



第1章 集合与常用逻辑

用语、不等式

第1节 集合

刷**基础****1. C 考查点** ▶ 判断元素与集合的关系

【解析】由题得 $A = \{x | (x+2)(x-5) < 0\} = \{x | -2 < x < 5\}$,

结合各选项, A, B, D 错, C 对.

故选 C.

2. C 考查点 ▶ 判断元素与集合的关系、集合与集合的关系

【解析】因为集合 $A = \{0, 1\}$, $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$,

所以 $2 \in B, 3 \in B$, 所以 $\{2, 3\} \subseteq B$, C 选项正确;

0, 1 可以在集合 B 中, 也可以不在集合 B 中, 所以选项 A, B, D 错误.

故选 C.

3. C 考查点 ▶ 判断两个集合的关系

【解析】 $P = \{y | y = e^x + 1\} = \{x | x > 1\}$.

要使 $y = \log_2(x-2)$ 有意义 (提示: 注意集合 M 的代表元素为 x, 所以集合 M 表示的是函数 $y = \log_2(x-2)$ 的定义域), 只需 $x-2 > 0$, 解得 $x > 2$, 故 $M = \{x | x > 2\}$, 则显然有 $M \subseteq P$.

故选 C.

4. B 考查点 ▶ 判断集合的真子集的个数

【解析】由 $x^2 + 2x - 3 = 0$, 整理得 $(x+3) \cdot (x-1) = 0$, 解得 $x = -3$ 或 $x = 1$,

则 $\{-3, 1\} \subseteq A \subsetneq \{-3, -1, 0, 1, 3\}$, 设 $B = \{-3, 1\}$, 所以 $\complement_A B \subsetneq \{-1, 0, 3\}$, 可得满足题意的集合 A 的个数为 $2^3 - 1 = 7$.

故选 B.

知识归纳

对于含有 n 个元素的集合, 其子集个数为 2^n , 真子集个数为 $2^n - 1$, 非空子集个数为 $2^n - 1$, 非空真子集个数为 $2^n - 2$.

5. B 考查点 ▶ 交集的运算、由指数函数的单调性解不等式

【解析】由 $2^x < 10$ 得 $x < \log_2 10$, 所以 $A = (-\infty, \log_2 10)$, 所以 $A \cap B = \{1, 2\}$. 故选 B.

6. B 考查点 ▶ 集合的交、并、补混合运算

【解析】因为全集 $U = \{x | x \in \mathbf{N}, x \leq 9\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 6\}$, $B = \{6, 7, 8\}$, 所以 $(\complement_U B) \cap A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 9\} \cap \{1, 2, 6\} = \{1, 2\}$, B 选项正确.

$(\complement_U A) \cap B = \{0, 3, 4, 5, 7, 8, 9\} \cap \{6, 7, 8\} = \{7, 8\}$; $A \cap B = \{6\}$, $A \cup B = \{1, 2, 6, 7, 8\}$, 则 $\complement_U (A \cap B) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $\complement_U (A \cup B) = \{0, 3, 4, 5, 9\}$.

故选 B.

7. C 考查点 ▶ Venn 图与集合运算

【解析】题图中阴影部分表示 $\complement_{A \cup B} (A \cap B)$.

关键点



$A = \{x \in \mathbf{N} | 3 \leq x < 6\} = \{3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 8\}$, 则 $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 8\}$, $A \cap B = \{3, 4\}$.

故题图中阴影部分表示的集合为 $\{2, 5, 8\}$.

故选 C.

8. B 考查点 ▶ 集合的运算

【解析】依题意, $B = \{-9, -4, 1, 4\}$, 所以

$A \cap B = B = \{-9, -4, 1, 4\}$,

所以 $\complement_A(A \cap B) = \{-2, 2, 3\}$.

故选 B.

9. C 考查点 ▶ 集合运算与解不等式综合

【解析】由 $\frac{x-1}{x-5} \leq 0$ 得 $\begin{cases} (x-1)(x-5) \leq 0, \\ x-5 \neq 0 \end{cases}$

(易错: 注意分母不为 0),

解得 $1 \leq x < 5$.

由 $x^2 - x < 2$ 得 $-1 < x < 2$.

则 $M = \{x | 1 \leq x < 5\}$, $N = \{x | -1 < x < 2\}$,

$M \cap N = \{x | 1 \leq x < 2\}$.

故选 C.

一题多解

(特例法) 观察选项, 取

$x = 0$, 此时 $\frac{0-1}{0-5} = \frac{1}{5} > 0$, 易知 $0 \notin M$, 故可

排除选项 A, B; 取 $x = 3$, 此时 $3^2 - 3 = 6 > 2$,

易知 $3 \notin N$, 故可排除选项 D. 故选 C.

10. BC 考查点 ▶ 判断元素与集合的关系、集合运算

【解析】 $A = \{x | -3 < 2x - 1 < 3\} = \{x | -1 < x < 2\}$.

对于 A, 若 $-1 \notin B$, 则 $-1 \in \complement_{\mathbf{R}} B$, 则根据 $\complement_{\mathbf{R}} B \subseteq A$ 有 $-1 \in A$, 显然矛盾, 故 A 错误;

对于 B, 假设 $2 \notin B$, 则 $2 \in \complement_{\mathbf{R}} B$, 根据 $\complement_{\mathbf{R}} B \subseteq A$ 有 $2 \in A$, 显然矛盾, 则 $2 \in B$, 故 B 正确;

对于 C, 由 A 选项分析知, $-1 \in B$, 则 $-1 \in A \cup B$, 故 C 正确;

对于 D, 显然 $2 \notin A$, 必有 $2 \notin A \cap B$, 故 D 错误.

故选 BC.

11. B 考查点 ▶ 并集运算

【解析】因为 $A = \{x | x = 2 \cdot 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, $B = \{x | x = 2(2k + 1) + 1, k \in \mathbf{Z}\}$ (提示: 注意变为相同结构), 所以 $A \cup B = \{x | x = 2k + 1, k \in \mathbf{Z}\}$, 即 $A \cup B$ 表示全体奇数构成的集合.

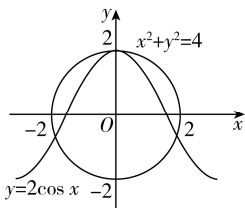
选项 A, D 对应的集合中的元素均为偶数, 故 A, D 错误; 选项 B 对应的集合中的元素是全体偶数减 1 对应的数, 即选项 B 对应的集合由全体奇数组成, 选项 C 对应的集合中的元素是部分奇数, 故 B 正确, C 错误. 故选 B.

12. C 突破点 ▶ 集合的交集运算、判断集合的真子集的个数

【解析】集合 $A = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4\}$ 是坐标平面内, 以原点为圆心, 2 为半径的圆上的点的集合, 集合 $B = \{(x, y) | y = 2\cos x\}$ 是坐标平面内, 函数 $y = 2\cos x$ 图象上的点的集合,



在同一平面直角坐标系内作出圆 $x^2 + y^2 = 4$ 及函数 $y = 2\cos x$ 的部分图象 (提示: 作出图象, 确定 $A \cap B$ 的元素个数即可得解), 如图.



观察图象知, 圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与函数 $y = 2\cos x$ 的图象有 3 个公共点, 所以 $A \cap B$ 中有 3 个元素, 则 $A \cap B$ 有 $2^3 - 1 = 7$ 个真子集.

故选 C.

13. C **考查点** 根据集合的包含关系求参数

【解析】 $A = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\} = \{1, 3\}$, B 中最多只有 2 个元素,

因为 $A \subseteq B$, 所以 $A = B$, 所以 $a = (1-2)^2 = 1$.

故选 C.

14. C **考查点** 根据元素与集合的关系求参数

【解析】 由 $1 \in A$ 得 $a = 1$ 或 $a^2 = 1$, 解得 $a = 1$ 或 $a = -1$,

若 $a = 1$, 则 $a^2 = 1$, 不符合题意 (提示: 注意检验集合元素的互异性);

若 $a = -1$, 则 $A = \{-1, 1\}$, 从而 $A \cup B = \{-1, 1, 4\}$,

所以 $A \cup B$ 中所有元素之和为 4.

故选 C.

15. D **考查点** 根据集合的包含关系求参数

【解析】 $A \cup B = A$ 等价于 $B \subseteq A$,

当 $m = 0$ 时, $B = \emptyset$, 此时 $B \subseteq A$, 符合题意;

当 $m \neq 0$ 时, $B = \left\{\frac{1}{m}\right\}$, 因为 $B \subseteq A$, 所以

$\frac{1}{m} = -1$ 或 $\frac{1}{m} = 2$, 即 $m = -1$ 或 $m = \frac{1}{2}$.

所以所有符合条件的实数 m 组成的集合是 $\left\{-1, 0, \frac{1}{2}\right\}$.

故选 D.

方法总结

根据两集合的关系求参数的方法

已知两个集合之间的关系求参数时, 要注意对含参数的集合是否为空集进行分类讨论, 做到不漏解.

已知两个集合之间的关系求参数时, 要注意对含参数的集合是否为空集进行分类讨论, 做到不漏解.

(1) 若集合中的元素是一一列举的, 依据集合间的关系, 转化为方程(组)求解, 此时注意集合中元素的互异性.

(2) 若集合表示的是不等式的解集, 常借助数轴求解, 此时注意检验端点值能否取到.

**16. AC 突破点** ▶ 根据集合的子集个数求参数

【解析】由题可知集合 A 中只有一个元素.

由 $\frac{x-2}{x^2-a} = 1$, 可得 $\begin{cases} x^2-x+2-a=0, \\ x^2-a \neq 0, \end{cases}$ 当 $\Delta =$

$1-4(2-a) = 0$ 时, 解得 $a = \frac{7}{4}$, 此时 $A =$

$\left\{\frac{1}{2}\right\}$, 符合题意;

当 $\Delta = 1-4(2-a) > 0$, 即 $a > \frac{7}{4}$ 时, 则 $x =$

易错点

\sqrt{a} 或 $x = -\sqrt{a}$ 是方程 $x^2 - x + 2 - a = 0$ 的解.

当 $x = \sqrt{a}$ 是方程 $x^2 - x + 2 - a = 0$ 的解时,

$a - \sqrt{a} + 2 - a = 0$, 解得 $a = 4$, 此时 $A = \{-1\}$, 符合题意;

当 $x = -\sqrt{a}$ 是方程 $x^2 - x + 2 - a = 0$ 的解时,

$a + \sqrt{a} + 2 - a = 0$ 无解. 故 $a = \frac{7}{4}$ 或 $a = 4$.

故选 AC.

17. 1 考查点 ▶ 根据交集、并集运算结果求参数

【解析】由题意得集合 $A = \{x \mid x < -1 \text{ 或 } 0 < x < 1\}$.

因为 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = I$, 所以 $B = \{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$,

则 $-1 + 0 = -m, -1 \times 0 = n$, 解得 $m = 1, n = 0$, 所以 $m + n = 1$.

18. ABD 突破点 ▶ 集合新定义与函数值域综合问题

【解析】当 $x = -1, 0, 1, 2, 3$ 时, $2 - x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$, 故 A 正确; $\{x \mid x = 2k - 1, k \in \mathbf{Z}\}$ 为全体奇数构成的集合, 当 x

为奇数时, $2 - x$ 也为奇数, 故 B 正确;

$\left\{y \mid y = \frac{1}{x-1}\right\} = \{y \mid y \neq 0\}$, 则 $2 \in \{y \mid y \neq$

$0\}$, 但 $2 - 2 = 0 \notin \{y \mid y \neq 0\}$, 故 C 错误;

$\{y \mid y = 1 + \sin x\} = [0, 2]$, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $2 - x \in [0, 2]$, 故 D 正确. 故选 ABD.

19. ACD 突破点 ▶ 集合新定义

【解析】由 MN 的定义得, $M\{1\} = M$ 显然成立, 故 A 正确; 由 MN 的定义得,

$M\{0\} = \{0\} \neq \{1\}$, 故 B 错误; 设 $x \in M,$

$y \in N$, 则 $MN = \{z \mid z = xy, x \in M, y \in N\},$

$NM = \{z \mid z = yx, y \in N, x \in M\}$, 所以 $MN = NM$ 成立, 故 C 正确;

设 $x \in M, y \in N, z \in P$, 则 $MN = \{n \mid n = xy, x \in M, y \in N\},$

所以 $(MN)P = \{t \mid t = nz = xyz, n \in MN, x \in M, y \in N, z \in P\},$

又 $NP = \{m \mid m = yz, y \in N, z \in P\},$

所以 $M(NP) = \{h \mid h = xm = xyz, m \in NP, x \in M, y \in N, z \in P\},$

所以 $(MN)P = M(NP)$ 成立, 故 D 正确. 故选 ACD.

**20. ABD 突破点** ▶ 集合新定义

【解析】当非空数集 A 是 $\{1, 2, 3, 4\}$ 子集中含 1 个元素的子集时, $|A|=1$. 根据 n 阶完美集的定义, 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的元素中大于等于 1 的数有 1, 2, 3, 4, 共 4 个, 所以此时 A 可以是 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}$.

当非空数集 A 是 $\{1, 2, 3, 4\}$ 子集中含 2 个元素的子集时, $|A|=2$. 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的元素中大于等于 2 的数有 2, 3, 4, 共 3 个, 所以此时 A 可以是 $\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$.

当非空数集 A 是 $\{1, 2, 3, 4\}$ 子集中含 3 个元素的子集时, $|A|=3$. 集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的元素中大于等于 3 的数有 3, 4, 共 2 个, 不存在集合 A 满足 n 阶完美集的定义, 所以 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的含 3 个元素的子集不满足.

同理, $\{1, 2, 3, 4\}$ 的含 4 个元素的子集也不满足.

综上, 4 阶完美集有 $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$, 所以 $a_4=7$, 故 A 正确.

若将 n 阶完美集 A 的元素全部加 1, A 中元素个数不变, 但 $\min(A)$ 加 1 变大, 不违背 $(n+1)$ 阶完美集的定义, 所以得到的新集合是 $(n+1)$ 阶完美集, 故 B 正确.

若 $n=4$, 满足条件的集合 A 的个数为 $4+C_3^2=7$, 而 $a_5=5+6+1=12, 7 \neq 12-4$, C 错误.

对于满足 $(n+2)$ 阶完美集的所有 A , $n+2$ 不属于所有 A , 可看作 $(n+1)$ 阶完美集的情况, 总个数为 a_{n+1} .

因为 $|A|>1$, 所以满足条件的集合 A 要排除掉 $(n+1)$ 阶完美集中只含有 1 个元素的情形 (排除 $(n+1)$ 个单元素集合), 因此满足条件的集合 A 的个数为 $a_{n+1}-(n+1)=a_{n+1}-n-1$, D 正确.

故选 ABD.

21. 67 突破点 ▶ 根据交集运算结果求集合元素个数

【解析】设 $S=\{s_1, s_2, \dots, s_k\} (k \geq 2, k \in \mathbf{N}^*)$ 满足题意, 其中 $s_1 < s_2 < \dots < s_k$,

则 $2s_1 < s_1+s_2 < s_1+s_3 < \dots < s_1+s_k < s_2+s_k < s_3+s_k < \dots < s_{k-1}+s_k < 2s_k$,

故 $\text{card}(A) \geq 2k-1$;

$s_1-s_1 < s_2-s_1 < s_3-s_1 < \dots < s_k-s_1$,

故 $\text{card}(B) \geq k$.

因为 $A \cap B = \emptyset$,

所以 $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) \geq 3k-1$,

又 $A \cup B$ 中最小的元素为 0, 最大的元素为 $2s_k$, 所以 $\text{card}(A \cup B) \leq 2s_k+1$,

则 $3k-1 \leq 2s_k+1 \leq 201 (k \geq 2, k \in \mathbf{N}^*)$, 故 $k \leq 67$, 即 $\text{card}(S) \leq 67$.

设 $S=\{m, m+1, m+2, \dots, 100\}, m \in \mathbf{N}$,

则 $A=\{2m, 2m+1, 2m+2, \dots, 200\}, B=$



$\{0, 1, 2, \dots, 100-m\}$,

因为 $A \cap B = \emptyset$, 可得 $100-m < 2m$, 即 $m > \frac{100}{3}$, 又 $m \in \mathbf{N}$,

故 m 的最小值为 34, 于是当 $m = 34$ 时, S 中元素最多,

即 $S = \{34, 35, 36, \dots, 100\}$ 时满足题意, 故 $\text{card}(S)$ 的最大值是 $100-34+1=67$.

22. D 考查点 ▶ 根据集合的包含关系求参数

【解析】因为集合 $A = \{1, a\}$, $B = \{0, 1-a, 2a-1\}$, 且 $A \subseteq B$,

所以 $a=0$ 或 $a=1-a$ 或 $a=2a-1$, 解得

$a=0$ 或 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=1$.

当 $a=0$ 时, $A = \{1, 0\}$, $B = \{0, 1, -1\}$, 符合题意;

当 $a=\frac{1}{2}$ 时, $B = \{0, \frac{1}{2}, 0\}$, 不符合集合

易错点

元素的互异性, 故舍去;

当 $a=1$ 时, $A = \{1, 1\}$, 不符合集合元素的互异性, 故舍去.

综上所述, $a=0$.

故选 D.

易错警示

两个集合都含有参数, 故求出参数值后, 要检查是否满足集合元素的互异性.

23. A 考查点 ▶ 根据集合的包含关系求参数

【解析】因为 $B \cap (\complement_{\mathbf{R}} A) = \emptyset$, 所以 $B \subseteq A$,

由题得 $B = \{x \mid 1-m \leq x \leq 1+m\}$, $A = \{x \mid -2 \leq x \leq 10\}$.

当 $B = \emptyset$ 时, 满足 $B \subseteq A$,

易错点

此时 $1-m > 1+m$, 解得 $m < 0$;

当 $B \neq \emptyset$ 时, 则有
$$\begin{cases} m \geq 0, \\ 1-m \geq -2, \\ 1+m \leq 10, \end{cases}$$

解得 $0 \leq m \leq 3$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 3]$.

故选 A.

易错警示

空集是任何集合的子集, 是任何非空集合的真子集. 当由题目得到 $B \subseteq A$ 时, 应注意讨论 $B = \emptyset$ 和 $B \neq \emptyset$ 这两种情况. 在集合运算中, 需要时刻关注空集的存在, 否则会因遗漏空集而得出错解.

24. B 考查点 ▶ 根据集合的包含关系求参数

【解析】因为 $A \cap B = A$, 所以 $A \subseteq B$,

所以 $a \geq 3$. 故选 B.

易错点

易错警示

根据集合关系求参数范围问题要特别注意端点值是否能取到, 常用方法就是代入端点检验.



第2节 常用逻辑用语

刷

基础

1. A **考查点** ▶ 充分、必要条件的判断, 由对数型函数的单调性求参数

【解析】由函数 $f(x) = \log_{3a-1} x$ 是增函数, 得 $3a-1 > 1$, 解得 $a > \frac{2}{3}$,

故“ $a > 1$ ”是“函数 $f(x) = \log_{3a-1} x$ 为增函数”的充分不必要条件.

故选 A.

方法总结

充分、必要条件的三种判定方法

定义法

(1) 定义法: 根据 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ 是否成立进行判断.

(2) 集合法: 根据 p, q 成立对应的集合之间的包含关系进行判断.

(3) 等价转化法: 对所给题目的条件进行一系列的等价转化, 直到转化成容易判断充分、必要条件是否成立为止.

2. A **考查点** ▶ 充分、必要条件与数列综合

【解析】如果数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 根据等差数列的性质可得 $a_3 + a_9 = 2a_6$,

但 $a_3 + a_9 = 2a_6$ 成立, 不一定有数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,

比如数列 $1, 1, 3, 1, 1, 6, 1, 1, 9$ 满足 $a_3 + a_9 = 2a_6$, 但是该数列不是等差数列 (提示: 说明一个命题是假命题, 举一个反例即可),

所以“数列 $\{a_n\}$ 为等差数列”是“ $a_3 + a_9 = 2a_6$ ”的充分不必要条件.

故选 A.

3. C **考查点** ▶ 充分、必要条件的判断, 线面位置关系

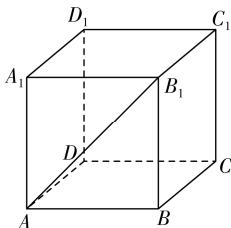
【解析】正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 如图所示, 分别记平面 $ABCD$ 、平面 ADD_1A_1 为平面 α, β ,

则直线 n 为直线 AD , 设直线 m 为直线 AB_1 ,

则 $AB_1 \perp AD$, 但 AB_1 不垂直于平面 ADD_1A_1 , 则由 $m \perp n$ 得不到 $m \perp \beta$.

若 $m \perp \beta$, 因为 $n \subset \beta$, 则由线面垂直的性质可得 $m \perp n$.

故“ $m \perp n$ ”是“ $m \perp \beta$ ”的必要不充分条件, 故选 C.



4. C **考查点** ▶ 充分、必要条件与三角函数综合

【解析】因为 A, B 是 $\triangle ABC$ 的内角, 且 $A > B$,



所以 $0 < B < A < \pi$, 因为 $y = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减, 所以 $\cos A < \cos B$, 故充分性成立;

反之, $y = \cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减, $0 < A < \pi, 0 < B < \pi$,

若 $\cos A < \cos B$, 则 $A > B$, 故必要性成立.

所以在 $\triangle ABC$ 中, “ $A > B$ ” 是 “ $\cos A < \cos B$ ” 的充要条件, 故选 C.

5. D 考查点 ▶ 判断充分不必要条件

【解析】对于 A, 当 $a = 1, b = -1$ 时, 满足 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 但是不符合 $a < b$, 故 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 不是 $a < b$ 的一个充分条件, 故 A 错误;

对于 B, $a^2 + b^2 > 2ab$, 即 $(a - b)^2 > 0$, 即 $a \neq b$, 所以 $a^2 + b^2 > 2ab$ 是 $a < b$ 的必要不充分条件, 故 B 错误;

对于 C, 若 $a < b$, 则 $e^{b-a} > 1$, 故 $e^{b-a} > 1$ 是 $a < b$ 的一个必要条件, 故 C 错误;

对于 D, $\ln(b - a) > 0$, 即 $b - a > 1$, 即 $b > a + 1$, 故 $\ln(b - a) > 0$ 是 $a < b$ 的一个充分不必要条件, 故 D 正确.

故选 D.

6. B 考查点 ▶ 充分、必要条件与向量综合

【解析】由 $|a| = |b|$ 得 $\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{1^2 + m^2}$, 解得 $m = 2$ 或 $m = -2$, A 错误;

由 $a \parallel b$ 得 $2m = -1$, 解得 $m = -\frac{1}{2}$, B 正确;

由 $a \perp b$ 得 $2 - m = 0$, 解得 $m = 2$, C 错误;

由 a 与 b 的夹角为锐角, 得 $a \cdot b > 0$ 且 a 与 b 不共线, 由选项 B 知, $m \neq -\frac{1}{2}$, D 错误.

故选 B.

7. B 考查点 ▶ 根据必要不充分条件求参数、解一元二次不等式

【解析】 $A = \{x | x^2 - 5x - 6 < 0\} = \{x | -1 < x < 6\}$, $B = \{x | (x - \lambda)(x - 2\lambda) < 0\} = \{x | \lambda < x < 2\lambda\}$,

因为 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要不充分条件, 所以 B 是 A 的真子集,

可得 $\begin{cases} -1 \leq \lambda, \\ 2\lambda \leq 6, \end{cases}$ 且等号不同时成立, 结合

$\lambda > 0$, 解得 $0 < \lambda \leq 3$,

所以 λ 的取值范围为 $(0, 3]$,

故选 B.

知识归纳

若 A 是 p 对应的集合, B 是 q 对应的集合, 则有

关系	结论
$A \subseteq B$	p 是 q 的充分条件
$B \subseteq A$	p 是 q 的必要条件
$A \subsetneq B$	p 是 q 的充分不必要条件
$B \subsetneq A$	p 是 q 的必要不充分条件
$A = B$	p 是 q 的充要条件



8. B 考查点 ▶ 判断全称量词命题和存在量词命题的真假

【解析】 $\forall x \in \mathbf{R}, e^x > 0, e^{-x} > 0$, 则 $e^x + e^{-x} \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} = 2$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, 故 p 为真命题;

当 $x \in (0, 10)$ 时, $\sqrt{x(10-x)} \leq \frac{x+10-x}{2} = 5$, 当且仅当 $x = 5$ 时取等号, 故 q 为假命题, $\neg q$ 为真命题 (提示: 命题 p 与 p 的否定的真假性相反),

所以命题 p 与 $\neg q$ 均为真命题, B 正确. 故选 B.

9. A 考查点 ▶ 根据命题的真假求参数, 充分、必要条件的判断

【解析】由 $\frac{1}{a} > 1$, 解得 $0 < a < 1$.

由 $q: \exists x \in \mathbf{R}, ax^2 + 2ax + 1 \leq 0$, 得 $\neg q: \forall x \in \mathbf{R}, ax^2 + 2ax + 1 > 0$,

当 $a = 0$ 时, $1 > 0$ 成立;

当 $a > 0$ 时, $\Delta = 4a^2 - 4a < 0$, 解得 $0 < a < 1$.

综上, $\neg q$ 成立时, $0 \leq a < 1$,

所以 $\frac{1}{a} > 1$ 是 $\neg q$ 成立的充分不必要条件, 故选 A.

10. D 考查点 ▶ 根据命题的真假求参数

【解析】由题意知 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, a \neq e^{|x|}$ 为真命题, 令 $f(x) = e^{|x|}$, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(-x) = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 1$, 故对 $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geq 1$.

若 $a \neq e^{|x|}$, 则直线 $y = a$ 与函数 $f(x) = e^{|x|}$ 的图象没有公共点,

所以 a 的取值范围为 $(-\infty, 1)$.

故选 D.

11. B 考查点 ▶ 根据充分不必要条件求参数

【解析】因为 $y = x^3 + e^x$, 所以 $y' = 3x^2 + e^x$, 则在点 $(0, 1)$ 处的切线斜率 $k = y'|_{x=0} = 1$,

故曲线 $y = x^3 + e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$, 即 $y = x + 1$.

联立 $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = ax^2 + 2ax + 2, \end{cases}$ 得 $ax^2 + (2a - 1)x + 1 = 0$,

因为切线 $y = x + 1$ 与曲线 $y = ax^2 + 2ax + 2$ 没有公共点,

所以方程 $ax^2 + (2a - 1)x + 1 = 0$ 没有实数解.

当 $a = 0$ 时, 方程 $-x + 1 = 0$ 有唯一解, 不满足题意;

当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = (2a - 1)^2 - 4a < 0$, 可得

$$\frac{2 - \sqrt{3}}{2} < a < \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

综上所述, $a \in \left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)$ (提示: 先求充要条件),

结合选项知 $\left(\frac{1}{2}, 1 \right)$ 是 $\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right)$



的真子集,符合题意.

故选 B.

易错警示

注意设问“成立的一个充分不必要条件是”是倒装句,选项是条件,题干是结论. 这类问题一般先找充要条件,再根据集合法寻找正确选项.

第3节 不等关系与一元二次不等式

刷

基础

1. BC 考查点 ▶ 比较两式大小综合问题

【解析】当 $c=0$ 时, $ac^2=bc^2$, 故 A 错误;

由 $a < b$, 得 $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b) \left[\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4} \right] < 0$,

所以 $a^3 < b^3$, 故 B 正确;

由 $c > a > b > 0$, 得 $0 < c-a < c-b$, 所以 $\frac{1}{c-a} > \frac{1}{c-b} > 0$,

又 $a > b > 0$, 所以 $\frac{a}{c-a} > \frac{b}{c-b} > 0$, 因此 $\sqrt{\frac{a}{c-a}} > \sqrt{\frac{b}{c-b}}$, 故 C 正确;

由 $\ln(a+2) < \ln(b+2)$, 得 $0 < a+2 < b+2$, 即 $-2 < a < b$,

当 $a=0, b=1$ 时, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 不成立 (提示: 说明命题不成立时举一个反例即可), 故 D 错误.

故选 BC.

2. D 考查点 ▶ 充要条件与不等式的综合

【解析】当 $a=1, b=-1$ 时, $a > b$ 成立, 但 \sqrt{b} 无意义, 故 $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 不是 $a > b$ 成立的必要条件, 故 A 错误.

当 $a=-2, b=1$ 时, 满足 $|a| > b$, 但 $a > b$ 不成立, 故 $|a| > b$ 不是 $a > b$ 成立的充分条件, 故 B 错误;

当 $a=-3, b=1$ 时, $a^2 > b^2$ 成立, 但 $a > b$ 不成立, 所以 $a^2 > b^2$ 不是 $a > b$ 成立的充分条件, 故 C 错误;

由 $y=2^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 可得 $2^a > 2^b$ 是 $a > b$ 成立的充要条件, 故 D 正确.

故选 D.

3. B 考查点 ▶ 作差法比较大小

【解析】 $a - b = \frac{1}{2} + \ln 2 - \left(\frac{2}{3} + \frac{\ln 3}{2} \right) = -\frac{1}{6} + \ln 2 - \frac{\ln 3}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{2\ln 2 - \ln 3}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{\ln \frac{4}{3}}{2} = \frac{3\ln \frac{4}{3} - 1}{6} = \frac{\ln \frac{64}{27e}}{6} < 0$, 则 $a < b$;

$a - c = \frac{1}{2} + \ln 2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{2\ln 5}{5} \right) = \ln 2 - \frac{2\ln 5}{5} = \frac{5\ln 2 - 2\ln 5}{5} = \frac{\ln 32 - \ln 25}{5} > 0$, 则 $a > c$. 所以 $b > a > c$. 故选 B.

**4. AC** **考查点** ▶ 由不等式的性质比较大小、作差法比较大小

【解析】由 $a > b > 0 > c$, 得 $\frac{b}{a} - \frac{b-c}{a-c} = \frac{b(a-c) - a(b-c)}{a(a-c)} = \frac{(a-b)c}{a(a-c)} < 0$, 则 $\frac{b}{a} < \frac{b-c}{a-c}$, A 正确;

取 $a=2, b=1, c=-3$, 满足 $a > b > 0 > c$, 而 $\frac{1}{a+c} = -1 < -\frac{1}{2} = \frac{1}{b+c}$, B 错误;

由 $a > b > 0 > c$, 得 $a-c > b-c > 0$, 则 $\frac{1}{b-c} > \frac{1}{a-c} > 0$, 故 $\frac{a}{b-c} > \frac{b}{a-c}$, C 正确;

取 $a=2, b=1, c=-3$, 满足 $a > b > 0 > c$, 而 $a + \frac{c}{b} = -1 < -\frac{1}{2} = b + \frac{c}{a}$, D 错误. 故选 AC.

5. C **考查点** ▶ 利用不等式的性质求取值范围

【解析】设 $2x-3y=m(x+y)+n(x-y)$, 则 $2x-3y=(m+n)x+(m-n)y$ (提示: 利用整体思想来表示所求式子, 再结合不等式的性质求解即可),

$$\text{即} \begin{cases} m+n=2, \\ m-n=-3, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} m=-\frac{1}{2}, \\ n=\frac{5}{2}, \end{cases}$$

所以由 $0 < x+y < 5, 2 < x-y < 3$, 可得 $-\frac{5}{2} <$

$$-\frac{1}{2}(x+y) < 0, 5 < \frac{5}{2}(x-y) < \frac{15}{2},$$

$$\text{则} -\frac{5}{2} + 5 < -\frac{1}{2}(x+y) + \frac{5}{2}(x-y) < 0 + \frac{15}{2},$$

$$\text{即} \frac{5}{2} < 2x-3y < \frac{15}{2},$$

故选 C.

6. A **考查点** ▶ 解分式不等式

【解析】根据题意可知, 若 $\frac{x-2}{x} \geq 0$, 可得

$$\left| \frac{x-2}{x} \right| = \frac{x-2}{x} \text{ 恒成立, 不等式无解,}$$

故 $\frac{x-2}{x} < 0$, 即 $x(x-2) < 0$, 解得 $0 < x < 2$.

综上, 该不等式的解集是 $(0, 2)$.

故选 A.

方法总结**分式不等式的类型及解法**

$$(1) \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) > 0.$$

$$(2) \frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) < 0.$$

$$(3) \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \geq 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

$$(4) \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) \leq 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

7. D **突破点** ▶ 由一元二次不等式组的解求参数



【解析】 $x^2 - 2x - 8 > 0$, 即 $(x-4)(x+2) > 0$, 解得 $x < -2$ 或 $x > 4$.

$2x^2 + (2k+7)x + 7k < 0$, 即 $(2x+7) \cdot (x+k) < 0$,

当 $k = \frac{7}{2}$ 时, 不等式 $(2x+7)(x+k) < 0$, 即

$2\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 < 0$, 无解;

当 $k > \frac{7}{2}$ 时, 不等式 $(2x+7)(x+k) < 0$ 的

解集为 $\left(-k, -\frac{7}{2}\right)$,

结合题意, 此时不等式组的解集为

$\left(-k, -\frac{7}{2}\right)$, 且仅有一个整数解,

所以 $-5 \leq -k < -4$, 即 $4 < k \leq 5$;

当 $k < \frac{7}{2}$ 时, 不等式 $(2x+7)(x+k) < 0$ 的

解集为 $\left(-\frac{7}{2}, -k\right)$,

结合题意, 要使不等式组仅有一个整数解, 则 $-3 < -k \leq 5$, 即 $-5 \leq k < 3$.

综上所述, k 的取值范围为 $[-5, 3) \cup (4, 5]$, 故选 D.

方法总结

含有参数的不等式的求

解, 往往需要对参数进行分类讨论.

(1) 若二次项系数为常数, 首先确定二次项系数是否为正数, 再考虑分解因式, 对参数进行分类讨论, 若不易分解因式, 则可依据判别式符号进行分类讨论;

(2) 若二次项系数为参数, 则应先考虑二次项系数是否为零, 确定不等式是不是二次不等式, 再求解;

(3) 对方程的根进行讨论, 比较大小, 以便写出解集.

8. AC 考查点 ▶ 二次函数与一元二次方程、不等式的解的对应关系

【解析】由题意可知
$$\begin{cases} a > 0, \\ -2+1 = -\frac{b}{a}, \\ (-2) \times 1 = \frac{c}{a}, \end{cases} \text{ 则}$$

$\begin{cases} a = b, \\ -2a = c, \end{cases}$ 所以 $b > 0$ 且 $c < 0$, 故 A 正确;

$4a + 2b + c = 4a + 2a - 2a = 4a > 0$, 故 B 错误;

不等式 $bx + c > 0$, 即 $ax - 2a > 0$, 解得 $x > 2$, 故 C 正确;

不等式 $cx^2 - bx + a < 0$, 即 $-2ax^2 - ax + a < 0$, 即 $-a(2x-1)(x+1) < 0$, 又 $a > 0$,

可得 $(2x-1)(x+1) > 0$, 所以 $x > \frac{1}{2}$ 或 $x < -1$, 故 D 错误.

故选 AC.

9. D 考查点 ▶ 一元二次不等式在实数集上恒成立问题

【解析】 \because 不等式 $x^2 - mx + 4 < 0$ 的解集为空集,

\therefore 不等式 $x^2 - mx + 4 \geq 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立,



$\therefore m^2 - 4 \times 1 \times 4 \leq 0, \therefore -4 \leq m \leq 4,$

即 m 的取值范围是 $[-4, 4]$.

故选 D.

10. C 考查点 ▶ 不等式有解问题

【解析】① 当 $m=0$ 时, 不等式化为 $2x < 0$, 解得 $x < 0$, 符合题意;

易错点

② 当 $m > 0$ 时, $y = mx^2 - (m-2)x + m$ 的图象开口向上,

只需 $(m-2)^2 - 4m^2 = -3m^2 - 4m + 4 > 0$, 即

$$0 < m < \frac{2}{3};$$

③ 当 $m < 0$ 时, $y = mx^2 - (m-2)x + m$ 的图象开口向下,

则必存在实数 x , 使得 $mx^2 - (m-2)x + m < 0$ 成立.

综上所述, 实数 m 的取值范围为

$$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right). \text{ 故选 C.}$$

11. $\frac{9}{2}$ 突破点 ▶ 不等式在实数集上恒成立问题

【解析】因为 $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, 则 $f(x+1) = (x+1-a)(x+1-b)(x+1-c)$,

令 $f(x+1) = 0$, 可得 $x = a-1$ 或 $x = b-1$ 或 $x = c-1$,

由于 $a < b < c$, 则 $a-1 < b-1 < c-1$.

$$f(2-x) = (2-x-a)(2-x-b)(2-x-c),$$

$$\text{设 } g(x) = -f(2-x) = (x+a-2)(x+b-2)(x+c-2),$$

令 $g(x) = 0$, 可得 $x = 2-a$ 或 $x = 2-b$ 或 $x = 2-c$,

由于 $a < b < c$, 则 $2-c < 2-b < 2-a$.

由 $f(1+x)f(2-x) \leq 0$, 可得 $f(x+1)g(x) \geq 0$,

若 $c-1 \neq 2-a$, 取 $x_1 = \max\{c-1, 2-a\}$, $x_2 = \min\{c-1, 2-a\}$,

当 $x > x_1$ 时, $f(x+1) > 0, g(x) > 0$, 此时, $f(x+1)g(x) > 0$,

当 $x_2 < x < x_1$ 时, 由穿根法可知, $f(x+1)g(x) < 0$, 矛盾,

所以 $c-1 = 2-a$, 即 $a+c = 3$, 则 $a-1 = 2-c$,

$$\text{所以 } f(x+1)g(x) = [x-(a-1)]^2 \cdot [x-(c-1)]^2 \cdot [x-(b-1)] \cdot [x-(2-b)],$$

因为 $f(x+1)g(x) \geq 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立,

所以 $[x-(b-1)] \cdot [x-(2-b)] \geq 0$ 对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 恒成立, 则 $b-1 = 2-b$, 解得 $b = \frac{3}{2}$,

$$\text{得 } b = \frac{3}{2},$$

$$\text{故 } a+b+c = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

第4节 基本不等式

刷

基础

1. A 考查点 ▶ “1”的代换



【解析】由题可知 $x + \frac{y}{2} = 1$,

$$\text{所以 } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) \left(x + \frac{1}{2}y \right) =$$

$$1 + 1 + \frac{y}{2x} + \frac{2x}{y} \geq 2 + 2\sqrt{\frac{y}{2x} \cdot \frac{2x}{y}} = 4,$$

当且仅当 $x = \frac{1}{2}, y = 1$ 时取等号.

故选 A.

2. B 考查点 ▶ 应用基本不等式求最值

【解析】因为 $\lg m = \log_n 100 = \frac{\lg 100}{\lg n} = \frac{2}{\lg n}$,

所以 $\lg m \cdot \lg n = 2$.

又因为 $m > 1, n > 1$, 所以 $\lg m > 0, \lg n > 0$,

$$\text{则 } \lg(mn) = \lg m + \lg n \geq 2\sqrt{\lg m \cdot \lg n} =$$

$$2\sqrt{2}, \text{ 当且仅当 } m = n = 10^{\sqrt{2}} \text{ 时取等号,}$$

$$\text{所以 } mn \geq 10^{2\sqrt{2}}.$$

故选 B.

3. C 考查点 ▶ 消元法

【解析】由 $5m^2n^2 + n^4 = 1$, 可得 $n \neq 0$,

$$\text{则 } m^2 = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{n^2} - n^2 \right).$$

$$m^2 + n^2 = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{n^2} + 4n^2 \right) \geq \frac{1}{5} \times$$

$$2\sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot 4n^2} = \frac{4}{5},$$

当且仅当 $4n^2 = \frac{1}{n^2}$, 即 $n^2 = \frac{1}{2}$ 时取等号,

即 $n^2 = \frac{1}{2}, m^2 = \frac{3}{10}$ 时, $m^2 + n^2$ 取最小值

$\frac{4}{5}$. 故选 C.

4. B 突破点 ▶ 配凑法、“1”的代换

【解析】因为 $a > 0 > b$, 所以 $-b > 0$,

又 $a - b = 2$, 则 $a + 1 + (-b) = 3$, 即 $\frac{a+1}{3} +$

$$\frac{-b}{3} = 1, \text{ 故 } \frac{1}{a+1} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{(-b)} = \left(\frac{1}{a+1} + \right.$$

$$\left. \frac{1}{-b} \right) \left(\frac{a+1}{3} + \frac{-b}{3} \right) = \frac{1}{3} + \frac{a+1}{3(-b)} + \frac{-b}{3(a+1)} +$$

$$\frac{1}{3} \geq 2\sqrt{\frac{a+1}{3(-b)} \cdot \frac{-b}{3(a+1)}} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3},$$

当且仅当 $a+1 = -b$, 即 $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$ 时,

等号成立,

故 $\frac{1}{a+1} - \frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$,

故选 B.

5. B 突破点 ▶ 构造法

【解析】由 $x + y = \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + 8 (x, y > 0)$, 得

$$x + y - 8 = \frac{1}{x} + \frac{4}{y},$$

$$\text{则 } (x + y - 8)(x + y) = \left(\frac{1}{x} + \frac{4}{y} \right)(x + y) =$$

$$\frac{y}{x} + \frac{4x}{y} + 5 \geq 2\sqrt{\frac{y}{x} \cdot \frac{4x}{y}} + 5 = 9,$$

当且仅当 $\frac{y}{x} = \frac{4x}{y}$, 即 $y = 2x$ 时等号成立.



令 $x+y=t>0$, 则 $t(t-8) \geq 9$, 解得 $t \leq -1$ (舍去) 或 $t \geq 9$,

则 $x+y \geq 9$, 当且仅当 $x=3, y=6$ 时等号成立, 即 $x+y$ 的最小值为 9. 故选 B.

6. $4\sqrt{6}+10$ 突破点 ▶ 配凑法、“1”的代换

【解析】 $\because a>b>0, \therefore a+b>0, a-b>0$.

由 $\frac{6}{a+b} + \frac{2}{a-b} = 1$, 可得 $\frac{6}{a+b} + \frac{4}{2(a-b)} = 1$,

$$\therefore 3a-b = (a+b) + 2(a-b)$$

$$= [(a+b) + 2(a-b)] \left[\frac{6}{a+b} + \frac{4}{2(a-b)} \right]$$

$$= 10 + \frac{12(a-b)}{a+b} + \frac{4(a+b)}{2(a-b)}$$

$$\geq 10 + 2\sqrt{\frac{12(a-b)}{a+b} \cdot \frac{4(a+b)}{2(a-b)}}$$

$$= 10 + 4\sqrt{6},$$

当且仅当 $\frac{12(a-b)}{a+b} = \frac{4(a+b)}{2(a-b)}$ 且 $\frac{6}{a+b} + \frac{2}{a-b} = 1$, 即 $a = 4 + \frac{3\sqrt{6}}{2}, b = 2 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时取等号,

则 $3a-b$ 的最小值为 $4\sqrt{6}+10$.

7. C 考查点 ▶ 基本不等式与数列综合

【解析】因为 $S_5 = \frac{5(a_1+a_5)}{2} = 5a_3 = 15$, 所以

以 $a_3 = 3$,

又 $a_2 + a_4 = 2a_3 = 6$, 所以 $a_2 \cdot a_4 \leq$

$$\left(\frac{a_2+a_4}{2} \right)^2 = 9,$$

当且仅当 $a_2 = a_4 = 3$ 时取等号,

所以 $a_2 \cdot a_4$ 的最大值为 9.

故选 C.

8. D 考查点 ▶ 基本不等式的应用

【解析】令 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$, 显然有 $\frac{1}{a} +$

$\frac{1}{b} \geq 4$, 但 $a^2 + b^2 \neq 1$, 故 A 错误;

当 $a>0, b>0$ 时, $a+b \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$,

故 B 错误;

令 $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$, 显然有 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$, 但

$a+b \neq 1$, 故 C 错误;

当 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 4$ 时, $\frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{2} \geq$

$\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \right)^2 \geq 4$, 则 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 8$, 当且仅当

$a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立,

反过来, 令 $a = \frac{1}{3}, b = 2$, 不等式 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq$

8 成立, 但 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 3.5 < 4$, 故 D 正确.

故选 D.

9. ACD 考查点 ▶ 基本不等式的应用

【解析】对于 A, 因为 $a+b=2 \geq 2\sqrt{ab}$, 所以 $ab \leq 1$, 当且仅当 $a=b=1$ 时取等号, A

正确;

对于 B, $a^2+b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = 2$, 当且仅当 $a=b=1$ 时取等号, B 错误;

对于 C, $\frac{a}{b^2} + \frac{b}{a^2} = \frac{a^3+b^3}{a^2b^2} = \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{a^2b^2} \geq \frac{2ab}{a^2b^2} = \frac{2}{ab} \geq 2$, 当且仅当 $a=b=1$ 时取等号, C 正确;

对于 D, 由 $a>0, b>0, a+b=2$, 知 $0<a<2, 0<b<2$, 所以 $-2<a-b<2$, 所以 $\frac{1}{4} = 2^{-2} < 2^{a-b} < 2^2 = 4$, D 正确.

故选 ACD.

10. ABD 考查点 ▶ 基本不等式的应用

【解析】由 $2x \cdot y \leq \left(\frac{2x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 可得

$xy \leq \frac{1}{8}$, 当且仅当 $\begin{cases} 2x=y, \\ 2x+y=1, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ 时, 等号成立, 故 xy 的最大值

为 $\frac{1}{8}$, A 正确;

由 $1 = (2x+y)^2 = 4x^2+y^2+4xy \leq 4x^2+y^2+(4x^2+y^2) = 2(4x^2+y^2)$, 可得 $4x^2+y^2 \geq$

$\frac{1}{2}$, 当且仅当 $\begin{cases} 2x=y, \\ 2x+y=1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ 时,

等号成立, 故 $4x^2+y^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$, B 正确;

由 $(\sqrt{2x}+\sqrt{y})^2 = 2x+y+2\sqrt{2x \cdot y} \leq 2x+y+(2x+y) = 2(2x+y) = 2$, 可得 $\sqrt{2x}+\sqrt{y} \leq \sqrt{2}$, 当且仅当 $\begin{cases} 2x=y, \\ 2x+y=1, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} x=\frac{1}{4}, \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$ 时, 等号成立, 故 $\sqrt{2x}+\sqrt{y}$ 的最

大值为 $\sqrt{2}$, C 错误;

因为 $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right)(2x+y) = 5 +$

$\frac{2y}{x} + \frac{2x}{y} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2y}{x} \cdot \frac{2x}{y}} = 9$, 当且仅当

$\begin{cases} \frac{2y}{x} = \frac{2x}{y}, \\ 2x+y=1, \end{cases}$ 即 $x=y=\frac{1}{3}$ 时, 等号成立, 故 $\begin{cases} x>0, \\ y>0, \end{cases}$

$\frac{2}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值为 9, D 正确.

故选 ABD.

11. D 考查点 ▶ 利用函数单调性求最值

【解析】令 $\sqrt{x^2+2} = t, t \geq \sqrt{2}$, 则 $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} =$



$$\sqrt{x^2+2} + \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} = t + \frac{1}{t} \quad (\text{易错: 此时若})$$

直接使用基本不等式求解, 会发现当且仅当 $t=1$ 时, 取得最小值 2, 但 $t \geq \sqrt{2}$, 故不能取等号, 即 2 不是所求最小值),

而函数 $y = t + \frac{1}{t}$ 在 $[\sqrt{2}, +\infty)$ 上单调递增,

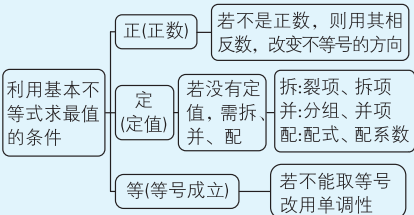
所以当 $t = \sqrt{2}$, 即 $x = 0$ 时, $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}}$ 取得

最小值 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

故选 D.

易错警示

利用基本不等式求最值时, 必须验证等号成立的条件, 若不能取等号, 则这个值就不是所求的最值.



12. $[4, +\infty)$ 考查点 ▶ 基本不等式的应用

【解析】 $x + \frac{4y}{x} + \frac{a^2}{xy} \geq x + 2\sqrt{\frac{4y}{x} \cdot \frac{a^2}{xy}} = x +$

$$\frac{4a}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4a}{x}} = 4\sqrt{a},$$

当且仅当 $\frac{4y}{x} = \frac{a^2}{xy}$ 且 $x = \frac{4a}{x}$, 即 $x = 2\sqrt{a}$,

$y = \frac{a}{2}$ 时, 等号成立,

故 $4\sqrt{a} \geq 8$, 即 $a \geq 4$, 则 a 的取值范围是 $[4, +\infty)$.

易错警示

同一式子中若使用多次基本不等式, 需满足以下两个条件:

- (1) 不等号的方向一致;
- (2) 取等条件一致.

刷

提分

1. BCD 考查点 ▶ 基本不等式的应用

【解析】当 $x = \frac{1}{e}$ 时, $\ln x = -1$, 可得 $y =$

$$\ln x + \frac{4}{\ln x} = -5 < 4, \text{ 所以 } y = \ln x + \frac{4}{\ln x} \text{ 的最}$$

小值不为 4, 故 A 错误;

因为 $2^x > 0, 2^{2-x} > 0$, 所以 $y = 2^x + 2^{2-x} \geq$

$$2\sqrt{2^x \cdot 2^{2-x}} = 4, \text{ 当且仅当 } 2^x = 2^{2-x}, \text{ 即 } x =$$

1 时, 等号成立, 所以 $y = 2^x + 2^{2-x}$ 的最小值为 4, 故 B 正确;

$y = 4|\sin x| + \frac{1}{|\sin x|}$ 中, $0 < |\sin x| \leq 1$, 则

$$y = 4|\sin x| + \frac{1}{|\sin x|} \geq 2 \cdot$$

$$\sqrt{4|\sin x| \cdot \frac{1}{|\sin x|}} = 4, \text{ 当且仅当}$$



$4|\sin x| = \frac{1}{|\sin x|}$, 即 $|\sin x| = \frac{1}{2}$ 时, 等号

成立, 所以 $y = 4|\sin x| + \frac{1}{|\sin x|}$ 的最小值为 4, 故 C 正确;

因为 $y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$, 且

$\sqrt{x^2+1} \geq 1$, 则 $y = \sqrt{x^2+1} + \frac{4}{\sqrt{x^2+1}} \geq$

$2\sqrt{\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}} = 4$, 当且仅当

$\sqrt{x^2+1} = \frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$, 即 $x = \pm\sqrt{3}$ 时, 等号成

立, 所以 $y = \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+1}}$ 的最小值为 4, 故 D

正确.

故选 BCD.

2. D 考查点 ▶ 消元法、基本不等式的应用

【解析】由条件可知, $y = \frac{x^2+1}{x}$, 则 $y^2 = x^2 +$

$\frac{1}{x^2} + 2$,

所以 $x^2 + y^2 = 2x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \geq 2\sqrt{2} + 2$, 当且仅

当 $2x^2 = \frac{1}{x^2}$, 即 $x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, 等号成立, 故

A, B 错误;

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2(x^2+1) + x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 4x^2 + \frac{1}{x^2} + 4 \geq 4 + 4 = 8$,

当且仅当 $4x^2 = \frac{1}{x^2}$, 即 $x^2 = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立,

所以 $|x+y| \geq 2\sqrt{2}$, 故 C 错误, D 正确.

故选 D.

3. A 突破点 ▶ 基本不等式与双曲线综合

【解析】因为双曲线 $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{16} = 1 (a > 0)$ 的

一条渐近线方程为 $y = \frac{a}{4}x = \frac{3}{4}x$, 所以 $a = 3$.

因为点 M 在双曲线的上支, 所以 $|MF_1| - |MF_2| = 2a = 6$, 即 $|MF_1| = |MF_2| + 6$, 可

得 $|MF_1| + \frac{36}{|MF_2|+1} = |MF_2| + 1 +$

$\frac{36}{|MF_2|+1} + 5 \geq 2 \cdot$

$\sqrt{(|MF_2|+1) \cdot \frac{36}{|MF_2|+1}} + 5 = 17$,

当且仅当 $|MF_2|+1 = \frac{36}{|MF_2|+1}$,

即 $|MF_2| = 5$ 时等号成立.

所以 $|MF_1| + \frac{36}{|MF_2|+1}$ 的最小值为 17.

故选 A.

4. B 突破点 ▶ 齐次化思想、换元法



【解析】 $\frac{3x}{y} + \frac{x^2}{xy-y^2} = \frac{3x}{y} + \frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2}{\frac{x}{y}-1}$,

设 $t = \frac{x}{y} - 1$, 由 $x > y > 0$, 可知 $t > 0$,

则 $\frac{3x}{y} + \frac{x^2}{xy-y^2} = 3(t+1) + \frac{(t+1)^2}{t} = 4t + \frac{1}{t} +$

$5 \geq 2\sqrt{4t \cdot \frac{1}{t}} + 5 = 9$,

当且仅当 $4t = \frac{1}{t}$, 即 $t = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ 时, 等号成立. 故选 B.

5. D 突破点 ▶ 基本不等式与解三角形综合

【解析】因为在 $\triangle ABC$ 中, $a^2 + b^2 + ab = c^2$,

所以 $\cos \angle ACB = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2}$,

则 $\angle ACB = 120^\circ$, 故 $\angle ACM = \angle BCM = 60^\circ$.

又 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AMC} + S_{\triangle BMC}$,

则 $\frac{1}{2} CA \times CB \times \sin \angle ACB = \frac{1}{2} CM \times CA \times$

$\sin \angle ACM + \frac{1}{2} CM \times CB \times \sin \angle BCM$,

即 $\frac{1}{2} ba \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 2 \times b \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times$

$2 \times a \times \sin 60^\circ$,

化简得 $ab = 2b + 2a \geq 4\sqrt{ab}$, 即 $ab \geq 16$,

当且仅当 $a = b = 4$ 时, 等号成立.

故 $\vec{AC} \cdot \vec{CB} = -\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -ab \cos \angle ACB =$

$-ab \cos 120^\circ = \frac{1}{2} ab \geq 8$, 当且仅当 $a = b =$

4 时, 等号成立.

故选 D.

6. C 突破点 ▶ “1”的代换

【解析】因为 $3x > y > 0$, 所以 $3x - y > 0$, $2x +$

$3y > 0$. 又 $7x + 5y = (3x - y) + 2(2x + 3y) = 1$,

则 $\frac{1}{3x-y} + \frac{2}{2x+3y} = [(3x-y) + 2(2x +$

$3y)] \left(\frac{1}{3x-y} + \frac{2}{2x+3y} \right) = 5 + \frac{2(2x+3y)}{3x-y} +$

$\frac{2(3x-y)}{2x+3y} \geq 5 + 2\sqrt{\frac{2(2x+3y)}{3x-y} \cdot \frac{2(3x-y)}{2x+3y}} = 9$,

当且仅当 $\begin{cases} \frac{2(2x+3y)}{3x-y} = \frac{2(3x-y)}{2x+3y}, \\ (3x-y) + 2(2x+3y) = 1, \\ 3x > y > 0, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} x = \frac{4}{33}, \\ y = \frac{1}{33} \end{cases}$ 时, 等号成立,

故 $\frac{1}{3x-y} + \frac{2}{2x+3y}$ 的最小值为 9.

故选 C.

7. B 考查点 ▶ 消元法

【解析】由 $2c^2 - bc + 2b^2 - \frac{1}{a} = 0$, 得 $a =$

$\frac{1}{2c^2 - bc + 2b^2}$,

$$\text{所以 } abc = \frac{bc}{2c^2 - bc + 2b^2} = \frac{1}{\frac{2c}{b} - 1 + \frac{2b}{c}} \leq$$

$$\frac{1}{2 \times 2 \sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{b}{c} - 1}} = \frac{1}{3},$$

当且仅当 $\frac{c}{b} = \frac{b}{c}$, 即 $b = c$ 时, 等号成立.

将 $c = b$ 代入 $2c^2 - bc + 2b^2 - \frac{1}{a} = 0$ 中,

$$\text{得 } 2b^2 - b \cdot b + 2b^2 - \frac{1}{a} = 0, \text{ 所以 } a = \frac{1}{3b^2},$$

$$\text{则 } \frac{1}{c} + \frac{5}{b} - 6a = \frac{1}{b} + \frac{5}{b} - \frac{6}{3b^2} = -2 \left(\frac{1}{b} \right)^2 + \frac{6}{b} = -2 \left(\frac{1}{b} - \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{9}{2} \leq \frac{9}{2},$$

当且仅当 $b = \frac{2}{3}$ 时取等号, 所以当 $a =$

$\frac{3}{4}, b = \frac{2}{3}, c = \frac{2}{3}$ 时, $\frac{1}{c} + \frac{5}{b} - 6a$ 取得最大值 $\frac{9}{2}$.

故选 B.

8. AD 突破点 ▶ 应用基本不等式求最值

【解析】由 $16 = ab + 2a + b$, 得 $b = \frac{16 - 2a}{a + 1} =$

$$\frac{18}{a + 1} - 2, \text{ 所以 } 2a + b = 2a + \frac{18}{a + 1} - 2 = 2 \left(a + \right.$$

$$\left. 1 \right) + \frac{18}{a + 1} - 4 \geq 2 \sqrt{2(a + 1) \cdot \frac{18}{a + 1}} - 4 = 8,$$

当且仅当 $2(a + 1) = \frac{18}{a + 1}$, 即 $a = 2, b = 4$ 时

取等号, 所以选项 A 正确.

$$\frac{1}{a + 1} + \frac{1}{b + 2} \geq 2 \sqrt{\frac{1}{a + 1} \cdot \frac{1}{b + 2}} = 2 \cdot$$

$$\sqrt{\frac{1}{ab + 2a + b + 2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ 当且仅当 } a + 1 = b + 2$$

且 $ab + 2a + b = 16$, 即 $a = 3\sqrt{2} - 1, b = 3\sqrt{2} - 2$

时取等号, 故 $\frac{1}{a + 1} + \frac{1}{b + 2}$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$, 所

以选项 B 错误.

因为 $16 = ab + 2a + b \geq ab + 2\sqrt{2ab}$, 当且仅当 $2a = b$, 即 $a = 2, b = 4$ 时取等号, 则 $0 < ab \leq 8$, 所以 ab 的最大值为 8, 所以选项 C 错误.

由选项 A 知 $b = \frac{18}{a + 1} - 2$, 由 $a > 0, b > 0$, 得

$$0 < a < 8, \text{ 所以 } b + \frac{1}{9 - a} = \frac{18}{a + 1} + \frac{1}{9 - a} - 2 =$$

$$\left(\frac{18}{a + 1} + \frac{1}{9 - a} \right) \left(\frac{a + 1}{10} + \frac{9 - a}{10} \right) - 2 =$$

$$\frac{9(9 - a)}{5(a + 1)} + \frac{a + 1}{10(9 - a)} - \frac{1}{10} \geq 2 \sqrt{\frac{9}{50}} - \frac{1}{10} =$$

$$\frac{6\sqrt{2} - 1}{10}, \text{ 当且仅当 } \frac{9(9 - a)}{5(a + 1)} = \frac{a + 1}{10(9 - a)}, \text{ 即}$$

$$a = \frac{163 - 30\sqrt{2}}{17}, b = \frac{3\sqrt{2} - 2}{10} \text{ 时取等号, 故 } b +$$



$\frac{1}{9-a}$ 的最小值为 $\frac{6\sqrt{2}-1}{10}$, 所以选项 D 正确.

故选 AD.

9. $\sqrt[3]{2}$ 突破点 ▶ 应用基本不等式求最值

【解析】由 $a^2c+b^2c=1$ 得 $a^2+b^2=\frac{1}{c}$,

设 $\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right) = M$, 则 $M \geq \frac{1}{a}, M \geq \frac{1}{b}, M \geq \frac{1}{c} = a^2+b^2$, 因为 $a^2+b^2 \geq 2ab$, 当且仅当 $a=b$ 时取等号, 所以 $M \geq 2ab$.

$$3M = 2\sqrt{M} \cdot \sqrt{M} + M \geq 2 \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}} + 2ab =$$

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ab}} + 2ab \geq 3$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot 2ab} = 3\sqrt[3]{2}, \text{ 当且仅当 } a = b = c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ 时, 等号成立.}$$

$$\text{故 } \min\left(\max\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)\right) = \sqrt[3]{2}.$$

10. 8 17 突破点 ▶ 基本不等式的应用

【解析】由 $(x^2+y^2)^3 = 32x^2y^2 \leq 32 \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 = 8(x^2+y^2)^2$, 得 $x^2+y^2 \leq 8$,

当且仅当 $x^2=y^2$ 时取等号, 所以 x^2+y^2 的最大值为 8.

在圆 $x^2+y^2=8$ 上及其内部的整点坐标为 $(-2, 2), (-1, 2), (0, 2), (1, 2), (2, 2), (-2, 1), \dots, (2, -2)$, 共 25 个整点, 验证知这些整点只有坐标轴上除原点外的 8 个整点不符合题意, 所以该四叶玫瑰花瓣曲线及其内部包含的整点的个数为 17.

全章综合训练

刷

真题

1. C 命题点 ▶ 补集的概念及运算

【解析】由题知 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, 所以 $\complement_U A = \{2, 4, 6, 7, 8\}$, 有 5 个元素. 故选 C.

2. D 命题点 ▶ 集合的交集运算

【解析】 $\because A = \{-4, 0, 1, 2, 8\}, B = \{x | x^3 = x\} = \{-1, 0, 1\}, \therefore A \cap B = \{0, 1\}$. 故选 D.

快解

(排除法) 因为 2 不满足 $x^3 = x$, 所以 $2 \notin B$, 故 $2 \notin (A \cap B)$, 排除 A, B, C. 故选 D.

3. C 命题点 ▶ 集合的并集运算

【解析】因为集合 $M = \{x | -3 < x < 1\}, N = \{x | -1 \leq x < 4\}$, 所以 $M \cup N = \{x | -3 < x < 4\}$. 故选 C.

4. D 命题点 ▶ 集合的交集、补集运算

【解析】 $\because A = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}, \therefore B = \{x | \sqrt{x} \in A\} = \{1, 4, 9, 16, 25, 81\}, \therefore A \cap B = \{1, 4, 9\}, \therefore \complement_A (A \cap B) = \{2, 3, 5\}$, 故



选 D.

- 5. C 命题点** 一元二次不等式的解法及集合的交集运算

【解析】由 $x^2 - x - 6 \geq 0$, 得 $x \leq -2$ 或 $x \geq 3$, 则 $N = \{x | x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3\}$. $\because M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $\therefore M \cap N = \{-2\}$, 故选 C.

- 6. B 命题点** 集合之间的包含关系

【解析】由题意知 $0 \in B$. 当 $a - 2 = 0$ 时, 即 $a = 2$, 此时 $A = \{0, -2\}$, $B = \{1, 0, 2\}$, $A \not\subseteq B$, 不符合题意. 当 $2a - 2 = 0$ 时, 即 $a = 1$, 此时 $A = \{0, -1\}$, $B = \{1, -1, 0\}$, 满足 $A \subseteq B$, 所以 $a = 1$, 故选 B.

- 7. A 命题点** 集合的基本运算

【解析】因为 $M = \{x | x < 1\}$, $N = \{x | -1 < x < 2\}$, 所以 $M \cup N = \{x | x < 2\}$, $\complement_U M = \{x | x \geq 1\}$, $M \cap N = \{x | -1 < x < 1\}$, $\complement_U N = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 所以 $\complement_U (M \cup N) = \{x | x \geq 2\}$, $N \cup \complement_U M = \{x | x > -1\}$, $\complement_U (M \cap N) = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$, $M \cup \complement_U N = \{x | x < 1 \text{ 或 } x \geq 2\}$, 故选 A.

- 8. A 命题点** 集合的补集与并集运算

【解析】因为 $U = \{x | x = 3k \text{ 或 } x = 3k + 1 \text{ 或 } x = 3k + 2, k \in \mathbf{Z}\}$, 所以 $\complement_U (M \cup N) = \{x | x = 3k, k \in \mathbf{Z}\}$, 故选 A.

- 9. A 命题点** 集合的补集及并集运算

【解析】因为全集 $U = \{0, 1, 2, 4, 6, 8\}$, 集合 $N = \{0, 1, 6\}$, 所以 $\complement_U N = \{2, 4, 8\}$. 因为 $M = \{0, 4, 6\}$, 所以 $M \cup \complement_U N = \{0, 2, 4, 6, 8\}$. 故选 A.

- 10. D 命题点** 不等式的解法、集合的交集运算

【解析】 $M = \{x | \sqrt{x} < 4\} = \{x | 0 \leq x < 16\}$, $N = \{x | 3x \geq 1\} = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{3}\right\}$, 所以 $M \cap N = \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 16\right\}$, 故选 D.

- 11. B 命题点** 集合的基本运算

【解析】由 $|x - 1| \leq 1$, 得 $-1 \leq x - 1 \leq 1$, 解得 $0 \leq x \leq 2$, 所以 $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2\}$, 故选 B.

- 12. A 命题点** 集合的基本运算

【解析】因为 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\complement_U M = \{1, 3\}$, 则 $2, 4, 5 \in M$. 故选 A.

- 13. C 命题点** 集合的表示及交集运算

【解析】由题意得, 集合 $S = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$, $T = \{\dots, -3, 1, 5, 9, \dots\}$, 所以 $T \subsetneq S$, 则 $S \cap T = T$. 故选 C.

- 14. A 命题点** 三角函数的取值、充分必要条件的判断

【解析】充分性: 当 $x = 0$ 时, $\sin 2x = \sin 0 = 0$, 故充分性成立;

必要性: 当 $\sin 2x = 0$ 时, $2x = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, x 的可能取值为

$0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \pi, \dots$, 故必要性不成立. 故选 A.

**15. B 命题点** ▶ 判断命题的真假

【解析】对于命题 p , 当 $x = -1$ 时, $|x+1| = 0 < 1$, 所以 p 是假命题, $\neg p$ 是真命题. 对于命题 q , 若 $x^3 = x$, 则 $x = -1, 0, 1$, 所以满足“ $\exists x > 0, x^3 = x$ ”, 故 q 是真命题, $\neg q$ 是假命题, 故选 B.

16. B 命题点 ▶ 充分、必要条件, 向量的运算

【解析】 $\because (a+b) \cdot (a-b) = 0, \therefore a^2 - b^2 = 0, \therefore a^2 = b^2$, 则 $|a| = |b|$, 不能得到 $a = b$ 或 $a = -b$, 充分性不成立; 若 $a = b$ 或 $a = -b$, 则 $(a+b) \cdot (a-b) = 0$ 成立, 必要性成立. 所以“ $(a+b) \cdot (a-b) = 0$ ”是“ $a = -b$ 或 $a = b$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

17. C 命题点 ▶ 向量的位置关系与坐标表示、充分必要条件

【解析】由题可得 $a = (x+1, x), b = (x, 2), a \perp b$ 的充要条件为 $a \cdot b = 0$, 即 $(x+1) \cdot x + 2x = 0$, 解得 $x = 0$ 或 $x = -3$, 故 A 错误, C 正确. $a \parallel b$ 的充要条件为 $2(x+1) = x^2$, 即 $x^2 - 2x - 2 = 0$, 解得 $x = 1 \pm \sqrt{3}$, 故 B, D 错误. 故选 C.

18. C 命题点 ▶ 等差数列的判断, 充分、必要条件的判断

【解析】充分性: 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其公差为 d (常数), 则 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d, \therefore \frac{S_n}{n} = a_1 + \frac{n-1}{2}d$, 则 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \left(a_1 + \frac{n}{2}d\right) - \left(a_1 + \frac{n-1}{2}d\right) = \frac{d}{2}$ (常数), 故数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 $\frac{d}{2}$ 的等差数列, 充分性成立;

必要性: 若数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 设其

公差为 d' (常数), 则 $\frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} + (n-1)d'$,

当 $n = 1$ 时, $\frac{S_1}{1} = a_1, \therefore S_n = na_1 + n(n-1)d'$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = [na_1 + n(n-1)d'] - [(n-1)a_1 + (n-1)(n-2) \cdot d'] = a_1 + 2(n-1)d'$, 当 $n = 1$ 时, a_1 符合上式, 显然数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公差为 $2d'$ 的等差数列, 因此必要性成立. 故甲是乙的充要条件. 故选 C.

19. B 命题点 ▶ 充分条件和必要条件的判断

【解析】由 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$, 得 $\sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta$, 所以 $\sin \alpha = \cos \beta$ 或 $\sin \alpha = -\cos \beta$ (易错: 注意等式两边开方后会有两种情况), 充分性不成立. 由 $\sin \alpha + \cos \beta = 0$, 得 $\sin \alpha = -\cos \beta$, 即 $\sin^2 \alpha = \cos^2 \beta$, 又 $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$, 所以 $\sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta$, 即 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$, 必要性成立. 所以“ $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1$ ”是“ $\sin \alpha + \cos \beta = 0$ ”的必要不充分条件, 即



甲是乙的必要条件但不是充分条件. 故选 B.

20. C 命题点 ▶ 分式不等式的求解

【解析】因为 $\frac{x-4}{x-1} \geq 2$, 所以 $\frac{x-4}{x-1} - 2 \geq 0$, 故

有 $\frac{-x-2}{x-1} \geq 0$, 即 $\frac{x+2}{x-1} \leq 0$, 等价于

$\begin{cases} (x+2)(x-1) \leq 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases}$ 解得 $-2 \leq x < 1$, 故原

不等式的解集是 $\{x | -2 \leq x < 1\}$. 故选 C.

快解

$x-1$ 作为分母, 故 $x \neq 1$, 排除 A.

当 $x=0$ 时, 左边 $= 4 \geq 2$ 成立, 故 $x=0$ 是不等式的一个解, 排除 B, D. 故选 C.

21. D 命题点 ▶ 绝对值不等式恒成立问题与函数图象的应用

【解析】不等式 $a|x-b| + |x-4| - |2x-5| \geq 0$

等价于 $a|x-b| \geq |2x-5| - |x-4|$, 令 $f(x) =$

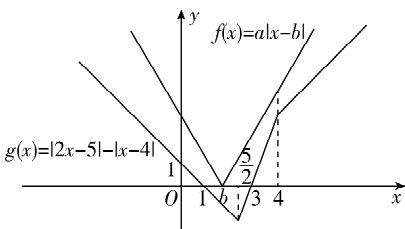
$a|x-b|$, $g(x) = |2x-5| - |x-4|$, 则 $g(x) =$

$$|2x-5| - |x-4| = \begin{cases} -x+1, & x \leq \frac{5}{2}, \\ 3x-9, & \frac{5}{2} < x \leq 4, \\ x-1, & x > 4, \end{cases} \text{ 由此}$$

根据题意画出 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 的图象, 如图所示, 由图易知

$$\begin{cases} -a \leq -1, \\ 1 \leq b \leq 3, \\ f(4) \geq g(4), \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a \geq 1, \\ 1 \leq b \leq 3, \\ a|4-b| \geq 3, \end{cases} \text{ 结合选}$$

项可知只有选项 D 满足, 故选 D.



22. A 命题点 ▶ 充分条件、必要条件的判断

【解析】由 $a^2 > a$, 即 $a^2 - a > 0$, 得 $a < 0$ 或 $a > 1$, 所以“ $a > 1$ ”是“ $a^2 > a$ ”的充分不必要条件, 故选 A.

23. B 命题点 ▶ 利用对数函数与指数函数的性质比较大小

【解析】因为 $a = \log_2 0.2 < \log_2 1 = 0$, $b = 2^{0.2} > 2^0 = 1$, $0 < c = 0.2^{0.3} < 0.2^0 = 1$, 所以 $a < c < b$, 故选 B.

24. C 命题点 ▶ 不等式的性质、构造函数

【解析】对于 A, $\because a > b, \therefore a - b > 0$, 但 $a - b$ 不一定大于 1, 故 $\ln(a - b) > 0$ 不一定成立, 故 A 不正确.

对于 B, $\because y = 3^x$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, \therefore 当 $a > b$ 时, $3^a > 3^b$, 故 B 不正确.

对于 C, $\because y = x^3$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, 且 $a > b, \therefore a^3 > b^3$, 故 C 正确.

对于 D, 由 $a > b$ 不一定得到 $|a| > |b|$, 如

易错点

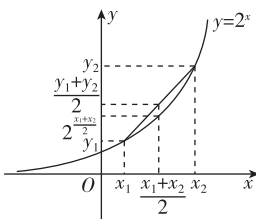
$a = 3, b = -5$. 故选 C.

**25. B** 命题点 ▶ 指数运算、基本不等式

【解析】 $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} = \log_2 \frac{2^{x_1}+2^{x_2}}{2} \geq \log_2 \sqrt{2^{x_1} \cdot 2^{x_2}} = \log_2 2^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{x_1+x_2}{2}$,
 $\because x_1 \neq x_2, \therefore$ 等号取不到, 即 $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} > \frac{x_1+x_2}{2}$. 故选 B.

一题多解作出函数 $y=2^x$ 的大致图象如图所示, 由图及题意知 $\frac{y_1+y_2}{2} > 2^{\frac{x_1+x_2}{2}}$ (提示: 数形结合求解), 即 $\log_2 \frac{y_1+y_2}{2} > \frac{x_1+x_2}{2}$

, 故选 B.

**26. BC** 命题点 ▶ 不等式的性质、基本不等式

【解析】对于 A, B: 由 $x^2+y^2-xy=1$, 得 $(x+y)^2 - 3xy = 1$, 而 $xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$, 所以 $(x+y)^2 - 3 \left[\frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4} \right] = 1$, 即 $1 = \frac{(x+y)^2}{4} + \frac{3(x-y)^2}{4} \geq \frac{(x+y)^2}{4}$, 所以 $-2 \leq x+y \leq 2$, 所以 A 不正确, B 正确;

对于 C, D: 由 $x^2+y^2-xy=1$, 得 $x^2+y^2-1=xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, 当且仅当 $x=y$ 时等号成立, 所以 $x^2+y^2 \leq 2$, 所以 C 正确; 当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}, y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $x^2+y^2 < 1$, 所以 D 不正确. 故选 BC.

27. ABD 命题点 ▶ 基本不等式的应用

【解析】由 $a>0, b>0, a+b=1$, 得 $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, 即 $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 A 正确;

由 $a>0, b>0, a+b=1$, 得 $a-b=2a-1 > -1$, 故 $2^{a-b} > \frac{1}{2}$, 故 B 正确;

$\log_2 a + \log_2 b = \log_2(ab) \leq \log_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \log_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -2$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 C 错误;



$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab} = 1 + 2\sqrt{ab} \leq 1 + a + b = 2$, 得 $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2}$, 当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 D 正确. 故选 ABD.

28. 2 $\sqrt{2}$ 命题点 ▶ 基本不等式

【解析】由题意可知, $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b \geq 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{a}{b^2}} + b \geq 2\sqrt{\frac{2}{b} \cdot b} = 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $\frac{1}{a} = \frac{a}{b^2}$ 时, 第一个“=”成立, 当且仅当 $\frac{2}{b} = b$ 时, 第二个“=”成立, 即 $a = b = \sqrt{2}$ 时, 等号同时成立, $\frac{1}{a} + \frac{a}{b^2} + b$ 取得最小值, 为 $2\sqrt{2}$.

29. 4 命题点 ▶ 基本不等式的应用

【解析】由已知得, $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b} = \frac{a+b}{2ab} + \frac{8}{a+b} = \frac{a+b}{2} + \frac{8}{a+b} \geq 2\sqrt{\frac{a+b}{2} \cdot \frac{8}{a+b}} = 4$, 当且仅当 $\frac{a+b}{2} = \frac{8}{a+b}$ 且 $ab = 1$, 即 $\begin{cases} a = 2 + \sqrt{3} \\ b = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = 2 - \sqrt{3} \\ b = 2 + \sqrt{3} \end{cases}$ 时取等号, 故 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{8}{a+b}$ 的最小值为 4.