



第4章 三角函数

第1节 三角函数的概念、同角三角函数基本关系及诱导公式

刷

基础

1. D 考查点 ▶ 由终边上的点的坐标求角

【解析】由正切函数的定义可知

$$\tan \theta = \frac{\cos \frac{7\pi}{10} + \sin \frac{7\pi}{10}}{\cos \frac{7\pi}{10} - \sin \frac{7\pi}{10}} = \frac{1 + \tan \frac{7\pi}{10}}{1 - \tan \frac{7\pi}{10}} =$$

$$\frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{7\pi}{10}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{7\pi}{10}} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{10} \right) =$$

$\tan \frac{19\pi}{20}$, 又 $\theta \in (0, \pi)$, 所以 $\theta = \frac{19\pi}{20}$. 故选 D.

2. A 考查点 ▶ 由三角函数值求终边上的点的纵坐标

【解析】由题设知点 A 的纵坐标为 $\frac{12}{13}$, 得

$$\sin \alpha = \frac{12}{13}, \text{ 则 } \cos \alpha = \frac{5}{13}, \text{ 显然 } \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{而 } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ 即}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ 又 } \frac{\pi}{4} < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta <$$

$$\pi, \text{ 则 } \alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}, \text{ 则 } \beta = \frac{3\pi}{4} - \alpha, \text{ 所以 } \sin \beta =$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times$$

$$\left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13}\right) = \frac{17\sqrt{2}}{26}. \text{ 又点 } B \text{ 在第四象限,}$$

$$\text{所以点 } B \text{ 的纵坐标为 } -\frac{17\sqrt{2}}{26}. \text{ 故选 A.}$$

3. BC 考查点 ▶ 判断命题及命题的否定的真假、诱导公式

【解析】因为 $x - |x| = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ 2x, & x < 0, \end{cases}$ 所以 $x -$

$|x| \leq 0$. 又 $x^2 \geq 0$, 所以 $x - |x| \leq x^2$, 所以命题 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题. 由诱导

$$\text{公式可得 } \forall \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \cos\left(\frac{\pi}{4} -$$

$$\alpha\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right),$$

所以 q 是真命题, $\neg q$ 是假命题. 故选 BC.

4. D 考查点 ▶ 诱导公式、已知角的范围确定三角函数式的符号

【解析】因为 $\sin \alpha + \cos \alpha = 3 \cos \alpha \tan \alpha$, 所以 $\sin \alpha + \cos \alpha = 3 \sin \alpha$, 所以 $\cos \alpha = 2 \sin \alpha$, 左右两边平方得 $\cos^2 \alpha = 4 \sin^2 \alpha = 4(1 - \cos^2 \alpha)$, 所以 $5 \cos^2 \alpha = 4$. 又因为 α 是第一象限角, 所以 $\cos \alpha =$

易错点

$$\frac{2\sqrt{5}}{5}, \text{ 则 } \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ 故}$$



选 D.

易错警示

本题容易忽视题干所给角所在的象限,导致求出 $\cos \alpha$ 的值时不能舍弃负值而出错.

5. A 考查点 ▶ 同角三角函数基本关系、诱导公式

【解析】因为 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos(\alpha + \pi)$,

所以 $\sin \alpha = -2\cos \alpha$, 所以 $\tan \alpha = -2$.

$$\text{又 } \frac{\sin^2 \alpha + \sin 2\alpha - 1}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{2\tan \alpha - 1}{1} = -5. \text{ 故}$$

选 A.

6. B 突破点 ▶ 同角三角函数基本关系、二倍角的余弦公式

【解析】 $\cos \theta - \sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$, 左右两边平方

并整理得 $1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{5}$, 即

$$2\sin \theta \cos \theta = \frac{4}{5}, \text{ 可得 } (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 +$$

$$2\sin \theta \cos \theta = \frac{9}{5}. \text{ 因为 } \theta \text{ 是三角形的一个}$$

内角, 且 $2\sin \theta \cos \theta = \frac{4}{5} > 0$, 所以 $\sin \theta >$

$0, \cos \theta > 0$, 所以 $\sin \theta + \cos \theta > 0$, 得

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5}. \text{ 又因为 } \cos \theta - \sin \theta =$$

$$-\frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 所以 } \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 故有}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 2. \text{ 从而有}$$

$$\frac{(\sin \theta + \cos \theta) \cos 2\theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}.$$

$$\frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{\tan \theta + 1}{\tan \theta} \cdot \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{2 + 1}{2} \times$$

$$\frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{9}{10}. \text{ 故选 B.}$$

7. BCD 突破点 ▶ 函数的性质、诱导公式

【解析】 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\cos \frac{\pi}{2}\right) =$

$$\sin 1 - \cos 0 = \sin 1 - 1, f\left(-\frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\sin\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] - \cos\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$\sin(-1) - \cos 0 = -\sin 1 - 1, \text{ 得}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } f(x) \text{ 不是偶函}$$

数, 故 A 错误.

$$f(x + 2\pi) = \sin[\sin(x + 2\pi)] - \cos[\cos(x + 2\pi)] = \sin(\sin x) - \cos(\cos x) = f(x), \text{ 所以}$$

$f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 故 B 正确.

$$f(\pi - x) = \sin[\sin(\pi - x)] - \cos[\cos(\pi - x)] = \sin(\sin x) - \cos(-\cos x) =$$



$\sin(\sin x) - \cos(\cos x) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故 C 正确.

由于 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 因此对于选项 D, 只需看当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $-1 < f(x) < 0$ 是否成立. 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $0 < \sin x \leq 1, 0 \leq \cos x < 1, 0 < \sin(\sin x) \leq \sin 1, \cos 1 < \cos(\cos x) \leq 1$, 所以 $\sin(\sin x) - \cos(\cos x) > -1$, 即 $f(x) > -1$. 又因为 $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, 所以 $0 < \sin x < \frac{\pi}{2} - \cos x \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin(\sin x) < \sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos x\right) = \cos(\cos x)$, 即 $f(x) < 0$, 所以 $-1 < f(x) < 0$, 故 D 正确. 故选 BCD.

8. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 考查点 ▶ 诱导公式, 两角和的正切公式

【解析】由 $\tan A, \tan B$ 是方程 $x^2 - 10x + 6 = 0$ 的两个根, 得 $\tan A + \tan B = 10$, $\tan A \tan B = 6$, 在 $\triangle ABC$ 中, $\tan C = -\tan(A+B) = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\frac{10}{1-6} = 2 > 0$, 则 C 为锐角, 可得 $\sin C = 2\cos C$, 又 $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$, 所以 $\cos C = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

9. D 考查点 ▶ 正、余弦齐次式的计算, 两角差的余弦公式

【解析】由 $\cos \theta \cdot \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) = \frac{3\sqrt{2}}{10}$, 得 $\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{5}$, 所以 $\frac{\cos^2 \theta + \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = \frac{1 + \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{3}{5}$. 又 θ 为锐角, 则 $\tan \theta > 0$, 所以 $3\tan^2 \theta - 5\tan \theta - 2 = (3\tan \theta + 1) \cdot (\tan \theta - 2) = 0$, 可得 $\tan \theta = 2$. 故选 D.

易错警示

本题在弦化切求出 $\tan \theta$ 的值后, 容易忽视 θ 的取值范围, 即 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 从而不能进一步缩小 $\tan \theta$ 的取值范围, 导致错解.

第2节 三角恒等变换

刷

基础

1. A 考查点 ▶ 逆用两角和的正切公式化简、求值

【解析】根据两角和的正切公式, 得 $-1 = \tan(80^\circ + 55^\circ) = \frac{\tan 80^\circ + \tan 55^\circ}{1 - \tan 80^\circ \tan 55^\circ}$ (提示: 逆用两角和的正切公式时, 寻找两角正切值和、积之间的关系), 则 $\tan 80^\circ +$



$\tan 55^\circ = \tan 80^\circ \tan 55^\circ - 1$, 即 $\tan 80^\circ + \tan 55^\circ - \tan 80^\circ \tan 55^\circ = -1$, 根据诱导公式, 可得 $\tan 660^\circ = \tan(720^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$, 故原式 $= -1 \times (-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$. 故选 A.

2. AC **考查点** ▶ 二倍角公式、辅助角公式、诱导公式、两角和与差的正切公式

【解析】 $\tan 15^\circ + \tan 60^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) +$

$$\sqrt{3} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} + \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2, \text{ 故 A}$$

正确;

$$\frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 80^\circ - \sqrt{3} \cos 80^\circ}{\sin 80^\circ \cos 80^\circ} = \frac{4 \sin(80^\circ - 60^\circ)}{\sin 160^\circ} = \frac{4 \sin 20^\circ}{\sin(180^\circ - 20^\circ)} = 4, \text{ 故 B}$$

错误;

$$(1 + \tan 18^\circ)(1 + \tan 27^\circ) = 1 + \tan 18^\circ + \tan 27^\circ + \tan 18^\circ \tan 27^\circ = 1 + \tan 18^\circ \tan 27^\circ + \tan(18^\circ + 27^\circ)(1 - \tan 18^\circ \tan 27^\circ) = 2, \text{ 故 C 正确;}$$

$$4 \sin 18^\circ \sin 54^\circ = 4 \sin(90^\circ - 72^\circ) \sin(90^\circ - 36^\circ) = 4 \cos 72^\circ \cos 36^\circ = \frac{4 \cos 72^\circ \cos 36^\circ \sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} =$$

$$\frac{2 \cos 72^\circ \sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 144^\circ}{\sin 36^\circ} =$$

$$\frac{\sin(180^\circ - 36^\circ)}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 1, \text{ 故 D 错误.}$$

故选 AC.

3. B **考查点** ▶ 两角差的正弦公式, 二倍角的余弦公式

【解析】 因为 $\sqrt{2} \sin \alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, 所以

$$\sqrt{2} \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha, \text{ 可得}$$

$\tan \alpha = -1$ (**提示**: 利用“一次齐次”结构求解正切值, 再构造“二次齐次”结构“弦化切”),

$$\text{所以 } \cos 2\alpha + \cos^2 \alpha = \frac{2 \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} =$$

$$\frac{2 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{2 - 1}{1 + 1} = \frac{1}{2}. \text{ 故选 B.}$$

4. C **考查点** ▶ 两角差的正弦公式

【解析】 由 $2 \sin \alpha - \cos \beta = \sqrt{2}$ 得 $\cos^2 \beta - 4 \cos \beta \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 2$ ①; 由 $\sin \beta - 2 \cos \alpha = 2$ 得 $\sin^2 \beta - 4 \sin \beta \cos \alpha + 4 \cos^2 \alpha = 4$ ②,

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得 } \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = -\frac{1}{4}, \text{ 由}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3} \text{ 得 } \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3},$$

$$\sin \beta = \frac{1}{3},$$

$$\text{则有 } \begin{cases} \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = -\frac{1}{4}, \\ \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}, \end{cases}$$



$$\text{则} \begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{24}, \\ \cos \alpha \sin \beta = -\frac{7}{24}, \end{cases} \therefore \frac{\tan \alpha}{\tan \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \beta}{\cos \beta}} =$$

$$\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \sin \beta} = -\frac{1}{7}. \text{ 故选 C.}$$

5. BC **考查点** ▶ 两角和与差的正弦公式、二倍角的正弦公式

$$\text{【解析】} \because \tan \alpha = 5 \tan \beta, \text{ 即 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{5 \sin \beta}{\cos \beta},$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta = 5 \cos \alpha \sin \beta, \therefore \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = 4 \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin \beta \cos \alpha = \frac{1}{12}, \text{ B 正确;}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{5}{12}, \text{ A 错误;}$$

$$\sin 2\alpha \sin 2\beta = 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot 2 \sin \beta \cos \beta = 4 \sin \alpha \cos \beta \cdot \sin \beta \cos \alpha = 4 \times \frac{5}{12} \times \frac{1}{12} = \frac{5}{36}, \text{ C 正确;}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \frac{5}{12} +$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{2}, \because 0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{4}, \therefore 0 < \beta + \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{6}, \text{ D 错误. 故选 BC.}$$

6. $\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$ **考查点** ▶ 同角三角函数基本关系, 两角和的正弦公式

$$\text{【解析】} \because \tan\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \therefore \sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cos\left(x + \frac{\pi}{7}\right), \therefore \sin^2\left(x + \frac{\pi}{7}\right) + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{4} \cos\left(x + \frac{\pi}{7}\right)\right]^2 + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{9}{8} \cos^2\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = 1. \text{ 又 } x \text{ 为第二象限角, } \therefore \cos\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \therefore \sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \sin\left(x + \frac{10\pi}{21}\right) = \sin\left[\left(x + \frac{\pi}{7}\right) + \frac{\pi}{3}\right] =$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{7}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \cos\left(x + \frac{\pi}{7}\right) \sin \frac{\pi}{3} =$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-2\sqrt{6}}{6}.$$

7. $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ **考查点** ▶ 两角和的正弦公式、二倍角的正弦公式、二倍角的余弦公式、基本不等式

$$\text{【解析】} \text{由 } \sin(2\alpha + \beta) + 2 \sin 2\alpha \cos \beta = 3 \sin \beta, \text{ 得 } 3 \sin 2\alpha \cos \beta + \cos 2\alpha \sin \beta =$$

$$3 \sin \beta, \text{ 由 } \beta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \text{ 得 } \cos \beta \neq 0, \text{ 则}$$

$$\sin 2\alpha \cos \beta + \cos 2\alpha \sin \beta = 3 \sin \beta, \text{ 由 } \beta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \text{ 得 } \cos \beta \neq 0, \text{ 则}$$

$$\sin 2\alpha \cos \beta + \cos 2\alpha \sin \beta = 3 \sin \beta, \text{ 由 } \beta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \text{ 得 } \cos \beta \neq 0, \text{ 则}$$



$$3\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \tan \beta = 3\tan \beta, \text{ 则 } \tan \beta = \frac{3\sin 2\alpha}{3 - \cos 2\alpha} = \frac{6\sin \alpha \cos \alpha}{4\sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha} = \frac{3\tan \alpha}{2\tan^2 \alpha + 1} = \frac{3}{2\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha}}.$$

因为 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $\tan \alpha \in (0, \sqrt{3})$,

则 $2\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\tan \alpha =$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立, 从而 $\tan \beta \leq \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

又 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 所以当 $\tan \beta$ 取得最大值时, $\cos \beta$ 取得最小值, 且最小值为 $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

8. A 考查点 ▶ 两角差的余弦公式

【解析】 $\cos(x-\theta) = \cos x \cos \theta + \sin x \sin \theta = \sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta$, 整理可得 $\sin x \cdot (\sin \theta - \cos \theta) = \cos x (\sin \theta - \cos \theta)$, 即 $(\sin x - \cos x)(\sin \theta - \cos \theta) = 0$,

$\forall x \in \mathbf{R}, \sin x - \cos x = 0$ 不可能恒成立, 故只有 $\sin \theta - \cos \theta = 0$, 则 $\tan \theta = 1, \theta =$

$\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 结合选项, 只有 A 符合. 故

选 A.

9. C 突破点 ▶ 两角和的余弦公式

【解析】因为 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $2\alpha \in$

$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. 由 $\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha =$

1, 得 $\cos 2\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} =$

$$-\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

因为 $\sin(\beta - \alpha) = \frac{\sqrt{10}}{10}, \beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right], \alpha \in$

$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\beta - \alpha \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$, 所以

$\cos(\beta - \alpha) = -\sqrt{1 - \sin^2(\beta - \alpha)} =$

$$-\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2} = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ (提示: 先根据已知角的范围确定三角函数值, 再利用两角和的余弦公式求出 } \cos(\alpha + \beta) \text{ 的值, 最后根据 } \alpha + \beta \text{ 的范围确定其具体值. 求解过程中应注意角的范围)},$$

所以 $\cos(\alpha + \beta) = \cos[(\beta - \alpha) + 2\alpha] = \cos(\beta - \alpha) \cos 2\alpha - \sin(\beta - \alpha) \sin 2\alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \times \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) - \frac{\sqrt{10}}{10} \times$

$$\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3\sqrt{10} \times 2\sqrt{5}}{10 \times 5} - \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{5}}{10 \times 5} =$$

$$\frac{6\sqrt{50} - \sqrt{50}}{50} = \frac{5\sqrt{50}}{50} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因为 $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \beta \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, 所以

$\alpha + \beta \in \left[\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$, 所以 $\alpha + \beta = \frac{7\pi}{4}$. 故选 C.

**10. D 突破点** ▶ 二倍角的正切公式、等差中项的应用

$$\text{【解析】} \because a_1 + a_3 = -\frac{2}{7}, \therefore 2a_2 = -\frac{2}{7},$$

$$\therefore a_2 = \tan \beta = -\frac{1}{7}. \because a_2 + a_8 + a_{11} = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore a_2 + a_7 + a_{12} = 3a_7 = -\frac{3}{2}, \therefore a_7 = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \tan(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}.$$

$$\because \tan \alpha = \tan [(\alpha - \beta) + \beta] =$$

$$\frac{\tan(\alpha - \beta) + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha - \beta) \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{7}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{7}} = \frac{1}{3} > 0,$$

$$\therefore 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}. \text{ 又 } \because \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} =$$

$$\frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4} > 0, \therefore 0 < 2\alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \tan(2\alpha - \beta) = \frac{\tan 2\alpha - \tan \beta}{1 + \tan 2\alpha \tan \beta} =$$

$$\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{4} \times \frac{1}{7}} = 1.$$

$$\because \tan \beta = -\frac{1}{7} < 0, \therefore \frac{\pi}{2} < \beta < \pi, \therefore -\pi <$$

$$2\alpha - \beta < 0, \therefore 2\alpha - \beta = -\frac{3\pi}{4}. \text{ 故选 D.}$$

刷**提分****1. B 考查点** ▶ 和、差角的余弦公式

【解析】由 $\cos(\alpha - \beta) = 1, \tan \alpha \tan \beta = 2$,

$$\text{可得} \begin{cases} \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1, \\ \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = 2, \end{cases} \text{解得}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{2}{3}, \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{3}, \text{故 } \cos(\alpha +$$

$$\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{3}, \text{ 故选 B.}$$

2. B 突破点 ▶ 同角三角函数的基本关系, 两角差的余弦公式

【解析】由 $\alpha \in (0, \pi), 0 < \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} < \frac{\sqrt{2}}{2}$,

可得 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $\sin \alpha =$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \text{ 因为 } \sin$$

$$(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{2}}{10} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 所以 } 0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{4} \text{ 或 } \frac{3\pi}{4} <$$

$$\alpha + \beta < \pi, \text{ 由于 } \alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \beta \in (0, \pi),$$

$$\text{所以 } \frac{3\pi}{4} < \alpha + \beta < \pi, \text{ 所以 } \cos(\alpha + \beta) = -\frac{7\sqrt{2}}{10}$$

(易错: 由 $\sin(\alpha + \beta)$ 求 $\cos(\alpha + \beta)$ 时易忽略对角的范围的讨论, 从而得到错解或多解), 则 $\cos \beta = \cos(\alpha + \beta - \alpha) = \cos(\alpha +$



$$\beta) \cos \alpha + \sin(\alpha + \beta) \sin \alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{10} \times \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = -\frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 故选 B.}$$

3. C 突破点 ▶ 两角差的正弦公式

【解析】依题意, $3\sin \beta - \cos \alpha = \sqrt{3}$, $\sin \alpha + 3\cos \beta = 2$, 两式分别平方后相加, 整理得 $10 + 6\sin(\alpha - \beta) = 7$, 即 $\sin(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2}$.

由 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 得 $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$, 则

$\alpha - \beta = -\frac{\pi}{6}$, 即 $\alpha = \beta - \frac{\pi}{6}$, 于是 $3\cos \beta = 2 -$

$\sin\left(\beta - \frac{\pi}{6}\right) = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \beta + \frac{1}{2}\cos \beta$, 即

$5\cos \beta = 4 - \sqrt{3}\sin \beta$, 两边平方, 整理得

$28\sin^2 \beta - 8\sqrt{3}\sin \beta - 9 = 0$, 由 $\sin \beta > 0$, 解

得 $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 即 $\beta = \frac{\pi}{3}$. 所以 $\alpha + \beta = 2\beta -$

$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. 故选 C.

4. B 突破点 ▶ 和、差角的余弦公式, 二倍角的正弦公式, 二倍角的余弦公式, 等比中项的应用

【解析】由题意可得 $\cos^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) =$

$\cos \alpha \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, 即 $\frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \right] = \cos \alpha \left(\frac{1}{2}\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha \right)$, 即

$\frac{1}{2} \left[1 + \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} -$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha$, 即 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha =$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\alpha$, 解得 $\sin 2\alpha =$

$-\frac{\sqrt{3}}{6}$, 此时 $\cos \alpha, \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right),$

$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ 均不为 0, 满足题意. 故选 B.

5. B 突破点 ▶ 逆用和、差角的余弦公式和二倍角的正弦公式

【解析】易知 $f(x) = \cos 3x - \cos 2x =$

$\cos\left(\frac{5x}{2} + \frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{x}{2}\right) = -2\sin \frac{5x}{2} \cdot$

$\sin \frac{x}{2}$, 令 $f(x) = 0$, 则 $\sin \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2} = 0$,

所以 $\sin \frac{5x}{2} = 0$ 或 $\sin \frac{x}{2} = 0$, 可得 $\frac{5x}{2} = k\pi$

或 $\frac{x}{2} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 因此 $x = \frac{2}{5}k\pi$ 或 $x =$

$2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

又因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $x_1 = \frac{2}{5}\pi, x_2 = \frac{4}{5}\pi$,

所以 $\cos x_1 \cos x_2 = \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin \frac{2\pi}{5} \cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}}{\sin \frac{2\pi}{5}} \\
 &= \frac{\sin \frac{4\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5}}{2 \sin \frac{2\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{5}}{4 \sin \frac{2\pi}{5}} \\
 &= \frac{-\sin \frac{2\pi}{5}}{4 \sin \frac{2\pi}{5}} = -\frac{1}{4}. \text{ 故选 B.}
 \end{aligned}$$

6. BC **突破点** ▶ 逆用两角和的正弦公式，二倍角的正弦公式及余弦公式

$$\begin{aligned}
 \text{【解析】} \tan \frac{\pi}{12} + \frac{1}{\tan \frac{\pi}{12}} &= \frac{\sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{\pi}{12}} + \frac{\cos \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12}} = \\
 \frac{\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{\pi}{12}}{\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}} &= \frac{1}{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6}} = 4, \text{ A 错误;}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{令 } \sin \frac{\pi}{10} = x, \text{ 由 } \cos \frac{\pi}{5} &= \sin \frac{3\pi}{10}, \text{ 得 } 1 - \\
 2\sin^2 \frac{\pi}{10} &= \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{5} = \\
 \sin \frac{\pi}{10} \left(1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{10} \right) &+ 2\cos^2 \frac{\pi}{10} \sin \frac{\pi}{10} = \\
 3\sin \frac{\pi}{10} - 4\sin^3 \frac{\pi}{10}, \text{ 即 } 1 - 2x^2 &= 3x - 4x^3, \text{ 整} \\
 \text{理得 } (x-1)(4x^2+2x-1) &= 0, \text{ 而 } 0 < x < 1, \\
 \text{因此 } 2x^2 + x &= \frac{1}{2}, \text{ 则 } 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + \right. \\
 \left. \cos \frac{3\pi}{5} \right) &= 2 \left(1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} \right) = \\
 2(1 - 2x^2 - x) &= 1, \text{ B 正确;}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{由 } 2\log_x y - 2\log_y x + 3 &= 0, \text{ 得 } 2(\log_x y)^2 + \\
 3\log_x y - 2 &= 0, \text{ 而 } \log_x y > 0, \text{ 解得 } \log_x y = \frac{1}{2}, \\
 \text{即 } y &= x^{\frac{1}{2}} > 1, \text{ 所以 } x^2 - 4y^2 + 5 = x^2 - 4x + 5 = \\
 (x-2)^2 + 1 &\geq 1, \text{ 当且仅当 } x = 2, y = \sqrt{2} \text{ 时} \\
 \text{取等号, C 正确;}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{令 } \cos \alpha \sin \beta = t, \text{ 则 } t + \frac{1}{4} &= \cos \alpha \sin \beta + \\
 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha + \beta) \in [-1, 1], t - \\
 \frac{1}{4} &= \cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta = \sin(\beta - \\
 \alpha) &\in [-1, 1], \text{ 解得 } -\frac{3}{4} \leq t \leq \frac{3}{4}, \text{ 因此} \\
 \frac{1}{2} \cos \alpha \sin \beta \text{ 的最大值为 } \frac{3}{8}, \text{ 最小值为} \\
 -\frac{3}{8}, \frac{3}{8} - \left(-\frac{3}{8} \right) &= \frac{3}{4}, \text{ D 错误. 故选 BC.}
 \end{aligned}$$

7. BCD **突破点** ▶ 和、差角的余弦公式，二倍角的正切公式

$$\begin{aligned}
 \text{【解析】由 } \alpha, \beta \text{ 为锐角, 得 } 0 < \alpha + \beta < \pi, \\
 \text{又 } \cos(\alpha + \beta) &= \frac{3}{5}, \text{ 则 } \sin(\alpha + \beta) = \\
 \sqrt{1 - \cos^2(\alpha + \beta)} &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5} \right)^2} = \frac{4}{5}, \text{ ①}
 \end{aligned}$$



$$\text{由 } \tan \alpha + \tan \beta = 1, \text{ 得 } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 1, \text{ ②}$$

$$\text{由 ①② 得 } \cos \alpha \cos \beta = \frac{4}{5},$$

$$\text{又 } \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}, \text{ 所以 } \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{5},$$

$$\text{则 } \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 1, \text{ B 正确;}$$

$$\tan \alpha \tan \beta = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = \frac{1}{4}, \text{ C 正确;}$$

$$\text{又 } \cos(\alpha + \beta) = \frac{3}{5}, \sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}, \text{ 所以}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{4}{3}, \text{ 从而}$$

$$\tan[2(\alpha + \beta)] = \frac{2 \tan(\alpha + \beta)}{1 - \tan^2(\alpha + \beta)} = \frac{\frac{8}{3}}{1 - \frac{16}{9}} =$$

$$-\frac{24}{7}, \text{ D 正确;}$$

$$\text{由 B 知 } \cos(\alpha - \beta) = 1, -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ 则}$$

$$\alpha - \beta = 0, \text{ 即 } \alpha = \beta, \text{ 则 } \sin \alpha \cos \beta = \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha. \text{ 又 } \sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5},$$

$$\text{则 } \sin 2\alpha = \frac{4}{5}, \text{ 则 } \frac{1}{2} \sin 2\alpha = \frac{2}{5}, \text{ A 错误.}$$

故选 BCD.

8. ABC 突破点 ▶ 两角和的余弦公式及正切公式, 基本不等式的应用

【解析】对于 A, $\tan A = \tan(\pi - B - C) = -\tan(B + C) = \frac{\tan B + \tan C}{\tan B \tan C - 1} =$

$$\frac{\tan A}{\tan B \tan C - 1}, \text{ 因为 } \tan A \neq 0, \text{ 所以}$$

$$\tan B \tan C = 2, \text{ 所以 } \tan B > 0, \tan C > 0, \text{ 所以 } \tan A > 0, \text{ 故 } \triangle ABC \text{ 是锐角三角形. 由}$$

$$\tan A = \tan B + \tan C \geqslant 2\sqrt{\tan B \tan C} = 2\sqrt{2} > \sqrt{3}, \text{ 得 } A > \frac{\pi}{3}, \text{ 故 A 正确;}$$

对于 B, $\cos A = \cos(\pi - B - C) = -\cos(B + C) = \sin B \sin C - \cos B \cos C$, 由 $\tan B \tan C = 2$ 可知 $\sin B \sin C = 2 \cos B \cos C$, 故 $\cos A = \cos B \cos C$, 故 B 正确;

对于 C, 设函数 $f(x) = \tan x - x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geqslant 0$ 且等号不恒成立, 故 $f(x)$ 在

$$\text{区间 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{故当 } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } f(x) > f(0) = 0, \text{ 即}$$

$$\tan x > x. \text{ 于是 } B \cdot C < \tan B \tan C = 2, \text{ 故}$$

$$\frac{1}{B^2} + \frac{1}{C^2} \geqslant \frac{2}{B \cdot C} > 1, \text{ 当且仅当 } B = C \text{ 时等号成立, 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, 当 } B = C \text{ 时, } \tan B = \tan C = \sqrt{2}, \text{ 此}$$



时 $B=C>\frac{\pi}{4}$, 又因为 $A>\frac{\pi}{3}$, 此时 $A \cdot B \cdot C > \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} \times \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{4} \times \frac{3^2}{12} = \frac{3\pi}{16}$, 故 D 错误.
故选 ABC.

方法总结**证明三角不等式的常用****方法**

- (1) 利用三角函数的单调性;
- (2) 利用三角函数值域的有界性:
 $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$;
- (3) 利用单位圆中的三角函数线;
- (4) 利用正、余弦定理实现边角互化;
- (5) 利用导数: 如证明 $\sin x \leq x (x \geq 0)$, 当 $x \geq 0$ 时, 构造函数 $f(x) = x - \sin x$, 对其求导, 得 $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 说明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$, 即 $x \geq \sin x$;
- (6) 利用基本不等式: 满足“一正、二定、三相等”的条件.

9. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ **突破点** ▶ 两角差的正弦公式及正切

公式, 利用基本不等式求最值

【解析】 由 $\sin(\alpha - \beta) = \cos \alpha \sin \beta$, 得 $\sin \alpha \cos \beta = 2 \cos \alpha \sin \beta$, 因为 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos \alpha > 0, \cos \beta > 0$, 即

$\tan \alpha = 2 \tan \beta$, 因为 $\beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以

$\tan \beta > 0$, 则 $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} =$

$\frac{\tan \beta}{1 + 2 \tan^2 \beta} = \frac{1}{\frac{1}{\tan \beta} + 2 \tan \beta}$. 则 $\frac{1}{\tan \beta} +$

$2 \tan \beta \geq 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\tan \beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等

号成立, 从而 $\tan(\alpha - \beta)$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

10. 15 **突破点** ▶ 降幂公式、积化和差公式

【解析】 由题意可知 $\alpha = \frac{2\pi}{17}$, 又

$$\frac{2}{1 + \tan^2 \frac{k\alpha}{2}} = \frac{2}{\frac{\sin^2 \frac{k\alpha}{2}}{1 + \frac{\cos^2 \frac{k\alpha}{2}}{2}}} =$$

$$\frac{2 \cos^2 \frac{k\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{k\alpha}{2} + \sin^2 \frac{k\alpha}{2}} = 2 \cos^2 \frac{k\alpha}{2} = 1 + \cos k\alpha,$$

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^{16} \frac{2}{1 + \tan^2 \frac{k\alpha}{2}} = 16 + \sum_{k=1}^{16} \cos k\alpha =$$

$$16 + \sum_{k=1}^{16} \cos \frac{2k\pi}{17}.$$

$$\text{因为 } \sum_{k=1}^{16} \cos \frac{2k\pi}{17} = \frac{\sum_{k=1}^{16} \left(2 \sin \frac{\pi}{17} \cos \frac{2k\pi}{17} \right)}{2 \sin \frac{\pi}{17}} =$$



$$\frac{\sum_{k=1}^{16} \left[\sin \frac{(2k+1)\pi}{17} - \sin \frac{(2k-1)\pi}{17} \right]}{2\sin \frac{\pi}{17}} =$$

$$\frac{\sin \frac{33\pi}{17} - \sin \frac{\pi}{17}}{2\sin \frac{\pi}{17}} = \frac{-2\sin \frac{\pi}{17}}{2\sin \frac{\pi}{17}} = -1, \text{ 所以}$$

$$\sum_{k=1}^{16} \frac{2}{1+\tan^2 \frac{k\alpha}{2}} = 16 + \sum_{k=1}^{16} \cos \frac{2k\pi}{17} = 16 -$$

$$1 = 15.$$

第3节 三角函数的图象与性质

刷

基础

1. AC 考查点 ▶ 正弦型函数图象的变换

【解析】正弦曲线 $y = \sin x$ 上所有点先向右平移 $\frac{2\pi}{3}$ 个单位长度, 得到函数 $y =$

$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象, 再将所有点的横坐

标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函

数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象, 故 A 正

确, B 错误;

先将正弦曲线 $y = \sin x$ 上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$, 纵坐标不变, 得到函

数 $y = \sin 2x$ 的图象, 再向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单

位长度, 得到函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{2\pi}{3}\right)$ 的

图象, 故 C 正确, D 错误(提示: 三角函数的

图象变换分为“先平移后伸缩”与“先

伸缩后平移”两类变换方式, 本道试题为多选题, A, B 为“先平移后伸缩”, C, D

为“先伸缩后平移”). 故选 AC.

2. BC 考查点 ▶ 由图象确定正(余)弦型函数解析式

【解析】设函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A >$

$0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 由题中函数图象得

$A = 2$, 最小正周期 $T = 4 \times \left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\pi}{\omega}$,

解得 $\omega = 2$, 又 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$, 则 $2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi =$

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 所

以 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$, B 正确;

$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$, A 错误;

又 $2\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = -2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 则 $f(x) = -2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, C



正确;

$$2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), D \text{ 错误. 故选 BC.}$$

3. B **考查点** ▶ 由图象确定正弦型函数解析式、函数的图象变换

【解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 由题

图知 $\frac{3}{4}T = \frac{11\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4}$, 则 $T = \pi$, 则

$$\frac{2\pi}{\omega} = \pi, \text{ 则 } \omega = 2. \text{ 由 } f\left(\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1, \text{ 得 } \frac{\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} +$$

$$2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 可得 } \varphi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}. \text{ 又}$$

$$|\varphi| < \frac{\pi}{2}, \text{ 则 } \varphi = \frac{\pi}{6}, \text{ 故 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{由题意知 } g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 故 } g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故选 B.}$$

4. D **考查点** ▶ 由正弦型函数的最值求参数最值

【解析】函数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos x =$

$$\sin x \cos \frac{\pi}{6} + \cos x \sin \frac{\pi}{6} - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x -$$

$$\frac{1}{2} \cos x = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ 当 } x \in [0, t] \text{ 时, } x -$$

$$\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, t - \frac{\pi}{6}\right], \text{ 因为 } f(x) \text{ 在区}$$

$$\text{间 } [0, t] \text{ 上的最小值为 } -\frac{1}{2}, \text{ 所以 } -\frac{\pi}{6} <$$

$$t - \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}, \text{ 所以 } 0 < t \leq \frac{4\pi}{3}, \text{ 所以 } t \text{ 的最大}$$

$$\text{值为 } \frac{4\pi}{3}. \text{ 故选 D.}$$

5. C **突破点** ▶ 由图象确定正弦型函数解析式、求正弦型函数的单调区间

【解析】由题图知 $A = 2$, 函数图象经过点

$$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right) \text{ 和点 } (0, \sqrt{3}), \text{ 则 } \begin{cases} 2\sin\left(\frac{\omega\pi}{3} + \varphi\right) = 0, \text{①} \\ 2\sin \varphi = \sqrt{3}, \text{②} \end{cases}$$

因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以由②可得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$ 或 $\varphi =$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ (易错: 多解问题需分类讨论).}$$

$$(1) \text{ 当 } \varphi = \frac{\pi}{3} \text{ 时, 由①得 } \sin\left(\frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$0, \text{ 结合图象可得 } \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } \omega = 2 + 6k, k \in \mathbf{Z}. \text{ 由题图知 } \frac{\pi}{2\omega} < \frac{\pi}{3} <$$

$$\frac{\pi}{\omega}, \text{ 又 } \omega > 0, \text{ 则 } \frac{3}{2} < \omega < 3, \text{ 故 } \omega = 2, \text{ 此时}$$



$f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 可得 $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故 C 正确.

(2) 当 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ 时, 由①得 $\sin\left(\frac{\omega\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = 0$, 结合图象可得 $\frac{\omega\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\omega = 1 + 6k, k \in \mathbf{Z}$. 由(1)知 $\frac{3}{2} < \omega < 3$, 故 ω 的值不存在. 故选 C.

6. C 考查点 ▶ 利用函数的单调性求参数范围

【解析】对于二次函数 $y = -x^2 + 2ax + 4a$ ($x \leq 0$), 其图象的对称轴为直线 $x = a$, 开口向下, 结合题意需有 $a \geq 0$; 正弦型函数 $y = \sqrt{2}\sin\left(a\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$ 需在 $0 < x < 2$ 时单调递增, 则 $a > 0$, 当 $0 < x < 2$ 时, $\frac{\pi}{4} < a\pi x + \frac{\pi}{4} < 2a\pi + \frac{\pi}{4}$, 所以 $2a\pi + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, 即 $a \leq \frac{1}{8}$; 又在分段点处满足 $4a \leq \sqrt{2}\sin\left(a\pi \times 0 + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, 则 $a \leq \frac{1}{4}$. 综上, $0 < a \leq \frac{1}{8}$. 故选 C.

7. A 考查点 ▶ 求三角函数的最小正周期、判断三角函数的单调性

【解析】对于 A, $y = |\sin x|$ 的图象可由 $y = \sin x$ 的图象将 x 轴下方部分翻折到 x 轴上方得到, 故其最小正周期为 π , 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y = |\sin x| = \sin x$ 单调递增, A 符合题意;

对于 B, 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y = |\cos x| = \cos x$ 单调递减, B 不符合题意;

对于 C, $y = \cos 2x$ 的最小正周期为 π , 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, C 不符合题意;

对于 D, $y = \tan \frac{x}{2}$ 的最小正周期为 2π , D 不符合题意. 故选 A.

8. $\frac{\pi}{2}$ 考查点 ▶ 正弦型函数的零点、求正弦型函数的最小正周期

【解析】当 $0 < x < \frac{5\pi}{12}$ 时, $\frac{\pi}{3} < \omega x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi\omega}{12} + \frac{\pi}{3}$, 因为函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$ 上有且仅有 1 个零点, 所以 $\pi < \frac{5\pi\omega}{12} + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi$, 解得 $\frac{8}{5} < \omega \leq 4$, 故当 $\omega = 4$ 时, 函数 $f(x)$ 的最小正周期取



得最小值 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

9. AC **考查点** ▶ 求正弦型函数的对称轴及对称中心、辅助角公式、判断正弦型函数的单调性

【解析】 因为 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$), $f(x)$ 的最小正周期为 π , 所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 所以 $\omega = 2$, 所以

$$f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

因为 $f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 0$, 所以 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称, 故 A 正确;

因为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin \frac{2\pi}{3} = \sqrt{3}$, 所以 $f(x)$ 的图象不关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 故 B 错误;

将 $y = 2\sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 可得到 $y = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 故 C 正确;

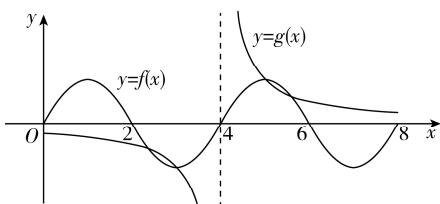
将 $f(x)$ 图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到 $y = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象, 当 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$ 时, $\pi < 4x + \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}$, 而 $y = \sin x$ 在 $\left(\pi, \frac{5\pi}{3}\right)$ 上先减后增, 则 $y = 2\sin\left(4x + \frac{\pi}{3}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上也先减后增, 故 D 错误. 故选 AC.

10.0 16 **考查点** ▶ 函数对称性的应用、求正弦型函数的对称中心、求方程的解的和

【解析】 由题知 $f(3) + f(5) = \sin \frac{3\pi}{2} + \sin \frac{5\pi}{2} = -1 + 1 = 0$, 而 $f(x) + f(8-x) =$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{2}x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0, g(x) + g(8-x) = \frac{1}{x-4} +$$

$\frac{1}{4-x} = 0$, 故 $(4, 0)$ 为 $f(x), g(x)$ 的图象的对称中心 (**提示:** $f(x), g(x)$ 的图象具有相同的对称中心 $(4, 0)$, 利用数形结合求解), 在平面直角坐标系中, 画出 $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ 和 $g(x) = \frac{1}{x-4}$ 在定义域上的图象, 如图所示.



由图可得 $f(x)$, $g(x)$ 的图象共有 4 个不同的交点, 它们的横坐标的和为 $2 \times 8 = 16$, 即方程 $f(x) = g(x)$ 的所有实数解的和为 16.

11. A **考查点** ▶ 正弦型函数的最值、零点, 二倍角公式

【解析】 由题可知, $f(x) = \cos^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x + m = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + \frac{1}{2} \cos 2\omega x + m + \frac{1}{2} = \sin \left(2\omega x + \frac{\pi}{6} \right) + m + \frac{1}{2}$,

\therefore 最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2\omega} = \pi, \therefore \omega = 1$.

又 \therefore 函数 $f(x)$ 的最大值为 $m + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$,

$\therefore m = 0. \therefore f(x) = \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{1}{2}$.

$\therefore x \in [0, t], \therefore 2x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, 2t + \frac{\pi}{6} \right]$.

$\therefore f(x)$ 在区间 $[0, t] (t > 0)$ 上有且仅有 1 个零点, 当 $\sin x = -\frac{1}{2}$ 时, $x = -\frac{\pi}{6} +$

$2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ 或 $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore \frac{7\pi}{6} \leq 2t + \frac{\pi}{6} < \frac{11\pi}{6}, \therefore \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{5\pi}{6}$. 故

选 A.

12. A **突破点** ▶ 根据函数极值点、零点的情况求参数范围, 求余弦型函数的值域, 辅助角公式

【解析】 $f(x) = 5\sin \omega x + 12\cos \omega x = 13\sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\sin \varphi = \frac{12}{13}, \cos \varphi =$

$\frac{5}{13}$, 不妨设 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin 2\varphi =$

$2\sin \varphi \cos \varphi = \frac{120}{169}, \cos 2\varphi = 2\cos^2 \varphi - 1 =$

$-\frac{119}{169}, \therefore \frac{\pi}{2} < 2\varphi < \pi, \frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 当 $x \in$

$(0, \pi)$ 时, $\omega x + \varphi \in (\varphi, \pi\omega + \varphi)$.

$\therefore f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内没有零点, 但有

极值点, $\therefore \frac{\pi}{2} < \pi\omega + \varphi \leq \pi, \therefore \frac{\pi}{2} - \varphi <$

$\pi\omega \leq \pi - \varphi$.

$\therefore 5\cos \pi\omega + 12\sin \pi\omega = 13\cos(\pi\omega - \varphi)$,

$\frac{\pi}{2} - 2\varphi < \pi\omega - \varphi \leq \pi - 2\varphi, -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2\varphi <$

$0, 0 < \pi - 2\varphi < \frac{\pi}{2}, \therefore 13\cos(\pi\omega - \varphi) \leq 13,$

$13\cos(\pi\omega - \varphi) > 13\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) =$



$$13\sin 2\varphi = \frac{120}{13}, 13\cos(\pi\omega - \varphi) \geq$$

$$13\cos(\pi - 2\varphi) = -13\cos 2\varphi = \frac{119}{13}, \text{ 则}$$

$$13\cos(\pi\omega - \varphi) \in \left[\frac{119}{13}, 13\right], \text{ 即}$$

$$5\cos \pi\omega + 12\sin \pi\omega \in \left[\frac{119}{13}, 13\right]. \text{ 故}$$

选 A.

13. ACD **考查点** ▶ 根据函数零点的个数求参数范围、利用正弦型函数的性质求参数范围

【解析】 对于 A, 由 $x \in [0, \pi]$, 得 $\omega x \in [0, \omega\pi]$, 又 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的值域为 $[-1, 1]$, 则 $\omega\pi \geq \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\omega \geq \frac{3}{2}$, A 正确;

对于 B, 由 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, 得 $\omega x \in \left(0, \frac{\omega\pi}{3}\right)$, 又 $f(x)$ 的图象在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上恰有一条对称轴, 则 $\frac{\pi}{2} < \frac{\omega\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\omega \in \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]$, B 错误;

对于 C, 由 $x \in \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$, 得 $\omega x \in \left(-\frac{\omega\pi}{3}, \frac{\omega\pi}{4}\right)$, 又 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增, 则
$$\begin{cases} -\frac{\omega\pi}{3} \geq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\omega\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \omega \in \left(0, \frac{3}{2}\right], \text{ C 正确;}$$

对于 D, 由 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 得 $\omega x \in \left(0, \frac{\omega\pi}{2}\right)$, 因为 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上有且只有两个不同的零点, 所以 $2\pi < \frac{\omega\pi}{2} \leq 3\pi$, 解得 $\omega \in (4, 6]$, D 正确. 故选 ACD.

14. B **考查点** ▶ 三角函数的图象与性质

【解析】 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 因为 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$ 上单调, 所以
$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \leq \frac{T}{2}, \text{ 可得 } \frac{1}{2} \times \frac{2\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{6}, \text{ 解得 } \omega \leq 6, \text{ 且 } \omega > 0, \text{ 所以 } 0 < \omega \leq 6. \text{ 又点 } A\left(\frac{\pi}{24}, 0\right) \text{ 在函数 } f(x) \text{ 的图象上, 所以 } A\left(\frac{\pi}{24}, 0\right) \text{ 是函数 } f(x) \text{ 图象的一个对称中心. 由 } f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right) \text{ 恒成立, 知直线 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 是函数 } f(x) \text{ 图象的一条对称轴.}$$

又 $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{8}$, 所以 $\frac{\pi}{8} = \frac{T}{4}$, 则 $T = \frac{\pi}{2}$,



此时 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2}$, 可得 $\omega = 4$, 满足条件, 所以 $f(x) = \cos(4x + \varphi)$.

又 $f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 恒成立, 所以

$$f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2}{3}\pi + \varphi\right) = 1, \text{ 即}$$

$$\frac{2}{3}\pi + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 即 } \varphi = -\frac{2}{3}\pi +$$

$$2k\pi, k \in \mathbf{Z}. \text{ 又 } -\pi < \varphi < 0, \text{ 所以 } \varphi = -\frac{2}{3}\pi,$$

$$\text{所以 } \frac{\varphi}{\omega} = \frac{-\frac{2}{3}\pi}{4} = -\frac{\pi}{6}. \text{ 故选 B.}$$

刷**提分**

1. B **考查点** ▶ 比较指数幂、余弦值、对数式的大小

【解析】 因为余弦函数 $y = \cos x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递减, 且 $\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{2\pi}{3}$, 所以

$$\cos \frac{2\pi}{3} < \cos 2 < \cos \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } -\frac{1}{2} < a < 0. \text{ 因为}$$

对数函数 $y = \log_2 x$ 为增函数, 所以

$$\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 0.7 < \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } -1 < b < -\frac{1}{2}.$$

又因为 $c = 2^{0.1} > 0$, 所以 $c > a > b$. 故选 B.

2. D **考查点** ▶ 由正弦型函数的最值情况求参数范围

【解析】 因为 $\omega > 0, 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{6} \leq$

$$\omega x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \omega + \frac{\pi}{6}. \text{ 因为 } f(x) \text{ 在区间}$$

$\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内有最大值, 但无最小值, 所以

$$\frac{5\pi}{6} < \frac{\pi}{2} \omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ 解得 } \frac{4}{3} < \omega \leq \frac{8}{3}. \text{ 故}$$

选 D.

3. B **突破点** ▶ 由正弦型函数的周期求参数、函数的图象变换、辅助角公式

【解析】 因为 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x =$

$$2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right), \text{ 函数 } f(x) \text{ 的最小正周期}$$

为 π , 且 $\omega > 0$, 所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$, 可

得 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$. 将 $f(x)$ 的图象向

右平移 φ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的

图象, 则 $g(x) = f(x - \varphi) = 2\sin\left[2x -$

$$\left(2\varphi + \frac{\pi}{6}\right)\right], \text{ 由 } g(x) \text{ 为偶函数得 } 2\varphi +$$

$$\frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}, k \in$$

\mathbf{Z} , 可知当 $k = 0$ 时, 正实数 φ 取得最小值

$$\frac{\pi}{6}. \text{ 故选 B.}$$

4. BD **考查点** ▶ 正弦型函数的图象与性质、函数的图象变换



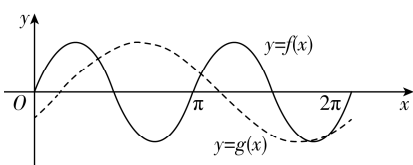
【解析】由题知 $g(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 故 A 错误;

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 0, \text{ 故 B 正确;}$$

$$g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \neq \pm 1, \text{ 故}$$

直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 不是 $g(x)$ 图象的对称轴, 故 C 错误;

分别作出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内的图象, 如图所示, 由图可知有 4 个交点, 故 D 正确, 故选 BD.



5. C 突破点 ▶ 由正弦型函数的图象与性质求参数

【解析】当 $x \in (0, \pi)$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{3}, \omega\pi + \frac{\pi}{3}\right)$.

由 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内无零点, 得 $\frac{\pi}{3} <$

$$\omega\pi + \frac{\pi}{3} \leq \pi, \text{ 解得 } 0 < \omega \leq \frac{2}{3}.$$

由 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{2\pi}{3}$ 对称, 得

$$\frac{2\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \omega = \frac{3}{2}k + \frac{1}{4}, k \in \mathbf{Z},$$

所以当 $k=0$ 时, $\omega = \frac{1}{4}$, 满足 $0 < \omega \leq \frac{2}{3}$,

从而 $f(x) = \sin\left(\frac{1}{4}x + \frac{\pi}{3}\right)$, 所以

$$f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{1}{4} \times \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故选 C.}$$

6. B 突破点 ▶ 利用正弦型函数的性质求参数、函数的图象变换

【解析】由函数 $f(x)$ 的图象的两条相邻对称轴之间的距离为 2π , 得 $f(x)$ 的最小

正周期 $T = 2 \times 2\pi = 4\pi$, 则 $\frac{2\pi}{|\omega|} = 4\pi$, 又 $\omega >$

0, 则 $\omega = \frac{1}{2}$, 则 $g(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \times$

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$, 当 $x \in$

$(-m, m)$ 时, $\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{1}{2}m + \frac{\pi}{6},$

$\frac{1}{2}m + \frac{\pi}{6}\right)$, 由函数 $g(x)$ 在区间



$(-m, m)$ 上单调递增, 得

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}m + \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \frac{1}{2}m + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} m \leq \frac{4\pi}{3} - 4k\pi, \\ m \leq \frac{2\pi}{3} + 4k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 则当 } k=0 \text{ 时, } m \leq$$

$\frac{2\pi}{3}$. 又 $m > 0$, 则 $m \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right]$. 故选 B.

7. BC 突破点 ▶ 求正弦型函数的最小正周期及单调性

【解析】由题图得函数的最小正周期为 $(14-6) \times 2 = 16$, A 错误.

由题意得 $\begin{cases} A+K=30, \\ -A+K=10, \end{cases}$ 解得 $A=10$, $K=20$.

设函数 $f(x)$ 的最小正周期为 T , 则 $T =$

$$\frac{2\pi}{\omega} = 16, \text{ 故 } \omega = \frac{\pi}{8}, \text{ 由 } f(14) = 10\sin\left(\frac{\pi}{8} \times$$

$$14 + \varphi\right) + 20 = 30, \text{ 得 } \sin\left(\frac{7\pi}{4} + \varphi\right) = 1,$$

$$\therefore \frac{7\pi}{4} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}. \text{ 由 } 0 < \varphi < \pi, \text{ 得}$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{4}, \text{ 故 } f(x) = 10\sin\left(\frac{\pi}{8}x + \frac{3\pi}{4}\right) + 20,$$

B 正确.

$\because T=16, 2\,024 = 16 \times 126 + 8, 2\,025 = 16 \times 126 + 9, \therefore$ 函数在区间 $(2\,024, 2\,025)$ 上的单调性与函数在区间 $(8, 9)$ 上的单调性相同, 由题图可得, 函数在区间 $(8, 9)$ 上单调递增, C 正确.

$f(1-x) + f(5+x) = 40$ 等价于 $f(3-x) + f(3+x) = 40$, 由题图可知, 函数 $f(x)$ 的图象不关于点 $(3, 20)$ 中心对称, D 错误. 故选 BC.

8. BCD 突破点 ▶ 求三角函数图象的对称轴及对称中心、辅助角公式

【解析】由题知 $f(3\pi - x) = a\sin[\sin(3\pi - x)] + b\cos[\cos(3\pi - x)] = a\sin(\sin x) + b\cos(\cos x) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{2}$ 对称, 故 A 正确;

因为 $f(0) = b\cos 1 \neq 0$, 所以 $f(x)$ 不可能为奇函数, 故 B 错误;

当 $a=b=1$ 时, $f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\sin x) - \sin(\cos x)$, 当 $x \in [0, \pi]$ 时, $\cos x \in [-1, 1]$, $\sin x \in [0, 1]$ (提示: 三角函数的有界性), 因为 $\cos x \pm \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right) \leq$

易错点

$$\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以 } \cos x + |\sin x| < \frac{\pi}{2}, \text{ 所以}$$

$$-1 \leq \cos x < \frac{\pi}{2} - |\sin x| \leq \frac{\pi}{2}, \text{ 所以}$$

$$\sin(\cos x) < \sin\left(\frac{\pi}{2} - |\sin x|\right) = \cos(\sin x),$$



所以 $\cos(\sin x) - \sin(\cos x) > 0$, 故 C 错误;

当 $a=b=1$ 时, $f(0) = \cos 1, f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin 1$, 由于 $\cos 1 > \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \sin 1 > \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, 因此 $\cos 1 > \frac{1}{2} > 1 - \sin 1$, 故 D 错误. 故选 BCD.

9. D 突破点 ▶ 求正弦型函数的值域和单调性、由正弦型函数的周期性求参数、求正弦型函数图象的对称轴及对称中心

【解析】 \because 函数 $f(x) = |\sin \omega x| + \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 $\pi, \therefore \omega = 2,$
 $\therefore f(x) = |\sin 2x| + \cos 2x =$

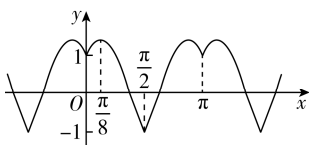
$$\begin{cases} \sin 2x + \cos 2x, x \in \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], \\ -\sin 2x + \cos 2x, x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right), \end{cases}$$

$k \in \mathbf{Z},$

即 $f(x) =$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right), x \in \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], \\ -\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right), x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, (k+1)\pi\right), \end{cases}$$

$k \in \mathbf{Z}$ (提示: 去绝对值, 将函数化为分段函数后作图), 作出 $f(x)$ 的图象如图所示.



由图知当 $x \in \left[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}\right]$ 时, $f(x)$ 先减后增, 故 A 错误.

$\because f(x) + f\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = |\sin 2x| + \cos 2x + \left|\sin\left[2\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)\right]\right| + \cos\left[2\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)\right] = |\sin 2x| + \cos 2x + |\cos 2x| - \sin 2x = 0$ 不恒成立, \therefore 点 $\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ 不是 $f(x)$ 图象的一个对称中心, 故 B 错误.

$\because f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \left|\sin\left[2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right]\right| + \cos\left[2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = |\cos 2x| + \sin 2x \neq f(x), \therefore$ 直线 $x = \frac{\pi}{8}$ 不是 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 故 C 错误.

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 此时 $2x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right] \Rightarrow \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in [-1, \sqrt{2}], \therefore f(x)$ 是偶



函数, \therefore 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) \in [-1, \sqrt{2}]$. 又 \because 函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π , $\therefore f(x)$ 的值域为 $[-1, \sqrt{2}]$, 故 D 正确. 故选 D.

10. AC 突破点 ▶ 复合函数的导数, 求余弦型函数的单调性、图象对称轴及对称中心

【解析】 由 $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ 得 $f'(x) = -\omega A\sin(\omega x + \varphi)$, 因为 $A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \pi$, 所以 $f'(0) = -\omega A\sin \varphi < 0$, 则由题图可知 $A = 1, \omega A = 2$, 则 $\omega = 2$, 则 $f(x) = \cos(2x + \varphi), f'(x) = -2\sin(2x + \varphi)$.

$$\text{由 } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 0, 0 < \varphi < \pi$$

得 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 故 A 正确;

$$f'(x) = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 由 } \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq$$

$$2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 得 } \frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq$$

$$\frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 由 } -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq$$

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z} \text{ 得 } -\frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq$$

$$\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 故 } f'(x) \text{ 在区间}$$

$$\left[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z} \text{ 上单调递增,}$$

$$\text{在区间 } \left[-\frac{5\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{12} + k\pi\right], k \in \mathbf{Z} \text{ 上}$$

单调递减, 故 B 错误;

$$f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 由 } 2x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in$$

\mathbf{Z} , 得 $f(x)$ 图象的对称轴为直线 $x =$

$$-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 当 } k = 0 \text{ 时, } x = -\frac{\pi}{6}, \text{ 故}$$

C 正确;

$$f(x) + f'(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) -$$

$$2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{5} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3} + \theta\right), \text{ 其}$$

$$\text{中 } \cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 故}$$

$f(x) + f'(x)$ 的最大值为 $\sqrt{5}$, 故 D 错误. 故选 AC.

11. B 突破点 ▶ 由正弦型函数的最值求参数、辅助角公式、函数新定义问题

$$\text{【解析】由题意得 } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2} \cos\left(\omega x + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \omega x, \text{ 因为}$$

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = 1, \text{ 所以 } f(x_1) + f(x_2) = 2,$$



故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ 上至少有两个最大值点. 令 $\omega x = t$, 则函数 $y = \sin t$ 在区间 $\left[\frac{3\omega\pi}{2}, \frac{5\omega\pi}{2}\right]$ 上至少有两个最大值点, 则 $f(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} \leq \pi$, 解

得 $\omega \geq 2$. 当 $2T = \frac{4\pi}{\omega} \leq \pi$, 即 $\omega \geq 4$ 时, 显然符合题意.

当 $2 \leq \omega < 4$ 时, 因为 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$, 所以

$$\frac{3\omega\pi}{2} \leq \omega x \leq \frac{5\omega\pi}{2}, \text{ 所以 } 3\pi \leq \frac{3\omega\pi}{2} < 6\pi,$$

$$5\pi \leq \frac{5\omega\pi}{2} < 10\pi, \text{ 分以下两种情况讨论:}$$

$$\textcircled{1} \text{ 当 } \frac{3\omega\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{2}, \text{ 即 } \omega \leq 3 \text{ 时, } \frac{5\omega\pi}{2} \geq \frac{13\pi}{2},$$

$$\text{即 } \omega \geq \frac{13}{5}, \text{ 所以 } \frac{13}{5} \leq \omega \leq 3;$$

$$\textcircled{2} \text{ 当 } \frac{9\pi}{2} < \frac{3\omega\pi}{2} < 6\pi, \text{ 即 } 3 < \omega < 4 \text{ 时, } \frac{5\omega\pi}{2} \geq$$

$$\frac{17\pi}{2}, \text{ 即 } \omega \geq \frac{17}{5}, \text{ 所以 } \frac{17}{5} \leq \omega < 4.$$

综上, ω 的取值范围为 $\left[\frac{13}{5}, 3\right] \cup$

$\left[\frac{17}{5}, +\infty\right)$, 故 B 正确. 故选 B.

12. BCD 突破点 ▶ 由余弦型函数的周期求参数、余弦型函数图象的性质

【解析】因为 $f(x) = 2\sin^2\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) -$

$1 = -\cos\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$, 所以其最小正周期

$$T = \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}.$$

对于 A, 由条件知, 最小正周期为 π , 所以 $\omega = 1$, 故 A 错误;

对于 B, 函数图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到的图象对应的函数为 $y =$

$$-\cos\left(2\omega x + \frac{\omega}{3}\pi + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 要使其图象关}$$

于原点对称, 则 $\frac{\omega}{3}\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in$

$\mathbf{Z})$, 解得 $\omega = \frac{1}{2} + 3k, k \in \mathbf{Z}$, 又 $\omega \in (0,$

$2)$, 所以 $\omega = \frac{1}{2}$, B 正确;

对于 C, 当 $\omega = \frac{3}{2}$ 时, 函数 $f(x) =$

$$-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right), \text{ 令 } 3x + \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 可}$$

$$\text{得 } x = \frac{k}{3}\pi - \frac{1}{9}\pi, k \in \mathbf{Z},$$

因为 $x \in \left(-\frac{\pi}{9}, \frac{2}{3}\pi\right)$, 所以令 $k = 1$, 可

得 $f(x)$ 图象的一条对称轴为直线 $x =$



$\frac{2}{9}\pi$, 令 $k=2$, 可得 $f(x)$ 图象的一条对称轴为直线 $x=\frac{5}{9}\pi$, 由函数 $y=f(x)+m$ 在 $x\in\left(-\frac{\pi}{9}, \frac{2}{3}\pi\right)$ 上恰有三个零点, 可知 x_1, x_2 关于直线 $x=\frac{2\pi}{9}$ 对称, 即 $x_1+x_2=\frac{2}{9}\pi\times 2=\frac{4}{9}\pi$, x_3, x_2 关于直线 $x=\frac{5\pi}{9}$ 对称, 即 $x_3+x_2=\frac{5}{9}\pi\times 2=\frac{10}{9}\pi$, 则 $x_1+2x_2+x_3=\frac{14}{9}\pi$, C 正确;

对于 D, 当 $0<x<\pi$ 时, $\frac{\pi}{3}<2\omega x+\frac{\pi}{3}<2\omega\pi+\frac{\pi}{3}$, 由 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上恰有 2 个极大值点和 1 个极小值点, 得 $3\pi<2\omega\pi+\frac{\pi}{3}\leq 4\pi$, 解得 $\frac{4}{3}<\omega\leq\frac{11}{6}$, 故 D 正确, 故选 BCD.

13. BCD 突破点 ▶ 正弦型函数的性质

【解析】 $y=f_2(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$, 若 $y=f_2(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$, 则 $y=\sin x$ 和 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 必须同时取得最大值, 由正弦函数性质得 $y=\sin x$ 和 $y=\frac{1}{2}\sin 2x$ 无法同时取得最大值, 则 $y=f_2(x)$ 的最大值不为 $\frac{3}{2}$, 故 A 错误;

由题意得 $y=f_3(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$, 因为 $x\in\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$, 所以 $2x\in\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$, $3x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 由正弦函数性质得 $y=\sin x, y=\frac{1}{2}\sin 2x, y=\frac{1}{3}\sin 3x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 则 $y=f_3(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递增, 故 B 正确;

令 $g(x)=f_4(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x$, 而 $g(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)+\frac{1}{2}\sin[2(x+2\pi)]+\frac{1}{3}\sin[3(x+2\pi)]+\frac{1}{4}\sin[4(x+2\pi)]=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{4}\sin 4x=g(x)$, 则 2π 为 $y=f_4(x)$ 的周期, 故 C 正确;

欲证 $|\sin x|\leq|x|$, 则证 $|\sin x|-|x|\leq 0$



即可, 令 $h(x) = |\sin x| - |x|$, 而 $h(-x) = |\sin(-x)| - |-x| = |-\sin x| - |-x| = |\sin x| - |x| = h(x)$, 则 $h(x)$ 是偶函数, 则证当 $x \geq 0$ 时, $h(x) \leq 0$ 即可, 此时 $h(x) = |\sin x| - x$, 当 $\sin x \geq 0$ 时, $h(x) = \sin x - x$, $h'(x) = \cos x - 1 \leq 0$, 当 $\sin x < 0$ 时, $h(x) = -\sin x - x$, $h'(x) = -\cos x - 1 \leq 0$, 故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 则 $h(x) \leq h(0) = 0$, 则 $|\sin x| \leq x$ 成立.

综上, 结合 $h(x)$ 是偶函数, 可得 $|\sin x| \leq |x|$ 恒成立, 故 $|f_n(x)| = \left| \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \cdots + \frac{1}{n}\sin nx \right| \leq |\sin x| + \frac{1}{2}|\sin 2x| + \cdots + \frac{1}{n}|\sin nx| \leq |x| + \frac{1}{2}|2x| + \cdots + \frac{1}{n}|nx| = n|x|$, 则 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $|f_n(x)| \leq n|x|$ 恒成立, 故 D 正确. 故选 BCD.

14. 4 (答案不唯一, 4, 5, 6 任写一个即可)

突破点 ▶ 利用正弦型函数的图象与性质求参数

【解析】 因为函数 $f(x)$ 的图象过点 $(0, 1)$, 所以 $2\sin \varphi = 1$, 即 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$, 又 $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$, 即 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$.

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6}\right]$, 若函数 $f(x)$ 的图象在区间 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上有且仅有两条对称轴, 则 $\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{2}$, 解得 $4 \leq \omega < 7$.

当 $x \in \left[-\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right]$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{18}\omega + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{18}\omega + \frac{\pi}{6}\right]$, 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{18}, \frac{\pi}{18}\right]$ 上单调递增, 则 $\begin{cases} -\frac{\pi}{18}\omega + \frac{\pi}{6} \geq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \frac{\pi}{18}\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} k \in \mathbf{Z}$, 解得 $\begin{cases} \omega \leq 12 - 36k, \\ \omega \leq 6 + 36k, \end{cases} k \in \mathbf{Z}$, 令 $k = 0$, 得 $0 < \omega \leq 6$.

综上所述, $4 \leq \omega \leq 6$, 且 $\omega \in \mathbf{N}^*$, 所以 $\omega = 4, 5, 6$.

专题 三角函数中求解 ω



难关

1. C **考查点** ▶ 利用正弦型函数的周期性、图象的对称性求参数



【解析】根据题意, $T = \frac{2\pi}{\omega}$, 因为 $\frac{3\pi}{4} < T < \pi$,

所以 $\frac{3\pi}{4} < \frac{2\pi}{\omega} < \pi$, 所以 $2 < \omega < \frac{8}{3}$.

又函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ 中心

对称, 所以 $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}\right) = 0$,

所以 $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

所以 $\omega = \frac{2k}{3} - \frac{1}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

因为 $2 < \omega < \frac{8}{3}$, 所以当 $k=4$ 时, $\omega = \frac{5}{2}$. 故选 C.

2. D 突破点 ▶ 函数的图象变换、三角恒等变换、函数极值点

【解析】 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \omega x \cos \frac{\pi}{3} + \cos \omega x \sin \frac{\pi}{3} +$

$\cos \omega x \cos \frac{\pi}{6} + \sin \omega x \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \sin \omega x +$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \omega x + \frac{1}{2} \sin \omega x = \sin \omega x +$

$\sqrt{3} \cos \omega x = 2 \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$,

由题意可得 $g(x) = 2 \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$,

由 $0 < x < \frac{\pi}{12}$, 得 $\frac{\pi}{3} < 2\omega x + \frac{\pi}{3} < \frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$,

因为 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{12}\right)$ 上恰有一个极值

点, 所以 $\frac{\pi}{2} < \frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2}$, 解得 $1 < \omega \leq 7$.

故选 D.

3. C 突破点 ▶ 正弦型函数的图象与性质

【解析】在正弦函数 $g(x) = \sin x$ 中, 设

$g(x_1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, g(x_2) = \frac{1}{2}$,

则 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$, 且 $\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi} = \frac{1}{4}$.

因为函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0)$,

$f(a) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, f(b) = \frac{1}{2}$, 且 $|a - b|$ 的最小

值为 π , 所以 $\frac{\pi}{T} = \frac{1}{4}$,

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T = 4\pi$,

所以 $\frac{2\pi}{\omega} = 4\pi$, 解得 $\omega = \frac{1}{2}$. 故选 C.

4. D 突破点 ▶ 二倍角的余弦公式、辅助角公式、利用正弦型函数的最值及图象的对称性求参数

【解析】 $f(x) = 2\cos^2 \omega x + \sin 2\omega x - 1 = 2 \cdot$

$\frac{1 + \cos 2\omega x}{2} + \sin 2\omega x - 1 = \cos 2\omega x +$

$\sin 2\omega x = \sqrt{2} \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$, 当 $x \in$



$$\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \text{ 时, } 2\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{2\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right).$$

因为 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上有最大值, 没有最小值, 所以 $\frac{\pi}{2} < \frac{2\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2}$, 解得 $\frac{3}{8} < \omega \leq \frac{15}{8}$.

又因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称, 所以 $\frac{5\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,
解得 $\omega = \frac{6k}{5} + \frac{3}{10}, k \in \mathbf{Z}$.

又 $\frac{3}{8} < \omega \leq \frac{15}{8}$, 所以当 $k=1$ 时, $\omega = \frac{3}{2}$. 故选 D.

5. D 突破点 ▶ 利用正弦型函数的单调性及最值求参数

【解析】令 $z = \omega x - \frac{\pi}{4}$, 由 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 可得

$$z = \omega x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4}\right),$$

要使 $y = \sin z$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4}\right)$ 上取

到最值, 则需使 $\frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{2}$, 即 $\omega > 3$.

当 $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ 时, $z = \omega x - \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4}, \pi\omega - \frac{\pi}{4}\right)$,

要使 $y = \sin z$ 在 $\left(\frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4}, \pi\omega - \frac{\pi}{4}\right)$ 上具有单调性,

$$\text{需使①} \begin{cases} \omega > 0, \\ \left(\pi\omega - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4}\right) \leq \pi, \\ \pi\omega - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4} \geq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{或②} \begin{cases} \omega > 0, \\ \left(\pi\omega - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4}\right) \leq \pi, \\ \pi\omega - \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \\ \frac{3\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{4} \geq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z};$$

由①可得 $0 < \omega \leq \frac{3}{4}$ 或 $\frac{7}{3} \leq \omega \leq \frac{11}{4}$, 又 $\omega > 3$, 则 ω 不存在;

由②可得 $1 \leq \omega \leq \frac{7}{4}$ 或 $\frac{11}{3} \leq \omega \leq \frac{15}{4}$, 又 $\omega > 3$, 则 ω 的取值范围是 $\left[\frac{11}{3}, \frac{15}{4}\right]$. 故选 D.

6. BC 突破点 ▶ 正弦型函数的值域及零点、利用正弦型函数的单调性求参数范



围、函数图象的变换、辅助角公式

$$\text{【解析】} f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2\omega x + \frac{1}{2} \cos 2\omega x = \sin\left(2\omega x + \frac{\pi}{6}\right).$$

对于 A, 当 $\omega = 1$ 时, $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,

则将 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长

度后得到 $y = \sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \cos 2x$

的图象, 故 A 错误;

对于 B, 当 $\omega = 2$ 时, $f(x) = \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right)$,

当 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\pi}{6} \leq 4x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{7\pi}{6}$,

故 $-\frac{1}{2} \leq \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$, 则 $f(x)$ 的值

域为 $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$, 故 B 正确;

对于 C, 令 $2\omega x + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 则 $x =$

$\frac{k\pi - \frac{\pi}{6}}{2\omega}, k \in \mathbf{Z}$, 又 $\omega > 0$, 若 $f(x)$ 在区

$$\begin{cases} \frac{5\pi - \frac{\pi}{6}}{2\omega} \leq \pi, \\ \frac{6\pi - \frac{\pi}{6}}{2\omega} > \pi, \\ \omega > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } \frac{29}{12} \leq \omega < \frac{35}{12}, \text{ 故 C}$$

正确;

对于 D, 设 $f(x)$ 的最小正周期为 T ,

若 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 上单调递增, 则

$\frac{T}{2} \geq \frac{7\pi}{12} - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$, 又 $\omega > 0$, 所以

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2\omega} \geq \frac{5\pi}{12}, \\ \omega > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < \omega \leq \frac{6}{5}, \text{ 又 } x \in$$

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12}\right), \text{ 所以 } 2\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6}\right),$$

由 $0 < \omega \leq \frac{6}{5}$ 可得 $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{17\pi}{30}$, 要

使 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 上单调递增,

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{7\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \omega \leq \frac{6}{5}, \end{cases} \quad \text{解得 } 0 < \omega \leq \frac{2}{7}, \text{ 故 D}$$

错误. 故选 BC.

7. C 突破点 ▶ 利用正弦型函数的单调性求参数

【解析】 \because 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$

$\left(\omega > 0, |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}\right)$, $x = -\frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的一个零点, 直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $y = f(x)$ 图象的一条对称轴,

$$\therefore \omega\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \varphi = n\pi, n \in \mathbf{Z}, \text{ 且 } \omega \cdot \frac{\pi}{4} + \varphi = n'\pi + \frac{\pi}{2}, n' \in \mathbf{Z},$$

两式相减可得 $\omega \cdot \frac{\pi}{2} = (n' - n)\pi + \frac{\pi}{2} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\omega = 2k + 1$, 即 ω 为正奇数.

由于 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 上单调, 因此分两种情况讨论:

(1) 若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 上单调递增,

$$\text{则 } \omega \cdot \frac{\pi}{18} + \varphi \geq 2k\pi - \frac{\pi}{2}, \text{ 且 } \omega \cdot \frac{5\pi}{36} + \varphi \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } -\omega \cdot \frac{\pi}{18} - \varphi \leq -2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ①, 且 } \omega \cdot \frac{5\pi}{36} + \varphi \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \text{ ②,}$$

由①②可得 $\frac{1}{12}\omega\pi \leq \pi, \therefore \omega \leq 12$, 故正奇数 ω 的最大值为 11.

$$\text{当 } \omega = 11 \text{ 时, } -\frac{11\pi}{4} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$$\therefore |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{4}.$$

此时 $f(x) = \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 上不单调, 不满足题意;

$$\text{当 } \omega = 9 \text{ 时, } -\frac{9\pi}{4} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \therefore |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = \frac{\pi}{4},$$

此时 $f(x) = \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 上单调递减, 不满足题意;

$$\text{当 } \omega = 7 \text{ 时, } -\frac{7\pi}{4} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z},$$

$\therefore |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{4}$, 此时 $f(x) = \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 上不单调, 不满足题意, 故此时 ω 无解.

(2) 若 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 上单调递减,

$$\text{则 } \omega \cdot \frac{\pi}{18} + \varphi \geq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \text{ 且 } \omega \cdot \frac{5\pi}{36} + \varphi \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{即 } -\omega \cdot \frac{\pi}{18} - \varphi \leq -2k\pi - \frac{\pi}{2} \text{ ③, 且 } \omega \cdot \frac{5\pi}{36} + \varphi \leq 2k\pi + \frac{3\pi}{2}, k \in \mathbf{Z} \text{ ④,}$$



由③④可得 $\frac{1}{12}\omega\pi \leq \pi, \therefore \omega \leq 12$, 故正奇数 ω 的最大值为 11.

当 $\omega = 11$ 时, $-\frac{11\pi}{4} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

$\therefore |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}, \therefore \varphi = -\frac{\pi}{4}$.

此时 $f(x) = \sin\left(11x - \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 上不单调, 不满足题意;

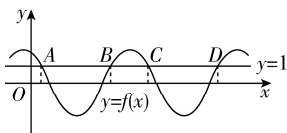
当 $\omega = 9$ 时, 由(1)知 $f(x) = \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{36}\right)$ 上单调递减, 满足题意.

故 ω 的最大值为 9. 故选 C.

8. $\left[\frac{11}{3}, 4\right)$ **突破点** ▶ 根据函数零点的个数求参数范围、三角函数图象的综合应用、由余弦型函数的周期性求值

【解析】由题意可作出函数 $f(x)$ 的大致

图象如图所示, 得 $AC = \frac{2\pi}{\omega}$,



又 $AB = 2BC = CD$,

所以 $AB = CD = \frac{4\pi}{3\omega}, BC = \frac{2\pi}{3\omega}$,

所以 $AD = AC + CD = \frac{2\pi}{\omega} + \frac{4\pi}{3\omega} = \frac{10\pi}{3\omega} \leq 2\pi$,

且 $2AC = \frac{4\pi}{\omega} > 2\pi$,

解得 $\frac{5}{3} \leq \omega < 2$.

又因为 $f\left(x - \frac{\varphi}{\omega}\right) = M\cos \omega x$, 此时

$A\left(\frac{\pi}{3\omega}, 1\right)$, 所以 $1 = M\cos\left(\omega \cdot \frac{\pi}{3\omega}\right)$,

解得 $M = 2$, 所以 $M + \omega$ 的取值范围

是 $\left[\frac{11}{3}, 4\right)$.

全章综合训练

刷

真题

刷小题

1. **B** **命题点** ▶ 与圆弧相关的数学文化问题

【解析】在 $\triangle AOB$ 中, 因为 $\angle AOB = 60^\circ$, $OA = OB = 2$, 所以 $\triangle AOB$ 为等边三角形, 且 $OA = OB = AB = 2$. 又 C 为 AB 的中点, 所以 $OC = \sqrt{3}$, 所以 $CD = 2 - \sqrt{3}$. 由 $s = AB + \frac{CD^2}{OA}$, 得 $s = 2 + \frac{(2 - \sqrt{3})^2}{2} = \frac{11 - 4\sqrt{3}}{2}$, 故选 B.

2. $-\frac{1}{2}$ **命题点** ▶ 三角函数的概念



【解析】 $\because \alpha \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right], \therefore \cos \frac{\pi}{3} \leq \cos \alpha \leq \cos \frac{\pi}{6}$, 即 $\frac{1}{2} \leq \cos \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $\beta - \alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \therefore \cos \beta = \cos(\alpha + \pi + 2k\pi) = \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha, k \in \mathbf{Z}, \therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos \beta \leq -\frac{1}{2}, \therefore \cos \beta$ 的最大值为 $-\frac{1}{2}$.

3. B 命题点 ▶ 正切型函数的图象与性质

【解析】正切函数 $y = \tan x$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{k\pi}{2}, 0 \right) (k \in \mathbf{Z})$. 由点 $(a, 0) (a > 0)$ 是函数 $y = 2\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象的一个对称中心, 可知 $a - \frac{\pi}{3} = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 即 $a = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$. 由 $a > 0$ 可得, 当 $k = 0$ 时, a 取得最小值 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

快解

若 $a = \frac{\pi}{6}$, 因为 $\tan\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \neq 0$, 所以 a 不能取 $\frac{\pi}{6}$; 若 $a = \frac{\pi}{3}$, 因为 $\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 所以 a 能取 $\frac{\pi}{3}$; 若 $a = \frac{\pi}{2}$, 因为 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{6} \neq 0$, 所以 a 不能取 $\frac{\pi}{2}$; 若 $a = \frac{4\pi}{3}$, 因为 $\tan\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$, 所以 a 能取 $\frac{4\pi}{3}$. 因为 $\frac{\pi}{3} < \frac{4\pi}{3}$, 所以 a 的最小值为 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

4. A 命题点 ▶ 正弦型函数的图象与性质

【解析】因为 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right]$ 上单调递增, 所以 $\frac{\pi}{12} - \left(-\frac{5\pi}{12}\right) \leq \frac{T}{2}$, 即 $0 < \omega \leq 2$.

因为直线 $x = \frac{\pi}{12}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴, $\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 为 $f(x)$ 图象的一个对称中心,

所以 $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \frac{T}{4} + \frac{k_1 T}{2} (k_1 \in \mathbf{N})$, 即 $\omega = 2(1 + 2k_1) (k_1 \in \mathbf{N})$, 故 $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$, 又 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 1$

(提示: $\frac{\pi}{12}$ 是单调递增区间的右端点, 故 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1$), 故 $\frac{\pi}{6} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z})$, 则 $\varphi = \frac{\pi}{3} + 2k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z})$.

因为 $-\pi < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 即 $f(x) =$



$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{当 } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ 时, } 2x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right],$$

$$\text{所以 } \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right].$$

故当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x)$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 A.

5. C 命题点 ▶ 正弦型函数的图象

【解析】令 $3x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}$, 则

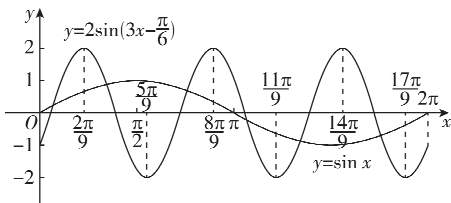
$$x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k_1\pi}{3}, k_1 \in \mathbf{Z},$$

$$\text{又 } x \in [0, 2\pi], \text{ 所以 } x = \frac{2\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}, \frac{11\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}, \frac{17\pi}{9}.$$

$$\text{令 } 3x - \frac{\pi}{6} = k_2\pi, k_2 \in \mathbf{Z}, \text{ 则 } x = \frac{\pi}{18} + \frac{k_2\pi}{3}, k_2 \in \mathbf{Z},$$

$$\text{又 } x \in [0, 2\pi], \text{ 所以 } x = \frac{\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{19\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{31\pi}{18},$$

如图, 作出函数 $y = \sin x$ 与 $y = 2 \cdot \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的大致图象, 由图可知, 两函数图象共有 6 个交点. 故选 C.



6. BC 命题点 ▶ 三角函数的图象与性质

【解析】对于 A, 令 $f(x) = 0$, 则 $2x =$

$$k_1\pi (k_1 \in \mathbf{Z}), \text{ 解得 } x = \frac{k_1\pi}{2} (k_1 \in \mathbf{Z}), \text{ 令}$$

$$g(x) = 0, \text{ 则 } 2x - \frac{\pi}{4} = k_2\pi (k_2 \in \mathbf{Z}), \text{ 解得}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k_2\pi}{2} (k_2 \in \mathbf{Z}), \text{ 因此 } f(x) \text{ 与 } g(x)$$

无相同零点, 故 A 错误; 对于 B, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大值都为 1, 故 B 正确; 对于

C, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小正周期都是 $\frac{2\pi}{2} =$

π , 故 C 正确; 对于 D, 令 $2x = \frac{\pi}{2} + k_3\pi$

$$(k_3 \in \mathbf{Z}), \text{ 得 } x = \frac{\pi}{4} + \frac{k_3\pi}{2} (k_3 \in \mathbf{Z}), \text{ 令 } 2x -$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k_4\pi (k_4 \in \mathbf{Z}), \text{ 得 } x = \frac{3}{8}\pi + \frac{k_4\pi}{2}$$

$(k_4 \in \mathbf{Z}),$ 故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象无相同的对称轴, 故 D 错误. 故选 BC.

**快解**

由题可得 $f(x) = \sin 2x$, $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 则将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 个单位长度可以得到函数 $g(x)$ 的图象. 显然, 图象的左右平移变换不改变原函数的周期和最值, 故 B, C 正确; 又平移的长度不是半个周期的整数倍, 所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 图象的对称中心和对称轴不会重合, 故 A, D 错误. 故选 BC.

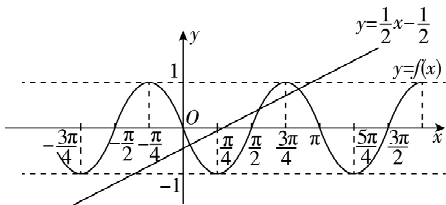
7. B 命题点 ▶ 三角函数的图象与性质

【解析】 $\because f(x_1) = -1, f(x_2) = 1, \therefore x_1, x_2$ 分别为函数 $f(x)$ 的最小值点、最大值点 (提示: 正弦型函数相邻的最大值与最小值横坐标之间的距离为图象上两条相邻对称轴的距离, 也是函数的半个周期).

又 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 则 $\frac{2\pi}{\omega} = 2 \times \frac{\pi}{2}$, 得 $\omega = 2$. 故选 B.

8. C 命题点 ▶ 三角函数的图象和性质

【解析】由题意知 $f(x) = \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x$, 画出函数 $f(x)$ 的图象和直线 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, 如图.



由图象可知, 函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 有 3 个交点, 故选 C.

9. A 命题点 ▶ 三角函数的图象与性质

【解析】因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\right)$ 中心对称, 所以 $b = 2$, 且

$\sin\left(\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 所以 $\frac{3\pi}{2}\omega + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $\omega = -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}k, k \in \mathbf{Z}$. 又 $\frac{2\pi}{3} <$

$T < \pi$, 则 $2 < \omega < 3$, 解得 $\omega = \frac{5}{2}$. 所以 $f(x) =$

$\sin\left(\frac{5}{2}x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$, 从而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} + 2 = 1$, 故选 A.

10. AD 命题点 ▶ 正弦型三角函数的图象与性质

【解析】因为函数 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 中心对称, 所以

$\sin\left(2 \times \frac{2\pi}{3} + \varphi\right) = 0$, 则 $\frac{4\pi}{3} + \varphi = k\pi (k \in$



\mathbf{Z}), 结合 $0 < \varphi < \pi$, 得 $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$.

对于 A, 由 $2k\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{2\pi}{3} \leq 2k\pi +$

$\frac{3\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 得 $k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}$

$(k \in \mathbf{Z})$, 当 $k=0$ 时, $-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$. 因为

$\left(0, \frac{5\pi}{12}\right) \subseteq \left[-\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right]$, 所以函数 $f(x)$

在区间 $\left(0, \frac{5\pi}{12}\right)$ 单调递减, 故 A 正确.

对于 B, 由 $2x + \frac{2\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 得

$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in \mathbf{Z})$, 当 $k=0$ 时, $x = -\frac{\pi}{12}$;

当 $k=1$ 时, $x = \frac{5\pi}{12}$; 当 $k=2$ 时, $x = \frac{11\pi}{12}$, 所

以函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right)$ 只有一个

极值点, 故 B 不正确.

对于 C, 由选项 B 的分析知, 函数 $f(x)$

图象的对称轴方程为 $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} (k \in$

$\mathbf{Z})$, 而方程 $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{7\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ 无解,

故 C 不正确.

对于 D, $f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$, 若直线

$y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$ 为曲线 $y = f(x)$ 的切线, 则由

$2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = -1$ 得 $2x + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi +$

$\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ 或 $2x + \frac{2\pi}{3} = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} (k \in$

$\mathbf{Z})$, 所以 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 或 $x = k\pi +$

$\frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$. 当 $x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x) =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则由 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 解得 $k =$

0 ; 当 $x = k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

方程 $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - k\pi - \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ 无解. 综

上所述, 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$ 为曲线 $y = f(x)$ 的

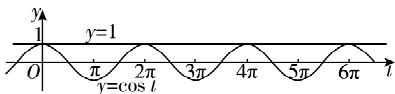
切线, 故 D 正确. 故选 AD.

11. [2,3] 命题点 ▶ 三角函数的零点问题

【解析】令 $f(x) = \cos \omega x - 1 = 0$, 得



$\cos \omega x = 1$, 又 $x \in [0, 2\pi]$, 则 $\omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 令 $t = \omega x \in [0, 2\omega\pi]$, 因为 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 所以 $y = \cos t$ 的图象与直线 $y = 1$ 在 $[0, 2\omega\pi]$ 有且仅有 3 个交点, 如图, 所以 $4\pi \leq 2\omega\pi < 6\pi$, 解得 $2 \leq \omega < 3$, 即 ω 的取值范围是 $[2, 3)$.



12. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **命题点** ▶ 三角函数的图象与性质

【解析】 设 $A(x_1, \frac{1}{2})$, $B(x_2, \frac{1}{2})$, 由五

点作图法可得
$$\begin{cases} \omega x_1 + \varphi = \frac{\pi}{6}, & \text{①} \\ \omega x_2 + \varphi = \frac{5\pi}{6}. & \text{②} \end{cases} \quad \text{②} - \text{①},$$

得 $\omega(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{3}$. 因为 $|AB| = \frac{\pi}{6}$, 所以

$x_2 - x_1 = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\omega = 4$. 因为函数 $f(x)$ 的

图象经过点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$, 所以 $f(\frac{2\pi}{3}) =$

$\sin(\frac{8\pi}{3} + \varphi) = 0$, 所以 $\frac{8\pi}{3} + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

解得 $\varphi = -\frac{8\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. 由题图可知

$-1 < f(0) < 0$, 即 $-1 < \sin \varphi < 0$, 所以取 $k =$

1, 则 $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$, 所以 $f(x) =$

$\sin(4x - \frac{2\pi}{3})$, 所以 $f(\pi) = \sin(-\frac{2\pi}{3}) =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. D **命题点** ▶ 同角三角函数的基本关系, 二倍角公式, 两角差的正弦公式

【解析】 因为 $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\cos \alpha =$

$2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = -\frac{3}{5}$, 又 $0 < \alpha < \pi$, 所以

$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$, 则

$\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \alpha - \cos \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times$

$(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$. 故选 D.



一题多解

因为 $0 < \alpha < \pi$, 所以 $0 < \frac{\alpha}{2} <$

$$\frac{\pi}{2}, \text{ 又因为 } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{所以 } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{故 } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} =$$

$$\frac{4}{5}, \cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} =$$

$$-\frac{3}{5} \left(\text{另解: } \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = \frac{2}{5} - 1 = \right.$$

$$-\frac{3}{5} \text{ 或 } \cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{8}{5} =$$

$$\left. -\frac{3}{5} \right).$$

$$\text{所以 } \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{4} - \cos \alpha \cdot$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}. \text{ 故选 D.}$$

14. ABC 命题点 ▶ 三角函数与解三角形的综合应用

【解析】因为 $\cos 2A + \cos 2B + 2\sin C = 2$,

所以 $2\cos^2 A - 1 + 2\cos^2 B - 1 + 2\sin C = 2$,

即 $\cos^2 A + \cos^2 B + \sin C = 2$,

所以 $1 - \sin^2 A + 1 - \sin^2 B + \sin C = 2$, 即

$\sin C = \sin^2 A + \sin^2 B$. 故 A 正确.

当 $C > \frac{\pi}{2}$ 时, $A + B < \frac{\pi}{2}$, 即 $0 < A < \frac{\pi}{2} - B <$

$\frac{\pi}{2}$, 故有 $0 < \sin A < \sin \left(\frac{\pi}{2} - B \right)$, 即 $0 <$

$\sin A < \cos B$, 同理有 $0 < \sin B < \cos A$,

所以 $\sin^2 A + \sin^2 B < \sin A \cos B +$

$\sin B \cos A = \sin(A + B) = \sin C$,

与 A 选项矛盾, 故 $C > \frac{\pi}{2}$ 不成立, 同理可

得 $C < \frac{\pi}{2}$ 也不成立, 故 $C = \frac{\pi}{2}$, 则 $\sin C =$

1, $\cos C = 0$ (提示: 根据 A 选项的结论及题干中已知, $\sin C$ 是比较特殊的, 所以从角 C 入手解决问题).

因为 $\cos A \cos B \sin C = \frac{1}{4}$, 所以

$\cos A \cos B = \frac{1}{4}$, 因为 $A + B = \frac{\pi}{2}$, 所

以 $\cos B = \sin A$, 所以 $\cos A \sin A = \frac{1}{4}$, 即

$\sin 2A = \frac{1}{2}$, 又 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right)$, $2A \in (0,$

$\pi)$, 故 $2A = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$, 即 $A = \frac{\pi}{12}$ 或 $\frac{5\pi}{12}$.

当 $A = \frac{\pi}{12}$ 时, $\tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = 2 -$

$\sqrt{3}$, 所以 $\frac{BC}{AC} = 2 - \sqrt{3}$ ①.

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{4}$, 故 $AC \cdot BC = \frac{1}{2}$

②, 结合①②可得



$$\begin{cases} AC^2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}, \\ BC^2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \text{ 所以 } AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2,$$

则 $AB = \sqrt{2}$, 故 B 正确, D 错误.

$$\text{当 } A = \frac{\pi}{12} \text{ 时, } \sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \sin \frac{5\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以 } \sin A + \sin B = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}}{2}, \text{ 故 C 正确.}$$

当 $A = \frac{5\pi}{12}$ 时, 同理可得 B 正确, C 正确,

D 错误 (提示: B, D 选项都可以视为求斜边的长度, C 选项角 A, B 互余, $A = \frac{\pi}{12}$ 与 $A = \frac{5\pi}{12}$ 结果相同).

故选 ABC.

15. A 命题点 ▶ 三角恒等变换

【解析】由 $\tan \alpha \tan \beta = 2$, 可得 $\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} = 2$, 即 $\sin \alpha \sin \beta =$

$2 \cos \alpha \cos \beta$. 由 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = m$, 可得 $\cos \alpha \cos \beta = -m$, $\sin \alpha \sin \beta = -2m$, 所以 $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -3m$, 故选 A.

16. B 命题点 ▶ 同角三角函数的基本关系、两角和的正切公式

【解析】 $\because \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{1}{1 - \tan \alpha} = \sqrt{3}$,

$$\therefore \tan \alpha = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)} = 2\sqrt{3} - 1, \text{ 故选 B.}$$

17. B 命题点 ▶ 两角和与差的正弦公式及二倍角的余弦公式

【解析】 $\because \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$,

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{3} + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \therefore \cos(2\alpha + 2\beta) = \cos[2(\alpha + \beta)] = 2\cos^2(\alpha + \beta) - 1 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{2}{9} - 1 = -\frac{7}{9}.$$



$$\beta)] = 1 - 2\sin^2(\alpha + \beta) = 1 - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \text{ 故选 B.}$$

18. D 命题点 ▶ 二倍角公式

【解析】因为 $\cos \alpha = 1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $\cos \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, 所以 $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$. 又因为 α 为锐角, 所以 $\frac{\alpha}{2}$ 为锐角, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{16}} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, 故选 D.

19. C 命题点 ▶ 两角和与差的正弦、余弦公式, 同角三角函数的基本关系

【解析】由已知等式, 得 $\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha + \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) \sin \beta$,
整理得 $\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha + \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$,
即 $\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 0$,
所以 $\tan(\alpha - \beta) = -1$, 故选 C.

20. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 命题点 ▶ 同角三角函数的基本关系, 两角和的正切公式

【解析】 $\because \tan \alpha + \tan \beta = 4$, $\tan \alpha \tan \beta = \sqrt{2} + 1$,
 $\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{4}{-\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$.
 $\because 2k_1\pi < \alpha < 2k_1\pi + \frac{\pi}{2}$, $k_1 \in \mathbf{Z}$, $2k_2\pi + \pi < \beta < 2k_2\pi + \frac{3\pi}{2}$, $k_2 \in \mathbf{Z}$,
 $\therefore 2(k_1 + k_2)\pi + \pi < \alpha + \beta < 2(k_1 + k_2)\pi + 2\pi$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$,
 $\therefore \sin(\alpha + \beta) < 0$.
 $\therefore \begin{cases} \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \tan(\alpha + \beta), \\ \sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta) = 1, \end{cases}$
 $\therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

易错警示

α, β 范围中的 k 并不一定相同, 求 $\sin(\alpha + \beta)$, 一定要求 $\alpha + \beta$ 的范围.

21. $-\frac{\sqrt{10}}{5}$ 命题点 ▶ 同角三角函数基本关系

【解析】因为 $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{3}$, 所以 $\cos \theta = 3\sin \theta$.



又因为 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, 解得 $\sin^2 \theta = \frac{1}{10}$, 即

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \cos \theta = \frac{3\sqrt{10}}{10}, \text{ 所以 } \sin \theta -$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

刷大题

1. 命题点 ▶ 三角函数的解析式, 三角恒等变换, 三角函数的单调性和值域

【解】 (1) 因为 $f(x) = \cos(2x + \varphi)$, 且 $f(0) = \cos \varphi = \frac{1}{2}$, $\varphi \in [0, \pi)$, 所以

$$\varphi = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由 (1) 可知, $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$,

$$\text{则 } g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right]$$

(易错: 要用“ $x - \frac{\pi}{6}$ ”整体代入)

$$= \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos 2x$$

$$= \frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + \cos 2x$$

(易错: 两角和的余弦公式要“变号”连接)

$$= \frac{3}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x$$

$$= \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x \right)$$

$$= \sqrt{3} \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right).$$

因为 $x \in \mathbf{R}$, 所以 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \in [-1, 1]$,

所以函数 $g(x)$ 的值域为 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$.

令 $2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi + \pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 解

$$\text{得 } k\pi - \frac{\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbf{Z},$$

所以函数 $g(x)$ 的单调递减区间为

$$\left[k\pi - \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{5\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z};$$

令 $2k\pi - \pi \leq 2x + \frac{\pi}{6} \leq 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 解

$$\text{得 } k\pi - \frac{7\pi}{12} \leq x \leq k\pi - \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z},$$

所以函数 $g(x)$ 的单调递增区间为

$$\left[k\pi - \frac{7\pi}{12}, k\pi - \frac{\pi}{12}\right], k \in \mathbf{Z}.$$