



第 11 章 计数原理

第 1 节 两个计数原理、排列与组合

刷**基础****1. C** 考查点 ▶ 分类加法计数原理

【解析】若乙、丙、丁 3 人体验的项目各不相同, 则有 $C_2^1 A_3^3 = 12$ (种) 体验方法; 若乙、丙、丁 3 人有 2 人体验的项目相同, 则有 $C_2^1 C_3^2 A_2^2 = 12$ (种) 体验方法. 所以不同的体验方法共有 24 种. 故选 C.

2. B 考查点 ▶ 分步乘法计数原理

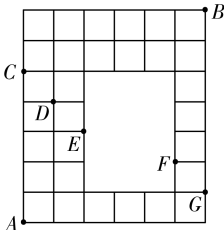
【解析】先排程序 A, B, 要求既不能放在最前, 也不能放在最后, 则在第 2, 3, 4 道程序中选 2 个放 A, B, 共有 A_3^2 种安排方法; 再排剩余的 3 道程序, 共有 A_3^3 种安排方法. 所以一共有 $A_3^2 \cdot A_3^3 = 36$ (种) 安排方法. 故选 B.

3. D 考查点 ▶ 涂色问题

【解析】首先 4, 5, 6 三个区域有 A_4^3 种涂法, 当 2 号区域和 6 号区域同色时, 有 $A_4^3 \times 2 \times 3 = 144$ (种) 涂法; 当 2 号区域与 4 号区域同色时, 有 $A_4^3 \times 2 \times 3 = 144$ (种) 涂法; 当 2 号区域与 4 号区域, 6 号区域均不同色时, 有 $A_4^3 \times 2 \times 2 = 96$ (种) 涂法. 综上, 共有 $144 + 144 + 96 = 384$ (种) 涂法. 故选 D.

4. 401 考查点 ▶ 两个原理的综合应用

【解析】如图, 当路线经过点 C 时, 从 A 到 C 有 1 种走法, 从 C 到 B 有 C_8^2 种走法; 当路线经过点 D 时, 从 A 到 D 有 C_5^1 种走法, 从 D 到 B 有 $C_7^2 + C_6^2$ 种走法; 当路线经过点 E 时, 从 A 到 E 有 C_5^2 种走法, 从 E 到 B 有 C_6^2 种走法; 当路线经过点 F 时, 从 A 到 F 有 C_6^1 种走法, 从 F 到 B 有 C_6^1 种走法; 当路线经过点 G 时, 从 A 到 G 有 C_7^1 种走法, 从 G 到 B 有 1 种走法. 所以不同的走法共有 $1 \times C_8^2 + C_5^1 (C_7^2 + C_6^2) + C_5^2 C_6^2 + C_6^1 C_6^1 + 1 \times C_7^1 = 28 + 180 + 150 + 36 + 7 = 401$ (种).

**5. $\frac{1}{30}$** 突破点 ▶ 两个原理的综合应用

【解析】将 1, 2, 3, 4, 5, 6 填入三角形图形中的 6 个圈中的填法共有 $6!$ 种. 设相等的每条边上的 3 个数之和为 s , $s \in \mathbf{Z}$, 则 $3s \geq (1+2+3+4+5+6) + 1+2+3 = 27$, $3s \leq (1+2+3+4+5+6) + 4+5+6 = 36$, 所以 $27 \leq 3s \leq 36$, 解得 $9 \leq s \leq 12$ (提示: 特殊

位置优先排,先考虑 3 个顶点的排法,再考虑剩余 3 个位置的排法).

①当 $s=9$ 时,3 个顶点所填的 3 个数只能为 1,2,3,如图(1),此时共有 $3 \times 2 = 6$ (种)填法.

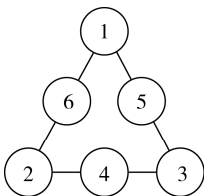
②当 $s=10$ 时,设 3 个顶点所填的 3 个数之和为 t ,则 $t=3 \times 10 - (1+2+3+4+5+6) = 30 - 21 = 9$. 而 $9 = 2+3+4, 9 = 1+3+5, 9 = 1+2+6$,则 3 个顶点所填的 3 个数只能为 $\{2,3,4\}, \{1,3,5\}$ 或 $\{1,2,6\}$. 当 3 个顶点所填的 3 个数为 $\{2,3,4\}$ 时,因为顶点分别填 3,4 的这条边上的 3 个数之和为 10,所以这条边中间的圈只能填 3,这与每个数恰好出现一次矛盾,故此时没有满足条件的填法;同理,当 3 个顶点所填的 3 个数为 $\{1,2,6\}$ 时也没有满足条件的填法,3 个顶点所填的 3 个数只能为 $\{1,3,5\}$,如图(2),此时共有 $3 \times 2 = 6$ (种)填法.

③当 $s=11$ 时,3 个顶点所填的 3 个数应为 $\{2,4,6\}$,此时共有 $3 \times 2 = 6$ (种)填法.

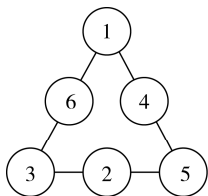
④当 $s=12$ 时,3 个顶点所填的 3 个数应为 $\{4,5,6\}$,此时共有 $3 \times 2 = 6$ (种)填法.

综上,满足条件的填法共有 $6 \times 4 = 24$ (种).

故所求的概率为 $\frac{24}{6!} = \frac{1}{30}$.



图(1)



图(2)

6. C 考查点 ▶ 元素(位置)有限制条件的排列问题

【解析】将 0,1,2,10 四个数字排成一行,且数字 0 不在首位(易错:0 不能排在首位),则排法有 $3A_3^3 = 18$ 种,数字 1 和 0 相邻且 1 在 0 之前的排法有 $A_3^3 = 6$ 种,满足题意的不同的 5 位数的个数为 $18 - \frac{6}{2} = 15$. 故选 C.

7. B 考查点 ▶ 不相邻排列问题、插空法

【解析】增加一个位置,使九个位置排一排(提示:环排列问题可转换为线排列问题,再根据插空法求解),甲放一号和九号,中间剩余七个位置可选,再将除甲、乙、丙以外的五人放入中间有 $A_5^5 = 120$ 种排列方法.

因为甲、乙、丙两两不相邻,所以乙、丙只能放中间五人形成的四空中,共有 $A_4^2 = 12$ 种排列方法. 所以由分步乘法计数原理得不同的排列方法有 $A_5^5 A_4^2 = 1\,440$ 种. 故选 B.

**8. D 考查点** ▶ 相邻排列问题、捆绑法

【解析】采取对丙和甲进行捆绑的方法，如果不考虑“甲不在除夕值班，乙不在正月初一值班”，则安排方案有 $A_6^6 A_2^2 = 1\,440$ 种；如果“乙在正月初一值班”，则安排方案有 $A_4^1 A_2^2 A_4^4 = 192$ 种；若“甲在除夕值班”，“丙在初一值班”，则安排方案有 $A_5^5 = 120$ 种。所以满足题意的不同的安排方案共有 $1\,440 - 192 - 120 = 1\,128$ 种。故选 D。

9. B 突破点 ▶ 多重限制的排列问题

【解析】甲、乙都不是第 1 名且甲不是最后 1 名，且丙不是第 2 名，即甲的限制最多，故以甲为优先元素分类计数。

甲的名次有可能是第 2, 3, 4 名三种情况：

①甲排第 2 名，乙排第 3, 4, 5 名，包含丙的余下 3 人有 A_3^3 种排法，则有 $1 \times 3 \times A_3^3 = 18$ 种；

②甲排第 3, 4 名，乙排第 2 名，包含丙的余下 3 人有 A_3^3 种排法，则有 $2 \times 1 \times A_3^3 = 12$ 种；

③甲排第 3, 4 名，乙不排第 1, 2 名，即有 4 种排法，丙不排第 2 名，有 2 种排法，余下 2 人有 A_2^2 种排法，则有 $4 \times 2 \times A_2^2 = 16$ 种。

综上，这 5 名同学可能的名次排列情况种数为 $18 + 12 + 16 = 46$ 。故选 B。

一题多解

甲不排首尾，有 3 种排法，再排乙，也有 3 种排法，如果不考虑“丙不是第 2 名”，包含丙的余下 3 人有 A_3^3 种排法，共有 $3 \times 3 \times A_3^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 54$ 种不同的情况；

但如果丙是第 2 名，则甲有可能是第 3, 4 名 2 种排法，再排乙，也有 2 种排法，余下 2 人有 A_2^2 种排法，所以有 $2 \times 2 \times A_2^2 = 8$ 种不同的情况。

从而这 5 名同学可能的名次排列情况种数为 $54 - 8 = 46$ 。

10. AD 突破点 ▶ 排列组合综合问题、部分平均分組

【解析】对于 A：先从 7 个位置中选 3 个排小明等 3 人，有 $C_7^3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$ 种方法，随后排列剩下 4 人，有 $A_4^4 = 4! = 24$ 种方法，则共有 $35 \times 24 = 840$ 种方法，故 A 正确；

对于 B：将小明、小红两人捆绑，有 2 种排列方法，随后与剩下 5 人一起排列，有 $A_6^6 = 6! = 720$ 种方法，则共有 $720 \times 2 = 1\,440$ 种方法，故 B 错误；

对于 C：先排剩下 5 人，有 $A_5^5 = 5! = 120$ 种方法，再将小明、小红排进 5 人产生



的 6 个空隙中, 有 $A_6^2 = 6 \times 5 = 30$ 种方法, 则共有 $30 \times 120 = 3\,600$ 种方法, 故 C 错误;

对于 D: 由题可知, 分组情况为 2 人的两组, 3 人的一组, 则有 $\frac{C_7^2 C_5^2}{2} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{8} = 105$ 种方法 (提示: 注意不要重复, 若有 n 组均分, 最后必须除以 $n!$), 随后安排训练, 有 $A_3^3 = 3! = 6$ 种方法, 则共有 $105 \times 6 = 630$ 种方法, 故 D 正确. 故选 AD.

11. 50 考查点 ▶ 相邻排列问题、不相邻排列问题、捆绑法

【解析】第一类: 3 个红球“捆绑”在一起, 另外 2 个红球也“捆绑”在一起, 然后让 4 个白球排列后形成 5 个空位, 选出 2 个空位让“捆绑”的红球排列即可, 此时有 $A_5^2 = 20$ (种) 排法;

第二类: 3 个红球“捆绑”在一起, 另外 2 个红球不相邻, 此时让 4 个白球排列后形成 5 个空位, 从中选出 1 个空位放“捆绑”的红球, 再从剩下的 4 个空位选出 2 个空位放另外 2 个红球即可, 此时有 $C_5^1 C_4^2 = 30$ (种) 排法. 所以共有 $20 + 30 = 50$ (种) 排法.

12. $\frac{5}{12}$ 考查点 ▶ 排列问题与古典概型结合

【解析】标有数字的 4 个球排序共有 $A_4^4 = 24$ 种情况. 要摸到标有数字最大的球, 有以下两种情况:

①标有数字最大的球第 3 次摸到, 其他的小球随意在哪个位置摸出, 有 $3 \times 2 = 6$ 种情况;

②标有数字最大的球第 4 次摸到, 标有数字第二大的球在第 1 次或第 2 次被摸出, 其他的球在哪次摸出任意, 有 $2A_2^2 = 4$ 种情况.

故所求概率为 $\frac{6+4}{24} = \frac{5}{12}$.

13. D 考查点 ▶ 隔板法

【解析】本题可转化为将 14 个大小相同、质地均匀的小球分给甲、乙、丙、丁 4 个人, 每人至少分 1 个的问题, 利用隔板法在 14 个小球中间的 13 个空隙 (两端除外) 当中插入 3 个隔板, 可得不同的分配方法种数为 $C_{13}^3 = 286$, 所以不同的分配方法有 286 种. 故选 D.

14. C 考查点 ▶ 不平均分组分配问题

【解析】第一步选一人去 A 大学, 则有 $C_4^1 = 4$ (种) 方法; 第二步将剩余的三位同学以一组两人, 一组一人进行分组, 然后分配到 B, C 两所大学, 则有 $C_3^2 A_2^2 = 6$ (种) 方法. 所以不同的报名方



法共有 $4 \times 6 = 24$ (种). 故选 C.

15. A 考查点 ▶ 不相邻组合问题

【解析】因为有三位老师值班七天,且每人至少值班两天,每天安排一人值班,同一人不连续值两天班,所以必有一人值班三天,另两人各值班两天.

第一类:值班三天在 $(1, 3, 5), (1, 3, 6), (1, 4, 6), (2, 4, 7), (2, 5, 7), (3, 5, 7)$ 时,共有 $6 \times C_3^1 C_2^1 C_2^1 = 72$ 种不同的值班方法;

第二类:值班三天在 $(1, 3, 7), (1, 5, 7)$ 时,共有 $2 \times C_3^1 C_2^1 = 12$ 种不同的值班方法;

第三类:值班三天在 $(1, 4, 7)$ 时,共有 $C_3^1 C_2^1 C_2^1 = 12$ 种不同的值班方法;

第四类:值班三天在 $(2, 4, 6)$ 时,共有 $C_3^1 C_4^2 = 18$ 种不同的值班方法.

综上,三位老师在国庆节七天假期共有 $72 + 12 + 12 + 18 = 114$ 种不同的值班方法. 故选 A.

方法总结

“至多”“至少”问题,其解法常有两种解决思路:一是直接分类法,但注意分类要不重不漏;二是间接法,注意找准对立面,确保不重不漏.

16. B 考查点 ▶ 平均分组分分配问题

【解析】将 6 人身高从高到低依次标号为 $1, 2, 3, 4, 5, 6$, 所求事件的反面是“甲是所在组最矮的或乙是所在组最高的至少成立其一”,分为以下两种情况:

①甲、乙不在同一组:只有 $124, 356$ 一种选法;

②甲、乙在同一组:以上命题不可能同时成立,注意到剩下四人任取一人与甲乙同组均符合题意,所以有 $C_4^1 = 4$ 种选法.

故共有 $1 + 4 = 5$ 种选法. 而平均分组分共有

有 $\frac{C_6^3 \cdot C_3^3}{A_2^2} = 10$ 种方式. 所以共有 $10 -$

$5 = 5$ 种选法. 故选 B.

一题多解

①甲、乙在同一组:容易发现这是不可能的.

②甲、乙不在同一组: $1, 2$ 中至少有一位与乙一组, $5, 6$ 中至少有一位与甲一组, 取该事件的反面, 即 $1, 2$ 均不与乙一组且 $5, 6$ 均不与甲一组. 4 人均分两组共有 $\frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{A_2^2} = 3$ 种分法, $3 \times A_2^2 = 6$, 其中符合事件反面的只有 $356, 124$ 一种, 所以共有 $6 - 1 = 5$ 种分法.

17. C 突破点 ▶ 代数中的组合计数问题

【解析】若存在 $1 \leq i < j \leq 4, i, j \in \mathbf{N}^*$, 使得 $|a_i - a_j| = 1$, 则所取的 4 个数中至少有 2 个是连续正整数, 若只有 2 个是连



续正整数,问题转化为把 6 个相同的白球与 4 个相同的红球排成一行,要求只有 2 个红球相邻,先把 6 个白球排成一行,再用插空法排红球,排法种数为 $C_7^3 C_3^1 C_2^2 = 105$;

同理可得若只有 3 个是连续正整数,排法种数为 $C_7^2 A_2^2 = 42$;

若 4 个都是连续正整数,排法种数为 7;

若 4 个数中有 2 个是连续正整数,另外 2 个也是连续正整数,但这 4 个数不是 4 个连续正整数,则排法种数为 $C_7^2 = 21$.

所以符合条件的取法种数为 $105 + 42 + 7 + 21 = 175$. 故选 C.

一题多解

存在 $1 \leq i < j \leq 4, i, j \in \mathbf{N}^*$, 使得 $|a_i - a_j| = 1$ 表示所取的 4 个数中总有相邻的数,直接求解较复杂,考虑正难则反的方法.

假设 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$, 若不存在 $1 \leq i < j \leq 4$, 使得 $|a_i - a_j| = 1$, 则 $1 \leq a_1 < a_2 - 1 < a_3 - 2 < a_4 - 3 \leq 7$, 所以符合条件的取法种数为 $C_{10}^4 - C_7^4 = 175$.

18. 216 考查点 ▶ 排列组合综合应用

【解析】甲出卡片一共有 $A_4^4 = 24$ 种情况,同理,乙出卡片也一共有 $A_4^4 = 24$ 种情况.

不妨设甲出牌的数字依次为 1, 2, 3, 4, 若甲、乙每轮所出数字大小有相同的情况,则乙每轮所出数字有以下三种情况:

①甲、乙有一轮比赛所选卡片数字相同,不妨设乙第一轮所出数字为 1,那么后面三轮所出卡片数字均不能相同,有 1, 3, 4, 2 和 1, 4, 2, 3 两种情况,则共有 $C_4^1 \times 2 = 8$ (种) 情况;

②甲、乙有两轮比赛所选卡片数字相同,不妨设乙第一、二轮所出数字为 1, 2,那么后面两轮所出卡片数字均不能相同,有 1, 2, 4, 3 一种情况,则共有 $C_4^2 \times 1 = 6$ (种) 情况;

③甲、乙有三轮比赛所选卡片数字相同,那么第四张卡片数字也会相同,则乙每轮所出数字只有 1, 2, 3, 4 一种情况.

故甲、乙每轮所出数字大小有相同的情况共有 $8 + 6 + 1 = 15$ (种). 所以当甲出牌的数字依次为 1, 2, 3, 4 时,甲、乙每轮所出数字大小均不相同的情况有 $24 - 15 = 9$ (种).

故甲、乙每轮所出数字大小均不相同的情况有 $24 \times 9 = 216$ (种).

19. D 考查点 ▶ 代数中计数问题

【解析】若 x, y, z 全为 0, 则有序整数数组的个数为 1;

若 x, y, z 有两个为 0, 则有序整数数组的



个数为 $6 \times 3 \times 2 = 36$;

若 x, y, z 有 1 个为 0, 则有序整数组的个数为 $(C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + C_5^1) \times 3 \times 4 = 180$;

若 x, y, z 中没有 0, 易知 $|x| + |y| + |z| = 3$ 或 4 或 5 或 6, 则有序整数组的个数为 $(1 + 3 + 6 + 10) \times 8 = 160$ (易错: 忽视 x, y, z 为负数的情况).

所以有序整数组 (x, y, z) 的个数共有 $1 + 36 + 180 + 160 = 377$. 故选 D.

易错警示

题目既要考虑 x, y, z 为 0 的情况, 也要考虑 x, y, z 正负的情况, 考虑不全会出现重复或遗漏问题.

第 2 节 二项式定理

刷

基础

1. C 考查点 ▶ 二项式定理的应用

【解析】由二项式定理可得 $(x-1)^7$ 展开式中含 x^3 的项为 $C_7^4 (-1)^4 x^3$, 所以 $\frac{3(x-1)^7}{x^3}$ 的展开式中的常数项为 $3C_7^4 \cdot (-1)^4 = 105$. 故选 C.

2. D 突破点 ▶ 三项展开式的常数项

【解析】 $\left(x+1-\frac{2}{x^2}\right)^6 = \left[(x+1)-\frac{2}{x^2}\right]^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r (x+1)^{6-r} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right)^r = C_6^r (-2)^r (x+1)^{6-r} x^{-2r}$, 其中 $(x+1)^{6-r}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{6-r}^k x^{6-r-k}$, 当 $r=0$ 时, 由 $6-r-k=0$ 得 $k=6$, 常数项为 $C_6^0 C_6^6 (-2)^0$; 当 $r=1$ 时, 由 $6-r-k=2$ 得 $k=3$, 常数项为 $C_6^1 C_5^3 (-2)^1$; 当 $r=2$ 时, 由 $6-r-k=4$ 得 $k=0$, 常数项为 $C_6^2 C_4^0 (-2)^2$. 故所求常数项为 $C_6^0 C_6^6 (-2)^0 + C_6^1 C_5^3 (-2)^1 + C_6^2 C_4^0 (-2)^2 = -59$. 故选 D.

3. BCD 考查点 ▶ 求指定项的系数

【解析】因为第 4 项与第 5 项的二项式系数相等, 所以 $C_n^3 = C_n^4$, 解得 $n=7$, 故 A 错误;

令 $x=1$, 可得展开式中所有项的系数和为 $\left(\frac{2}{1}-1\right)^7 = 1$, 故 B 正确;

$\left(\frac{2}{x}-x\right)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r \cdot 2^{7-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{7-r} \cdot (-x)^r = C_7^r \cdot 2^{7-r} \cdot (-1)^r \cdot$

x^{2r-7} , 令 $2r-7=0$, 则 $r=\frac{7}{2} \notin \mathbf{N}$, 所以不存在常数项, 故 C 正确;

令 $2r-7=5$, 则 $r=6$, 所以 $T_7 = C_7^6 2^1 \cdot (-1)^6 \cdot x^5 = 14x^5$, 所以 x^5 的系数为 14, 故 D 正确. 故选 BCD.

4. -80 考查点 ▶ 求指定项的系数

【解析】因为 a_3 为 $(1+2x)^5 + (2-x)^6$ 展开



式中 x^3 的系数, 又 $(1+2x)^5$ 展开式中 x^3 的系数为 $C_5^3 \cdot 2^3$, $(2-x)^6$ 展开式中 x^3 的系数为 $(-1)^3 C_6^3 \cdot 2^3$, 所以 $a_3 = C_5^3 \cdot 2^3 - C_6^3 \cdot 2^3 = -80$.

5. $\frac{43}{21}$ **考查点** ▶ 由项的系数确定参数

【解析】 因为 $(x+y)^7$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r x^{7-r} y^r$, $r=0, 1, 2, \dots, 7$, 令 $r=5$, 可得 $T_6 = C_7^5 x^2 y^5 = 21x^2 y^5$; 令 $r=6$, 可得 $T_7 = C_7^6 xy^6 = 7xy^6$, 所以 $a \cdot T_6 - \frac{x}{y} \cdot T_7 = a \cdot 21x^2 y^5 - \frac{x}{y} \cdot 7xy^6 = (21a-7)x^2 y^5$, 所以 $21a-7=36$, 解得 $a = \frac{43}{21}$.

6. BC **考查点** ▶ 二项展开式的系数和

【解析】 对于 A: 令 $x=0$, 则 $a_0=1$, 故 A 错误;

对于 B: 令 $x=1$, 则 $a_0+a_1+\dots+a_{2024}=3^{2024}$, 故 B 正确;

对于 C: 令 $x=-1$, 则 $a_0-a_1+a_2-a_3+\dots+a_{2024}=1$, 故 C 正确;

对于 D, 由 $(1+2x)^{2024} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2024}x^{2024}$, 两边同时求导得 $2024 \times 2 \times (1+2x)^{2023} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + 2024a_{2024}x^{2023}$, 令 $x=-1$, 则 $a_1 - 2a_2 + 3a_3 - \dots - 2024a_{2024} = -4048$, 故 D 错误. 故选 BC.

7. C **考查点** ▶ 由展开式中二项式系数和、各项系数和求参数

【解析】 若 $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^n$ 的展开式中二项式系数之和为 32, 则 $2^n = 32$, 解得 $n=5$, 即二项式为 $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^5$, 因为 $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式中各项系数和为 243, 令 $x=1$, 得 $(a+1)^5 = 243 = 3^5$, 解得 $a=2$, 即二项式为 $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^5$, 则该二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-r} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = 2^{5-r} \cdot C_5^r x^{5-3r}$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 令 $5-3r=2$, 解得 $r=1$, 则展开式中 x^2 的系数为 $2^4 \cdot C_5^1 = 16 \times 5 = 80$. 故选 C.

8. D **考查点** ▶ 二项式系数的增减性和最值、求指定项的系数

【解析】 因为二项展开式中当且仅当第 5 项是二项式系数最大的项, 即二项式系数 $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ 中第 5 个即 C_n^4 最大, 所以由二项式系数的性质可知, 展开式中共 9 项, $n=8$, 故 $\left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^n = \left(3x^{\frac{1}{2}} - x^{-1}\right)^8$, 则 $\left(3x^{\frac{1}{2}} - x^{-1}\right)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r \left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^{8-r} \left(-x^{-1}\right)^r =$



$C_8^r (-1)^r 3^{8-r} x^{\frac{8-3r}{2}}$, $r = 0, 1, 2, \dots, 8$. 令 $\frac{8-3r}{2} = -5$, 得 $r = 6$, 所以 $\frac{1}{x^5}$ 的系数为 $C_8^6 \cdot 3^2 = 252$. 故选 D.

9. AD **考查点** ▶ 系数最大项问题与二项式系数最大项问题

【解析】 $\left(x - \frac{1}{y}\right)^6$ 的展开式的通项为

$$T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(-\frac{1}{y}\right)^r = (-1)^r C_6^r x^{6-r} y^{-r}.$$

对于 A, 取 $6-r=4$, 则 $r=2$, 故 $x^4 y^{-2}$ 的系数为 $(-1)^2 C_6^2 = 15$, 故 A 正确;

对于 B, 令 $x=y=1$, 则各项系数之和为 $\left(1 - \frac{1}{1}\right)^6 = 0$, 故 B 错误;

对于 C, 展开式中二项式系数最大项是第 4 项, 故 C 错误;

对于 D, 由展开式的通项可得展开式中各项的系数依次为 $1, -6, 15, -20, 15, -6, 1$, 所以展开式中系数最大项是第 3 项或第 5 项, D 正确. 故选 AD.

10. C **突破点** ▶ 系数的绝对值最大项问题

【解析】 由题意, 二项式 $\left(\frac{x^2}{2} - x^{-\frac{1}{2}}\right)^n$ 展

开式的通项为 $T_{r+1} = C_n^r \left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-r} \cdot$

$(-x^{-\frac{1}{2}})^r = (-1)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{n-r} C_n^r x^{2n-\frac{5}{2}r}$. 因为

展开式中第 9 项是常数项, 所以 $2n - \frac{5}{2} \times 8 = 0$, 解得 $n = 10$, 故第 $r+1$ 项的系

数的绝对值为 $\left(\frac{1}{2}\right)^{10-r} C_{10}^r$.

设展开式中第 $r+1$ 项的系数的绝对值

$$\text{最大, 则} \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{10-r} C_{10}^r \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{9-r} C_{10}^{r+1}, & \text{①} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{10-r} C_{10}^r \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{11-r} C_{10}^{r-1}, & \text{②} \end{cases}$$

$$\text{由 ① 可得 } \frac{1}{2} \cdot \frac{10!}{r! \cdot (10-r)!} \geq$$

$$\frac{10!}{(r+1)! \cdot (9-r)!}, \text{ 即 } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10-r} \geq \frac{1}{r+1}, \text{ 解}$$

$$\text{得 } 10 > r \geq \frac{19}{3}; \text{ 由 ② 可得 } \frac{10!}{r! \cdot (10-r)!} \geq$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{10!}{(r-1)! \cdot (11-r)!}, \text{ 即 } \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} \cdot$$

$$\frac{1}{11-r}, \text{ 解得 } 0 < r \leq \frac{22}{3}.$$

$$\text{则 } \frac{19}{3} \leq r \leq \frac{22}{3}, \text{ 又 } r \in \mathbf{N}, \text{ 故 } r = 7, \text{ 即第 8}$$

项的系数的绝对值最大. 故选 C.



方法总结

二项展开式系数最大项的求法

如求 $(a+bx)^n$ 的展开式系数最大的项,一般是采用待定系数法,设展开式各项系数分别为 A_1, A_2, \dots, A_{n+1} , 且第 k 项系数

最大,应用 $\begin{cases} A_k \geq A_{k-1}, \\ A_k \geq A_{k+1}, \end{cases}$ 从而解得 k .

11.2 考查点 ▶ 展开式中 x 的偶数次幂项的系数和的应用

【解析】设 $f(x) = (a+2x)(1+x)^4$, 展开式中 x 的偶数次幂项的系数之和为 A , 奇数次幂项的系数之和为 B , 则

$$\begin{cases} A+B=f(1), \\ A-B=f(-1), \end{cases} \text{ 得 } A = \frac{1}{2} [f(1) +$$

$$f(-1)] = 8(a+2), \text{ 由 } A=32 \text{ 得 } 8(a+2)=32, \text{ 则 } a=2.$$

易错警示

在 $(a+bx)^n$ 的展开式中,二项式系数是指 $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$, 它只与项数有关,而与 a, b 的值无关;而项的系数是指该项中除变量外的常数部分,它不仅与项数有关,而且与 a, b 的值有关. 如 $(a+bx)^n$ 的展开式中,第 $k+1$ ($k \in \mathbf{N}, k \leq n$) 项的二项式系数是 C_n^k , 而该项的系数是 $C_n^k a^{n-k} b^k$.

全章综合训练

刷

真题

1. C 命题点 ▶ 排列组合、分步乘法计数原理

【解析】解法一:甲、乙两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有 $C_6^1 C_5^1 C_4^1 = 120$ (种), 故选 C.

解法二:甲、乙从 6 种课外读物中各自选读 2 种,选法有 $C_6^2 \times C_6^2 = 225$ (种), 其中,甲、乙选读的读物完全相同的选法有 $C_6^2 = 15$ (种), 甲、乙选读的读物完全不同的选法有 $C_6^2 \times C_4^2 = 90$ (种), 因此所求选法共有 $225 - 15 - 90 = 120$ (种). 故选 C.

解法三:从 6 种课外读物中任选 3 种,选法有 $C_6^3 = 20$ (种), 然后把这 3 种读物分别安排为两人共同的读物、甲的读物、乙的读物,排列方法有 $3!$ 种, 因此所求选法共有 $C_6^3 \times 3! = 120$ (种). 故选 C.

2. B 命题点 ▶ 有条件的排列组合问题

【解析】先从 5 名志愿者中选出 1 名志愿者参加星期六、星期日两天的公益活动, 再从剩下的 4 名志愿者中选出 2 名志愿者分别参加星期六、星期日的公益活动, 共有 $C_5^1 A_4^2 = 60$ (种) 不同的安排方式, 故选 B.

3. C 命题点 ▶ 排列组合在实际问题中的应用

【解析】根据题意, 第一步, 将 3 名大学生分成两组 (一组 1 人, 另一组 2 人), 有 C_3^1 种分法; 第二步, 将这两组大学生分



配到 2 个山村,有 A_2^2 种分法. 根据分步乘法计数原理,可得不同的分配方案有 $C_3^1 \cdot A_2^2 = 6$ (种). 故选 C.

4. 24 112 命题点 ▶ 排列组合的实际应用

【解析】第一空,共选 4 个方格:选第 1 个方格,在 16 个方格中任选 1 个,有 16 种选法;

选第 2 个方格,需在除去所选第 1 个方格所在行、列的方格(共 9 个)中任选 1 个,有 9 种选法;

选第 3 个方格,需在除去所选的第 1 和第 2 个方格所在行、列的方格(共 4 个)中任选 1 个,有 4 种选法;

选第 4 个方格,需在除去所选的第 1、第 2 和第 3 个方格所在行、列的方格(共 1 个)中任选 1 个,有 1 种选法.

对于选好的 4 个方格无顺序限制,所以

不同的选法有 $\frac{16 \times 9 \times 4 \times 1}{4!} = 24$ (种).

第二空,由题图可知,各行的数从左往右均依次增大,各列的数从上往下依次增大或不变,所以要使选中方格的 4 个数之和最大,可从右往左从各列中选数字较大的方格,所选方格中的数为 44, 33, 22, 11 和 44, 33, 21, 13, 其和分别为 110 和 111.

又从左往右各列数字的极差分别为 4, 3, 3, 4, 所以按极差从大到小各列选 15, 43, 33, 21, 其和为 112.

比较以上各数,最大的是 112.

5. 64 命题点 ▶ 组合、两个计数原理

【解析】由题知,选修 1 门体育类选修课和 1 门艺术类选修课的所有可能结果有 $C_4^1 C_4^1 = 16$ (种);选修 2 门体育类选修课和 1 门艺术类选修课的所有可能结果有 $C_4^2 C_4^1 = 24$ (种);选修 1 门体育类选修课和 2 门艺术类选修课的所有可能结果有 $C_4^1 C_4^2 = 24$ (种). 所以不同的选课方案共有 $16 + 24 + 24 = 64$ (种).

6. 36 命题点 ▶ 排列组合中的分组分配问题

【解析】此题分两步完成:第一步,将 4 名同学分成 3 组,有 C_4^2 种分法;第二步,将所分 3 组进行排列,有 A_3^3 种排法. 所以不同的安排方法共有 $C_4^2 A_3^3 = 36$ (种).

7. A 命题点 ▶ 二项展开式特定项的系数

【解析】 $(x - \sqrt{x})^4$ 的展开式的通项 $T_{k+1} = C_4^k x^{4-k} (-\sqrt{x})^k = (-1)^k C_4^k x^{4-\frac{k}{2}}$, 令 $4 - \frac{k}{2} =$

3, 解得 $k = 2$, 所以在 $(x - \sqrt{x})^4$ 的展开式中, x^3 的系数为 $(-1)^2 C_4^2 = 6$. 故选 A.

8. C 命题点 ▶ 二项式定理及其应用

【解析】因为 $\left(x + \frac{y^2}{x}\right) (x+y)^5 = x(x+y)^5 +$



$\frac{y^2}{x}(x+y)^5, (x+y)^5$ 的通项为 $C_5^r x^{5-r} y^r (r=0, 1, 2, 3, 4, 5)$, 所以 $x(x+y)^5$ 的展开式中 $x^3 y^3$ 的系数为 $C_5^3 = 10$, $\frac{y^2}{x} \cdot (x+y)^5$ 的展开式中 $x^3 y^3$ 的系数为 $C_5^1 = 5$. 所以 $\left(x + \frac{y^2}{x}\right)(x+y)^5$ 的展开式中 $x^3 y^3$ 的系数为 $10+5=15$. 故选 C.

9. C 命题点 ▶ 利用二项展开式的通项求特定项的系数

【解析】 二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r (\sqrt{x})^{5-r} (-2)^r = C_5^r (-2)^r x^{\frac{5-r}{2}}$.

令 $\frac{5-r}{2} = 2$, 得 $r = 1$, 则 x^2 的系数为 $C_5^1 \times (-2)^1 = -10$, 故选 C.

10. -20 命题点 ▶ 利用二项式定理求特定项的系数

【解析】 $(x-1)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \cdot (-1)^r$ (其中 $0 \leq r \leq 6, r \in \mathbf{N}$),

令 $6-r=3$, 得 $r=3$, 故 x^3 的系数为 $C_6^3 \cdot (-1)^3 = -20$.

11. 5 命题点 ▶ 二项展开式中系数的最大值

【解析】 二项式 $\left(\frac{1}{3}+x\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} x^k$.

$$\text{由} \begin{cases} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} > C_{10}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k}, \\ C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} > C_{10}^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-k}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \frac{29}{4} < k < \frac{33}{4}.$$

又 $k \in \mathbf{N}^*$, 所以 $k=8$.

所以所求系数的最大值为 $C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5$.

12. -28 命题点 ▶ 二项式定理的应用

【解析】 $(x+y)^8$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} y^r$, 所以 $\left(1-\frac{y}{x}\right)(x+y)^8$ 的展开式中 $x^2 y^6$ 的系数为 $C_8^6 + (-1)C_8^5 = -28$.

13. 8 -2 命题点 ▶ 二项式定理

【解析】 (1) $(x-1)^4$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = (-1)^r C_4^r x^{4-r}$,

由 $4-r=1$ 得 $r=3$,

由 $4-r=2$ 得 $r=2$,

所以 $a_2 = 1 \times (-1)^3 C_4^3 + 2 \times (-1)^2 C_4^2 = 8$.

(2) 在多项式中令 $x=0$, 得 $a_0=2$; 令 $x=1$, 得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0$, 所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0-a_0=-2$.