# **第3章** 导数及其应用

1. （多选）[全国二2025·10]已知是定义在**R**上的奇函数，且当时，则（ ）

A． B．当时，

C．当且仅当 D．是的极大值点

【答案】ABD

【详解】因为是定义在**R**上的奇函数，所以，故A正确；

当时，，故B正确：

，故C错；

当时，, 所以是的极小值点，由对称性可知是的极大值点.，故D正确.

1. [全国一2025·12]若直线是曲线的切线，则 .

【答案】

【详解】法一：对于，其导数为，

因为直线是曲线的切线，直线的斜率为2，

令，即，解得，

将代入切线方程，可得，所以切点坐标为，

因为切点在曲线上，所以，即，解得.

法二：对于，其导数为，

假设与的切点为，则，解得.

1. [全国二2025·13]若是的极值点，则\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】-4

【详解】,所以=0, 即, 所以.

1. [全国一2025·19]设函数．

(1)求在的最大值；

(2)给定,设为实数，证明：存在,使得;

(3)若存在使得对任意,都有,求的最小值．

【详解】(1)设,当时，

又

所以



设,则令得，故在上单调递增，在上单调递减，所以在上的最大值为=，即在上的最大值为.

(2)证明：假设结论不成立，即对任意, 均有,

即对任意,

因为，所以形如的区间两两交集均为空集，

所以只需使得,

故存在整数,使得,所以,与的存在性矛盾，故假设不成立，原命题得证.

(3)记，

因为，

故为周期函数且周期为,故只需讨论的情况.

当时，，

当时，，此时，

由（1）可知时，在和上递减，在上递增，

且

，

当，在（2）中取，则存在，使得，

取，则，取即，

故，故，

综上，可取，使得等号成立.

综上，.

1. [全国二2025·18]已知函数，其中．

(1)证明：在区间存在唯一的极值点和唯一的零点；

(2)设分别为在区间的极值点和零点.

（i）设函数·证明：在区间单调递减；

（ii）比较与的大小，并证明你的结论．

【详解】（1）由题得，

因为，所以，设，

则在上恒成立，所以在上单调递减，

，令，

所以当时，，则；当时，，则，

所以在上单调递增，在上单调递减，

所以在上存在唯一极值点，

对函数有在上恒成立，

所以在上单调递减，

所以在上恒成立，

又因为，时，

所以时，

所以存在唯一使得，即在上存在唯一零点.

（2）（i）由（1）知，则，，

则



，

因为，所以，所以，

所以， 所以函数在区间上单调递减；

（ii），证明如下：

由（i）知：函数在区间上单调递减，

所以即，又，

由（1）可知在上单调递减，，且对任意，，

所以.

1. [天津2025·20]已知，函数．

（Ⅰ）当时，求函数在点处的切线方程；

（Ⅱ）已知有3个零点，且．

（i）求的取值范围；

（ii）求证：．

【详解】（Ⅰ）当时，，，

则，则，且，则切点，且切线的斜率为，

故函数在点处的切线方程为；

（Ⅱ）（i）定义域为，由，得，

令，则，

令，即或，解得或，

当时，在(0,1)上单调递减；

当时，在()上单调递增；

当时，在()上单调递减；

又，当时当时，所以要使有3个零点，则.

（ii）由，可得因为在上单调递减，在上单调递增，在上单调递减，所以

，由，得

设，则，

因为在上单调递减，所以因为，所以.由的性质可知，所以

，即.

要证即证，

即证，由可得，

因为，所以，

，易知在单调递增，而，

综上

1. [上海2025·19]函数

(1)若，解不等式,

(2)若有极大值，求的范围.

【答案】（1）；（2）

【详解】(1)由题意，,

故,

设, 由与均为增函数，故为增函数，

由得, 故解集为；

(2)由题意，,

故分类讨论，当时，,

故在单调递减，在单调递增，故无极大值不成立；

当时，分类讨论，

当时，恒成立，在单调递增，故无极大值不成立；

当时，或,

在和单调递增，在单调递减，故在处取得极大值；

当时，或,

在和单调递增，在单调递减，故在处取得极大值.

综上，