图(1). ∵ $\angle AFE=60°$, $\angle A=45°$, ∴ $\angle AHF=75°$.

由垂直平分线的性质得 $FM=MH$.

∵ $\angle FNH=90°$,

∴ $\angle NFH=15°$.

∵ $FM=MH$,

∴ $\angle NFH=\angle MHF=15°$,

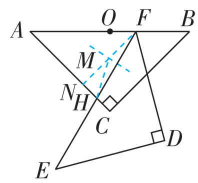
∴ $\angle NMH=30°$.

在 Rt△MNH 中,设 $NH=k$,

∴ $MH=MF=2k$,

∴ $MN=\sqrt{3}k$, ∴ $FN=MF+MN=(2+\sqrt{3})k$.

在 Rt△FNH 中, $\tan\angle FHN=\frac{FN}{NH}=2+\sqrt{3}$.



图(1)

②当 EF 与 BC 边相交时,设交点为 G,过点 F 作 $FN\perp BC$ 于点 N,作 FG 的垂直平分线交 BG 于点 M,连接 FM,如图(2).

∵ $\angle AFE=60°$, $\angle B=45°$,

∴ $\angle FGB=\angle AFE-\angle B=15°$.

由垂直平分线的性质得 $GM=MF$,

∴ $\angle FGB=\angle GFM=15°$,

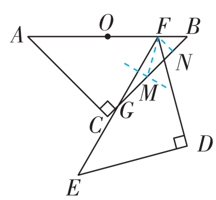
∴ $\angle FMB=30°$.

在 Rt△FNM 中,设 $FN=k$, ∴ $GM=MF=2k$,

由勾股定理得 $MN=\sqrt{3}k$,

∴ $GN=GM+MN=(2+\sqrt{3})k$.

在 Rt△FNG 中, $\tan\angle FGN=\frac{FN}{GN}=2-\sqrt{3}$.



图(2)

综上所述,△DEF 纸片的斜边 EF 与△ABC 纸片的直角边所夹锐角的正切值为 $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$.

故答案为 $2+\sqrt{3}$ 或 $2-\sqrt{3}$.

图形与几何综合训练

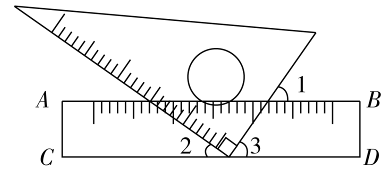
刷 综合

1. A 【解析】

选项	理由	结论
A	是轴对称图形,但不是中心对称图形	符合题意
B	是轴对称图形,也是中心对称图形	不符合题意
C	是轴对称图形,也是中心对称图形	不符合题意
D	不是轴对称图形,是中心对称图形	不符合题意

2. A 【解析】根据主视图和俯视图可知,该几何体为 A 选项中的图形. 故选 A.

3. B 【解析】如图, ∵ $\angle 1=55°$, $AB/\!/CD$, ∴ $\angle 3=\angle 1=55°$, ∴ $\angle 2=180°-90°-\angle 3=35°$. 故选 B.

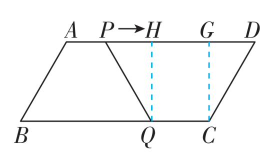


4. B 【解析】∵ $\angle C=90°$, $\angle B=40°$, ∴ $\angle BAC=90°-\angle B=90°-40°=50°$. 由作图知 AP 平分 $\angle BAC$, ∴ $\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times50°=25°$. 又∵ $\angle ADC=\angle B+\angle BAD$, ∴ $\angle ADC=40°+25°=65°$. 故选 B.

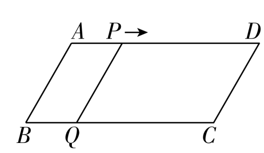
5. B 【解析】由已知可得,P 从 A 到 D 需要 12 s,Q 从 C 到 B (或从 B 到 C) 需要 4 s. 设 P,Q 的运动时间为 t s.

①当 $0\leqslant t\leqslant4$ 时,(i) 点 Q 在点 P 右侧时,过 Q 作 $QH\perp AD$ 于 H,过 C 作 $CG\perp AD$ 于 G,如图(1). 易得四边形 $HQCG$ 为矩形, $AP=t$ cm, $CQ=3t$ cm, ∴ $GH=3t$ cm. ∵ $PD/\!/CQ$, $PQ=CD$, ∴ 四边形 $CQPD$ 是等腰梯形, ∴ $\angle QPH=\angle D=\angle B=60°$, ∴ $\angle PQH=\angle GCD=30°$. ∵ $PQ=CD=AB=6$ cm, ∴ $PH=\frac{1}{2}PQ=3$ cm, $DG=\frac{1}{2}CD=3$ cm. ∵ $AP+PH+GH+DG=AD=BC=12$ cm, ∴ $t+3+3t+3=12$, 解得 $t=1.5$.

(ii) 点 Q 在点 P 左侧时,四边形 $CQPD$ 是平行四边形,如图(2). 此时 $PD=CQ=3t$ cm, ∴ $t+3t=12$, 解得 $t=3$, ∴ 运动时间为 1.5 s 或 3 s 时, $PQ=CD$.



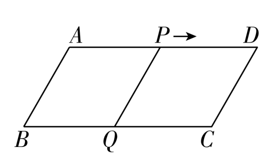
图(1)



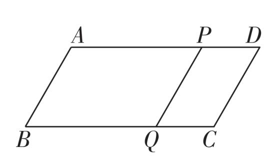
图(2)

②当 $4<t\leqslant8$ 时,(i) 点 Q 在点 P 左侧时,四边形 $CQPD$ 是平行四边形,如图(3). 此时 $BQ=3(t-4)$ cm, $AP=t$ cm. ∵ $AD=BC$, $PD=CQ$, ∴ $BQ=AP$, ∴ $3(t-4)=t$, 解得 $t=6$.

(ii) 点 Q 在点 P 右侧时,由①知,此时四边形 $CQPD$ 是以 CD,PQ 为腰的等腰梯形,这种情况在 $4<t\leqslant8$ 时不存在, ∴ 运动时间为 6 s 时, $PQ=CD$.



图(3)



图(4)

③当 $8<t\leqslant12$ 时,(i) 点 Q 在点 P 左侧时,四边形 $CQPD$ 是平行四边形,如图(4). 此时 $CQ=3(t-8)$ cm, $PD=(12-t)$ cm,

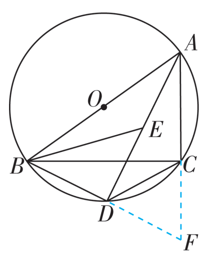
$\therefore 3(t-8)=12-t$，解得 $t=9$.

(ⅱ)同②可知点 Q 在点 P 右侧时的情况在 $8<t\leqslant 12$ 时不存在，$\therefore$ 运动时间为 9 s 时，$PQ=CD$.

综上所述，运动时间为 1.5 s 或 3 s 或 6 s 或 9 s 时，$PQ=CD$. 故选 B.

6. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore \angle DAB=90°$，$\therefore \angle DAE+\angle BAH=90°$. $\because \triangle ADE$ 和 $\triangle BHA$ 都是直角三角形，$\therefore \angle AED=\angle BHA=90°$，$\therefore \angle ABH+\angle BAH=90°$，$\therefore \angle DAE=\angle ABH$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle BAH$，$\therefore \dfrac{DE}{AH}=\dfrac{AD}{AB}$. 根据全等三角形的性质，设 $AE=CG=GH=EF=a$，$DE=EH=FG=BG=b$，$\therefore AH=AE-EH=a-b$，$BH=GH+BG=a+b$，$\dfrac{EH}{AH}=\dfrac{AD}{AB}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，由勾股定理得 $AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{a^2+b^2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABH$ 中，由勾股定理得 $AB=\sqrt{AH^2+BH^2}=\sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}=\sqrt{2(a^2+b^2)}$，$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{2(a^2+b^2)}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \dfrac{EH}{AH}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

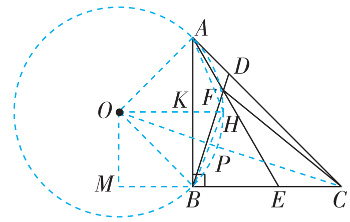
7. C 【解析】延长 AC，BD 交于点 F，如图. $\because$ 点 E 为 AD 中点，$\therefore$ 设 $AE=DE=a$，则 $AD=2a$. $\because AD$ 平分 $\angle BAC$，BE 平分 $\angle ABC$，$\therefore \angle EAB=\angle EAC=\dfrac{1}{2}\angle BAC$，$\angle EBA=\angle EBC=\dfrac{1}{2}\angle ABC$. $\because \angle DBC=\angle EAC=\dfrac{1}{2}\angle BAC$，$\therefore \angle DBE=\angle DBC+\angle EBC=\dfrac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)$.



$\because \angle DEB=\angle EAB+\angle EBA=\dfrac{1}{2}(\angle BAC+\angle ABC)$，$\therefore \angle DBE=\angle DEB$，$\therefore DB=DE=a$. $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ADB=\angle ADF=90°$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADB$ 中，由勾股定理得 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5}a$. 在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle ADF$ 中，$\begin{cases}\angle ADB=\angle ADF=90°,\\ AD=AD,\\ \angle EAB=\angle EAC,\end{cases}$

$\therefore \triangle ADB\cong\triangle ADF(\mathrm{ASA})$，$\therefore AB=FA=\sqrt{5}a$，$BD=FD=a$，$\therefore BF=BD+FD=2a$. $\because AB-AC=4$，$\therefore AB-AC=AF-AC=CF=4$. $\because$ 四边形 $ABDC$ 是 $\odot O$ 的内接四边形，$\therefore \angle FDC=\angle FAB$. 又 $\because \angle F=\angle F$，$\therefore \triangle FDC\backsim\triangle FAB$，$\therefore \dfrac{FC}{FB}=\dfrac{FD}{FA}$，$\therefore \dfrac{4}{2a}=\dfrac{a}{\sqrt{5}a}$，$\therefore a=2\sqrt{5}$，$\therefore AB=\sqrt{5}a=10$，$\therefore \odot O$ 的半径是 5. 故选 C.

8. D 【解析】①$\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$\angle ABC=90°$，$AB=4$，$\therefore \angle BCA=\angle BAC=45°$，$AB=BC=4$，$\therefore AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$. $\because AD=\dfrac{\sqrt{2}}{2}CE$，$\therefore \dfrac{CE}{AD}=\sqrt{2}$，$\therefore \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CE}{AD}$. 又 $\because \angle ECA=\angle DAB=45°$，$\therefore \triangle CAE\backsim\triangle ABD$，$\therefore \dfrac{AE}{BD}=\dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$，故①正确. ②$\because \triangle CAE\backsim\triangle ABD$，$\therefore \angle CAE=\angle ABD$，$\therefore \angle BFE=\angle BAF+\angle ABD=\angle BAF+\angle CAE=\angle BAC=45°$，$\therefore \angle DFE=180°-\angle BFE=180°-45°=135°$，故②正确. ③以 AB 为斜边在 $\triangle ABC$ 外侧构造等腰 $\mathrm{Rt}\triangle OAB$，以点 O 为圆心，OA 为半径作 $\odot O$，过点 O 作 $OK\perp AB$ 于 K，OK 的延长线交 $\odot O$ 于 H，连接 AH，BH，过点 O 作 $OM\perp CB$ 交 CB 的延长线于 M，连接 OC 交 $\odot O$ 于 P，如图.

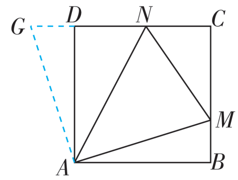


$\because \angle AOB=90°$，$\therefore \angle AHB=180°-\dfrac{1}{2}\angle AOB=180°-\dfrac{1}{2}\times 90°=135°$. $\because \angle DFE=135°$，$\therefore \angle AFB=135°$，$\therefore$ 点 F 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上运动，$\therefore$ 当点 F 与点 H 重合时，$\triangle ABF$ 的面积最大，最大值为 $\triangle ABH$ 的面积. 在等腰 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，$AK=BK=\dfrac{1}{2}AB=2$，$\angle AOH=45°$，$\therefore AK=OK=2$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AOK$ 中，由勾股定理得 $OA=\sqrt{AK^2+OK^2}=2\sqrt{2}$，$\therefore OA=OH=OB=OP=2\sqrt{2}$，$\therefore KH=OH-OK=2\sqrt{2}-2$，$\therefore S_{\triangle ABH}=\dfrac{1}{2}\times AB\times KH=\dfrac{1}{2}\times 4\times(2\sqrt{2}-2)=4\sqrt{2}-4$，故③正确. ④由③知，点 F 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上运动，$\therefore$ 当点 F 与点 P 重合时，CF 的值最小，最小值为线段 CP 的长. $\because OM\perp CB$，$OK\perp AB$，$\angle ABM=\angle ABC=90°$，$\therefore$ 四边形 $OMBK$ 为矩形，$\therefore OM=BK=2$，$BM=OK=2$，$\therefore CM=BC+BM=4+2=6$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle COM$ 中，由勾股定理得 $CO=\sqrt{CM^2+OM^2}=2\sqrt{10}$，$\therefore CP=CO-OP=2\sqrt{10}-2\sqrt{2}$，即 CF 的最小值是 $2\sqrt{10}-2\sqrt{2}$，故④正确. 综上，正确的结论是①②③④. 故选 D.

9. 六 【解析】$\because$ 一个正多边形的外角和与内角和的比为 $1:2$，$\therefore$ 这个正多边形的内角和为 $360°\times 2=720°$，$\therefore$ 这个正多边形的边数为 $720°\div 180°+2=4+2=6$(条)，$\therefore$ 这个正多边形是正六边形. 故答案为六.

10. $64-9\pi$ 【解析】剪下的扇形面积为 $\dfrac{45\pi\times 8^2}{360}=8\pi$. 设围成圆锥的底面圆的半径为 r，则 $2\pi r=\dfrac{45\pi\times 8}{180}$，解得 $r=1$. 所以纸片剩下部分(即阴影部分)的面积为 $8^2-8\pi-\pi\times 1^2=64-9\pi$. 故答案为 $64-9\pi$.

11. $2\sqrt{2}-2$ 【解析】如图，延长 CD 至点 G，使 $DG=BM$，连接 AG. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AD=AB$，$\angle MBA=\angle ADN=$



$90°$，$\therefore \angle ADG=\angle ADN=90°=\angle ABM$. 又$\because BM=DG$，$AD=AB$，$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADG$（SAS），$\therefore \angle BAM=\angle DAG$，$AM=AG$. $\because \angle MAN=45°$，$\therefore \angle BAM+\angle DAN=45°$，$\therefore \angle DAG+\angle DAN=45°$，即 $\angle GAN=45°$. 在 $\triangle GAN$ 和 $\triangle MAN$ 中，$\begin{cases}AG=AM,\\ \angle GAN=\angle MAN,\\ AN=AN,\end{cases}$ $\therefore \triangle GAN \cong \triangle MAN$（SAS），$\therefore GN=MN=DN+DG=DN+BM$. 设 $BM=x$，$MN=y$，则 $GN=y$，$DG=x$. $\because BC=CD=1$，$\therefore CM=1-x$，$CN=x-y+1$. 在 Rt$\triangle CMN$ 中，由勾股定理得 $MN^2=CM^2+CN^2$，即 $y^2=(1-x)^2+(x-y+1)^2$，整理可得 $y=\frac{x^2+1}{x+1}=\frac{(x+1)^2-2(x+1)+2}{x+1}=x+1+\frac{2}{x+1}-2$.

$\because \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{2}{x+1}}\right)^2 \geqslant 0$，即 $x+1-2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{2}{x+1}}+\frac{2}{x+1}\geqslant 0$，$\therefore x+1+\frac{2}{x+1}\geqslant 2\sqrt{(x+1)\cdot\frac{2}{x+1}}=2\sqrt{2}$，$\therefore y\geqslant 2\sqrt{2}-2$，$\therefore y$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$，此时 $x=\sqrt{2}-1$. 故 MN 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$.

刷有所得

半角模型

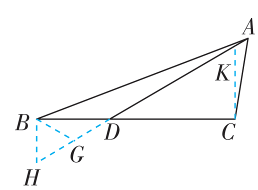
两个角有公共顶点，较小角在较大角的内部，度数等于较大角的一半，且组成这个较大角的两边相等，这样的几何模型称为半角模型，一般通过几何变换得到全等三角形来解决这类问题.

12. 1 或 $\frac{8}{5}$ 【解析】由题意，$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，$\therefore AB=BC=AC=4$，$\angle A=\angle B=\angle C=60°$. 设 $BD=x$，$\therefore CD=4-x$. $\because DE\perp BC$，$\angle B=60°$，$\therefore \angle BED=30°$，$\therefore BE=2BD=2x$，$\therefore AE=AB-BE=4-2x$. $\because DF/\!/AB$，$\therefore \frac{AF}{AC}=\frac{BD}{BC}$. $\because AC=BC$，$\therefore AF=BD=x$. $\because \triangle AEF$ 为直角三角形，$\angle A=60°$，$\therefore$ ①当 $\angle AFE=90°$ 时，$\angle AEF=30°$，$\therefore AE=2AF=2x$. 又$\because AE=4-2x$，$\therefore 2x=4-2x$，$\therefore x=1$，即 $BD=1$. ②当 $\angle AEF=90°$ 时，$\angle AFE=30°$. $\because AE=4-2x$，$\therefore AF=2AE=2(4-2x)$. 又$\because AF=BD=x$，$\therefore 2(4-2x)=x$，$\therefore x=\frac{8}{5}$，即 $BD=\frac{8}{5}$. 故答案为 1 或 $\frac{8}{5}$.

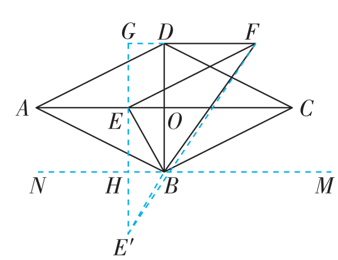
13. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}$ 【解析】如图，过 C 点作 $CK\perp CD$ 交 AD 于点 K，则 $\angle KCD=90°$. $\because \angle ADC=30°$，$\therefore \angle DKC=60°$，$DK=2CK$，$\therefore \angle AKC=120°$，$\angle ACK=60°-\angle CAK$. $\because BD=1$，$BC=\sqrt{7}$，$\therefore CD=\sqrt{7}-1$，$\therefore CK=\frac{\sqrt{3}}{3}CD=\frac{\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}$，$\therefore DK=\frac{2\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}$. 作 $BH\perp BC$ 交 AD 的延长线于点 H，在 HD 上截取 $HG=HB$，连接 BG. $\because \angle HBD=90°$，$\angle BDH=\angle ADC=30°$，$\therefore \angle H=60°$，$\therefore DH=2BH$，$\triangle BHG$ 是等边三角形，$\therefore BG=BH$，$\angle GBH=\angle BGH=60°$，$\therefore \angle GBD=\angle BDH=30°$，$\angle BGA=120°$，$\therefore DG=BG=BH$. $\because \angle BDH=30°$，$\therefore DG=BG=BH=\frac{\sqrt{3}}{3}BD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore KG=DK+DG=\frac{2\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}$.

$\because \angle BAC=60°$，$\therefore \angle BAG=60°-\angle CAK$，$\therefore \angle ACK=\angle BAG$. $\because \angle AKC=\angle BGA=120°$，$\therefore \triangle AKC\backsim\triangle BGA$，$\therefore \frac{AK}{BG}=\frac{CK}{AG}$，

$\therefore \frac{AK}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=\frac{\frac{\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}}{AK+\frac{2\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}}$，整理得 $3AK^2+(2\sqrt{21}-\sqrt{3})AK+1-\sqrt{7}=0$，解得 $AK=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{21}}{3}$ 或 $AK=\frac{-2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{3}$（不符合题意，舍去），$\therefore AD=AK+DK=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{21}}{3}+\frac{2\sqrt{21}-2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}$，故答案为 $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{21}}{3}$.



14. $\sqrt{13}$ 【解析】$\because$ 四边形 $DAEF$ 为平行四边形，$\therefore DF/\!/AE$，$DF=AE$. 如图，过点 B 作 $MN/\!/AC$，作点 E 关于 MN 的对称点 E'，连接 BE'，$E'F$.



由对称性得 $BE=BE'$，$EE'\perp MN$，$\therefore BE+BF=BE'+BF\geqslant E'F$，当且仅当 E'，B，F 三点共线时，$BE+BF$ 取得最小值，为 $E'F$ 的长.

设 AC 与 BD 交于点 O，EE' 交 MN 于点 H，延长 $E'E$ 交 FD 的延长线于点 G，则 $EH=E'H$.

在菱形 $ABCD$ 中，$AC=4$，$BD=2$，$\therefore AO=\frac{1}{2}AC=2$，$BO=DO=$

$\frac{1}{2}BD=1$，$AC\perp BD$. ∵ $AC//MN$，$EE'\perp MN$，∴ $AC\perp GH$，∴ $\angle OEH=\angle EOB=\angle EHB=90°$，∴ 四边形 $EOBH$ 是矩形，∴ $E'H=EH=OB=1$. 同理易得四边形 $DOEG$ 是矩形，∴ $GD=EO$，$GE=DO=1$，∴ $GF=GD+DF=EO+AE=AO=2$，$GE'=GE+EH+E'H=3$，∴ $E'F=\sqrt{GF^2+GE'^2}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，即 $BE+BF$ 的最小值为 $\sqrt{13}$，故答案为 $\sqrt{13}$.

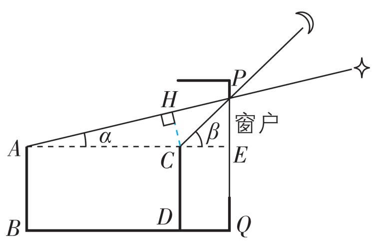
15.【解】(1) 由题意可得，$PQ\perp AE$，$PQ=2.6$ m，$AB=CD=EQ=1.6$ m，$AE=BQ=4$ m，$AC=BD=3$ m，∴ $CE=AE-AC=4-3=1$(m)，$PE=PQ-EQ=2.6-1.6=1$(m)，$\angle CEP=90°$，

∴ $CE=PE$，∴ $\beta=\angle PCE=45°$，$\tan\alpha=\tan\angle PAE=\frac{PE}{AE}=\frac{1}{4}$.

(2) ∵ $CE=PE=1$ m，$\angle CEP=90°$，

∴ $CP=\sqrt{CE^2+PE^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$(m).

如图，过 C 作 $CH\perp AP$ 于 H.



∵ $\tan\alpha=\tan\angle PAE=\frac{CH}{AH}=\frac{1}{4}$，

∴ 设 $CH=x$ m，则 $AH=4x$ m，

∴ $x^2+(4x)^2=AC^2=9$，解得 $x=\frac{3\sqrt{17}}{17}$(负值已舍去)，

∴ $CH=\frac{3\sqrt{17}}{17}$ m，∴ $\sin\angle APC=\frac{CH}{CP}=\frac{\frac{3\sqrt{17}}{17}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{34}}{34}$.

16. (1)【证明】∵ GF 是⊙O 的切线，∴ $DF\perp GF$.

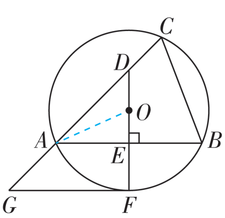
∵ $DF\perp AB$，∴ $AB//GF$，∴ $\angle BAC=\angle G=45°$，∴ $\angle FDG=90°-45°=45°$，∴ $\angle G=\angle FDG$，∴ $FD=FG$.

(2)【解】∵ $DF\perp AB$，∴ $AE=BE=\frac{1}{2}AB=6$.

∵ $\angle BAC=45°$，∴ $\angle ADE=90°-45°=45°$，∴ $\angle EAD=\angle ADE$，∴ $EA=ED=6$.

由(1)得 $FD=FG=10$，∴ $EF=DF-DE=10-6=4$.

如图所示，连接 OA，设 $OE=x$，则 $OF=OE+EF=x+4=OA$.



在 Rt△AOE 中，$OA^2=AE^2+OE^2$，

∴ $(x+4)^2=6^2+x^2$，解得 $x=\frac{5}{2}$，

∴ $OA=x+4=\frac{5}{2}+4=\frac{13}{2}$，∴ ⊙$O$ 的半径为 $\frac{13}{2}$.

17. (1)【证明】∵ DE 是△ABC 的中位线，

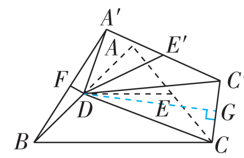
∴ $DE=\frac{1}{2}BC$ 且 $AD=DB=\frac{1}{2}AB$.

又∵ △ADC 绕点 D 按逆时针方向旋转得到△$A'DC'$，点 E 的对应点 E' 与点 A 重合，∴ $DE=AD$，∴ $AB=BC$.

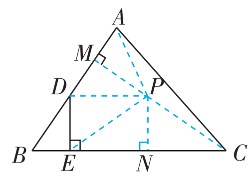
(2)【证明】由题意可知，$DC=DC'$，$DA=DA'$，$\angle CDC'=\angle ADA'$. 作 $DG\perp CC'$ 于点 G，如图(1)所示，则 $CG=C'G=\frac{1}{2}CC'$，且 $\angle CDG=\angle C'DG=\frac{1}{2}\angle CDC'$.

∵ $BD=DA=DA'$，∴ $\angle A'BD=\angle BA'D$. ∵ $\angle A'DA=\angle A'BD+\angle BA'D$，∴ $\angle A'BD=\frac{1}{2}\angle A'DA$，∴ $\angle A'BD=\angle CDG$. ∵ $DB=DA'$，DF 是△$A'BD$ 的中线，∴ $DF\perp A'B$，∴ $\angle BFD=90°$，

∴ △BFD∽△DGC，∴ $\frac{DF}{CG}=\frac{BD}{CD}$，∴ $\frac{DF}{\frac{1}{2}C'C}=\frac{BD}{CD}$，∴ $2DF\cdot CD=BD\cdot CC'$.



图(1)



图(2)

(3)【解】存在.

证明：∵ $DE\perp BC$，∴ $\angle DEB=90°$，∴ 在 Rt△BDE 中，$DE=BE\cdot\tan B=3\times\frac{4}{3}=4$，∴ $BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 如图(2)，过点 C 作 $CM\perp AB$ 于点 M，∴ $\angle CMB=\angle DEB=90°$.

又∵ $\angle B=\angle B$，∴ △BDE∽△BCM，

∴ $\frac{BD}{BC}=\frac{DE}{CM}=\frac{BE}{BM}$，即 $\frac{5}{3+\frac{32}{3}}=\frac{3}{BM}$，∴ $BM=\frac{41}{5}$，∴ $DM=BM-BD=\frac{41}{5}-5=\frac{16}{5}$. ∵ $AD=\frac{32}{5}$，∴ $DM=\frac{1}{2}AD$，∴ 点 M 是 AD 的中点，∴ CM 是 AD 的垂直平分线. 过点 D 作 $DP//BC$，交 CM 于点 P，连接 AP，EP，∴ $PA=PD$，∴ $\angle DPM=\angle APM$. ∵ $DP//BC$，∴ $\angle MDP=\angle B$. ∵ $\angle PMD=\angle DEB$，∴ △PDM∽△DBE，

∴ $\frac{PD}{DB}=\frac{DM}{BE}$，即 $\frac{PD}{5}=\frac{\frac{16}{5}}{3}$，∴ $PD=\frac{16}{3}$.

过点 P 作 $PN\perp BC$ 于点 N，则四边形 $DENP$ 是矩形，$\therefore EN=DP=\frac{16}{3}$，$PN=DE=4$. $\because EC=\frac{32}{3}$，$\therefore EN=\frac{1}{2}EC$，$\therefore$ 点 N 是 EC 的中点，$\therefore PN$ 垂直平分 EC，$\therefore PE=PC$，$\therefore \angle EPN=\angle CPN=\frac{1}{2}\angle EPC$. $\because \frac{PN}{EN}=\frac{4}{\frac{16}{3}}=\frac{3}{4}$，$\frac{DM}{PM}=\frac{BE}{DE}=\frac{3}{4}$，$\therefore \frac{PN}{EN}=\frac{DM}{PM}$. 又 $\because \angle PNE=\angle DMP=90^\circ$，$\therefore \triangle PEN\backsim\triangle DPM$，$\therefore \angle EPN=\angle PDM$. $\because \angle MPD+\angle PDM=180^\circ-\angle PMD=90^\circ$，$\therefore \angle MPD+\angle EPN=90^\circ$，即 $\frac{1}{2}\angle APD+\frac{1}{2}\angle EPC=90^\circ$，$\therefore \angle APD+\angle EPC=180^\circ$，$\therefore$ 当点 G 与点 P 重合时，满足 $\angle AGD+\angle CGE=180^\circ$.

第八章　统计与概率

A 2025 真题诊断练

刷 诊断

1. A 【解析】选项 A，某班同学人数有限，进行全面调查容易实施且能准确获取每位同学的跳远成绩，适合全面调查，符合题意；选项 B，夏季冷饮市场上冰激凌数量庞大，全面调查成本过高，且检测可能破坏产品，适合采用抽样调查，不符合题意；选项 C，全国中学生人数极多，全面调查耗费资源巨大，适合采用抽样调查，不符合题意；选项 D，检测汽车抗撞击能力会破坏被测车辆，无法对所有汽车进行测试，适合采用抽样调查，不符合题意. 故选 A.

2. B 【解析】A 选项，投掷一枚硬币，正面向上，是随机事件，故不符合题意；B 选项，从只有红球的袋子中摸出黄球，是不可能事件，故符合题意；C 选项，任意画一个圆，它是轴对称图形，是必然事件，故不符合题意；D 选项，射击运动员射击一次，命中靶心，是随机事件，故不符合题意. 故选 B.

3. B 【解析】由题意可画出如下树状图：

美　　　丽　　　山　　　河

丽 山 河　美 山 河　美 丽 河　美 丽 山

由上图知，从中随机抽取两张卡片，共有 12 种等可能的结果，其中两张卡片正面恰好是甲骨文“丽”和“山”的结果有 2 种，$\therefore P$（两张卡片正面恰好是甲骨文“丽”和“山”）$=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$. 故选 B.

4. C 【解析】算式中差的平方的项数为 5，$\therefore$ 对应数据个数 $n=5$，故选项 A 正确. 平均数 $\bar{x}=\frac{6+8+8+6+7}{5}=7$，故选项 B 正确. 数据中 6 和 8 均出现 2 次，故众数为 6 和 8，故选项 C 错误. 该组数据加入两个 7 后，数据更集中，故这组新数据的方差变小，故选项 D 正确. 故选 C.

5. $\frac{2}{5}$ 【解析】单词 class 中总共有 5 个字母，其中字母“s”有 2 个，$\therefore$ 选中字母“s”的概率为 $\frac{2}{5}$，故答案为 $\frac{2}{5}$.

刷有所得

概率的求法

如果在一次试验中，有 n 种可能的结果，并且它们发生的可能性都相等，事件 A 包含其中的 m 种结果，那么事件 A 发生的概率 $P(A)=\frac{m}{n}$.

6. 200 【解析】$\because 1\ 000\times20\%=200$（名），$\therefore$ 该校 1 000 名学生中，最喜爱娱乐节目的学生大约有 200 名，故答案为 200.

7. > 【解析】$4+3+2+1=10$，由加权平均数可得 $\frac{4}{10}A+\frac{3}{10}\times70+\frac{2}{10}\times80+\frac{1}{10}\times90=82$，解得 $A=90$；$\frac{4}{10}B+\frac{3}{10}\times90+\frac{2}{10}\times80+\frac{1}{10}\times70=82$，解得 $B=80$. $\because 90>80$，$\therefore A>B$. 故答案为>.

8. $\frac{4}{9}$ 【解析】由题意画树状图如下：

甲　　1　　　4　　　5

乙　2 3 6　2 3 6　2 3 6

由树状图可知，共有 9 种等可能的结果，其中甲出的卡片数字比乙大的结果有 4 种，故甲出的卡片数字比乙大的概率是 $\frac{4}{9}$.

9. 【解】根据题意列表如下：

小利＼小顺	A	B	C
A	(A,A)	(B,A)	(C,A)
B	(A,B)	(B,B)	(C,B)
C	(A,C)	(B,C)	(C,C)

由表格可知，一共有 9 种等可能的结果，其中参与者小顺和小利被分配到同一组的结果有 3 种，

$\therefore$ 参与者小顺和小利被分配到同一组的概率为 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

10. 【解】(1) 由题意得，抽取的学生总人数为 $\frac{15}{0.3}=50$（人），