解析】因为 $z_1 z_2 = (a + 2i)(3 - i) = 3a + 2 + (6 - a)i$ 为纯虚数, 所以 $\begin{cases} 3a + 2 = 0, \\ 6 - a \neq 0, \end{cases}$ 所以 $a = -\frac{2}{3}$.

易错警示

纯虚数的充要条件为实部等于 0 而虚部不等于 0, 本道题易忽略 $6 - a \neq 0$.

全章综合训练

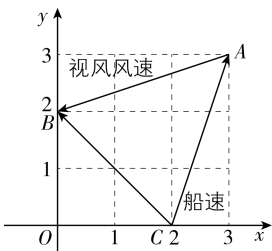
刷

真题

1. A 命题点 ▶ 相反向量的概念、向量的线性运算、向量的模的计算

【解析】如图, 设点 $A(3, 3)$, $B(0, 2)$, $C(2, 0)$, 由题意知, 视风风速对应的向量为 \overrightarrow{AB} , 船速对应的向量为 \overrightarrow{CA} , 因为船行风风速对应的向量与船速对应的向量为相反向量, 所以船行风风速对应的向量为 \overrightarrow{AC} , 则真风风速对应的向量为 $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = (-2, 2)$, $|\overrightarrow{CB}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} =$

$2\sqrt{2}$, 而 $2\sqrt{2} \in (1.6, 3.3)$, 故该时刻的真风为轻风. 故选 A.



2. D 命题点 ▶ 平面向量的数量积与向量垂直的关系

【解析】由题意知 $b - 4a = (2, x) - 4(0, 1) = (2, x - 4)$, 又 $b \perp (b - 4a)$, 所以 $2 \times 2 + x(x - 4) = 0$, 即 $x^2 - 4x + 4 = 0$, 解得 $x = 2$, 故选 D.

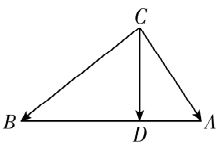
3. D 命题点 ▶ 平面向量的坐标运算及垂直

【解析】由于 $a = (1, 1)$, $b = (1, -1)$, 则 $a + \lambda b = (1, 1) + (\lambda, -\lambda) = (1 + \lambda, 1 - \lambda)$, $a + \mu b = (1, 1) + \mu(1, -1) = (1 + \mu, 1 - \mu)$. 又 $\because (a + \lambda b) \perp (a + \mu b)$, $\therefore (a + \lambda b) \cdot (a + \mu b) = 0$, 即 $(1 + \lambda)(1 + \mu) + (1 - \lambda)(1 - \mu) = 0$, 解得 $\lambda\mu = -1$, 故选 D.

4. B 命题点 ▶ 向量的线性运算

【解析】如图, 因为点 D 在边 AB 上, $BD = 2DA$, 所以

$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{CA} + 3\vec{AD} = \vec{CA} + 3(\vec{CD} - \vec{CA}) = -2\vec{CA} + 3\vec{CD} = -2m + 3n$, 故选 B.



5. D 命题点 ▶ 向量的模

【解析】因为 $a = (2, 1)$, $b = (-2, 4)$, 所以 $a - b = (4, -3)$, 所以 $|a - b| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$, 故选 D.

6. A 命题点 ▶ 平面向量的线性运算

【解析】因为 D 是 AB 的中点, 所以 $\vec{AD} = \vec{DB}$. 所以 $\vec{CB} = \vec{CD} + \vec{DB} = \vec{CD} + \vec{AD} = \vec{CD} + (\vec{CD} - \vec{CA}) = 2\vec{CD} - \vec{CA}$. 故选 A.

7. $\sqrt{2}$ 命题点 ▶ 平面向量的坐标运算

【解析】由题意得 $a - b = (1, 1 - 2x)$, 由 $a \perp (a - b)$, 得 $a \cdot (a - b) = 0$, 即 $x + 1 - 2x = 0$, 所以 $x = 1$, 所以 $a = (1, 1)$, 故 $|a| = \sqrt{2}$.

一题多解

由 $a \perp (a - b)$, 得 $a \cdot (a - b) = 0$, 即 $a^2 = a \cdot b$, 将 $a = (x, 1)$, $b = (x - 1, 2x)$ 代入, 得 $x^2 + 1 = x(x - 1) + 2x$, 解得 $x = 1$, 所以 $a = (1, 1)$, 故 $|a| = \sqrt{2}$.

8. B 命题点 ▶ 平面向量的数量积、向量的模

【解析】(代数法) 因为 $(b - 2a) \perp b$, 所以 $b \cdot b - 2a \cdot b = 0$, 即 $b^2 = 2a \cdot b$. 又 $|a + 2b| = 2$, 所以 $(|a + 2b|)^2 = (a + 2b)^2 = a^2 + 4a \cdot b + 4b^2 = a^2 + 2b^2 + 4b^2 = 1 + 6|b|^2 = 4$, 解得 $|b|^2 = \frac{1}{2}$, $|b| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故选 B.



9. A 命题点 ▶ 直线与圆的位置关系、向量数量积的应用

【解析】直线 PA 与 $\odot O$ 相切于 A , 且 $|OA| = 1, |PO| = \sqrt{2}$, 则 $|PA| = 1$. 设 \overrightarrow{PO} 与 \overrightarrow{PD} 的夹角为 θ , 则 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right)$.

当 PA 与 PD 在 PO 的同侧时, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} = |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PD}| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 1 \times |PO| \cos \theta \times \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sqrt{2} \cos \theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = \sqrt{2} \cos \theta \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta + \sin \theta) = \cos^2 \theta +$

$$\frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

（提示: $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right), 2\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, 则 $\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$);

当 PA 与 PD 在 PO 的异侧时, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD} = |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PD}| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = 1 \times |PO| \cos \theta \times$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \sqrt{2} \cos \theta \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \sqrt{2} \cos \theta \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta - \sin \theta) = \cos^2 \theta -$$

$$\frac{1}{2} \sin 2\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2} +$$

$$\frac{1}{2} = 1 \quad \left(\text{提示: } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right), 2\theta + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right), \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \right).$$

综上所述, $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD}$ 的最大值为 $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故选 A.

10. B 命题点 ▶ 平面向量的数量积

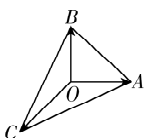
【解析】在正方形 $ABCD$ 中, E 为 AB 的中点, 且 $AB = 2$, 所以 $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED} = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EB}) = |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{EB}|^2 = 4 - 1 = 3$, 故选 B.

11. D 命题点 ▶ 向量的夹角的求解、余弦定理的应用

【解析】设 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, 因为 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1, |\mathbf{c}| = \sqrt{2}$, 且 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 所以 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 如图.

因为 $\mathbf{a} - \mathbf{c} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CA}$,
 $\mathbf{b} - \mathbf{c} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB}$, 所以
 $\langle \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \rangle = \angle ACB$.

由题意可知, $\angle AOC =$



$\angle BOC = \frac{3\pi}{4}$, 在 $\triangle AOC$ 中, 由余弦定理得,

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cdot \cos \angle AOC = 1^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5, \text{ 所以}$$



$AC=BC=\sqrt{5}$. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=\sqrt{2}$, 由余弦定理得, $\cos \angle ACB = \frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC \cdot BC} = \frac{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}{2\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$, 所以 $\cos \langle a-c, b-c \rangle = \frac{4}{5}$, 故选 D.

12. B **命题点** ▶ 平面向量的数量积及坐标运算

【解析】 $a+b=(5,3)$, $a-b=(1,-1)$, $|a+b|=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$, $|a-b|=\sqrt{2}$, $(a+b) \cdot (a-b)=5 \times 1-3 \times 1=2$, 所以 $\cos \langle a+b, a-b \rangle = \frac{(a+b) \cdot (a-b)}{|a+b||a-b|} = \frac{2}{\sqrt{34} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$, 故选 B.

13. C **命题点** ▶ 平面向量运算的坐标表示、平面向量的夹角

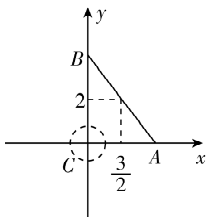
【解析】 由题意, 得 $c=a+tb=(3+t,4)$, 所以 $a \cdot c=25+3t$, $b \cdot c=3+t$. 因为 $\langle a, c \rangle = \langle b, c \rangle$, 所以 $\cos \langle a, c \rangle = \cos \langle b, c \rangle$, 所以 $\frac{a \cdot c}{|a||c|} = \frac{b \cdot c}{|b||c|}$, 所以 $\frac{a \cdot c}{|a|} = \frac{b \cdot c}{|b|}$, 即 $\frac{25+3t}{5} = 3+t$, 解得 $t=5$, 故选 C.

14. C **命题点** ▶ 向量的数量积和模的运算

【解析】 因为 $|a-2b|^2 = (a-2b)^2 = a^2 - 4a \cdot b + 4b^2 = 9$, 又 $a^2 = |a|^2 = 1$, $b^2 = |b|^2 = 3$, 所以 $4a \cdot b = 4$, 即 $a \cdot b = 1$, 故选 C.

15. D **命题点** ▶ 平面向量的数量积、圆上一点到定点的距离的范围

【解析】 以 C 为坐标原点, CA, CB 所在直线分别为 x, y 轴建立平面直角坐标系, 如图所示, 则 $A(3,0)$, $B(0,4)$. 设 $P(x,$



$y)$, 则 $x^2+y^2=1$, $\overrightarrow{PA}=(3-x,-y)$, $\overrightarrow{PB}=(-x,4-y)$, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = x^2-3x+y^2-4y = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 - \frac{25}{4}$. 因为 $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2$ 表示为圆 $x^2+y^2=1$ 上一点到点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 的距离的平方, 又圆 $x^2+y^2=1$ 上一点到点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 的距离的最值可由圆心 $(0,0)$ 到点 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 的距离加(减)半径得到, 所以 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in \left[\left(\frac{5}{2}-1\right)^2 - \frac{25}{4}, \left(\frac{5}{2}+1\right)^2 - \frac{25}{4} \right]$, 即 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \in [-4, 6]$, 故选 D.

**16. $\sqrt{3}$ 命题点** ▶ 平面向量的数量积及模长计算

【解析】 $\begin{cases} |a-b|=\sqrt{3}, \\ |a+b|=|2a-b|, \end{cases}$ 两式分别平方,得

$$\begin{cases} |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 = 3, \\ |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 = 4|a|^2 - 4a \cdot b + |b|^2, \end{cases}$$

解得 $|b| = \sqrt{3}$.

17. 11 命题点 ▶ 平面向量的数量积运算

【解析】因为 $|a|=1, |b|=3, \cos\langle a, b \rangle = \frac{1}{3}$, 所以 $(2a+b) \cdot b = 2a \cdot b + |b|^2 = 2|a| \cdot |b| \cdot \cos\langle a, b \rangle + |b|^2 = 2 \times 1 \times 3 \times \frac{1}{3} + 3^2 = 11$.

18. $-\frac{9}{2}$ 命题点 ▶ 平面向量的数量积运算

【解析】由 $a+b+c=0$, 得 $a=-b-c$, 所以 $a^2 = (-b-c)^2 = b^2 + 2b \cdot c + c^2$, 所以 $1^2 = 2^2 + 2b \cdot c + 2^2$, 解得 $b \cdot c = -\frac{7}{2}$. 由 $a+b+c=0$, 得 $b=-a-c$, 所以 $b^2 = (-a-c)^2 = a^2 + 2a \cdot c + c^2$, 所以 $2^2 = 1^2 + 2a \cdot c + 2^2$, 解得 $a \cdot c = -\frac{1}{2}$. 同理可得 $a \cdot b = -\frac{1}{2}$. 所以 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$.

19. C 命题点 ▶ 复数的概念、复数的运算

【解析】 $(1+5i)i = i + 5i^2 = -5+i$, 则虚部为 1. 故选 C.

20. A 命题点 ▶ 复数的运算

【解析】由 $z=1+i$, 得 $\frac{1}{z-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$. 故选 A.

21. C 命题点 ▶ 复数的四则运算

【解析】因为 $\frac{z}{z-1} = 1+i$, 所以 $z = (1+i)(z-1) = (1+i)z - (1+i)$, 整理可得, $iz = 1+i$, 即 $z = \frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)(-i)}{i(-i)} = 1-i$. 故选 C.

22. C 命题点 ▶ 复数的四则运算

【解析】 $\frac{z}{i} = -1-i$, 则 $z = i(-1-i) = -i - i^2 = 1-i$, 故选 C.

23. A 命题点 ▶ 复数的运算、共轭复数

【解析】因为 $z=5+i$, 所以 $\bar{z}=5-i$, 所以 $i(\bar{z}+z) = i(5-i+5+i) = 10i$, 故选 A.

24. A 命题点 ▶ 复数的四则运算及共轭复数的概念

【解析】 $z = \frac{1-i}{2+2i} = \frac{(1-i)^2}{2(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{4} = -\frac{1}{2}i$, 则 $\bar{z} = \frac{1}{2}i$, $\therefore z - \bar{z} = -\frac{1}{2}i - \frac{1}{2}i = -i$,



故选 A.

- 25. B** **命题点** ▶ 共轭复数的概念及复数的四则运算

【解析】 因为 $z = \frac{2+i}{1+i^2+i^5} = \frac{2+i}{1+(-1)+i} = \frac{2+i}{i} = -(2+i)i = 1-2i$, 所以 $\bar{z} = 1+2i$, 故选 B.

- 26. C** **命题点** ▶ 复数的运算

【解析】 $(a+i)(1-ai) = a-a^2i+i+a = 2a+(1-a^2)i = 2$, 所以 $\begin{cases} 2a=2, \\ 1-a^2=0, \end{cases}$ 解得 $a=1$, 故选 C.

- 27. C** **命题点** ▶ 复数的基本运算

【解析】 $\frac{5(1+i^3)}{(2+i)(2-i)} = \frac{5(1-i)}{5} = 1-i$, 故选 C.

- 28. D** **命题点** ▶ 复数的运算、共轭复数

【解析】 由 $i(1-z) = 1$, 得 $z = 1 - \frac{1}{i} = 1+i$, 所以 $z+\bar{z} = 1+i+1-i = 2$, 故选 D.

- 29. D** **命题点** ▶ 复数的乘法运算

【解析】 $(2+2i)(1-2i) = 2-4i+2i+4 = 6-2i$, 故选 D.

- 30. A** **命题点** ▶ 复数的基本概念和运算

【解析】 依题意可得 $1-2i+a(1+2i)+b=0$, 根据复数相等的充要条件可得 $\begin{cases} 1+a+b=0, \\ -2+2a=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-2, \end{cases}$ 故选 A.

- 31. C** **命题点** ▶ 共轭复数、复数的除法运算

【解析】 因为 $z = -1+\sqrt{3}i$, 所以 $z\bar{z} = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$, 所以 $\frac{z}{z\bar{z}-1} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{4-1} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i$, 故选 C.

- 32. C** **命题点** ▶ 复数的模

【解析】 由 $z = -1-i$, 得 $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. 故选 C.

- 33. C** **命题点** ▶ 复数的运算及模的计算

【解析】 $|2+i^2+2i^3| = |2-1-2i| = |1-2i| = \sqrt{1+(-2)^2} = \sqrt{5}$. 故选 C.

- 34. B** **命题点** ▶ 复数的四则运算与模

【解析】 依题意可得 $z = \frac{3-4i}{i} = \frac{(3-4i)i}{i^2} = -4-3i$, 所以 $|z| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$, 故选 B.

- 35. D** **命题点** ▶ 复数的基本运算、共轭复数与复数的模

【解析】 $iz+3\bar{z} = i(1+i) + 3(1-i) = 2-2i$, 所以 $|iz+3\bar{z}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$, 故选 D.

- 36. $\sqrt{10}$** **命题点** ▶ 复数的除法运算, 复数的模

【解析】 因为 $\frac{3+i}{i} = \frac{(3+i) \cdot i}{i^2} = \frac{-1+3i}{-1} =$



$$1-3i,$$

$$\text{所以 } \left| \frac{3+i}{i} \right| = |1-3i| = \sqrt{1^2+(-3)^2} = \sqrt{10}.$$

快解

$$\left| \frac{3+i}{i} \right| = \frac{|3+i|}{|i|} = \frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{1^2}} = \sqrt{10}.$$

37. A 命题点 ▶ 复数的乘法运算

【解析】 $(1+3i)(3-i) = 3-i+9i+3 = 6+8i$, 在复平面内对应的点的坐标为 $(6, 8)$, 位于第一象限, 故选 A.

38. A 命题点 ▶ 复数的四则运算及几何意义

【解析】因为 $\frac{2-i}{1-3i} = \frac{(2-i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} =$

$$\frac{5+5i}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \text{ 所以在复平面内, 复数}$$

$$\frac{2-i}{1-3i} \text{ 对应的点位于第一象限, 故选 A.}$$