

当 $m > 0$ 时, $e^{2mx^2} - \frac{\ln x}{m} \geq 0$ 等价于 $mx^2 e^{2mx^2} \geq x^2 \ln x$, 即 $mx^2 e^{2mx^2} \geq \ln x \cdot e^{2\ln x}$, 即 $2mx^2 e^{2mx^2} \geq 2\ln x \cdot e^{2\ln x}$, 等价于 $e^{2mx^2} \ln e^{2mx^2} \geq e^{2\ln x} \cdot \ln e^{2\ln x}$,

【破题板】对不等式进行变形构造相同结构以便通过构建新函数求解

由(1)知, 令 $a=0$, 得 $f(x)=x \ln x$, 所以 $f(e^{2mx^2}) \geq f(e^{2\ln x})$. 由指数函数的性质及 $x \in [1, +\infty)$, 得 $e^{2mx^2} > 1, e^{2\ln x} = x^2 \geq 1$, 又因为 $f(x) = x \ln x$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $e^{2mx^2} \geq e^{2\ln x}$, 即 $mx^2 \geq \ln x$, 即 $m \geq \frac{\ln x}{x^2}$ 对任意 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立.

记函数 $g(x) = \frac{\ln x}{x^2} (x \geq 1)$, 则 $g'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$, 由 $g'(x) > 0$, 得 $1 \leq x < \sqrt{e}$, 由 $g'(x) < 0$, 得 $x > \sqrt{e}$, 故 $g(x)$ 在区间 $[1, \sqrt{e})$ 上单调递增, 在区间 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x)_{\max} = g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$.

故 $m \geq \frac{1}{2e}$.

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2e}, +\infty\right)$.

5. 【证明】(1) 由题得, $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = 1 - ae^x$, 则当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x < -\ln a$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x > -\ln a$, 故函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递增, 在区间 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递减.

由 $g(x) = \ln x - ax, x > 0$ 得 $g'(x) = \frac{1}{x} - a$, 则由 $g'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{a}$, 由 $g'(x) < 0$

得 $x > \frac{1}{a}$, 故函数 $g(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增, 在区间 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减.

设 $y = \frac{1}{a} + \ln a (0 < a < 1)$, 则 $y' = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a^2}$, 当 $0 < a < 1$ 时, $y' < 0$, 则 $y = \frac{1}{a} + \ln a$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 当 $a \rightarrow 1$

时, $y \rightarrow 1$, 所以 $\frac{1}{a} > -\ln a$, 所以在 $g(x)$ 的单调递减区间上, $f(x)$ 也单调递减. (2) 由 $f(x) = 0, g(x) = 0$ 分别得 $a =$

$\frac{x}{e^x}, a = \frac{\ln x}{x}$, 因此函数 $f(x), g(x)$ 共有 3 个不同的零点, 即直线 $y=a$ 与曲线 $F(x) = \frac{x}{e^x}, G(x) = \frac{\ln x}{x}$ 共有 3 个交点, 只需证这 3 个交点的横坐标依次成等比数列.

由 $F'(x) = \frac{1-x}{e^x}, G'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ 知, 当 $F'(x) = 0$ 时, $x=1$, 当 $G'(x) = 0$ 时, $x=e$, 则函数 $F(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 函数 $G(x)$ 在区间 $(0, e)$ 上单调递增, 在区间 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 故 $G(x)_{\max} = F(x)_{\max} = \frac{1}{e}$.

故 $y=F(x)-G(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 且 $F(1)-G(1) > 0, F(e)-G(e) < 0$, 由函数零点存在定理知, 存在唯一实数 $x_0 \in (1, e)$, 使 $F(x) = G(x)$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $F(x) \rightarrow 0, G(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $F(x) \rightarrow 0, G(x) \rightarrow 0$, 所以直线 $y=a$ 与曲线 $F(x), G(x)$ 过同一点 (x_0, a) .

设直线 $y=a$ 与曲线 $F(x) = \frac{x}{e^x}$ 的另一交点为 (x_1, a) , 与曲线 $G(x) = \frac{\ln x}{x}$ 的另一交点为 (x_2, a) , 则 $0 < x_1 < 1 < x_0 < e < x_2$, $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_0}{e^{x_0}} = a = \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{\ln x_2}{x_2}$.

故 $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{\ln x_2}{x_2}$, 即 $F(x_1) = F(\ln x_0)$, 又 $\ln x_0 \in (0, 1)$, 则由函数 $F(x)$ 的单调性得 $x_1 = \ln x_0$. 同理, 由 $\frac{x_0}{e^{x_0}} = \frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{\ln e^{x_0}}{e^{x_0}}$ 得 $x_2 = e^{x_0}$. 故 $x_1 x_2 = e^{x_0} \ln x_0 = x_0^2$.

综上, 函数 $f(x), g(x)$ 的 3 个零点从小到大依次成等比数列.

6. (1) 【解】函数 $f(x) = -2\ln x + \frac{a}{x} + x$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 令 $f'(x) = -\frac{2}{x} - \frac{a}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 2x - a}{x^2} = 0$, 即 $x^2 - 2x - a = 0$, $\Delta = 4 + 4a$.

①当 $\Delta \leq 0$, 即 $a \leq -1$ 时, $f'(x) \geq 0$ 且等号不恒成立, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

②当 $\Delta > 0$, 即 $a > -1$ 时, 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 - \sqrt{a+1} < x < 1 + \sqrt{a+1}$; 令 $f'(x) > 0$,

得 $x < 1 - \sqrt{a+1}$ 或 $x > 1 + \sqrt{a+1}$, 又因为 $x \in (0, +\infty)$, 令 $1 - \sqrt{a+1} > 0$, 即 $-1 < a < 0$, 所以当 $-1 < a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1 - \sqrt{a+1})$, $(1 + \sqrt{a+1}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1 - \sqrt{a+1}, 1 + \sqrt{a+1})$ 上单调递减; 当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1 + \sqrt{a+1})$ 上单调递减, 在 $(1 + \sqrt{a+1}, +\infty)$ 上单调递增. 综上所述:

①当 $a \leq -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

②当 $-1 < a < 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1 - \sqrt{a+1})$, $(1 + \sqrt{a+1}, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1 - \sqrt{a+1}, 1 + \sqrt{a+1})$ 上单调递减;

③当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1 + \sqrt{a+1})$ 上单调递减, 在 $(1 + \sqrt{a+1}, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 【解】当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{x} - x$ 恒成立, 即 $a \geq 2x \ln x - 2x^2 + 1$ 恒成立.

设 $g(x) = 2x \ln x - 2x^2 + 1, x \geq 1$, 则 $g'(x) = 2 \ln x + 2 - 4x = 2(\ln x - 2x + 1)$, 令 $u(x) = \ln x - 2x + 1, x \geq 1$, 则 $u'(x) = \frac{1}{x} - 2$, 当 $x \geq 1$ 时, $u'(x) < 0$, 所以 $u(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $u(x) \leq u(1) = -1 < 0$, 即 $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x)_{\max} = g(1) = -1$, 故 $a \geq -1$, 即实数 a 的取值范围为 $[-1, +\infty)$.

(3) 【证明】由(1)知, $f(x)$ 存在两个极值点 x_1, x_2 , 即方程 $x^2 - 2x - a = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不相等的实根 x_1, x_2 , 所以 $x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = -a$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 则 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} =$

$$\frac{-2\ln x_1 + 2\ln x_2 + x_1 - x_2 + a}{x_1 - x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} =$$

$$\frac{2\ln x_2 - 2\ln x_1}{x_1 - x_2} + 2, \text{ 要证 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} <$$

$$3, \text{ 即证 } \frac{2\ln x_2 - 2\ln x_1}{x_1 - x_2} < 1,$$

$$\text{即证 } 2\ln x_2 + x_2 > 2\ln x_1 + x_1.$$

$$\text{令 } h(x) = 2\ln x + x, \text{ 则 } h'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0$$

恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $0 < x_1 < x_2$, 所以 $h(x_1) < h(x_2)$,

$$\text{即 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 3.$$

专练 1 新定义、新情境专练

刷素养

1. A 【解析】被 2 除余 1 且被 3 除余 2 的数, 按从小到大的顺序排成一列, 把这列数记为数列 $\{a_n\}$,

则数列 $\{a_n\}$ 是一个以 5 为首项, 以 6 为公差的等差数列, 所以 $a_n = 5 + (n-1) \cdot 6 = 6n - 1 (1 \leq n \leq 337, n \in \mathbf{N}^*)$, 故 $b_n = (\sqrt{2})^{a_n} =$

$$(\sqrt{2})^{6n-1}.$$

$$\text{故 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(\sqrt{2})^{6n+5}}{(\sqrt{2})^{6n-1}} = (\sqrt{2})^6 = 8. \text{ 故选 A.}$$

2. A 【解析】对于①: 因为 $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$,

当 n 无限大时, $\frac{1}{n+1}$ 无限趋近于 0, 那

么 $\frac{n}{n+1}$ 无限趋近于 1,

即对于任意给定的正数 ε , 总存在正整

数 N , 使得当 $n > N$ 时, 恒有 $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| =$

$\left| \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$, 所以数列 $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ 是

收敛数列, 故①错误;

对于②: 由 $\{a_n\}$ 为收敛数列可得, 对任意的正数 r , 当 $n > N$ 时, $|a_n - A| < r$, 则 $|a_n| < |A| + r$,

当 $1 \leq n \leq N$ 时, 记数列 $\{|a_n|\}$ 中最大的项为 B , 取 $M = \max\{B+1, |A|+r\}$, 则 $|a_n| < M$, 故②正确;

对于③: 由 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 为收敛数列可得, 对任意的正数 r , 取 $r_1 = r_2 = \frac{r}{2}$, 当

$n > N_1$ 时, 恒有 $|a_n - A| < r_1$,

当 $n > N_2$ 时, 恒有 $|b_n - B| < r_2$, 故当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, $|a_n - b_n - (A - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < r_1 + r_2 = r$, 故数列 $\{a_n - b_n\}$ 一定为收敛数列, 故③错误;

对于④: 对任意的正数 r , 令 $K = \max\{|A|, |B|\}$, 取 $r_1 = r_2 = \sqrt{K^2 + r} - K$,

当 $n > N_1$ 时, 恒有 $|a_n - A| < r_1$,

当 $n > N_2$ 时, 恒有 $|b_n - B| < r_2$,

故当 $n > \max\{N_1, N_2\}$ 时, $|a_n b_n - AB| = |(a_n - A)(b_n - B) + (a_n - A)B + (b_n - B)A| \leq |a_n - A| |b_n - B| + |a_n - A| |B| + |b_n - B| |A| < r_1 r_2 + K(r_1 + r_2) = r$,

故数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 一定为收敛数列, 故④错误. 故选 A.

3. BCD 【解析】对于 A, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q > 1$, 则 $a_{n+k} - a_n = a_1 q^{n+k-1} - a_1 q^{n-1} = a_1 q^{n-1} (q^k - 1)$, 其中 $q^k > 1$, 则 $q^{n-1} (q^k - 1) > 0$, 若 $a_1 < 0$, 则 $a_{n+k} - a_n < 0$, 即 $a_{n+k} < a_n$, 不符合定义, 故 A 错误.

对于 B, $a_{n+k} - a_n = [2(n+k) + (-1)^{n+k}] - [2n + (-1)^n] = 2k + (-1)^n [(-1)^k - 1]$, 当 n 为奇数时, $a_{n+k} - a_n = 2k - (-1)^k + 1$, 因为 $-(-1)^k + 1 \geq 0$,

所以存在正整数 $k (k \geq 2)$, 使得对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $a_{n+k} > a_n$, 符合定义;

当 n 为偶数时, $a_{n+k} - a_n = 2k + (-1)^k - 1$, 因为 $(-1)^k - 1 \geq -2$, 所以存在正整数 $k (k \geq 2)$, 使得对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 均有 $a_{n+k} > a_n$, 符合定义, 故 B 正确.

对于 C, $a_{n+k} - a_n = \left(n+k + \frac{r}{n+k} \right) - \left(n + \frac{r}{n} \right) = k - \frac{kr}{(n+k)n} = k \left[1 - \frac{r}{(n+k)n} \right] =$

$k \cdot \frac{n^2 + kn - r}{(n+k)n}$, 令 $f(n) = n^2 + kn - r$, 则二次函数的图象开口向上, 对称轴方程为 $n = -\frac{k}{2} < 0$,

所以 $f(n)$ 在 $n \in \mathbf{N}^*$ 时单调递增, 令最

小值 $f(1) = 1 + k - r > 0$, 解得 $k > r - 1$,

又 $k \in \mathbf{N}^*, k \geq 2, r \in \mathbf{N}^*, r \geq 2$, 故存在 $k \geq r$ 时, $a_{n+k} - a_n > 0$, 符合定义, 且“间隔数”的最小值为 r , 故 C 正确.

对于 D, 因为 $a_n = n^2 + tn + 2 \ 023$ 是“间隔递增数列”, 所以 $a_{n+k} - a_n = [(n+k)^2 + t(n+k) + 2 \ 023] - (n^2 + tn + 2 \ 023) = k(2n+k+t) > 0$,

即 $2n+k+t > 0$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 成立,

设 $g(n) = 2n+k+t$, 显然当 $n \in \mathbf{N}^*$ 时 $g(n)$ 单调递增, 故要使 $g(n) = 2n+k+t > 0$, 只需 $g(1) = 2+k+t > 0$, 即 $-2-t < k$.

又“间隔数”的最小值为 3, 故 $k \geq 3$ 时, $-2-t < k$, 且 $k \leq 2$ 时, $-2-t \geq k$, 故 $-2-t < 3$ 且 $-2-t \geq 2$, 故 $-5 < t \leq -4$, 故 D 正确. 故选 BCD.

4. ABD 【解析】对于 A, $f\left(x - \frac{b}{3a}\right) +$

$f\left(-x - \frac{b}{3a}\right) = a\left(x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(x - \frac{b}{3a}\right)^2 +$

$c\left(x - \frac{b}{3a}\right) + d + a\left(-x - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-x - \frac{b}{3a}\right)^2 +$

$c\left(-x - \frac{b}{3a}\right) + d = \frac{4b^3}{27a^2} - \frac{2bc}{3a} + 2d$,

又 $f\left(-\frac{b}{3a}\right) = a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(-\frac{b}{3a}\right) + d = -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^2}{9a} - \frac{bc}{3a} + d = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d$, 所以 $f\left(x - \frac{b}{3a}\right) + f\left(-x - \frac{b}{3a}\right) =$

$2f\left(-\frac{b}{3a}\right)$, 故点 $\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 是—

元三次函数 $f(x)$ 图象的对称中心.

设 $P(x_0, y_0)$ 是曲线 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ 上任一点,

则曲线 $y = f(x)$ 在点 P 处的切线斜率 $k = f'(x_0) = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c$,

则切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$,

即 $y = (3ax_0^2 + 2bx_0 + c)(x - x_0) + ax_0^3 +$

$bx_0^2 + cx_0 + d$,

与 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 联立, 消去 y 并整理得 $ax^3 + bx^2 - (2bx_0 + 3ax_0^2)x + 2ax_0^3 + bx_0^2 = 0$, 整理得一元三次方程 $(x - x_0)^2 \cdot$

$(ax + 2ax_0 + b) = 0$,

切线与曲线 $y = f(x)$ 有唯一的公共点 \Leftrightarrow 一元三次方程有三个相等的实数根 $\Leftrightarrow x_0 = -\frac{b}{3a}$,

所以点 $P\left(-\frac{b}{3a}, f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ 在曲线 $y =$

$f(x)$ 上, 且该点处的切线与 $f(x)$ 的图象无其他交点, 故 A 正确;

对于 B, 由于“伴随割点”的横坐标 $x_1 \neq x_0$, 因此 $ax_1 + 2ax_0 + b = 0 \Rightarrow 2x_0 + x_1 = -\frac{b}{a}$, 故 B 正确;

对于 C, 设点 (x_0, y_0) 的“伴随割点”为点 (x_1, y_1) , 且两者关于原点对称,

则 $x_0 + x_1 = 0, y_0 + y_1 = 0$, 所以

$\begin{cases} x_0 + x_1 = 0, \\ 2x_0 + x_1 = -\frac{b}{a}, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x_0 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 = \frac{b}{a}, \end{cases}$

于是 $y_0 + y_1 = f(x_0) + f(x_1) = f\left(-\frac{b}{a}\right) +$

$f\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{2b^3}{a^2} + 2d = 0$, 得 $d = -\frac{b^3}{a^2}$, 故 C

错误;

对于 D, 由于 A, B, C 是 $f(x)$ 的图象与 x 轴的交点,

故设 $f(x) = a(x - x_A)(x - x_B)(x - x_C) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

根据一元三次方程根与系数的关系知

$x_A + x_B + x_C = -\frac{b}{a}$ ①,

又由 D, E, F 分别是 A, B, C 的“伴随

割点”, 结合 B 选项知 $\begin{cases} 2x_A + x_D = -\frac{b}{a}, \\ 2x_B + x_E = -\frac{b}{a}, \\ 2x_C + x_F = -\frac{b}{a}, \end{cases}$

三式相加得 $2(x_A + x_B + x_C) + x_D + x_E +$

$x_F = -\frac{3b}{a}$, 代入①得 $x_D + x_E + x_F = -\frac{b}{a}$,

于是设 $g(x) = f(x) - a(x - x_D)(x - x_E) \cdot (x - x_F) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) -$

$a[x^3 - (x_D + x_E + x_F) \cdot x^2 + (x_D x_E + x_E x_F + x_F x_D) \cdot x - x_D x_E x_F] = [c - a(x_D x_E + x_E x_F + x_F x_D)]x + ax_D x_E x_F + d$,

则 $g(x)$ 的图象为一条直线,

又 $g(x_D) = f(x_D), g(x_E) = f(x_E), g(x_F) = f(x_F)$,

所以点 D, E, F 均在 $g(x)$ 的图象上, D, E, F 三点共线, 故 D 正确. 故选 ABD.

名师点拨 三次函数图象的切线与图象的交点问题可以转化为三次函数的零点问题.

研究切点间的关系即研究零点间的关系, 可以借助函数思想, 也可以进行适当的代数变形, 或结合一元三次方程根与系数的关系研究.

5. ACD 【解析】对于 A, B, 由 $\sin x = x -$

$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot$

$\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$,

两边同时求导得 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} -$

$\frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$,

又 $i \sin x = xi - \frac{x^3 i}{3!} + \frac{x^5 i}{5!} - \frac{x^7 i}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot$

$\frac{x^{2n-1} i}{(2n-1)!} + \cdots$,

所以 $\cos x + i \sin x = 1 + xi - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3 i}{3!} + \frac{x^4}{4!} +$

$\frac{x^5 i}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^7 i}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} +$

$(-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1} i}{(2n-1)!} + \cdots$,

$$\begin{aligned} & \text{又 } e^{ix} = 1 + xi + \frac{(xi)^2}{2!} + \frac{(xi)^3}{3!} + \frac{(xi)^4}{4!} + \cdots + \\ & \frac{(xi)^n}{n!} + \cdots = 1 + xi - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3 i}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5 i}{5!} - \frac{x^6}{6!} \\ & \frac{x^7 i}{7!} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + (-1)^{n+1} \cdot \\ & \frac{x^{2n-1} i}{(2n-1)!} + \cdots = \cos x + i \sin x, \end{aligned}$$

故 A 正确, B 错误;

对于 C, 已知 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$, 则当 $x > 0$ 时, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!}$ (当且仅当 $x = 0$ 时取等号), 因为 $2^x = e^{x \ln 2}$ ($x \geq 0$), 且 $e^{x \ln 2} \geq 1 +$

$$x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2!}, \text{ 所以 } 2^x \geq 1 + x \ln 2 + \frac{(x \ln 2)^2}{2} (x \geq 0) \text{ 成立, 故 C 正确;}$$

$$\text{对于 D, } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots,$$

$$\text{若 } n \text{ 为奇数, 则 } \cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots - \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \cdots \right),$$

$$\text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } -\frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} < 0; -\frac{x^{10}}{10!} +$$

$$\begin{aligned} & \frac{x^{12}}{12!} < 0; \cdots; \\ & -\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = \\ & \frac{x^{2n} [x^2 - (2n+1)(2n+2)]}{(2n+2)!} < 0 (x \in (0, 1)), \\ & \text{所以 } -\frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots - \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \\ & \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} - \cdots < 0, \text{ 所以 } \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \\ & \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} (x \in (0, 1)) \text{ 成立, 同理,} \\ & n \text{ 为偶数时不等式也成立, 故 D 正确.} \\ & \text{故选 ACD.} \end{aligned}$$

专练 2 开放题专练

刷素养

1. (1) 【解】选①: $\because S_n = 2a_n - 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, \therefore 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2$, $\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}$, 即 $a_n = 2a_{n-1} (n \geq 2)$, 当 $n = 1$ 时, $S_1 = 2a_1 - 2$, 得 $a_1 = 2 \neq 0$, 故数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.

$$\text{选②: } \because H_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

$$\therefore \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } H_{n-1} = 2^{\frac{(n-1)n}{2}},$$

$$\therefore a_n = \frac{H_n}{H_{n-1}} = 2^{\frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}} = 2^{\frac{n(n+1) - (n-1)n}{2}} = 2^n,$$

当 $n = 1$ 时, $H_1 = a_1 = 2$, 满足上式,

$$\therefore a_n = 2^n.$$

(2) 【证明】由 (1) 知, $a_n = 2^n$, $\therefore b_n = \log_2 a_n = \log_2 2^n = n$,

设 $c_n = \frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)}$, 则 $c_n > 0$, 且

$$T_n \geq T_1 = c_1 = \frac{1}{2},$$

$$\text{又 } c_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

→ 敲黑板: 将通项分解, 方便求和

$$\therefore T_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

综上可得, $\frac{1}{2} \leq T_n < 1$.

2. (1) 【解】 $f(x) = \ln x + 1$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 若不等式 $ax - f(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $ax - (\ln x + 1) \geq 0$ 恒成立, 即 $a \geq \frac{\ln x + 1}{x}$ 恒成立.

$$\text{令 } \varphi(x) = \frac{\ln x + 1}{x}, x \in (0, +\infty), \text{ 则 } a \geq$$

$$\varphi(x)_{\max}, \varphi'(x) = \frac{1 - (\ln x + 1)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2}.$$

由 $\varphi'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$;

由 $\varphi'(x) < 0$, 得 $x > 1$,

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $\varphi(x)$ 在 $x = 1$ 时取得最大值, 且最大值 $\varphi(1) = 1$, 所以 $a \geq 1$,

故实数 a 的取值范围为 $[1, +\infty)$.

(2) 【证明】若选①,

$$\text{由 (1) 可知, } \frac{\ln x + 1}{x} \leq 1, \text{ 即 } \ln x \leq x - 1,$$

当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立.

$$\text{令 } x = \frac{1}{n^2}, \text{ 则 } x - 1 = \frac{1}{n^2} - 1 > \ln \frac{1}{n^2} =$$

$$-\ln n^2, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{所以 } \ln n^2 > 1 - \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n \cdot n} > 1 -$$

$$\frac{1}{n(n-1)} = 1 - \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n},$$

$$\begin{aligned} & n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*, \\ & \text{所以 } \ln 2^2 + \ln 3^2 + \ln 4^2 + \cdots + \ln n^2 > \\ & \left(1 - \frac{1}{2-1} + \frac{1}{2} \right) + \left(1 - \frac{1}{3-1} + \frac{1}{3} \right) + \\ & \left(1 - \frac{1}{4-1} + \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right) = n - \\ & 1 - 1 + \frac{1}{n} = n - 1 + \frac{1}{n} - 2 (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*), \end{aligned}$$

不等式得证.

若选②,

由 (1) 可知, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $\ln x + 1 < x$, 所以 $\ln x < x - 1$.

$$\text{令 } x = 1 + \frac{1}{3^n}, \text{ 则 } \ln \left(1 + \frac{1}{3^n} \right) < 1 + \frac{1}{3^n} - 1 = \frac{1}{3^n},$$

$$\text{所以 } \ln \left[\left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) \left(1 + \frac{1}{3^3} \right) \cdots \right.$$

$$\left. \left(1 + \frac{1}{3^n} \right) \right] = \ln \left(1 + \frac{1}{3} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) +$$

$$\ln \left(1 + \frac{1}{3^3} \right) + \cdots + \ln \left(1 + \frac{1}{3^n} \right) < \frac{1}{3} +$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3^n} \right)}{1 - \frac{1}{3}} =$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^n} < \frac{1}{2},$$

$$\text{即 } \left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) \left(1 + \frac{1}{3^3} \right) \cdots \left(1 + \frac{1}{3^n} \right) <$$

$$e^{\frac{1}{2}} (n \in \mathbf{N}^*), \text{ 不等式得证.}$$

模块综合测试

刷综合

1. D 【解析】令 $a_n = 2^n - 11 < 0$, 因为 $n \in \mathbf{N}^*$, 所以解得 $n = 1, 2, 3$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项为负, 从第 4 项起为正, 所以 S_n 的最小值为 $S_3 = 2^1 - 11 + 2^2 - 11 + 2^3 - 11 = 14 - 33 = -19$. 故选 D.

2. C 【解析】由题意, 得 $y' = 10\pi \cdot \cos \left(2\pi t - \frac{2\pi}{3} \right)$, 故当 $\cos \left(2\pi t - \frac{2\pi}{3} \right) = 1$

$$\text{时, 瞬时速度最大, 此时 } 2\pi t - \frac{2\pi}{3} =$$

$$2k\pi, k \in \mathbf{N}, \text{ 即 } t = \frac{1}{3} + k, k \in \mathbf{N}, \text{ 所以 } t =$$

$\frac{1}{3}$ 时, 瞬时速度首次达到最大. 故选 C.

3. C 【解析】由 $f(x) = x^2 + ax$ 可得其导函数为 $f'(x) = 2x + a$, 由 $f'(x) = 2x + 1$, 可得 $a = 1$, 所以 $f(x) = x^2 + x$,

$$\text{所以 } \frac{1}{f(n)} = \frac{1}{n^2 + n} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

因此数列 $\left\{ \frac{1}{f(n)} \right\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 的前 100

$$\text{项和为 } \frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \cdots + \frac{1}{f(100)} = \frac{1}{1} -$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} =$$

$$\frac{100}{101}. \text{ 故选 C.}$$

4. C 【解析】等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前

n 项和分别为 S_n, T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{n}{2n+3}$,

$$\text{则 } \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{\frac{n(a_1+a_{2n-1})}{2}}{\frac{n(b_1+b_{2n-1})}{2}} = \frac{na_n}{nb_n} = \frac{a_n}{b_n}$$

【敲黑板: 等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 则 $\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{a_n}{b_n}$

$$\frac{2n-1}{2(2n-1)+3} = \frac{2n-1}{4n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(4n+1)-3}{4n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4n-2}{4n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2(2n-1)}{4n+1} = \frac{2n-1}{4n+1} < \frac{1}{2},$$

且当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{1}{2}$.

因为 $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists M > 0, \frac{a_n}{b_n} < M$, 所以 $M \geq \frac{1}{2}$, 即 M 的最小值为 $\frac{1}{2}$. 故选 C.

【点悟: $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{\max} < M$

5. B 【解析】依题意, 得 $a_{n+1} = 2a_n + b_n$, $b_{n+1} = 2b_n + a_n$, 则 $a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n)$, 而 $a_1 + b_1 = 1$, 因此数列 $\{a_n + b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 3 的等比数列, 则 $a_n + b_n = 3^{n-1}$.

又 $a_{n+1} - b_{n+1} = a_n - b_n$, 因此 $a_n - b_n = a_1 - b_1 = 1$, 于是 $a_n = \frac{3^{n-1}+1}{2}, b_n = \frac{3^{n-1}-1}{2}$.

对于 A, $a_4 = \frac{3^3+1}{2} = 14$, A 错误;

对于 B, $\frac{b_n}{a_n} = \frac{3^{n-1}-1}{3^{n-1}+1} = 1 - \frac{2}{3^{n-1}+1}$, 显然数列 $\left\{\frac{2}{3^{n-1}+1}\right\}$ 是递减数列, 因此 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 为递增数列, B 正确;

对于 C, $\sum_{i=1}^5 b_i = 0+1+4+13+40 = 58$, C 错误;

对于 D, $a_1 + \lambda b_1 = 1, a_2 + \lambda b_2 = 2 + \lambda, a_3 + \lambda b_3 = 5 + 4\lambda$, 由 $\{a_n + \lambda b_n\}$ 为等比数列, 得 $(2+\lambda)^2 = 5+4\lambda$, 解得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$, 当 $\lambda = 1$ 时, $a_n + \lambda b_n = 3^{n-1}$, 显然数列 $\{a_n + \lambda b_n\}$ 是等比数列, 当 $\lambda = -1$ 时, $a_n + \lambda b_n = 1$, 显然数列 $\{a_n + \lambda b_n\}$ 也是等比数列, 因此当数列 $\{a_n + \lambda b_n\}$ 是等比数列时, $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$, D 错误.

故选 B.

6. A 【解析】令 $f(x) = e^x - x - 1$, 则 $f'(x) = e^x - 1$, 当 $x > 0$ 时, $e^x > 1$, 所以 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $x < 0$ 时, $0 < e^x < 1$, 所以 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减. 所以 $f(x)_{\min} = f(0) = e^0 - 1 = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$, 即 $e^x \geq x+1$, 所以 $e^{x-1} \geq x$ (当且仅当 $x = 1$ 时取等号), 所以

$e^{-0.3} > 0.7$.

令 $g(x) = x - 1 - \ln x (x > 0)$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$,

当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

所以 $g(x)_{\min} = g(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$, 所以 $g(x) \geq 0$, 即 $x - 1 \geq \ln x$, 所以 $x \geq \ln(x+1)$ (当且仅当 $x = 0$ 时取等号), 所以 $0.7 > \ln 1.7$.

所以 $e^{-0.3} > 0.7 > \ln 1.7$, 即 $b > a > c$. 故选 A.

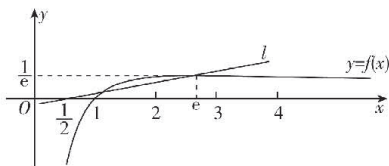
7. A 【解析】 $a_{2n+1} = a_{2n} + 3^n = a_{2n-1} + (-1)^n + 3^n$, 即 $a_{2n+1} - a_{2n-1} = (-1)^n + 3^n$, \therefore 当 $n \geq 2$ 时, $a_{2n-1} = (a_{2n-1} - a_{2n-3}) + (a_{2n-3} - a_{2n-5}) + \cdots + (a_3 - a_1) + a_1 = [(-1)^{n-1} + 3^{n-1}] + [(-1)^{n-2} + 3^{n-2}] + \cdots + (-1+3) + 1 = \frac{3^n-3}{2} - \frac{1-(-1)^{n-1}}{2} + 1 = \frac{3^n}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2} - 1$,

又 $a_1 = 1$ 满足上式, $\therefore a_{2n-1} = \frac{3^n}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2} - 1$,

$\therefore a_{2n} = a_{2n-1} + (-1)^n = \frac{3^n}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{2} - 1 + (-1)^n = \frac{3^n}{2} + \frac{(-1)^n}{2} - 1$.

故 $a_{2024} = \frac{3^{1012}}{2} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{3^{1012}-1}{2}$. 故选 A.

8. C 【解析】点 $P(x_0, f(x_0))$ 在直线 l 上方, 即 $\frac{\ln x_0}{x_0} > a(2x_0-1)$, 因为 $x > 0$, 所以 $\frac{\ln x}{x} > a(2x-1)$ 有且仅有一个正整数解. 由 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 得 $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$, 则当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$. 又当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x = 1$ 时, $f(x) = 0$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0^+$, 所以可得函数 $f(x)$ 的图象如图所示,



直线 $l: y = a(2x-1)$ 过定点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$,

当 $a \leq 0$ 时, $\frac{\ln x}{x} > a(2x-1)$ 有无数个正整数解, 不合题意, 故 $a > 0$.

又 $\frac{\ln x}{x} > a(2x-1)$ 有且仅有一个正整数

解, 所以 2 是唯一的正整数解,

$$\text{即 } \begin{cases} \frac{\ln 2}{2} > a \cdot (4-1), \\ \frac{\ln 3}{3} \leq a \cdot (6-1), \end{cases} \text{ 解得 } \frac{\ln 3}{15} \leq a < \frac{\ln 2}{6}.$$

故选 C.

9. AC 【解析】对于 A, 因为 $S_{15} < 0$, 所以 $a_1 + a_{15} = 2a_8 < 0$, 即 $a_8 < 0$, A 正确;

对于 B, 因为 $a_2 + a_8 = 2a_5 = 7$, 所以 $a_5 = \frac{7}{2}$, 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 又 $a_{10} = a_5 + 5d$,

所以只有 $d = \frac{7}{10}$ 时, 才有 $a_{10} = 7$, B 错误;

对于 C, 因为 $a_1 + a_2 = 6, a_7 + a_8 = 18$, 两式相减可得 $12d = 12$, 得 $d = 1$, 所以 $a_3 + a_4 = a_1 + a_2 + 4d = 6 + 4 = 10$, C 正确;

对于 D, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n \cdot a_{n+1} - a_{n-1} \cdot a_n = a_n(a_{n+1} - a_{n-1}) = 2da_n$, 因为 $\{a_n\}$ 为递增数列, 所以 $d > 0$, 所以当 $a_n > 0$ 时, $\{a_n \cdot a_{n+1}\}$ 为递增数列, 当 $a_n < 0$ 时, $\{a_n \cdot a_{n+1}\}$ 为递减数列, D 错误. 故选 AC.

10. BCD 【解析】A 项, 由 $\frac{2S_n}{a_n-1} = a_1$, 得

当 $n = 1$ 时, $\frac{2S_1}{a_1-1} = \frac{2a_1}{a_1-1} = a_1$, 且 $\{a_n\}$ 为正项数列, 可得 $a_1 = 3$, 由 $b_n = \frac{a_n-1}{a_n}$, 令 $n = 1$, 得 $b_1 = \frac{a_1-1}{a_1} = \frac{2}{3}$, 故 A 错误;

B 项, 由 A 知 $a_1 = 3$, 则 $\frac{2S_n}{a_n-1} = 3, S_n = \frac{3(a_n-1)}{2}$

【敲黑板: 常

利用 $a_n = S_n - S_{n-1} (n \geq 2)$ 转化 S_n 与 a_n 的关系式

$\frac{3}{2}(a_n-1)$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3}{2}(a_n-1) - \frac{3}{2}(a_{n-1}-1)$, 整理得 $a_n = 3a_{n-1}$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列, 所以 $a_n = 3^n$, 故 B 正确;

C 项, 令 $c_n = \frac{n}{a_n} = \frac{n}{3^n}$, 则 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1) \cdot 3^n}{n \cdot 3^{n+1}} = \frac{n+1}{3n}$,

由 $3n - (n+1) = 2n-1 > 0$, 可得 $\frac{c_{n+1}}{c_n} < 1$,

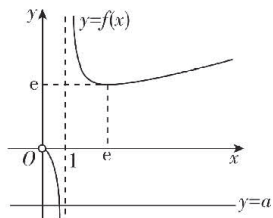
即 $c_{n+1} < c_n$, 则数列 $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ 单调递减, 故 C 正确;

D 项, $b_n = 1 - \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1}{3^n} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

因为函数 $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 在 \mathbb{R} 上单调递减, 所以数列 $\{b_n\}$ 单调递增, 则 $b_n \geq b_1 = \frac{2}{3}$, 故 D 正确. 故选 BCD.

11. BD 【解析】函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}, x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, 则 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$ 或 $1 < x < e$; 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > e$. 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, 1), (1, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, $x \rightarrow 0^+$ 时, $f(x) \rightarrow 0$; $x \rightarrow 1^-$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow 1^+$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 故 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



对于 A, 由上述分析可得 A 错误;

对于 B, 由 $f'(e^2) = \frac{\ln e^2 - 1}{(\ln e^2)^2} = \frac{1}{4}$,

$f(e^2) = \frac{e^2}{2}$, 得所求切线方程为 $y - \frac{e^2}{2} = \frac{1}{4}(x - e^2)$, 即 $x - 4y + e^2 = 0$, 故 B 正确;

对于 C, 方程 $a \ln x = x$ 只有一个解即方程 $f(x) = \frac{x}{\ln x} = a$ 只有一个解, 由图象可知, $a = e$ 或 $a < 0$, 故 C 错误;

对于 D, 设函数 $g(x) (x \in \mathbb{R})$ 的值域为 G , 函数 $f(x) (x \in (1, +\infty))$ 的值域为 E , 对于 $g(x) = x^2 + a, G = [a, +\infty)$, 对于 $f(x), E = [e, +\infty)$, 若 $\forall x_1 \in \mathbb{R}, \exists x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $g(x_1) = f(x_2)$ 成立, 则 $G \subseteq E$, 所以 $a \geq e$, 故 D 正确. 故选 BD.

12. $\frac{2}{n}$ 【解析】由 $a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}, a_1 = 2$ 可得 $a_n \neq 0$, 则 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{2a_n}$, 即 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}$, 又 $a_1 = 2$, 所以 $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$,

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为

公差的等差数列, 所以 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1)$, 即 $\frac{1}{a_n} = \frac{n}{2}$, 所以 $a_n = \frac{2}{n}$.

13.3 $\left(-\frac{5}{e^2}, 0\right)$ 【解析】设切点为 (t, te^t) , 对函数 $f(x)$ 求导得 $f'(x) = (x+1)e^x$, 则切线斜率为 $f'(t) = (t+1)e^t$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 (t, te^t) 处的切线方程为 $y - te^t = (t+1)e^t(x - t)$, 将点 P 的坐标代入切线方程可得 $m - te^t = (t+1)e^t(1 - t)$, 所以 $m = (-t^2 + t + 1)e^t$.

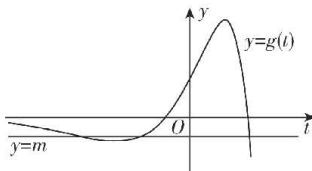
令 $g(t) = (-t^2 + t + 1)e^t, t \in \mathbb{R}$,

所以 $g'(t) = (-t^2 - t + 2)e^t = -(t+2) \cdot$

$(t-1)e^t$, 列表如下:

| t | $(-\infty, -2)$ | -2 | $(-2, 1)$ | 1 | $(1, +\infty)$ |
|---------|-----------------|------------------|-----------|-----|----------------|
| $g'(t)$ | - | 0 | + | 0 | - |
| $g(t)$ | 单调递减 | $-\frac{5}{e^2}$ | 单调递增 | e | 单调递减 |

由 $g(t) < 0$ 可得 $t^2 - t - 1 > 0$, 解得 $t < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 或 $t > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, 且 $t \rightarrow -\infty$ 时, $g(t) \rightarrow 0^-$, $t \rightarrow +\infty$ 时, $g(t) \rightarrow -\infty$, 作出函数 $g(t)$ 的大致图象如图所示.



由图可知, 当 $-\frac{5}{e^2} < m < 0$ 时, 直线 $y = m$ 与函数 $g(t)$ 的图象有三个公共点,

当 $m = -\frac{5}{e^2}$ 或 $0 \leq m < e$ 时, 直线 $y = m$ 与函数 $g(t)$ 的图象有两个公共点,

当 $m = e$ 或 $m < -\frac{5}{e^2}$ 时, 直线 $y = m$ 与函数 $g(t)$ 的图象有一个公共点, 当 $m > e$ 时, 直线 $y = m$ 与函数 $g(t)$ 的图象没有交点.

14.1 【解析】依题意, $f(x_1) = g(x_2)$, 即

$$x_1 e^{x_1} = -\frac{\ln x_2}{x_2} (x > 0),$$

$$\therefore -\frac{\ln x_2}{x_2} = \frac{1}{x_2} \ln \frac{1}{x_2} = e^{\ln \frac{1}{x_2}} \ln \frac{1}{x_2},$$

$$\therefore x_1 e^{x_1} = e^{\ln \frac{1}{x_2}} \ln \frac{1}{x_2}.$$

$\therefore f(x) = x e^x, \therefore f'(x) = e^x + x e^x > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

\therefore 函数 $f(x) = x e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $x_1 = \ln \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} = \frac{1}{x_2}$,

$$\therefore \frac{x_1}{x_2} - x_1 - \ln x_1 = x_1 e^{x_1} - (x_1 + \ln x_1) = e^{x_1 + \ln x_1} - (x_1 + \ln x_1),$$

【思维黑板】同构变形, 便于构造新函数研究最值

令 $t = x_1 + \ln x_1$, 显然 $t = x_1 + \ln x_1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $t \in \mathbb{R}$, 设 $h(t) = e^t - t$, 令 $h'(t) = e^t - 1 = 0$, 解得 $t = 0$,

当 $t \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(t) < 0$, 当 $t \in (0, +\infty)$ 时, $h'(t) > 0$,

$\therefore h(t)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(t)_{\min} =$

$h(0) = 1$. 即 $\frac{x_1}{x_2} - x_1 - \ln x_1$ 的最小值为 1.

15. 【解】(1) $f'(x) = 6x^2 - 2ax + 12$, 因为 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极小值 5, 所以 $f'(2) = 24 - 4a + 12 = 0$, 得 $a = 9$,

此时 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1) \cdot (x-2)$,

所以 $f(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处取得极小值, 符合题意,

所以 $a = 9$, 则 $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + b$. 又 $f(2) = 4 + b = 5$, 所以 $b = 1$.

(2) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$, 所以 $f'(x) = 6(x-1)(x-2)$.

列表如下:

| x | 0 | (0, 1) | 1 | (1, 2) | 2 | (2, 3) | 3 |
|---------|---|--------|-------|--------|-------|--------|----|
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | 1 | 单调递增 | 极大值 6 | 单调递减 | 极小值 5 | 单调递增 | 10 |

由于 $1 < 5$, 故当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(x)_{\min} = f(0) = 1$.

16. 【解】(1) 因为 $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_n = \frac{n^2 + n}{2}$,

当 $n \geq 2$ 时, $\log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \dots + \log_2 a_{n-1} = \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2}$,

两式相减, 得 $\log_2 a_n = \frac{n^2 + n}{2} - \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} = n$, 则 $a_n = 2^n$,

当 $n = 1$ 时, $\log_2 a_1 = 1$, 则 $a_1 = 2$, 满足上式, 所以 $a_n = 2^n$.

【思维陷阱】容易忽略 $n = 1$ 时是否成立

(2) 由 (1) 得 $n \cdot a_n = n \cdot 2^n$, 所以 $T_n = 1 \times 2 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \cdot 2^n$,

则 $2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \dots + n \cdot 2^{n+1}$.

两式相减, 得 $-T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \cdot 2^{n+1} = (1 - n) \cdot 2^{n+1} - 2$,

所以 $T_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$.

17. (1) 【证明】若 $a = 1$, 则 $f(x) = e^{2x} - e^x - x$, $f'(x) = 2e^{2x} - e^x - 1 = (2e^x + 1)(e^x - 1)$, 令 $f'(x) > 0$, 则 $e^x - 1 > 0$, 解得 $x > 0$; 令 $f'(x) < 0$, 则 $e^x - 1 < 0$, 解得 $x < 0$.

可知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 所以 $f(x) \geq f(0) = 0$.

(2) 【解】因为 $f'(x) = 2ae^{2x} + (a-2) \cdot e^x - 1 = (2e^x + 1)(ae^x - 1)$,

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 可知 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递减;

若 $a > 0$, 令 $f'(x) > 0$, 则 $ae^x - 1 > 0$, 解得 $x > -\ln a$,

令 $f'(x) < 0$, 则 $ae^x - 1 < 0$, 解得 $x < -\ln a$, 可知 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减.

综上所述: 若 $a \leq 0$, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递减;

若 $a > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单

调递增,在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减.

(3)【解】由(2)知若 $a \leq 0$,可知 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,

当 x 趋近于 $-\infty$ 时, $f(x)$ 趋近于 $+\infty$,

当 x 趋近于 $+\infty$ 时, $f(x)$ 趋近于 $-\infty$,

可知 $f(x)$ 有且仅有1个零点.

若 $a > 0$,可知 $f(x)$ 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增,在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减,

当 x 趋近于 $-\infty$ 或 $+\infty$ 时, $f(x)$ 趋近于 $+\infty$,

则 $f(x) \geq f(-\ln a) = \ln a - \frac{1}{a} + 1$.

又 $g(a) = \ln a - \frac{1}{a} + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,且 $g(1) = 0$,

当 $a > 1$ 时, $g(a) > 0$,即 $f(x) > 0$,可知 $f(x)$ 无零点;

当 $a = 1$ 时, $g(a) = 0$,可知 $f(x)$ 有且仅有1个零点;

当 $0 < a < 1$ 时, $g(a) < 0$,可知 $f(x)$ 有且仅有2个零点.

综上所述:当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 的零点个数为0;

当 $a = 1$ 或 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 的零点个数为1;

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 的零点个数为2.

18. (1)【解】当 $n \geq 2$ 时,

$$\because S_n = n^2 + n, \textcircled{1}$$

$$\therefore S_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1), \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2}, \text{得 } a_n = 2n,$$

又 $a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2$ 也符合上式,

$$\therefore a_n = 2n.$$

$$(2) \text{【解】} \because b_n = \frac{a_n + 4}{2^n a_n a_{n+1}} = \frac{2n+4}{2^n \cdot 2n(2n+2)} = \frac{1}{n \cdot 2^n} \cdot \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}},$$

$$\therefore T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 2^2} \right) +$$

$$\left(\frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3} \right) + \cdots + \left[\frac{1}{(n-1) \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{n \cdot 2^n} \right] + \left[\frac{1}{n \cdot 2^n} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} \right] =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}.$$

$$(3) \text{【证明】} \because c_n c_{n+1} = \frac{1}{2} a_{n+1} + 1 = \frac{1}{2} \cdot 2(n+1) + 1 = n+2, \textcircled{3}$$

$$\therefore c_n c_{n-1} = n+1 (n \geq 2), \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} - \textcircled{4}, \text{得 } c_n (c_{n+1} - c_{n-1}) = 1 (n \geq 2),$$

由已知可知 $c_n \neq 0$, $\therefore \frac{1}{c_n} = c_{n+1} - c_{n-1}$ ($n \geq 2$),

$$\text{又 } c_1 c_2 = 3, c_1 = 1, \therefore c_2 = 3,$$

$$\therefore \sum_{i=2}^n \frac{1}{c_i} = \sum_{i=2}^n c_{i+1} - \sum_{i=2}^n c_{i-1} = (c_3 + c_4 + \cdots + c_{n-1} + c_n + c_{n+1}) - (c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_{n-2} + c_{n-1}) = c_{n+1} + c_n - c_1 - c_2 = c_{n+1} + c_n - 4,$$

$$\text{又 } c_{n+1} + c_n - 4 > 2 \sqrt{c_n c_{n+1}} - 4 = 2 \cdot$$

$$\sqrt{n+2} - 4,$$

$$\text{故 } \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n} > \frac{1}{c_1} + 2\sqrt{n+2} - 4 = 2\sqrt{n+2} - 3.$$

19. (1)【解】设 $f(x)$ 图象的切点为 (m, e^m) , 又 $f'(x) = e^x$, 则 $l: y - e^m = e^m(x - m)$, 因为 l 过原点, 所以 $0 - e^m = e^m(0 - m)$, 可得 $m = 1$, 所以切线的斜率为 e .

设 $g(x)$ 图象的切点为 $(n, kn^2 + k)$, $g'(x) = 2kx$, 则有 $2kn = e$, 得 $n = \frac{e}{2k}$,

$$\text{由斜率公式可得 } \frac{k\left(\frac{e}{2k}\right)^2 + k - 0}{\frac{e}{2k} - 0} = e, \text{解}$$

$$\text{得 } k = \pm \frac{e}{2}.$$

(2) (i)【解】由题意有 $h(x) = e^x - kx^2 - k$, 所以 $h'(x) = e^x - 2kx$, 令 $h_1(x) = h'(x)$, 则 $h_1'(x) = e^x - 2k$.

当 $k = 0$ 时, $h(x) = e^x$ 单调递增, 此时 $h(x)$ 无极值点.

当 $k < 0$ 时, $h_1'(x) > 0$, 则 $h'(x)$ 单调递增, 且 $h'(0) = 1 > 0$, $h'\left(\frac{1}{2k}\right) = e^{\frac{1}{2k}} - 1 < 0$,

故存在 $t_0 \in \left(\frac{1}{2k}, 0\right)$ 使得 $h'(t_0) = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, t_0)$ 上单调递减, 在 $(t_0, +\infty)$ 上单调递增, 故 $h(x)$ 有一个极值点.

当 $k > 0$ 时, 令 $h_1'(x) = 0$ 得 $x = \ln 2k$, 且 $h_1'(x)$ 为增函数,

所以 $h'(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2k)$ 上单调递减, 在 $(\ln 2k, +\infty)$ 上单调递增,

故 $h'(x) \geq h'(\ln 2k) = e^{\ln 2k} - 2k \ln 2k = 2k(1 - \ln 2k)$.

当 $0 < k \leq \frac{e}{2}$, $h'(x) \geq 0$ 且等号不恒成立, 则 $h(x)$ 单调递增, 此时 $h(x)$ 无极值点.

当 $k > \frac{e}{2}$ 时, $h'(\ln 2k) < 0$, $h'(0) = 1 > 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h'(x) > 0$,

故 $\exists t_1 \in (0, \ln 2k)$, $\exists t_2 \in (\ln 2k, +\infty)$, 使得 $h'(t_1) = h'(t_2) = 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty, t_1)$, $(t_2, +\infty)$ 上单调递增, 在 (t_1, t_2) 上单调递减, 故 $h(x)$ 有两个极值点.

综上可得, 当 $k < 0$ 时, $h(x)$ 有一个极值点; 当 $0 \leq k \leq \frac{e}{2}$ 时, $h(x)$ 无极值点;

当 $k > \frac{e}{2}$ 时, $h(x)$ 有两个极值点.

(ii)【证明】由(i)知, 当 $k < 0$ 时, $h(x)$ 有一个负的极小值点 x_1 ,

又 $h(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递增, 即 x_1 为 $h(x)$ 的极小值点也是最小值点,

所以 $h(x)_{\min} = h(x_1) = e^{x_1} - kx_1^2 - k$, 又

$$h'(x_1) = e^{x_1} - 2kx_1 = 0, \text{即 } e^{x_1} = 2kx_1,$$

所以 $h(x_1) = 2kx_1 - kx_1^2 - k = -k \cdot (x_1 - 1)^2 > 0$, 故 $h(x)$ 无零点, 不满足题意;

当 $k > \frac{e}{2}$ 时, $h(x)$ 有两个正的极值点, 不妨设极大值点为 x_2 , 极小值点为 x_1 ,

由(i)可知 $0 < x_2 < 1 < \ln 2k < x_1$,

$h(x)$ 在 $(-\infty, x_2)$, $(x_1, +\infty)$ 上单调递增, 在 (x_2, x_1) 上单调递减,

$$h(x_2) = e^{x_2} - k(x_2^2 + 1) = 2kx_2 - k(x_2^2 + 1) = -k(x_2 - 1)^2 < 0,$$

故 $x \in (-\infty, x_1)$ 时, $h(x) \leq h(x_2) < 0$, 即 $h(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上无零点.

先证明当 $x > 2e$ 时, $e^x > x^3 + x$,

记 $n(x) = e^x - (x^3 + x)$ ($x > 2e$), 则 $n'(x) = e^x - 3x^2 - 1$, 令 $n_1(x) = n'(x)$, $n_1'(x) = e^x - 6x$,

令 $n_2(x) = n_1'(x)$, 则 $n_2'(x) = e^x - 6$, 当 $x > 2e$ 时 $n_2'(x) = e^x - 6 > 0$, 此时 $n_2(x)$ 单调递增,

故 $n_2(x) = e^x - 6x > e^{2e} - 12e > e^5 - 12e = e(e^4 - 12) > 0$, 故 $n'(x)$ 单调递增, 故 $n'(x) > n'(2e) = e^{2e} - 12e^2 - 1 > e^5 - 12e^2 - 1 = e^2(e^3 - 12) - 1 > e^2(2 \cdot 7^3 - 12) - 1 > 0$, 故 $n(x)$ 单调递增,

则 $n(x) = e^x - (x^3 + x) > e^{2e} - (8e^3 + 2e) = e[e^2(e^{2e-3} - 8) - 2] > e[e^2 \cdot (e^2 e^{0.4} - 8) - 2] > e[e^2(1.2 \times 7.29 - 8) - 2] > 0$,

故当 $x > 2e$ 时, $e^x > x^3 + x$. 所以 $h(4k) = e^{4k} - k[(4k)^2 + 1] > 4k[(4k)^2 + 1] - k[(4k)^2 + 1] = 3k[(4k)^2 + 1] > 0$,

又 $h(x_1) = -k(x_1 - 1)^2 < 0$, 故 $\exists x_0 \in (x_1, 4k)$, 使得 $h(x_0) = 0$, 故 $h(x)$ 有唯一的零点.

$$h(2x_1) = e^{2x_1} - k(2x_1)^2 - k, \text{又 } \frac{e^{x_1}}{2x_1} = k,$$

点悟: 研究 $2x_1$ 与 x_0 的大小关系即研究 $h(2x_1)$ 与0的大小关系

$$\text{所以 } h(2x_1) = k(4kx_1^2 - 4x_1^2 - 1) = k(2x_1 e^{x_1} - 4x_1^2 - 1),$$

$$\text{令 } \varphi(x) = 2xe^x - 4x^2 - 1 (x > 1), \text{则 } \varphi'(x) = (2x+2)e^x - 8x,$$

$$\text{令 } p(x) = e^x - x - 1, \text{则 } p'(x) = e^x - 1,$$

当 $x > 0$ 时, $p'(x) > 0$, $p(x)$ 单调递增, 当 $x < 0$ 时, $p'(x) < 0$, $p(x)$ 单调递减,

所以 $p(x) \geq p(0) = 0$, 故 $e^x \geq x + 1$, 所以 $\varphi'(x) \geq (2x+2)(x+1) - 8x = 2(x-1)^2 \geq 0$ 且不恒为0,

即 $\varphi(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $\varphi(x) > \varphi(1) = 2e - 5 > 0$,

故 $h(2x_1) > 0 = h(x_0)$, 又 $h(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $2x_1 > x_0$.

综上, 若 x_1 为 $h(x)$ 的极小值点, x_0 为 $h(x)$ 的零点, 恒有 $2x_1 > x_0$.