

$\therefore f(x) = xe^x$  有极小值  $f(-1) = -\frac{1}{e}$ , 无极大值.

(2) 由题知函数  $g(x) = x + a \ln x + m$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 求得  $g'(x) = 1 + \frac{a}{x}$ .

当  $a \geq 0$  时,  $g'(x) > 0$  恒成立, 函数  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

当  $a < 0$  时, 由  $g'(x) < 0$ , 得  $x \in (0, -a)$ ; 由  $g'(x) > 0$ , 得  $x \in (-a, +\infty)$ , 则函数  $g(x)$  在  $(0, -a)$  上单调递减, 在  $(-a, +\infty)$  上单调递增.

综上所述, 当  $a \geq 0$  时, 函数  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

当  $a < 0$  时, 函数  $g(x)$  在  $(0, -a)$  上单调递减, 在  $(-a, +\infty)$  上单调递增.

(3) 当  $a = 1$  时,  $g(x) = x + \ln x + m$ , 不等

式  $g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq xe^x - x - \ln x$ , 令函数  $h(x) = xe^x - x - \ln x$ , 依题意  $\forall x \in (0, +\infty)$ ,  $m \leq h(x)$  恒成立, 则  $m \leq h(x)_{\min}$ ,

则  $h'(x) = e^x + xe^x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{xe^x + x^2e^x - x - 1}{x} = \frac{(xe^x - 1)(x+1)}{x}$ ,

令  $\varphi(x) = xe^x - 1$ ,  $x > 0$ , 求得  $\varphi'(x) = e^x(x+1) > 0$ , 则函数  $\varphi(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

而  $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{e} - 1 < 0$ ,  $\varphi(1) = e - 1 > 0$ , 则存在  $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 使  $\varphi(x_0) = 0$ ,

即  $h'(x_0) = 0$ , 此时  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ ,

当  $x \in (0, x_0)$  时,  $h'(x) < 0$ , 当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $h'(x) > 0$ , 则函数  $h(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增,

因此  $h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0e^{x_0} - x_0 - \ln x_0$ , 由  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ , 得  $x_0 = -\ln x_0$ ,

则  $h(x_0) = 1 - x_0 + x_0 = 1$ , 则  $m \leq 1$ , 故实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, 1]$ .

**多种解法** (3) 由题得  $m \leq xe^x - x - \ln x = e^{x+\ln x} - (x + \ln x)$  ( $x > 0$ ), 记  $t = x + \ln x$  ( $t \in \mathbb{R}$ ), 令  $h(t) = e^t - t$ , 则  $h'(t) = e^t - 1$ , 当  $t < 0$  时,  $h'(t) < 0$ ,  $h(t)$  单调递减, 当  $t > 0$  时,  $h'(t) > 0$ ,  $h(t)$  单调递增, 则  $h(t) \geq h(0) = e^0 - 0 = 1$ , 则  $m \leq 1$ . 故实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, 1]$ .

## 专题5 含参函数单调性的分类讨论

### 刷难关

**1. 【解】** (1) 当  $a = 3$  时,  $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}$ , 则  $f'(x) = 3x^2 + 5x - 2$ ,  $f'(1) = 6$ .

又  $f(1) = 1 + \frac{5}{2} - 2 - \frac{1}{2} = 1$ , 所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y = 6(x - 1) + 1$ , 即  $6x - y - 5 = 0$ .

(2)  $f'(x) = ax^2 + (2a - 1)x - 2 = (ax - 1)(x + 2)$ .

当  $a = 0$  时, 由  $f'(x) = -(x + 2) = 0$  可得  $x = -2$ , 当  $x \in (-\infty, -2)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增, 当  $x \in (-2, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减.

当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = (ax - 1)(x + 2) = 0$ , 可得  $x = \frac{1}{a}$  或  $x = -2$ ,

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -2)$ ,  $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$  上单调递增, 在  $\left(-2, \frac{1}{a}\right)$  上单调递减.

当  $a < 0$  时, 若  $-\frac{1}{2} < a < 0$ , 则  $f(x)$  在  $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right)$ ,  $(-2, +\infty)$  上单调递减, 在  $\left(\frac{1}{a}, -2\right)$  上单调递增.

若  $a = -\frac{1}{2}$ , 则  $f'(x) \leq 0$  且等号不恒成立,  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上为减函数.

若  $a < -\frac{1}{2}$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, -2)$ ,  $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$  上单调递减, 在  $\left(-2, \frac{1}{a}\right)$  上单调递增.

综上, 若  $a = 0$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, -2)$  上单调递增, 在  $(-2, +\infty)$  上单调递减.

若  $a > 0$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, -2)$ ,  $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$  上单调递增, 在  $\left(-2, \frac{1}{a}\right)$  上单调递减.

若  $-\frac{1}{2} < a < 0$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, \frac{1}{a})$ ,  $(-2, +\infty)$  上单调递减, 在  $\left(\frac{1}{a}, -2\right)$  上单调递增.

若  $a = -\frac{1}{2}$ , 则  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上为减函数.

若  $a < -\frac{1}{2}$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, -2)$ ,  $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$  上单调递减, 在  $\left(-2, \frac{1}{a}\right)$  上单调递增.

**规律方法** 对于利用导数讨论含参函数的单调性问题, 常见的分类讨论点有以下三个:

(1) 求导后, 考虑  $f'(x) = 0$  是否有实根, 从而引起分类讨论;

(2) 求导后,  $f'(x) = 0$  有实根, 但不清楚  $f'(x) = 0$  的实根是否落在定义域内, 从而引起分类讨论;

(3) 求导后,  $f'(x) = 0$  有实根, 且根落在定义域内, 但不清楚这些根的大小关系, 从而引起分类讨论.

在求解导数中含参数的函数单调性问题时, 可根据题意选择恰当的分类讨论方法. 在具体问题中, 可能要讨论其中的两点或三点, 这时的讨论就会复杂一些了, 有些题目也可以根据式子和题目的特点进行灵活处理, 减少分类讨论.

**2. (1) 【证明】** 当  $a = -1$  时,  $f(x) = x - \ln x$ , 则  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$ ,  $x > 0$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = 1$ , 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > 1$ , 令  $f'(x) < 0$ , 得  $0 < x < 1$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(x) \geq f(1) = 1$ .

(2) 【解】  $h(x) = f(x) - g(x) = x - (a + 2) \ln x - \frac{a+1}{x}$ , 其中  $x > 0$ , 则  $h'(x) = 1 - \frac{a+2}{x} + \frac{a+1}{x^2} = \frac{x^2 - (a+2)x + (a+1)}{x^2} = \frac{(x-1)[x-(a+1)]}{x^2}$ .

① 当  $a+1 \leq 0$ , 即  $a \leq -1$  时, ② 当  $0 < a+1 < 1$ , 即  $-1 < a < 0$  时, ③ 当  $a+1 \geq 1$ , 即  $a \geq 0$  时,

① 当  $a+1 \leq 0$ , 即  $a \leq -1$  时, ② 当  $0 < a+1 < 1$ , 即  $-1 < a < 0$  时, ③ 当  $a+1 \geq 1$ , 即  $a \geq 0$  时,

① 当  $a+1 \leq 0$ , 即  $a \leq -1$  时, ② 当  $0 < a+1 < 1$ , 即  $-1 < a < 0$  时, ③ 当  $a+1 \geq 1$ , 即  $a \geq 0$  时,

此时函数  $h(x)$  的单调递增区间为  $(0, a+1)$ ,  $(1, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(a+1, 1)$ ;

③ 当  $a+1 = 1$ , 即  $a = 0$  时, 对任意的  $x > 0$ ,  $h'(x) \geq 0$  且等号不恒成立, 此时函数  $h(x)$  的单调递增区间为  $(0, +\infty)$ , 无单调递减区间;

④ 当  $a+1 > 1$ , 即  $a > 0$  时, 由  $h'(x) > 0$ , 可得  $0 < x < 1$  或  $x > a+1$ , 由  $h'(x) < 0$ , 可得  $1 < x < a+1$ , 此时函数  $h(x)$  的单调递增区间为  $(0, 1)$ ,  $(a+1, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(1, a+1)$ .

综上所述, ① 当  $a \leq -1$  时, 函数  $h(x)$  的单调递减区间为  $(0, 1)$ , 单调递增区间为  $(1, +\infty)$ ;

② 当  $-1 < a < 0$  时, 函数  $h(x)$  的单调递增区间为  $(0, a+1)$ ,  $(1, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(a+1, 1)$ ;

③ 当  $a = 0$  时, 函数  $h(x)$  的单调递增区间为  $(0, +\infty)$ , 无单调递减区间;

④ 当  $a > 0$  时, 函数  $h(x)$  的单调递增区间为  $(0, 1)$ ,  $(a+1, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(1, a+1)$ .

**3. 【解】** (1) 由题意得  $f(\pi) = \pi^2 - 2$ , 又  $f'(x) = 2x - 2\sin x$ , 所以  $f'(\pi) = 2\pi$ , 因此曲线  $y = f(x)$  在点  $(\pi, f(\pi))$  处的切线方程为  $y - (\pi^2 - 2) = 2\pi(x - \pi)$ , 即  $y = 2\pi x - \pi^2 - 2$ .

(2) 由题意得  $h(x) = e^x(\cos x - \sin x + 2x - 2) - a(x^2 + 2\cos x)$ , 则  $h'(x) = e^x(\cos x - \sin x + 2x - 2) + e^x(-\sin x - \cos x + 2) - a(2x - 2\sin x) = 2e^x(x - \sin x) - 2a(x - \sin x) = 2(e^x - a)(x - \sin x)$ .

**悟:** 复杂的导数不要怕, 先尝试能否因式分解, 如果可以因式分解, 就把一个复杂代数式的正负转化成了多个简单代数式的正负.

令  $m(x) = x - \sin x$ , 则  $m'(x) = 1 - \cos x \geq 0$  且等号不恒成立, 所以  $m(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增.

又因为  $m(0) = 0$ , 所以当  $x > 0$  时,  $m(x) > 0$ , 当  $x < 0$  时,  $m(x) < 0$ .

① 当  $a \leq 0$  时,  $e^x - a > 0$  恒成立, 当  $x < 0$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减, 当  $x > 0$  时,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增, 所以当  $x = 0$  时  $h(x)$  取得极小值, 极小值是  $h(0) = -2a - 1$ .

② 当  $a > 0$  时,  $h'(x) = 2(e^x - e^{\ln a})(x - \sin x)$ .



$\sin x)$ , 由  $h'(x) = 0$ , 得  $x = \ln a$  或  $x = 0$ .

当  $0 < a < 1$  时,  $\ln a < 0$ ,

当  $x \in (-\infty, \ln a)$  时,  $e^x - e^{\ln a} < 0$ ,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增;

当  $x \in (\ln a, 0)$  时,  $e^x - e^{\ln a} > 0$ ,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减;

当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $e^x - e^{\ln a} > 0$ ,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增.

所以当  $x = \ln a$  时  $h(x)$  取得极大值, 极大值是  $h(\ln a) = -a[\ln^2 a - 2\ln a + \sin(\ln a) + \cos(\ln a) + 2]$ ; 当  $x = 0$  时  $h(x)$  取到极小值, 极小值是  $h(0) = -2a - 1$ .

当  $a = 1$  时,  $\ln a = 0$ ,

所以当  $x \in (-\infty, +\infty)$  时,  $h'(x) \geq 0$  且等号不恒成立, 所以函数  $h(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增, 无极值.

当  $a > 1$  时,  $\ln a > 0$ ,

所以当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $e^x - e^{\ln a} < 0$ ,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增;

当  $x \in (0, \ln a)$  时,  $e^x - e^{\ln a} < 0$ ,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减;

当  $x \in (\ln a, +\infty)$  时,  $e^x - e^{\ln a} > 0$ ,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增.

所以当  $x = 0$  时  $h(x)$  取得极大值, 极大值是  $h(0) = -2a - 1$ ; 当  $x = \ln a$  时  $h(x)$  取得极小值, 极小值是  $h(\ln a) = -a[\ln^2 a - 2\ln a + \sin(\ln a) + \cos(\ln a) + 2]$ .

综上所述, 当  $a \leq 0$  时,  $h(x)$  在  $(-\infty,$

$0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 函数  $h(x)$  有极小值, 极小值是  $h(0) = -2a - 1$ , 无极大值;

当  $0 < a < 1$  时, 函数  $h(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$ ,  $(0, +\infty)$  上单调递增, 在  $(\ln a, 0)$  上单调递减, 函数  $h(x)$  有极大值, 也有极小值, 极大值是  $h(\ln a) = -a[\ln^2 a - 2\ln a + \sin(\ln a) + \cos(\ln a) + 2]$ , 极小值是  $h(0) = -2a - 1$ ;

当  $a = 1$  时, 函数  $h(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增, 无极值;

当  $a > 1$  时, 函数  $h(x)$  在  $(-\infty, 0)$ ,  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增, 在  $(0, \ln a)$  上单调递减, 函数  $h(x)$  有极大值, 也有极小值, 极大值是  $h(0) = -2a - 1$ ; 极小值是  $h(\ln a) = -a[\ln^2 a - 2\ln a + \sin(\ln a) + \cos(\ln a) + 2]$ .

4. (1) 【证明】 $f(x) = \ln(x+m)$  在定义域内是增函数,  $\therefore$  当  $m \leq 1$  时,  $f(x) = \ln(x+m) \leq \ln(x+1)$ ,

要证  $f(x) < e^x$ , 只需证  $\ln(x+1) < e^x$ .

设  $F(x) = e^x - \ln(x+1)$  ( $x > -1$ ), 则  $F'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ ,

$\therefore F'(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 且  $F'(0) = 0$ ,  $\therefore$  当  $-1 < x < 0$  时,  $F'(x) < 0$ , 当  $x > 0$  时,  $F'(x) > 0$ ,  $\therefore F(x)$  在  $(-1, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

$\therefore F(x) \geq F(0) = e^0 - \ln 1 = 1 > 0$ , 即  $e^x > \ln(x+1)$ , 故当  $m \leq 1$  时,  $f(x) < e^x$ .

(2) 【解】当  $m = 0$  时,  $f(x) = \ln x$ ,

$0 < x < 1$ ,

所以  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

所以  $g(x) \geq g(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1 > 0$ ,

故  $a = 1$  时,  $xf(x) + \frac{1}{2}x^2 - x > \frac{1}{2}$ .

**名师点拨** 证明函数不等式的基本思路是构造差函数求最值和 0 比较, 但实际做题时, 有些差函数求导形式不佳, 不好研究, 要适当地对差函数变形后再研究.

**规律方法** 考虑到对数函数  $y = \ln x$  的导函数  $y' = \frac{1}{x}$  不含对数, 形式简单, 但如果对数函数和其他函数相乘, 求导后依然含有对数函数, 导函数就不好研究, 所以在构造函数时, 尽量让对数“单身”, 不要和其他函数相乘.

2. (1) 【解】 $f'(x) = e^x + xe^x - x - 1 = e^x(x+1) - (x+1) = (x+1)(e^x - 1)$ , 令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = -1$  或  $x = 0$ ,

当  $x < -1$  或  $x > 0$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $-1 < x < 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,

则  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$ ,  $(0, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-1, 0)$  上单调递减,

则  $f(x)$  的极大值为  $f(-1) = -\frac{1}{e} - \frac{1}{2}$ ,

$f(x)$  的极小值为  $f(0) = -1$ .

(2) 【证明】由题意知, 要证  $f(x) \geq \ln x - \frac{1}{2}x^2$ , 即证  $xe^x - x - 1 \geq \ln x$  对于  $x \in (0, +\infty)$  恒成立.

令  $g(x) = xe^x - x - \ln x - 1$ , 则  $g'(x) = e^x + xe^x - 1 - \frac{1}{x} = (x+1)\left(e^x - \frac{1}{x}\right)$ .

$f'(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $g(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x$ , 定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$\therefore g'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2}$ .

① 当  $a \leq 2$  时,  $x^2 - ax + 1 \geq 0$  在  $(0, +\infty)$

恒成立 (当且仅当  $a = 2, x = 1$  时取等号),  $\therefore g'(x) \leq 0$  且等号不恒成立, 故  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减.

② 当  $a > 2$  时, 令  $g'(x) = 0$ , 则方程  $x^2 - ax + 1 = 0$  有两个不相等的正实根

$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ ,

当  $x \in \left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$  时,  $g'(x) < 0$ , 当  $x \in \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$  时,  $g'(x) > 0$ ,

$\therefore g(x)$  在  $\left(0, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$  上单调递减, 在  $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$  上单调递增.

因为  $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $h(1) = e - 1 > 0$ ,  $h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$ ,

所以  $h(x)$  在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  上存在唯一的零点  $x_0$ , 则  $e^{x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$ , 即  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$ , 可得

$\ln x_0 = -x_0$ . 又  $x+1 > 0$ , 则令  $g'(x) < 0$ , 得  $0 < x < x_0$ ; 令  $g'(x) > 0$ , 得  $x > x_0$ ,

故  $g(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增, 故  $g(x)_{\min} = g(x_0) = x_0 e^{x_0} - x_0 - \ln x_0 - 1 = 0$ ,

通过零点  $x_0$  满足  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0} = 0$ , 进行整体代换并求值

所以  $x > 0$  时,  $g(x) \geq 0$  恒成立, 从而  $xe^x - x - 1 \geq \ln x$  恒成立, 即  $f(x) \geq \ln x - \frac{1}{2}x^2$  成立.

**多种解法** (2) (构造指对同构式)

要证  $f(x) \geq \ln x - \frac{1}{2}x^2$ , 即证  $xe^x - x - 1 \geq \ln x$ , 即证  $e^{x+\ln x} - (x+\ln x) - 1 \geq 0$ , 令  $t = x + \ln x \in \mathbf{R}$ , 即证  $e^t - t - 1 \geq 0$ .

令  $g(t) = e^t - t - 1$ ,  $t \in \mathbf{R}$ , 则  $g'(t) = e^t - 1$ ,

令  $g'(t) > 0$ , 得  $t > 0$ , 令  $g'(t) < 0$ , 得  $t < 0$ , 所以  $g(t)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

所以  $g(t) \geq g(0) = 0$ , 即  $e^t - t - 1 \geq 0$ , 故  $f(x) \geq \ln x - \frac{1}{2}x^2$  成立.

## 刷难关

1. (1) 【解】由函数  $f(x) = \frac{2}{x} + a \ln x$ , 可得

其定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{ax-2}{x^2}$ .

① 当  $a \leq 0$  时, 由  $x > 0$ , 得  $ax - 2 < 0$  恒成立,  $x^2 > 0$  恒成立, 所以  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减.

② 当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > \frac{2}{a}$ ; 令  $f'(x) < 0$ , 得  $0 < x < \frac{2}{a}$ ,

所以  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{2}{a}\right)$  上单调递减, 在  $\left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$  上单调递增.

综上所述, 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减;

当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{2}{a}\right)$  上单调递减, 在  $\left(\frac{2}{a}, +\infty\right)$  上单调递增.

(2) 【证明】当  $a = 1$  时,  $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$  ( $x > 0$ ), 要证  $2 + x \ln x + \frac{1}{2}x^2 - x > \frac{1}{2}$ ,

即证  $\ln x + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{2x} > 0$ .

令  $g(x) = \ln x + \frac{1}{2}x - 1 + \frac{3}{2x}$  ( $x > 0$ ),

则  $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2x^2} = \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{2x^2}$ ,

令  $g'(x) > 0$ , 得  $x > 1$ , 令  $g'(x) < 0$ , 得



**规律方法** (1) 隐零点: 有些导函数或函数的零点存在但无法直接求解出来, 在这种情况下, 我们可以考虑对这个零点“设而不求”, 然后谋求一种整体的代换和过渡, 再结合其他条件获得问题的解决, 这种零点我们一般称为隐零点.

利用隐零点证明不等式的步骤:

第一步: 用零点存在定理判断导函数零点的存在性, 列出零点满足的方程, 并结合函数的单调性得到隐零点的取值范围.

第二步: 以零点为分界点, 说明导函数符号的正负, 进而得到题设函数最值的表达式.

第三步: 对导函数隐零点满足的方程进行适当变形, 整体代入函数最值表达式中进行化简, 从而得到函数最值的正负.

(2) 指对同构: 所研究的函数同时包含指数和对数形式, 解析式比较复杂, 直接求导不好研究导函数正负的时候, 可以考虑根据指数与对数的运算关系, 对函数进行代数变形, 构造出相同的形式, 得到复合函数, 然后拆分成内、外函数, 分步研究, 降低研究难度.

3. (1) 【解】 $f(x) = e^x - x^2, x \in \mathbf{R}, f'(x) = e^x - 2x$ ,

当  $x_0 = 1$  时,  $f(x_0) = e^1 - 1^2 = e - 1$ ,

$f'(x_0) = e^{x_0} - 2x_0 = e - 2$ ,

因此切线  $l: y - (e - 1) = (e - 2)(x - 1)$ ,

当  $y = 0$  时, 可得  $x_1 = \frac{e-1}{e-2} + 1 = \frac{1}{e-2}$ .

(2) 【解】当切点为  $(x_n, f(x_n))$  时, 切线方程为  $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$ .

当  $y = 0$  时, 可得  $x_{n+1} = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n =$

$\frac{e^{x_n} - x_n^2}{e^{x_n} - 2x_n} + x_n = \frac{x_n e^{x_n} - 2x_n^2 - e^{x_n} + x_n^2}{e^{x_n} - 2x_n} =$

$\frac{e^{x_n}(x_n - 1) - x_n^2}{e^{x_n} - 2x_n} (n \in \mathbf{N})$ ,

即  $x_{n+1} = \frac{e^{x_n}(x_n - 1) - x_n^2}{e^{x_n} - 2x_n} (n \in \mathbf{N})$ .

(3) 【证明】由 (1) 知, 曲线  $f(x)$  在点  $(1, e - 1)$  处的切线方程为  $y = (e - 2) \cdot x + 1$ .

① 先证: 当  $x > 0$  时,  $f(x)$  的图象不在切线  $y = (e - 2)x + 1$  的下方, 即当  $x > 0$  时,  $e^x - x^2 \geq (e - 2)x + 1$ , 即  $e^x - x^2 - (e - 2)x - 1 \geq 0$ .

令  $h(x) = e^x - x^2 - (e - 2)x - 1, x \in [0, +\infty)$ , 易知  $h'(x) = e^x - 2x - (e - 2)$ , 令  $h'(x) = m(x) = e^x - 2x - (e - 2)$ , 可得  $m'(x) = e^x - 2$ , 由  $m'(x) = 0$ , 可得  $x = \ln 2$ , 则当  $0 < x < \ln 2$  时,  $m'(x) < 0, m(x)$  单调递减, 当  $x > \ln 2$  时,  $m'(x) > 0, m(x)$  单调递增,

$\therefore h'(x)$  在  $[0, \ln 2)$  上单调递减, 在  $(\ln 2, +\infty)$  上单调递增, 又  $h'(\ln 2) = 4 - e - 2\ln 2 < 0, h'(0) = 3 - e > 0, h'(1) = 0$ ,

$\therefore$  存在  $x_0 \in (0, \ln 2)$  使得  $h'(x_0) = 0$ ,  $\therefore h(x)$  在  $[0, x_0)$  上单调递增, 在  $(x_0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增.

又  $h(0) = h(1) = 0, \therefore$  当  $x > 0$  时,  $h(x) \geq 0$ , 即  $e^x - x^2 \geq (e - 2)x + 1$ , 即  $f(x) \geq (e - 2)x + 1$ .

② 下证:  $(e - 2)x + 1 \geq g(x) = x \ln x - x^2 + (e - 1)x + 1$ ,

即  $(e - 2)x + 1 - [x \ln x - x^2 + (e - 1)x + 1] \geq 0$ , 整理得  $x^2 - x \ln x \geq 0$ , 又  $x > 0$ , 则即证  $x - \ln x \geq 0$ .

令  $p(x) = x - \ln x (x > 0)$ ,

则  $p'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, \therefore p(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 又  $p(1) = 0$ ,

显然当  $x > 0$  时,  $p(x) \geq 0$  恒成立, 即  $(e - 2)x + 1 \geq g(x)$  恒成立.

由①②可得  $f(x) \geq (e - 2)x + 1 \geq g(x)$ , 即  $f(x) \geq g(x)$ .

**规律方法** (1) 放缩: 证明一些复杂的函数不等式时 (包含指、对、幂、三角等多种函数类型), 直接构造差函数求导研究非常困难, 可以考虑将其中复杂的指、对、三角放缩成较简单的幂形式, 再进行研究.

(2) 放缩不等式

① 需要积累一些常见的放缩不等式:  $e^x \geq x + 1, \ln x \leq x - 1 (x > 0)$ , 以及由上述不等式变形得到的  $e^x \geq ex, e^x \leq$

$\frac{1}{1-x} (x < 1), \ln x \leq \frac{x}{e} (x > 0), \ln x \geq 1 -$

$\frac{1}{x} (x > 0)$ .

② 如果简单的放缩不等式不足以解题, 考虑看看题目的背景和前面的问题, 本题的背景是切线放缩 (实际上  $e^x \geq x + 1, \ln x \leq x - 1 (x > 0)$  这两个不等式也源自切线放缩), 所以可以构造切线不等式解题, 注意到  $x = 1$  时不等式等号成立, 可以猜测利用曲线在  $x = 1$  处的切线进行过渡, 即为本题的解题思路.

4. (1) 【解】函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = ae^x \ln x + \frac{a}{x} e^x - \frac{b}{x^2} e^{x-1} +$

$\frac{b}{x} e^{x-1}$ . 由题意可得  $f(1) = b = 2$ ,

$f'(1) = ae = e$ . 故  $a = 1, b = 2$ .

(2) 【证明】由 (1) 知,  $f(x) = e^x \ln x + \frac{2}{x} \cdot e^{x-1}$ , 从而  $f(x) > 1$  等价于  $x \ln x >$

$xe^{-x} - \frac{2}{e}, x > 0$ .

**点悟:** 复杂的指对形式如果放在一起研究太过麻烦, 可以考虑分离成两个相对简单的函数, 即  $g(x) > h(x)$ , 并使得  $g(x)_{\min} > h(x)_{\max}$ , 或  $g(x)_{\min} \geq h(x)_{\max}$  且等号不在同一点处取得, 即可证明原不等式.

设函数  $g(x) = x \ln x$ , 则  $g'(x) = 1 + \ln x$ , 所以当  $x \in (0, \frac{1}{e})$  时,  $g'(x) < 0$ ;

当  $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ ,

故  $g(x)$  在  $(0, \frac{1}{e})$  上单调递减, 在  $(\frac{1}{e}, +\infty)$  上单调递增, 从而  $g(x) \geq$

$g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$ .

设函数  $h(x) = xe^{-x} - \frac{2}{e}$ , 则  $h'(x) = e^{-x} \cdot (1 - x)$ ,

所以当  $x \in (0, 1)$  时,  $h'(x) > 0$ ; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $h'(x) < 0$ , 故  $h(x)$  在  $(0,$

$1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 从而  $h(x) \leq h(1) = -\frac{1}{e}$ .

综上, 当  $x > 0$  时,  $g(x) > h(x)$  (最值不在同一点处取得, 因此取不到等号), 即  $f(x) > 1$ .

**名师点拨** 显然第 (2) 问中

“ $g(x)_{\min} > h(x)_{\max}$  (或  $g(x)_{\min} \geq h(x)_{\max}$  且等号不在同一点处取得)”是“ $f(x) > 1$ ”的充分不必要条件, 此法也算是某种意义上的放缩.

这个方法中, 如何构造合适的  $g(x)$ ,  $h(x)$  是难点.

考虑到  $g(x)$  有最小值,  $h(x)$  有最大值, 而含指、对的函数一般不在定义域上单调, 结合经验, 可以考虑构造  $g(x)$  下凸, 有最小值,  $h(x)$  上凸, 有最大值, 并且  $g(x)_{\min} > h(x)_{\max}$  (或  $g(x)_{\min} \geq h(x)_{\max}$  且等号不在同一点处取得).

常见的下凸且有最小值的函数有  $y =$

$xe^x, y = x \ln x (x > 0), y = \frac{e^x}{x} (x > 0), y =$

$\frac{x}{\ln x} (x > 1)$ .

常见的上凸且有最大值的函数有  $y =$

$\frac{x}{e^x}, y = \frac{\ln x}{x} (x > 0)$ , 与上述函数形式

类似的函数也可以具有类似的性质.

5. (1) 【解】 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+m}$ . 由 0 是  $f(x)$  的

极值点, 得  $f'(0) = 0$ , 所以  $m = 1$ .

于是  $f(x) = e^x - \ln(x + 1)$ , 定义域为

$(-1, +\infty)$ ,  $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$ .

函数  $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1}$  在  $(-1, +\infty)$  上单

调递增, 且  $f'(0) = 0$ ,

因此当  $x \in (-1, 0)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(-1, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 符合题意.

(2) 【证明】当  $m \leq 2, x \in (-m, +\infty)$  时,  $\ln(x+m) \leq \ln(x+2)$ , 所以  $e^x - \ln(x+$

$m) \geq e^x - \ln(x+2)$ .

**点悟:** 所证不等式是关于  $m, x$  的

二元不等式, 且二元无关, 可以考虑先研究简单的  $m$ , 再研究较复杂的  $x$ .

$m) \geq e^x - \ln(x+2)$ , 故只需证明当  $m = 2$  时,  $f(x) > 0$ .

当  $m = 2$  时, 函数  $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$  在

$(-2, +\infty)$  上单调递增.

又  $f'(-1) = \frac{1}{e} - 1 < 0, f'(0) = \frac{1}{2} > 0$ , 故

$f'(x) = 0$  在  $(-2, +\infty)$  上有唯一实根  $x_0$ , 且  $x_0 \in (-1, 0)$ .

当  $x \in (-2, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 从而当  $x = x_0$  时,  $f(x)$  取得最小值.

由  $f'(x_0) = 0$ , 得  $e^{x_0} = \frac{1}{x_0+2}$ , 得  $\ln(x_0 +$

$2) = -x_0$ , 故  $f(x) \geq f(x_0) = \frac{1}{x_0+2} + x_0 =$

$\frac{(x_0+1)^2}{x_0+2} > 0$ .

综上, 当  $m \leq 2$  时,  $f(x) > 0$ .



**多种解法** (2) (利用常见的切线不等式放缩证明)

当  $m \leq 2, x \in (-m, +\infty)$  时,  $\ln(x+m) \leq \ln(x+2)$ ,

故只需证明当  $m=2$  时,  $f(x) > 0$ ,

当  $m=2$  时,  $f(x) = e^x - \ln(x+2)$ .

令  $g(x) = e^x - x - 1 (x \in \mathbb{R})$ , 则  $g'(x) = e^x - 1$ , 令  $g'(x) > 0$ , 得  $x > 0$ , 令  $g'(x) < 0$ , 得  $x < 0$ .

所以  $g(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

所以  $g(x) \geq g(0) = 1 - 0 - 1 = 0$ , 则  $e^x \geq x + 1$ , 当且仅当  $x = 0$  时等号成立.

令  $\ln(x+2)$  替换  $x$ , 得  $e^{\ln(x+2)} \geq \ln(x+2) + 1$ ,

即  $x+1 \geq \ln(x+2)$ , 当且仅当  $\ln(x+2) = 0$ , 即  $x = -1$  时等号成立.

所以  $f(x) = e^x - \ln(x+2) \geq x+1 - (x+1) = 0$ , 且等号不成立, 故  $f(x) > 0$ .

6. (1) 【解】当  $a = -1$  时,  $f(x) = e^x + 3x + 2\sin x$ , 则  $f(0) = 1, f'(x) = e^x + 3 + 2\cos x$ , 则  $f'(0) = 6$ ,

故曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程为  $y - 1 = 6x$ , 即  $6x - y + 1 = 0$ .

(2) 【证明】因为  $\cos x \leq 1$ , 所以要证  $f(x) \geq \cos x$ , 只需证  $f(x) = a^2 e^x - 3ax + 2\sin x \geq 1$ .

【点悟】: 本题如果不对右侧  $\cos x$  进行放缩, 后续研究非常困难, 在失败过后可以考虑猜测出题人将  $\cos x$  单独放在右侧的用意, 大胆放缩尝试证明

令  $g(a) = e^a - 3a + 2\sin a - 1$ , 该二次函数的图象的对称轴为直线  $a = \frac{3x}{2e^x}$ ,

令  $h(x) = \frac{3x}{2e^x}$ , 则  $h'(x) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1-x}{e^x}$ , 令

$h'(x) > 0$ , 得  $x < 1$ , 令  $h'(x) < 0$ , 得  $x > 1$ , 所以  $h(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

所以  $h(x)_{\max} = h(1) = \frac{3}{2e} < 1$ ,

【点悟】: 对称轴所在直线  $a = \frac{3x}{2e^x}$  恒在直线  $a = 1$  的左侧

所以  $g(a)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增.

问题可转化为证明  $g(1) \geq 0$ , 即证  $e^x - 3x + 2\sin x - 1 \geq 0$ , 即证  $\frac{3x - 2\sin x + 1}{e^x} \leq 1$ .

令  $F(x) = \frac{3x - 2\sin x + 1}{e^x}$ , 则  $F'(x) = \frac{2 - 3x + 2\sin x - 2\cos x}{e^x}$ ,

令  $\varphi(x) = 2 - 3x + 2\sin x - 2\cos x$ ,

则  $\varphi'(x) = 2\cos x + 2\sin x - 3 = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 3 < 0$ , 所以  $\varphi(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递减, 且  $\varphi(0) = 0$ ,

所以当  $x < 0$  时,  $\varphi'(x) > 0$ , 当  $x > 0$  时,  $\varphi'(x) < 0$ ,

所以函数  $F(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

所以  $F(x) \leq F(0) = 1$ , 即  $\frac{3x - 2\sin x + 1}{e^x} \leq 1$ , 证毕.

**规律方法** 考虑到指数函数  $y = e^x$  的导函数  $y' = e^x$  依然是指数函数, 导函数的形式较为复杂, 不利于研究导函数的正负, 注意到  $(e^x f(x))' = e^x [f(x) + f'(x)]$ ,  $\left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ ,

虽然导函数中依然含  $e^x$ , 但是其正负与  $e^x$  无关, 判断正负相对简单一些, 所以构造函数时经常会将指数形式与剩下的部分凑一个积或者商的形式.

7. (1) 【证明】不妨设  $a > b > 0$ , 则  $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$  等价于  $\ln a - \ln b < \frac{a-b}{\sqrt{ab}}$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$\text{即证 } \ln \frac{a}{b} < \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ 令 } \sqrt{\frac{a}{b}} = t,$$

$$t > 1, \text{ 即证 } 2\ln t < t - \frac{1}{t}, t > 1.$$

$$\text{令 } g(t) = 2\ln t - t + \frac{1}{t}, t > 1, \text{ 则 } g'(t) = \frac{-(t-1)^2}{t^2} < 0, \text{ 所以函数 } g(t) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递减, 当 } t \rightarrow 1 \text{ 时, } g(t) \rightarrow 0,$$

$$\text{所以 } g(t) < 0, \text{ 所以 } \ln \frac{a}{b} < \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}, \text{ 即 } \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \text{ 成立.}$$

$$(2) (i) \text{ 【解】 } f(x) = \frac{1}{x} - x + a \ln x, x > 0, \text{ 则 } f'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{a}{x} = \frac{-x^2 + ax - 1}{x^2}.$$

$$\text{因为函数 } f(x) \text{ 有两个极值点 } x_1, x_2, \text{ 所以 } f'(x) = \frac{-x^2 + ax - 1}{x^2} = 0 \text{ 有两个不相等的正根,}$$

$$\text{即方程 } x^2 - ax + 1 = 0 \text{ 有两个不相等的正根 } x_1, x_2, \text{ 则 } \begin{cases} \Delta = (-a)^2 - 4 > 0, \\ x_1 + x_2 = a > 0, \\ x_1 x_2 = 1 > 0, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$a > 2, \text{ 即 } a \text{ 的取值范围为 } (2, +\infty).$$

$$(ii) \text{ 【证明】由 (i) 知 } a > 2, \text{ 且 } x_1, x_2 \text{ 满足 } x^2 - ax + 1 = 0, \text{ 所以 } x_1 x_2 = 1, \text{ 则 } x_1 = \frac{1}{x_2}, \text{ 不妨设 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 则 } x_2 > 1, \text{ 所以}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + a = \ln x_1 - \ln x_2 = -2 + a = -2 + \frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2},$$

$$\text{即证 } \ln t - \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) < 0.$$

$$\text{【点悟】: 本题的不等式中有双元 } x_1, x_2, \text{ 但显然双元相关, 可以表示为一个变量, 所以先进行消元}$$

$$\text{则 } \ln t - \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) < 0, \text{ 即证 } a \cdot \frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2} < a - 2, \text{ 即证 } a \cdot$$

$$\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2} < a - 2, \text{ 即证 } 2\ln x_2 < x_2 - \frac{1}{x_2}, \text{ 即证}$$

$$\frac{1}{x_2} - x_2 + 2\ln x_2 < 0, x_2 > 1.$$

$$\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2} < a, \text{ 即证 } 2\ln x_2 < x_2 - \frac{1}{x_2}, \text{ 即证}$$

$$\frac{1}{x_2} - x_2 + 2\ln x_2 < 0, x_2 > 1.$$

再构造函数进一步研究

$$\frac{1}{x_2} - x_2 + 2\ln x_2 < 0, x_2 > 1.$$

$$\text{设函数 } h(x) = \frac{1}{x} - x + 2\ln x, x > 1, \text{ 则}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0,$$

$$\text{所以 } h(x) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递减, 又当 } x \rightarrow 1 \text{ 时, } h(x) \rightarrow 0, \text{ 所以当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } h(x) < 0,$$

$$\text{所以 } \frac{1}{x_2} - x_2 + 2\ln x_2 < 0, \text{ 即 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < a - 2, \text{ 得证.}$$

$$8. (1) \text{ 【解】 } f'(x) = 1 + \frac{1}{x}, \text{ 则 } f'(1) = 2,$$

$$\text{即曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } (1, 1) \text{ 处的切线斜率为 } 2, \text{ 所以曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } (1, 1) \text{ 处的切线方程为 } y = 2x - 1.$$

$$\text{因为切线与曲线 } y = x^2 + (2a+3)x + a \text{ 只有一个公共点,}$$

$$\text{所以方程 } x^2 + (2a+1)x + a + 1 = 0 \text{ 有两个相等的实数根, 所以 } \Delta = (2a+1)^2 - 4(a+1) = 0, \text{ 解得 } a = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(2) \text{ ① 【解】令 } g(x) = f(x) - 2x + m = \ln x - x + m, x > 0.$$

$$\text{因为方程 } f(x) = 2x - m \text{ 有两个不同的解 } x_1, x_2, \text{ 所以函数 } g(x) \text{ 有两个不同的零点.}$$

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}, \text{ 当 } x \in (0, 1) \text{ 时,}$$

$$g'(x) > 0; \text{ 当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } g'(x) < 0.$$

$$\text{所以 } g(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递增, 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递减. 所以 } g(x)_{\max} = g(1) = m - 1 > 0, \text{ 所以 } m > 1.$$

$$g(e^m) = 2m - e^m, \text{ 令 } \varphi(m) = 2m - e^m (m > 1), \text{ 则 } \varphi'(m) = 2 - e^m < 0, \text{ 所以 } \varphi(m) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递减, 所以 } \varphi(m) < 2 - e < 0, \text{ 即 } g(e^m) < 0. \text{ 又因为 } g(e^m) = -e^m < 0, \text{ 所以 } m > 1, \text{ 即 } m \text{ 的取值范围为 } (1, +\infty).$$

$$\text{② 【证明】由 (1) 知 } a > 2, \text{ 且 } x_1, x_2 \text{ 满足 } x^2 - ax + 1 = 0, \text{ 所以 } x_1 x_2 = 1, \text{ 则 } x_1 = \frac{1}{x_2}, \text{ 不妨设 } 0 < x_1 < x_2, \text{ 则 } x_2 > 1, \text{ 所以}$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = -\frac{1}{x_1 x_2} - 1 + a = \ln x_1 - \ln x_2 = -2 + a = -2 + \frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2},$$

$$\text{即证 } \ln t - \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) < 0.$$

$$\text{【点悟】: 本题的不等式中有双元 } x_1, x_2, \text{ 但显然双元相关, 可以表示为一个变量, 所以先进行消元}$$

$$\text{则 } \ln t - \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) < 0, \text{ 即证 } a \cdot \frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2} < a - 2, \text{ 即证 } a \cdot$$

$$\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2} - x_2} < a - 2, \text{ 即证 } 2\ln x_2 < x_2 - \frac{1}{x_2}, \text{ 即证}$$

$$\frac{1}{x_2} - x_2 + 2\ln x_2 < 0, x_2 > 1.$$

$$\text{再构造函数进一步研究}$$

$$\frac{1}{x_2} - x_2 + 2\ln x_2 < 0, x_2 > 1.$$

$$\text{设函数 } h(x) = \frac{1}{x} - x + 2\ln x, x > 1, \text{ 则}$$

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 + \frac{2}{x} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} < 0,$$



设  $h(t) = \ln t - \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)$ ,  $t > 1$ , 则  
 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{t^2} \right) = \frac{-(t-1)^2}{2t^2} < 0$ ,  
 所以  $h(t)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减,  
 所以  $h(t) = \ln t - \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) < h(1) = 0$ ,

所以  $x_1 x_2 < 1$ , 故  $x_1 + \frac{1}{x_1} > x_2 + \frac{1}{x_2}$ .

②【证明】由①可知, 当  $t > 1$  时,  $\ln t < \frac{1}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right)$ ,

令  $t = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$ ,  $n \in \mathbf{N}^*$ , 所以  $\ln \frac{n+1}{n} <$

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.$$

❶ 黑板: 灵活运用已证明的不等式通常能事半功倍

所以  $\ln \frac{2}{1} < \frac{1}{\sqrt{1^2+1}}$ ,  $\ln \frac{3}{2} < \frac{1}{\sqrt{2^2+2}}$ ,  $\dots$ ,

$$\ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

将以上  $n$  个不等式进行累加, 可得  
 $\ln(n+1) < \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} + \dots +$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, n \in \mathbf{N}^*.$$

**名师点拨** 证明求和不等式的基本思路就是将左右两边都化作和的形式, 然后比较对应项的大小即可. 本题左侧  $\ln(n+1)$  可以看作是数列  $\left\{ \ln \frac{n+1}{n} \right\}$  求和, 所以研究  $\ln \frac{n+1}{n}$  与  $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$  的大小关系即可, 研究的时候要充分利用前面已经证明的不等式.

9. (1) 【解】函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{2k}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + 2kx - 1}{x^2}$ .

设  $m(x) = -x^2 + 2kx - 1$ , 则  $\Delta = 4(k^2 - 1)$ .

①当  $0 < k \leq 1$  时,  $\Delta \leq 0$ , 则  $f'(x) \leq 0$  且等号不恒成立, 所以函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减.

②当  $k > 1$  时,  $\Delta > 0$ ,  $m(x)$  有两个零点  $x_1 = k - \sqrt{k^2 - 1} > 0$ ,  $x_2 = k + \sqrt{k^2 - 1} > 0$ ,

则当  $0 < x < x_1$  或  $x > x_2$  时,  $m(x) < 0$ , 即  $f'(x) < 0$ ; 当  $x_1 < x < x_2$  时,  $m(x) > 0$ , 即  $f'(x) > 0$ ,

则函数  $f(x)$  在  $(0, x_1)$ ,  $(x_2, +\infty)$  上单调递减, 在  $(x_1, x_2)$  上单调递增.

综上, 当  $0 < k \leq 1$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减;

当  $k > 1$  时,  $f(x)$  在  $(0, k - \sqrt{k^2 - 1})$ ,  $(k + \sqrt{k^2 - 1}, +\infty)$  上单调递减, 在  $(k - \sqrt{k^2 - 1}, k + \sqrt{k^2 - 1})$  上单调递增.

(2) 【证明】由(1)知, 当  $k=1$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 所以当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x} <$

$$f(1) = 0, \text{ 则 } \ln x < \frac{x-1}{2x},$$

$$\text{令 } x = 1 + \frac{1}{n^2} (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2),$$

$$\text{于是 } \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{2 \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)}$$

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{n^2 + \frac{1}{2}},$$

$$\text{所以 } \ln \left( 1 + \frac{1}{2^2} \right) < \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2 + \frac{1}{2}},$$

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{3^2} \right) < \frac{1}{3 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}, \dots,$$

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}},$$

$$\text{所以 } \ln \left( 1 + \frac{1}{2^2} \right) + \ln \left( 1 + \frac{1}{3^2} \right) +$$

$$\ln \left( 1 + \frac{1}{4^2} \right) + \dots + \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$< \left( \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \right) + \left( \frac{1}{3 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} \right) + \dots +$$

$$\left( \frac{1}{n - \frac{1}{2}} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \frac{2}{3},$$

$$\text{所以 } \left( 1 + \frac{1}{2^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{3^2} \right) \left( 1 + \frac{1}{4^2} \right) \cdot \dots \cdot$$

$$\left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) < e^{\frac{2}{3}} (n \in \mathbf{N}^* \text{ 且 } n \geq 2).$$

**名师点拨** 证明求积不等式的基本思路就是将左右两边都化作和的形式, 然后比较对应项的大小即可. 碰到指数形式还可以两边同时取对数转化为求和不等式.

本题右侧  $e^{\frac{2}{3}}$  取自然对数后是  $\frac{2}{3}$ , 显然并不是积的形式, 而是一个数列和的极限, 不好观察出研究方法, 所以要充分利用前面已经证明的不等式对左侧进行放缩, 转化成可以求和的形式, 并使得和小于  $\frac{2}{3}$ .

## 专题7 导数与零点的综合

### 刷难关

1. 【证明】(1) 由题意知,  $f(x)$  的定义域为  $(-1, +\infty)$ , 且  $f'(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}$ ,

$$\text{令 } g(x) = \cos x - \frac{1}{x+1},$$

$$\therefore g'(x) = -\sin x + \frac{1}{(x+1)^2},$$

$$\therefore y = \frac{1}{(x+1)^2} \text{ 在 } \left( -1, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 上单调递减,}$$

$$y = -\sin x \text{ 在 } \left( -1, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 上单调递减,}$$

$$\therefore g'(x) \text{ 在 } \left( -1, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 上单调递减.}$$

$$\text{又 } g'(0) = -\sin 0 + 1 = 1 > 0, g' \left( \frac{\pi}{2} \right) =$$

$$-\sin \frac{\pi}{2} + \frac{4}{(\pi+2)^2} = \frac{4}{(\pi+2)^2} - 1 < 0,$$

$$\therefore \exists x_0 \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right), \text{ 使得 } g'(x_0) = 0,$$

$$\therefore \text{当 } x \in (-1, x_0) \text{ 时, } g'(x) > 0; \text{ 当 } x \in \left( x_0, \frac{\pi}{2} \right) \text{ 时, } g'(x) < 0,$$

$\therefore g(x)$  在  $(-1, x_0)$  上单调递增, 在  $\left( x_0, \frac{\pi}{2} \right)$  上单调递减, 则  $x=x_0$  为  $g(x)$  唯一的极大值点,

故  $f'(x)$  在区间  $\left( -1, \frac{\pi}{2} \right)$  上存在唯一的极大值点  $x_0$ .

$$(2) f'(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}, x \in (-1, +\infty).$$

①当  $x \in (-1, 0]$  时, 由(1)可知  $f'(x)$  在  $(-1, 0]$  上单调递增,

$\therefore f'(x) \leq f'(0) = 0$ ,  $\therefore f(x)$  在  $(-1, 0]$  上单调递减, 又  $f(0) = 0$ ,  $\therefore x=0$  为  $f(x)$  在  $(-1, 0]$  上的唯一零点.

②当  $x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  时,  $f'(x)$  在  $(0, x_0)$  上

单调递增, 在  $\left( x_0, \frac{\pi}{2} \right)$  上单调递减, 又  $f'(0) = 0$ ,  $\therefore f'(x_0) > 0$ ,

$\therefore f(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递增, 此时  $f(x) > f(0) = 0$ , 不存在零点.

$$\text{又 } f' \left( \frac{\pi}{2} \right) = \cos \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi+2} = -\frac{2}{\pi+2} < 0,$$

$$\therefore \exists x_1 \in \left( x_0, \frac{\pi}{2} \right), \text{ 使得 } f'(x_1) = 0,$$

$\therefore f(x)$  在  $(x_0, x_1)$  上单调递增, 在  $\left( x_1, \frac{\pi}{2} \right)$  上单调递减,

$$\text{又 } f(x_0) > f(0) = 0, f \left( \frac{\pi}{2} \right) = \sin \frac{\pi}{2} -$$

$$\ln \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) = \ln \frac{2e}{\pi+2} > \ln 1 = 0,$$

$\therefore f(x) > 0$  在  $\left( x_0, \frac{\pi}{2} \right)$  上恒成立, 此时不存在零点.

③当  $x \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  时,  $y = \sin x$  单调递减,  $y = -\ln(x+1)$  单调递减,  $\therefore f(x)$  在  $\left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$  上单调递减,

$$\text{又 } f \left( \frac{\pi}{2} \right) > 0, f(\pi) = \sin \pi - \ln(\pi+1) = -\ln(\pi+1) < 0, \text{ 即 } f(\pi) \cdot$$

$$f \left( \frac{\pi}{2} \right) < 0,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right] \text{ 上存在唯一零点.}$$

④当  $x \in (\pi, +\infty)$  时,  $\sin x \in [-1, 1]$ ,  $\ln(x+1) > \ln(\pi+1) > \ln e = 1$ ,



$\therefore \sin x - \ln(x+1) < 0$ , 即  $f(x)$  在  $(\pi, +\infty)$  上不存在零点.

综上所述,  $f(x)$  有且仅有 2 个零点.

**名师点拨** 对于含正余弦的函数, 其导数中依然含有正余弦, 有时正负多变, 并不统一.

但是正余弦函数具有有界性, 所以当  $x$  足够大时, 其他函数 (如本题中的  $y = \ln(x+1)$ ) 已经足够大, 此时不用再通过单调性研究函数, 可以直接从函数值上判断.

具体到解题, 可以通过分类讨论, 在  $x$  较小时通过导数研究单调性进而研究函数值, 在  $x$  足够大时直接研究函数值.

**2. 【解】** (1) 由函数  $f(x) = (kx+1)\ln x - kx$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 可得  $f'(x) = k\ln x + \frac{1}{x} \geq 0$  对  $x \in (0, +\infty)$  恒成立,

当  $x=1$  时, 显然成立; 当  $x \in (0, 1)$  时,  $k \leq \frac{-1}{x\ln x}$ ; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $k \geq \frac{-1}{x\ln x}$ .

令  $g(x) = x\ln x$ ,  $x > 0$  且  $x \neq 1$ , 则  $g'(x) = \ln x + 1$ ,

当  $x \in (0, \frac{1}{e})$  时,  $g'(x) < 0$ ; 当  $x \in (\frac{1}{e}, 1)$  时,  $g'(x) > 0$ ; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, \frac{1}{e})$  上

单调递减, 在  $(\frac{1}{e}, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

当  $x = \frac{1}{e}$  时, 可得  $g(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$ , 当  $x > 1$  时,  $g(x) > 0$ ,

所以当  $x \in (0, 1)$  时,  $g(x) \in (-\frac{1}{e}, 0)$ ,  $\frac{-1}{g(x)} \in (e, +\infty)$ , 则  $k \leq e$ ; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g(x) \in (0, +\infty)$ ,  $\frac{-1}{g(x)} \in (-\infty, 0)$ , 则  $k \geq 0$ .

综上, 实数  $k$  的取值范围是  $[0, e]$ .

(2) 由 (1) 可知, 当  $k=0$  时,  $f(x) = \ln x$  有一个零点;

当  $0 < k \leq e$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 当  $x$  趋于 0 时,  $f(x)$  趋于负无穷大, 且  $f(e) = 1$ , 故  $f(x)$  只有一个零点.

当  $k > e$  时,  $f'(x) = k\ln x + \frac{1}{x}$ . 令  $h(x) = k\ln x + \frac{1}{x}$ , 则  $h'(x) = \frac{k}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{kx-1}{x^2}$ ,

当  $x \in (0, \frac{1}{k})$  时,  $h'(x) < 0$ ; 当  $x \in (\frac{1}{k}, +\infty)$  时,  $h'(x) > 0$ ,

可得  $f'(x)$  在  $(0, \frac{1}{k})$  上单调递减, 在

$(\frac{1}{k}, +\infty)$  上单调递增,  $f'(\frac{1}{k}) = k(\ln \frac{1}{k} + 1) = k(1 - \ln k) < 0$ .

当  $x$  趋于 0 时, 因为  $x\ln x$  趋于 0, 所以  $f'(x) = \frac{kx\ln x + 1}{x}$  趋于正无穷大,

又因为  $f'(1) = 1 > 0$ , 所以存在  $0 < x_1 < \frac{1}{k} < x_2 < 1$ , 使得  $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(0, x_1)$  上单调递增, 在  $(x_1, x_2)$  上单调递减, 在  $(x_2, +\infty)$  上单调递增,

且当  $0 < x < 1$  时,  $f(x) < 0$ ,  $f(e) = 1$ , 所以当  $k > e$  时,  $f(x)$  只有一个零点.

当  $k < 0$  时,  $f'(x) = k\ln x + \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,  $f'(1) = 1 > 0$ ,

且  $x$  趋于正无穷大时,  $f'(x) < 0$ , 所以存在  $x_0 > 1$ , 使得  $f'(x_0) = 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递增, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递减,

又当  $x$  趋于 0 时,  $f(x)$  趋于负无穷大,  $f(e) = 1$ ,

当  $k \leq -\frac{1}{2}$  时,  $f(e^5) = 5 + 4ke^5 < 0$ , 当

$-\frac{1}{2} < k < 0$  时,  $f(\frac{-5}{k}) = -4\ln \frac{-5}{k} + 5 < 0$ .

故当  $k < 0$  时, 无论  $k$  为何值, 取  $x = \max\{\frac{-5}{k}, e^5\}$ , 总能有  $f(x) < 0$ ,

所以当  $k < 0$  时,  $f(x)$  有两个零点.

综上所述, 当  $k < 0$  时,  $f(x)$  有两个零点; 当  $k \geq 0$  时,  $f(x)$  有一个零点.

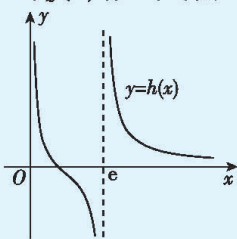
**多种解法** (2) 由题意, 可得  $f(e) = 1$ , 故当  $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$  时, 令

$f(x) = 0$ , 可得  $-k = \frac{\ln x}{x\ln x - x}$ . 令  $h(x) = \frac{\ln x}{x\ln x - x}$ , 则  $h'(x) =$

$\frac{\ln x - 1 - (\ln x)^2}{(x\ln x - x)^2} = \frac{-\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}}{(x\ln x - x)^2} < 0$ ,

所以  $h(x) = \frac{\ln x}{x\ln x - x}$  在  $(0, e)$  上单调递减, 在  $(e, +\infty)$  上也单调递减, 且当  $x$  大于 0 且趋于 0 时,  $h(x)$  趋于正无穷大, 当  $x$  小于  $e$  且趋于  $e$  时,  $h(x)$  趋于负无穷大, 当  $x$  大于  $e$  且趋于  $e$  时,  $h(x)$  趋于正无穷大, 当  $x$  趋于正无穷大时,  $h(x)$  趋于 0,

故  $h(x)$  的大致图象如图所示, 由图象可知, 当  $k < 0$  时,  $f(x)$  有两个零点; 当  $k \geq 0$  时,  $f(x)$  有一个零点.



**归纳总结** 利用导数研究函数的零点个数问题的求解策略

(1) 分离参数法: 将参数分离出来, 得到一端是参数, 另一端是变量的表达式, 转化为求解含有变量的表达式对应的函数的最值问题, 从而根据参数的范围与函数的值域判断零点的个数;

(2) 研究含参函数单调性法: 利用导数研究含参函数的单调性, 分析函数的极值与端点、特殊点处函数值的正负, 从而得到函数在各个单调区间上的零点个数, 从而得到函数的零点个数;

(3) 图象法: 对于由两个相对简单的函数加减得到的函数, 可以将两个简单函数分离到等号两侧, 各自作出图象, 通过研究两个函数图象的公共点去研究原函数的零点个数.

**3. A 【解析】** 函数  $f(x) = 2 - \frac{2}{e^x + 1}$  的定义

域为  $\mathbf{R}$ , 且在  $\mathbf{R}$  上单调递增,

$f(x) + f(-x) = 2 - \frac{2}{e^x + 1} + 2 - \frac{2}{e^{-x} + 1} = 4 -$

$\left(\frac{2}{e^x + 1} + \frac{2e^x}{1 + e^x}\right) = 2$ , 即  $2 - f(-x) = f(x)$ ,

方程  $f(ae^x) + f(3 - x^2) = 2$ , 即  $f(ae^x) = 2 - f(3 - x^2) = f(x^2 - 3)$ , 于是  $ae^x = x^2 - 3$ , 即  $a = \frac{x^2 - 3}{e^x}$ .

**悟:** 求参的题目如果能分离参数, 优先考虑参变分离

令  $g(x) = \frac{x^2 - 3}{e^x}$ , 依题意, 直线  $y = a$  与

函数  $y = g(x)$  的图象有三个不同的交点,

**黑板:** 将方程根的个数问题转化为两函数图象交点的个数问题

求导得  $g'(x) = \frac{2x - x^2 + 3}{e^x} = \frac{(x+1)(x-3)}{e^x}$ ,

当  $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$  时,  $g'(x) < 0$ ,

当  $x \in (-1, 3)$  时,  $g'(x) > 0$ , 所以函数  $g(x)$  在  $(-\infty, -1)$ ,  $(3, +\infty)$  上单调递减, 在  $(-1, 3)$  上单调递增,

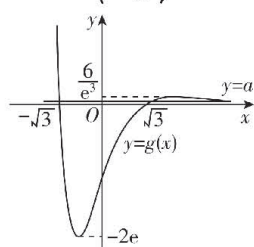
当  $x = -1$  时,  $g(x)$  取极小值  $g(-1) = -2e$ ; 当  $x = 3$  时,  $g(x)$  取极大值  $g(3) = \frac{6}{e^3}$ , 而当  $x < -\sqrt{3}$  或  $x > \sqrt{3}$  时, 恒有  $g(x) > 0$ ,

在同一坐标系内作出直线  $y = a$  与函数  $y = g(x)$  的大致图象如图所示,

观察图象得, 当  $0 < a < \frac{6}{e^3}$  时, 直线  $y = a$

与函数  $y = g(x)$  的图象有三个交点, 即原方程有三个不同实根, 所以实数  $a$

的取值范围为  $(0, \frac{6}{e^3})$ . 故选 A.



**4. ABD 【解析】** 令  $f(x) = e^x - \frac{\ln x + k}{x} -$

$1 = 0$ , 则  $xe^x - x - \ln x - k = 0$ ,

令  $h(x) = xe^x - x - \ln x - k$ , 则  $h'(x) = (x+1)e^x - 1 - \frac{1}{x} = (x+1)\frac{xe^x - 1}{x}$ ,



令  $g(x) = xe^x - 1, x > 0$ , 则  $g'(x) = (x+1)e^x$ ,

当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ , 函数  $g(x) = xe^x - 1$  为增函数, 又  $g(0) = -1, g(1) = e - 1 > 0$ ,

所以存在  $x_1 \in (0, 1)$ , 使得  $g(x_1) = 0$ ,

即  $x_1 e^{x_1} - 1 = 0$ , 即  $x_1 e^{x_1} = 1$ ,

当  $x \in (0, x_1)$  时,  $g(x) < 0, h'(x) < 0$ , 函数  $h(x)$  单调递减,

当  $x \in (x_1, +\infty)$  时,  $g(x) > 0, h'(x) > 0$ , 函数  $h(x)$  单调递增,

又  $x > 0$  且  $x \rightarrow 0$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ .

因为函数  $h(x) = xe^x - x - \ln x - k$  在  $(0, +\infty)$  上存在唯一零点  $x_0$ , 所以  $x_0 = x_1$ ,

所以  $x_0 e^{x_0} = 1$ , 故 **A 正确**;

$h(x_1) = 0$ , 即  $x_1 e^{x_1} - x_1 - \ln x_1 - k = x_1 e^{x_1} - \ln(x_1 e^{x_1}) - k = 0$ , 即  $1 - \ln 1 - k = 0$ , 所以  $k = 1$ , 故 **B 正确**;

$f(x) = e^x - \frac{\ln x + 1}{x} - 1 (x > 0)$ , 则  $f'(x) =$

$$e^x + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{x^2 e^x + \ln x}{x^2},$$

令  $\varphi(x) = x^2 e^x + \ln x (x > 0)$ , 则  $\varphi'(x) = (x^2 + 2x)e^x + \frac{1}{x} > 0$ ,

所以函数  $\varphi(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} - 1 < 0, \varphi(1) = e >$

$0$ , 所以存在  $x_2 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ , 使得

$\varphi(x_2) = 0$ ,

则当  $x \in (0, x_2)$  时,  $\varphi(x) < 0$ , 即  $f'(x) < 0$ , 当  $x \in (x_2, +\infty)$  时,  $\varphi(x) > 0$ ,

即  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, x_2)$  上单调递减, 在  $(x_2, +\infty)$  上单调递增,

所以函数  $f(x)$  有唯一极值点, 故 **C 错误, D 正确**. 故选 ABD.

**5. 【解】** (1) 当  $a = 3$  时, 函数  $f(x) = \ln x + x^2 - 3x$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

求导得  $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x - 3 = \frac{(2x-1)(x-1)}{x}$ . 当  $0 < x < \frac{1}{2}$  或  $x > 1$  时,

$f'(x) > 0$ , 当  $\frac{1}{2} < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 因

此函数  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{1}{2}\right), (1, +\infty)$  上单

调递增, 在  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$  上单调递减.

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间是  $\left(0, \frac{1}{2}\right),$

$(1, +\infty)$ , 单调递减区间是  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ .

(2) 函数  $f(x) = (a-2)\ln x + x^2 - ax, x \in$

$(0, +\infty)$ , 求导得  $f'(x) = \frac{a-2}{x} + 2x - a =$

$$\frac{2}{x}(x-1)\left(x-\frac{a-2}{2}\right).$$

当  $\frac{a-2}{2} \leq 1$ , 即  $a \leq 4$  时, 当  $x \in [1, e]$

时,  $f'(x) \geq 0$  且等号不恒成立, 函数  $f(x)$  在  $[1, e]$  上单调递增,

由函数  $y = f(x)$  在区间  $[1, e]$  上恰有一个

零点, 得  $\begin{cases} f(1) = 1 - a \leq 0, \\ f(e) = e^2 - 2 - (e-1)a \geq 0, \end{cases}$

解得  $1 \leq a \leq \frac{e^2-2}{e-1}$ , 因此  $1 \leq a \leq \frac{e^2-2}{e-1}$ ;

当  $\frac{a-2}{2} > 1$ , 即  $a > 4$  时, 当  $x \in \left(1, \frac{a-2}{2}\right)$  时,

$f'(x) < 0$ , 即函数  $f(x)$  在  $\left[1, \frac{a-2}{2}\right)$  上

单调递减,

又  $f(1) = 1 - a < 0$ , 要使函数  $y = f(x)$  在

区间  $[1, e]$  上恰有一个零点,

则  $f(e) \geq 0$ , 即  $a \leq \frac{e^2-2}{e-1}$ , 与  $a > 4$  矛盾,

→ **点悟**: 不能确定  $\frac{a-2}{2}$  与  $e$  的大小关

系, 根据  $f(x)$  在  $\left[1, \frac{a-2}{2}\right)$  上单调递减和

$f(1) < 0$ , 知只需方端点处函数值不小于 0

就满足有一个零点

所以  $a$  的取值范围是  $\left[1, \frac{e^2-2}{e-1}\right]$ .

**规律方法** 导函数中两种常用的转化方法: 一是利用导数研究含参函数的

单调性, 常转化为不等式恒成立问题, 注意分类讨论与数形结合思想的应用; 二是函数的零点、不等式证明

常转化为函数的单调性、极(最)值问题处理.

**6. 【解】** (1)  $f'(x) = 2e^{2x} - (2a-1)e^x - a = (2e^x+1)(e^x-a)$ .

①若  $a \leq 0$ , 则  $f'(x) > 0, f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增;

②若  $a > 0$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \ln a$ .

当  $x \in (-\infty, \ln a)$  时,  $f'(x) < 0, f(x)$  单调递减,

当  $x \in (\ln a, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0, f(x)$  单调递增.

综上所述, 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增;

当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  上单调递减, 在  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增.

(2) 由 (1) 知当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增, 不可能有两个零点, 不符合题意.

当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  上单调递减, 在  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增,

因为  $f(x)$  有两个零点, 必有  $f(x)_{\min} = f(\ln a) = a(1-a-\ln a) < 0$ ,

因为  $a > 0$ , 所以  $1-a-\ln a < 0$ .

令  $g(a) = 1-a-\ln a, a > 0$ ,

则  $g'(a) = -1 - \frac{1}{a} < 0$ , 所以  $g(a)$  在

$(0, +\infty)$  上单调递减, 而  $g(1) = 0$ ,

所以当  $a > 1$  时,  $g(a) < 0$ , 即  $f(x)_{\min} < 0$ .

又  $f(-1) = \frac{1}{e^2} - (2a-1)\frac{1}{e} + a = \frac{1}{e^2} +$

$\frac{1}{e} + a\left(1-\frac{2}{e}\right) > 0$ , 故  $f(x)$  在  $(-1, \ln a)$  上有 1 个零点;

当  $x > \ln a > 0$  时, 设  $y = e^x - x - 1$ , 则  $y' = e^x - 1$ , 由  $y' > 0$ , 得  $x > 0$ , 由  $y' < 0$ , 得

$x < 0$ , 所以函数  $y = e^x - x - 1$  在  $(-\infty, 0)$  上单

调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以

$e^x - x - 1 \geq e^0 - 0 - 1 = 0$ , 即  $x > 0$  时,  $e^x - 1 >$

$x$ , 故  $-ax > -a(e^x - 1)$ ,

所以  $f(x) > e^{2x} - (2a-1)e^x - a(e^x - 1) = e^{2x} - (3a-1)e^x + a$ , 取  $x = \ln 3a > \ln a$ , 有

$f(\ln 3a) > e^{2\ln 3a} - (3a-1)e^{\ln 3a} + a = 9a^2 - (3a-1) \cdot 3a + a = 4a > 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(\ln a, \ln 3a)$  上有 1 个零点.

综上所述,  $a$  的取值范围为  $(1, +\infty)$ .

**7. D 【解析】** 由  $f(x) = 0$  可得  $a = \frac{\ln x + 1}{x}$ , 令  $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ , 其中  $x > 0$ ,

则直线  $y = a$  与函数  $g(x)$  的图象有两个

交点,  $g'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ ,

由  $g'(x) > 0$  可得  $0 < x < 1$ , 由  $g'(x) < 0$

可得  $x > 1$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单

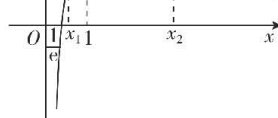
调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

且当  $0 < x < \frac{1}{e}$  时,  $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x} < 0$ , 当

$x > \frac{1}{e}$  时,  $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x} > 0$ ,

作出直线  $y = a$  与函数  $g(x)$  的大致图

象, 如图所示.



由图可知, 当  $0 < a < 1$  时, 直线  $y = a$  与

函数  $g(x)$  的图象有两个交点, 故 **A 错误**;

由图可知,  $\frac{1}{e} < x_1 < 1 < x_2$ , 因为  $f'(x) =$

$\frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$ , 由  $f'(x) > 0$  可得  $0 < x <$

$\frac{1}{a}$ , 由  $f'(x) < 0$  可得  $x > \frac{1}{a}$ ,

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为

$\left(0, \frac{1}{a}\right)$ , 单调递减区间为  $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ ,

则必有  $0 < x_1 < \frac{1}{a} < x_2$ ,

所以  $0 < x_1 < \frac{1}{a}$ , 则  $\frac{2}{a} - x_1 > \frac{1}{a}$ .

令  $h(x) = f\left(\frac{2}{a} - x\right) - f(x) = \ln\left(\frac{2}{a} - x\right) -$

$a\left(\frac{2}{a} - x\right) - \ln x + ax$ ,

则  $h'(x) = \frac{1}{x-\frac{2}{a}} - \frac{1}{x} + 2a = \frac{2a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2}{x\left(x-\frac{2}{a}\right)} <$

$0$  在  $\left(0, \frac{1}{a}\right)$  上恒成立, 则函数  $h(x)$  在

$\left(0, \frac{1}{a}\right)$  上单调递减,

所以  $h(x_1) > h\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ , 即  $f\left(\frac{2}{a} -$

$x_1\right) - f(x_1) > 0$ , 即  $f(x_1) < f\left(\frac{2}{a} - x_1\right)$ ,

由  $f(x_1) = f(x_2) = 0$ , 可得  $f(x_2) <$

$f\left(\frac{2}{a} - x_1\right)$ ,

因为函数  $f(x)$  的单调递减区间为

$\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ , 所以  $x_2 > \frac{2}{a} - x_1$ , 即  $x_1 + x_2 >$

$\frac{2}{a}$ , 故 **B 错误**;

由题意知  $\begin{cases} ax_1 = \ln x_1 + 1, \\ ax_2 = \ln x_2 + 1, \end{cases}$  两式相加并

整理可得  $x_1 + x_2 = \frac{\ln(x_1 x_2) + 2}{a} > \frac{2}{a}$ , 所



以  $\ln(x_1 x_2) > 0$ , 可得  $x_1 \cdot x_2 > 1$ , 故 C 错误;

由图可知  $\frac{1}{e} < x_1 < 1 < x_2$ , 则  $-x_1 > -1$ , 又

因为  $x_2 > \frac{1}{a}$ , 所以  $x_2 - x_1 > \frac{1}{a} - 1$ , 故 D

正确.

故选 D.

8.  $e^2$  【解析】由题意得,  $\frac{x}{e^x} + \frac{e^{x+1}}{x+e^x} + m =$

$$0 \Rightarrow \frac{x}{e^x} + \frac{e}{x+e} + m = 0,$$

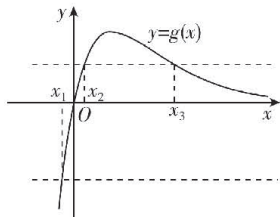
【点悟】研究复杂方程的根时, 可以考虑观察是否存在或变形后能否出现整体统一的代数形式, 由此构造出复合函数, 进而拆出内、外函数, 分步研究, 降低解题难度

令  $\frac{x}{e^x} = t$ , 则有  $t + \frac{e}{t+1} + m = 0 \Rightarrow t^2 + (m+1)t + m + e = 0$ .

令函数  $g(x) = \frac{x}{e^x}$ , 则  $g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$ ,

当  $x < 1$  时  $g'(x) > 0$ , 当  $x > 1$  时  $g'(x) < 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 且  $x > 0$  时,  $g(x) > 0$ ,

作出  $g(x)$  的大致图象如图所示.



要使关于  $x$  的方程  $\frac{x}{e^x} + \frac{e^{x+1}}{x+e^x} + m = 0$  有三个不相等的实数解  $x_1, x_2, x_3$ , 且  $x_1 < 0 < x_2 < x_3$ ,

结合图象可得关于  $t$  的方程  $t^2 + (m+1)t + m + e = 0$  一定有两个不相等的实数根  $t_1, t_2$  ( $t_1 < 0 < t_2$ ),

$$\text{且 } \frac{x_1}{e^{x_1}} = t_1, \frac{x_2}{e^{x_2}} = \frac{x_3}{e^{x_3}} = t_2,$$

由根与系数的关系知,  $t_1 + t_2 = -(m+1)$ ,  $t_1 t_2 = m + e$ ,

$$\text{所以 } \left(\frac{x_1}{e^{x_1}} + 1\right)^2 \left(\frac{x_2}{e^{x_2}} + 1\right) \left(\frac{x_3}{e^{x_3}} + 1\right) = [(t_1+1)(t_2+1)]^2, \text{ 又 } (t_1+1)(t_2+1) = t_1 t_2 + t_1 + t_2 + 1 = m + e - (m+1) + 1 = e,$$

$$\text{可得 } \left(\frac{x_1}{e^{x_1}} + 1\right)^2 \left(\frac{x_2}{e^{x_2}} + 1\right) \left(\frac{x_3}{e^{x_3}} + 1\right) = e^2.$$

9. 【解】(1) 求得  $f'(x) = xe^x - a$ , 根据曲线  $y=f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $x+y+2=0$ ,

$$\text{得到 } \begin{cases} f'(0) = -a = -1, \\ f(0) = -1 - b = -2. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

(2) 由 (1) 知,  $f(x) = (x-1)e^x - x - 1$ ,  $f'(x) = xe^x - 1$ .

令  $g(x) = xe^x - 1$ , 求导得  $g'(x) = (x+1)e^x$ .

当  $x \in (-\infty, -1)$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递减; 当  $x \in (-1, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上单调递增.

因为  $x < 0$  时,  $g(x) < 0$ , 且  $g(1) = e - 1 > 0$ ,  $g(0) = -1 < 0$ , 所以存在唯一  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $g(x_0) = 0$ , 即  $x_0 e^{x_0} = 1$ .

当  $x \in (-\infty, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(-\infty, x_0)$  上单调递减;

当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(x) \geq f(x_0)$ .

又因为  $f(x_0) = (x_0-1)e^{x_0} - x_0 - 1 = -x_0 - \frac{1}{x_0} < 0$ ,  $f(-2) = 1 - \frac{3}{e^2} > 0$ ,  $f(2) = e^2 - 3 > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-2, x_0)$  和  $(x_0, 2)$  上各有一个零点, 共两个零点.

设  $x_1$  是  $f(x)$  的一个零点, 则  $f(x_1) = (x_1-1)e^{x_1} - x_1 - 1 = 0$ ,

$$\text{经计算 } f(-x_1) = (-x_1-1)e^{-x_1} + x_1 - 1 = e^{-x_1}[(x_1-1)e^{x_1} - x_1 - 1] = 0,$$

所以  $-x_1$  也是  $f(x)$  的零点, 则所有零点之和为  $x_1 + (-x_1) = 0$ .

名师点拨 函数形式复杂, 不好直接去研究零点间的关系时, 应考虑通过其函数值间的关系结合单调性得到零点间的关系.

10. (1) 【解】由题知  $f'(x) = \frac{1-x}{e^{x-1}}$ , 令

$f'(x) = 0$ , 得  $x = 1$ .

当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 此时  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

当  $x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ , 此时  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 故  $f(x)$  极大值  $= f(1) = 1$ , 无极小值.

(2) 【证明】 $f(x) - g(x) = \frac{x}{e^{x-1}} -$

$$\frac{1+\ln x}{x} = \frac{x}{e^{x-1}} - \frac{1+\ln x}{e^{1+\ln x-1}} = f(x) - f(1+\ln x).$$

【敲黑板】整理变形形成同构形式, 利用函数的单调性解决问题

令  $\varphi(x) = x - 1 - \ln x$ ,

则  $\varphi'(x) = \frac{x-1}{x} < 0$  在  $(0, 1)$  上恒成立, 故  $\varphi(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减.

$\therefore \varphi(x) > \varphi(1) = 0$ , 即  $x > 1 + \ln x$  ( $0 < x < 1$ ).

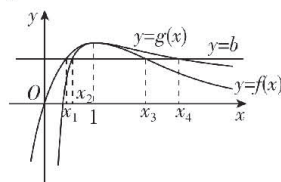
由 (1) 可知  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增,  $1 > x > 1 + \ln x$ ,  $\therefore f(x) > f(1 + \ln x)$ , 即  $f(x) > g(x)$  ( $0 < x < 1$ ).

(3) 【证明】由 (2) 同理可证, 当  $x > 1$  时,  $f(x) < g(x)$ .

$$\text{令 } F(x) = 0, \text{ 得 } b = \frac{x}{e^{x-1}} = \frac{1+\ln x}{x} (x > 0),$$

由题意得直线  $y = b$  与两条曲线  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  共有四个交点.

如图所示, 由图可知  $f(x_1) = g(x_2) = f(x_3) = g(x_4) = b$ , 且  $0 < x_1 < x_2 < 1 < x_3 < x_4$ .



由  $g(x_2) = f(1 + \ln x_2)$ , 得  $f(x_1) = f(1 + \ln x_2)$ .  $\therefore x_1 < 1, 1 + \ln x_2 < 1$ , 且  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增,

$$\therefore x_1 = 1 + \ln x_2, \text{ 即 } e^{x_1-1} = x_2, \therefore \frac{x_1}{e^{x_1-1}} =$$

$$\frac{x_1}{x_2} = b. \text{ 同理可得 } \frac{x_3}{x_4} = b. \text{ 故 } \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}, \text{ 即 } x_1 x_4 = x_2 x_3, \text{ 得证.}$$

## 刷难关

1. C 【解析】根据题意, 设直线  $y = kx + b$  与曲线  $y = e^x - 1$  的切点为  $(x_1, e^{x_1} - 1)$ , 与曲线  $y = e^{x-2}$  的切点为  $(x_2, e^{x_2-2})$ .

而  $y = e^x - 1$  的导数为  $y'_1 = e^x$ ,  $y = e^{x-2}$  的导数为  $y'_2 = e^{x-2}$ ,

所以两曲线的切线分别为  $y - e^{x_1} + 1 = e^{x_1}(x - x_1)$ ,  $y - e^{x_2-2} = e^{x_2-2}(x - x_2)$ ,

由两条切线重合, 可得

$$\begin{cases} e^{x_1} = e^{x_2-2}, \\ (1-x_1)e^{x_1} - 1 = (1-x_2)e^{x_2-2}, \end{cases}$$

【敲黑板】解方程组的基本思路是解代入消元, 可以利用第一个方程得到  $x_2 = x_1 + 2$ , 代入第二个方程中可得关于  $x_1$  的方程, 即可得解

## 专题8 曲线的公切线问题

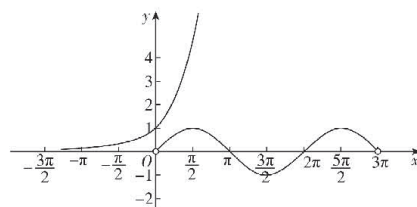
$$\text{解得 } \begin{cases} x_1 = -\ln 2, \\ x_2 = 2 - \ln 2, \end{cases}$$

所以切线方程为  $y - e^{-\ln 2} + 1 = e^{-\ln 2}(x + \ln 2)$ , 即  $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}$ , 则  $b =$

$$\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}. \text{ 故选 C.}$$

规律方法 设公切线  $l$  与曲线  $y = f(x)$  的切点为  $P_1(x_1, f(x_1))$ , 与曲线  $y = g(x)$  的切点为  $P_2(x_2, g(x_2))$ , 则必定满足两切线的斜率相同, 且两切点都在直线  $l$  上, 从而得到关于  $x_1$  和  $x_2$  的方程组, 消去  $x_1$  或  $x_2$  得关于  $x_2$  或  $x_1$  的方程, 解方程进而求公切线.

2. B 【解析】作出曲线  $y = \sin x, x \in (0, 3\pi)$  和曲线  $y = e^x$ , 如图所示.



设直线  $l$  与曲线  $y = \sin x, x \in (0, 3\pi)$  的切点为  $A(x_1, \sin x_1)$ , 与曲线  $y = e^x$  的切点为  $B(x_2, e^{x_2})$ , 直线  $l$  的斜率为  $k$ .

所以  $y'_1 = (\sin x)' = \cos x$ , 即曲线  $y = \sin x, x \in (0, 3\pi)$  在点  $A(x_1, \sin x_1)$  处的切线斜率为  $k = \cos x_1$ ,

$y'_2 = (e^x)' = e^x$ , 即曲线  $y = e^x$  在点  $B(x_2, e^{x_2})$  处的切线斜率为  $k = e^{x_2}$ , 得  $k =$



$$\cos x_1 = e^{x_2}.$$

又因为  $\cos x_1 \in [-1, 1]$ ,  $e^{x_2} \in (0, +\infty)$ , 所以斜率  $k = \cos x_1 = e^{x_2} \in (0, 1]$ .

由  $\cos x_1 \in (0, 1]$ , 得  $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$  或  $x_1 \in (\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ ; 由  $e^{x_2} \in (0, 1]$ , 得  $x_2 \in (-\infty, 0)$ ,

令  $\cos x_1 - e^{x_2} = 0$ , 因为  $y = \cos x_1$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上单调递减,  $y = -e^{x_2}$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 所以方程  $\cos x_1 - e^{x_2} = 0$  在  $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,  $x_2 \in (-\infty, 0)$  上有唯一解,

因此, 存在唯一  $A(x_1, \sin x_1)$ ,  $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$  和  $B(x_2, e^{x_2})$ ,  $x_2 \in (-\infty, 0)$ ,

使得  $k = \cos x_1 = e^{x_2}$ , 此时直线  $AB$  即为两条曲线的公切线.

同理, 存在唯一  $C(x_3, \sin x_3)$ ,  $x_3 \in [2\pi, \frac{5\pi}{2})$  和  $D(x_4, e^{x_4})$ ,  $x_4 \in (-\infty, 0)$ , 使得  $k = \cos x_3 = e^{x_4}$ , 且  $e^{x_4} \neq e^{x_2}$ , 所

**悟:** 当  $x_3 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$  时, 曲线  $y = \sin x$  在点  $C$  处的切线显然不与曲线  $y = e^x$  相切

以直线  $CD$  即为异于直线  $AB$  的第二条曲线的公切线.

综上所述, 直线  $l$  的条数为 2. 故选 B.

**3. 【解】** (1)  $\because f(x) = x^2 + x$ ,  $\therefore f'(x) = 2x + 1$ ,  $f'(0) = 1$ .

$\therefore$  曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, 0)$  处的切线方程为  $y = x$ .

(2) 设曲线  $y = f(x)$  与曲线  $y = g(x)$  的公共点为  $P(x_0, y_0)$ ,

$$\therefore f(x) = x^2 + x, g(x) = \ln x + 2x,$$

$$\therefore f'(x) = 2x + 1, g'(x) = \frac{1}{x} + 2,$$

$$\text{令 } f'(x_0) = g'(x_0), \text{ 即 } 2x_0 + 1 = \frac{1}{x_0} + 2,$$

**敲黑板:** 根据公切线的斜率相等求解

$$\text{解得 } x_0 = 1 \text{ 或 } x_0 = -\frac{1}{2} \text{ (舍)}, \therefore P(1, 2), f'(1) = 3,$$

$$\therefore \text{所求公切线方程为 } y - 2 = 3(x - 1), \text{ 即 } 3x - y - 1 = 0.$$

**4. 思路导引** (1) 先写出函数  $h(x)$  的解析式, 再求其导数  $h'(x)$ , 利用导数和单调性、极值的关系, 即可求解; (2) 设直线  $l$  分别切  $f(x)$ ,  $g(x)$  的图象于点  $(x_1, \ln x_1)$ ,  $(x_2, x_2^2 - x_2 + 1)$ , 并分别求切线方程, 比较两个方程后可得关于  $x_1, x_2$  的方程组, 消去  $x_2$  后可得关于  $x_1$  的方程, 再构造对应的函数, 利用导数判断函数的单调性, 结合函数零点存在定理, 可判断零点个数, 即为公切线条数.

$$\text{【解】} (1) h(x) = \ln x - x^2 + x - 1, x > 0, \\ h'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1 = -\frac{2x^2 - x - 1}{x} = -\frac{(2x+1)(x-1)}{x}, \text{ 当 } 0 < x < 1 \text{ 时}, h'(x) >$$

$0, h(x)$  单调递增; 当  $x > 1$  时,  $h'(x) < 0, h(x)$  单调递减, 所以当  $x = 1$  时, 函数取得极大值  $h(1) = -1$ , 无极小值. (2) 设直线  $l$  分别切  $f(x)$ ,  $g(x)$  的图象于点  $(x_1, \ln x_1)$ ,  $(x_2, x_2^2 - x_2 + 1)$ .

$$\text{由 } f(x) = \ln x, \text{ 得 } f'(x) = \frac{1}{x}, \text{ 所以直线}$$

$$l \text{ 的方程为 } y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1), \text{ 即直}$$

$$\text{线 } l: y = \frac{1}{x_1} \cdot x + \ln x_1 - 1.$$

$$\text{由 } g(x) = x^2 - x + 1, \text{ 得 } g'(x) = 2x - 1, \text{ 所以直线 } l \text{ 的方程为 } y - (x_2^2 - x_2 + 1) = (2x_2 - 1)(x - x_2), \text{ 即 } l: y = (2x_2 - 1)x - x_2^2 + 1.$$

$$\text{比较 } l \text{ 的方程可得 } \begin{cases} \frac{1}{x_1} = 2x_2 - 1, \\ \ln x_1 - 1 = -x_2^2 + 1, \end{cases}$$

$$\text{消去 } x_2 \text{ 可得 } \ln x_1 + \frac{(1+x_1)^2}{4x_1^2} - 2 = 0.$$

**敲黑板:** 方程有几个解就有几条公切线

$$\text{令 } F(x) = \ln x + \frac{(1+x)^2}{4x^2} - 2 (x > 0), \text{ 所}$$

$$\text{以 } F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1+x}{2x^3} = \frac{(2x+1)(x-1)}{2x^3},$$

当  $0 < x < 1$  时,  $F'(x) < 0$ , 当  $x > 1$  时,  $F'(x) > 0$ , 所以  $F(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $F(x)_{\min} = F(1) = -1 < 0$ .

因为  $F(e^2) = \ln e^2 + \frac{(1+e^2)^2}{4e^4} - 2 = \frac{(1+e^2)^2}{4e^4} > 0$ , 所以  $F(x)$  在  $(1, +\infty)$  上有一个零点.

$$\text{由 } F(x) = \ln x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{4x^2} - \frac{7}{4}, \text{ 得}$$

$$F(e^{-2}) = -2 + \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} - \frac{7}{4} = \frac{e^2 - 4}{2} + \frac{e^4 - 7}{4} > 0, \text{ 所以 } F(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上有一个}$$

零点. 故函数  $F(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上有 2 个零点. 故曲线  $y = f(x)$  与曲线  $y = g(x)$  有 2 条公切线.

**归纳总结** 判断两曲线公切线的条数的基本步骤

- ① 分别设切点, 求出切线方程;
- ② 利用两切线重合, 建立关于切点横坐标的方程组;
- ③ 消元得某一切点横坐标的方程;
- ④ 通过判断方程在指定范围内解的个数判断公切线的条数.

**5. BD 【解析】** 令  $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ , 则  $f'(x) = 4x + 3$ ,

$$\text{令 } f'(x) = 4x + 3 = -1, \text{ 得 } x = -1,$$

$$\text{则 } f(-1) = 2 - 3 + 4 = 3,$$

$$\text{即有 } y - 3 = -(x + 1), \text{ 即 } y = -x + 2, \text{ 故 } m = 2.$$

$$\text{令 } g(x) = -e^{x+n}, \text{ 则 } g'(x) = -e^{x+n},$$

$$\text{令 } g'(x) = -e^{x+n} = -1, \text{ 得 } x = -n,$$

$$\text{则 } g(-n) = -e^0 = -1,$$

$$\text{即有 } y + 1 = -(x + n), \text{ 即 } y = -x - n - 1,$$

$$\text{故有 } -n - 1 = 2, \text{ 即 } n = -3. \text{ 故选 BD.}$$

**6. A 【解析】** 设公切线为  $l$ ,  $P(x_1, y_1)$  是

$l$  与曲线  $f(x)$  的切点, 由  $f(x) = \frac{k}{x}$ , 得

$$f'(x) = -\frac{k}{x^2},$$

$$\text{所以 } l \text{ 的方程为 } y - y_1 = -\frac{k}{x_1^2}(x - x_1),$$

$$\text{由 } y_1 = \frac{k}{x_1}, \text{ 整理得 } y = -\frac{k}{x_1^2}x + \frac{2k}{x_1}.$$

设  $Q(x_2, y_2)$  是  $l$  与曲线  $g(x)$  的切点, 由  $g(x) = e^x$ , 得  $g'(x) = e^x$ ,

$$\text{所以 } l \text{ 的方程为 } y - y_2 = e^{x_2}(x - x_2),$$

$$\text{由 } y_2 = e^{x_2}, \text{ 整理得 } y = e^{x_2}x + e^{x_2}(1 - x_2).$$

$$\text{依题意可得 } \begin{cases} -\frac{k}{x_1^2} = e^{x_2}, \\ \frac{2k}{x_1} = e^{x_2}(1 - x_2), \end{cases}$$

消去  $x_1$ , 得  $4k = -e^{x_2}(x_2 - 1)^2$ , 由题意知, 此方程有三个不等实根.

**敲黑板:** 有三条公切线对应此方程有三个解, 再结合函数与方程思想求解

设  $h(x) = -e^x(x-1)^2$ , 即直线  $y = 4k$  与曲线  $h(x)$  有三个不同的交点.

因为  $h'(x) = e^x(1-x^2)$ , 令  $h'(x) = 0$ , 则  $x = \pm 1$ ,

当  $x < -1$  或  $x > 1$  时,  $h'(x) < 0$ ; 当  $-1 < x < 1$  时,  $h'(x) > 0$ ,

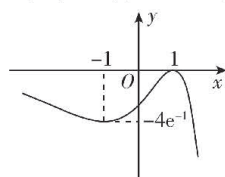
所以  $h(x)$  在  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, +\infty)$  上单调递减, 在  $(-1, 1)$  上单调递增,

所以  $h(x)$  的极小值为  $h(-1) = -4e^{-1}$ , 极大值为  $h(1) = 0$ ,

因为  $h(x) = -e^x(x-1)^2$ ,  $e^x > 0$ ,  $(x-1)^2 \geq 0$ , 所以  $h(x) \leq 0$ ,

当  $x$  趋近于  $-\infty$  时,  $h(x)$  趋近于 0; 当  $x$  趋近于  $+\infty$  时,  $h(x)$  趋近于  $-\infty$ ,

故  $h(x)$  的大致图象如图所示,



所以当  $-4e^{-1} < 4k < 0$ , 即  $-\frac{1}{e} < k < 0$  时,

直线  $y = 4k$  与曲线  $h(x)$  有三个交点. 故选 A.

**7. D 【解析】** 设直线  $l$  与曲线  $f(x) = \ln x$

$$\text{的切点为 } (x_1, f(x_1)), f'(x) = \frac{1}{x},$$

$$\text{所以 } l: y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1), \text{ 即 } l: y = \frac{1}{x_1}x + \ln x_1 - 1.$$

$$\text{设直线 } l \text{ 与曲线 } g(x) = x^a (x > 0, a \neq 0) \text{ 的切点为 } (x_2, g(x_2)), g'(x) = ax^{a-1},$$

$$\text{所以 } l: y - x_2^a = ax_2^{a-1}(x - x_2), \text{ 即 } l: y = ax_2^{a-1}x + (1-a)x_2^a.$$

$$\text{由题意知 } \begin{cases} \frac{1}{x_1} = ax_2^{a-1}, \text{ ①} \\ \ln x_1 - 1 = (1-a)x_2^a, \text{ ②} \end{cases} \text{ 因为}$$

$x_1 > 0, x_2 > 0$ , 所以  $a > 0$ , 由 ① 可得  $\ln x_1 = -\ln a - (a-1) \ln x_2$ ,

将其代入 ②, 可得  $-\ln a - (a-1) \ln x_2 - 1 = (1-a)x_2^a$ ,

$$\text{显然 } a \neq 1, \text{ 整理得 } \ln x_2 - x_2^a = \frac{1 + \ln a}{1-a}.$$

记  $h(x) = \ln x - x^a (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ , 则

$$h'(x) = \frac{1}{x} - ax^{a-1} = \frac{1-ax^a}{x},$$



当  $x \in (0, (\frac{1}{a})^{\frac{1}{a}})$  时,  $h'(x) > 0$ ; 当  $x \in ((\frac{1}{a})^{\frac{1}{a}}, +\infty)$  时,  $h'(x) < 0$ ,

所以函数  $h(x)$  在  $(0, (\frac{1}{a})^{\frac{1}{a}})$  上单调递增, 在  $((\frac{1}{a})^{\frac{1}{a}}, +\infty)$  上单调递减,

所以  $h(x)_{\max} = h((\frac{1}{a})^{\frac{1}{a}}) = -\frac{1+\ln a}{a}$ .

则  $h(x_2) \leq h(x)_{\max}$ , 即  $\frac{1+\ln a}{1-a} \leq \frac{1+\ln a}{a}$ ,

化简得  $\frac{1+\ln a}{a(1-a)} \leq 0$ , 解得  $a \in (0, \frac{1}{e}] \cup (1, +\infty)$ . 故选 D.

8. 【解】(1) 令  $x=0$ , 则  $f(0) = [f'(0) - 1] \cdot e^0$ , 即  $f(0) = f'(0) - 1$ .

对  $f(x)$  求导可得  $f'(x) = [f'(0) - 1] \cdot e^x + f(0)$ , 令  $x=0$ , 可得  $f(0) = 1$ , 所以  $f'(0) = 2$ , 即  $f(x) = e^x + x$ .

(2) 由 (1) 知  $f(x) = e^x + x$ ,  $f'(x) = e^x + 1$ , 设切点为  $(x_0, e^{x_0} + x_0)$ , 则  $f'(x_0) = e^{x_0} + 1$ , 切线  $l$  的方程为  $y - e^{x_0} - x_0 = (e^{x_0} + 1) \cdot (x - x_0)$ .

因为切线  $l$  经过坐标原点, 所以  $-e^{x_0} - x_0 = -x_0(e^{x_0} + 1)$ , 解得  $x_0 = 1$ , 故切线  $l$  的方程为  $y - e - 1 = (e + 1)(x - 1)$ , 即  $y = (e + 1)x$ .

(3) 由题知  $y = f(x + a) - a = e^{x+a} + x$ . 设直线  $l_1: y = k_1x + b_1$ ,  $l_2: y = k_2x + b_2$ ,  $l_1$  与曲线  $y = e^{x+a} + x$ ,  $y = x^2 + x$  的切点坐标分别为  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ .

对  $y = e^{x+a} + x$  求导得  $y' = e^{x+a} + 1$ , 则曲线  $y = e^{x+a} + x$  在点  $(x_1, y_1)$  处的切线斜率为  $e^{x_1+a} + 1$ .

对  $y = x^2 + x$  求导得  $y' = 2x + 1$ , 则曲线  $y = x^2 + x$  在点  $(x_2, y_2)$  处的切线斜率为  $2x_2 + 1$ .

则  $\begin{cases} k_1 = e^{x_1+a} + 1 = 2x_2 + 1 (k_1 > 1), \\ \text{④黑板: 注意参数的取值范围,} \\ \text{因为 } e^{x_1+a} > 0, \text{ 所以 } e^{x_1+a} + 1 > 1, \text{ 即 } k_1 > 1 \\ k_1x_1 + b_1 = e^{x_1+a} + x_1, \\ k_1x_2 + b_1 = x_2^2 + x_2, \\ x_1 = \ln(k_1 - 1) - a, \end{cases}$

可得  $\begin{cases} x_2 = \frac{k_1 - 1}{2}, \\ (k_1 - 1)(x_2 - x_1) = x_2^2 - e^{x_1+a}, \end{cases}$

所以  $(k_1 - 1) \left[ \frac{k_1 - 1}{2} - \ln(k_1 - 1) + a \right] = \frac{(k_1 - 1)^2}{4} - (k_1 - 1)$ , 整理得  $a = \ln(k_1 - 1) - \frac{k_1 - 1}{4} - 1 (k_1 > 1)$ .

同理, 当直线  $l_2: y = k_2x + b_2$  与曲线  $y = e^{x+a} + x$ ,  $y = x^2 + x$  都相切时,  $a = \ln(k_2 - 1) - \frac{k_2 - 1}{4} - 1 (k_2 > 1)$ .

故只需  $a = \ln(k - 1) - \frac{k - 1}{4} - 1 (k > 1)$  恰有两个

个不同的解, 即直线  $y = a$  与曲线  $y = \ln(k - 1) - \frac{k - 1}{4} - 1 (k > 1)$  恰有两个交点.

令  $h(t) = \ln t - \frac{t}{4} - 1 (t > 0)$ , 则  $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{4} = \frac{4 - t}{4t}$ , 所以当  $0 < t < 4$  时,  $h'(t) > 0$ , 当  $t > 4$  时,  $h'(t) < 0$ ,

所以  $h(t)$  在  $(0, 4)$  上单调递增, 在  $(4, +\infty)$  上单调递减, 则  $h(t)_{\max} = h(4) = \ln 4 - \frac{4}{4} - 1 = 2\ln 2 - 2$ ,

又因为当  $t \rightarrow 0$  时,  $h(t) \rightarrow -\infty$ , 当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $h(t) \rightarrow -\infty$ , 故  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 2\ln 2 - 2)$ .

**归纳总结** (1) 已知公切线条数求参数取值范围的基本步骤: ①分别设切点坐标; ②求出两曲线的切线方程; ③利用两切线方程的斜率和纵截距分别相同, 建立关于切点横坐标的方程组; ④消元得关于某一切点横坐标的方程 (含参数); ⑤分离参数化为  $a = F(x)$  形式, 曲线有几条公切线, 即直线  $y = a$  与曲线  $y = F(x)$  有几个交点, 从而确定参数  $a$  的取值范围. 特别提醒: 消去变量时, 要注意变量的取值范围.

(2) 经常用到的三个关系: ①切点处的导数是切线的斜率; ②切点在切线上; ③切点在曲线上.

9. -2 【解析】记  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = e^x$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g'(x) = e^x$ .

所以曲线  $y = \ln x$  在点  $P(x_1, y_1)$  处的切线方程为  $y - \ln x_1 = \frac{1}{x_1}(x - x_1)$ , 即  $y = \frac{1}{x_1}x + \ln x_1 - 1$ .

曲线  $y = e^x$  在点  $Q(x_2, y_2)$  处的切线方程为  $y - e^{x_2} = e^{x_2}(x - x_2)$ , 即  $y = e^{x_2}x + e^{x_2}(1 - x_2)$ .

由已知得,  $\begin{cases} \frac{1}{x_1} = e^{x_2}, \\ \ln x_1 - 1 = e^{x_2}(1 - x_2), \end{cases}$  由

$\frac{1}{x_1} = e^{x_2}$  得  $x_1 = e^{-x_2}$ , 故  $\ln x_1 - 1 = \ln e^{-x_2} - 1 = -x_2 - 1$ , 故  $-x_2 - 1 = \frac{1}{x_1}(1 - x_2)$ , 解得  $x_1 = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1}$ ,

所以  $x_1 - 1 = \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} - 1 = -\frac{2}{x_2 + 1}$ , 因此  $(x_1 - 1)(x_2 + 1) = \left(-\frac{2}{x_2 + 1}\right)(x_2 + 1) = -2$ .

10.  $y = x + 1$  (或  $y = x - 1$ ) 【解析】 $f'(x) = 1 + \cos x$ , 其周期为  $2\pi$ , 而  $f(x + 2\pi) = x + 2\pi + \sin(x + 2\pi) = x + 2\pi + \sin x = f(x) + 2\pi$ , 则  $\frac{f(x + 2\pi) - f(x)}{x + 2\pi - x} = 1$ , 所以斜率为 1 的切线满足题意.

令  $f'(x) = 1$ , 得  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ,

当  $k$  为偶数时,  $f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi + 1$ ,

此时切线方程为  $y - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi + 1\right) = x -$

$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ , 即  $y = x + 1$ ;

当  $k$  为奇数时,  $f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi - 1$ ,

此时切线方程为  $y - \left(\frac{\pi}{2} + k\pi - 1\right) = x -$

$\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ , 即  $y = x - 1$ ,

故  $y = x + 1$  或  $y = x - 1$  满足题意.

11. (1) 【解】直线  $y = 2x$  是曲线  $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$  的“双重切线”, 理由如下:

$f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 求得  $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ .

令  $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2} = 2$ , 解得  $x = \pm 1$ , 不妨设切点为  $P(-1, -2)$ ,  $Q(1, 2)$ ,

则曲线  $f(x)$  在点  $P$  处的切线方程为  $y + 2 = 2(x + 1)$ , 即  $y = 2x$ , 在点  $Q$  处的切线方程为  $y - 2 = 2(x - 1)$ , 即  $y = 2x$ ,

所以直线  $y = 2x$  是曲线  $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$  的“双重切线”.

(2) 【解】函数  $g(x) = \begin{cases} e^x - \frac{2}{e}, & x \leq 0, \\ \ln x, & x > 0, \end{cases}$

求得  $g'(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{x}, & x > 0, \end{cases}$

显然函数  $y = e^x$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 函数  $y = \frac{1}{x}$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

设切点为  $P(x_1, y_1)$ ,  $Q(x_2, y_2)$ , 则存在  $x_1 < 0 < x_2$ , 使得  $g'(x_1) = g'(x_2)$ ,

则曲线  $g(x)$  在点  $P$  处的切线方程为  $y - \left(e^{x_1} - \frac{2}{e}\right) = e^{x_1}(x - x_1)$ , 在点  $Q$  处

的切线方程为  $y - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2)$ ,

因此  $\begin{cases} e^{x_1} = \frac{1}{x_2}, \\ e^{x_1} - e^{x_1}x_1 - \frac{2}{e} = \ln x_2 - 1, \end{cases}$

消去  $x_2$  可得  $e^{x_1} - x_1e^{x_1} + x_1 - \frac{2}{e} + 1 = 0$ .

令  $k(x) = e^x - xe^x + x - \frac{2}{e} + 1 (x < 0)$ , 求得  $k'(x) = e^x - (1 + x)e^x + 1 = -xe^x + 1 > 0$ ,

则函数  $k(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 又  $k(-1) = 0$ , 则函数  $k(x)$  的零点为  $-1$ , 因此  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = e$ ,

所以曲线  $y = g(x)$  的“双重切线”的方程为  $y = \frac{x}{e}$ .

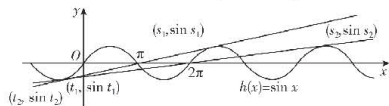
(3) 【证明】设直线  $PQ$  的斜率为  $k_1$  时对应的切点为  $(t_1, \sin t_1)$ ,  $(s_1, \sin s_1)$ ,  $t_1 < s_1$ ,  $k_2$  时对应的切点为  $(t_2, \sin t_2)$ ,  $(s_2, \sin s_2)$ ,  $t_2 < s_2$ .

由  $(\sin x)' = \cos x$ , 得  $k_1 = \cos t_1 = \cos s_1$ ,  $k_2 = \cos t_2 = \cos s_2$ .

如图所示, 由诱导公式及余弦函数的



周期性知,只需考虑  $t_1+s_1=2\pi, t_2+s_2=4\pi$ , 其中  $t_1, t_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ,



由  $k_1 > k_2$  及余弦函数  $y = \cos x$  在  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  上单调递增知,  $-\frac{\pi}{2} < t_2 < t_1 < 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } k_1 &= \frac{\sin s_1 - \sin t_1}{s_1 - t_1} = \frac{\sin(2\pi - t_1) - \sin t_1}{(2\pi - t_1) - t_1} = \frac{2\sin t_1}{2\pi - 2t_1} = \frac{\sin t_1}{\pi - t_1}, \\ k_2 &= \frac{\sin s_2 - \sin t_2}{s_2 - t_2} = \frac{\sin(4\pi - t_2) - \sin t_2}{(4\pi - t_2) - t_2} = \frac{2\sin t_2}{4\pi - 2t_2} = \frac{\sin t_2}{2\pi - t_2}, \end{aligned}$$

$$\text{因此 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{\sin t_1}{\sin t_2} \cdot \frac{2\pi - t_2}{\pi - t_1},$$

$$\text{又 } k_1 = \cos t_1 = \frac{\sin t_1}{\pi - t_1}, k_2 = \cos t_2 = \frac{\sin t_2}{2\pi - t_2},$$

$$\text{则 } \sin t_1 = (t_1 - \pi) \cos t_1 \Leftrightarrow \tan t_1 - t_1 + \pi = 0, \text{同理可得 } \tan t_2 - t_2 + 2\pi = 0.$$

$$\text{令 } F(x) = \tan x - x + \pi \left(-\frac{\pi}{2} < x < 0\right), \text{求}$$

$$\text{导得 } F'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x > 0,$$

则  $F(x)$  在  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$  上单调递增, 显然  $F\left(-\frac{\pi}{3}\right) > 0$ , 且  $F(x) < \tan x + \frac{3\pi}{2}$ ,

$$\text{函数 } y = \tan x + \frac{3\pi}{2} \text{ 在 } \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ 上的值}$$

$$\text{域为 } \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right), \text{即函数 } F(x) \text{ 在}$$

$$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \text{ 上存在零点, 则有 } -\frac{\pi}{2} < t_1 < -\frac{\pi}{3}.$$

$$\text{由 } \tan t_2 - t_2 + 2\pi = 0, \text{同理可得 } -\frac{\pi}{2} < t_2 < -\frac{\pi}{3}, \text{而 } t_2 < t_1, \text{因此 } -\frac{\pi}{2} < t_2 < t_1 < -\frac{\pi}{3},$$

$$\text{于是 } \sin t_2 < \sin t_1 < 0, \text{即 } 0 < \frac{\sin t_1}{\sin t_2} < 1.$$

$$\text{所以 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{\sin t_1}{\sin t_2} \cdot \frac{2\pi - t_2}{\pi - t_1} < \frac{2\pi - t_2}{\pi - t_1} < \frac{2\pi + \frac{\pi}{2}}{\pi + \frac{\pi}{3}} = \frac{15}{8}, \text{即 } \frac{k_1}{k_2} < \frac{15}{8}.$$

## 专题9 三次函数的图象与性质

### 刷难关

**1.D** 【解析】因为三次函数  $f(x) = 2ax \cdot (x-b)^2$  的定义域和值域都为  $[a, b]$ , 所以  $f(b) = 2ab(b-b)^2 = 0 \in [a, b]$ , 且  $a \neq 0$ , 所以  $a < 0, b \geq 0$ .

$$f'(x) = 2a(x-b)(3x-b),$$

当  $x \in \left(a, \frac{b}{3}\right)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调

递减; 当  $x \in \left(\frac{b}{3}, b\right)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$

单调递增,

$$\text{所以 } f\left(\frac{b}{3}\right) = \frac{2ab}{3} \left(\frac{b}{3} - b\right)^2 = a, \text{解得}$$

$$b = \frac{3}{2}, \text{所以验证可知函数 } f(x) =$$

$$2ax\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \text{ 的定义域和值域均为}$$

$$\left[a, \frac{3}{2}\right], \text{满足题意. 故选 D.}$$

**2.AB** 【解析】由  $f(x) = x^3 - ax^2 + a - 1 = x^3 - 1 - a(x^2 - 1)$ , 令  $x^2 - 1 = 0$ , 得  $x = \pm 1$ , 则  $f(-1) = -2, f(1) = 0$ , 则函数  $f(x)$  的图象过定点  $(1, 0), (-1, -2)$ , **A 正确**.

若函数  $f(x)$  单调递增, 则  $f'(x) = 3x^2 - 2ax \geq 0$  恒成立, 则  $\Delta = 4a^2 - 4 \times 3 \times 0 \leq 0$ , 得  $a = 0$ , **B 正确**.

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } f'(x) = 3x\left(x - \frac{2a}{3}\right), \text{当 } x < \frac{2a}{3}$$

$$\text{或 } x > 0 \text{ 时, } f'(x) > 0; \text{当 } \frac{2a}{3} < x < 0 \text{ 时,}$$

$$f'(x) < 0,$$

$$\text{所以 } f(x) \text{ 在 } \left(-\infty, \frac{2a}{3}\right) \text{ 和 } (0, +\infty) \text{ 上}$$

$$\text{单调递增, 在 } \left(\frac{2a}{3}, 0\right) \text{ 上单调递减, 所以}$$

$$x = 0 \text{ 是函数 } f(x) \text{ 的极小值点, } x = \frac{2a}{3} \text{ 是函数 } f(x) \text{ 的极大值点, C 错误.}$$

$$\text{同理可得当 } a > 0 \text{ 时, } x = 0 \text{ 是函数 } f(x) \text{ 的极}$$

$$\text{大值点, } x = \frac{2a}{3} \text{ 是函数 } f(x) \text{ 的极小值点,}$$

$$\text{此时 } f(x) \text{ 的极大值为 } f(0) = a - 1, \text{极}$$

$$\text{小值为 } f\left(\frac{2a}{3}\right) = -\frac{4}{27}a^3 + a - 1,$$

若  $f(x)$  的极大值与极小值互为相反

$$\text{数, 则 } f(0) + f\left(\frac{2a}{3}\right) = a - 1 - \frac{4}{27}a^3 + a -$$

$$1 = -\frac{4}{27}a^3 + 2a - 2 = 0.$$

$$\text{设 } h(a) = -\frac{4}{27}a^3 + 2a - 2, a > 0, \text{则}$$

$$h'(a) = -\frac{4}{9}a^2 + 2 = \frac{18 - 4a^2}{9},$$

$$\text{当 } 0 < a < \frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 时, } h'(a) > 0; \text{当 } a > \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{时, } h'(a) < 0.$$

$$\text{所以 } h(a) \text{ 在 } \left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 上单调递增, 在}$$

$$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\right) \text{ 上单调递减, 所以 } h(a)_{\max} =$$

$$h\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{4}{27} \times \frac{9}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - 2 =$$

$$2\sqrt{2} - 2 > 0, \text{又因为 } h(0) = -2 < 0, \text{所以}$$

$$\text{存在 } a_1 \in \left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right), \text{使得 } h(a_1) = 0, \text{即}$$

$$\text{方程 } -\frac{4}{27}a^3 + 2a - 2 = 0 \text{ 至少还有一个根}$$

$$\text{在 } \left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ 上, D 错误. 故选 AB.}$$

**3.  $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{9}\right)$**  【解析】 $f(x) = ax^3 + x^2 + cx +$

$$1(a > 0) \text{ 的定义域为 } \mathbf{R}, \text{则 } f'(x) =$$

$$3ax^2 + 2x + c, \text{当 } \Delta = 4 - 12ac \leq 0 \text{ 时,}$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ 且等号不恒成立, 故 } f(x) \text{ 在}$$

$$\mathbf{R} \text{ 上单调递增, 不会有三个零点, 不符}$$

$$\text{合题意, 故 } \Delta = 4 - 12ac > 0, \text{解得 } ac < \frac{1}{3}.$$

$$\text{设函数 } f(x) \text{ 的三个相异的零点分别为}$$

$$x_1, x_2, x_3, \text{且 } x_1 < x_2 < x_3, \text{故 } 2x_2 = x_1 + x_3,$$

$$\text{则 } ax_1^3 + x_1^2 + cx_1 + 1 = 0 \text{ ①, } ax_2^3 + x_2^2 + cx_2 +$$

$$1 = 0 \text{ ②, } ax_3^3 + x_3^2 + cx_3 + 1 = 0 \text{ ③.}$$

$$\text{①-②, 得 } a(x_1^3 - x_2^3) + (x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 -$$

$$x_2) = 0, \text{即 } a(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) +$$

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + c(x_1 - x_2) = 0,$$

$$\text{故 } (x_1 - x_2)(ax_1^2 + ax_1x_2 + ax_2^2 + x_1 + x_2 +$$

$$c) = 0.$$

因为  $x_1 < x_2$ , 所以  $ax_1^2 + ax_1x_2 + ax_2^2 + x_1 + x_2 + c = 0$  ④, 同理可得,  $ax_2^2 + ax_2x_3 + ax_3^2 + x_2 + x_3 + c = 0$  ⑤.

$$\text{④-⑤, 得 } a(x_1^2 - x_3^2) + ax_2(x_1 - x_3) + x_1 -$$

$$x_3 = 0, \text{即 } [a(x_1 + x_3) + ax_2 + 1](x_1 -$$

$$x_3) = 0, \text{因为 } x_1 < x_3, \text{所以 } a(x_1 + x_3) + ax_2 + 1 = 0,$$

$$\text{又因为 } 2x_2 = x_1 + x_3, \text{所以 } 2ax_2 + ax_2 + 1 =$$

$$0, \text{解得 } x_2 = -\frac{1}{3a}, \text{将其代入②中, 得}$$

$$-\frac{1}{27a^2} + \frac{1}{9a^2} - \frac{c}{3a} + 1 = 0, \text{即 } c = \frac{2}{9a} + 3a.$$

$$\text{又 } ac < \frac{1}{3}, \text{故 } \frac{2}{9} + 3a^2 < \frac{1}{3}, \text{得 } -\frac{\sqrt{3}}{9} < a <$$

$$\frac{\sqrt{3}}{9}, \text{又 } a > 0, \text{所以 } 0 < a < \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

**多种解法** 设函数  $f(x)$  的三个相异的

$$\text{零点分别为 } x_1, x_2, x_3 (x_1 < x_2 < x_3),$$

$$\text{则有 } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{1}{a} & \text{①,} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} & \text{②,} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{1}{a} & \text{③,} \end{cases}$$

$$\text{因为 } x_1, x_2, x_3 \text{ 成等差数列, 所以 } x_1 +$$

$$x_3 = 2x_2, \text{代入①中得 } x_2 = -\frac{1}{3a},$$

$$\text{故 } \begin{cases} x_1 + x_3 = -\frac{2}{3a}, \text{而 } (x_1 + x_3)^2 > 4x_1x_3, \\ x_1x_3 = 3, \end{cases}$$

$$\text{即 } \frac{4}{9a^2} > 12, \text{得 } a^2 < \frac{1}{27}, \text{又 } a > 0, \text{所以 } 0 <$$

$$a < \frac{\sqrt{3}}{9}, \text{即 } a \text{ 的取值范围为 } \left(0, \frac{\sqrt{3}}{9}\right).$$

**二级结论** 一元三次方程根与系数的

关系 设实系数一元三次方程  $a_3x^3 + a_2x^2 +$

$$a_1x + a_0 = 0 (a_3 \neq 0) \text{ ①}$$

在复数集  $\mathbf{C}$  内的根为  $x_1, x_2, x_3$ , 可以

得到, 方程①可变形为

$$a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0,$$



展开得  $a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - a_3x_1x_2x_3 = 0$ . ②  
比较①②可以得到

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{a_0}{a_3}. \end{cases}$$

4. (1)【解】由  $f(x) = (x-1)^3 - ax - b$ , 可得  $f'(x) = 3(x-1)^2 - a$ .

下面分两种情况讨论:

①当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) = 3(x-1)^2 - a \geq 0$  且等号不恒成立, 所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, +\infty)$ , 无单调递减区间.

②当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = 1 + \frac{\sqrt{3a}}{3}$  或  $x = 1 - \frac{\sqrt{3a}}{3}$ .

当  $x$  变化时,  $f'(x)$ ,  $f(x)$  的变化情况如表所示.

$x$	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3a}}{3})$	+	单调递增
$1 - \frac{\sqrt{3a}}{3}$	0	极大值
$(1 - \frac{\sqrt{3a}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3a}}{3})$	-	单调递减
$1 + \frac{\sqrt{3a}}{3}$	0	极小值
$(1 + \frac{\sqrt{3a}}{3}, +\infty)$	+	单调递增

所以  $f(x)$  的单调递减区间为  $(1 - \frac{\sqrt{3a}}{3}, 1 + \frac{\sqrt{3a}}{3})$ , 单调递增区间为  $(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{3a}}{3})$ ,  $(1 + \frac{\sqrt{3a}}{3}, +\infty)$ .

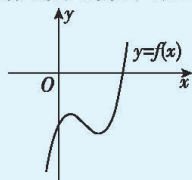
(2)【证明】因为  $f(x)$  存在极值点, 所以由(1)知  $a > 0$ , 且  $x_0 \neq 1$ .

由题意, 得  $f'(x_0) = 3(x_0 - 1)^2 - a = 0$ , 即  $(x_0 - 1)^2 = \frac{a}{3}$ , 所以  $f(x_0) = (x_0 - 1)^3 - ax_0 - b = -\frac{2a}{3}x_0 - \frac{a}{3} - b$ .

又  $f(3-2x_0) = (2-2x_0)^3 - a(3-2x_0) - b = \frac{8a}{3}(1-x_0) + 2ax_0 - 3a - b = -\frac{2a}{3}x_0 - \frac{a}{3} - b = f(x_0)$ , 且  $3-2x_0 \neq x_0$ , 由(1)知, 存在唯一实数  $x_1$  满足  $f(x_1) = f(x_0)$ , 且  $x_1 \neq x_0$ , 因此  $x_1 = 3-2x_0$ , 所以  $x_1 + 2x_0 = 3$ .

**名师点拨** 要证明  $x_1 + 2x_0 = 3$ , 即证明自变量间的关系, 从函数的思想来看, 可以利用函数的单调性转化为证明函数值间的关系. 但是很显然原始形式不好直接求函数值, 所以转化为证明  $x_1 = 3-2x_0$ , 即研究  $f(x_1)$  与  $f(3-2x_0)$  的关系, 进而结合单调性证明  $x_1 = 3-2x_0$ .

**多种解法** 因为  $f(x)$  存在极值点, 所以由(1)知  $a > 0$ , 且  $x_0 \neq 1$ , 作出函数  $f(x)$  的大致图象如图所示.



由  $x_0$  为极值点, 结合图象可知  $f(x) = f(x_0)$  有 3 个根  $x_1, x_0, x_0$ , 即  $(x-1)^3 - ax - b - f(x_0) = 0$ , 即  $x^3 - 3x^2 + (3-a)x - 1 - b - f(x_0) = 0$  有 3 根  $x_1, x_0, x_0$ , 故  $x^3 - 3x^2 + (3-a)x - 1 - b - f(x_0) = (x-x_1)(x-x_0)^2$ , 即  $x^3 - 3x^2 + (3-a)x - 1 - b - f(x_0) = x^3 - (x_1 + 2x_0)x^2 + (2x_0x_1)x - x_1x_0^2$ , 所以  $x_1 + 2x_0 = 3$ .

5. AC 【解析】由题意得,  $f'(x) = 3x^2 - 1$ , 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$  或  $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 令

$f'(x) < 0$ , 得  $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ ,  $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$  上单调递减, 所以  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$  是极值点, 故 A 正确;

因为  $f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$ ,  $f(-2) = -5 < 0$ , 所以函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$  上有一个零点,

当  $x \geq -\frac{\sqrt{3}}{3}$  时,  $f(x) \geq f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9} > 0$ , 即函数  $f(x)$  在  $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$  上无零点, 故函数  $f(x)$  有且只有一个零点, 故 B 错误;

令  $h(x) = x^3 - x$ , 该函数的定义域为  $\mathbf{R}$ , 则  $h(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -h(x)$ , 则  $h(x)$  是奇函数, 点  $(0, 0)$  是曲线  $y = h(x)$  的对称中心, 将  $h(x)$  的图象向上平移一个单位长度得到  $f(x)$  的图象, 所以点  $(0, 1)$  是曲线  $y = f(x)$  的对称中心, 故 C 正确;

令  $f'(x) = 3x^2 - 1 = 2$ , 可得  $x = \pm 1$ , 又  $f(1) = f(-1) = 1$ , 当切点为  $(1, 1)$  时, 切线方程为  $y = 2x - 1$ , 当切点为  $(-1, 1)$  时, 切线方程为  $y = 2x + 3$ , 故 D 错误. 故选 AC.

6. AD 【解析】对于 A: 当  $a = 1$  时,  $f(x) = x^3 - x + 1$ , 则  $f'(x) = 3x^2 - 1$ ,  $f''(x) = 6x$ , 令  $f''(x) = 0$ , 解得  $x = 0$ , 又  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = -1$ , 所以曲线  $y = f(x)$  在拐点处的切线方程为  $y = -x + 1$ , 即  $x + y - 1 = 0$ , 故 A 正确.

对于 B: 当  $a = 3$  时,  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ , 则  $f'(x) = 3x^2 - 3$ , 所以当  $-1 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x < -1$  或  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-1, 1)$  上单调递减, 在  $(-\infty, -1)$ ,  $(1, +\infty)$  上单调递增,

所以  $f(x)$  在  $x = 1$  处取得极小值  $f(1) = -1$ . 又  $f(-2) = -1$ , 要使函数  $y = f(x)$  在区间  $(m, m+5)$  内存在最小值, 则  $\begin{cases} -2 \leq m < 1, \\ m+5 > 1, \end{cases}$  解得  $-2 \leq m < 1$ , 即  $m$  的取值范围是  $[-2, 1)$ , 故 B 错误.

对于 C:  $f(x) = x^3 - ax + 1$  ( $a \in \mathbf{R}$ ), 则  $f'(x) = 3x^2 - a$ , 设切点为  $(t, t^3 - at + 1)$ , 则  $f'(t) = 3t^2 - a$ , 所以切线方程为  $y - (t^3 - at + 1) = (3t^2 - a)(x - t)$ , 又切线过点  $(1, 2)$ , 所以  $2 - (t^3 - at + 1) = (3t^2 - a)(1 - t)$ , 整理得  $a = -2t^3 + 3t^2 - 1$ .

令  $m(t) = -2t^3 + 3t^2 - 1$ , 则  $m'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t-1)$ , 所以当  $0 < t < 1$  时,  $m'(t) > 0$ , 当  $t < 0$  或  $t > 1$  时,  $m'(t) < 0$ , 所以  $m(t)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 在  $(-\infty, 0)$ ,  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $m(t)$  在  $t = 0$  处取得极小值, 在  $t = 1$  处取得极大值, 且  $m(0) = -1$ ,  $m(1) = 0$ .

因为经过点  $(1, 2)$  可以向曲线  $y = f(x)$  作三条切线, 即直线  $y = a$  与  $m(t)$  的图象有三个交点, 所以  $-1 < a < 0$ , 即  $a$  的取值范围是  $(-1, 0)$ , 故 C 错误.

对于 D: 由  $\begin{cases} y = -a \cdot (x - x_0) + f(x_0), \\ y = x^3 - ax + 1, \end{cases}$  可得  $x^3 - ax + 1 = -a(x - x_0) + x_0^3 - ax_0 + 1$ , 即  $x^3 = x_0^3$ , 显然  $y = x^3$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 所以  $x = x_0$ , 即对任意实数  $x_0$ , 直线  $y = -a(x - x_0) + f(x_0)$  与曲线  $y = f(x)$  有唯一公共点, 故 D 正确. 故选 AD.

**多种解法** 对于 C:  $f'(x) = 3x^2 - a$ ,  $f''(x) = 6x$ , 令  $f''(x) = 0$ , 得  $x = 0$ , 即三次函数图象的对称中心为  $N(0, 1)$ . 又  $f'(0) = -a$ , 则三次函数图象在点  $N$  处的切线  $l$  的方程为  $y = -ax + 1$ , 记  $g(x) = -ax + 1$ . 若过点  $(1, 2)$  可以作曲线  $y = f(x)$  的三条切线, 则  $g(1) < 2 < f(1)$ , 即  $-a + 1 < 2 < 2 - a$ , 解得  $-1 < a < 0$ . 故 C 错误.

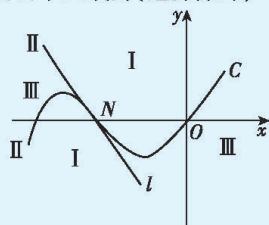
**二级结论** 过平面内一点作三次函数图象的切线的条数

三次函数  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a > 0$ ), 设三次函数图象  $C$  在其对称中心  $N$  处的切线为  $l$ ,  $M$  是三次函数图象  $C$  所在平面上的一点, 则

(I) 过点  $M$  能且仅能作  $C$  的一条切线, 当且仅当点  $M$  位于  $C$  和  $l$  所夹的上、下两个区域内 (边界除外), 或点  $M$  与点  $N$  重合;

(II) 过点  $M$  能且仅能作  $C$  的两条切线, 当且仅当点  $M$  位于图象  $C$  或切线  $l$  上 (点  $N$  除外);

(III) 过点  $M$  能且仅能作  $C$  的三条切线, 当且仅当点  $M$  位于  $C$  和  $l$  所夹的左、右两个区域内 (边界除外).





7.  $\frac{1}{2}$  1013 【解析】 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$ , 则  
 $f'(x) = 3x^2 - 3x$ ,  $f''(x) = 6x - 3$ .  
 令  $f''(x) = 0$ , 解得  $x = \frac{1}{2}$ , 且  $f\left(\frac{1}{2}\right) =$   
 $\frac{1}{8} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$ ,

则由题意可知,  $f(x)$  图象的拐点为  
 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ , 故  $f(x)$  图象的对称中心  
 为  $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ , 所以  $f(1-x) + f(x) =$   
 $-\frac{1}{2}$ .

所以  $f\left(\frac{1}{2 \ 025}\right) + f\left(\frac{2}{2 \ 025}\right) + f\left(\frac{3}{2 \ 025}\right) +$   
 $\cdots + f\left(\frac{2 \ 024}{2 \ 025}\right) + f\left(\frac{2 \ 025}{2 \ 025}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) \times$   
 $\frac{2 \ 024}{2} + f(1) = -506 - \frac{1}{2} = -\frac{1 \ 013}{2}$ .

## 专题 10 导数中的隐零点问题

### 刷难关

1. 【解】(1) 由题可得  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$   
 $(x>0)$ , 当  $x=1$  时,  $f'(x)=0$ ; 当  $x>1$   
 时,  $f'(x)>0$ , 函数  $f(x)$  单调递增; 当  
 $0<x<1$  时,  $f'(x)<0$ , 函数  $f(x)$  单调  
 递减.

所以  $f(x)$  的最小值为  $f(1) = -1$ .

(2) 对于任意的  $x \in (1, +\infty)$ ,  $x \ln x +$   
 $x > k(x-1) \Leftrightarrow k < \frac{x \ln x + x}{x-1}$ .

【敲黑板】参变分离, 注意  
 $x \in (1, +\infty)$ ,  $x-1>0$ , 不等号的方向不变  
 令  $g(x) = \frac{x \ln x + x}{x-1}$ ,  $x>1$ , 则  $g'(x) = \frac{x - \ln x - 2}{(x-1)^2}$ ,  
 由(1)知  $f(x) = x - \ln x - 2$  在  $(1, +\infty)$   
 上单调递增,

【敲黑板】注意结合(1)中的结论解题  
 且  $f(3) = 1 - \ln 3 < 0$ ,  $f(4) = 2 - \ln 4 > 0$ ,  
 则  $f(x)$  在区间  $(3, 4)$  上存在唯一零点  
 $x_0$ , 使得  $f(x_0) = x_0 - \ln x_0 - 2 = 0$ , 即  
 $\ln x_0 = x_0 - 2$ ,

则当  $x \in (1, x_0)$  时,  $f(x) < 0$ ,  $g'(x) < 0$ ,  
 $g(x)$  在  $(1, x_0)$  上单调递减;  
 当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $f(x) > 0$ ,  $g'(x) > 0$ ,  
 $g(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增.

于是得  $g(x)_{\min} = g(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + x_0}{x_0 - 1} =$   
 $\frac{x_0(x_0 - 2) + x_0}{x_0 - 1} = x_0 \in (3, 4)$ ,

于是  $k < g(x)_{\min} = x_0 \in (3, 4)$ ,  
 所以整数  $k$  的最大值为 3.

### 归纳总结 隐零点问题的处理思路

第一步: 用函数零点存在定理判断导  
 函数零点的存在性, 其中难点是通过  
 合理赋值, 敏锐捕捉零点存在的区  
 间, 有时还需结合函数单调性明确零  
 点的个数;

第二步: 虚设零点并确定取值范围,  
 通过零点方程进行代换, 如指数与对  
 数互换, 复杂函数与简单函数的替  
 换, 利用同构思想等方法解决, 需要  
 注意的是代换可能不止一次.

2. (1) 【解】由函数  $f(x) = x \ln x - x$ , 可得  
 其定义域为  $(0, +\infty)$ , 且  $f'(x) = \ln x$ ,  
 当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > 1$  时,  
 $f'(x) > 0$ . 所以  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递  
 减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  
 $f(x)_{\min} = f(1) = -1$ .

(2) 【解】由  $f(x) = x \ln x - x$ , 其中  $x > 0$ ,  
 可得  $x \ln x - x \geq mx - e^2$ , 即  $m \leq \ln x - 1 +$   
 $\frac{e^2}{x}$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立.

令  $g(x) = \ln x - 1 + \frac{e^2}{x}$ , 可得  $g'(x) =$   
 $\frac{1}{x} - \frac{e^2}{x^2} = \frac{x - e^2}{x^2}$ , 令  $g'(x) = 0$ , 解得

$x = e^2$ ,  
 当  $0 < x < e^2$  时,  $g'(x) < 0$ ; 当  $x > e^2$  时,  
 $g'(x) > 0$ , 所以函数  $g(x)$  在  $(0, e^2)$  上  
 单调递减, 在  $(e^2, +\infty)$  上单调递增,  
 所以  $g(x)_{\min} = g(e^2) = 2$ , 所以  $m \leq 2$ ,  
 即实数  $m$  的取值范围为  $(-\infty, 2]$ .

(3) 【证明】由  $h(x) = f(x) + x^2 = x \ln x -$   
 $x + x^2$ ,  $x > 0$ , 可得  $h'(x) = \ln x + 2x$ ,  
 令  $H(x) = h'(x) = \ln x + 2x$ ,  $x > 0$ , 可得  
 $H'(x) = \frac{2x+1}{x} > 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成

立, 所以函数  $H(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调  
 递增, 即函数  $h'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调  
 递增,

因为  $x_0$  是  $h(x) = f(x) + x^2$  的极值点,  
 所以存在  $x_0$  使得  $h'(x_0) = 0$ , 即  
 $\ln x_0 = -2x_0$ , 又由  $h'(1) = 2 > 0$ , 所以  $0 <$   
 $x_0 < 1$ , 则  $f(x_0) + 3x_0 = x_0 \ln x_0 - x_0 +$   
 $3x_0 = -2x_0^2 + 2x_0 = 2x_0(1 - x_0) > 0$ ,  
 所以  $f(x_0) + 3x_0 > 0$ .

【名师点拨】隐零点问题的基本解题  
 思路是形式上虚设, 运算上代换, 数  
 值上估算, 策略上等价转化, 方法上  
 分离函数(参数), 技巧上反客为主.

3. (1) 【解】当  $a = 2$  时,  $f(x) = e^x - 2x$ , 则  
 $f'(x) = e^x - 2$ .

当  $x \in (-\infty, \ln 2)$  时,  $f'(x) < 0$ , 此时函  
 数  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln 2)$  上单调递减,  
 当  $x \in (\ln 2, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 此时函  
 数  $f(x)$  在  $(\ln 2, +\infty)$  上单调递增,  
 所以  $f(x)$  的极小值点为  $x = \ln 2$ , 无极大  
 值点.

(2) 【解】由题可得  $f'(x) = e^x - a$ .

【敲黑板】 $e^x$  是  
 恒大于 0 的数, 所以把  $a$  分小于或等于 0  
 和大于 0 来讨论

① 当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) > 0$  恒成立,  $f(x)$  在  
 $\mathbb{R}$  上单调递增;

② 当  $a > 0$  时, 令  $e^x - a = 0$ , 可得  $x = \ln a$ ,  
 所以当  $x \in (-\infty, \ln a)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  
 $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  上单调递减,  
 当  $x \in (\ln a, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  
 $(\ln a, +\infty)$  上单调递增.

(3) 【证明】由题意得  $g(x) = e^{2x} - 2ax -$   
 $a \ln x + 2ax = e^{2x} - a \ln x$ ,  $x > 0$ ,

所以  $g'(x) = 2e^{2x} - \frac{a}{x}$ ,

因为  $a > 0$ , 所以  $g'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单  
 调递增, 又  $g'(a) = 2e^{2a} - 1 > 0$ ,

当  $0 < b < \frac{a}{4}$  且  $b < \frac{1}{4}$  时,

【敲黑板】现在需要判断  $g'(a)$  左端  
 的值是大于 0 还是小于 0, 不太好说明, 所  
 以  $b$  的取值需要有两重限定

$g'(b) = 2e^{2b} - \frac{a}{b} < 2e^{2b} - 4 = 2(e^{2b} - 2) <$

$2(e^{\frac{1}{2}} - 2) < 0$ ,

所以  $g'(x)$  存在唯一零点, 设为  $x_0$ ,

即  $g'(x_0) = 2e^{2x_0} - \frac{a}{x_0} = 0$ , 即  $2e^{2x_0} = \frac{a}{x_0}$ ,  
 两边同时取对数得  $\ln 2 + 2x_0 = \ln a -$   
 $\ln x_0$ ,

所以  $-\ln x_0 = 2x_0 + \ln \frac{2}{a}$ ,

又当  $x \in (0, x_0)$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单  
 调递减; 当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ ,  
 $g(x)$  单调递增,

所以  $g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{2x_0} - a \ln x_0 =$   
 $\frac{a}{2x_0} + 2ax_0 + a \ln \frac{2}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{2x_0} \cdot 2ax_0} +$   
 $a \ln \frac{2}{a} = 2a + a \ln \frac{2}{a}$ , 当且仅当  $x_0 = \frac{1}{2}$   
 时取等号,

故当  $a > 0$  时,  $g(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$ .

4. (1) 【解】当  $a = 0$  时,  $f(x) = \sin x -$   
 $x \cos x$ ,  $f'(x) = x \sin x$ , 则  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ ,

所以曲线  $y = f(x)$  在点  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  处的切  
 线方程为  $y - 1 = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ , 即  $\frac{\pi}{2}x - y -$   
 $\frac{\pi^2}{4} + 1 = 0$ .

(2) 【解】 $f(x) = \sin x - x \cos x + ax$ , 则  
 $f'(x) = x \sin x + a$ , 且  $f(0) = 0$ .

当  $a \geq 0$  时,  $f'(x) = x \sin x + a > 0$  在  $(0,$   
 $\pi)$  上恒成立, 所以  $f(x)$  单调递增, 此  
 时  $f(x) > f(0) = 0$  恒成立.

当  $a < 0$  时,  $f'(0) = a < 0$ ,  
 当  $x \in (0, \pi)$  时,  $0 < \sin x \leq 1$ , 所以  
 $f'(x) = x \sin x + a \leq x + a$ , 则在  $(0, -a)$   
 上,  $f'(x) = x \sin x + a \leq x + a < 0$ ,  
 记  $I = (0, \pi) \cap (0, -a)$ , 则当  $x \in I$  时,  
 $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减, 此时  $f(x) <$   
 $f(0) = 0$ , 不符合题意.

故实数  $a$  的取值范围是  $[0, +\infty)$ .

(3) 【证明】当  $a = -1$  时,  $f(x) = \sin x -$   
 $x \cos x - x$ ,

令  $F(x) = \sin x - x$ , 则  $F(0) = 0$ ,  
 $F'(x) = \cos x - 1$ ,

当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$  时,  $F'(x) < 0$ ,  $F(x)$  单调  
 递减,

所以在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$  上,  $\sin x - x < 0$ , 且  
 $x \cos x > 0$ , 易得  $f(x) < 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$  上没有零点, 故

只需证明  $f(x)$  在  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  上有且只有  
 一个零点.

令  $g(x) = f'(x) = x \sin x - 1$ ,  $h(x) =$   
 $g'(x) = \sin x + x \cos x$ ,

则在  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  上,  $h'(x) = 2 \cos x -$



$x \sin x < 0$  恒成立,  $h(x)$  单调递减,  
又因为  $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, h(\pi) = -\pi$ ,  
所以存在  $x_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  使得  $h(x_1) = 0$ ,  
在  $\left(\frac{\pi}{2}, x_1\right)$  上,  $h(x) > 0$ , 在  $(x_1, \pi)$  上,  $h(x) < 0$ ,  
因此  $g(x)$  在  $\left(\frac{\pi}{2}, x_1\right)$  上单调递增, 在

$(x_1, \pi)$  上单调递减,  $g(x_1) > g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0, g(\pi) = -1$ ,  
所以存在  $x_2 \in (x_1, \pi)$  使得  $g(x_2) = 0$ ,  
在  $\left(\frac{\pi}{2}, x_2\right)$  上,  $g(x) > 0$ , 在  $(x_2, \pi)$  上,  $g(x) < 0$ ,  
故  $f(x)$  在  $\left(\frac{\pi}{2}, x_2\right)$  上单调递增, 在

$(x_2, \pi)$  上单调递减, 且  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} < 0, f(x_2) > f(\pi) = 0$ ,  
所以存在唯一的  $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, x_2\right)$  使得  $f(x_0) = 0$ , 且  $f(x)$  在  $(x_2, \pi)$  上没有零点.  
综上所述,  $a = -1$  时, 函数  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上有且只有一个零点.

## 专题 11 构造法在导数中的应用

### 刷难关

**1. D** 【解析】令  $F(x) = f(x) - g(x), x \in [a, b]$ , 则  $F'(x) = f'(x) - g'(x)$ ,  
因为当  $x \in (a, b)$  时, 有  $f'(x) > g'(x)$ ,  
所以  $F'(x) > 0$ , 所以  $F(x)$  在  $(a, b)$  上单调递增, 所以  $F(a) < F(x) < F(b)$ ,  
即  $\begin{cases} f(x) - g(x) < f(b) - g(b), \\ f(a) - g(a) < f(x) - g(x), \end{cases}$   
所以  $f(x) + g(b) < g(x) + f(b), f(x) + g(a) > g(x) + f(a)$ , 故 D 正确, C 错误;  
由于不知道  $F(a), F(b)$  的正负, 故无法确定选项 A, B 的正误. 故选 D.

### 2. C

**思路导引** 观察不等式  $f(x^2) < x^2 + 2$ , 即  $f(x^2) - x^2 - 2 < 0$ , 可构造函数  $g(x) = f(x) - x - 2$ , 通过题意判断出  $g(x)$  的单调性, 又  $g(2) = 0$ , 可将所求转化为  $g(x^2) < g(2)$ , 再结合单调性脱去“ $g$ ”求解.

【解析】设  $g(x) = f(x) - x - 2$ , 则  $g'(x) = f'(x) - 1$ , 因为  $f'(x) < 1$ , 所以  $g'(x) < 0$ , 所以  $g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减.  
因为  $f(2) = 4$ , 所以  $g(2) = 0$ , 又不等式  $f(x^2) < x^2 + 2$  可转化为  $f(x^2) - x^2 - 2 < 0$ , 即  $g(x^2) < g(2)$ , 所以  $x^2 > 2$ , 解得  $x < -\sqrt{2}$  或  $x > \sqrt{2}$ . 故选 C.

**3. C** 【解析】因为  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上的偶函数, 所以  $f(1) = f(-1) = 0$ .

当  $x > 0$  时, 令  $F(x) = \frac{f(x)}{x}$ , 则  $F'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$ , 所以  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

当  $0 < x < 1$  时,  $F(x) = \frac{f(x)}{x} > F(1) = f(1) = 0$ , 即  $f(x) > 0$ ,

当  $x > 1$  时,  $F(x) = \frac{f(x)}{x} < F(1) = f(1) = 0$ , 即  $f(x) < 0$ ,  
即当  $x > 0$  时,  $f(x) > 0$  的解集为  $(0, 1)$ .  
因为函数  $f(x)$  是定义在  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  上的偶函数, 由其对称性可知, 当  $x < 0$  时,  $f(x) > 0$  的解集为  $(-1, 0)$ , 所以不等式  $f(x) > 0$  的解集为  $(-1, 0) \cup (0, 1)$ . 故选 C.

### 规律方法 常见的构造函数模型

#### 1. 关系式为“加”型

(1)  $f'(x) + f(x) \geq 0$ , 根据  $[e^x f(x)]' = e^x [f'(x) + f(x)]$ , 构造  $g(x) = e^x f(x)$ .

(2)  $xf'(x) + f(x) \geq 0$ , 根据  $[xf(x)]' = xf'(x) + f(x)$ , 构造  $g(x) = xf(x)$ .

(3)  $xf'(x) + n f(x) \geq 0$ , 根据  $[x^n f(x)]' = x^n f'(x) + nx^{n-1} f(x) = x^{n-1} [xf'(x) + n f(x)]$ , 构造  $g(x) = x^n \cdot f(x)$ , 注意对  $x$  的符号进行讨论.

#### 2. 关系式为“减”型

(1)  $f'(x) - f(x) \geq 0$ , 根据  $\left[\frac{f(x)}{e^x}\right]' = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{(e^x)^2} = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x}$ , 构造  $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ .

(2)  $xf'(x) - f(x) \geq 0$ , 根据  $\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$ , 构造  $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ .

(3)  $xf'(x) - n f(x) \geq 0$ , 根据  $\left[\frac{f(x)}{x^n}\right]' = \frac{xf'(x) - nx^{n-1}f(x)}{(x^n)^2} = \frac{xf'(x) - n f(x)}{x^{n+1}}$ , 构造  $g(x) = \frac{f(x)}{x^n}$ .

### 4. B

**思路导引** 由  $f'(x) \sin x - f(x) \cos x < 0$ , 可构造函数  $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$ , 利用导数判断其单调性, 结合其奇偶性, 得到  $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$  的正负情况, 要解  $f(x) < 0$ , 可以转化为  $\sin x$  和  $g(x)$  的正负关系, 从而解出不等式.

【解析】令  $g(x) = \frac{f(x)}{\sin x}$ , 则  $g'(x) = \frac{f'(x) \sin x - f(x) \cos x}{\sin^2 x}$ ,

由于当  $0 < x < \pi$  时,  $f'(x) \sin x - f(x) \cdot \cos x < 0$ , 故此时  $g'(x) < 0$ , 则  $g(x)$  在  $(0, \pi)$  上单调递减,

由于函数  $f(x)$  是定义在  $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$  上的奇函数,

则  $g(-x) = \frac{f(-x)}{\sin(-x)} = \frac{-f(x)}{-\sin x} = g(x)$ , 即  $g(x)$  为  $(-\pi, 0) \cup (0, \pi)$  上的偶函数, 则  $g(x)$  在  $(-\pi, 0)$  上单调递增,

而  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , 故  $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,

故当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  或  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$  时,  $g(x) > 0$ ,

当  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  或  $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$  时,  $g(x) < 0$ .

由  $f(x) < 0$  可得  $\begin{cases} \sin x > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} \sin x < 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ ,

解得  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$  或  $-\frac{\pi}{2} < x < 0$ ,

故不等式  $f(x) < 0$  的解集为  $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 故选 B.

**5. A** 【解析】令  $F(x) = 2^x f(x) (x > 0)$ , 因为  $f'(x) > -f(x) \ln 2$  恒成立, 即  $f(x) \ln 2 + f'(x) > 0$  恒成立, 所以  $F'(x) = 2^x [f(x) \ln 2 + f'(x)] > 0 (x > 0)$  恒成立, 所以  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 故若  $F(\ln x) < F(2)$ , 即  $2^{\ln x} f(\ln x) < 2^2 f(2)$ , 即  $\frac{f(\ln x)}{4} < \frac{f(2)}{2^{\ln x}}$ ,

则由单调性可得  $\ln x < 2 = \ln e^2 \Rightarrow 0 < x < e^2$ , 又  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

【避坑】注意定义域的限制条件

所以  $\ln x > 0$ , 则  $x > 1$ , 所以不等式  $\frac{f(\ln x)}{4} < \frac{f(2)}{2^{\ln x}}$  的解集为  $(1, e^2)$ . 故选 A.

**名师点拨** 像此类给出一个关于导数的不等式的问题, 要能根据所给不等式的结构特征, 构造恰当的函数, 从而利用其单调性求解.

**6. B** 【解析】因为  $x \ln xf'(x) + f(x) = x^2$ , 所以  $\ln xf'(x) + \frac{f(x)}{x} = x$ ,

【点悟】构造函数时要结合导数运算

公式去思考, 题目出现了  $f(x)$  与  $f'(x)$ , 还有加法, 联想求导法则, 观察到  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ , 所以两边同时除以  $x$ , 得到一个新函数的导函数

即  $[\ln xf(x)]' = x$ , 所以  $\ln xf(x) = \frac{x^2}{2} + C$ , 其中  $C$  为常数.

又因为  $\ln 2f(2) = \frac{2^2}{2} + C = \ln 2 \cdot \frac{2}{\ln 2}$ ,

即  $C = 0$ , 所以  $f(x) = \frac{x^2}{2 \ln x}$ .

所以  $f'(x) = \frac{4x \ln x - 2x}{(2 \ln x)^2} = \frac{2x(2 \ln x - 1)}{(2 \ln x)^2} > 0$  在  $(2, +\infty)$  上恒成立,

所以  $f(x)$  在  $(2, +\infty)$  上单调递增.

又因为  $f(a^2) \geq f(b-1)$ , 所以  $a^2 \geq b-1 \geq 2$ , 所以  $a^2 + \frac{2}{b+1} \geq b-1 + \frac{2}{b+1} = b+1 + \frac{2}{b+1} - 2$ ,

【避坑】注意此处不能直接用基本不等式求最小值, 因为取等条件不成立

令  $t = b+1$ , 则  $t \geq 4$ , 由对勾函数知  $y = t + \frac{2}{t} - 2$  在  $(4, +\infty)$  上单调递增,



所以  $t + \frac{2}{t} - 2 \geq 4 + \frac{2}{4} - 2 = \frac{5}{2}$ , 所以  $a^2 + \frac{2}{b+1} \geq \frac{5}{2}$ , 当且仅当  $b=3$  时等号成立. 故选 B.

7. C 【解析】因为  $xf'(x) = (x+1)f(x)$ , 所以当  $x=0$  时, 可得  $0=f(0)$ , A 错误; 当  $x \neq 0$  时,  $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x}$ , 所以  $\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{f(x)}{x}$ , 所以  $\frac{f(x)}{x} = De^x$ , 其中  $D$  为常数, 所以当  $x \neq 0$  时,  $f(x) = Dxe^x$ , 又因为  $f(0) = 0$  满足关系  $f(0) = D \times 0e^0$ , 所以  $f(x) = Dxe^x, x \in \mathbf{R}$ , 又  $f(1) = De = e$ , 即  $D=1$ , 所以  $f(x) = xe^x, x \in \mathbf{R}$ , 所以  $f'(x) = (x+1)e^x$ , 故  $f'(-2) = -e^{-2}$ , B 错误; 因为  $f(x) = xe^x, x \in \mathbf{R}$ , 所以  $f(2) = 2e^2, 3f(1) = 3e$ , 所以  $f(2) > 3f(1)$ , C 正确; 令  $f'(x) = (x+1)e^x = 0$ , 可得  $x = -1$ , 当  $x > -1$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 当  $x < -1$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递减, 所以  $-1$  是函数  $f(x)$  的极小值点, D 错误. 故选 C.

8.  $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$  【解析】因为  $y = f(x), y = g(x)$  分别是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数和非零偶函数, 所以  $f(-x) = -f(x), g(-x) = g(x)$ . 令  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , 则  $h(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{g(x)} = -h(x)$ , 因此函数  $h(x)$  是  $\mathbf{R}$  上的奇函数. 因为当  $x < 0$  时,  $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} > 0$ , 所以  $h(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增. 又函数  $h(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是奇函数, 所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 且  $h(0) = \frac{f(0)}{g(0)} = 0$ . 因为  $f(-3) = -f(3) = 0$ , 所以  $h(-3) = \frac{f(-3)}{g(-3)} = 0, h(3) = \frac{f(3)}{g(3)} = 0$ , 所以当  $x < -3$  时,  $h(x) < 0$ , 当  $-3 < x < 0$  时,  $h(x) > 0$ , 当  $0 < x < 3$  时,  $h(x) < 0$ , 当  $x > 3$  时,  $h(x) > 0$ , 所以  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  的解集是  $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ , 即  $f(x)g(x) < 0$  的解集是  $(-\infty, -3) \cup (0, 3)$ .

9.  $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

**思路导引** 本题已知当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(x) < 4x$ , 而没有给  $x < 0$  时的情况, 意味着所构造的函数应该具有奇偶性, 结合条件  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) + f(-x) = 4x^2$ , 与奇函数的定义比较接近, 所以尝试将右侧  $4x^2$  和左侧  $f(x)$  结合, 构造出某个函数满足  $g(x) + g(-x) = f(x) + f(-x) - 4x^2 = 0$ , 故可令  $g(x) = f(x) - 2x^2$ , 研究  $g(x)$  的单调性和奇偶性等, 尝试解不等式.

【解析】设  $g(x) = f(x) - 2x^2$ , 则  $g(-x) = f(-x) - 2x^2$ , 因为  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) + f(-x) = 4x^2$ , 所以  $g(x) + g(-x) = f(x) - 2x^2 + f(-x) - 2x^2 = f(x) + f(-x) - 4x^2 = 0$ , 所以函数  $g(x)$  为奇函数. 因为当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $f'(x) < 4x$ , 即当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $g'(x) = f'(x) - 4x < 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减. 又因为  $g(x)$  为奇函数, 且函数  $f(x)$  的图象连续不断, 所以  $g(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是减函数.  $f(2m+1) - f(-m) \leq 6m^2 + 8m + 2$ , 即  $f(2m+1) - 2 \cdot (2m+1)^2 \leq f(-m) - 2 \cdot (-m)^2$ , 即  $g(2m+1) \leq g(-m)$ , 故  $2m+1 \geq -m$ , 则  $m \geq -\frac{1}{3}$ . 故实数  $m$  的取值范围为  $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ .

10. D 【解析】对于 A, 由  $y > x > 0$ , 得  $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ , A 错误; 对于 B, 取  $y = 1, x = e^{-1}$ , 则  $x - \ln x = e^{-1} + 1 > 1 - \ln y$ , 则  $x + \ln y > y + \ln x$ , B 错误; 对于 C, 取  $y = 2, x = 1$ , 则  $x + e^x = 1 + e > 2 + \ln 2 = y + \ln y$ , C 错误; 对于 D, 令函数  $f(x) = x + \cos x, x > 0$ , 求得  $f'(x) = 1 - \sin x \geq 0$  且不恒为 0, 则  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 由  $y > x > 0$ , 得  $f(y) > f(x)$ , 即  $x - \cos y < y - \cos x$ , D 正确. 故选 D.

#### 11. D

**思路导引** 把原不等式变形为  $\frac{\ln x_2 - 4}{x_2} < \frac{\ln x_1 - 4}{x_1}$ , 构造函数  $f(x) = \frac{\ln x - 4}{x}$ , 可得  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上单调递减, 则利用  $f'(x) \leq 0$  解出  $a$  的取值范围即可.

【解析】由  $x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 < 4(x_1 - x_2)$ , 可得  $x_1 \ln x_2 - 4x_1 < x_2 \ln x_1 - 4x_2$ , 即  $\frac{\ln x_2 - 4}{x_2} < \frac{\ln x_1 - 4}{x_1}$ , 所以对任意的正实数  $x_1, x_2 \in (a, +\infty)$ , 满足当  $x_1 < x_2$  时,  $\frac{\ln x_2 - 4}{x_2} < \frac{\ln x_1 - 4}{x_1}$ . 设  $f(x) = \frac{\ln x - 4}{x}$ , 则  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上单调递减, 所以  $f'(x) = \frac{1 - \ln x + 4}{x^2} = \frac{5 - \ln x}{x^2} \leq 0$  在  $(a, +\infty)$  上恒成立, 所以  $\ln x \geq 5$  在  $(a, +\infty)$  上恒成立, 所以  $x \geq e^5$ , 即实数  $a$  的取值范围为  $[e^5, +\infty)$ , 故选 D.

12. C 【解析】令  $f(x) = \frac{\ln x}{x}, x > 3$ , 则  $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ , 则  $f(x)$  在  $(3, +\infty)$  上单调递减, 所以  $f(2\ 023) > f(2\ 026)$ , 即  $\frac{\ln 2\ 023}{2\ 023} > \frac{\ln 2\ 026}{2\ 026}$ , 即  $2\ 026 \ln 2\ 023 > 2\ 023 \ln 2\ 026$ , 即  $\ln 2\ 023^{2\ 026} > \ln 2\ 026^{2\ 023}$ , 因为  $y = \ln x$  为增函数, 所以  $2\ 023^{2\ 026} > 2\ 026^{2\ 023}$ . 故选 C.

**名师点拨** 此类比较大小的题目, 要能将所给数进行形式上的变化, 指数幂比较大小时可以先取对数, 由此构造函数, 利用导数判断其单调性, 进而比较大小.

13. A 【解析】令  $f(x) = \frac{x}{\ln x} (x > 1)$ , 则  $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ , 所以当  $x \in (1, e)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减; 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.  $a = 2\sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{\ln \sqrt{e}} = f(\sqrt{e}), f(2) = b = \frac{2}{\ln 2} = \frac{4}{2 \ln 2} = \frac{4}{\ln 4} = f(4), c = \frac{e^2}{4 - \ln 4} = \frac{2}{\ln \frac{2}{e^2}} = f\left(\frac{e^2}{2}\right)$ . 因为  $1 < \sqrt{e} < 2 < e < \frac{e^2}{2} < 4$ , 所以  $f(\sqrt{e}) > f(2) = f(4) > f\left(\frac{e^2}{2}\right)$ , 即  $a > b > c$ . 故选 A.

**规律方法** 解决数的比较大小问题, 关键是将数的形式转化为结构一致的形式, 从而确定变量, 构造函数, 利用导数判断其单调性, 进而比较大小.

14. D 【解析】令  $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ , 取自然对数得  $\ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x$ ,

**悟:** 函数  $f(x)$  的底数和幂指数均含有变量, 既不是幂函数, 也不是指数函数, 不能直接研究, 可以通过取对数把幂指数位置上的自变量放下来, 变成相乘的形式再研究.

令  $g(x) = \ln f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln x$ , 则  $g'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \ln x\right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' \ln x + \frac{1}{\sqrt{x}} (\ln x)' = -\frac{\ln x}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$ , 令  $g'(x) = 0$ , 得  $x = e^2$ , 若  $x \in (0, e^2)$ , 则  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增,  $f(x)$  单调递增; 若  $x \in (e^2, +\infty)$ , 则  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  单调递减,  $f(x)$  单调递减. 因为  $e < 4 < e^2$ , 所以  $f(e) < f(4)$ , 而  $a = 2 = 4^{\frac{1}{4}}, c = e^{\frac{1}{e^2}}$ , 所以  $c < a$ . 因为  $16 > 13 > e^2$ , 所以  $f(16) < f(13)$ , 而  $b = 13^{\frac{1}{13}}, f(16) = 16^{\frac{1}{16}} = 2 = a$ , 所以  $a < b$ , 故  $c < a < b$ . 故选 D.

15. BCD 【解析】对于 A, 令  $f(x) = \tan x - x, x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \geq 0$  且等号不恒成立, 所以  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增, 所以  $f(x) \geq f(0) = 0$ , 则  $\tan x \geq x$  在  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上恒成立, 则  $\tan \frac{1}{4} > \frac{1}{4}$ , 即  $4 \tan \frac{1}{4} > 1$ , 故 A 错误;



对于 B,  $\tan(\pi-2) = -\tan 2$ , 而  $\tan 2 < \tan \frac{3\pi}{4} = -1$ , 则  $-\tan 2 > -1$ , 而  $\sin 2 < 1$ ,

→ 黑板: 取中间值 1 便于分析大小关系

则  $\tan(\pi-2) > \sin 2$  成立, 故 B 正确;

对于 C, 设  $h(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $x \in (0, 1)$ , 则

$$h'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2},$$

令  $g(x) = x \cos x - \sin x$ ,  $x \in (0, 1)$ , 则  $g'(x) = -x \sin x$ ,

则  $g'(x) = -x \sin x < 0$  在  $(0, 1)$  上恒成立, 所以  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 又当  $x \rightarrow 0$  时,  $g(x) \rightarrow 0$ , 则  $g(x) < 0$ , 则  $h'(x) < 0$  在  $(0, 1)$  上恒成立, 则  $h(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减,

因为  $0 < \frac{1}{10} < \frac{\pi}{6} < 1$ , 所以  $h\left(\frac{1}{10}\right) >$

$h\left(\frac{\pi}{6}\right)$ , 则  $10 \sin \frac{1}{10} > \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi}{6}$  成立,

故 C 正确;

对于 D, 根据余弦函数的单调性知,

$\cos \frac{4}{5} < \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{4}{5}$ , 故 D 正确.

故选 BCD.

16. B 【解析】令  $f(x) = e^{x-1} - 1 - \ln x$  ( $x \geq 1$ ), 则  $f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$  ( $x \geq 1$ ),

因为函数  $y = e^{x-1}$ ,  $y' = e^{x-1}$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以函数  $f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

所以  $f'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} \geq f'(1) = 0$  且不恒为 0, 所以函数  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(1.2) > f(1) = 0$ , 即  $e^{0.2} - 1 - \ln 1.2 > 0$ , 所以  $a > c$ .

令  $g(x) = \ln \frac{x+1}{x} - \left(1 - \frac{x}{x+1}\right)$ ,  $x > 0$ ,

令  $t = \frac{x+1}{x}$ ,  $t > 1$ , 令  $h(t) = \ln t + \frac{1}{t} - 1$

( $t > 1$ ), 则  $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} = \frac{t-1}{t^2}$ .

$\left(1 - \frac{1}{t}\right) > 0$ ,

所以函数  $h(t)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 又当  $t \rightarrow 1$  时,  $h(t) \rightarrow 0$ , 所以

$h(t) > 0$ , 所以  $g(x) = \ln \frac{x+1}{x} -$

$\left(1 - \frac{x}{x+1}\right) > 0$  ( $x > 0$ ),

故  $\ln \frac{6}{5} - \left(1 - \frac{5}{6}\right) > 0$ , 即  $\ln 1.2 > \frac{1}{6}$ ,

所以  $c > b$ . 综上所述,  $b < c < a$ . 故选 B.

17. A 【解析】由  $\frac{2}{2-a} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+c} =$

$1.01$ , 得  $a = 2 \times \frac{1.01-1}{1.01}$ ,  $b = 2 \ln 1.01$ ,  $c = 1.01^2 - 1$ .

令  $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{x} -$

$\frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$ ,

当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x}$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 又当  $x \rightarrow 1$  时,  $f(x) \rightarrow 0$ ,

所以  $b - a = 2 \ln 1.01 - 2 \times \frac{1.01-1}{1.01} =$

$2f(1.01) > 0$ , 所以  $b > a$ .

令  $g(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$ , 则  $g'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}$ ,

当  $x > 1$  时,  $g'(x) > 0$ , 所以  $g(x) = x^2 - 1 - 2 \ln x$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 又当  $x \rightarrow 1$  时,  $g(x) \rightarrow 0$ , 所以  $c - b = g(1.01) > 0$ , 所以  $c > b$ , 所以  $c > b > a$ . 故选 A.

18. A 【解析】由题意可得  $\ln(4x+y-4) - e^{2x-3y-2} \geq 2x+4y-4$ , 设  $m = 4x+y-4$ ,  $m > 0$ ,  $n = 2x-3y-2$ , 则  $m-n = 2x+4y-2$ , 故  $\ln m - e^n \geq m-n-2$ , 即  $\ln m - m \geq e^n - n - 2$ .

令  $f(m) = \ln m - m$ , 则  $f'(m) = \frac{1}{m} - 1 =$

$\frac{1-m}{m}$ , 当  $0 < m < 1$  时,  $f'(m) > 0$ ,  $f(m)$  在  $(0, 1)$  上单调递增; 当  $m > 1$  时,  $f'(m) < 0$ ,  $f(m)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $f(m)_{\max} = f(1) = -1$ , 所以  $f(m) \leq -1$ .

令  $h(n) = e^n - n - 2$ , 则  $h'(n) = e^n - 1$ , 当  $n > 0$  时,  $h'(n) > 0$ ,  $h(n)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增; 当  $n < 0$  时,  $h'(n) < 0$ ,  $h(n)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 故  $h(n)_{\min} = h(0) = -1$ , 所以  $h(n) \geq -1$ .

由题意可知  $f(m) \geq h(n)$ , 则  $f(m) = h(n) = -1$ , 故  $m = 1$ ,  $n = 0$ ,

此时  $4x+y-4=1$  且  $2x-3y-2=0$ , 解得  $x = \frac{17}{14}$ ,  $y = \frac{1}{7}$ , 故  $2x+3y = \frac{20}{7}$ . 故选 A.

19. C 【解析】由  $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{2f(x)}{x}$ , 化

简得  $\ln x = x^2 f'(x) + 2x f(x) = [x^2 f(x)]'$ .

构造函数  $g(x) = x^2 f(x)$ , 则  $g'(x) = \ln x$ ,  $f(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ . 代入已知得

$$f'(x) = \frac{x \ln x - 2g(x)}{x^3}.$$

再构造函数  $h(x) = x \ln x - 2g(x)$ , 则  $h'(x) = \ln x + 1 - 2g'(x) = 1 - \ln x$ ,

易知当  $x \in (0, e)$  时,  $h'(x) > 0$ , 函数  $h(x)$  在  $(0, e)$  上单调递增;

当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $h'(x) < 0$ , 函数  $h(x)$  在  $(e, +\infty)$  上单调递减,

所以  $h(x)_{\max} = h(e) = e - 2g(e) = e - 2e^2 f(e)$ ,

由于  $f(e) = \frac{1}{2e}$ , 所以  $h(e) = 0$ , 所以

$h(x) \leq 0$  且不恒为 0,

所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减.

根据单位圆可得三角不等式  $\sin \frac{1}{10} <$

$\frac{1}{10} < \tan \frac{1}{10}$ ,

又  $\sin \frac{1}{11} < \sin \frac{1}{10}$ ,  $\tan \frac{1}{10} < \tan \frac{1}{9}$ , 所以

$\sin \frac{1}{11} < \frac{1}{10} < \tan \frac{1}{9}$ , 故  $f\left(\tan \frac{1}{9}\right) <$

$f\left(\frac{1}{10}\right) \leq f\left(\sin \frac{1}{11}\right)$ . 故选 C.

20.  $z < y < x$  【解析】由  $x \ln y = y e^z = z x$ , 得

$x \ln y = z x$ , 则  $z = \ln y$ , 得  $y = e^z$ ,

所以  $e^z \cdot e^z = z x$ , 所以  $x = \frac{e^{2z}}{z}$ .

令  $f(z) = e^z - z$  ( $z > 0$ ), 则  $f'(z) = e^z - 1 > 0$ ,

所以函数  $f(z)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

又当  $z \rightarrow 0$  时,  $f(z) \rightarrow 1$ , 所以  $f(z) > 1$ , 所以  $e^z > z$ , 即  $y > z$ .

因此  $x - y = \frac{e^{2z}}{z} - e^z = \frac{e^{2z} - z e^z}{z} = \frac{e^z(e^z - z)}{z} >$

0, 所以  $x > y$ .

综上所述,  $z < y < x$ .

## 专题 12 导数中的指对同构问题

### 刷难关

1. 【解】(1) 显然  $x > 0$ , 则  $\log_2 x - k \cdot 2^{kx} \geq 0 \Leftrightarrow x \log_2 x \geq k x \cdot 2^{kx} \Leftrightarrow (\log_2 x) \cdot 2^{\log_2 x} \geq k x \cdot 2^{kx}$ , 同构函数为  $f(x) = x \cdot 2^x$ .

(2) 显然  $x > 0$ , 则  $e^{2\lambda x} - \frac{1}{\lambda} \ln \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$e^{2\lambda x} \geq \frac{1}{2\lambda} \ln x \Leftrightarrow 2\lambda x e^{2\lambda x} \geq x \ln x \Leftrightarrow$$

$2\lambda x e^{2\lambda x} \geq (\ln x) e^{\ln x}$ , 同构函数为  $g(x) = x e^x$ .

(3) 显然  $x > 0$ , 则  $x^2 \ln x - m e^{\frac{m}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$x \ln x \geq \frac{m}{x} e^{\frac{m}{x}} \Leftrightarrow \ln x + \ln(\ln x) \geq \frac{m}{x} +$$

$\ln \frac{m}{x}$ , 同构函数为  $h(x) = x + \ln x$ .

(4) 显然  $x > 0$ , 则  $a(e^{ax} + 1) \geq 2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \ln x \Leftrightarrow a x e^{ax} + a x \geq 2 x^2 \ln x + 2 \ln x =$

$$x^2 \ln x^2 + \ln x^2 \Leftrightarrow a x \cdot e^{ax} + a x \geq \ln x^2 \cdot$$

$$e^{\ln x^2} + \ln x^2, \text{ 同构函数为 } u(x) = x e^x + x.$$

(5) 显然  $x > 1$ ,  $a \ln(x-1) + 2(x-1) \geq a x + 2 e^x \Leftrightarrow a \ln(x-1) + 2(x-1) \geq a \ln e^x + 2 e^x$ , 同构函数为  $v(x) = a \ln x + 2x$ .

(6)  $x > 1$ ,  $x + a \ln x + e^{-x} \geq x^x \Leftrightarrow x + e^{-x} \geq x^x - \ln x^x \Leftrightarrow e^{-x} - \ln e^{-x} \geq x^x - \ln x^x$ , 同构函数为  $r(x) = x - \ln x$ .

### 归纳总结 指对同构的常用形式

(1) 积型:  $a e^a \leq b \ln b$  ( $b > 0$ )

① 构造形式为  $a e^a \leq (\ln b) e^{\ln b}$ , 构造函数  $f(x) = x e^x$ ;

② 构造形式为  $e^a \ln e^a \leq b \ln b$ , 构造函数  $f(x) = x \ln x$ ;

③ 当  $a > 0$ ,  $b > 1$  时, 构造形式为  $a + \ln a \leq \ln b + \ln(\ln b)$ , 构造函数  $f(x) = x + \ln x$ .

(2) 商型:  $\frac{e^a}{a} \leq \frac{b}{\ln b}$  ( $a \neq 0, b > 0$  且  $b \neq 1$ )

① 构造形式为  $\frac{e^a}{a} \leq \frac{e^{\ln b}}{\ln b}$ , 构造函数

$$f(x) = \frac{e^x}{x};$$



②构造形式为  $\frac{e^x}{\ln e^x} \leq \frac{b}{\ln b}$ , 构造函数

$$f(x) = \frac{x}{\ln x};$$

③当  $a > 0, b > 1$  时, 构造形式为  $a - \ln a \leq \ln b - \ln(\ln b)$ , 构造函数  $f(x) = x - \ln x$ .

**2. D** 【解析】因为  $\alpha e^{\alpha-3} = 1$ , 所以  $\alpha e^{\alpha} = e^3$ , 所以  $\alpha + \ln \alpha = 3$ .

因为  $\beta(\ln \beta - 1) = e^4$ , 当  $0 < \beta \leq e$  时, 显然等式不成立, 所以  $\beta > e$ , 所以  $\ln \beta + \ln(\ln \beta - 1) = 4$ .

$$\text{观察} \begin{cases} \alpha + \ln \alpha - 3 = 0, \\ (\ln \beta - 1) + \ln(\ln \beta - 1) - 3 = 0, \end{cases}$$

→ 敲黑板: 转化为相同结构的式子, 为构造函数做准备

可知  $\alpha$  与  $\ln \beta - 1$  是关于  $x$  的方程  $x + \ln x - 3 = 0$  的两根.

构造函数  $f(x) = x + \ln x - 3$ , 该函数的定义域为  $(0, +\infty)$ , 且  $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ ,

则该函数为增函数.

因为  $f(\alpha) = f(\ln \beta - 1) = 0$ , 所以  $\alpha = \ln \beta - 1$ , 又  $\alpha + \ln \alpha - 3 = 0$ ,

所以  $\ln \beta - 1 + \ln \alpha - 3 = 0$ , 即  $\ln(\alpha\beta) = 4$ , 解得  $\alpha\beta = e^4$ . 故选 D.

**3. 0** 【解析】令  $f(x) = e^x + x$ , 则  $f'(x) = e^x + 1 > 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.  $e^x + x = ax + \ln ax$ , 即  $e^x + x = e^{\ln ax} + \ln ax$ , 故  $f(x) = f(\ln ax)$ .

∵ 正实数  $x_0$  是方程  $e^x + x = ax + \ln ax$  的根, ∴  $f(x_0) = f(\ln ax_0)$ ,

则  $x_0 = \ln ax_0$ , 得  $e^{x_0} = ax_0$ , 即  $e^{x_0} - ax_0 = 0$ .

**4.  $\frac{e^5}{4}$**  【解析】由题意可得  $e^{2 \cdot 025 - 2m} - 2m = 0$ , 即  $e^{2 \cdot 025} = 2me^{2m}$ , 两边同时取对数可得  $2m + \ln 2m = 2 \cdot 025$ , 即  $e^{\ln 2m} + \ln 2m = 2 \cdot 025$ .

$$\text{由 } \frac{e^{5-\ln 2}}{n} - \ln n - \ln(2e^{2 \cdot 020}) = 0 \text{ 可得}$$

$$\frac{e^{5-\ln 2}}{e^{\ln n}} - \ln n - \ln 2 - 2 \cdot 020 = 0,$$

$$\text{即 } e^{5-\ln 2n} + 5 - \ln 2n = 2 \cdot 025.$$

令  $f(x) = x + e^x$ , 则  $f'(x) = 1 + e^x > 0$  恒成立, 所以函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增.

而  $f(\ln 2m) = f(5 - \ln 2n) = 2 \cdot 025$ , 所以  $\ln 2m = 5 - \ln 2n$ , 即  $\ln 4mn = 5$ , 所以

$$mn = \frac{e^5}{4}.$$

**归纳总结** 指数、对数同构的五个常见变形  
已知  $x > 0$ .

$$\text{① } xe^x = e^{x+\ln x}, \text{② } x + \ln x = \ln(xe^x),$$

$$\text{③ } \frac{e^x}{x} = e^{x-\ln x}, \text{④ } x - \ln x = \ln \frac{e^x}{x},$$

$$\text{⑤ } \frac{x}{e^x} = e^{\ln x - x}.$$

$$\text{拓展: } x^2 e^x = e^{x+2\ln x}, x + 2\ln x = \ln(x^2 e^x), \frac{e^x}{x^2} = e^{x-2\ln x}.$$

**5. C**

**思路导引** 方程化为  $e^x = y \ln(xy)$  ( $x > 0, y > 0, xy > 1$ ), 变形后可构造函数  $g(x) = xe^x$  ( $x > 0$ ), 求出函数  $g(x)$  的导数, 判断函数  $g(x)$  的单调性, 可

推出  $x = \ln(xy)$ , 从而  $y = \frac{e^x}{x}$  ( $x > 0$ ),

构造函数  $h(x) = \frac{e^x}{x}$  ( $x > 0$ ), 利用函数  $h(x)$  的导数判断函数  $h(x)$  的单调性, 求出函数  $h(x)$  的最值即可.

【解析】 $e^x = y \ln x + y \ln y$  可化为  $e^x = y \ln(xy)$  ( $x > 0, y > 0, xy > 1$ ),

$$\text{即 } xe^x = xy \ln(xy) = \ln(xy) \cdot e^{\ln(xy)}.$$

构造函数  $g(x) = xe^x$  ( $x > 0$ ), 则  $g'(x) = (x+1)e^x$ ,

当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  单调递增, 又  $g(x) = g(\ln(xy))$ , 所以可以得到  $x = \ln(xy)$ ,

$$\text{从而 } y = \frac{e^x}{x}. \text{ 令 } h(x) = \frac{e^x}{x} (x > 0),$$

$$\text{则 } h'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \text{ 令 } h'(x) = 0 \text{ 可得}$$

$x = 1$ , 当  $x \in (0, 1)$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减;

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增, 从而当  $x = 1$  时,  $h(x)$  取得最小值, 最小值为  $h(1) = e$ , 即  $y$  有最小值  $e$ . 故选 C.

**6. C** 【解析】由  $y \ln(3xy) = e^{3x}$ , 得  $3xy \cdot \ln(3xy) = 3xe^{3x}$ , 故  $\ln(3xy) \cdot e^{\ln(3xy)} = 3xe^{3x}$ .

由题意得,  $3x > 0, 3xy > 0$ , 由  $e^{3x} > 0$ ,  $e^{\ln(3xy)} > 0$ ,  $\ln(3xy) \cdot e^{\ln(3xy)} = 3xe^{3x}$ , 得  $\ln(3xy) > 0$ .

设  $f(t) = te^t, t > 0$ , 则  $f'(t) = (t+1)e^t > 0$ , ∴  $f(t)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

$$\therefore f(\ln(3xy)) = f(3x), \therefore \ln(3xy) = 3x,$$

$$3x, \therefore 3xy = e^{3x}, \text{ 即 } y = \frac{e^{3x}}{3x}, x > 0,$$

$$\therefore y' = \frac{(3x-1)e^{3x}}{3x^2}, \text{ 令 } y' = \frac{(3x-1)e^{3x}}{3x^2} =$$

$$0, \text{ 得 } x = \frac{1}{3},$$

$$\text{当 } x \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \text{ 时, } y' < 0, y = \frac{e^{3x}}{3x} \text{ 在}$$

$$\left(0, \frac{1}{3}\right) \text{ 上单调递减,}$$

$$\text{当 } x \in \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \text{ 时, } y' > 0, y = \frac{e^{3x}}{3x} \text{ 在}$$

$$\left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \text{ 上单调递增,}$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{1}{3} \text{ 时, } y \text{ 取极小值也是最小}$$

值, 最小值为  $e$ . 故选 C.

**7. BCD** 【解析】由  $a > e, b > e, b(1 +$

$$\ln a) = ea \ln(1+b), \text{ 得 } \frac{1+\ln a}{ea} = \frac{\ln(1+b)}{b} >$$

$$\frac{\ln b}{b}, \text{ 则 } \frac{\ln ea}{ea} > \frac{\ln b}{b}.$$

→ 点悟: (1) 题中含双元  $a, b$ , 如果形式允许, 优先考虑分离; (2) 条件中是等式关系, 而选项均为不等关系, 所以构造的过程中可以放缩, 在同构的同时产生不等关系

令函数  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$  ( $x > e$ ), 求导得

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0, \text{ 则函数 } f(x) \text{ 在 } (e,$$

$+\infty)$  上单调递减.

不等式  $\frac{\ln ea}{ea} > \frac{\ln b}{b} \Leftrightarrow f(ea) > f(b)$ , 因此

$b > ea$ .

对于 A, 由  $b > ea$ , 得  $eb > e^2 a > a, a - eb < 0$ , A 错误;

对于 B, 由  $b > ea$ , 得  $\ln b > 1 + \ln a, \ln(b+1) - \ln a > \ln b - \ln a > 1$ , B 正确;

对于 C, 由  $b > ea$ , 得  $a(b+1) > ab > ea^2 > e^3$ , C 正确;

对于 D,  $2^{\ln a} + 4^{\ln b} > 2^{\ln a} + 4^{\ln ea} > 2 + 4^2 > 10$ , D 正确. 故选 BCD.

**规律方法** 本类比较大小问题解答的关键是构造相应的函数, 利用导数说明函数的单调性, 结合函数的单调性比较函数值的大小.

**8. A**

**思路导引** 将不等式变形为  $e^{ax} + ax > e^{3\ln x} + 3\ln x$ , 构造函数  $g(x) = e^x + x$ , 求

导判断其单调性, 进而将问题转化成  $ax > 3\ln x$ , 分离参数, 构造函数  $h(x) =$

$$\frac{3\ln x}{x}, \text{ 利用导数得到 } h(x) \text{ 的最大值, 从}$$

而得到实数  $a$  的取值范围.

【解析】 $f(x) > x^3 - ax$  等价于  $e^{ax} + ax > x^3 + 3\ln x = e^{3\ln x} + 3\ln x$ .

令函数  $g(x) = e^x + x$ , 则  $g'(x) = e^x + 1 > 0$ , 故  $g(x)$  是增函数.

所以  $e^{ax} + ax > e^{3\ln x} + 3\ln x$  等价于  $g(ax) > g(3\ln x)$ ,

$$\text{故 } ax > 3\ln x (x > 0), \text{ 即 } a > \frac{3\ln x}{x}.$$

$$\text{令函数 } h(x) = \frac{3\ln x}{x}, \text{ 则 } h'(x) =$$

$$\frac{3-3\ln x}{x^2}. \text{ 当 } x \in (0, e) \text{ 时, } h'(x) > 0,$$

$h(x)$  单调递增; 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减, 所以

$$h(x)_{\max} = h(e) = \frac{3}{e}, \text{ 故 } a > \frac{3}{e}, \text{ 即实数}$$

$$a \text{ 的取值范围为 } \left(\frac{3}{e}, +\infty\right).$$

**9. D**

**思路导引** 本题解题思路是对恒成立的不等式进行同构变形, 将其转化为同一函数的两个函数值之间的大小关系, 即把恒成立的不等式化为

$(e^{kx} + 1) \ln e^{kx} > (x+1) \ln x$ , 构造函数

$f(x) = (x+1) \ln x$ , 利用导数可得

$f(x)$  的单调性, 从而得到  $e^{kx} > x$ , 分离

参数可得  $k > \frac{\ln x}{x}$ . 令  $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 利用

导数可求得  $h(x)$  的最大值, 由此可得

$k$  的范围, 从而确定  $k$  可能的取值.

【解析】∵  $x > 0$ , ∴ 由  $k(e^{kx} + 1) -$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \ln x > 0, \text{ 得 } kx(e^{kx} + 1) > (x+1) \cdot$$

$$\ln x, \therefore (e^{kx} + 1) \ln e^{kx} > (x+1) \ln x.$$

$$\text{令 } f(x) = (x+1) \ln x, \text{ 则 } f'(x) = \ln x +$$

$$1 + \frac{1}{x}, \text{ 令 } g(x) = f'(x), \text{ 则 } g'(x) = \frac{1}{x} -$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}, \therefore \text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时, } g'(x) < 0;$$

$$\text{当 } x \in (1, +\infty) \text{ 时, } g'(x) > 0,$$

$$\therefore f'(x) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递减, 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递增, } \therefore f'(x) \geq f'(1) = 2 > 0,$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增. 由 } (e^{kx} + 1) \ln e^{kx} > (x+1) \ln x, \text{ 得 } f(e^{kx}) > f(x), \therefore e^{kx} > x, \text{ 即 } k > \frac{\ln x}{x}.$$



令  $h(x) = \frac{\ln x}{x}$ , 则  $h'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ ,  
 $\therefore$  当  $x \in (0, e)$  时,  $h'(x) > 0$ ; 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $h'(x) < 0$ ,  
 $\therefore h(x)$  在  $(0, e)$  上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减,  $\therefore h(x) \leq h(e) = \frac{1}{e}$ ,  
 $\therefore$  若  $k > \frac{\ln x}{x}$  恒成立, 则  $k > \frac{1}{e}$ ,  
 $\therefore$  实数  $k$  的可能取值为  $\frac{2}{e}$ , **ABC 错误**,

**D 正确**, 故选 D.

### 10.1

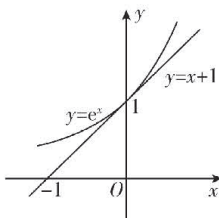
**思路导引** 由已知不等式变形可得  $\ln(mx+1) - mx > \ln[(e^x-1)+1] - (e^x-1)$ , 构造函数  $f(x) = \ln(x+1) - x (x > 0)$ , 则不等式转化为  $f(mx) > f(e^x-1)$ , 结合函数  $f(x)$  的单调性进而转化为  $mx < e^x - 1$ , 结合导数的几何意义及不等式恒成立与最值关系的转化即可求解.

**【解析】** 由  $\ln(mx+1) - x - 1 > mx - e^x$  可得  $\ln(mx+1) - mx > x + 1 - e^x$ ,  
 所以  $\ln(mx+1) - mx > \ln[(e^x-1)+1] - (e^x-1)$ ,  
 因为  $m > 0, x > 0$ , 所以  $mx > 0, e^x - 1 > 0$ ,  
 设  $f(x) = \ln(x+1) - x (x > 0)$ ,  
 则  $\ln(mx+1) - mx > \ln[(e^x-1)+1] - (e^x-1)$  即为  $f(mx) > f(e^x-1)$ .

因为  $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1} < 0$ , 所以函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减,  
 从而  $f(mx) > f(e^x-1)$  等价于  $mx < e^x - 1$ , 即  $mx + 1 < e^x$ .

**【巧思】** 也可分离参数得到  $m < \frac{e^x-1}{x}$ , 再构造函数分析, 得参数范围

因为曲线  $y = e^x$  在点  $(0, 1)$  处的切线方程为  $y = x + 1$ ,



所以当且仅当  $0 < m \leq 1$  时,  $mx + 1 < e^x$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 所以正实数  $m$

**【敲黑板】** 根据导数的几何意义结合图象得到

的最大值为 1.

**11. 【解】** (1) 当  $a = e$  时,  $f(x) = e^x - \ln x + 1$ ,  
 $\therefore f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ ,  $\therefore f'(1) = e - 1$ .  
 $\therefore f(1) = e + 1$ ,  $\therefore$  曲线  $f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y - e - 1 = (e - 1)(x - 1)$ , 即  $y = (e - 1)x + 2$ ,  
 $\therefore$  切线与两坐标轴的交点坐标分别为  $(0, 2)$ ,  $(\frac{2}{e-1}, 0)$ ,  $\therefore$  所求三角形的面积为  $\frac{1}{2} \times 2 \times \left| \frac{2}{e-1} \right| = \frac{2}{e-1}$ .  
 (2)  $\therefore f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a$ ,  
 $\therefore f'(x) = ae^{x-1} - \frac{1}{x}$ , 且  $a > 0$ .  
 设  $g(x) = f'(x)$ , 则  $g'(x) = ae^{x-1} +$

$\frac{1}{x^2} > 0$ ,  
 $\therefore g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 即  $f'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.  
 当  $a = 1$  时,  $f'(1) = 0$ ,  $\therefore$  当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减, 当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增,  $\therefore f(x)_{\min} = f(1) = 1$ , 此时  $f(x) \geq 1$  成立.

当  $a > 1$  时,  $\frac{1}{a} < 1$ ,  $\therefore e^{\frac{1}{a}-1} < 1$ ,  
 $\therefore f'\left(\frac{1}{a}\right) f'(1) = a(e^{\frac{1}{a}-1} - 1)(a - 1) < 0$ ,  
 $\therefore$  存在唯一  $x_0 \in \left(\frac{1}{a}, 1\right)$ , 使得

$f'(x_0) = ae^{x_0-1} - \frac{1}{x_0} = 0$ ,  $\therefore ae^{x_0-1} = \frac{1}{x_0}$ ,  
 $\therefore \ln a + x_0 - 1 = -\ln x_0$ ,  $\therefore$  当  $x \in (0, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,

因此  $f(x)_{\min} = f(x_0) = ae^{x_0-1} - \ln x_0 + \ln a = \frac{1}{x_0} + \ln a + x_0 - 1 + \ln a > 2\ln a - 1 +$

$2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} = 2\ln a + 1 > 1$ ,  
 $\therefore f(x) > 1$ , 此时  $f(x) \geq 1$  恒成立.

当  $0 < a < 1$  时,  $f(1) = a + \ln a < a < 1$ ,  
 $\therefore f(1) < 1$ , 不符合题意.  
 综上所述, 实数  $a$  的取值范围为  $[1, +\infty)$ .

**多种解法一** (2) (同构) 由  $f(x) \geq 1$  得  $ae^{x-1} - \ln x + \ln a \geq 1$ , 即  $e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq \ln x + x$ , 而  $\ln x + x = e^{\ln x} + \ln x$ ,  $\therefore e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq e^{\ln x} + \ln x$ .  
 令  $h(m) = e^m + m$ , 则  $h'(m) = e^m + 1 > 0$ ,  $\therefore h(m)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增.  
 由  $e^{\ln a + x - 1} + \ln a + x - 1 \geq e^{\ln x} + \ln x$ , 可知  $h(\ln a + x - 1) \geq h(\ln x)$ ,  $\therefore \ln a + x - 1 \geq \ln x$ ,  $\therefore \ln a \geq (\ln x - x + 1)_{\max}$ .

令  $F(x) = \ln x - x + 1$ , 则  $F'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ .  
 $\therefore$  当  $x \in (0, 1)$  时,  $F'(x) > 0$ ,  $F(x)$  单调递增; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $F'(x) < 0$ ,  $F(x)$  单调递减,  
 $\therefore F(x)_{\max} = F(1) = 0$ , 则  $\ln a \geq 0$ , 即  $a \geq 1$ . 因此  $a$  的取值范围为  $[1, +\infty)$ .

**多种解法二** (2) (换元同构) 由题意知  $a > 0, x > 0$ , 令  $ae^{x-1} = t$ , 则  $\ln a + x - 1 = \ln t$ ,  $\therefore \ln a = \ln t - x + 1$ .  
 于是  $f(x) = ae^{x-1} - \ln x + \ln a = t - \ln x + \ln t - x + 1$ .  
 $f(x) \geq 1$ , 即  $t - \ln x + \ln t - x + 1 \geq 1 \Leftrightarrow t + \ln t \geq x + \ln x$ , 而  $y = x + \ln x$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数, 故  $t \geq x$ , 即  $ae^{x-1} \geq x$ , 则  $a \geq \frac{x}{e^{x-1}}$ . 令  $h(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$ , 则  $h'(x) = \frac{e^{x-1} - xe^{x-1}}{e^{2x-2}} = \frac{e^{x-1}(1-x)}{e^{2x-2}}$ .  
 当  $0 < x < 1$  时,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  单调递增; 当  $x > 1$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  单调递减,  
 $\therefore$  当  $x = 1$  时,  $h(x) = \frac{x}{e^{x-1}}$  取得最大值  $h(1) = 1$ .  $\therefore a \geq 1$ .  
 因此  $a$  的取值范围为  $[1, +\infty)$ .

**12.  $\frac{e^4}{2}$**  **【解析】** 因为  $x > e^2 y > \frac{1}{2}$ , 所以  $x > \frac{1}{2}, \frac{x}{y} > e^2, e^{2x} > e$ .

由  $y \ln x - y \ln y = \frac{2x^2}{e^{2x}}$ , 整理可得  $\frac{\ln \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}} = \frac{2x^2}{e^{2x}}$ .

$\frac{2x}{e^{2x}} = \frac{\ln e^{2x}}{e^{2x}}$ .

令  $f(t) = \frac{\ln t}{t}, t > e$ , 则  $f'(t) =$

$\frac{1-\ln t}{t^2} < 0$ ,

可知  $f(t)$  在  $(e, +\infty)$  上单调递减, 由

$\frac{\ln \frac{x}{y}}{\frac{x}{y}} = \frac{\ln e^{2x}}{e^{2x}}$  可知  $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(e^{2x})$ , 且

$\frac{x}{y} > e^2, e^{2x} > e$ , 则  $\frac{x}{y} = e^{2x}$ ,

则  $\frac{x}{y} + ax + b = 0$ , 即  $xa + b + e^{2x} = 0$ ,

**【点悟】** 此式以  $x$

为变量进行分析时,  $a, b$  都为参数, 讨论比较复杂, 则可以考虑变换主元, 把  $x$  当作常数, 把此式看作关于  $a, b$  的等式, 求  $a^2 + b^2$  的最值, 可以联想到点到直线的距离公式

以  $a, b$  为变量, 则  $a^2 + b^2$  为直线  $xa + b + e^{2x} = 0$  上的点  $P(a, b)$  到原点  $O(0, 0)$  的距离的平方,

则原点  $O(0, 0)$  到直线  $xa + b + e^{2x} = 0$  的距离  $d = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x^2 + 1}}$ , 可得  $a^2 + b^2 =$

$|OP|^2 \geq d^2 = \frac{e^{4x}}{x^2 + 1}$ .

令  $g(x) = \frac{e^{4x}}{x^2 + 1}, x \in [1, 2]$ , 则  $g'(x) =$

$\frac{4(x^2 + 1)e^{4x} - 2xe^{4x}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{4}}{(x^2 + 1)^2} e^{4x}$

$> 0$ , 可知  $g(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递增, 则  $g(x) \geq g(1) = \frac{e^4}{2}$ , 所以  $a^2 + b^2$  的最小值是  $\frac{e^4}{2}$ .

**13. 【解】** (1) 当  $a = e$  时,  $f(x) = a^x - \log_a x = e^x - \ln x (x > 0)$ ,  
 设曲线  $y = f(x)$  过点  $(0, 1)$  的切线方程为  $l: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) (x_0 > 0)$ .

$f(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0, f'(x_0) = e^{x_0} - \frac{1}{x_0}$ ,

代入切线方程得  $y = \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0}\right)(x - x_0) + e^{x_0} - \ln x_0 = \left(e^{x_0} - \frac{1}{x_0}\right)x + e^{x_0}(1 - x_0) - \ln x_0 + 1$ ,

因为直线  $l$  过点  $(0, 1)$ , 所以  $e^{x_0}(1 - x_0) - \ln x_0 + 1 = 1$ , 即  $e^{x_0}(1 - x_0) - \ln x_0 = 0$  ①,

**【敲黑板】** 方程的解不易得到, 可利用函数与方程思想求解

令  $g(x) = e^x(1 - x) - \ln x (x > 0)$ , 则

$g'(x) = -xe^x - \frac{1}{x} < 0$ ,

所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 又



$g(1)=0$ , 所以  $g(x)$  有唯一零点 1, 即方程①的根为  $x_0=1$ ,

把  $x_0=1$  代入  $y=\left(e^{x_0}-\frac{1}{x_0}\right)x+x+1$ ,

$e^{x_0}(1-x_0)-\ln x_0+1$  得,  $y=(e-1)\cdot x+1$ ,

故曲线  $y=f(x)$  过点  $(0,1)$  的切线方程为  $(e-1)x-y+1=0$ .

(2) 因为  $f(x)$  的图象在  $(0,+\infty)$  上连续, 又  $f(1)=a>0$ ,

所以要使  $f(x)$  无零点, 需使  $f(x)>0$  在其定义域上恒成立.

于是原问题转化为求使  $f(x)=a^x-\log_a x>0$  恒成立的  $a$  的取值范围.

当  $0<a<1$  时,  $f(a)=a^a-\log_a a=a^a-1<0$ , 不合题意.

当  $a>1$  时,  $a^x-\log_a x>0 \Leftrightarrow a^x>\log_a x \Leftrightarrow$

$a^x>\frac{\ln x}{\ln a} \Leftrightarrow a^x \ln a>\ln x \Leftrightarrow a^x \ln a>$

$x \ln x \Leftrightarrow a^x \ln a^x>x \ln x (*)$ ,

当  $0<x<1$  时,  $a^x \ln a^x>0>x \ln x$  恒成立.

下面讨论  $x>1$  的情况.

令  $h(x)=xe^x(x>0)$ , 则  $h'(x)=(x+1)\cdot e^x>0$ , 所以  $h(x)$  在  $(0,+\infty)$  上单调递增,

又由  $(*)$  式得  $h(\ln a^x)>h(\ln x)$ , 所以  $\ln a^x=x \ln a>\ln x(x>1)$ , 即  $\ln a>$

$\frac{\ln x}{x}(x>1)$  恒成立.

令  $\varphi(x)=\frac{\ln x}{x}(x>1)$ , 则  $\varphi'(x)=$

$\frac{1-\ln x}{x^2}$ , 令  $\varphi'(x)=0$  得  $x=e$ .

当  $1<x<e$  时,  $\varphi'(x)>0$ ,  $\varphi(x)$  单调递增;

当  $x>e$  时,  $\varphi'(x)<0$ ,  $\varphi(x)$  单调递减,

所以当  $x=e$  时  $\varphi(x)$  取得最大值,

$\varphi(x)_{\max}=\varphi(e)=\frac{1}{e}$ , 所以  $\ln a>\frac{1}{e}$ , 即

$a>e^{\frac{1}{e}}$ .

综上所述,  $a$  的取值范围为  $(e^{\frac{1}{e}}, +\infty)$ .

14. (1) 【解】 $f(x)=e^x-ax$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 而  $f'(x)=e^x-a$ ,

若  $a\leq 0$ , 则  $f'(x)>0$ , 此时  $f(x)$  无最小值, 故  $a>0$ .

则当  $x<\ln a$  时,  $f'(x)<0$ , 故  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  上单调递减,

当  $x>\ln a$  时,  $f'(x)>0$ , 故  $f(x)$  在  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增,

故  $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$ .

$g(x)=ax-\ln x$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 而  $g'(x)=a-\frac{1}{x}=\frac{ax-1}{x}$ ,  $a>0$ .

当  $0<x<\frac{1}{a}$  时,  $g'(x)<0$ , 故  $g(x)$  在  $(0, \frac{1}{a})$  上单调递减,

当  $x>\frac{1}{a}$  时,  $g'(x)>0$ , 故  $g(x)$  在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上单调递增,

故  $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{a}\right)=1-\ln \frac{1}{a}$ .

因为  $f(x)=e^x-ax$  和  $g(x)=ax-\ln x$  有相同的最小值,

所以  $1-\ln \frac{1}{a}=a-a\ln a$ , 整理得  $\frac{a-1}{1+a}=$

$\ln a$ , 其中  $a>0$ .

设  $p(a)=\frac{a-1}{1+a}-\ln a$ ,  $a>0$ , 则  $p'(a)=$

$\frac{2}{(1+a)^2}-\frac{1}{a}=\frac{-a^2-1}{a(1+a)^2}<0$ ,

故  $p(a)$  为  $(0, +\infty)$  上的减函数, 而  $p(1)=0$ , 故  $p(a)=0$  的唯一解为  $a=1$ , 即  $\frac{a-1}{1+a}=\ln a$  的解为  $a=1$ . 综上,  $a=1$ .

(2) 【证明】由 (1) 可得  $f(x)=e^x-x$  和  $g(x)=x-\ln x$  的最小值为  $1-\ln 1=1$ .

当  $b<1$  时,  $f(x)_{\min}=g(x)_{\min}=1>b$ , 显然直线  $y=b$  与两条曲线没有交点, 不符合题意;

当  $b=1$  时,  $f(x)_{\min}=g(x)_{\min}=1=b$ , 此时直线  $y=b$  与两条曲线共有两个交点, 不符合题意,

故若存在直线  $y=b$ , 其与两条曲线共有三个不同的交点, 则  $b>1$ .

当  $b>1$  时, 分别考虑方程  $e^x-x=b$ ,  $x-\ln x=b$  的解的个数.

设  $S(x)=e^x-x-b$ , 则  $S'(x)=e^x-1$ , 当  $x<0$  时,  $S'(x)<0$ , 当  $x>0$  时,  $S'(x)>0$ ,

故  $S(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $S(x)_{\min}=S(0)=1-b<0$ ,

而  $S(-b)=e^{-b}>0$ ,  $S(b)=e^b-2b$ , 设  $u(b)=e^b-2b$ ,  $b>1$ , 则  $u'(b)=e^b-2>0$ , 故  $u(b)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

当  $b\rightarrow 1$  时,  $u(b)\rightarrow e-2$ , 又  $e-2>0$ , 故  $u(b)>0$ ,

故  $S(b)>0$ , 故  $S(x)=e^x-x-b$  有两个不同的零点, 即方程  $e^x-x=b$  的解的个数为 2.

设  $T(x)=x-\ln x-b$ , 则  $T'(x)=\frac{x-1}{x}$ ,

当  $0<x<1$  时,  $T'(x)<0$ , 当  $x>1$  时,  $T'(x)>0$ , 故  $T(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

所以  $T(x)_{\min}=T(1)=1-b<0$ , 而  $T(e^{-b})=e^{-b}>0$ ,  $T(e^b)=e^b-2b>0$ , 故  $T(x)=x-\ln x-b$  有两个不同的零点, 即方程  $x-\ln x=b$  的解的个数为 2.

设  $h(x)=e^x+\ln x-2x$ ,  $x>0$ ,

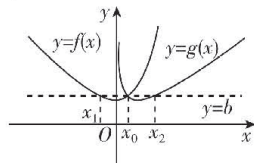
【点悟】方程  $e^x-x=b$ ,  $x-\ln x=b$  各有两个解, 结合题意知方程  $e^x-x=x-\ln x$ , 即  $e^x+\ln x-2x=0$  有且只有一个解, 即证  $h(x)=e^x+\ln x-2x$  有且只有一个零点.

则  $h'(x)=e^x+\frac{1}{x}-2$ ,

设  $s(x)=e^x-x-1$ ,  $x>0$ , 则  $s'(x)=e^x-1>0$ , 故  $s(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又当  $x\rightarrow 0$  时,  $s(x)\rightarrow 0$ , 故  $s(x)>0$ , 即  $e^x>x+1$ ,

所以  $h'(x)>x+1+\frac{1}{x}-2=x+\frac{1}{x}-1\geq 2-1>0$ , 所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 而  $h(1)=e-2>0$ ,  $h\left(\frac{1}{e^3}\right)=e^{\frac{1}{e^3}}-3-\frac{2}{e^3}<e-3-\frac{2}{e^3}<0$ , 故  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有且只有一个零点  $x_0$ , 且  $\frac{1}{e^3}<x_0<1$ , 所以当  $0<x<x_0$  时,  $h(x)<0$ , 即  $e^x-x<x-\ln x$ , 即  $f(x)<g(x)$ , 当  $x>x_0$  时,  $h(x)>0$ , 即  $e^x-x>x-\ln x$ , 即  $f(x)>g(x)$ , 因此若存在直线  $y=b$  与曲线  $y=f(x)$ ,  $y=g(x)$  有三个不同的交点, 故

$b=f(x_0)=g(x_0)>1$ , 此时方程  $e^x-x=b$  有两个不同的根  $x_1, x_0(x_1<0<x_0)$ , 方程  $x-\ln x=b$  有两个不同的根  $x_0, x_2(0<x_0<1<x_2)$ , 故  $e^{x_1}-x_1=b$ ,  $e^{x_0}-x_0=b$ ,  $x_2-\ln x_2=b=0$ ,  $x_0-\ln x_0-b=0$ , 所以  $x_2-b=\ln x_2$ , 即  $e^{x_2-b}=x_2$ , 即  $e^{x_2-b}-(x_2-b)-b=0$ , 故  $x_2-b$  为方程  $e^x-x=b$  的解, 同理可知  $x_0-b$  也为方程  $e^x-x=b$  的解, 又  $e^{x_1}-x_1=b$  可化为  $e^{x_1}=x_1+b$ , 即  $x_1-\ln(x_1+b)=0$ , 即  $(x_1+b)-\ln(x_1+b)-b=0$ , 故  $x_1+b$  为方程  $x-\ln x=b$  的解, 同理可知  $x_0+b$  也为方程  $x-\ln x=b$  的解, 所以  $\{x_1, x_0\}=\{x_0-b, x_2-b\}$ , 而  $b>1$ , 故  $\begin{cases} x_0=x_2-b, \\ x_1=x_0-b, \end{cases}$  即  $x_1+x_2=2x_0$ . 故直线  $y=b$  与两条曲线  $y=f(x)$  和  $y=g(x)$  从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.



多种解法 (2) 由 (1) 知,  $f(x)=e^x-x$ ,  $g(x)=x-\ln x$ , 且  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增;  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 且  $f(x)_{\min}=g(x)_{\min}=1$ .

① 当  $b<1$  时,  $f(x)_{\min}=g(x)_{\min}=1>b$ , 显然直线  $y=b$  与两条曲线  $y=f(x)$  和  $y=g(x)$  没有交点, 不符合题意.

② 当  $b=1$  时,  $f(x)_{\min}=g(x)_{\min}=1=b$ , 故直线  $y=b$  与两条曲线  $y=f(x)$  和  $y=g(x)$  共有 2 个交点, 不符合题意.

③ 当  $b>1$  时, 首先证明直线  $y=b$  与曲线  $y=f(x)$  有 2 个交点, 即证明  $F(x)=f(x)-b$  有 2 个零点.  $F'(x)=f'(x)=e^x-1$ , 所以  $F(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又因为  $F(-b)=e^{-b}>0$ ,  $F(0)=1-b<0$ ,  $F(b)=e^b-2b>0$ ,

【点悟】令  $t(b)=e^b-2b$ , 则  $t'(b)=e^b-2>0$ , 故当  $b>1$  时,  $t(b)\rightarrow e-2>0$ , 所以  $t(b)>0$ .

所以  $F(x)=f(x)-b$  在  $(-\infty, 0)$  上存在且只存在 1 个零点, 设为  $x_1$ , 在  $(0, +\infty)$  上存在且只存在 1 个零点, 设为  $x_2$ .

其次证明直线  $y=b$  与曲线  $y=g(x)$  有 2 个交点, 即证明  $G(x)=g(x)-b$  有 2 个零点.  $G'(x)=g'(x)=1-\frac{1}{x}$ , 所以  $G(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 又因为  $G(e^{-b})=e^{-b}>0$ ,  $G(1)=1-b<0$ ,  $G(2b)=b-\ln 2b>0$ ,

【点悟】令  $\mu(b)=b-\ln 2b$ , 则  $\mu'(b)=1-\frac{1}{b}>0$ , 故当  $b>1$  时,  $\mu(b)\rightarrow 1-\ln 2>0$ , 所以  $\mu(b)>0$ .



所以  $G(x) = g(x) - b$  在  $(0, 1)$  上存在且只存在 1 个零点, 设为  $x_3$ , 在  $(1, +\infty)$  上存在且只存在 1 个零点, 设为  $x_4$ .

再证明存在  $b$ , 使得  $x_2 = x_3$ .

因为  $F(x_2) = G(x_3) = 0$ , 所以  $b = e^{x_2} - x_2 = x_3 - \ln x_3$ , 若  $x_2 = x_3$ , 则  $e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2$ , 即  $e^{x_2} - 2x_2 + \ln x_2 = 0$ , 所以只需证明  $e^x - 2x + \ln x = 0$  在  $(0, 1)$  上有解即可, 即  $\varphi(x) = e^x - 2x + \ln x$  在  $(0, 1)$  上有零点.

因为  $\varphi\left(\frac{1}{e^3}\right) = e^{\frac{1}{e^3}} - \frac{2}{e^3} - 3 < 0$ ,  $\varphi(1) = e - 2 > 0$ ,

所以  $\varphi(x) = e^x - 2x + \ln x$  在  $(0, 1)$  上存在零点, 取一零点为  $x_0$ , 令  $x_2 = x_3 = x_0$  即可,

此时取  $b = e^{x_0} - x_0$ , 则此时存在直线  $y = b$ , 其与两条曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  共有三个不同的交点.

最后证明  $x_1 + x_4 = 2x_0$ , 即从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

因为  $F(x_1) = F(x_2) = F(x_0) = 0 = G(x_3) = G(x_0) = G(x_4)$ ,

所以  $F(x_1) = G(x_0) = F(\ln x_0)$ ,

又因为  $F(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减,  $x_1 < 0, 0 < x_0 < 1$ , 即  $\ln x_0 < 0$ , 所以  $x_1 = \ln x_0$ ,

同理, 因为  $F(x_0) = G(e^{x_0}) = G(x_4)$ ,

又因为  $G(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,  $x_0 > 0$ , 即  $e^{x_0} > 1, x_4 > 1$ , 所以  $x_4 = e^{x_0}$ .

又因为  $e^{x_0} - 2x_0 + \ln x_0 = 0$ ,

所以  $x_1 + x_4 = e^{x_0} + \ln x_0 = 2x_0$ ,

即直线  $y = b$  与两条曲线  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

研究复杂函数零点间的关系时, 可以考虑先研究函数值间的关系, 再利用函数性质得到自变量(零点)间的关系. 本题中是多个函数的零点的关系, 考虑利用指对同构构造有相同外函数的复合函数, 从而统一函数去进一步研究.

### 专题 13 导数中的双变量问题

#### 刷难关

**1. B** 【解析】不妨设  $x_1 > x_2 > 0$ , 可得  $f(x_1) - f(x_2) > 2x_1 - 2x_2$ , 可得  $f(x_1) - 2x_1 > f(x_2) - 2x_2$ .

令  $g(x) = f(x) - 2x = a \ln x + \frac{1}{2}x^2 - 2x$ ,

则  $g(x_1) > g(x_2)$ , 所以函数  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上为增函数,

❶ 黑板: 根据函数单调递增的定义得到

所以  $g'(x) = \frac{a}{x} + x - 2 \geq 0$  对任意的  $x > 0$  恒成立, 所以  $a \geq 2x - x^2$ .

当  $x > 0$  时,  $2x - x^2 = -(x-1)^2 + 1 \leq 1$ , 当且仅当  $x = 1$  时等号成立, 所以  $a \geq 1$ . 故选 B.

**归纳总结** 此类问题一般是给出含有  $x_1, x_2, f(x_1), f(x_2)$  的不等式, 若能通过变形, 把不等式两边转化为同源函数, 可利用函数单调性定义构造单调函数, 再利用导数求解.

常见结论有: (1) 若对任意  $x_1, x_2 \in D$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时恒有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ,

则  $y = f(x)$  在  $D$  上单调递增;

(2) 若对任意  $x_1, x_2 \in D$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时恒有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > k$ , 则  $y = f(x) - kx$  在  $D$  上单调递增;

(3) 若对任意  $x_1, x_2 \in D$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时恒有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > \frac{k}{x_1 x_2}$ , 则  $y = f(x) + \frac{k}{x}$  在  $D$  上单调递增;

(4) 若对任意  $x_1, x_2 \in D$ , 当  $x_1 \neq x_2$  时恒有  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > x_1 + x_2$ , 则  $y = f(x) - x^2$  在  $D$  上单调递增.

**2. 【解】**(1)  $f(x)$  的定义域为  $\{x | x \neq 0\}$ ,  $f'(x) = \frac{(ax-1)e^{ax}}{x^2}, a > 0$ ,

令  $f'(x) > 0$  得  $x > \frac{1}{a}$ , 令  $f'(x) < 0$  得

$x < \frac{1}{a}$  且  $x \neq 0$ ,

即在  $(-\infty, 0)$  和  $(0, \frac{1}{a})$  上,  $f(x)$  单调

递减, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  上,  $f(x)$  单调递增,

所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(\frac{1}{a}, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(-\infty, 0), (0, \frac{1}{a})$ .

(2)  $f(x_2) - f(x_1) > \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$ , 证明如下:

令  $g(x) = f(x) - \frac{1}{x} = \frac{e^{ax} - 1}{x}$ , 则  $g(x)$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ,  $g'(x) = \frac{axe^{ax} - (e^{ax} - 1)}{x^2} = \frac{e^{ax}(ax - 1) + 1}{x^2}$ ,

令  $h(x) = e^{ax}(ax - 1) + 1$ , 则  $h'(x) = ae^{ax} \cdot (ax - 1) + ae^{ax} = e^{ax} \cdot a^2 x$ ,

则当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $h'(x) < 0$ ; 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $h'(x) > 0$ ,

所以  $h(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $h(x) \geq h(0) = 0$ , 当且仅当  $x = 0$  时取等号,

则  $g'(x) > 0$ , 所以  $g(x)$  在  $(-\infty, 0), (0, +\infty)$  上单调递增.

因为  $x_1 < x_2$  且  $x_1 x_2 > 0$ , 所以  $x_1 < x_2 < 0$  或  $0 < x_1 < x_2$ , 所以  $g(x_1) < g(x_2)$  恒成立,

即  $f(x_1) - \frac{1}{x_1} < f(x_2) - \frac{1}{x_2}$ , 所以  $f(x_2) - f(x_1) > \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}$ .

**3. (1) 【解】**由题意得  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{x} - 2ax + 1 = \frac{-2ax^2 + x - 1}{x} (x > 0)$ .

令  $g(x) = -2ax^2 + x - 1 (a > 0)$ , 则  $\Delta = 1 - 8a$ ,

当  $\Delta = 1 - 8a \leq 0$ , 即  $a \geq \frac{1}{8}$  时,  $g(x) \leq 0$  恒成立,

即  $f'(x) \leq 0$  恒成立且等号不恒成立,  $\therefore f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减.

当  $\Delta = 1 - 8a > 0$ , 即  $0 < a < \frac{1}{8}$  时,

令  $g(x) = 0$ , 解得  $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - 8a}}{-4a} =$

$\frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4a}, x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4a}$ ,

当  $x \in (0, x_1) \cup (x_2, +\infty)$  时,  $g(x) < 0$ , 即  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, x_1), (x_2, +\infty)$  上单调递减; 当  $x \in (x_1, x_2)$  时,  $g(x) > 0$ , 即  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(x_1, x_2)$  上单调递增.

综上, 当  $a \geq \frac{1}{8}$  时,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上

单调递减; 当  $0 < a < \frac{1}{8}$  时,  $f(x)$  在

$(0, \frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4a}), (\frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4a}, +\infty)$  上

单调递减, 在  $(\frac{1 - \sqrt{1 - 8a}}{4a}, \frac{1 + \sqrt{1 - 8a}}{4a})$  上单调递增.

(2) 【证明】 $\because f(x)$  在定义域内有两个极值点  $x_1, x_2$ ,

$\therefore$  由(1)知  $0 < a < \frac{1}{8}$ , 且  $x_1, x_2$  是方程  $-2ax^2 + x - 1 = 0$  的两个不等实根,

则  $x_1 + x_2 = \frac{1}{2a}, x_1 x_2 = \frac{1}{2a}$ .

$\therefore f(x_1) + f(x_2) = \ln \frac{1}{x_1} - ax_1^2 + x_1 + \ln \frac{1}{x_2} -$

❷ 黑板: 可利用一元二次方程根与系数的关系化为只含有参数的表达式, 把双变量问题转化为单变量问题

$ax_2^2 + x_2 = \ln \frac{1}{x_1 x_2} - a[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] +$

$(x_1 + x_2) = \ln(2a) - a\left(\frac{1}{4a^2} - \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2a} =$

$\ln(2a) + \frac{1}{4a} + 1$ .

设  $v(a) = \ln(2a) + \frac{1}{4a} + 1$ , 则  $v'(a) = \frac{4a - 1}{4a^2}$ ,

$\therefore 0 < a < \frac{1}{8}, \therefore 4a - 1 < 0, \therefore v'(a) < 0$ , 则

$v(a)$  在  $(0, \frac{1}{8})$  上单调递减, 当  $a \rightarrow \frac{1}{8}$

时,  $v(a) \rightarrow 3 - 2\ln 2$ ,

$\therefore v(a) > 3 - 2\ln 2$ , 则  $f(x_1) + f(x_2) > 3 -$



$2\ln 2$  成立.

4. (1)【解】当  $a = -1$  时,  $f(x) = e^x - e^{-x} - x$ , 则  $f'(x) = e^x + e^{-x} - 1 \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - 1 = 1 > 0$ , 当且仅当  $x = 0$  时取等号, 故此时  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, +\infty)$ , 无单调递减区间.

(2)(i)【解】 $f'(x) = e^x + e^{-x} + a$ , 因为  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 所以  $f'(x_1) = f'(x_2) = e^{x_1} + e^{-x_1} + a = e^{x_2} + e^{-x_2} + a = 0$ .

令  $e^x = t > 0$ , 则方程  $t + \frac{1}{t} + a = 0$  有两个相异正根  $t_1, t_2$ .

注意到  $t + \frac{1}{t} + a = 0 \Rightarrow t^2 + at + 1 = 0$ , 因为此方程有两个相异正根, 所以  $\begin{cases} \Delta = a^2 - 4 > 0, \\ t_1 + t_2 = -a > 0, \\ t_1 t_2 = 1 > 0, \end{cases}$

解得  $a < -2$ , 故  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -2)$ .

(ii)【证明】由(i)可得  $t_1 t_2 = e^{x_1 + x_2} = 1 \Rightarrow$

$$x_2 = -x_1 \Rightarrow e^{x_1} = \frac{1}{e^{x_2}}, e^{x_2} = \frac{1}{e^{x_1}}.$$

不妨设  $t_1 < t_2$ , 结合  $t_1 + t_2 > 0, t_1 t_2 = 1$ , 可得  $e^{x_1} < 1 < e^{x_2} \Rightarrow x_1 < 0 < x_2$ .

$$\begin{aligned} \text{则 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} &= \frac{e^{x_1} - \frac{1}{e^{x_1}} - e^{x_2} + \frac{1}{e^{x_2}} + a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= a + \frac{2(e^{x_1} - e^{x_2})}{x_1 - x_2} = a + \frac{2(e^{x_2} - e^{x_1})}{x_2 - x_1} \\ &= a + \frac{2\left(e^{x_2} - \frac{1}{e^{x_2}}\right)}{2x_2} = a + \frac{e^{x_2} - \frac{1}{e^{x_2}}}{x_2}, \end{aligned}$$

$$\text{则要证 } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > a + 2, \text{ 即证 } \frac{e^{x_2} - \frac{1}{e^{x_2}}}{x_2} > 2,$$

即证  $e^{2x_2} - 2x_2 e^{x_2} - 1 > 0$ , 其中  $x_2 > 0$ .

令  $g(x) = e^{2x} - 2xe^x - 1, x \geq 0$ , 则  $g'(x) = 2e^{2x} - 2e^x(x+1) = 2e^x(e^x - x - 1)$ .

令  $h(x) = e^x - x - 1, x \geq 0$ , 则  $h'(x) = e^x - 1 \geq 0$  且不恒为 0,

则  $h(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 得  $h(x) \geq h(0) = 0$ .

则  $g'(x) = 2e^x(e^x - x - 1) \geq 0$  且不恒为 0, 得  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增,

则当  $x_2 > 0$  时,  $g(x_2) = e^{2x_2} - 2x_2 e^{x_2} - 1 > g(0) = 0$ , 命题得证.

**特别注意** 此题第(2)(ii)中的问题和题型 1 很相似, 但是其中  $x_1, x_2$  不是两个任意的变量, 而是两个相关的变量, 所以不应该转化为函数单调性去研究, 而是应该消元去研究.

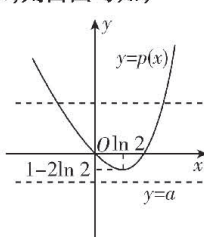
**归纳总结** 与极值点  $x_1, x_2$  有关的双变量问题, 一般是根据  $x_1, x_2$  是方程  $f'(x) = 0$  的两个根, 确定  $x_1, x_2$  的关系, 通过消元转化为只含有  $x_1$  或  $x_2$  的关系式, 再构造函数解题, 有时也可以把所给条件转化为  $x_1, x_2$  的齐次式, 然后转化为关于  $\frac{x_2}{x_1}$  的函数.

5. (1)【解】由  $f(x) = 0$  可得  $a = e^x - 2x - 1$ , 令  $p(x) = e^x - 2x - 1$ , 其中  $x \in \mathbf{R}$ , 则函数  $f(x)$  的零点个数等于直线  $y = a$  与函数  $p(x) = e^x - 2x - 1$  图象的公共点个数.

$p'(x) = e^x - 2$ , 令  $p'(x) = 0$  可得  $x = \ln 2, p'(\ln 2) = 0$ ,  $p(x)$  随  $x$  的变化情况列表如下:

$x$	$(-\infty, \ln 2)$	$\ln 2$	$(\ln 2, +\infty)$
$p'(x)$	-	0	+
$p(x)$	单调递减	极小值 $1 - 2\ln 2$	单调递增

作出直线  $y = a$  及函数  $y = p(x)$  的图象如图所示, 则由图可知,



当  $a < 1 - 2\ln 2$  时, 函数  $f(x)$  无零点;

当  $a = 1 - 2\ln 2$  时, 函数  $f(x)$  只有一个零点;

当  $a > 1 - 2\ln 2$  时, 函数  $f(x)$  有两个零点.

(2)【证明】因为  $h(x) = f(x) - g(x) = e^x - x^2 - (a+1)x + 1$ , 其中  $x \in \mathbf{R}$ , 所以  $h'(x) = e^x - 2x - (a+1)$ . 由已知可得

$$\begin{cases} h'(x_1) = e^{x_1} - 2x_1 - (a+1) = 0, \\ h'(x_2) = e^{x_2} - 2x_2 - (a+1) = 0, \end{cases}$$

上述两个等式作差得  $e^{x_2} - e^{x_1} = 2(x_2 - x_1)$ . 要证  $e^{x_2} - e^{x_1} < 4a + 2$ , 即证  $x_2 - x_1 < 2a + 1$ .

因为  $p(0) = 0$ , 设函数  $p(x)$  的图象交  $x$  轴的正半轴于点  $(x_3, 0)$ , 则  $x_3 > \ln 2$ .

因为函数  $p(x)$  在  $(\ln 2, +\infty)$  上单调递增,  $p(1) = e - 3 < 0, p\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} - 4 > 0$ ,

$$\text{所以 } x_3 \in \left(1, \frac{3}{2}\right).$$

设函数  $p(x)$  的图象在  $x = 0$  处的切线交直线  $y = a$  于点  $A(x'_1, a)$ ,

函数  $p(x)$  的图象在  $x = x_3$  处的切线交直线  $y = a$  于点  $B(x'_2, a)$ ,

因为  $p'(0) = -1$ , 所以函数  $p(x)$  的图象在  $x = 0$  处的切线方程为  $y = -x$ .

$$\text{联立 } \begin{cases} y = a, \\ y = -x, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} x = -a, \\ y = a, \end{cases} \text{ 即点 } A(-a, a).$$

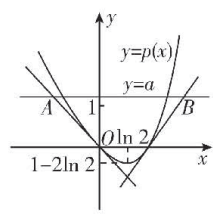
构造函数  $m(x) = p(x) + x = e^x - x - 1$ , 其中  $x \in \mathbf{R}$ , 则  $m'(x) = e^x - 1$ ,

当  $x < 0$  时,  $m'(x) < 0$ , 此时函数  $m(x)$  单调递减;

当  $x > 0$  时,  $m'(x) > 0$ , 此时函数  $m(x)$  单调递增, 所以  $m(x) \geq m(0) = 0$ ,

所以对任意的  $x \in \mathbf{R}, p(x) \geq -x$ , 当且仅当  $x = 0$  时等号成立.

由图可知  $x_1 < 0, -a < x_1$ .



因为  $p(x_3) = e^{x_3} - 2x_3 - 1 = 0$ , 可得  $e^{x_3} = 2x_3 + 1$ , 函数  $p(x)$  的图象在  $x = x_3$  处的切线方程为  $y = (e^{x_3} - 2)(x - x_3)$ ,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = (e^{x_3} - 2)(x - x_3), \\ y = a, \end{cases} \text{ 解得 } x = \frac{a}{e^{x_3} - 2} + x_3,$$

$$x_3 = \frac{a}{2x_3 - 1} + x_3, \text{ 即点 } B\left(\frac{a}{2x_3 - 1} + x_3, a\right).$$

$$\text{因为 } \frac{a}{2x_3 - 1} + x_3 - (-a + 1) = \frac{(x_3 - 1)(2x_3 - 1 - 2a)}{2x_3 - 1} < 0, \text{ 所以 } x'_2 =$$

$$\frac{a}{2x_3 - 1} + x_3 < a + 1.$$

构造函数  $n(x) = e^x - 2x - 1 - (e^{x_3} - 2)(x - x_3)$ , 其中  $x \in \mathbf{R}$ , 则  $n(x_3) = 0$ ,  $n'(x) = e^x - e^{x_3}$ .

当  $x < x_3$  时,  $n'(x) < 0$ , 此时函数  $n(x)$  单调递减;

当  $x > x_3$  时,  $n'(x) > 0$ , 此时函数  $n(x)$  单调递增, 则  $n(x) \geq n(x_3) = 0$ ,

所以对任意的  $x \in \mathbf{R}, p(x) \geq (e^{x_3} - 2) \cdot (x - x_3)$ , 当且仅当  $x = x_3$  时等号成立, 所以  $p(x_2) = e^{x_2} - 2x_2 - 1 = a >$

$$(e^{x_3} - 2) \cdot (x_2 - x_3), \text{ 可得 } x_2 < \frac{a}{e^{x_3} - 2} + x_3 = x'_2,$$

因此  $x_2 - x_1 < x'_2 - x'_1 < a + 1 + a = 2a + 1$ , 故原不等式成立.

**名师点拨** 证明两个零点的差的取值范围时, 若两个零点间很难得到明确的等式关系, 可以考虑各自放缩, 得到一个范围, 再作差得到范围.

比如本题证明  $e^{x_2} - e^{x_1} < 4a + 2$ , 可以先求  $e^{x_2}$  的上限, 再求  $e^{x_1}$  的下限, 然后作差得到.

而求  $e^{x_2}$  的上限与  $e^{x_1}$  的下限时, 可以结合所求问题与函数的图象, 利用切线及不等式辅助求解.

6. 【解】(1) 由题意可知, 函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$$\text{且 } f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{4} - \frac{3a^2}{x^2} = \frac{x^2 + 4ax - 12a^2}{4x^2} = \frac{(x - 2a)(x + 6a)}{4x^2}, a \neq 0.$$

① 当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) > 0$  得  $x > 2a$ , 令  $f'(x) < 0$  得  $0 < x < 2a$ ,

可知  $f(x)$  在  $(2a, +\infty)$  上单调递增, 在  $(0, 2a)$  上单调递减;

② 当  $a < 0$  时, 令  $f'(x) > 0$  得  $x > -6a$ , 令  $f'(x) < 0$  得  $0 < x < -6a$ ,

可知  $f(x)$  在  $(-6a, +\infty)$  上单调递增, 在  $(0, -6a)$  上单调递减.

综上所述, 当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(2a, +\infty)$  上单调递增, 在  $(0, 2a)$  上单调递减;

当  $a < 0$  时,  $f(x)$  在  $(-6a, +\infty)$  上单调递增, 在  $(0, -6a)$  上单调递减.



(2) 当  $a = -\frac{1}{6}e$  时, 由 (1) 可知, 函数  $f(x)$  在  $(e, +\infty)$  上单调递增, 在  $(0, e)$  上单调递减, 即当  $x = e \in (1, 3)$  时, 函数  $f(x)$  取得极小值, 同时也是最小值, 最小值为  $f(e) = -\frac{1}{6}e + \frac{1}{4}e + \frac{1}{12}e = \frac{1}{6}e$ .

若对任意  $x_1 \in [1, 4]$ , 存在  $x_2 \in (1, 3)$ , 使  $g(x_1) \geq f(x_2)$ ,

等价于任意  $x_1 \in [1, 4]$ ,  $g(x_1) \geq \frac{1}{6}e$ ,

即  $2x^2 - me^x \geq \frac{1}{6}e$ , 整理可得  $m \leq$

$$\frac{2x^2 - \frac{1}{6}e}{e^x} (x \in [1, 4]).$$

构造  $h(x) = \frac{2x^2 - \frac{1}{6}e}{e^x}$ ,  $x \in [1, 4]$ , 则

$$h'(x) = \frac{4xe^x - \left(2x^2 - \frac{1}{6}e\right)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-2(x-1)^2 + 2 + \frac{1}{6}e}{e^x},$$

由  $h'(x) = 0$ , 得  $x = 1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}}$  或  $x = 1 - \sqrt{1 + \frac{e}{12}}$  (舍),

当  $1 \leq x < 1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}}$  时,  $h'(x) > 0$ ; 当

$1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}} < x \leq 4$  时,  $h'(x) < 0$ ,

可知函数  $h(x)$  在  $\left[1, 1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}}\right)$  上单调递增, 在  $\left(1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}}, 4\right]$  上单调递减,

则当  $x = 1 + \sqrt{1 + \frac{e}{12}}$  时,  $h(x)$  取得极大值同时也是最大值,

$$\text{且 } h(1) = \frac{2 - \frac{e}{6}}{e} = \frac{2}{e} - \frac{1}{6}, h(4) =$$

$$\frac{2 \times 4^2 - \frac{e}{6}}{e^4} = \frac{32}{e^4} - \frac{1}{6e^3}, h(1) - h(4) = \frac{2}{e} -$$

$$\frac{1}{6} - \left(\frac{32}{e^4} - \frac{1}{6e^3}\right) = \frac{12e^3 - e^4 - 32 \times 6 + e}{6e^4} < 0,$$

可知  $h(1) < h(4)$ , 则函数  $h(x)$  的最小值为  $h(1) = \frac{2}{e} - \frac{1}{6}$ ,

可得  $m \leq \frac{2}{e} - \frac{1}{6}$ , 所以实数  $m$  的取值

范围为  $\left(-\infty, \frac{2}{e} - \frac{1}{6}\right]$ .

7. **思路导引** (1) 求出  $f'(x) - f'(0) \rightarrow$  曲线在  $(0, f(0))$  处的切线方程;

(2) 求出  $g'(x) = e^x \left[ \ln(x+1) + \frac{2x+1}{(x+1)^2} \right]$

$\xrightarrow{x \geq 0} g'(x) > 0 \rightarrow g(x)$  单调递增;

(3) 根据题意设关于  $s$  的函数  $F(s) = f(s+t) - f(s) - f(t) \rightarrow$  求出  $F'(s) \rightarrow$  转化为  $F'(s) = g(s+t) - g(s) \xrightarrow{\text{结合(2)}} F'(s) > 0 \rightarrow F(s) > 0 \rightarrow f(s+t) > f(s) + f(t)$

(1) 【解】因为  $f(x) = e^x \ln(x+1)$ , 所以  $f'(x) = e^x \ln(x+1) + e^x \cdot \frac{1}{x+1}$ , 所以

$f'(0) = 1$ , 而  $f(0) = 0$ , 所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, f(0))$  处的切线方程为  $y - 0 = x - 0$ , 即  $x - y = 0$ .

(2) 【解】 $g(x) = f'(x) = e^x \ln(x+1) + e^x \cdot \frac{1}{x+1} = e^x \left[ \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right]$ ,

则  $g'(x) = e^x \left[ \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right] +$

$$e^x \left[ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] = e^x \left[ \ln(x+1) + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right] = e^x \left[ \ln(x+1) + \frac{2x+1}{(x+1)^2} \right].$$

因为  $x \geq 0$ , 所以  $\ln(x+1) \geq 0$ ,  $\frac{2x+1}{(x+1)^2} > 0$ ,  $e^x \geq 1$ , 所以  $g'(x) > 0$ , 所以  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增.

(3) 【证明】设  $F(s) = f(s+t) - f(s) - f(t) = e^{s+t} \ln(1+s+t) - e^s \ln(1+s) - e^t \ln(1+t)$ , 则  $F'(s) = e^{s+t} \left[ \ln(1+s+t) + \frac{1}{1+s+t} \right] - e^s \left[ \ln(1+s) + \frac{1}{1+s} \right] = g(s+t) - g(s)$ .

❖ 黑板: 设出  $F(s)$  后, 说明变量只是  $s$ , 则把  $t$  看作常量, 求导时要注意这点. 由 (2) 知  $g(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增, 又  $s > 0, t > 0$ , 所以  $g(s+t) > g(s)$ , 即  $F'(s) > 0$ ,  $F(s)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $F(s) > f(0+t) - f(0) - f(t) = -f(0) = 0$ , 所以对任意的  $s, t \in (0, +\infty)$ , 有  $f(s+t) > f(s) + f(t)$ .

8. (1) 【解】令  $g(x) = (2x-1)e^x$ , 其中  $x \in \mathbb{R}$ , 则  $g'(x) = (2x+1)e^x$ ,

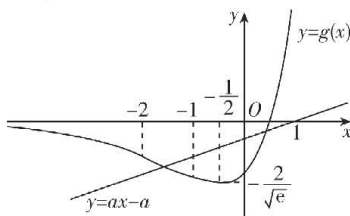
当  $x < -\frac{1}{2}$  时,  $g'(x) < 0$ , 此时函数  $g(x)$

单调递减, 当  $x > -\frac{1}{2}$  时,  $g'(x) > 0$ , 此时函数  $g(x)$  单调递增,

所以  $g(x)_{\min} = -\frac{2}{\sqrt{e}}$ , 且当  $x < -\frac{1}{2}$  时,

$g(x) < 0$ ; 当  $x > -\frac{1}{2}$  时,  $g(x) > 0$ .

由  $f(x) < 0$  可得  $g(x) < a(x-1)$ , 作出函数  $y = g(x)$ ,  $y = a(x-1)$  的大致图象如图①所示.



图①

因为有且只有两个整数  $x$ , 使得  $f(x) < 0$ , 则满足不等式  $g(x) < ax - a$  的整数  $x$  只有两个, 所以  $\begin{cases} g(-2) \geq -3a, \\ g(-1) < -2a, \end{cases}$  解得

$$\frac{5}{3e^2} \leq a < \frac{3}{2e}, \text{ 即实数 } a \text{ 的取值范围}$$

$$\text{为 } \left[ \frac{5}{3e^2}, \frac{3}{2e} \right).$$

(2) 【解】当直线  $y = ax - a$  与函数  $g(x)$  的图象相切时, 设切点坐标为  $(t, (2t-1)e^t)$ , 则切线斜率为  $(2t+1)e^t$ , 所以所求切线方程为  $y - (2t-1)e^t = (2t+1)e^t(x-t)$ , 即  $y = (2t+1)e^t x - (2t^2 - t + 1)e^t$ , 所以  $a = (2t+1)e^t = (2t^2 - t + 1)e^t$ ,

解得  $t = 0$  或  $t = \frac{3}{2}$ .

当  $t = 0$  时,  $a = 1$ ; 当  $t = \frac{3}{2}$  时,  $a = 4e^{\frac{3}{2}}$ .

如图②所示, 当  $a \leq 0$  时, 直线  $y = ax - a$  与函数  $g(x)$  的图象只有 1 个公共点;

当  $0 < a < 1$  或  $a > 4e^{\frac{3}{2}}$  时, 直线  $y = ax - a$  与函数  $g(x)$  的图象有 2 个公共点;

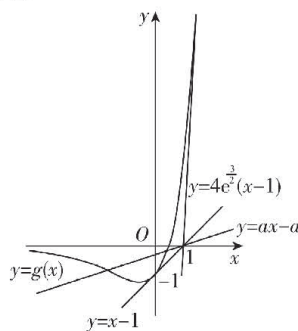
当  $a = 1$  或  $a = 4e^{\frac{3}{2}}$  时, 直线  $y = ax - a$  与函数  $g(x)$  的图象只有 1 个公共点;

当  $1 < a < 4e^{\frac{3}{2}}$  时, 直线  $y = ax - a$  与函数  $g(x)$  的图象无公共点.

综上所述, 当  $1 < a < 4e^{\frac{3}{2}}$  时, 函数  $f(x)$  无零点;

当  $a \leq 0$  或  $a = 1$  或  $a = 4e^{\frac{3}{2}}$  时, 函数  $f(x)$  只有 1 个零点;

当  $0 < a < 1$  或  $a > 4e^{\frac{3}{2}}$  时, 函数  $f(x)$  有 2 个零点.



图②

(3) 【证明】不妨设  $x_1 \leq x_2$ , 构造函数  $p(x) = tf(x) + (1-t)f(x_2) - f(tx + (1-t)x_2)$ , 其中  $-\frac{3}{2} \leq x \leq x_2$ , 因为  $f'(x) =$

❖ 黑板: 构造的函数  $p(x)$  是把  $x_1$  看作变量,  $x_2$  看作常量

$(2x+1) \cdot e^x - a$ , 所以  $p'(x) = tf'(x) - tf'(tx + (1-t)x_2) = t(2x+1)e^x - t[2tx + 2(1-t)x_2 + 1]e^{tx + (1-t)x_2}$ , 令  $h(x) = (2x+1)e^x$ , 其中  $x \geq -\frac{3}{2}$ , 则  $h'(x) = (2x+3)e^x \geq 0$  且  $h'(x)$  不恒为零, 故函数  $h(x)$  在  $\left[-\frac{3}{2}, +\infty\right)$  上单调递增.

因为  $0 < t < 1$ , 所以  $tx + (1-t)x_2 - x = (t-1)(x-x_2) \geq 0$ , 故  $tx + (1-t)x_2 \geq x \geq -\frac{3}{2}$ , 所以  $tf'(x) \leq tf'(tx + (1-t)x_2)$ ,



故  $p'(x) = t \cdot f'(x) - t \cdot f'(tx + (1-t)x_2) \leq 0$  且等号不恒成立, 所以函数  $p(x)$  在  $[-\frac{3}{2}, +\infty)$  上单调递减, 故当  $x \in [-\frac{3}{2}, x_2]$  时,  $p(x) \geq p(x_2) = 0$ , 因

为  $x_1 \in [-\frac{3}{2}, x_2]$ , 则  $p(x_1) \geq p(x_2) = 0$ , 因此  $\forall x_1, x_2 \in [-\frac{3}{2}, +\infty)$  且  $\forall t \in (0, 1)$ , 有  $tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 +$

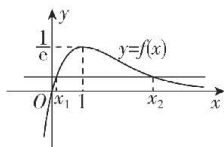
$(1-t)x_2)$ .

**归纳总结** 若问题中两个变量没有明确的数量等式关系, 有时可以把其中一个当常数, 另外一个当自变量, 转化为单调性问题.

## 专题 14 极值点偏移问题

### 刷难关

1. (1)【解】对  $f(x)$  求导得  $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ .  
 $f'(x) > 0 \Rightarrow x < 1$ ,  $f'(x) < 0 \Rightarrow x > 1$ .  
 则  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-\infty, 1)$ , 单调递减区间为  $(1, +\infty)$ .  
 (2)【证明】因为  $g(x)$  的图象与  $f(x)$  的图象关于直线  $x = 1$  对称, 所以  $g(x) = f(2-x) = (2-x)e^{x-2}$ .  
 构造函数  $h(x) = f(x) - g(x) = xe^{-x} - (2-x)e^{x-2}$ ,  $x > 1$ ,  
 则  $h'(x) = (1-x)e^{-x} - [-e^{x-2} + (2-x)e^{x-2}] = (1-x)(e^{-x} - e^{x-2})$ .  
 因为  $x > 1$ , 所以  $e^{-x} - e^{x-2} = \frac{1-e^{2(x-1)}}{e^x} < 0$ ,  
 所以  $h'(x) > 0$ ,  
 所以  $h(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 又当  $x \rightarrow 1$  时,  $h(x) \rightarrow 0$ , 所以  $h(x) > 0$ , 即当  $x > 1$  时,  $f(x) > g(x)$ .  
 (3)【证明】由 (1) 知  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ ,  $f(0) = 0$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow 0^+$ , 函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处取得极大值  $f(1)$ , 且  $f(1) = \frac{1}{e}$ , 作出  $f(x)$  的大致图象如图所示.



因为  $f(x_1) = f(x_2)$ ,  $x_1 \neq x_2$ , 所以不妨设  $x_1 < x_2$ , 则  $0 < x_1 < 1 < x_2$ , 构造函数  $F(x) = f(1+x) - f(1-x)$ , 则  $F'(x) = f'(1+x) + f'(1-x) = \frac{x}{e^{x+1}}(e^{2x} - 1)$ , 当  $0 < x < 1$  时,  $F'(x) > 0$ , 所以  $F(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 所以当  $0 < x < 1$  时,  $F(x) > F(0) = 0$ , 即  $f(1+x) > f(1-x)$  对  $x \in (0, 1)$  恒成立. 由  $0 < x_1 < 1 < x_2$ , 得  $1-x_1 \in (0, 1)$ , 所以  $f(1+(1-x_1)) = f(2-x_1) > f(1-(1-x_1)) = f(x_1) = f(x_2)$ , 即  $f(2-x_1) > f(x_2)$ . 又因为  $2-x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ , 且  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $2-x_1 < x_2$ , 即  $x_1 + x_2 > 2$ .

**多种解法一** (3) 欲证  $x_1 + x_2 > 2$ , 即证  $x_2 > 2 - x_1$ , 不妨设  $x_1 < x_2$ , 由上述 (3) 中解法知  $0 < x_1 < 1 < x_2$ , 故  $2 - x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ , 又因为  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以只需证  $f(x_2) < f(2-x_1)$ . 又因为  $f(x_1) = f(x_2)$ , 所以即证  $f(x_1) < f(2-x_1)$ , 构造函数  $H(x) = f(x) - f(2-x)$ ,  $x \in (0, 1)$ ,

则等价于证明  $H(x) < 0$  对  $x \in (0, 1)$  恒成立.

由  $H'(x) = f'(x) + f'(2-x) = \frac{1-x}{e^x}(1 - e^{2x-2}) > 0$ , 得  $H(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 又当  $x \rightarrow 1$  时,  $H(x) \rightarrow 0$ , 所以  $H(x) < 0$ , 即  $H(x) < 0$  对  $x \in (0, 1)$  恒成立, 故  $x_1 + x_2 > 2$ .

**归纳总结** 处理极值点偏移问题中类似于  $x_1 + x_2 > a$  ( $f(x_1) = f(x_2)$ ) 类型的问题的步骤:

- ① 求导确定  $f(x)$  的单调性, 得到  $x_1, x_2$  的范围;
- ② 构造函数  $F(x) = f(x) - f(a-x)$ , 求导得到  $F(x)$  恒正或恒负;
- ③ 得到  $f(x_1)$  与  $f(a-x_1)$  的大小关系后, 将  $f(x_1)$  替换为  $f(x_2)$ ;
- ④ 根据  $x_2$  与  $a-x_1$  的范围, 结合  $f(x)$  的单调性, 可得  $x_2$  与  $a-x_1$  的大小关系, 由此证得结论.

**多种解法二** (3) 由  $f(x_1) = f(x_2)$ ,

得  $x_1 e^{-x_1} = x_2 e^{-x_2}$ , 化简得  $e^{x_2-x_1} = \frac{x_2}{x_1}$ ,

不妨设  $x_2 > x_1$ , 由解析 (3) 中解法知  $0 < x_1 < 1 < x_2$ . 令  $t = x_2 - x_1$ , 则  $t > 0, x_2 = t + x_1$ ,

代入  $e^{x_2-x_1} = \frac{x_2}{x_1}$ , 得  $e^t = \frac{t+x_1}{x_1}$ , 则  $x_1 = \frac{t}{e^t-1}$ , 则  $x_1 + x_2 = 2x_1 + t = \frac{2t}{e^t-1} + t$ ,

故要证  $x_1 + x_2 > 2$ , 即证  $\frac{2t}{e^t-1} + t > 2$ , 又因为  $e^t - 1 > 0$ , 所以等价于证明  $2t + (t-2)(e^t-1) > 0$  ( $t > 0$ ).

构造函数  $G(t) = 2t + (t-2)(e^t-1)$ , 则  $G'(t) = (t-1)e^t + 1$ , 令  $G'(t) = p(t)$ , 则  $p'(t) = te^t$ . 当  $t > 0$  时,  $p'(t) > 0$ , 则  $G'(t)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 当  $t \rightarrow 0$  时,  $G'(t) \rightarrow 0$ , 则  $G'(t) > 0$ , 则  $G(t)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又当  $t \rightarrow 0$  时,  $G(t) \rightarrow 0$ , 则  $G(t) > 0$ , 则当  $t > 0$  时,  $2t + (t-2)(e^t-1) > 0$  恒成立, 即  $x_1 + x_2 > 2$ .

**多种解法三** (3) 由  $f(x_1) = f(x_2)$  得  $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_2}{e^{x_2}}$ , 由解析 (3) 中解法得  $x_1, x_2 > 0$ , 两边取对数得  $\ln x_1 - x_1 = \ln x_2 - x_2$ , 则  $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} = 1$ , 先证  $\frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$ , 不妨设  $x_1 > x_2 > 0$ , 即证  $\frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} < \ln x_1 -$

$\ln x_2$ ,

即证  $\frac{2\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)}{\frac{x_1}{x_2} + 1} < \ln \frac{x_1}{x_2}$ .

令  $t = \frac{x_1}{x_2} > 1$ , 即证  $\frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t$ . 令

$\varphi(t) = \frac{2(t-1)}{t+1} - \ln t$  ( $t > 1$ ), 则  $\varphi'(t) = \frac{2(t+1) - 2(t-1)}{(t+1)^2} - \frac{1}{t} = -\frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} < 0$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立, 则  $\varphi(t)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 又当  $t \rightarrow 1$  时,  $\varphi(t) \rightarrow 0$ , 则  $\varphi(t) < 0$ , 故  $\frac{2(t-1)}{t+1} < \ln t$ , 又

$1 = \frac{x_1 - x_2}{\ln x_1 - \ln x_2} < \frac{x_1 + x_2}{2}$ , 故  $x_1 + x_2 > 2$ .

**归纳总结** 极值点偏移的基本题型是研究函数的零点相较于极值点的偏移, 证明与函数多个零点 (一般是两个) 的关系 (最基础的是和与极值点二倍的关系).

常见的研究方法:

(1) 构造对称函数法

解题步骤为将两个零点放到不等式两侧, 利用函数单调性将比较自变量大小问题转化为比较函数值大小问题, 再利用条件中的  $f(x_1) = f(x_2)$  消元转化为关于一个零点的不等式, 然后构造函数求最值证明不等式.

对应本题的解析和多种解法一.

此解法解题过程会构造类似于  $f(2-x)$  这样的函数, 这个函数的图象与  $f(x)$  的图象关于直线  $x = 1$  对称, 所以此方法一般称为构造对称函数法. 这两个函数图象的差的正负体现在图象上, 对应了零点相较于极值点的偏移关系.

(2) 比值代换、差值代换

解题步骤为写出  $f(x_1) = f(x_2)$  对应的代数式, 尝试对  $x_1, x_2$  这两个元进行消元, 但题目一般无法用其中一个表示另外一个, 可以考虑构造两者的比值或差值为新的主元表示它们. 对应本题多种解法二.

指数形式的函数问题一般较多用差值代换, 对数形式的函数问题一般较多用比值代换.

(3) 二级结论: 指数均值不等式、对数均值不等式

对数均值不等式  $\sqrt{ab} < \frac{a-b}{\ln a - \ln b} < \frac{a+b}{2}$  ( $a > 0, b > 0, a \neq b$ ),

$\frac{a+b}{2}$  ( $a > 0, b > 0, a \neq b$ ),



指数均值不等式  $e^{\frac{a+b}{2}} < \frac{e^a - e^b}{a-b} < \frac{e^a + e^b}{2}$  ( $a \neq b$ ).

$f(x_1) = f(x_2)$  如果可以进行代数变形得到上述形式, 就可以利用此结论做题.

2. (1) 【解】由题意, 得函数的定义域为

$$(0, +\infty), f'(x) = \frac{x-1}{x^2} e^x - \frac{1}{x} + 1 = \frac{x-1}{x^2} \cdot (e^x + x).$$

当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减; 当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增.

故  $f(x)_{\min} = f(1) = e + 1 - a$ .

$f(x) \geq 0$  等价于  $f(x)_{\min} \geq 0$ , 故  $a \leq e + 1$ .

所以实数  $a$  的取值范围为  $(-\infty, e + 1]$ .

(2) 【证明】由 (1) 知要使得  $f(x)$  有两个零点, 则  $f(x)_{\min} = f(1) = e + 1 - a < 0$ , 即  $e + 1 < a$ .

不妨设  $x_1 < x_2$ , 则有  $0 < x_1 < 1 < x_2$ . 要证明

$x_1 x_2 < 1$ , 即证明  $1 < x_2 < \frac{1}{x_1}$ , 又  $f(x)$  在

$(1, +\infty)$  上单调递增, 即证明  $f(x_2) <$

$f\left(\frac{1}{x_1}\right)$ , 即证明  $f(x_1) < f\left(\frac{1}{x_1}\right)$ .

构造函数  $F(x) = f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right)$ ,

$$F'(x) = f'(x) + f'\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{(x-1)(e^x + x - xe^{\frac{1}{x}} - 1)}{x^2}.$$

由于  $y = e^x + x$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 则

$e^x + x < e + 1$ , 又函数  $y = xe^{\frac{1}{x}}$  在  $(0, 1)$  上

单调递减, 所以  $xe^{\frac{1}{x}} > e$ , 则  $-xe^{\frac{1}{x}} - 1 < -e - 1$ , 所以

$e^x + x - xe^{\frac{1}{x}} - 1 < e + 1 - e - 1 = 0$ .

所以当  $0 < x < 1$  时,  $F'(x) > 0$ ,  $F(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 又当  $x = 1$  时,  $F(x) = 0$ ,

所以当  $0 < x < 1$  时,  $F(x) < 0$ , 即  $f(x) <$

$f\left(\frac{1}{x}\right)$ , 则  $f(x_1) < f\left(\frac{1}{x_1}\right)$ , 即  $x_1 x_2 < 1$ .

得证.

**归纳总结** 证明极值点偏移问题中类似于  $x_1 x_2 < a^2$  (或  $x_1 x_2 > a^2$ ) ( $x_1, x_2, a$  都为正数) 类型的问题的步骤:

① 首先构造函数  $g(x) = f(x) - f\left(\frac{a^2}{x}\right)$ , 对  $f(x)$  和  $g(x)$  分别求导, 确定函数  $y = f(x)$  和函数  $y = g(x)$  的单调性;

②  $f(x_1) = f(x_2)$ , 确定两个零点的大小关系  $0 < x_1 < a < x_2$ , 由函数  $g(x)$  的单调性, 得  $g(x_1) = f(x_1) - f\left(\frac{a^2}{x_1}\right) =$

$f(x_2) - f\left(\frac{a^2}{x_1}\right)$  与零的大小关系;

③ 最后由函数  $y = f(x)$  的单调性得到  $x_2$  与  $\frac{a^2}{x_1}$  的大小关系, 从而证明相应问题

3. (1) 【解】当  $a = 1$  时,  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ ,  $x \in$

$(0, +\infty)$ , 则  $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ , 由  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = 1$ .

当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增;

当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减,

故  $f(x)$  的单调递增区间为  $(0, 1)$ , 单调递减区间为  $(1, +\infty)$ .

(2) (i) 【解】由  $\frac{1 + \ln x}{ax} = 1$ , 得  $\frac{1 + \ln x}{x} =$

$a$ , 设  $g(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ ,

由 (1) 得  $g(x)$  在区间  $(0, 1)$  上单调递增, 在区间  $(1, +\infty)$  上单调递减.

又  $g\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ ,  $g(1) = 1$ , 当  $x > \frac{1}{e}$  时,

$g(x) > 0$ , 且当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $g(x) \rightarrow 0^+$ ,

→ 避坑: 需要根据  $g(x)$  的单调性判断  $g(x)$  的值域, 可在草图上画出  $g(x)$  图象的大致趋势, 以防  $a$  的取值范围判断错误

所以当  $0 < a < 1$  时, 方程  $\frac{1 + \ln x}{x} = a$  有两个

不同的根, 即方程  $\frac{1 + \ln x}{ax} = 1$  有两个不同的根, 故实数  $a$  的取值范围是  $(0, 1)$ .

(ii) 【证明】不妨设  $x_1 < x_2$ , 由 (i) 可知

$0 < x_1 < 1 < x_2$ , 且  $\frac{\ln x_1 + 1}{x_1} = \frac{\ln x_2 + 1}{x_2}$ .

当  $x_2 \in [2, +\infty)$  时,  $x_1^2 + x_2^2 > x_2^2 \geq 4 > 2$ , 即  $x_1^2 + x_2^2 > 2$ ;

当  $x_2 \in (1, 2)$  时,  $2 - x_2 \in (0, 1)$ .

设  $p(x) = g(x) - g(2 - x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} -$

$\frac{\ln(2 - x)}{2 - x} - \frac{1}{2 - x}$ ,  $0 < x < 1$ ,

则  $p'(x) = -\frac{\ln x}{x^2} - \frac{\ln(2 - x)}{(2 - x)^2} > -\frac{\ln x}{x^2} -$

$\frac{\ln(2 - x)}{x^2} = -\frac{\ln[-(x - 1)^2 + 1]}{x^2} > 0$ ,

则  $p(x)$  在区间  $(0, 1)$  上单调递增, 又当  $x \rightarrow 1$  时,  $p(x) \rightarrow 0$ , 则  $p(x) < 0$ , 即

$g(x) < g(2 - x)$  在  $(0, 1)$  上恒成立. 又  $x_1 \in (0, 1)$ , 所以  $g(2 - x_1) > g(x_1) =$

$g(x_2)$ .

因为  $2 - x_1 > 1$ ,  $x_2 > 1$ ,  $g(x)$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递减,

所以  $2 - x_1 < x_2$ , 即  $x_1 + x_2 > 2$ . 又  $x_1 \neq x_2$ ,

所以  $x_1^2 + x_2^2 > 2x_1 x_2$ ,

故  $2x_1^2 + 2x_2^2 > x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 > 4$ , 所以  $x_1^2 + x_2^2 > 2$ .

综上,  $x_1^2 + x_2^2 > 2$ .

**多种解法** (2) (ii) 不妨设  $x_1 < x_2$ , 由

(i) 可知  $0 < x_1 < 1 < x_2$ , 设  $h(x) =$

$g(x) - g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 + \ln x}{x} - x(1 - \ln x)$ ,

$x \in (0, +\infty)$ , 则  $h'(x) = \frac{-\ln x}{x^2} + \ln x =$

$\ln x \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2} \geq 0$  且等号不恒成立,

所以  $h(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  上单调递增. 又  $h(1) = 0$ , 所以  $h(x_1) = g(x_1) -$

$g\left(\frac{1}{x_1}\right) < 0$ , 即  $g(x_1) < g\left(\frac{1}{x_1}\right)$ .

又  $g(x_2) = g(x_1)$ , 所以  $g(x_2) <$

$g\left(\frac{1}{x_1}\right)$ , 则  $x_2 > 1$ ,  $\frac{1}{x_1} > 1$ , 又  $g(x)$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递减,

所以  $x_2 > \frac{1}{x_1}$ , 即  $x_1 x_2 > 1$ . 又  $x_1 \neq x_2$ , 所以  $x_1^2 + x_2^2 > 2x_1 x_2 > 2$ , 得证.

**名师点拨** 非和、积类型的极值点偏移问题可以考虑转化为和、积类型的极值点偏移问题, 转化的方法之一就是放缩, 本题的两种解法分别是把平方和放缩成和与积.

4. (1) 【解】因为  $f(x) = x(1 - \ln x) = x -$

$x \ln x (x > 0)$ ,

所以  $f'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x (x > 0)$ ,

所以当  $0 < x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ , 此时函数  $f(x)$  单调递增;

当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 此时函数  $f(x)$  单调递减.

综上, 函数  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减.

(2) 【证明】因为  $b \ln a - a \ln b = a - b (a > 0, b > 0)$ ,

所以  $\frac{\ln a}{a} - \frac{\ln b}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} (a > 0, b > 0)$ ,

所以  $\frac{\ln a + 1}{a} = \frac{\ln b + 1}{b} (a > 0, b > 0)$ .

令  $m = \frac{1}{a}$ ,  $n = \frac{1}{b} (m > 0, n > 0)$ , 则  $m(1 -$

$\ln m) = n(1 - \ln n)$ .

由 (1) 知, 函数  $f(x) = x(1 - \ln x)$  在  $(0, 1)$

上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减,

且  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $f(e) = 0$ ,

不妨令  $a > b > 0$ , 则  $0 < m < n$ ,

由  $f(m) = f(n)$ , 可得  $0 < m < 1 < n < e$ .

要证  $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$ , 即证  $2 < m + n < e$ .

要证  $2 < m + n$ , 即证  $n > 2 - m$ , 又  $2 - m > 1$ ,

即证  $f(n) < f(2 - m)$ , 即证  $f(m) < f(2 - m)$ .

令  $g(x) = f(x) - f(2 - x) = x(1 - \ln x) -$

$(2 - x)[1 - \ln(2 - x)]$ ,  $0 < x < 1$ ,

则  $g'(x) = -\ln x - \ln(2 - x) = -[\ln x + \ln(2 - x)] = -\ln[x(2 - x)] = -\ln[-(x - 1)^2 + 1] > 0$ ,

所以  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增,  $x \rightarrow 1$  时,  $g(x) \rightarrow 0$ ,

所以  $g(x) < 0$ , 所以  $2 < m + n$  成立.

因为  $m(1 - \ln m) = n(1 - \ln n) > m$ ,

所以要证  $m + n < e$ , 只需证  $n(1 - \ln n) + n < e$ . 令  $h(x) = x(1 - \ln x) + x$ ,  $1 < x < e$ ,

则  $h'(x) = 1 - \ln x - 1 + 1 = 1 - \ln x > 0$ ,  $1 < x < e$ , 所以  $h(x)$  在  $(1, e)$  上单调递增,

$x \rightarrow e$  时,  $h(x) \rightarrow e$ , 所以  $h(x) < e$ , 所以  $m + n < e$ .

所以  $2 < m + n < e$ , 即  $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$  成立.

**名师点拨** 非和、积类型的极值点偏移问题可以考虑转化为和、积类型的极值点偏移问题, 转化的方法之一就是换元.

5. (1) 【解】当  $a = 0$  时,  $h(x) = x$ , 只有一个零点, 与题意不符.

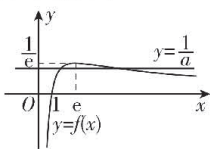
当  $a \neq 0$  时, 由  $h(x) = x - a \ln x = 0$ , 得

$\frac{1}{a} = \frac{\ln x}{x}$ , 令  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $x > 0$ ,



所以若  $h(x)$  有两个零点, 则直线  $y = \frac{1}{a}$  与函数  $f(x)$  的图象有两个不同的交点, 易得  $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = e$ , 所以当  $x \in (0, e)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增; 当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减, 所以  $f(x)_{\max} = f(e) = \frac{1}{e}$ .

又  $f(1) = 0$ , 当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow 0^+$ , 所以函数  $f(x)$  的大致图象如图所示,



由图可知, 当  $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{e}$ , 即  $a > e$  时, 直线  $y = \frac{1}{a}$  与函数  $f(x)$  的图象有两个不同的交点,

所以实数  $a$  的取值范围是  $(e, +\infty)$ . (2)【证明】由  $xe^x - a(\ln x + x) = 0$ , 得  $xe^x - a \ln(xe^x) = 0$ , 令  $t = xe^x$ ,  $x > 0$ , 则  $t - a \ln t = 0$ ,  $t > 0$ , 易得  $t' = (x+1)e^x > 0$ , 所以函数  $t = xe^x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

令  $t_1 = x_1 e^{x_1}$  ( $t_1 > 0$ ),  $t_2 = x_2 e^{x_2}$  ( $t_2 > 0$ ), 则关于  $t$  的方程  $t - a \ln t = 0$  有两个实数根  $t_1, t_2$ , 且  $t_1 \neq t_2$ ,

要证  $e^{x_1+x_2} > \frac{e^2}{x_1 x_2}$ , 即证  $x_1 e^{x_1} \cdot x_2 e^{x_2} > e^2$ , 即证  $t_1 t_2 > e^2$ , 即证  $\ln t_1 + \ln t_2 > 2$ ,

由已知得  $\begin{cases} t_1 = a \ln t_1, \\ t_2 = a \ln t_2, \end{cases}$

所以  $\begin{cases} t_1 - t_2 = a(\ln t_1 - \ln t_2), \\ t_1 + t_2 = a(\ln t_1 + \ln t_2), \end{cases}$

所以  $\frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2} = \frac{\ln t_1 + \ln t_2}{\ln t_1 - \ln t_2}$ .

不妨设  $t_1 > t_2 > 0$ , 即证  $\ln t_1 + \ln t_2 = \frac{t_1 + t_2}{t_1 - t_2} \cdot \ln \frac{t_1}{t_2} > 2$ ,

即证  $\ln \frac{t_1}{t_2} > \frac{2(t_1 - t_2)}{t_1 + t_2} = \frac{2(\frac{t_1}{t_2} - 1)}{\frac{t_1}{t_2} + 1}$ , 令

$s = \frac{t_1}{t_2} > 1$ , 即证  $\ln s > \frac{2(s-1)}{s+1}$ , 其中  $s > 1$ ,

构造函数  $g(s) = \ln s - \frac{2(s-1)}{s+1}$ , 则

$g'(s) = \frac{1}{s} - \frac{4}{(s+1)^2} = \frac{(s-1)^2}{s(s+1)^2} > 0$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立,

所以函数  $g(s)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 又当  $s \rightarrow 1$  时,  $g(s) \rightarrow 0$ , 所以  $g(s) > 0$ , 故原不等式得证.

6. (1)【解】由题知  $f(x) = \ln x - x + a$ , 定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ , 设切点  $P$  为  $(x_0, \ln x_0 - x_0 + a)$ .

$\therefore f'(x_0) = \frac{1}{x_0} - 1 = e - 1$  且  $(e-1)x_0 =$

$\ln x_0 - x_0 + a$ , 解得  $x_0 = \frac{1}{e}$ ,  $a = 2$ ,

故实数  $a$  的值为 2.

(2)【证明】由题知  $g(x) = x(\ln x - x + a)$ , 定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $\therefore g'(x) = \ln x - 2x + a + 1$ .

$\therefore g(x)$  有两个极值点  $x_1$  和  $x_2$ ,

$\therefore g'(x)$  有两个变号零点.

令  $h(x) = \ln x - 2x + a + 1$ , 则  $h'(x) = \frac{1}{x} - 2$ , 令  $h'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{1}{2}$ ,

当  $x \in (0, \frac{1}{2})$  时,  $h'(x) > 0$ ,  $h(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上单调递增;

当  $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$  时,  $h'(x) < 0$ ,  $h(x)$  在  $(\frac{1}{2}, +\infty)$  上单调递减.

当  $x = \frac{1}{2}$  时,  $h(x)$  取最大值, 最大值为

$h(\frac{1}{2}) = a - \ln 2$ . 当  $x \rightarrow 0$  时,  $h(x) \rightarrow -\infty$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow -\infty$ , 则  $h(x)$  至多有两个零点, 即  $g'(x)$  至多有两个零点. 要使  $g'(x)$  有两个零点, 必有  $a - \ln 2 > 0$ ,  $\therefore a > \ln 2$ .

由  $\begin{cases} \ln x_1 - 2x_1 + a + 1 = 0, \\ \ln x_2 - 2x_2 + a + 1 = 0, \end{cases}$  两式作差得

$\ln \frac{x_1}{x_2} = 2(x_1 - x_2)$  ①, 令  $\frac{x_1}{x_2} = t$ , 由  $0 < x_1 <$

$\frac{1}{2} < x_2$  得  $0 < t < 1$ ,

则  $x_1 = tx_2$ , 代入①式得  $2(tx_2 - x_2) = \ln t$ ,  $\therefore x_2 = \frac{\ln t}{2(t-1)}$ , 则  $x_1 = \frac{t \ln t}{2(t-1)}$ ,

故所证不等式转化为  $\frac{(t+1) \ln t}{2(t-1)} > 1 +$

$\ln t$ ,  $0 < t < 1$ , 只需证  $\frac{(3-t) \ln t}{2(t-1)} > 1$ ,

即证  $\ln t - \frac{2(t-1)}{3-t} < 0$ .

令  $F(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{3-t}$ ,  $F'(t) = \frac{1}{t} -$

$\frac{4}{(3-t)^2} = \frac{t^2 - 10t + 9}{t(3-t)^2} = \frac{(t-1)(t-9)}{t(3-t)^2}$ ,

当  $0 < t < 1$  时,  $F'(t) > 0$ ,  $\therefore F(t)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 又当  $t \rightarrow 1$  时,  $F(t) \rightarrow 0$ ,  $\therefore F(t) < 0$ ,

则  $\ln t - \frac{2(t-1)}{3-t} < 0$ , 即不等式  $x_2 + x_1 > 1 +$

$\ln \frac{x_1}{x_2}$  成立.

7. (1)【解】由题意知  $f(x)$  与  $g(x)$  的公共定义域为  $\mathbf{R}$ ,

令  $f(x) = -g(x)$ , 即  $ae^x + a = xe^x - x$ ,

$\therefore a = \frac{x(e^x - 1)}{e^x + 1} = \frac{x(e^x + 1 - 2)}{e^x + 1} = x \frac{2x}{e^x + 1}$ ,

令  $h(x) = x - \frac{2x}{e^x + 1}$ , 若  $f(x)$  与  $g(x)$  为“契合函数”, 则  $h(x)$  的图象与直线  $y = a$  有交点.

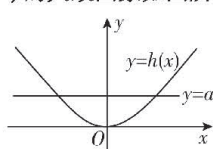
$\therefore h'(x) = 1 - \frac{2(e^x + 1) - 2xe^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2xe^x - 1}{(e^x + 1)^2}$ ,

$\therefore$  当  $x < 0$  时,  $e^{2x} < 1$ ,  $2xe^x < 0$ , 则  $h'(x) < 0$ ; 当  $x = 0$  时,  $h'(x) = 0$ ;

当  $x > 0$  时,  $e^{2x} > 1$ ,  $2xe^x > 0$ , 则  $h'(x) > 0$ ,  $\therefore h(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore h(x)_{\min} = h(0) = 0$ , 又当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ ; 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ ,

作出  $h(x)$  的大致图象如图所示,



由图可知当  $a \in [0, +\infty)$  时,  $h(x)$  的图象与直线  $y = a$  有交点,

即当  $f(x)$  与  $g(x)$  为“契合函数”时, 实数  $a$  的取值范围为  $[0, +\infty)$ .

(2)①【解】由题意知  $f(x)$  与  $g(x)$  的公共定义域为  $(0, +\infty)$ ,

令  $f(x) = -g(x)$ , 则  $x - \ln x - b = -\frac{e^{x+1}}{x}$ ,

即  $x + 1 - \ln x - b - 1 = \ln e^{x+1} - \ln x - b - 1 = \ln \frac{e^{x+1}}{x} - b - 1 = -\frac{e^{x+1}}{x}$ .

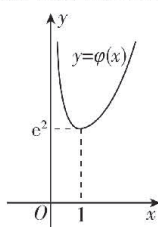
☞ 点拨: 通过指对变形, 再利用换元法, 更易得到函数的单调性

令  $\varphi(x) = \frac{e^{x+1}}{x}$  ( $x > 0$ ), 则  $\varphi'(x) = \frac{(x-1)e^{x+1}}{x^2}$ ,

$\therefore$  当  $x \in (0, 1)$  时,  $\varphi'(x) < 0$ ; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $\varphi'(x) > 0$ ,

$\therefore \varphi(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore \varphi(x) \geq \varphi(1) = e^2$ , 又当  $x \rightarrow 0^+$  时,  $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ ; 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ , 作出  $\varphi(x)$  的大致图象如图所示:



令  $t = \varphi(x)$ , 则  $t \in [e^2, +\infty)$ ,

由  $\ln \frac{e^{x+1}}{x} - b - 1 = -\frac{e^{x+1}}{x}$  得  $b + 1 = \ln t + t$ ,

$\therefore y = \ln t + t$  在  $[e^2, +\infty)$  上单调递增,  $f(x)$  与  $g(x)$  为“契合函数”且有两个“契合点”, 直线  $y = b + 1$  与  $y = \ln t + t$  的图象至少有一个交点,

$\therefore$  直线  $y = t$  与  $\varphi(x)$  的图象有两个不同的交点  $x_1, x_2$ ,  $\therefore t > e^2$ ,  $\therefore \ln t + t > 2 + e^2$ ,

☞ 点拨: 由  $t > e^2$  得  $\ln t > 2$ , 则  $\ln t + t > 2 + e^2$

$\therefore b + 1 > 2 + e^2$ , 解得  $b > 1 + e^2$ , 故实数  $b$  的取值范围为  $(1 + e^2, +\infty)$ .

②【证明】由①得直线  $y = t$  与  $\varphi(x)$  的图象有两个不同的交点  $x_1, x_2$ , 且  $0 < x_1 < x_2$ ,



$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} e^{\frac{x_1+1}{x_1}} = t, \\ e^{\frac{x_2+1}{x_2}} = t, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} e^{\frac{x_1+1}{x_1}} = tx_1, \\ e^{\frac{x_2+1}{x_2}} = tx_2, \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} x_1+1 = \ln t + \ln x_1, \\ x_2+1 = \ln t + \ln x_2, \end{cases} \therefore x_1 - x_2 = \ln x_1 - \ln x_2, \\ \text{令 } m = \frac{x_2}{x_1}, \text{ 则由 } x_2 > ex_1 \text{ 知 } m > e, x_2 = mx_1, \\ \therefore x_1 - mx_1 = \ln x_1 - \ln(mx_1), \text{ 整理可得} \\ x_1 = \frac{\ln m}{m-1}, \therefore x_2 = \frac{m \ln m}{m-1}, \\ \therefore x_1 + x_2 = \frac{\ln m}{m-1} + \frac{m \ln m}{m-1} = \frac{m+1}{m-1} \cdot \ln m, \\ \text{令 } \delta(m) = \frac{m+1}{m-1} \cdot \ln m (m > e), \\ \text{则 } \delta'(m) = -\frac{2 \ln m}{(m-1)^2} + \frac{m+1}{m(m-1)} = \\ \frac{m^2 - 1 - 2m \ln m}{m(m-1)^2}, \\ \text{令 } p(m) = m^2 - 1 - 2m \ln m (m > e), \text{ 则} \\ p'(m) = 2m - 2 \ln m - 2 = 2(m - \ln m - 1), \\ \text{令 } q(m) = m - \ln m - 1 (m > e), \\ \text{则 } q'(m) = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m} > 0, \\ \therefore q(m) \text{ 在 } (e, +\infty) \text{ 上单调递增,} \\ \therefore q(m) > e - 2 > 0, \therefore p'(m) > 0, \\ \therefore p(m) \text{ 在 } (e, +\infty) \text{ 上单调递增,} \\ \therefore p(m) > e^2 - 1 - 2e = (e-1)^2 - 2 > 0, \text{ 即} \\ \delta'(m) > 0, \\ \therefore \delta(m) \text{ 在 } (e, +\infty) \text{ 上单调递增,} \\ \therefore \delta(m) > \frac{e+1}{e-1}, \text{ 即 } x_1 + x_2 > \frac{e+1}{e-1}. \end{aligned}$$

**名师点拨** 此题的限制条件  $x_2 > ex_1$

限制了比值  $\frac{x_2}{x_1}$  的范围, 所以选择的方法是比值代换, 将所证不等式转化为以比值为主元的不等式作进一步研究.

8. (1) 【解】 $f(x) = axe^x (a \neq 0)$ , 则  $f'(x) = a(x+1)e^x$ .  
若  $a > 0$ , 则当  $x \in (-\infty, -1)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (-1, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递减, 在  $(-1, +\infty)$  上单调递增.  
若  $a < 0$ , 则当  $x \in (-\infty, -1)$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x \in (-1, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递增, 在  $(-1, +\infty)$  上单调递减.  
(2) (i) 【解】函数  $F(x) = axe^x - x - \ln x$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  
则  $F'(x) = a(x+1)e^x - 1 - \frac{1}{x}$ ,  
则  $F'(1) = 2ae - 2$ ,  
因为函数  $F(x)$  的图象在点  $(1, F(1))$  处的切线方程为  $y = 2(e-1)x - (e-1)$ , 所以  $2ae - 2 = 2(e-1)$ , 则  $a = 1$ ,  
所以  $F'(x) = (x+1)e^x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{(x+1)(xe^x - 1)}{x}$ ,  
因为  $x \in (0, +\infty)$ , 所以  $x+1 > 0$ , 令  $F'(x) = 0$ , 则  $xe^x - 1 = 0$ ,  
令  $G(x) = xe^x - 1 (x > 0)$ , 则  $G'(x) = (x+1)e^x > 0$ , 所以  $G(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2} - 1 < 0$ ,  
 $G(1) = e - 1 > 0$ ,  
所以  $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 使  $G(x_0) = 0$ , 即  $x_0 e^{x_0} - 1 = 0$ , 则  $x_0 e^{x_0} = 1$ ,  
当  $0 < x < x_0$  时,  $G(x) < 0$ , 即  $F'(x) < 0$ ,  
当  $x > x_0$  时,  $G(x) > 0$ , 即  $F'(x) > 0$ ,  
所以  $F(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增,  
故  $F(x)$  的最小值为  $F(x_0) = x_0 e^{x_0} - x_0 - \ln x_0 = 1 - \ln(x_0 e^{x_0}) = 1$ .

(ii) 【证明】由题意可知,  $xe^x - x - \ln x = t$ ,  
即方程  $f(x) - \ln f(x) = t$  有两个根  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ .  
令  $m_1 = f(x_1), m_2 = f(x_2)$ , 则  $\begin{cases} m_1 - \ln m_1 = t, \\ m_2 - \ln m_2 = t, \end{cases}$  所以  $m_1 - m_2 = \ln \frac{m_1}{m_2}$ .  
设  $u = \frac{m_1}{m_2}$ , 由 (1) 知,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $0 < x_1 < x_2$ , 所以  $0 < f(x_1) < f(x_2)$ , 则  $0 < u < 1$ ,  
由  $\begin{cases} u = \frac{m_1}{m_2}, \\ m_1 - m_2 = \ln \frac{m_1}{m_2}, \end{cases}$  得  $m_1 = \frac{u \ln u}{u-1}, m_2 = \frac{\ln u}{u-1}$ ,  
所以  $f(x_1) + 2f(x_2) = m_1 + 2m_2 = \frac{(u+2) \ln u}{u-1}$ .  
要证  $\frac{(u+2) \ln u}{u-1} > 3$ , 需证  $(u+2) \ln u < 3(u-1)$ , 即证  $3(u-1) - (u+2) \ln u > 0$ .  
构造: 注意  $u-1 < 0$ , 两边同乘  $(u-1)$  时不等号方向改变  
令  $h(u) = 3(u-1) - (u+2) \ln u (0 < u < 1)$ , 则  $h'(u) = 2 - \ln u - \frac{2}{u}$ .  
令  $\varphi(u) = 2 - \ln u - \frac{2}{u} (0 < u < 1)$ , 则  $\varphi'(u) = \frac{2-u}{u^2} > 0$ ,  
所以  $\varphi(u)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 又当  $u \rightarrow 1$  时,  $\varphi(u) \rightarrow 0$ , 则  $\varphi(u) < 0$ , 即  $h'(u) < 0$ ,  
则  $h(u)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 又当  $u \rightarrow 1$  时,  $h(u) \rightarrow 0$ , 所以  $h(u) > 0$ ,  
因此  $3(u-1) - (u+2) \ln u > 0$  成立, 故  $f(x_1) + 2f(x_2) > 3$ , 得证.

## 第五章素养检测

### 刷速度

1. B 【解析】根据导数的定义,  $f'(2) =$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2-\Delta x) - f(2)}{-\Delta x} = 2,$$

$$\text{所以 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2-\Delta x) - f(2)}{2\Delta x} =$$

$$-\frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2-\Delta x) - f(2)}{-\Delta x} = -\frac{1}{2} f'(2) = -1. \text{ 故选 B.}$$

2. D 【解析】对于 A, 由于只有  $f'(x)$  的部分图象, 不能保证  $x \in (3, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$  恒成立, 故 A 错误;

对于 B, 由  $f'(x)$  图象知  $f(1)$  是  $f(x)$  的一个极大值, 但不一定是  $f(x)$  的最大值, 故 B 错误;

对于 C, 在  $x = -1$  的左右两侧,  $f'(x)$  由负变正, 由极小值点的定义可知,  $-1$  是  $f(x)$  的极小值点, 故 C 错误;

对于 D, 当  $x \in (1, 3)$  时,  $f'(x) < 0$ , 故  $f(x)$  的一个减区间为  $(1, 3)$ , 故 D 正确. 故选 D.

3. B 【解析】显然, 当  $x \rightarrow 1$  时,  $\frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}$  的

极限即为  $\frac{0}{0}$  型, 所以  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 \ln x)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \ln x + x}{2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \ln x + \frac{1}{2} \right) = \ln 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \text{ 故选 B.}$$

4. C 【解析】由题意可得  $f'(x) = e^x + a$ , 当  $a \geq 0$  时,  $f'(x) > 0$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立, 不存在极值点, 不符合题意, 舍去. 所以必有  $a < 0$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \ln(-a)$ , 当  $x < \ln(-a)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > \ln(-a)$  时,  $f'(x) > 0$ , 即恰好有一个极小值点  $x = \ln(-a)$ , 符合题意. 故实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 0)$ . 故选 C.

5. B 【解析】 $\because y = \frac{a-x}{e^x}, \therefore y' = \frac{-1-a+x}{e^x}$ ,

设切点为  $(x_0, y_0)$ , 则  $y_0 = \frac{a-x_0}{e^{x_0}}$ , 切线斜

$$\text{率 } k = \frac{-1-a+x_0}{e^{x_0}}, \therefore \text{切线方程为 } y - \frac{a-x_0}{e^{x_0}} =$$

$$\frac{-1-a+x_0}{e^{x_0}}(x-x_0),$$

$\because$  切线过原点,  $\therefore \frac{a-x_0}{e^{x_0}} = \frac{-1-a+x_0}{e^{x_0}}(-x_0)$ ,

整理得  $x_0^2 - ax_0 - a = 0$ .

$\because$  存在过坐标原点的切线,

$\therefore \Delta = a^2 + 4a \geq 0$ , 解得  $a \leq -4$  或  $a \geq 0$ ,

$\therefore$  实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$ . 故选 B.

6. B 【解析】设  $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ , 则  $F'(x) =$

$$\left( \frac{f(x)}{x^2} \right)' = \frac{f'(x)x^2 - 2xf(x)}{x^4} = \frac{f'(x)x - 2f(x)}{x^3},$$

又当  $x \leq 0$  时,  $2f(x) - xf'(x) < 0$ , 所以当  $x < 0$  时,  $F'(x) < 0$ , 即函数  $F(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减.

因为函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 所以  $f(-x) = f(x)$ ,

又函数  $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 定义域关于原点对称,

所以  $F(-x) = \frac{f(-x)}{(-x)^2} = \frac{f(x)}{x^2} = F(x)$ , 所