# 第8章 立体几何

1.[天津2025·4]已知为直线，为平面，则下列说法正确的是（ ）

A．若， 则

B．若， 则

C．若， 则

D．若，则

【答案】C

【详解】对于A，若，则直线与可能平行，也可能垂直，还可能异面，故A错误；对于B，若，则，故B错误；对于C，若，则，故C正确；对于D，若，则直线与平面可能垂直，也可能平行还可能在平面内，故D错误．故选C．

2.（多选）[全国一2025·9]在正三棱柱中，为中点，则（ ）

A． B．平面

C． D．平面

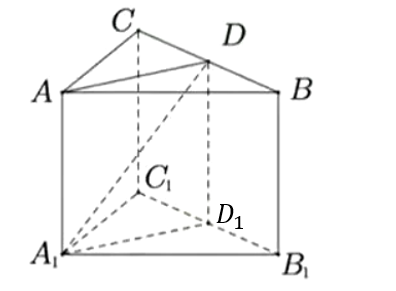
【答案】BD

【详解】易知平面, 若, 则平面(或在该平面内)，显然不成立，故A选项错误.

因为，，，平面，所以, 故B选项正确.

取中点，连接，，显然过点且与平行的线为，而非, 故选项错误.

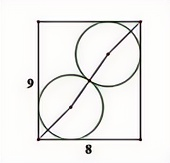
因为，平面，面，所以平面，D选项正确.故本题正确选项为BD.



3.[全国二2025·14]一个底面半径为，高为的封闭圆柱形容器（容器壁厚度忽略不计）内有两个半径相等的铁球，则铁球半径的最大值为 ．

【答案】

【详解】作出轴截面如下：

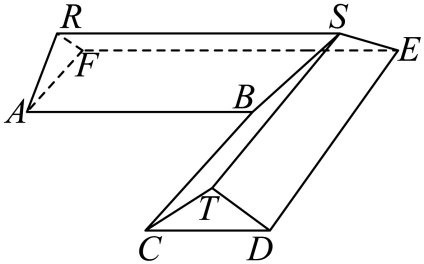


由于两个球的半径相等，则上图两圆的切点显然是矩形中点，设球的半径为, 则有

解得或（舍去），所以半径的最大值为.

4.[北京2025·14]某科技兴趣小组通过3D打印机的一个零件可以抽象为如图所示的多面体，其中ABCDEF是一个平行多边形，平面平面ABC，平面平面ABC，，，

若，则该多面体的体积为 ．



【答案】

【详解】∵*AB*∥*EF*∥*CD*，*AF*∥*BC*∥*ED*，且*AB*⊥*BC*，

可得*BC*⊥*CD*，*CD*⊥*DE*，*DE*⊥*EF*，*EF*⊥*AF*，*AF*⊥*AB*，

延长*CB*与*EF*相交于点*N*，延长*AB*与*ED*相交于点*M*，

所以*AM*⊥*ED*，*CN*⊥*EF*，

所以四边形*ABNF*和四边形*CDMB*为矩形，所以*AF*＝*CD*＝*BM*＝*BN*，

所以四边形*BNME*为正方形，所以*BM*＝*ME*＝*EN*＝*BN*＝*AF*＝*CD*＝4，

即*EF*＝*DE*＝12，由此可得组合体关于平面*SBE*对称；

过点*B*作*BQ*∥*AR*，交*RS*于点*Q*，连接*QN*，过点*B*作*BP*∥*CT*，交*TS*于点*P*，连接*PM*，

所以平面*ARF*∥平面*BQN*，平面*CDT*∥*BMP*，

所以组合体体积可以分为*V*＝*VAFR*﹣*BNQ*+*VCDN﹣BMP*+*VS﹣BMEN*+*VS﹣BMP*+*VS﹣BNQ*，

①求解三棱柱*AFR﹣BNQ*和*CDN﹣BMP*的体积：

因为平面*ARF*⊥平面*ABC*，平面*ARF*∩平面*ABC*＝*AF*，*AB*⊥*AF*，

所以三棱柱*AFR﹣BNQ*为直三棱柱（三棱柱*CDN﹣BMP*同理），

所以*VAFR﹣BNQ＝VCDN﹣BMP＝S*△*ARF* •|*AB*|48＝24；

②求解四棱锥*S﹣BMEN*的体积：

由组合体关于平面*SBE*对称，所以平面*SDE*⊥平面*BMEN*，

作*RS*在底面*ABEF*的投影，因为*AR*＝*FR*，平面*ARF*⊥平面*ABC*，所以*R*在底面的投影为*AF*中点，

又因为平面*SDE*⊥平面*BMEN*，所以*S*在底面的投影为*BE*的中点*O*，*SO*即为，

所以*VS﹣BMEN*8；

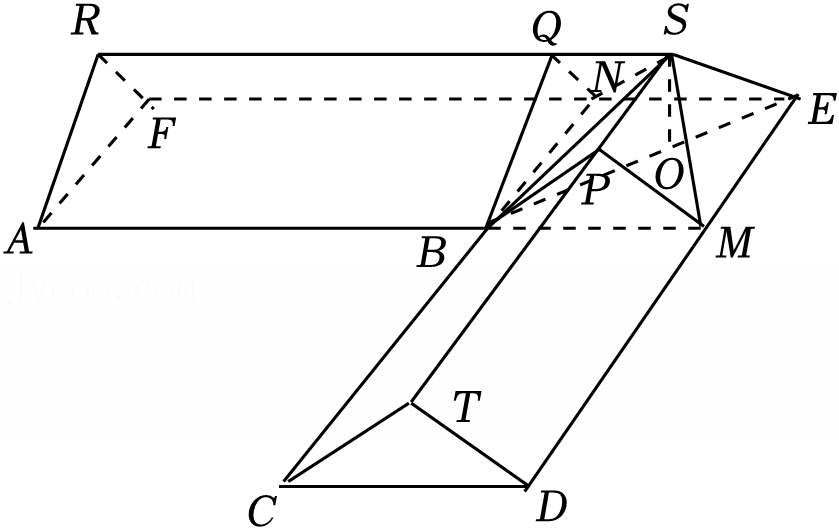
③求解三棱锥*S﹣BMP*和三棱锥*S﹣BNQ*的体积：

因为*AB*⊥平面*ARF*，*AB*∥*RQ*，平面*ARF*∥平面*BQN*，

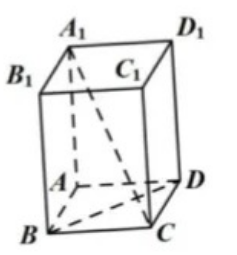
所以平面*BQN*⊥*RS*，所以*QS*即为三棱锥*S﹣BNQ*的高，*QSNE*＝2，

所以*VS﹣BMP*＝*VS﹣BNQ*42＝2；

综上，组合体体积为24+24+8+2+2＝60．



5.[上海2025·7]如图，正四棱柱, 四棱柱体积为\_\_\_\_\_\_\_.



【答案】112

【详解】由题意，.

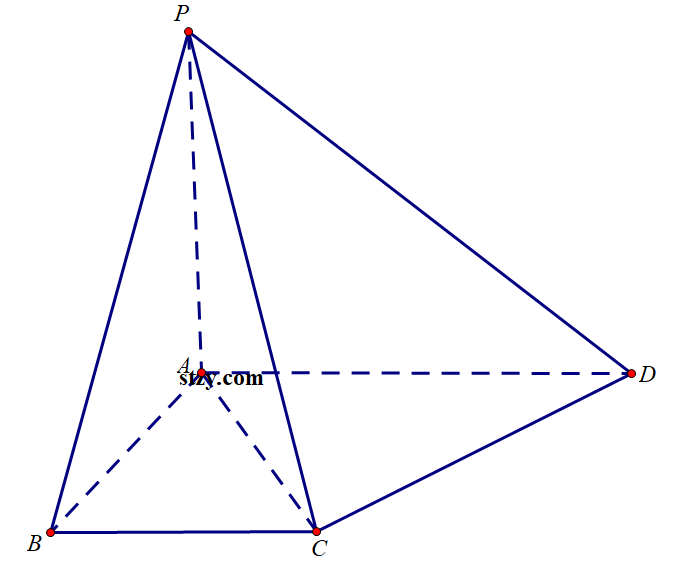
6.[全国一2025·17]如图所示的四棱锥中，面,．

(1)求证：平面平面；

(2)若，若四点在同一球面上，设该球面的球心为O．

①证明：点O在平面上；

②求直线与直线所成角的余弦值．



(1)【证明】由平面可得,

又, 所以平面, 故平面平面.

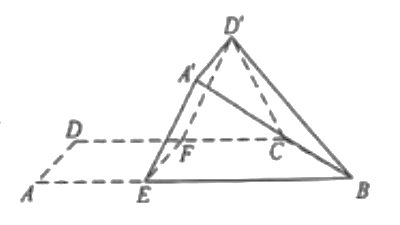
(2)【解】易知两两垂直，以为坐标原点，方向为轴正方向，方向为轴正方向，方向为轴正方向建立空间直角坐标系，易得,

(i)设球心, 由可得解得, 显然点为直线上的点，在平面上

(ⅱ),直线与所成角的余弦值等于



7.[全国二2025·17]如图，在四边形中，，F为CD的中点，点E在AB上，，，将四边形沿翻折至四边形，使得面与面EFCB所成的二面角为．



(1)证明:平面；

(2)求面与面所成的二面角的正弦值．

（1）【证明】设，所以，因为为中点，所以，因为，，所以是平行四边形， 所以，所以，

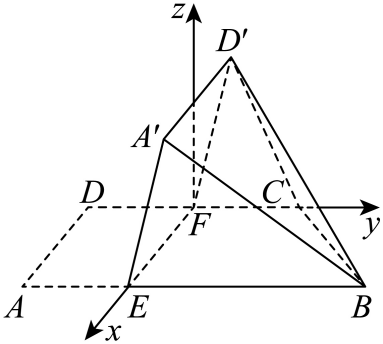
因为平面平面，所以平面，

因为平面平面，所以平面，

又，平面，所以平面平面，

又平面，所以平面．

（2）【解】



因为，所以，又因为，所以，

以为原点，以及垂直于平面的直线分别为轴，建立空间直角坐标系.

因为，平面与平面所成二面角为60° ，

所以.

则，，，，，.

所以.

设平面的法向量为，则

，所以，令，则，则.

设平面的法向量为，

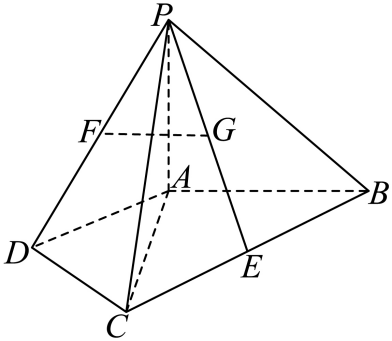
则，所以，

令，则，所以.

所以.

所以平面与平面夹角的正弦值为.

8.[北京2025·17]四棱锥中，与为等腰直角三角形，，*E*为*BC*的中点．



(1)*F*为的中点，*G*为*PE*的中点，证明：面*PAB*；

(2)若面*ABCD*，，求*AB*与面*PCD*所成角的正弦值．

（1）【证明】取*PA*的中点*N*，*PB*的中点*M*，连接*FN*，*MN*，

∵△*ACD*与△*ABC*为等腰直角三角形，∠*ADC*＝90°，∠*BAC*＝90°，

不妨设*AD*＝*CD*＝2，∴，

∴*BC*＝4，

∵*E*，*F*分别为*BC*，*PD*的中点，

∴2，

∴*GM*＝1，

∵∠*DAC*＝45°，∠*ACB*＝45°，

∴*AD*∥*BC*，

∴*FN*∥*GM*，

∴四边形*FGMN*为平行四边形，

∴*FG*∥*MN*，

∵*FG*⊄平面*PAB*，*MN*⊂平面*PAB*，

∴*FG*∥平面*PAB*.

（2）【解】∵*PA*⊥平面*ABCD*，

∴以*A*为原点，*AC*，*AB*，*AP*所在直线分别为*x*，*y*，*z*轴建立如图所示的空间直角坐标系，

设*AD*＝*CD*＝2，则*A*（0，0，0），*B*（0，2，0），，，

∴，，，

设平面PCD的一个法向量为，

∴，∴，

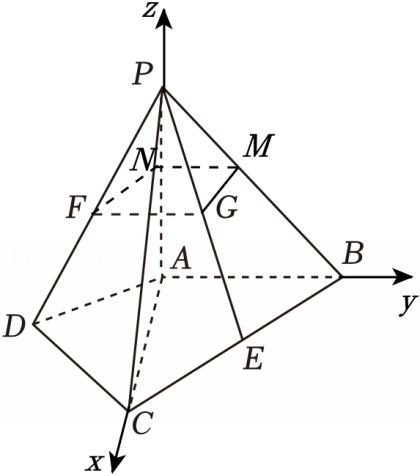
取*x*＝1，∴*y*＝﹣1，*z*＝1，

∴（1，﹣1，1），

设*AB*与平面*PCD*成的角为*θ*，

则，

即*AB*与平面*PCD*成角的正弦值为．

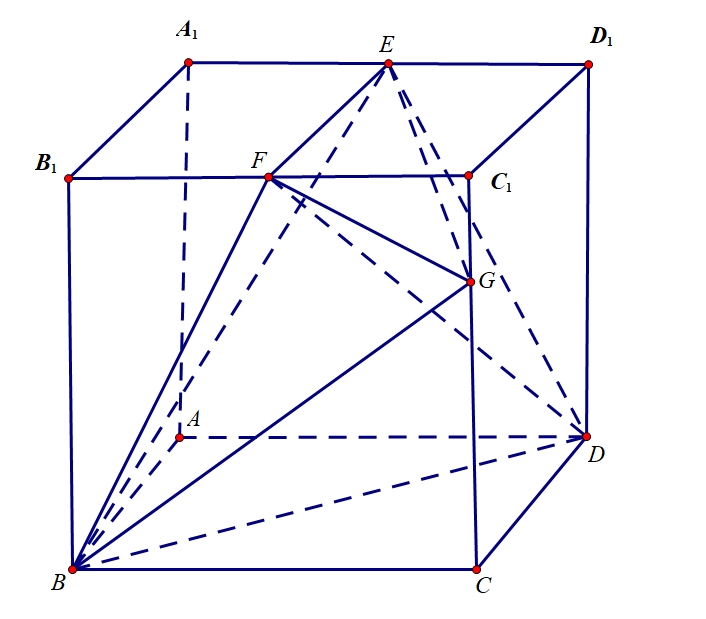


9.[天津2025·17]如图，在棱长为4的正方体中，点分别为的中点，点G在棱上，且有．

（Ⅰ）求证：平面；

（Ⅱ）求平面与平面夹角的余弦值；

（Ⅲ）求三棱锥的体积．



解法一（几何法）：

（Ⅰ）【证明】在正方体中，分别为的中点，所以，又平面平面，则，

因为正方体的棱长为4，，易得，则，所以，所以平面．

（Ⅱ）【解】在中，过点作，垂足为，因为平面，所以，所以平面，故，所以即为平面与平面所成二面角的平面角，在中，，

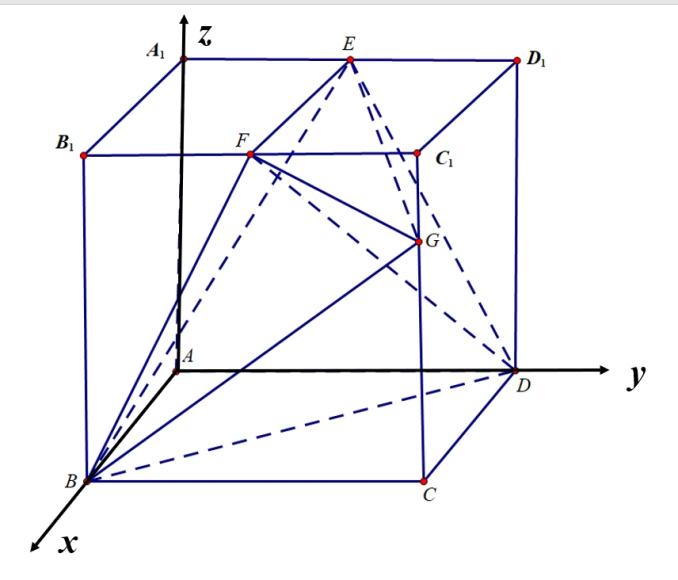


所以平面与平面夹角的余弦值为．

（Ⅲ）【解】因为，所以平面平面，所以平面，点到平面的距离即点到平面的距离，又平面，延长与交于点，则为的中点，作，垂足为，则，故平面，且，即，解得，又的面积，所以三棱锥的体积．

解法二（向量法）：

如图，以A点为原点所在直线分别为轴，轴，轴建立空间直角坐标系，则.



（Ⅰ）【证明】

，所以，．所以，又因为，所以平面．

（Ⅱ）【解】设平面的一个法向量为则

令得，

设平面的一个法向量为



令得，

设平面与面的夹角为，则

，

所以平面与面的夹角的余弦值为．

（Ⅲ）【解】的面积，

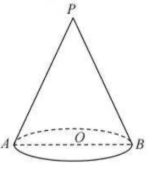
，设点到平面的距离为，则，

所以三棱锥的体积．

10.[上海2025·18]如图，圆锥顶点为直径，;

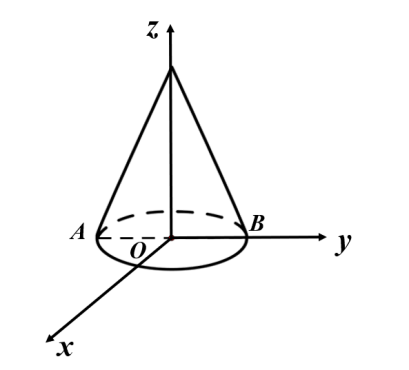
(1)若与底面所成角大小为,求侧面积；

(2)是中点，在底面上，弧长为, 且在上运动，求证：平面.



(1)【解】联结, 由题意，, 故, 即.

(2)【证明】由题意，过作平面, 以为原点，为轴，所在直线为轴，所在直线为轴，建立空间直角坐标系，设,



则

则设平面法向量为,

令

设则

则, 即,

由不在平面内，故直线平面.