



第5章 解三角形

刷

基础

1. ABD 考查点 ▶ 正、余弦定理解三角形, 利用数量积求模

【解析】因为 $A \in (0, \pi)$, $\sin A - \sqrt{3} \cos A = 0$, 则 $\sin A = \sqrt{3} \cos A > 0$, 所以 $\tan A = \sqrt{3}$, 故 $A = \frac{\pi}{3}$, A 正确;

由正弦定理可知 $2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$

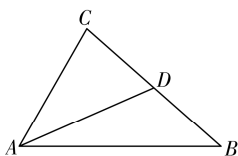
$\frac{2\sqrt{21}}{3} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{3}$, B 正确;

由正弦定理及 $3\sin B = 2\sin C$, 得 $3b = 2c$, 设 $b = 2t (t > 0)$, 则 $c = 3t$, 由余弦定理可知 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow 7 = 13t^2 - 6t^2 \Rightarrow t = 1$, 所以 $b = 2t = 2, c = 3t = 3$, C 错误;

因为 D 为 BC 的中点, 如图所示, 则 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$, 所以 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$, 则 $2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, 所以 $4|\overrightarrow{AD}|^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = c^2 + 2cb \cos \frac{\pi}{3} + b^2 = 9 + 2 \times 3 \times 2 \times$

$\frac{1}{2} + 4 = 19$, 则 $AD = \frac{\sqrt{19}}{2}$, D 正确. 故选 ABD.



2. A 考查点 ▶ 三角形面积公式及其应用、余弦定理解三角形、数量积的运算律

【解析】因为 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}^2 = \frac{16}{5}$, 所以 $|\overrightarrow{AD}| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$. 令 $\angle BAC = \theta$,

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \sin \theta$, 即

$BC = 2\sqrt{5} \sin \theta$. 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $BC^2 = 20 \sin^2 \theta = 4^2 + 2^2 - 2 \times 4 \times 2 \cos \theta$, 即 $\cos \theta (4 - 5 \cos \theta) = 0$, 解得 $\cos \theta = 0$ 或 $\cos \theta = \frac{4}{5}$.

故选 A.

3. $\sqrt{7}$ 考查点 ▶ 余弦定理解三角形、三角形面积公式及其应用

【解析】由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ACE}$, 可得

$$\frac{1}{2} bc \sin \angle BAC = \frac{1}{2} b \cdot AE \sin \frac{\angle BAC}{2} + \frac{1}{2} c \cdot AE \sin \frac{\angle BAC}{2},$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \times \sin \angle BAC = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{3} \sin \frac{\angle BAC}{2} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2}{3} \sin \frac{\angle BAC}{2},$$



又 $0 < \angle BAC < \pi$,

$$\therefore \text{化简得 } \cos \frac{\angle BAC}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{2\pi}{3}.$$

由余弦定理可得 $a =$

$$\sqrt{1+4-2 \times 1 \times 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{7}.$$

4. AC **考查点** ▶ 三角形面积公式及其应用, 正、余弦定理理解三角形

【解析】若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 则 $A+B > \frac{\pi}{2}$, 即 $\frac{\pi}{2} > B > \frac{\pi}{2} - A$, 故 $\sin B > \sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A$, 故 A 正确.

若 $B = \frac{\pi}{3}$, $b^2 = ac$, 则 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - ac = ac$, 即 $a^2 + c^2 - 2ac = 0$, $(a-c)^2 = 0$, 故 $a = c$, 且 $B = \frac{\pi}{3}$, 故 $\triangle ABC$ 是等边三角形, 故 B 错误.

若 $b \cos C + c \cos B = b$, 则 $\sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin B$, 即 $\sin(B+C) = \sin B$, 即 $\sin A = \sin B$, 又 A, B 为三角形的内角, 故 $A = B$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 故 C 正确.

若 $AB = 3, AC = 5, \cos C = \frac{13}{14}$, 则 $\cos C =$

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{a^2 + 25 - 9}{10a} = \frac{13}{14}, \text{解得 } a = 7 \text{ 或}$$

$$a = \frac{16}{7}, \text{且 } \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{3\sqrt{3}}{14}. \text{当 } a = 7 \text{ 时,}$$

$\cos A < 0$, A 为钝角, 故 $S_{\triangle ABC} =$

$$\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{15\sqrt{3}}{4}; \text{当 } a = \frac{16}{7} \text{ 时, } \cos B < 0,$$

$$B \text{ 为钝角, 故 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{60\sqrt{3}}{49}, \text{故}$$

D 错误. 故选 AC.

5. $3+3\sqrt{3}$ **考查点** ▶ 正、余弦定理理解三角形, 两角和的余弦公式, 三角形面积公式及其应用

【解析】因为 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{a^2}{3 \sin A} =$

$$\frac{1}{2} bc \sin A, \text{所以 } \frac{3}{2} bc \sin^2 A = a^2, \text{所以}$$

$$\frac{3}{2} \sin B \sin C \sin^2 A = \sin^2 A. \text{因为 } \sin A \neq 0,$$

$$\text{所以 } \sin B \sin C = \frac{2}{3}. \text{又 } 3 \cos B \cos C = 1,$$

$$\text{则 } \cos(B+C) = \cos B \cos C - \sin B \sin C = -\frac{1}{3}, \text{所以 } \cos A = -\cos(B+C) = \frac{1}{3}.$$

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} =$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}, \text{由余弦定理可得 } \frac{1}{3} = \cos A =$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \text{由 } \frac{3}{2} bc \sin^2 A = a^2, a = 3, \text{可得}$$



$$bc = \frac{27}{4}, \text{ 所以 } b^2 + c^2 = \frac{2}{3}bc + 9 = \frac{27}{2},$$

$$(b+c)^2 = \frac{27}{2} + \frac{27}{2} = 27, \text{ 所以 } b+c = 3\sqrt{3}, \text{ 故}$$

$\triangle ABC$ 的周长为 $a+b+c = 3+3\sqrt{3}$.

6. 考查点 ▶ 三角形面积公式及其应用, 正、余弦定理解三角形

【解】(1) 选择条件①: 因为 $\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{b-a}{b-c}$,

由正弦定理, 得 $\frac{b+c}{a} = \frac{b-a}{b-c}$, 所以 $b^2 + a^2 - c^2 = ab$. 由余弦定理, 得 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$. 因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

选择条件②: 因为 $\frac{\cos C}{\cos B} = \frac{c}{2a-b}$, 所以 $2a \cos C - b \cos C = c \cos B$, 即 $2a \cos C = c \cos B + b \cos C$.

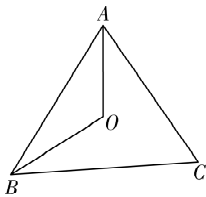
由正弦定理得 $2 \sin A \cos C = \sin C \cos B + \sin B \cos C$, 即 $2 \sin A \cos C = \sin(C+B)$. 因为 $A+B+C = \pi$, 所以 $B+C = \pi - A$, 所以 $\sin(B+C) = \sin(\pi - A) = \sin A$. 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$, 所以 $\cos C = \frac{1}{2}$.

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

(2) 因为点 O 是内心, 所以 $\angle OAB = \frac{1}{2} \angle BAC$, $\angle OBA = \frac{1}{2} \angle CBA$. 因为 $\angle ACB + \angle BAC + \angle CBA = \pi$, 所以 $\angle BAC + \angle CBA = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\angle OAB + \angle OBA = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\angle AOB = \frac{2\pi}{3}$.

由余弦定理得 $AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos \angle AOB$, 即 $25 = 17 + AO \cdot BO$, 解得 $AO \cdot BO = 8$,

所以 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \sin \angle AOB = 2\sqrt{3}$.



7. 考查点 ▶ 正、余弦定理的综合应用, 三角形面积公式及其应用, 三角恒等变换的化简问题

【解】(1) 由 $b \cos C + \sqrt{3} b \sin C - a - c = 0$, 根据正弦定理得, $\sin B \cos C + \sqrt{3} \sin B \sin C - \sin A - \sin C = 0$,

则 $\sin B \cos C + \sqrt{3} \sin B \sin C - \sin(B+C) - \sin C = 0$,

则 $\sin B \cos C + \sqrt{3} \sin B \sin C -$



$$(\sin B \cos C + \cos B \sin C) - \sin C = 0,$$

$$\text{则 } \sqrt{3} \sin B \sin C - \cos B \sin C - \sin C = 0,$$

因为 $C \in (0, \pi)$, 所以 $\sin C \neq 0$,

$$\text{则 } \sqrt{3} \sin B - \cos B - 1 = 0,$$

$$\text{即 } \sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}, \text{ 又 } B \in (0, \pi),$$

$$\text{则 } B - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}, \text{ 即 } B = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ ① 因为 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4} ac = 4\sqrt{3}, \text{ 所以 } ac = 16.$$

$$\text{由余弦定理 } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B,$$

$$\text{得 } 16 = a^2 + c^2 - ac, \text{ 即 } a^2 + c^2 = 32,$$

所以 $a = c = 4$, 即 $\triangle ABC$ 为等边三角形,

则 $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 12$.

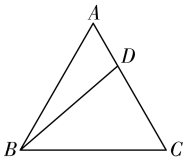
$$\text{② 由 } \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD}, \text{ 所以 } AD = \frac{4}{3},$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由余弦定理得,

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 16 +$$

$$\frac{16}{9} - 2 \times 4 \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = 16 \times \frac{7}{9},$$

$$\text{所以 } BD = \frac{4\sqrt{7}}{3}.$$



8. D 考查点 ▶ 利用正弦定理和三角形解的个数求边长取值范围

【解析】 根据正弦定理得 $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$, 即

$$\frac{2}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{AC}{\sin B}, \text{ 可得 } AC = \frac{2 \sin B}{\sin \frac{\pi}{6}} = 4 \sin B,$$

$$\text{根据 } A = \frac{\pi}{6}, \text{ 可得 } B \in \left(0, \frac{5\pi}{6}\right).$$

若 $\triangle ABC$ 有唯一解, 则由正弦函数的性质, 可知 $B = \frac{\pi}{2}$ 或 $0 < B \leq \frac{\pi}{6}$, 所以 $AC =$

$$4 \sin B = 4 \text{ 或 } AC = 4 \sin B \in (0, 2], \text{ 则 } AC \text{ 的取值范围是 } (0, 2] \cup \{4\}. \text{ 故选 D.}$$

9. 突破点 ▶ 三角恒等变换的化简问题, 正弦定理边角互化的应用, 求余弦(型)函数的值域, 和、差角的正弦公式

(1) **【证明】** 因为 $a - c = 2c \cos B$, 由正弦定理得 $\sin A - \sin C = 2 \sin C \cos B$, 所以 $\sin B \cos C + \sin C \cos B - \sin C = 2 \sin C \cos B$, 所以 $\sin B \cos C - \sin C \cos B = \sin C \Leftrightarrow \sin(B - C) = \sin C$, 而 $0 < B < \pi, 0 < C < \pi$, 则 $B - C = C$ 或 $B - C + C = \pi$, 即 $B = 2C$ 或 $B = \pi$ (舍去), 故 $B = 2C$.

(2) **【解】** 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 所

$$\text{以 } \begin{cases} 0 < C < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < 2C < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \pi - 3C < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{\pi}{6} < C < \frac{\pi}{4},$$



所以 $\cos C$ 的取值范围是 $\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos C < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

由正弦定理可得 $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$, 则 $b = \frac{\sin B}{\sin C} \cdot c =$

$\frac{\sin 2C}{\sin C} \cdot c = 2\cos C \cdot c$, 所以 $\frac{\cos C}{b} = \frac{1}{2c}$, 所

以 $\frac{\cos C}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{2c}$. 因为 $a - c = 2c\cos B$, 所

以 $2 - c = 2c\cos 2C$, 所以 $c = \frac{2}{2\cos 2C + 1}$, 所

以 $\frac{\cos C}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{2c} = \frac{3}{4} =$

$\frac{3(2\cos 2C + 1)}{4} = \frac{3(4\cos^2 C - 1)}{4}$.

因为 $\cos C \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 所以 $4\cos^2 C - 1 \in$

$(1, 2)$, 所以 $\frac{\cos C}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3(4\cos^2 C - 1)}{4}$ 的

取值范围是 $\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

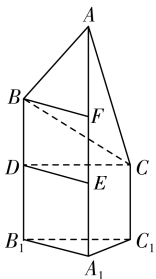
10. C 考查点 ▶ 高度测量问题

【解析】如图, 分别过点 B, C 作 $BF \perp AA_1, CD \perp BB_1$, 垂足分别为 F, D , 过点 D 作 $DE \perp AA_1$, 垂足为 E .

根据题意易得 $\angle ABF = 51.34^\circ, \angle BCD = 33.69^\circ$.

在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中, 由正弦定理得 $B_1C_1 =$

$$\frac{A_1B_1 \cdot \sin \angle C_1A_1B_1}{\sin \angle A_1C_1B_1} = \frac{80 \times \sin 48.60^\circ}{\sin 30^\circ} \approx \frac{80 \times 0.750}{\frac{1}{2}} = 120 \text{ (米)}.$$



在 $\text{Rt} \triangle BCD$ 中, $DC = B_1C_1 = 120$ 米, 则 $BD = 120 \tan 33.69^\circ \approx 120 \times 0.667 = 80.04$ (米); 在 $\text{Rt} \triangle ABF$ 中, $BF = A_1B_1 = 80$ 米, 则 $AF = 80 \tan 51.34^\circ \approx 80 \times 1.250 = 100$ (米), 所以 $AA_1 = CC_1 + BD + AF \approx 86 + 80.04 + 100 \approx 266$ (米). 故选 C.

11. B 考查点 ▶ 正弦定理解三角形

【解析】 $\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \therefore \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} =$

$\frac{\sqrt{2}}{\sin B}, \therefore \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 又 $0^\circ < B < 180^\circ$, 且

$b < a, \therefore B < A$, 则角 B 的值为 45° . 故选 B.

易错警示

忽略三角形中“大边对大角”的限制条件而致错

在利用正弦定理理解已知三角形的两边和其中一边的对角, 求另一边的对角的问题时, 有可能出现一解、两解或无解的情况, 所以解题时要注意是否需要分类讨论.

本题计算出 $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 后, 要根据 $b < a$, 得到 $B < A$, 舍去 $B = 135^\circ$ (若 $B = 135^\circ$, 不满足三角形的内角和为 180°).



刷

提分

1. B **考查点** ▶ 二倍角的余弦公式、正弦定理理解三角形、两角和的正弦公式

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{3}{\sin A} = \frac{4}{\sin B}$, 则 $3\sin B = 4\sin(B+C) = 4\sin B\cos C + 4\sin C\cos B = 4\sin B\cos C + 8\sin B\cos^2 B$, 而 $\sin B > 0$, 因此 $3 = 4\cos C + 4(\cos 2B + 1) = 8\cos C + 4$, 所以 $\cos C = -\frac{1}{8}$. 故选 B.

2. C **考查点** ▶ 三角形面积公式及其应用、余弦定理理解三角形

【解析】设 $AB = x$, 根据余弦定理, $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \angle BAC$, 已知 $BC = 8, AC = 10, \cos \angle BAC = \frac{3}{5}$, 代入可得 $8^2 = 10^2 + x^2 - 2 \times 10 \times x \times \frac{3}{5}$, 即 $x^2 - 12x + 36 = 0$, 解得 $x = 6$, 由于 $BC^2 + AB^2 = 64 + 36 = 100 = AC^2$, 因此 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 则 $S = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$. 故选 C.

3. A **突破点** ▶ 正、余弦定理的综合应用, 三角恒等变换

【解析】由题意知 $b^2 - a^2 = \frac{1}{2}c^2$, 由余弦定

理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c^2 + \frac{1}{2}c^2}{2bc} = \frac{3c^2}{4bc} =$

$\frac{3c}{4b}$, 由正弦定理得 $\cos A = \frac{3\sin C}{4\sin B}$, 即

$4\cos A\sin B = 3\sin C = 3\sin(A+B) = 3\sin A\cos B + 3\cos A\sin B$, 则 $\cos A\sin B = 3\sin A\cos B$. 又 $\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B = -\frac{1}{3}$, 所以 $-2\sin A\cos B =$

$-\frac{1}{3}$, 得 $\sin A\cos B = \frac{1}{6}$, 所以 $\cos A\sin B =$

$\frac{1}{2}$, 所以 $\sin C = \sin(A+B) = \sin A\cos B +$

$\cos A\sin B = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. 故选 A.

4. A **突破点** ▶ 正弦定理边角互化的应用、余弦定理理解三角形、判断命题的充分不必要条件

【解析】由 $a\cos C = c\cos A$ 及正弦定理可得 $\sin A\cos C = \sin C\cos A$, 进而可得 $\tan A = \tan C \Rightarrow A = C$, 可得 $a = c$ (另解: 进而可得 $\sin(A-C) = 0$, 又 $A, C \in (0, \pi)$, $\therefore A = C$, $\therefore a = c$), 又 $(a+b)^2 - 2ab\cos C = ab + bc + ca$, 有 $a^2 + b^2 + 2ab - (a^2 + b^2 - c^2) = ab + bc + ca$, 即 $c^2 + ab - bc - ca = 0$, 因式分解可得 $(b-c)(a-c) = 0$, 可得 $b = c$ 或 $a = c$, 故“ $a\cos C = c\cos A$ ”是“ $(a+b)^2 - 2ab\cos C = ab + bc + ca$ ”的充分不必要条件, 故选 A.

5. C **突破点** ▶ 正、余弦定理判定三角形形状, 利用数量积求夹角



【解析】由题意得 $\sin^2 A + \sin^2 C = \sin C \sin A + 1 - \cos^2 B$, 即 $\sin^2 A + \sin^2 C = \sin C \sin A + \sin^2 B$, 由正弦定理得 $a^2 + c^2 = ac + b^2$, 即 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$, 则 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$, 因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

又 $\left| \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right| = \sqrt{3}$, 所以 $\left| \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right|^2 = 3 = \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \right)^2 + 2 \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} \cdot \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} + \left(\frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}|} \right)^2 = 2 + 2 \cos \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle$, 故 $\cos \langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = \frac{1}{2}$. 因为 $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

综上, $\triangle ABC$ 为等边三角形. 故选 C.

6. ACD 突破点 ▶ 正弦定理边角互化的应用、用定义求向量的数量积、三角形面积公式及其应用

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 由 $(2b - c) \cos A = a \cos C$ 及正弦定理得 $2 \sin B \cos A - \sin C \cos A = \sin A \cos C$, 所以 $2 \sin B \cos A = \sin A \cos C + \sin C \cos A$, 化简得 $2 \sin B \cos A = \sin(A + C)$, 即 $2 \sin B \cos A = \sin B$.

因为 $B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin B \neq 0$, 故 $2 \cos A = 1$, 解得 $\cos A = \frac{1}{2}$. 因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$, 故 A 正确, B 错误.

因为 AD 是边 BC 的中线, 所以由向量中线定理得 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, 故 $2\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC}$, 两边同时平方得 $4\vec{AD}^2 = \vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$, 代入得 $36 = c^2 + 12 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2}c$, 解得 $c = 2\sqrt{3}$ (负根已舍去), 所以 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 6$, 故 C 正确.

设 $\triangle ABC$ 的面积为 S , 由三角形面积公式得 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

7. C 突破点 ▶ 正弦定理边角互化的应用、余弦定理解三角形

【解析】由 $c \cos(A - B) + 2\sqrt{3}a \sin B \cos C = -c \cos C$, 得 $c \cos(A - B) + c \cos C = -2\sqrt{3}a \sin B \cos C$, 所以 $c[\cos(A - B) - \cos(A + B)] = -2\sqrt{3}a \sin B \cos C$,

即 $2c \sin A \sin B = -2\sqrt{3}a \sin B \cos C$, 则由正弦定理得 $2 \sin C \sin A \sin B = -2\sqrt{3} \sin A \sin B \cos C$.



因为 $A, B \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$, $\sin B \neq 0$, 所以 $\sin C = -\sqrt{3} \cos C$, 即 $\tan C = -\sqrt{3}$, 又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{2\pi}{3}$.

因为 $c = 2\sqrt{6}$, 所以由余弦定理得 $(2\sqrt{6})^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, 即 $a^2 + b^2 = 24 - ab$.

由题可得 $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$, 所以 $\overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB}^2) = \frac{1}{4}(b^2 - ab + a^2) = \frac{1}{4}(24 - 2ab)$, 因为 $a^2 + b^2 = 24 - ab \geq 2ab$, 所以 $ab \leq 8$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立, 所以 $\overrightarrow{CD}^2 \geq \frac{1}{4} \times (24 - 16) = 2$, 则 $|\overrightarrow{CD}| \geq \sqrt{2}$.

所以 AB 边上的中线 CD 长度的最小值为 $\sqrt{2}$. 故选 C.

8. C 突破点 ▶ 正、余弦定理与三角函数性质的结合应用, 三角形面积公式及其应用

【解析】由三角形面积公式可得 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$, 故 $a^2 = bcsin A + (b-c)^2$, $1 - \frac{1}{2}\sin A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 故 $1 - \frac{1}{2}\sin A = \cos A$.

因为 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, 所以 $\sin^2 A + \left(1 - \frac{1}{2}\sin A\right)^2 = 1$, 解得 $\sin A = \frac{4}{5}$ 或 0.

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $\sin A = 0$ 舍去, 故 $\sin A = \frac{4}{5}$, $\cos A = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$,

由正弦定理得 $\frac{2\sin^2 B + \sin^2 C}{\sin B \sin C} = \frac{2b^2 + c^2}{bc} = \frac{2b}{c} + \frac{c}{b}$, 其中 $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\sin B} = \frac{4}{5 \tan B} + \frac{3}{5}$, 因为

$\triangle ABC$ 为锐角三角形, 所以 $C < \frac{\pi}{2}$, 故 $A +$

$B > \frac{\pi}{2}$, 所以 $B > \frac{\pi}{2} - A$, $\tan B >$

$\tan\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{3}{4}$, 则 $\frac{4}{5 \tan B} \in$

$\left(0, \frac{16}{15}\right)$, $\frac{4}{5 \tan B} + \frac{3}{5} \in \left(\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right)$.

令 $\frac{c}{b} = t \in \left(\frac{3}{5}, \frac{5}{3}\right)$, 则 $g(t) = \frac{2}{t} + t$ 为对

勾函数, 在 $\left(\frac{3}{5}, \sqrt{2}\right)$ 上单调递减, 在

$\left(\sqrt{2}, \frac{5}{3}\right)$ 上单调递增, 则 $g(t)_{\min} =$

$g(\sqrt{2}) = \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. 又 $g\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{10}{3} +$

$\frac{3}{5} = \frac{59}{15}$, $g\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{6}{5} + \frac{5}{3} = \frac{43}{15}$, 因为 $\frac{59}{15} >$



$$\frac{43}{15}, \text{ 所以 } \frac{2\sin^2 B + \sin^2 C}{\sin B \sin C} = \frac{2b}{c} + \frac{c}{b} \in \left[2\sqrt{2}, \frac{59}{15} \right). \text{ 故选 C.}$$

方法总结

解三角形中最值或范围问题,通常涉及与边长、周长、面积有关的范围问题,或与角度有关的范围问题,常用处理思路:

- (1) 余弦定理结合基本不等式构造不等关系求出答案;
- (2) 采用正弦定理化边为角,再利用三角函数的范围求出最值或范围,如果三角形为锐角三角形或有其他的限制,通常采用这种方法;
- (3) 巧妙利用三角换元,实现边化角,进而转化为正弦或余弦函数求出最值.

9. BCD 突破点 ▶ 正弦定理边角互化的应用、余弦定理解三角形、由不等式的性质比较数(式)的大小

【解析】因为 $c^2 = b(a+b)$, $a+b > c > 0$, 所以 $c^2 > bc$, 所以 $c > b$, A 错误.

因为 $c^2 = b(a+b)$, 所以由余弦定理

$$\text{得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + ab}{2ac} = \frac{a+b}{2c} = \frac{\frac{c^2}{b}}{2c} =$$

$$\frac{c}{2b}, \text{ 所以由正弦定理得 } \cos B = \frac{\sin C}{2\sin B}, \text{ 所}$$

以 $\sin C = 2\sin B \cos B = \sin 2B$, 又 $C \in (0, \pi)$, $2B \in (0, 2\pi)$, 所以 $C = 2B$ 或 $C + 2B = \pi$, 若 $C + 2B = \pi$, 则 $A = B$, 所以 $a = b$, 此

时 $c^2 = b(a+b) = a^2 + b^2$, 所以 $C = \frac{\pi}{2}$, 则

$A = B = \frac{\pi}{4}$, 此时 $C = 2B$, B 正确.

由选项 B 可知 $C = 2B$, 所以 $B + C = 3B \in$

$(0, \pi)$, 所以 $B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, C 正确.

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin(\pi - B - C)}{\sin B} =$$

$$\frac{\sin(B+C)}{\sin B} = \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin B} =$$

$$\frac{\sin B \cos 2B + \cos B \sin 2B}{\sin B} = \cos 2B +$$

$$\frac{2\sin B \cos^2 B}{\sin B} = 2\cos^2 B - 1 + 2\cos^2 B =$$

$4\cos^2 B - 1$, 因为 $B \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 所以

$\cos B \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 所以 $\cos^2 B \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$,

所以 $4\cos^2 B \in (1, 4)$, $4\cos^2 B - 1 \in (0, 3)$,

所以 $\frac{a}{b} \in (0, 3)$, D 正确. 故选 BCD.

10. $4+4\sqrt{5}$ 突破点 ▶ 正、余弦定理的综合应用,三角恒等变换

【解析】由 $\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\tan C} = 1$ 得 $\frac{\cos B}{\sin B} +$

$$\frac{\cos C}{\sin C} = 1,$$



即 $\sin B \cos C + \cos B \sin C = \sin B \sin C$,

即 $\sin(B+C) = \sin B \sin C$,

由 $B+C = \pi - A$ 以及诱导公式得 $\sin A = \sin B \sin C$,

又 $\cos B \cos C = \frac{1}{5}$,

所以 $\sin A - \frac{1}{5} = \sin B \sin C - \cos B \cos C =$

$-\cos(B+C) = \cos A$,

又 $\sin A > 0$, 由同角三角函数的基本关

系得 $\sin A = \frac{4}{5}, \cos A = \frac{3}{5}$,

因为 $a = 4$, 根据正弦定理有 $\frac{b}{\sin B} =$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{4}{\frac{4}{5}} = 5,$$

所以 $b = 5 \sin B, c = 5 \sin C$,

由余弦定理得 $16 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos$

$$A = (b+c)^2 - \frac{16}{5} bc = (b+c)^2 - \frac{16}{5}$$

$\times 25 \sin B \sin C$,

将 $\sin B \sin C = \sin A = \frac{4}{5}$ 代入上式得

$$(b+c)^2 = 80,$$

解得 $b+c = 4\sqrt{5}$, 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $4+4\sqrt{5}$.

11. $\sqrt{3}$ 突破点 ▶ 正弦定理的综合应用、三角形面积公式及其应用

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, 根据题意得, $a \sin 2B + b \sin A = 0$,

所以 $2a \sin B \cos B + b \sin A = 0$,

由正弦定理可得 $2 \sin A \sin B \cos B + \sin B \sin A = 0$,

又因为 $A, B \in (0, \pi)$, $\sin A \neq 0$, $\sin B \neq 0$,

所以 $2 \cos B + 1 = 0$, 即 $\cos B = -\frac{1}{2}$, 解得

$$B = \frac{2\pi}{3}.$$

因为 $CD = 2AD$, $CD \parallel AB$, 所以 $\angle BCD =$

$\frac{\pi}{3}$, 又 A, B, C, D 四点共圆,

根据圆内接四边形对角互补, 可知 $D =$

$$\pi - B = \frac{\pi}{3},$$

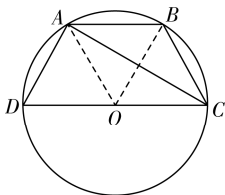
设 DC 的中点为 O , 连接 AO, BO 如图所示, 则 $\triangle ADO, \triangle BCO$ 均为等边三角形,

则 $OA = OB = OC = OD$,

所以 DC 的中点 O 即为四边形 $ABCD$ 外

接圆的圆心, $DO = \frac{1}{2} DC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 四边形

$ABCD$ 为等腰梯形,





则 $\triangle ABO$ 也为等边三角形, 所以

$$S_{\text{梯形}ABCD} = 3S_{\triangle ADO} = 3 \times \frac{1}{2} \cdot AD \cdot$$

$$DO \sin D = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

12. 突破点 ▶ 两角和的正弦公式, 正、余弦定理理解三角形

【解】(1) 因为 $\sqrt{3}a \sin C + c \cos A = 2c$, 由正弦定理可得 $\sqrt{3} \sin A \sin C + \sin C \cos A = 2 \sin C$,

而 C 为三角形内角, 故 $\sin C > 0$, 故

$$\sqrt{3} \sin A + \cos A = 2, \text{ 所以 } \sin\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = 1,$$

而 $\frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$, 故 $A + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 即

$$A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 若选①, 则 $a = 7, b = 8$, 由余弦定理

可得 $49 = 64 + c^2 - 2 \times 8 \times c \times \frac{1}{2}$, 整理得

到 $c^2 - 8c + 15 = 0$, 故 $c = 3$ 或 $c = 5$, 因为三角形不唯一, 故舍;

若选②, 则 $b = 8$, $\triangle ABC$ 的周长为 20, 故

$a + c = 12$, 由余弦定理得 $a^2 = 64 + c^2 - 2 \times 8 \times c \times \frac{1}{2}$, 故 $c = 5, a = 7$, 故最长边为 AC ,

该边上的高为 $c \sin A = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$;

若选③, 则 $a = 7, \sin C = \frac{5\sqrt{3}}{14}$, 由正弦定

理得 $\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}$, 故 $c = 5$, 由余弦定理可得

$49 = b^2 + 25 - 2 \times 5 \times b \times \frac{1}{2}$, 解得 $b = 8$ 或

$b = -3$ (舍), 则最长边 AC 上的高

为 $c \sin A = 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

13. 突破点 ▶ 正、余弦定理理解三角形, 三角形面积公式及其应用, 基本不等式求和的最小值

【解】(1) 由 $\sin^2 A - \sin A \sin B = \cos^2 B - \cos^2 C = (1 - \sin^2 B) - (1 - \sin^2 C) = \sin^2 C - \sin^2 B$,

得 $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = \sin A \sin B$.

由正弦定理得 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$, 所以

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}. \text{ 因为 } C \in$$

$(0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

在 $\triangle ABC$ 中, $c = \sqrt{3}, a + b = \sqrt{6}$, 由 $c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a + b)^2 - 3ab$, 得 $(\sqrt{3})^2 = (\sqrt{6})^2 - 3ab$, 解得 $ab = 1$.

所以 $S = \frac{1}{2} ab \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

即 $\triangle ABC$ 的面积 S 为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



(2) 因为 CD 为 $\angle BCA$ 的平分线,

$$\angle BCA = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle ACD = \angle BCD = \frac{\pi}{6}.$$

在 $\triangle ABC$ 中, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$, 所以

$$\frac{1}{2}ab \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}a \cdot CD \cdot \sin \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}b \cdot$$

$$CD \cdot \sin \frac{\pi}{6}, \text{ 由 } CD = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 得 } \frac{\sqrt{3}}{4}ab = \frac{\sqrt{2}}{8}a +$$

$$\frac{\sqrt{2}}{8}b = \frac{\sqrt{2}}{8}(a+b), \text{ 所以 } ab = \frac{\sqrt{6}}{6}(a+b).$$

因为 $a > 0, b > 0$, 所以由基本不等式

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \text{ 得 } \frac{\sqrt{6}}{6}(a+b) \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \text{ 所}$$

$$\text{以 } a+b \geq \frac{2\sqrt{6}}{3}, \text{ 当且仅当 } a=b=\frac{\sqrt{6}}{3} \text{ 时取}$$

$$\text{等号. 所以 } a+b \text{ 的最小值为 } \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

专题 解三角形中的范围与最值问题

刷

难关

1. B 突破点 ▶ 两角差的正弦公式, 正、余弦定理解三角形

【解析】由 $4S = a^2 + b^2 - c^2$, 得 $2ab \sin C =$

$$a^2 + b^2 - c^2, \text{ 所以 } \sin C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \cos C,$$

所以 $\tan C = 1$. 又 $C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以

$$C = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4} - B\right)}{\sin B} =$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos B + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin B}{\sin B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\tan B} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 由}$$

$$\begin{cases} 0 < B < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < A = \frac{3\pi}{4} - B < \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{\pi}{4} < B < \frac{\pi}{2} \text{ (易错:}$$

锐角三角形中角的范围限制), 所以 $\tan B \in$

$$(1, +\infty), \text{ 所以 } \frac{1}{\tan B} \in (0, 1), \text{ 所以 } \frac{a}{b} \in$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right). \text{ 故选 B.}$$

2. C 突破点 ▶ 三角形面积公式及其应用, 基本不等式求积的最大值, 正、余弦定理解三角形

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $(\sin A - \sin B)(b +$

$a) = c(\sin B + \sin C)$, 由正弦定理得 $(a -$

$b)(b + a) = c(b + c)$, 即 $a^2 = b^2 + c^2 + bc$, 由余

$$\text{弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2},$$

$$\because 0 < A < \pi, \therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} =$$

$$\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\because 3 = a^2 = b^2 + c^2 + bc \geq 2bc + bc = 3bc$, 当且仅

当 $b = c = 1$ 时取等号, 因此 $bc \leq 1$,



$$\therefore \triangle ABC \text{ 面积 } S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc \leq \frac{\sqrt{3}}{4},$$

\therefore 当 $b=c=1$ 时, $\triangle ABC$ 的面积取得最大值 $\frac{\sqrt{3}}{4}$. 故选 C.

3. C 突破点 ▶ 三角形面积公式及其应用、基本不等式求积的最大值

【解析】由 $\frac{1}{\tan A} + \frac{1}{\tan C} = \frac{2}{\tan B}$ 可得,

$$\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{2\cos B}{\sin B}, \quad \text{则}$$

$$\frac{\cos A \sin C + \sin A \cos C}{\sin A \sin C} = \frac{\sin(A+C)}{\sin A \sin C} =$$

$$\frac{\sin B}{\sin A \sin C} = \frac{2\cos B}{\sin B}, \quad \text{得 } \sin^2 B =$$

$$2\sin A \sin C \cos B,$$

根据正弦定理, 得 $b^2 = 2ac \cos B$, 由 $b=2$,

$$\text{得 } \cos B = \frac{2}{ac}, \text{ 则 } \sin B = \sqrt{1 - \frac{4}{a^2 c^2}}, \text{ 由余}$$

$$\text{弦定理得 } b^2 = 2ac \cos B = 2ac \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

则 $a^2 + c^2 = 8$. 由三角形的面积公式, 得

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ac \times \sqrt{1 - \frac{4}{a^2 c^2}} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 c^2 - 4}, \text{ 注意到 } a^2 + c^2 = 8 \geq 2ac, \text{ 故 } ac \leq$$

4, 当且仅当 $a=c=2$ 时取得等号, 故 $S_{\triangle ABC} =$

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 c^2 - 4} \leq \frac{1}{2}\sqrt{4^2 - 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 最大值为}$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

4. B 突破点 ▶ 两角和的正切公式、基本不等式求和的最小值

【解析】因为 $\frac{a}{\cos A} + \frac{b}{\cos B} = \frac{3c}{\cos C}$, 由正弦

定理得 $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{3\sin C}{\cos C}$, 所以 $\tan A +$

$\tan B = 3\tan C$. 又 $C = \pi - (A+B)$, 所以

$$\tan A + \tan B = -3 \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}, \text{ 所以 } 1 =$$

$$\frac{3}{\tan A \tan B - 1}, \text{ 即 } \tan A \tan B = 4.$$

$$\text{则 } \tan B = \frac{4}{\tan A}, \tan C = \frac{1}{3} (\tan A +$$

$$\tan B) = \frac{1}{3} \left(\tan A + \frac{4}{\tan A} \right) \text{ (易错: 使用基}$$

本不等式应注意“一正二定三相等”),

显然 $\tan A$ 必为正 (提示: 否则 $\tan A$ 和

$\tan C$ 都为负, 就有两个钝角), 所以 $\tan A +$

$$\tan C = \frac{4}{3}\tan A + \frac{4}{3\tan A} \geq 2\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{8}{3}, \text{ 当}$$

$$\text{且仅当 } \frac{4}{3}\tan A = \frac{4}{3\tan A}, \text{ 即 } \tan A = 1, A =$$

$$\frac{\pi}{4} \text{ 时取等号. 所以 } \tan A + \tan C \geq \frac{8}{3}. \text{ 故}$$

选 B.

5. BCD 突破点 ▶ 三角形面积公式及其应用, 二倍角的正弦公式, 正、余弦定理解三角形



【解析】若 $a \cos A = b \cos B$, 根据正弦定理, 则 $\sin A \cos A = \sin B \cos B$, 即 $\sin 2A = \sin 2B$, 因为 $A, B \in (0, \pi)$, 所以 $2A = 2B$ 或 $2A + 2B = \pi$, 即 $A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形, A 错误;

因为 $A = 2B$, 则 $\sin A = \sin 2B$, $\sin A = 2 \sin B \cos B$, 则根据正弦定理有 $a = 2b \cos B$, 故 B 正确;

设 $BC = x, AC = 2x$, 则 $\begin{cases} x + 2x > 3, \\ 2x - x < 3 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3$,

则 $\cos B = \frac{9 + x^2 - 4x^2}{2 \times 3 \times x} = \frac{9 - 3x^2}{6x}$, $\sin B =$

$$\sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{9 - 3x^2}{6x}\right)^2} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{9x^4 - 54x^2 + 81}{36x^2}}, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot$$

$$BC \cdot \sin B = \frac{3}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \frac{9x^4 - 54x^2 + 81}{36x^2}} =$$

$$\frac{3}{2} x \cdot \sqrt{\frac{-x^4 + 10x^2 - 9}{4x^2}} = \frac{3}{4} \sqrt{-x^4 + 10x^2 - 9} =$$

$$\frac{3}{4} \sqrt{-(x^2 - 5)^2 + 16}, \text{ 当 } x^2 - 5 = 0, \text{ 即 } x =$$

$\sqrt{5} \in (1, 3)$ 时, $\triangle ABC$ 的面积取得最大值 $\frac{3}{4} \times \sqrt{16} = 3$, 故 C 正确;

由题意可知, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD}$, 由角平分线性质和三角形面积公式得

$$\frac{1}{2} a c \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} a \times 3 \times \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2} c \times 3 \times$$

$$\sin \frac{\pi}{3}, \text{ 化简得 } ac = 3(a + c), \text{ 即 } \frac{1}{a} + \frac{1}{c} =$$

$$\frac{1}{3}, \text{ 因此 } a + c = 3(a + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c} \right) =$$

$$3 \left[2 + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \right] \geq 3 \left(2 + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot \frac{a}{c}} \right) =$$

$$12, \text{ 当且仅当 } \frac{c}{a} = \frac{a}{c}, \text{ 即 } a = c = 6 \text{ 时取等}$$

号, 即 $a + c$ 的最小值为 12, 则 D 正确. 故选 BCD.

6. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 突破点 ▶ 解三角形与导数的综合、正弦定理边角互化的应用

【解析】因为 $\frac{\tan A}{\tan B} = 2$, 所以 $\sin A \cos B =$

$2 \sin B \cos A$, 所以 $\sin A \cos B + \sin B \cos A =$

$3 \sin B \cos A$, 即 $\sin(A + B) = 3 \sin B \cos A$,

即 $\sin C = 3 \sin B \cos A$, 由正弦定理得 $c =$

$3b \cos A$, 所以 $c = 3b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, 化简得

$$3a^2 = 3b^2 + c^2,$$

$$\text{所以 } \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 = \frac{\frac{1}{3}(3b^2 + c^2)}{b^2 + 2bc + c^2} =$$

$$\frac{b^2 + \frac{1}{3}c^2}{b^2 + 2bc + c^2} = \frac{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \frac{1}{3}}{\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 2 \cdot \frac{b}{c} + 1}.$$



设 $t = \frac{b}{c}$, 则 $b = tc$, 由 $3a^2 = 3b^2 + c^2$ 得 $a =$

$\sqrt{\frac{3t^2+1}{3}}c$, 易知 $a > b$. 由 $a + b > c$ 得 $t +$

$\sqrt{\frac{3t^2+1}{3}} > 1$, 解得 $t > \frac{1}{3}$;

由 $b + c > a$ 得 $t + 1 > \sqrt{\frac{3t^2+1}{3}}$, 解得 $t > -\frac{1}{3}$.

综上, $t > \frac{1}{3}$. 设 $f(t) = \frac{t^2 + \frac{1}{3}}{t^2 + 2t + 1}, t > \frac{1}{3}$ (易

错: 忽略换元法中“新元 $t = \frac{b}{c}$ ”的范围),

所以 $f'(t) = \frac{2t(t^2 + 2t + 1) - \left(t^2 + \frac{1}{3}\right)(2t + 2)}{(t^2 + 2t + 1)^2} =$

$\frac{\frac{2}{3}(3t - 1)(t + 1)}{(t + 1)^4} > 0$, 所以 $f(t)$ 在

$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 上单调递增, 所以 $f(t) >$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{9} + \frac{2}{3} + 1} = \frac{1}{4}$. 又当 t 无限趋近

于正无穷大时, $f(t)$ 无限趋近于 1, 所

以 $f(t) \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, 所以 $\frac{a}{b+c} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

7. $\left[4\sqrt{3}, \frac{8\sqrt{13}}{3}\right]$ 突破点 ▶ 三角形面积公

式及其应用、余弦定理解三角形

【解析】设 $AB = c, AC = b, BC = a$, 由题意可得 $\angle BAD = \angle CAD = 60^\circ$, 且 $AD = 2$, 因为

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}$, 即 $\frac{1}{2}bc \sin 120^\circ =$

$\frac{1}{2}c \cdot AD \sin 60^\circ + \frac{1}{2}b \cdot AD \sin 60^\circ$, 可得

$bc = 2(b + c)$, 由题意可知 $0 < b \leq 8, 0 < c \leq$

8 , 所以 $b = \frac{2c}{c-2}$, 由 $\begin{cases} 0 < c \leq 8, \\ 0 < b = \frac{2c}{c-2} \leq 8, \end{cases}$ 解得

$\frac{8}{3} \leq c \leq 8$, 所以 $bc = \frac{2c^2}{c-2} = \frac{2c^2 - 8 + 8}{c-2} = 2c +$

$4 + \frac{8}{c-2} = 2(c-2) + \frac{8}{c-2} + 8$.

令 $t = c - 2 \in \left[\frac{2}{3}, 6\right]$, 因为函数 $y = 2t +$

$\frac{8}{t} + 8$ 在 $\left(\frac{2}{3}, 2\right)$ 上单调递减, 在 $(2, 6)$ 上

单调递增, 所以当 $t \in \left[\frac{2}{3}, 6\right]$ 时, $y = 2t +$

$\frac{8}{t} + 8 \in \left[16, \frac{64}{3}\right]$, 则 $16 \leq bc \leq \frac{64}{3}$, 由余

弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 120^\circ =$

$b^2 + c^2 + bc = (b+c)^2 - bc = \frac{1}{4}b^2c^2 - bc =$



$$\frac{1}{4}(bc-2)^2-1 \in \left[48, \frac{832}{9}\right], \text{故 } 4\sqrt{3} \leq a \leq \frac{8\sqrt{13}}{3}, \text{因此 } BC \text{ 长度的取值范围是 } \left[4\sqrt{3}, \frac{8\sqrt{13}}{3}\right].$$

方法总结

求三角形中有关代数式的取值范围是一种常见的题型,主要解题方法有两种:

- (1) 找到边与边之间的关系,利用基本不等式来求解;
- (2) 利用正弦定理,转化为关于某个角的三角函数,利用函数思想求解.

8. $\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \frac{4}{9}$ 突破点 ▶ 正、余弦定理解三角形,基本不等式求和的最小值

【解析】 $\because 3a \cos B - \sqrt{3}a = b - 3b \cos A$,
 $3a \cos B + 3b \cos A = b + \sqrt{3}a$, 由正弦定理得
 $3 \sin A \cos B + 3 \sin B \cos A = \sin B + \sqrt{3} \sin A$,
 $\therefore 3 \sin(A+B) = \sin B + \sqrt{3} \sin A$, $3 \sin C = \sin B + \sqrt{3} \sin A$,
 $\therefore 3c = b + \sqrt{3}a$, $c = \frac{b}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\cos C =$
 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{\frac{2}{3}a^2 - \frac{2\sqrt{3}}{9}ab + \frac{8}{9}b^2}{2ab} = \frac{a}{3b} - \frac{\sqrt{3}}{9} +$
 $\frac{4b}{9a} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{3} \times \frac{4}{9}} - \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 当且仅当
 $\sqrt{3}a = 2b$ 时, 等号成立.

设 $\frac{\sin^2 C}{\sin^2 A + \sin^2 B} = \frac{\frac{b^2}{9} + \frac{1}{3}a^2 + \frac{2\sqrt{3}}{9}ab}{a^2 + b^2} =$
 $\frac{\frac{1}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^2} = \lambda$, 则 $\frac{1}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot$
 $\frac{a}{b} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \lambda \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \lambda$,
 $\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{a}{b} + \lambda - \frac{1}{9} = 0$
(易错: 忽略对 $\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot$
 $\frac{a}{b} + \lambda - \frac{1}{9} = 0$ 的二次项系数的讨论),

当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时, 解得 $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 符合题意; 当
 $\lambda \neq \frac{1}{3}$ 时, 可得 $\Delta = \frac{4}{27} -$
 $4\left(\lambda - \frac{1}{3}\right) \left(\lambda - \frac{1}{9}\right) \geq 0$, 解得 $0 \leq \lambda \leq \frac{4}{9}$
 且 $\lambda \neq \frac{1}{3}$.

综上, $0 \leq \lambda \leq \frac{4}{9}$, 故 $\lambda_{\max} = \frac{4}{9}$.

9. 突破点 ▶ 正弦定理边角互化的应用

【解】 (1) 由正弦定理得 $\frac{2 \sin C - \sin A}{\sin B} =$

$$\frac{\cos A}{\cos B}, \text{ 即 } 2\sin C \cos B - \sin A \cos B = \sin B \cos A, \therefore 2\sin C \cos B = \sin(A+B) = \sin C.$$

$$\because C \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \sin C \neq 0, \therefore \cos B = \frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore B = \frac{\pi}{3}.$$

$$(2) \text{ 由正弦定理得 } \frac{b}{\sin B} = 2R = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \text{ 其中 } R \text{ 为 } \triangle ABC \text{ 外接圆的半径, } \therefore a = 2R \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin A, c = 2R \sin C = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin C,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin A \sin C$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin A \sin\left(\frac{2\pi}{3} - A\right)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \sin A \left(\frac{1}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A \right)$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \left(\frac{1}{2} \sin^2 A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A \cos A \right)$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{在锐角三角形 } ABC \text{ 中, } \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < C < \frac{\pi}{2}, \\ C = \frac{2\pi}{3} - A, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$A \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \therefore 2A - \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\therefore \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right],$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right], \text{ 则}$$

$$S_{\triangle ABC} \in \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right].$$

10. 突破点 ▶ 余弦定理理解三角形、基本不等式求和的最小值、函数不等式恒成立问题

【解】(1) 由题意知 $b^2 - 2c \sin B + c^2 = 4$, $a = 2$, 则 $b^2 - a \sin B + c^2 = a^2$, 即 $b^2 + c^2 - a^2 = a \sin B$. 又 $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \cos A$, 所以 $a \sin B = 2bc \cos A$.

由 $c > 0$, 得 $a \sin B = 2b \cos A$, 由正弦定理得 $\sin A \sin B = 2 \sin B \cos A$, 由 $\sin B > 0$, 得 $\sin A = 2 \cos A$, 即 $\cos A = \frac{1}{2} \sin A$. 又

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1, \text{ 所以 } \sin^2 A + \frac{1}{4} \sin^2 A = 1, \text{ 由 } \sin A > 0, \text{ 解得 } \sin A = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

(2) 由(1)知 $\sin A = 2 \cos A$, 得 $\tan A = 2$, 所以 $\tan(B+C) = -\tan A = -2$, 即 $\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} = -2$. 又 B, C 为锐角, 所以 $\tan B > 0, \tan C > 0$, 得 $\tan B + \tan C = 2 \tan B \tan C - 2 \geq 2 \sqrt{\tan B \tan C}$, 当且仅



当 $\tan B = \tan C$ 时, 等号成立, 解得

$$\tan B \tan C \geq \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \text{ 所以 } \frac{\tan A}{\tan B \tan C} \leq \frac{2}{3+\sqrt{5}} = 3-\sqrt{5}, \text{ 即 } \frac{\tan A}{\tan B \tan C} \text{ 的最大值为 } 3-\sqrt{5}.$$

$$(3) \text{ 令 } f(x) = (x+3+2\sin B \cos B)^2 + (x+t \sin B + t \cos B)^2 = 2x^2 + [2(3+2\sin B \cos B) + 2(t \sin B + t \cos B)]x + (3+2\sin B \cos B)^2 + (t \sin B + t \cos B)^2, \text{ 当 } x = -\frac{(3+2\sin B \cos B) + (t \sin B + t \cos B)}{2}$$

时, $f(x)_{\min}$

$$\begin{aligned} &= f\left[-\frac{(3+2\sin B \cos B) + (t \sin B + t \cos B)}{2}\right] \\ &= \left[\frac{(3+2\sin B \cos B) - (t \sin B + t \cos B)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(t \sin B + t \cos B) - (3+2\sin B \cos B)}{2}\right]^2 \\ &= 2\left[\frac{(3+2\sin B \cos B) - (t \sin B + t \cos B)}{2}\right]^2 \\ &= \frac{1}{2}[(3+2\sin B \cos B) - (t \sin B + t \cos B)]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{由 } \frac{1}{2}[(3+2\sin B \cos B) - (t \sin B + t \cos B)]^2 > \frac{1}{32}, \text{ 得 } (3+2\sin B \cos B - t \sin B - t \cos B)^2 > \frac{1}{16}, \text{ 进而 } (3+2\sin B \cos B) - t(\sin B + \cos B) > \frac{1}{4} \text{ ① 或 } \\ &(3+2\sin B \cos B) - t(\sin B + \cos B) < -\frac{1}{4} \text{ ②,} \end{aligned}$$

因为 $0 < B < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < B + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, 所以

$$\sin B + \cos B = \sqrt{2} \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right) \in (1, \sqrt{2}],$$

$$\text{由 ① 得 } 2 + (\sin B + \cos B)^2 - t(\sin B + \cos B) > \frac{1}{4}, \text{ 即 } t < \frac{7}{4(\sin B + \cos B)} + (\sin B + \cos B),$$

$$\text{又 } \frac{7}{4(\sin B + \cos B)} + (\sin B + \cos B) \geq$$

$$2\sqrt{\frac{7}{4(\sin B + \cos B)}} \times (\sin B + \cos B) =$$

$$\sqrt{7}, \text{ 当且仅当 } \frac{7}{4(\sin B + \cos B)} =$$

$$\sin B + \cos B, \text{ 即 } \sin B + \cos B = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ 时, 等}$$

号成立, 所以 $t < \sqrt{7}$.

$$\text{由 ② 得 } 2 + (\sin B + \cos B)^2 - t(\sin B + \cos B) < -\frac{1}{4}, \text{ 即 } t > \frac{9}{4(\sin B + \cos B)} +$$

$(\sin B + \cos B)$, 由对勾函数的性质知



$$\frac{9}{4(\sin B + \cos B)} + (\sin B + \cos B) < \frac{13}{4}, \text{ 所以 } t \geq \frac{13}{4}.$$

综上, 实数 t 的取值范围为 $(-\infty, \sqrt{7}) \cup \left[\frac{13}{4}, +\infty\right)$.

全章综合训练

刷

情境

1. B 创新点 ▶ 新情境

【解析】在 $\triangle AFC$ 中, $\angle AFC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, 又 $\cos \angle ACF = \frac{13}{14}$, 则 $\sin \angle ACF =$

$\frac{3\sqrt{3}}{14}$, 设 $AF = CE = t (t > 0)$, 则 $CF = 2 + t$, 在

$\triangle AFC$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AF}{\sin \angle ACF} =$

$\frac{AC}{\sin \angle AFC}$, 解得 $AC = \frac{7}{3}t$. 在 $\triangle AFC$ 中, 由

余弦定理得 $AC^2 = AF^2 + CF^2 - 2AF \cdot$

$CF \cdot \cos \angle AFC$, 即 $\frac{49}{9}t^2 = t^2 + (2+t)^2 - 2t \cdot$

$(2+t) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$, 又 $t > 0$, 解得 $t = 3$, 则

$AC = 7$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 7 \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{4}$,

故选 B.

2. D 创新点 ▶ 新情境

【解析】由题意可得 $CD = t$ m, $\angle DAC = \beta$,

$\angle BDA = \alpha + \beta$, 则在 $\triangle ADC$ 中, $\frac{AD}{\sin 90^\circ} =$

$\frac{CD}{\sin \beta}$, 即 $AD = \frac{t}{\sin \beta}$, 在 $\triangle ABD$ 中,

$\angle ABD = \frac{\pi}{2} - \alpha$, 由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} =$

$\frac{AD}{\sin \angle ABD}$, 即 $\frac{AB}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AD}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$, 所

以 $AB = \frac{AD \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha} = \frac{t \sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$. 故

选 D.

3. ACD 创新点 ▶ 新定义

【解析】 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \angle BAC =$

$\left(\frac{1}{2}c^2 - b^2\right) \sin \angle BAC$, 则 $c^2 - bc - 2b^2 = (b +$

$c)(c - 2b) = 0$, 故 $c = 2b$,

因此 $\triangle ABC$ 为“倍长三角形”, 故 A 正确;

由 $a = 4, c = 2b$, 可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot$

$\cos \angle BAC = b^2(5 - 4\cos \angle BAC) = 16$, 则

$$b = \frac{4}{\sqrt{5 - 4\cos \angle BAC}},$$

则 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin \angle BAC =$

$$\frac{16 \sin \angle BAC}{5 - 4 \cos \angle BAC} =$$



$$\frac{32\sin \frac{\angle BAC}{2} \cos \frac{\angle BAC}{2}}{5\sin^2 \frac{\angle BAC}{2} + 5\cos^2 \frac{\angle BAC}{2} - 4\cos^2 \frac{\angle BAC}{2} + 4\sin^2 \frac{\angle BAC}{2}} =$$

$$\frac{32\tan \frac{\angle BAC}{2}}{9\tan^2 \frac{\angle BAC}{2} + 1} \leq \frac{32\tan \frac{\angle BAC}{2}}{2\sqrt{9\tan^2 \frac{\angle BAC}{2}}} = \frac{16}{3},$$

当且仅当 $\tan \frac{\angle BAC}{2} = \frac{1}{3}$ 时等号成立, 故

B 错误;

由正弦定理可得 $\frac{AD}{\sin C} = \frac{CD}{\sin \frac{\angle BAC}{2}},$

$\frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \frac{\angle BAC}{2}},$ 又 $AD = BC,$ 故 $CD =$

$$\frac{\sin \frac{\angle BAC}{2}}{\sin C} a, BD = \frac{\sin \frac{\angle BAC}{2}}{\sin B} a,$$

又 $BD + CD = BC = a,$ 故 $\sin \frac{\angle BAC}{2} =$

$$\frac{1}{\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C}},$$
 又 $c = 2b,$ 则 $C > B,$ 所以

$$\frac{1}{\sin B} > 1, \frac{1}{\sin C} \geq 1, \text{ 故 } \sin \frac{\angle BAC}{2} < \frac{1}{1+1} =$$

$$\frac{1}{2}, \text{ 又 } 0 < \frac{\angle BAC}{2} < \frac{\pi}{2}, \text{ 因此 } 0 < \frac{\angle BAC}{2} <$$

$$\frac{\pi}{6}, \text{ 则 } 0 < \angle BAC < \frac{\pi}{3}, \text{ 即 } \angle BAC \text{ 是锐角,}$$

故 C 正确;

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD},$ 化简得

$$bc \sin \angle BAC = b \cdot AD \sin \frac{\angle BAC}{2} + c \cdot$$

$$AD \sin \frac{\angle BAC}{2}, \text{ 则 } AD = \frac{2bccos \frac{\angle BAC}{2}}{b+c} =$$

$$\frac{4bcos \frac{\angle BAC}{2}}{3} = \lambda b, \text{ 故 } cos \frac{\angle BAC}{2} = \frac{3}{4}\lambda,$$

$$\text{故 } \sin \frac{\angle BAC}{2} = \frac{\sqrt{16-9\lambda^2}}{4}, \text{ 故 } cos \angle BAC =$$

$$2 \times \left(\frac{3\lambda}{4}\right)^2 - 1 = \frac{9\lambda^2-8}{8}, \text{ 又 } S_{\triangle ABC} =$$

$$\frac{1}{2}bc \sin \angle BAC = b^2 \sin \angle BAC = 1, \text{ 故}$$

$$b^2 = \frac{1}{\sin \angle BAC},$$

$$\text{则 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos \angle BAC = 5b^2 -$$

$$4b^2 cos \angle BAC = \frac{5-4cos \angle BAC}{\sin \angle BAC} =$$

$$12\sqrt{\frac{\lambda^4-4\lambda^2+4}{16\lambda^2-9\lambda^4}}, \lambda \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right],$$

$$\text{设 } f(x) = \frac{x^2-4x+4}{16x-9x^2}, x \in \left[\frac{1}{9}, \frac{4}{9}\right],$$

$$\text{则 } f'(x) = \frac{-20x^2+72x-64}{(16x-9x^2)^2} < 0,$$

则 $f(x)$ 在定义域上单调递减,



$$\text{故 } f(x) \geq f\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{49}{108},$$

则 $12\sqrt{\frac{\lambda^4 - 4\lambda^2 + 4}{16\lambda^2 - 9\lambda^4}} \geq \frac{14\sqrt{3}}{3}$, 即 a^2 的最小值为 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

4. 创新点 ▶ 新情境

$$\begin{aligned} \text{【解】} (1) f(x) &= 2\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2\sin^2 x = 2\sin x \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{1}{2}\sin x\right) - 2\sin^2 x \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - 3\sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \frac{3}{2}(1 - \cos 2x) = \sqrt{3}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } x \in \left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z}, \text{ 又}$$

$x \in [0, \pi]$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为

$$\left[0, \frac{\pi}{12}\right], \left[\frac{7\pi}{12}, \pi\right].$$

$$\text{由 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 得 } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } f(x) \text{ 图象的对称轴方程}$$

$$\text{为 } x = \frac{\pi}{12} + \frac{k}{2}\pi, k \in \mathbf{Z}.$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ 由 (1) 知 } f(\angle BAC) &= \sqrt{3}\sin\left(2\angle BAC + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}, \text{ 则 } \sin\left(2\angle BAC + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \\ \text{由 } 0 < \angle BAC < \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } \frac{\pi}{3} < 2\angle BAC + \frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}, \text{ 则 } 2\angle BAC + \frac{\pi}{3} &= \pi, \text{ 解得 } \angle BAC = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

因为在锐角 $\triangle ABC$ 中, $\cos B = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \text{ 因}$$

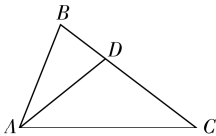
为 $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$, $\angle BAC + B + C = \pi$, 所以 $C =$

$$\frac{2\pi}{3} - B, \sin C = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = \sin \frac{2\pi}{3} \cdot$$

$$\cos B - \cos \frac{2\pi}{3} \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{6}}{3} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

由题意可作出下图:



$$\text{因为 } \vec{AD} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}, \text{ 所以 } 3\vec{AD} = 2\vec{AB} +$$



\overrightarrow{AC} , 即 $2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$, 故 $CD = 2BD$. 设 $\angle BAD = \theta$, 则 $\angle CAD = \frac{\pi}{3} - \theta$, 在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{BD}{\sin \theta} = \frac{AD}{\sin B} = \frac{3AD}{\sqrt{6}}, \quad \frac{CD}{\sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)} = \frac{AD}{\sin C} = \frac{6AD}{3 + \sqrt{6}},$$

上面两个等式相除可得 $\sqrt{6} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = (3 + \sqrt{6}) \sin \theta$, 得 $\sqrt{6} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta - \frac{1}{2} \sin \theta \right) = (3 + \sqrt{6}) \sin \theta$, 即 $\sqrt{2} \cos \theta = (2 + \sqrt{6}) \sin \theta$, 所以 $\tan \angle BAD = \tan \theta = \frac{\sqrt{2}}{2 + \sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

刷

真题

刷小题

1. C 命题点 ▶ 解三角形

【解析】由 $a \cos B - b \cos A = c$ 及正弦定理得 $\sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin C$ (提示: 根据正弦定理转化成角问题), 又因为 $\sin(A + B) = \sin C$, 所以 $\sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin A \cos B + \sin B \cos A$, 所以 $\sin B \cos A = 0$. 又因为 $\sin B \neq 0$, 所以 $\cos A = 0$, 又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{\pi}{2}$, 又 $C = \frac{\pi}{5}$, 所以 $B = \frac{3\pi}{10}$. 故选 C.

2. $\frac{3\pi}{4}$ 命题点 ▶ 正弦定理、特殊角的三角函数值、边角转化

【解析】由已知条件及正弦定理得 $\sin B \sin A + \sin A \cos B = 0$, 即 $\sin A (\sin B + \cos B) = 0$.

又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$, 所以 $\sin B = -\cos B$, 即 $\tan B = -1$. 又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{3\pi}{4}$.

3. A 命题点 ▶ 利用余弦定理解三角形

【解析】根据余弦定理有 $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{6 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{6}(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 因为 $0^\circ < A < 180^\circ$, 所以 $A = 45^\circ$. 故选 A.

4. C 命题点 ▶ 余弦定理与三角形面积公式

【解析】如图, 取 CD 的中点为 O , AB 的中点为 E , 连接 PO, OE, PE , 因为 $PC = PD$, 所以 $PO \perp CD$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形, CD 的中点为 O , AB 的中点为 E , 所以 $OE \perp CD, AB \parallel CD$. 又 $PO \cap OE = O$, 所以 $CD \perp$ 平面 POE . 因为 $PE \subset$ 平面 POE , 所以 $CD \perp PE$, 所以 $AB \perp PE$, 所以 $PB = PA$. 在 $\triangle PAC$ 中, $PC = 3, \angle PCA = 45^\circ, AC =$

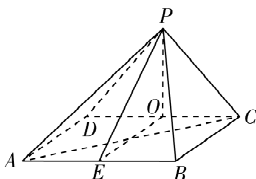


$\sqrt{4^2+4^2} = 4\sqrt{2}$, 由余弦定理得, $PA^2 = PC^2 + AC^2 - 2PC \cdot AC \cdot \cos 45^\circ = 9 + 32 - 2 \times 3 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 17$, 则 $PA = PB = \sqrt{17}$. 在

$\triangle PBC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle PCB = \frac{PC^2 + BC^2 - PB^2}{2PC \cdot BC} = \frac{9 + 16 - 17}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{3}$, 则

$$\sin \angle PCB = \sqrt{1 - \cos^2 \angle PCB} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

所以 $S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} PC \cdot BC \cdot \sin \angle PCB = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$, 故选 C.



5. D 命题点 ▶ 由余弦定理解三角形

【解析】结合余弦定理可得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$, 即 $19 = 4 + BC^2 - 4BC \cdot \cos 120^\circ$, 解得 $BC = 3$ 或 $BC = -5$ (舍), 故选 D.

6. A 命题点 ▶ 余弦定理在解三角形中的应用

【解析】 $\because \cos C = \frac{2}{3}$, $AC = 4$, $BC = 3$,
 $\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C = 16 + 9 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{2}{3} = 9$, $\therefore AB = 3$.

$$\therefore \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{9 + 9 - 16}{2 \times 3 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

故选 A.

7. $2\sqrt{2}$ 命题点 ▶ 三角形面积公式和余弦定理的应用

【解析】 $\because S_{\triangle ABC} = \sqrt{3}$, $B = 60^\circ$, $\therefore \frac{1}{2} ac \sin$

$$B = \frac{1}{2} ac \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \therefore ac = 4.$$

又 $\because a^2 + c^2 = 3ac$, $\therefore a^2 + c^2 = 12$.

在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理知 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 12 - 2 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$, 得 $b = 2\sqrt{2}$.

8. $-\frac{1}{4}$ 命题点 ▶ 立体几何平面展开图及解三角形问题

【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $AB \perp AC$, $AC = 1$, $AB = \sqrt{3}$, 所以 $BC = 2$.

在 $\triangle ABD$ 中, $AB \perp AD$, $AD = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{3}$, 所以 $BD = \sqrt{6}$.

在 $\triangle ACE$ 中, $AC = 1$, $AE = AD = \sqrt{3}$, $\angle CAE = 30^\circ$, 由余弦定理得 $CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AE \cdot \cos \angle CAE = 1 + 3 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$, 所以 $CE = 1$.

在 $\triangle BCF$ 中, $BC = 2$, $FC = CE = 1$, $BF =$



$$BD = \sqrt{6}, \text{ 由余弦定理得 } \cos \angle FCB = \frac{FC^2 + BC^2 - FB^2}{2FC \cdot BC} = \frac{1+4-6}{2 \times 1 \times 2} = -\frac{1}{4}.$$

9. C 命题点 ▶ 利用正余弦定理解三角形

【解析】 $\because b^2 = \frac{9}{4}ac, \therefore$ 由正弦定理可得

$$\sin^2 B = \frac{9}{4} \sin A \sin C. \because B = 60^\circ, \therefore \sin B =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore \frac{3}{4} = \frac{9}{4} \sin A \sin C, \therefore \sin A \sin C =$$

$$\frac{1}{3}. \text{ 由余弦定理可得 } b^2 = a^2 + c^2 -$$

$$2ac \cos B = a^2 + c^2 - ac, \text{ 将 } b^2 = \frac{9}{4}ac \text{ 代入整}$$

$$\text{理得, } a^2 + c^2 = \frac{13}{4}ac, \therefore \text{ 由正弦定理得}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 C = \frac{13}{4} \sin A \sin C, \text{ 则 } (\sin A +$$

$$\sin C)^2 = \sin^2 A + \sin^2 C + 2 \sin A \sin C =$$

$$\frac{13}{4} \sin A \sin C + 2 \sin A \sin C = \frac{21}{4} \sin A \sin C =$$

$$\frac{21}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{4}, \therefore \sin A + \sin C = \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ 或 } -\frac{\sqrt{7}}{2}$$

(舍). 故选 C.

10. A 命题点 ▶ 正弦定理与余弦定理的应用

【解析】由 $a \sin A - b \sin B = 4c \sin C$, 结合

正弦定理, 得 $a^2 - b^2 = 4c^2$, 所以 $b^2 + c^2 -$

$a^2 = -3c^2$. 由余弦定理得 $\cos A =$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\frac{1}{4}, \text{ 即 } \frac{-3c^2}{2bc} = -\frac{1}{4}, \text{ 整理得}$$

$$\frac{b}{c} = 6, \text{ 故选 A.}$$

11. 2 命题点 ▶ 解三角形的综合应用

【解析】解法一: 如

图, 在 $\triangle ABC$ 中,

由正弦定理得

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin 60^\circ}, \text{ 则}$$

$$\sin C =$$

$$\frac{AB \sin 60^\circ}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 又}$$

$\angle BAC = 60^\circ$, 所以 $0 < C < 120^\circ$, 所以 $C =$

45° . 所以 $B = 180^\circ - C - \angle BAC = 180^\circ -$

$45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$. 又 AD 平分 $\angle BAC$, 所以

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ, \text{ 所以 } \angle ADB =$$

$$180^\circ - B - \angle BAD = 75^\circ = B,$$

故 $\triangle ABD$ 为等腰三角形, 所以 $AB =$

$$AD = 2.$$

解法二: 设 $AD = x, AC = y$, 在 $\triangle ABC$ 中,

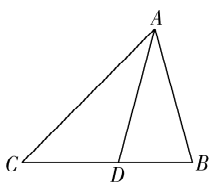
由余弦定理可得 $BC^2 = AB^2 + AC^2 -$

$2AB \cdot AC \cos \angle BAC$, 即 $y^2 - 2y - 2 = 0$, 解

得 $y = 1 + \sqrt{3}$ (舍负), 又 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADB} +$

$$S_{\triangle ADC}, \text{ 所以 } \frac{1}{2} \times 2 \times (1 + \sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times$$

$$2x \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (1 + \sqrt{3})x \cdot \frac{1}{2}, \text{ 解得 } x = 2.$$





解法三：在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4 + AC^2 - 6}{4AC} = \frac{1}{2}$ ，所以 $AC = 1 + \sqrt{3}$ (舍负)。

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{\sin \angle ADB}$ ，所以 $\frac{\sin \angle ADB}{\sin \angle BAD} = \frac{AB}{BD}$ 。在 $\triangle ACD$ 中，由正弦定理得 $\frac{CD}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{\sin \angle ADC}$ ，所以 $\frac{\sin \angle ADC}{\sin \angle CAD} = \frac{AC}{CD}$ ，又 AD 平分 $\angle BAC$ ，所以 $\sin \angle BAD = \sin \angle CAD$ ，又 $\sin \angle ADB = \sin \angle ADC$ (提示： $\angle ADB + \angle ADC = \pi$ ，所以正弦值相等)，所以 $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$ ，所以 $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}$ (另解：由角平分线定理可得 $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{1 + \sqrt{3}}$)，

且 $BD + CD = \sqrt{6}$ ，所以 $BD = \frac{2\sqrt{6}}{3 + \sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ 。

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{4 + 6 - (1 + \sqrt{3})^2}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ，在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $\cos \angle ABD = \frac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB \cdot BD} = \frac{2^2 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - AD^2}{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ，解得 $AD = 2$ (舍负) (点拨：本题多次运用余弦定理和正弦定理，在计算 AD 时，不用 $\cos \angle BAD = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD}$ 建立方程的原因是分子分母都出现了 AD ，这样可以减少计算量)。

12. B 命题点 ▶ 诱导公式、两角差的正弦公式以及利用正弦定理解三角形

【解析】如图，过点 C 作 $CD \perp BB'$ ，垂足为点 D ，过点 D 作 $DE \perp AA'$ ，垂足为点 E ，连接 CE ，过点 B 作 $BF \perp AA'$ ，垂足为点 F ，则由题意可得 $\angle BCD = 15^\circ$ ， $\angle ABF = 45^\circ$ ， $FE = BD = BB' - CC' = 100$ ， $AF = BF = DE$ ，所以 $AA' - CC' = BF + 100$ 。易得 $CD \parallel C'B'$ ， $DE \parallel B'A'$ ， $EC \parallel A'C'$ ，所以 $\angle ECD = \angle A'C'B' = 45^\circ$ ， $\angle EDC = \angle A'B'C' = 60^\circ$ 。在 $\text{Rt} \triangle CDB$ 中， $CD = \frac{100}{\tan 15^\circ}$ ，在 $\triangle CDE$ 中， $\angle CED = 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ$ ，由正弦定理，得 $\frac{DE}{\sin 45^\circ} = \frac{CD}{\sin 75^\circ}$ ，即 $DE = \frac{100 \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ \tan 15^\circ} = \frac{100 \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ \times \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}} =$

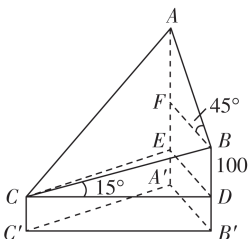


$$\frac{100\sin 45^\circ}{\sin 75^\circ \times \frac{\sin 15^\circ}{\sin 75^\circ}} = \frac{100\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}.$$

又 $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, 所

以 $DE = \frac{100\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} = 100(\sqrt{3} + 1) \approx 273$,

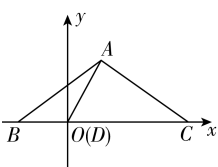
所以 $AA' - CC' = BF + 100 = DE + 100 \approx 373$, 故选 B.



13. $\sqrt{3}-1$ 命题点 ▶ 解三角形

【解析】令 $BD =$

$t (t > 0)$, 以 D 为坐标原点, DC 所在直线为 x 轴, 过点 D 垂直于



BC 的直线为 y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系, 则 $C(2t, 0), A(1, \sqrt{3}),$

$B(-t, 0)$, 所以 $\frac{AC^2}{AB^2} = \frac{(2t-1)^2+3}{(t+1)^2+3} = 4 -$

$\frac{12}{t+1+\frac{3}{t+1}} \geq 4 - 2\sqrt{3}$ (提示: 变形为基本不等

式的形式求最值), 当且仅当 $t+1 = \sqrt{3}$, 即

$t = \sqrt{3} - 1$ 时取等号, 所以 $BD = \sqrt{3} - 1$.

刷大题

1. 命题点 ▶ 利用正弦定理解三角形

【解】(1) 由 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2$, 得

$$2\left(\frac{1}{2}\sin A + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right) = 2,$$

$$\text{所以 } \sin\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

由 $A \in (0, \pi)$, 得 $A + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$, 所

以 $A + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$.

(2) 由 A, B, C 为三角形内角, 得 $\sin B \neq 0, \sin C \neq 0$.

因为 $\sqrt{2}b\sin C = c\sin 2B$,

所以由正弦定理得 $\sqrt{2}\sin B\sin C = \sin C\sin 2B$,

所以 $\sqrt{2}\sin B = \sin 2B$, 即 $\sqrt{2}\sin B = 2\sin B \cdot$

$\cos B$, 所以 $\cos B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $B = \frac{\pi}{4}$.

因为 $a = 2, A = \frac{\pi}{6}$, 所以由正弦定理, 得

$$b = \frac{a}{\sin A} \sin B = 2\sqrt{2}.$$

由 $A = \frac{\pi}{6}, B = \frac{\pi}{4}$, 得 $C = \frac{7\pi}{12}$, 所以 $\sin C =$



$$\sin \frac{7\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

所以由正弦定理, 得 $c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2},$

所以 $\triangle ABC$ 的周长为 $a + b + c = 2 + 2\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{6} + 3\sqrt{2}.$

2. 命题点 ▶ 利用正弦定理解三角形

【解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $A + B = 3C,$

又 $A + B + C = \pi,$ 所以 $C = \frac{\pi}{4}.$

又因为 $2\sin(A - C) = \sin B,$

即 $2\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \sin B,$ 所以 $\sin B = 2\cos B.$

又因为 $\sin^2 B + \cos^2 B = 1, B \in \left(0, \frac{3\pi}{4}\right),$

所以 $\sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos B = \frac{\sqrt{5}}{5},$

所以 $\sin A = \sin(B + C) = \sin\left(B + \frac{\pi}{4}\right) = \sin B \cos \frac{\pi}{4} + \cos B \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 记内角 A, B, C 所对的边分别为 $a, b, c,$

因为 $AB = c = 5, C = \frac{\pi}{4}, \sin B = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin A = \frac{3\sqrt{10}}{10},$

所以由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$ 可得 $\frac{b}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}},$ 解得 $b = 2\sqrt{10}.$

所以 AB 边上的高为 $b \sin A = 2\sqrt{10} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = 6.$

3. 命题点 ▶ 二倍角公式、余弦定理、三角形面积公式

【解】(1) $\because \sin 2C = \sqrt{3} \sin C,$

$\therefore 2\sin C \cos C = \sqrt{3} \sin C.$

又 $\because C \in (0, \pi), \therefore \sin C \neq 0,$

$\therefore \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}. \therefore C = \frac{\pi}{6}.$

(2) $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = 6\sqrt{3}, \sin C = \frac{1}{2}, b = 6, \therefore a = 4\sqrt{3}.$

由余弦定理知 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 12,$
 $\therefore c = 2\sqrt{3}. \therefore \triangle ABC$ 的周长为 $6\sqrt{3} + 6.$

4. 命题点 ▶ 利用正弦、余弦定理解三角形,



三角恒等变换

【解】(1) 因为 $a \sin B = \sqrt{3} b \cos A$,

所以由正弦定理得 $\sin A \sin B = \sqrt{3} \sin B \cdot \cos A$,

因为 $B \in (0, \pi)$, $\sin B \neq 0$,

所以 $\sin A = \sqrt{3} \cos A$, 即 $\tan A = \sqrt{3}$, 又 $A \in (0, \pi)$ (易错: 根据三角函数值求角时, 不要忽略角的范围),

所以 $A = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由(1)可知, $A = \frac{\pi}{3}$, 又 $a = \sqrt{7}$,

由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$,

即 $\frac{b^2 + c^2 - 7}{bc} = 1$, $b^2 + c^2 - 7 = bc$ ①,

又 $c - 2b = 1$ ②,

联立①②, 可得 $\begin{cases} c = 3, \\ b = 1, \end{cases}$

所以 c 的值为 3.

(3) 由(2)可知, $b = 1$, 根据正弦定理

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, 得 $\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sin B}$,

所以 $\sin B = \frac{\sqrt{21}}{14} < \frac{1}{2}$ (提示: 根据 $\sin B$

的值和特殊角三角函数值, 确定 B 的范围, 为确定 $2B$ 的三角函数值奠定基础).

又 $1 < \sqrt{7} < 3$, 即 $b < a < c$, 所以 $B \in (0, \frac{\pi}{6})$,

则 $\cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{14}$.

$\sin 2B = 2 \sin B \cos B = 2 \times \frac{\sqrt{21}}{14} \times \frac{5\sqrt{7}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$,

$\cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B = 1 - 2 \times \frac{21}{14 \times 14} = \frac{11}{14}$,

所以 $\sin(A + 2B) = \sin A \cos 2B + \cos A \cdot$

$\sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{11}{14} + \frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$.

5. 命题点 ▶ 正余弦定理、三角形面积公式的应用、两角和的正弦公式

【解】(1) 已知 $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2} ab$, 则

有 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $C \in (0, \pi)$, 所以 $C = \frac{\pi}{4}$.

又 $\sin C = \sqrt{2} \cos B$, 所以 $\cos B = \frac{\sin C}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

又 $B \in (0, \pi)$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$.

(2) 由(1)可得 $C = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{3}$, 由正弦定

理, 不妨令 $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = k (k > 0)$, 则

有 $c = \frac{\sqrt{2}}{2} k$, $b = \frac{\sqrt{3}}{2} k$.



$$\text{又 } S_{\triangle ABC} = 3 + \sqrt{3},$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \sin(B+C) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}k \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}k (\sin B \cos C + \cos B \sin C) = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{8} k^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{6}}{8} k^2 \cdot \\ &\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 3 + \sqrt{3}, \text{ 解得 } k = 4 \text{ (负值舍去)}, \\ \text{故 } c &= \frac{\sqrt{2}}{2}k = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

6. 命题点 ▶ 正、余弦定理的应用, 三角形面积公式的应用

$$\text{【解】(1) 由题意知, } 2\sin B \cos B = \frac{\sqrt{3}}{7} \cdot b \cos B,$$

$$\text{又 } A \text{ 为钝角, } \therefore B \neq \frac{\pi}{2}, \therefore 2\sin B = \frac{\sqrt{3}}{7}b.$$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \therefore b = \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B,$$

$$\therefore 2\sin B = \frac{\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{a}{\sin A} \cdot \sin B,$$

$$\text{又 } a = 7, B \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 则 } \sin B \neq 0,$$

$$\therefore 2 = \frac{\sqrt{3}}{\sin A}, \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore A \text{ 为钝角, } \therefore A = \frac{2\pi}{3}.$$

(2) 若选①, $\therefore b = 7$, 又 $a = 7, A = \frac{2\pi}{3}$, 此时构不成三角形, 不符合题意.

$$\text{若选 ②, } \therefore \cos B = \frac{13}{14}, \therefore \sin B =$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

$$\text{由正弦定理可得 } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = 3,$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \sin C &= \sin[\pi - (A+B)] = \sin(A+B) \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{13}{14} - \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{5\sqrt{3}}{14},$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{若选 ③, } \therefore c \sin A = c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{2}\sqrt{3}, \therefore c = 5.$$

$$\begin{aligned} \text{由余弦定理得 } \cos A &= \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} = \\ &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } -bc &= b^2 + c^2 - a^2, \therefore -5b = b^2 + 25 - 49, \\ \therefore b^2 + 5b - 24 &= 0, \text{ 解得 } b = 3 \text{ (负值舍去)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

**7. 命题点** ▶ 三角形面积公式、解三角形

【解】(1) 因为 D 为 BC 的中点,

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \times \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot$$

$$\sin \angle ADC = 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \cdot DC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \text{ 解得}$$

$$DC = 2,$$

$$\text{所以 } BD = DC = 2, BC = 4.$$

$$\text{因为 } \angle ADC = \frac{\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle ADB = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中, 由余弦定理得 } AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB = 1 + 4 + 2 = 7,$$

$$\text{所以 } AB = \sqrt{7}.$$

在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin B},$$

$$\text{所以 } \sin B = \frac{AD \sin \angle ADB}{AB} = \frac{\sqrt{21}}{14},$$

$$\text{所以 } \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \frac{5\sqrt{7}}{14},$$

$$\text{所以 } \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

(2) 因为 D 为 BC 的中点, 所以 $BD = \frac{1}{2}a$.

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理

$$\text{得 } \cos B = \frac{c^2 + BD^2 - AD^2}{2c \cdot BD} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \text{ 即}$$

$$\frac{c^2 + \frac{1}{4}a^2 - 1}{ac} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

$$\text{整理得 } \frac{1}{2}a^2 = b^2 + c^2 - 2 = 6, \text{ 解得 } a = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{又 } S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{3} \times \sin \angle ADC = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \sin \angle ADC = 1, \text{ 即 } \angle ADC = \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } AD$$

既是中线也是高线, 所以 $\triangle ABC$ 为等腰

$$\text{三角形, 所以 } b = c = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2.$$

8. 命题点 ▶ 利用正弦定理、余弦定理解三角形

【解】(1) 由正弦定理知 $2c = 3a$, 联立 $c =$

$$a + 2, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 4, \\ c = 6, \end{cases} \text{ 则 } b = a + 1 = 5.$$

$$\text{由余弦定理可知 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{8},$$

$$\text{因为 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin C = \frac{3\sqrt{7}}{8},$$

$$\text{则 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{15\sqrt{7}}{4}.$$

(2) 因为 $c = a + 2 = b + 1$, 所以 $c > b > a$,

因此若存在正整数 a , 使得 $\triangle ABC$ 为钝角三角形, 则角 C 为钝角,

$$\text{因此只需满足 } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0, \text{ 即}$$

$$a^2 + b^2 < c^2, \text{ 则 } a^2 + (a + 1)^2 < (a + 2)^2,$$

$$\text{化简得 } a^2 - 2a - 3 < 0, \text{ 解得 } -1 < a < 3.$$

因为 a 为正整数, 所以 a 可取 1, 2.



当 $a=1$ 时, $\triangle ABC$ 的三边的长度分别为 $1, 2, 3$, 此时不满足三角形的三边关系, 即该三角形不存在;

当 $a=2$ 时, $\triangle ABC$ 的三边的长度分别为 $2, 3, 4$, 满足题意.

因此当 $a=2$ 时, $\triangle ABC$ 为钝角三角形.