

$$\begin{aligned} \therefore \begin{cases} e^{\frac{x_1+1}{x_1}} = t, \\ e^{\frac{x_2+1}{x_2}} = t, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} e^{\frac{x_1+1}{x_1}} = tx_1, \\ e^{\frac{x_2+1}{x_2}} = tx_2, \end{cases} \\ \therefore \begin{cases} x_1+1 = \ln t + \ln x_1, \\ x_2+1 = \ln t + \ln x_2, \end{cases} \therefore x_1 - x_2 = \ln x_1 - \ln x_2, \\ \text{令 } m = \frac{x_2}{x_1}, \text{ 则由 } x_2 > ex_1 \text{ 知 } m > e, x_2 = mx_1, \\ \therefore x_1 - mx_1 = \ln x_1 - \ln(mx_1), \text{ 整理可得} \\ x_1 = \frac{\ln m}{m-1}, \therefore x_2 = \frac{m \ln m}{m-1}, \\ \therefore x_1 + x_2 = \frac{\ln m}{m-1} + \frac{m \ln m}{m-1} = \frac{m+1}{m-1} \cdot \ln m, \\ \text{令 } \delta(m) = \frac{m+1}{m-1} \cdot \ln m (m > e), \\ \text{则 } \delta'(m) = -\frac{2 \ln m}{(m-1)^2} + \frac{m+1}{m(m-1)} = \\ \frac{m^2 - 1 - 2m \ln m}{m(m-1)^2}, \\ \text{令 } p(m) = m^2 - 1 - 2m \ln m (m > e), \text{ 则} \\ p'(m) = 2m - 2 \ln m - 2 = 2(m - \ln m - 1), \\ \text{令 } q(m) = m - \ln m - 1 (m > e), \\ \text{则 } q'(m) = 1 - \frac{1}{m} = \frac{m-1}{m} > 0, \\ \therefore q(m) \text{ 在 } (e, +\infty) \text{ 上单调递增,} \\ \therefore q(m) > e - 2 > 0, \therefore p'(m) > 0, \\ \therefore p(m) \text{ 在 } (e, +\infty) \text{ 上单调递增,} \\ \therefore p(m) > e^2 - 1 - 2e = (e-1)^2 - 2 > 0, \text{ 即} \\ \delta'(m) > 0, \\ \therefore \delta(m) \text{ 在 } (e, +\infty) \text{ 上单调递增,} \\ \therefore \delta(m) > \frac{e+1}{e-1}, \text{ 即 } x_1 + x_2 > \frac{e+1}{e-1}. \end{aligned}$$

**名师点拨** 此题的限制条件  $x_2 > ex_1$

限制了比值  $\frac{x_2}{x_1}$  的范围, 所以选择的方法是比值代换, 将所证不等式转化为以比值为主元的不等式作进一步研究.

8. (1) 【解】 $f(x) = axe^x (a \neq 0)$ , 则  $f'(x) = a(x+1)e^x$ .  
若  $a > 0$ , 则当  $x \in (-\infty, -1)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x \in (-1, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递减, 在  $(-1, +\infty)$  上单调递增.  
若  $a < 0$ , 则当  $x \in (-\infty, -1)$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x \in (-1, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递增, 在  $(-1, +\infty)$  上单调递减.  
(2) (i) 【解】函数  $F(x) = axe^x - x - \ln x$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  
则  $F'(x) = a(x+1)e^x - 1 - \frac{1}{x}$ ,  
则  $F'(1) = 2ae - 2$ ,  
因为函数  $F(x)$  的图象在点  $(1, F(1))$  处的切线方程为  $y = 2(e-1)x - (e-1)$ , 所以  $2ae - 2 = 2(e-1)$ , 则  $a = 1$ ,  
所以  $F'(x) = (x+1)e^x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{(x+1)(xe^x - 1)}{x}$ ,  
因为  $x \in (0, +\infty)$ , 所以  $x+1 > 0$ , 令  $F'(x) = 0$ , 则  $xe^x - 1 = 0$ ,  
令  $G(x) = xe^x - 1 (x > 0)$ , 则  $G'(x) = (x+1)e^x > 0$ , 所以  $G(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2} - 1 < 0$ ,  
 $G(1) = e - 1 > 0$ ,  
所以  $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 使  $G(x_0) = 0$ , 即  $x_0 e^{x_0} - 1 = 0$ , 则  $x_0 e^{x_0} = 1$ ,  
当  $0 < x < x_0$  时,  $G(x) < 0$ , 即  $F'(x) < 0$ ,  
当  $x > x_0$  时,  $G(x) > 0$ , 即  $F'(x) > 0$ ,  
所以  $F(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增,  
故  $F(x)$  的最小值为  $F(x_0) = x_0 e^{x_0} - x_0 - \ln x_0 = 1 - \ln(x_0 e^{x_0}) = 1$ .

- (ii) 【证明】由题意可知,  $xe^x - x - \ln x = t$ ,  
即方程  $f(x) - \ln f(x) = t$  有两个根  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ .  
令  $m_1 = f(x_1), m_2 = f(x_2)$ , 则  $\begin{cases} m_1 - \ln m_1 = t, \\ m_2 - \ln m_2 = t, \end{cases}$  所以  $m_1 - m_2 = \ln \frac{m_1}{m_2}$ .  
设  $u = \frac{m_1}{m_2}$ , 由 (1) 知,  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $0 < x_1 < x_2$ , 所以  $0 < f(x_1) < f(x_2)$ , 则  $0 < u < 1$ ,  
由  $\begin{cases} u = \frac{m_1}{m_2}, \\ m_1 - m_2 = \ln \frac{m_1}{m_2}, \end{cases}$  得  $m_1 = \frac{u \ln u}{u-1}, m_2 = \frac{\ln u}{u-1}$ ,  
所以  $f(x_1) + 2f(x_2) = m_1 + 2m_2 = \frac{(u+2) \ln u}{u-1}$ .  
要证  $\frac{(u+2) \ln u}{u-1} > 3$ , 需证  $(u+2) \ln u < 3(u-1)$ , 即证  $3(u-1) - (u+2) \ln u > 0$ .  
——陷阱: 注意  $u-1 < 0$ , 两边同乘  $(u-1)$  时不等号方向改变  
令  $h(u) = 3(u-1) - (u+2) \ln u (0 < u < 1)$ , 则  $h'(u) = 2 - \ln u - \frac{2}{u}$ .  
令  $\varphi(u) = 2 - \ln u - \frac{2}{u} (0 < u < 1)$ , 则  $\varphi'(u) = \frac{2-u}{u^2} > 0$ ,  
所以  $\varphi(u)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 又当  $u \rightarrow 1$  时,  $\varphi(u) \rightarrow 0$ , 则  $\varphi(u) < 0$ , 即  $h'(u) < 0$ ,  
则  $h(u)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 又当  $u \rightarrow 1$  时,  $h(u) \rightarrow 0$ , 所以  $h(u) > 0$ ,  
因此  $3(u-1) - (u+2) \ln u > 0$  成立, 故  $f(x_1) + 2f(x_2) > 3$ , 得证.

## 第五章素养检测

### 刷速度

1. B 【解析】根据导数的定义,  $f'(2) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2-\Delta x) - f(2)}{-\Delta x} = 2$ ,  
所以  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2-\Delta x) - f(2)}{2\Delta x} = -\frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2-\Delta x) - f(2)}{-\Delta x} = -\frac{1}{2} f'(2) = -1$ . 故选 B.  
2. D 【解析】对于 A, 由于只有  $f'(x)$  的部分图象, 不能保证  $x \in (3, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$  恒成立, 故 A 错误;  
对于 B, 由  $f'(x)$  图象知  $f(1)$  是  $f(x)$  的一个极大值, 但不一定是  $f(x)$  的最大值, 故 B 错误;  
对于 C, 在  $x = -1$  的左右两侧,  $f'(x)$  由负变正, 由极小值点的定义可知,  $-1$  是  $f(x)$  的极小值点, 故 C 错误;  
对于 D, 当  $x \in (1, 3)$  时,  $f'(x) < 0$ , 故  $f(x)$  的一个减区间为  $(1, 3)$ , 故 D 正确. 故选 D.  
3. B 【解析】显然, 当  $x \rightarrow 1$  时,  $\frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1}$  的

- 极限即为  $\frac{0}{0}$  型, 所以  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \ln x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 \ln x)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \ln x + x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \ln x + \frac{1}{2} \right) = \ln 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ . 故选 B.  
4. C 【解析】由题意可得  $f'(x) = e^x + a$ , 当  $a \geq 0$  时,  $f'(x) > 0$  在  $\mathbf{R}$  上恒成立, 不存在极值点, 不符合题意, 舍去. 所以必有  $a < 0$ , 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \ln(-a)$ , 当  $x < \ln(-a)$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x > \ln(-a)$  时,  $f'(x) > 0$ , 即恰好有一个极小值点  $x = \ln(-a)$ , 符合题意. 故实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, 0)$ . 故选 C.

5. B 【解析】 $\because y = \frac{a-x}{e^x}, \therefore y' = \frac{-1-a+x}{e^x}$ ,  
设切点为  $(x_0, y_0)$ , 则  $y_0 = \frac{a-x_0}{e^{x_0}}$ , 切线斜率  $k = \frac{-1-a+x_0}{e^{x_0}}$ ,  $\therefore$  切线方程为  $y - \frac{a-x_0}{e^{x_0}} = \frac{-1-a+x_0}{e^{x_0}}(x - x_0)$ ,

- $\therefore$  切线过原点,  $\therefore \frac{a-x_0}{e^{x_0}} = \frac{-1-a+x_0}{e^{x_0}}(-x_0)$ ,  
整理得  $x_0^2 - ax_0 - a = 0$ .  
 $\therefore$  存在过坐标原点的切线,  
 $\therefore \Delta = a^2 + 4a \geq 0$ , 解得  $a \leq -4$  或  $a \geq 0$ ,  
 $\therefore$  实数  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -4] \cup [0, +\infty)$ . 故选 B.

6. B 【解析】设  $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ , 则  $F'(x) = \frac{\left(\frac{f(x)}{x^2}\right)'}{x^4} = \frac{f'(x)x^2 - 2xf(x)}{x^4} = \frac{f'(x)x - 2f(x)}{x^3}$ ,  
又当  $x \leq 0$  时,  $2f(x) - xf'(x) < 0$ , 所以当  $x < 0$  时,  $F'(x) < 0$ , 即函数  $F(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减.  
因为函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 所以  $f(-x) = f(x)$ ,  
又函数  $F(x) = \frac{f(x)}{x^2}$  的定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 定义域关于原点对称, 所以  $F(-x) = \frac{f(-x)}{(-x)^2} = \frac{f(x)}{x^2} = F(x)$ , 所



以函数  $F(x)$  为偶函数, 所以函数  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以当  $x-2.025 \neq 0$  时, 不等式  $f(x-2.025) - f(-1)(x-2.025)^2 < 0$ ,

可化为  $\frac{f(x-2.025)}{(x-2.025)^2} < \frac{f(-1)}{(-1)^2}$ , 即  $F(x-2.025) < F(-1)$ ,

所以  $|x-2.025| < |-1|$ , 故  $2.024 < x < 2.026$ , 且  $x \neq 2.025$ .

因为当  $x \leq 0$  时,  $2f(x) - xf'(x) < 0$ , 所以  $2f(0) < 0$ , 即  $f(0) < 0$ ,

当  $x = 2.025$  时,  $f(x-2.025) - f(-1) \cdot (x-2.025)^2 = f(0) < 0$ ,

所以  $x = 2.025$  满足不等式  $f(x-2.025) - f(-1)(x-2.025)^2 < 0$ ,

所以不等式  $f(x-2.025) - f(-1) \cdot (x-2.025)^2 < 0$  的解集为  $(2.024, 2.026)$ . 故选 B.

7. D 【解析】A 选项,  $f'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x - 1 = -x \sin x - 1$ , 故  $f'(0) = -1$ , 所以  $f(x)$  的图象在点  $(0, 0)$  处的切线方程为  $y = -x$ , A 错误;

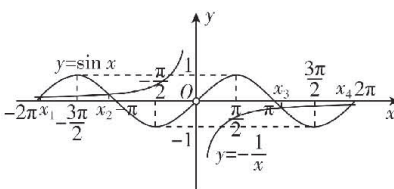
B 选项, 当  $x \in [0, \pi)$  时,  $f'(x) < 0$  恒成立, 故  $f(x)$  在  $[0, \pi)$  上单调递减, B 错误;

C, D 选项, 显然  $f'(0) \neq 0$ , 当  $x \neq 0$  时, 令  $f'(x) = 0$ , 则  $-x \sin x - 1 = 0$ , 所以  $\sin x = -\frac{1}{x}$ , 分别作出  $y = \sin x$  和  $y = -\frac{1}{x}$  在  $[-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi]$  上的图象,

如图所示,

点悟: 方程  $\sin x = -\frac{1}{x}$  的根及根的

个数都很难分析, 此时作出两个函数的图象不失为一种好的办法



由图可知, 这两个函数的图象在区间  $[-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi]$  上共有 4 个公共点, 且两个函数图象在这些公共点处都不相切,

其中当  $x \in (-2\pi, x_1)$  时,  $\sin x < -\frac{1}{x}$ ,

$f'(x) = -x \sin x - 1 < 0$ ,

当  $x \in (x_1, x_2)$  时,  $\sin x > -\frac{1}{x}$ ,  $f'(x) = -x \sin x - 1 > 0$ ,

当  $x \in (x_2, 0)$  时,  $\sin x < -\frac{1}{x}$ ,  $f'(x) = -x \sin x - 1 < 0$ ,

故  $x_1$  为极小值点,  $x_2$  为极大值点, 同理可得  $x_3$  为极小值点,  $x_4$  为极大值点, 故  $f(x)$  在区间  $[-2\pi, 2\pi]$  上的极值点的个数为 4, 有 2 个极大值点, C 错误, D 正确. 故选 D.

8. D 【解析】对于 A, 取  $x_1 = -1, x_2 = 1$ , 则  $f(-1) = 1 + 1 = 2, f(1) = 0$ ,

此时  $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = f(0) = 0$ ,

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{f(-1)+f(1)}{2} = 1 >$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = 0, \text{ 故 A 错误.}$$

对于 B, 当  $x > 0$  时,  $f(x) = x \ln x$ , 令  $f'(x) = 1 + \ln x = 0$ , 得  $x = \frac{1}{e}$ ,

当  $0 < x < \frac{1}{e}$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{1}{e}\right)$  上单调递减,

当  $\frac{1}{e} < x < \frac{1}{2}$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $\left(\frac{1}{e}, \frac{1}{2}\right)$  上单调递增, 即若  $\frac{1}{e} < x_1 <$

$x_2 < \frac{1}{2}$ , 则  $f(x_1) < f(x_2)$ , 则  $(x_1 - x_2) \cdot$

$[f(x_1) - f(x_2)] > 0$ , 故 B 错误.

对于 C, 取  $x_1 = 0, x_2 = 1$ , 则  $f(0) = f(1) = 0, x_1 + x_2 = 1$ , 故 C 错误.

对于 D, 令  $h(x) = f(-x) + f(x)$ , 若  $x > 0$ , 则  $-x < 0$ , 此时  $h(x) = x^2 + x + x \ln x = x(x+1+\ln x)$ ,

令  $p(x) = x+1+\ln x (x > 0)$ , 则  $p'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$ , 所以  $p(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

$$\text{因为 } p\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{1}{e^2} + 1 + \ln \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^2} - 1 < 0,$$

$$p(1) = 1 + 1 + \ln 1 = 2 > 0,$$

所以  $p(x)$  在  $\left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$  上存在一个零点,

即  $h(x)$  在  $\left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$  上存在一个零点.

若  $x < 0$ , 则  $-x > 0$ , 此时  $h(x) = -x \ln(-x) + x^2 - x = x[x-1-\ln(-x)]$ ,

令  $q(x) = x-1-\ln(-x) (x < 0)$ , 则  $q'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$ ,

所以  $q(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增,

因为  $q(-1) = -2 - \ln 1 = -2 < 0$ ,

$$q\left(-\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{1}{e^2} - 1 + 2 = 1 - \frac{1}{e^2} > 0,$$

所以函数  $q(x)$  在  $\left(-1, -\frac{1}{e^2}\right)$  上存在唯

一零点, 即函数  $h(x)$  在  $\left(-1, -\frac{1}{e^2}\right)$  存

在唯一零点.

又因为  $h(0) = 2f(0) = 0$ , 所以函数  $h(x)$  有且只有三个零点,

一个零点在区间  $\left(\frac{1}{e^2}, 1\right)$ , 一个零点为 0, 一个零点在区间  $\left(-1, -\frac{1}{e^2}\right)$ ,

当  $f(-x_1) + f(x_1) = 0, f(-x_2) + f(x_2) = 0$  时, 必有  $x_1 \leq 0 \leq x_2$  (等号不同时成立), 故 D 正确. 故选 D.

9. ABC 【解析】对于 A,  $f'(x) = 3x^2 - a$ , 所以  $f'(2) = 12 - a = 9$ , 解得  $a = 3$ , 故 A 正确;

对于 B, 由于  $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ , 令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = -1$  或  $x = 1$ , 令  $f'(x) > 0$ , 解得  $x < -1$  或  $x > 1$ , 令  $f'(x) < 0$ , 解得  $-1 < x < 1$ , 所以函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  和  $(1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-1, 1)$  上单调递减, 所以  $f(x)$  在  $x = -1$  处取得极大值, 故 B 正确;

对于 C, 因为函数  $f(x)$  在  $(-\infty, -1)$  和  $(1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(-1, 1)$  上单调递减, 又  $f(-2) = -1 < 0, f(-1) = 3 > 0, f(1) = -1 < 0, f(2) = 3 > 0$ ,

所以函数  $f(x)$  在  $(-2, -1), (-1, 1), (1, 2)$  上各有一个零点, 故 C 正确;

对于 D, 由  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ , 令  $g(x) = x^3 - 3x$ , 易知函数  $g(x)$  是奇函数, 其图象关于点  $(0, 0)$  中心对称, 所以  $f(x) = g(x) + 1$  的图象关于点  $(0, 1)$  中心对称, 故 D 错误. 故选 ABC.

10. ABD 【解析】对于 A,  $f(x)$  的定义域

为  $(0, +\infty)$ , 且  $f'(x) = \frac{1}{x} - a = \frac{1-ax}{x}$ .

设  $y = f(x)$  的图象与  $x$  轴相切于点  $(x_0, 0)$ , 则  $\begin{cases} \ln x_0 - ax_0 = 0, \\ \frac{1}{x_0} - a = 0, \end{cases}$  解得  $a =$

$$\frac{1}{e}, \text{ 故 A 正确.}$$

对于 B, 若  $a \leq 0$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{x} - a > 0$ ,

所以  $f(x)$  是增函数, 故  $f(x)$  没有极值, 故 B 正确.

对于 C, 若  $f(x)$  有最大值, 则  $a > 0$ . 令  $f'(x) = 0$ , 得  $x = \frac{1}{a}$ .

当  $x \in \left(0, \frac{1}{a}\right)$  时,  $f'(x) > 0, f(x)$  单调

递增, 当  $x \in \left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$  时,  $f'(x) < 0$ ,

$f(x)$  单调递减, 所以  $f(x)$  有最大值  $f\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a - 1$ .

令  $-\ln a - 1 = -3$ , 得  $a = e^2$ , 故 C 错误.

对于 D, 若  $a = 1$ , 则  $f(x) = \ln x - x$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递减.

因为  $f(x_1) = f(x_2) (x_1 \neq x_2)$ , 不妨设  $0 < x_1 < 1 < x_2$ .

设  $g(x) = f(x) - f(2-x)$ ,

$$\text{则 } g'(x) = \frac{1-x}{x} + \frac{1-(2-x)}{2-x} = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)}, \text{ 则}$$

$g'(x) > 0$  在  $(0, 1)$  上恒成立, 所以  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增, 此时  $g(x) < g(1) = 0$ .

又  $0 < x_1 < 1$ , 所以  $g(x_1) = f(x_1) - f(2-x_1) < 0$ , 即  $f(x_1) < f(2-x_1)$ .

又  $f(x_1) = f(x_2)$ , 所以  $f(x_2) < f(2-x_1)$ , 因为  $x_2 > 1, 2-x_1 > 1$ , 且  $f(x) = \ln x - x$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $x_2 > 2-x_1$ , 即  $x_1 + x_2 > 2$ , 故 D 正确. 故选 ABD.

11. ABD 【解析】由  $e^b(a^2+1) = a(e^{2b}+1)$  化简可得  $(ae^b-1)(e^b-a) = 0$ .

由  $e^b(a^2+1) > 0$ , 可得  $a(e^{2b}+1) > 0$ , 所以  $b > a > 0$ .

设函数  $f(x) = e^x - x - 1$ , 求导得  $f'(x) = e^x - 1$ ,

当  $x < 0$  时,  $f'(x) = e^x - 1 < 0$ , 可知  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减,

当  $x > 0$  时,  $f'(x) = e^x - 1 > 0$ , 可知  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

所以  $f(x)$  在  $x = 0$  处取到最小值 0, 所以  $e^x - x - 1 \geq 0$ ,

即不等式  $e^x \geq x + 1$  恒成立 (当且仅当  $x = 0$  时等号成立), 又  $b > a > 0$ , 所以  $e^b > b + 1 > b > a$ .

所以由  $(ae^b-1)(e^b-a) = 0$ , 可得



$$ae^b - 1 = 0, \text{ 即 } a = \frac{1}{e^b}.$$

$$\text{对于 A, } a - \ln a = \frac{1}{e^b} - \ln \frac{1}{e^b} = e^{-b} - \ln e^{-b} = e^{-b} + b, \text{ A 正确;}$$

$$\text{对于 B, 由 } a = \frac{1}{e^b}, b > 0, \text{ 得 } b = -\ln a, \text{ 且 } 0 < a < 1, \text{ 所以 } a + b = a - \ln a, \text{ 设 } F(a) = a - \ln a, \text{ 则 } F'(a) = 1 - \frac{1}{a} < 0$$

$$\text{在 } (0, 1) \text{ 上恒成立, 所以 } F(a) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递减, 此时 } F(a) > F(1) = 1, \text{ B 正确;}$$

$$\text{对于 C, } e^a - b = e^a + \ln a, \text{ 设 } h(a) = e^a + \ln a, \text{ 则 } h'(a) = e^a + \frac{1}{a} > 0 \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上恒成立, 所以 } h(a) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递增, 此时 } h(a) < h(1) = e, \text{ 当 } a \rightarrow 0 \text{ 时, } h(a) \rightarrow -\infty, \text{ 所以 } h(a) = e^a + \ln a = 0 \text{ 只有一解, 所以 } e^a = b \text{ 不一定成立, C 错误;}$$

$$\text{对于 D, } ab = \frac{b}{e^b}, \text{ 设 } g(b) = \frac{b}{e^b}, \text{ 则}$$

$$g'(b) = \frac{1-b}{e^b}, \text{ 当 } b \in (0, 1) \text{ 时, } g'(b) > 0, g(b) \text{ 在 } (0, 1) \text{ 上单调递增, 当 } b \in (1, +\infty) \text{ 时, } g'(b) < 0, g(b) \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上单调递减, 因而 } g(b) \leq g(1) = \frac{1}{e}, \text{ D 正确. 故选 ABD.}$$

**12. 2 【解析】** 易知  $f'(x) = ae^x + 1$ ,  $f'(0) = a + 1$ , 且  $f(0) = a$ , 所以直线  $l: y = (a+1)x + a$ , 它与两坐标轴的交点坐标分别为  $(-\frac{a}{a+1}, 0)$  和  $(0, a)$ , 可得  $\frac{1}{2} \times \frac{a}{a+1} \times a = \frac{2}{3}$ , 又  $a > 0$ , 解得  $a = 2$ .

**13.  $[e^4, +\infty)$  【解析】** 设  $x_1 > x_2 > m$ , 不等式  $\frac{x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1}{x_1 - x_2} > 3$ , 变形为  $\frac{\ln x_2 - 3}{x_2} > \frac{\ln x_1 - 3}{x_1}$ .

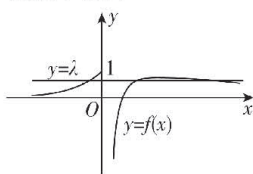
$$\text{设函数 } f(x) = \frac{\ln x - 3}{x}, \text{ 则函数 } f(x) \text{ 在区间 } (m, +\infty) \text{ 上单调递减, 由 } f'(x) = \frac{4 - \ln x}{x^2} = 0, \text{ 得 } x = e^4,$$

$$\text{当 } x \in (0, e^4) \text{ 时, } f'(x) > 0, f(x) \text{ 单调递增, 当 } x \in (e^4, +\infty) \text{ 时, } f'(x) < 0, f(x) \text{ 单调递减, 所以 } m \geq e^4.$$

**14.  $(\frac{1}{4}, \frac{2}{e})$  【解析】** 当  $x \leq 0$  时,  $f(x) = 2^x$ , 故  $f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递增;

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{2 \ln x}{x}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{2(1 - \ln x)}{x^2}, \text{ 令 } f'(x) > 0, \text{ 得 } 0 < x < e, \text{ 令 } f'(x) < 0, \text{ 得 } x > e, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在 } (0, e) \text{ 上单调递增, 在 } (e, +\infty) \text{ 上单调递减, 又 } f(e) = \frac{2}{e}, \text{ 当 } x \rightarrow 0^+ \text{ 时, } f(x) \rightarrow -\infty, \text{ 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow 0^+, \text{ 所以 } f(x) \text{ 的}$$

大致图象如图所示.



令  $g(x) = t$ , 由函数  $f(x)$  的图象可知, 方程  $f(t) = \lambda$  最多有 3 个解, 且此时  $0 < \lambda < \frac{2}{e}$ , 且方程  $f(t) = \lambda$  的三个解中最小的解为  $t = \log_2 \lambda$ .

因为  $g(x) = x^2 + 2x - 4\lambda = (x+1)^2 - 4\lambda - 1$ , 所以  $g(x)$  在  $(-\infty, -1)$  上单调递减, 在  $(-1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $g(x)$  的最小值为  $g(-1) = -4\lambda - 1$ , 即当  $t > -4\lambda - 1$  时,  $g(x) = t$  有 2 个不同的零点, 所以若要使关于  $x$  的方程  $f(g(x)) = \lambda$  有 6 个不同的实数解, 则  $\begin{cases} \log_2 \lambda > -4\lambda - 1, \\ 0 < \lambda < \frac{2}{e}. \end{cases}$

→ 避坑: 不

能只考虑  $0 < \lambda < \frac{2}{e}$ , 而忽略最小解  $t = \log_2 \lambda$  是否存在的情况

$\log_2 \lambda > -4\lambda - 1$ , 即  $4\lambda + \log_2 \lambda + 1 > 0$ , 令  $h(\lambda) = 4\lambda + \log_2 \lambda + 1$ , 易知  $h(\lambda)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $h(\frac{1}{4}) = 0$ , 所以  $4\lambda + \log_2 \lambda + 1 > 0$

的解集为  $(\frac{1}{4}, +\infty)$ .

综上所述,  $\lambda$  的取值范围为  $(\frac{1}{4}, \frac{2}{e})$ .

**规律方法** 解决有关复合函数的方程

$f(g(x)) = \lambda$  根的个数问题的一般方法

(1) 先根据解析式画出函数  $f(x)$  的图象; (2) 令  $g(x) = t$ ; (3) 结合函数  $f(x)$  的图象及方程  $f(t) = \lambda$  根的个数, 分析外层函数  $f(t)$  对应的取值范围; (4) 再确定方程  $g(x) = t$  根的个数及对应参数的取值范围; (5) 解出参数范围即可.

**15. 【解】** (1) 由  $g(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ,  $g'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ , 则

$$g(\frac{\pi}{4}) = 1, g'(\frac{\pi}{4}) = 2,$$

$$\text{则所求的切线方程为 } y - 1 = 2(x - \frac{\pi}{4}), \text{ 即 } 4x - 2y + 2 - \pi = 0.$$

(2) 由  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , 设切点为  $(x_0, \ln x_0)$ , 则  $k = f'(x_0) = \frac{1}{x_0}$ , 则切线方程为  $y - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$ ,

$$\text{又点 } (0, 1) \text{ 在切线上, 则有 } 1 - \ln x_0 = \frac{1}{x_0}(0 - x_0), \text{ 解得 } x_0 = e^2. \text{ 所以 } l \text{ 的方程为 } y - 2 = \frac{1}{e^2}(x - e^2), \text{ 即 } e^{-2}x - y + 1 = 0.$$

**16. 【解】** (1) 设  $w(x) = kx + b$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} w(1) = 57, \\ w(10) = 120, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} k + b = 57, \\ 10k + b = 120, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = 7, \\ b = 50, \end{cases} \text{ 所以 } w(x) = 7x + 50.$$

$$\text{依题意得 } F(x) = xG(x) - 50 - 7x = x\left(-\frac{7}{x^2} + \frac{20 \ln x}{x} + \frac{84}{x} + 4\right) - 50 - 7x = -\frac{7}{x} + 20 \ln x - 3x + 34 (x > 0).$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } F(x) = -\frac{7}{x} + 20 \ln x - 3x + 34 (x > 0),$$

$$\text{则 } F'(x) = \frac{7}{x^2} + \frac{20}{x} - 3 = \frac{-3x^2 + 20x + 7}{x^2} = \frac{-(3x+1)(x-7)}{x^2},$$

令  $F'(x) > 0$ , 得  $0 < x < 7$ , 令  $F'(x) < 0$ , 得  $x > 7$ , 所以  $F(x)$  在  $(0, 7)$  上单调递增, 在  $(7, +\infty)$  上单调递减, 所以  $F(x)_{\max} = F(7) = 20 \ln 7 + 12 \approx 20 \times 1.95 + 12 = 51$ , 即当产量为 7 百件时, 该企业在这种产品的生产中获利最大, 且最大利润约为 51 万元.

**17. 【解】** (1) 由题意得  $f'(x) = x^2 - (k+4) \cdot x + 4k = (x-4)(x-k)$ .

当  $k = 4$  时,  $f'(x) = (x-4)^2 \geq 0$ , 当且仅当  $x = 4$  时等号成立,  $\therefore$  函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调递增.

当  $k > 4$  时, 令  $f'(x) < 0$ , 得  $4 < x < k$ , 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x < 4$  或  $x > k$ , 故函数  $f(x)$  在  $(4, k)$  上单调递减, 在  $(-\infty, 4), (k, +\infty)$  上单调递增.

当  $k < 4$  时, 令  $f'(x) < 0$ , 得  $k < x < 4$ , 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x < k$  或  $x > 4$ , 故函数  $f(x)$  在  $(k, 4)$  上单调递减, 在  $(-\infty, k), (4, +\infty)$  上单调递增.

(2) 当  $k \leq 0$  或  $k \geq 3$  时, 函数  $f(x)$  在  $(0, 3)$  上为单调函数, 最多只有一个零点,  $\therefore 0 < k < 3$ .

当  $0 < k < 3$  时, 函数  $f(x)$  在  $(0, k)$  上单调递增, 在  $(k, 3)$  上单调递减.

要使函数  $f(x)$  在  $(0, 3)$  上有两个零点, 则需满足:

$$0 < k < 3, \text{ 且 } \begin{cases} f(k) > 0, \\ f(0) < 0, \end{cases} \text{ 解得 } 1 < k < \frac{13}{9}.$$

$$\therefore f(x)_{\min} = \min\{f(0), f(3)\}.$$

$$\text{又 } f(3) - f(0) = \frac{15}{2}k - 9,$$

$$\therefore \text{ 当 } k \geq \frac{6}{5} \text{ 时, } f(3) \geq f(0);$$

$$\text{当 } k < \frac{6}{5} \text{ 时, } f(3) < f(0). \text{ 又 } \frac{6}{5} < \frac{13}{9},$$

$$\therefore f(x)_{\min} = \begin{cases} -\frac{11}{6}, & \frac{6}{5} \leq k < \frac{13}{9}, \\ \frac{15k}{2} - \frac{65}{6}, & 1 < k < \frac{6}{5}. \end{cases}$$

**18. (1) 【解】**  $f'(x) = e^x - a$ ,

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增;

当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = e^x - a = 0$ , 解得  $x = \ln a$ , 所以当  $x \in (-\infty, \ln a)$  时,  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  单调递减,



当  $x \in (\ln a, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.

综上, 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增; 当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  上单调递减, 在  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增.

(2) 【证明】由 (1) 得若  $x_1 < x_2$ , 且  $f(x_1) = f(x_2)$ , 则  $x_1 \in (-\infty, \ln a)$ ,  $x_2 \in (\ln a, +\infty)$ .

要证  $x_1 + x_2 < 2\ln a$ , 只需证  $x_1 < 2\ln a - x_2$ , 而  $x_1 < 2\ln a - x_2 < \ln a$ , 且函数  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  上单调递减, 故只需证  $f(x_1) > f(2\ln a - x_2)$ , 又  $f(x_1) = f(x_2)$ , 所以只需证  $f(x_2) > f(2\ln a - x_2)$ ,

即证  $f(x_2) - f(2\ln a - x_2) > 0$ .

令  $h(x) = f(x) - f(2\ln a - x)$ ,

→ 破黑板: 极值点偏移, 构造差函数

即  $h(x) = e^x - ax - 1 - [e^{2\ln a - x} - a(2\ln a - x) - 1] = e^x - a^2 e^{-x} - 2ax + 2a\ln a$ ,

则  $h'(x) = e^x + a^2 e^{-x} - 2a$ ,

由基本不等式可得  $h'(x) = e^x + a^2 e^{-x} - 2a \geq 2\sqrt{e^x \cdot a^2 e^{-x}} - 2a = 0$  (当且仅当  $e^x = a^2 e^{-x}$ , 即  $x = \ln a$  时, 等号成立).

所以函数  $h(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增.

由  $x_2 > \ln a$ , 可得  $h(x_2) > h(\ln a) = 0$ , 即  $f(x_2) - f(2\ln a - x_2) > 0$ ,

所以  $f(x_1) > f(2\ln a - x_2)$ ,

则  $x_1 + x_2 < 2\ln a$ . 得证.

(3) 【解】 $g(x) = e^x - ax + \sin x - 1$ , 则  $g'(x) = e^x + \cos x - a$ , 令  $m(x) = e^x + \cos x - a$ , 则  $m'(x) = e^x - \sin x$ , 当  $x \geq 0$  时,  $m'(x) \geq 0$ , 且等号不恒成立, 所以  $g'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 且  $g'(0) = 2 - a$ .

① 当  $a \leq 2$  时, 若  $x \geq 0$ , 则  $g'(x) \geq g'(0) = 2 - a \geq 0$ , 且等号不恒成立, 所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,  $g(x) \geq g(0) = 0$ , 符合题意, 故  $a \leq 2$ .

② 当  $a > 2$  时,  $g'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 且  $g'(0) = 2 - a < 0$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $g'(x) \rightarrow +\infty$ , 所以  $\exists x_0 \in (0, +\infty)$ , 使得  $g'(x_0) = 0$ , 所以当  $x \in (0, x_0)$  时,  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$

在  $(0, x_0)$  上单调递减,

当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $g(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增,

而  $g(x)_{\min} = g(x_0) < g(0) = 0$ , 所以不符合题意.

综上, 实数  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 2]$ .

多种解法 (3)  $g(x) = f(x) + \sin x =$

$e^x - ax + \sin x - 1$ ,

当  $x = 0$  时,  $g(0) = 0 \geq 0$  恒成立.

当  $x > 0$  时, 由  $g(x) \geq 0$  得  $e^x - ax + \sin x - 1 \geq 0$ , 即  $a \leq \frac{e^x + \sin x - 1}{x} (x > 0)$ .

令  $\varphi(x) = \frac{e^x + \sin x - 1}{x}$ ,

则  $\varphi'(x) = \frac{(e^x + \cos x)x - (e^x + \sin x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x + x\cos x - e^x - \sin x + 1}{x^2}$ ,

令  $s(x) = xe^x + x\cos x - e^x - \sin x + 1 (x > 0)$ ,

则  $s'(x) = e^x + xe^x + \cos x - x\sin x - e^x - \cos x = xe^x - x\sin x = x(e^x - \sin x)$ .

因为  $x > 0$ ,  $e^x - \sin x > 0$ , 所以  $s'(x) > 0$ , 所以  $s(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $x \rightarrow 0^+$  时,  $s(x) \rightarrow 0^+$ , 所以  $s(x) > 0$ ,

即  $\varphi'(x) > 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 所以  $\varphi(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. 又

$\varphi(0) = \frac{0}{0}$ ,

由洛必达法则得  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x - 1}{x} =$

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + \cos x) = 2$ , 所以  $a \leq 2$ , 即实数  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 2]$ .

19. (1) 【解】由  $f(x) = \ln(x+1)$ ,

$R(x) = \frac{ax}{1+bx}$ ,

可知  $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ ,

$R'(x) = \frac{a}{(1+bx)^2}$ ,  $R''(x) = \frac{-2ab}{(1+bx)^3}$ ,

则由  $f'(0) = R'(0)$ ,  $f''(0) = R''(0)$ ,

可得  $\begin{cases} a=1, \\ -2ab=-1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a=1, \\ b=\frac{1}{2}. \end{cases}$

(2) 【解】由 (1) 知,  $R(x) = \frac{x}{1+\frac{1}{2}x} =$

$\frac{2x}{x+2}$ , 令  $g(x) = f(x) - R(x) = \ln(x+1) -$

$\frac{2x}{x+2} (x > 0)$ , 则  $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ ,

所以  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

又当  $x \rightarrow 0$  时,  $g(x) \rightarrow 0$ ,

所以当  $x > 0$  时,  $g(x) = f(x) - R(x) > 0$ , 所以  $f(x) > R(x)$ ,

又当  $x > 0$  时,  $R(x) > 0$ , 所以  $\frac{f(x)}{R(x)} > 1$ ,

又  $f(x) > kR(x)$  对  $x > 0$  恒成立, 所以  $k \leq 1$ , 即实数  $k$  的取值范围为  $(-\infty, 1]$ .

(3) 【证明】当  $x > 0$  时, 由 (2) 可得

$\ln(x+1) > \frac{2x}{x+2} > \frac{x}{x+1}$ ,

→ 总悟: 运用 (2) 中结论对不等式进行放缩, 以便和要证的不等式建立关系

所以  $\ln\left(\frac{1}{x}+1\right) > \frac{1}{x+1}$ ,

令  $x = n, n+1, n+2, \dots, 2n-1$ ,

可得  $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) > \frac{1}{n+1}$ ,  $\ln\left(\frac{1}{n+1}+1\right) >$

$\frac{1}{n+2}$ ,  $\dots$ ,  $\ln\left(\frac{1}{2n-1}+1\right) > \frac{1}{2n}$ ,

这  $n$  个不等式左、右两边分别相加可得

$\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) + \ln\left(\frac{1}{n+1}+1\right) + \dots +$

$\ln\left(\frac{1}{2n-1}+1\right) > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ ,

所以  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} <$

$\ln\left(\frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+2}{n+1} \cdot \dots \cdot \frac{2n}{2n-1}\right) = \ln 2$ , 得证.

## 第五章高考强化

### 刷真题

1. A 【解析】因为  $f(x) = \frac{e^x + 2\sin x}{1+x^2}$ , 所以

$f'(x) = \frac{(e^x + 2\cos x)(1+x^2) - 2x(e^x + 2\sin x)}{(1+x^2)^2}$ ,

所以  $f'(0) = 3$ , 所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(0, 1)$  处的切线的方程为  $y = 3x + 1$ , 当  $x = 0$  时,  $y = 1$ ; 当  $y = 0$  时,  $x = -\frac{1}{3}$ . 则

所求三角形的面积  $S = \frac{1}{2} \times 1 \times$

$\left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{6}$ . 故选 A.

2. D 【解析】设切点为  $(x_0, y_0)$ , 因为

$y' = e^x$ , 所以曲线  $y = e^x$  在点  $(x_0, y_0)$  处的切线方程为  $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$ .

又因为点  $(a, b)$  在此切线上, 所以  $b - e^{x_0} = e^{x_0}(a - x_0)$ , 整理得  $b = (a - x_0 + 1)e^{x_0}$ .

令  $f(x) = (a - x + 1)e^x$ , 所以  $f'(x) = (a -$

→ 破黑板: 构造函数分析  $b$  的取值范围

$x)e^x$ , 则当  $x < a$  时, 函数  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  在  $(-\infty, a)$  上单调递增;

当  $x > a$  时, 函数  $f'(x) < 0$ ,  $f(x)$  在  $(a, +\infty)$  上单调递减,

所以函数  $f(x)$  在  $x = a$  处取得最大值  $f(a) = e^a$ , 且当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ ,

当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x) \rightarrow 0$ .

因为过点  $(a, b)$  的切线有两条, 即方程  $b = (a - x_0 + 1)e^{x_0}$  有两个不相等的实数根, 所以  $0 < b < e^a$ , 故选 D.

3. 4 【解析】由  $y = e^x + x + a$ , 得  $y' = e^x + 1$ . 设切点为  $P(x_0, y_0)$ , 由直线  $y = 2x + 5$  是曲线  $y = e^x + x + a$  的一条切线, 得

$\begin{cases} e^{x_0} + 1 = 2, \\ 2x_0 + 5 = e^{x_0} + x_0 + a, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} x_0 = 0, \\ a = 4. \end{cases}$

多种解法 设切点为  $P(x_0, y_0)$ , 则  $y'|_{x=x_0} = e^{x_0} + 1 = 2$ , 所以  $x_0 = 0$ , 因此  $y_0 = 2x_0 + 5 = 5$ . 因为点  $P(0, 5)$  在曲线  $y = e^x + x + a$  上, 所以  $a = 4$ .

**归纳总结** 已知曲线在某点处的切线

方程求切点坐标或参数的一般步骤:

- ① 设出切点坐标;
- ② 利用导数或斜率公式求出切线斜率;
- ③ 利用切线斜率、点在切线上、点在曲线上列出方程(组);
- ④ 求出切点坐标或参数.

**4.  $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$  【解析】**

因为  $y = (x+a)e^x$ , 所以  $y' = (x+a+1)e^x$ .

设切点为  $(x_0, (x_0+a) \cdot e^{x_0})$ , 则切线方程为  $y - (x_0+a) \cdot e^{x_0} = (x_0+a+1)e^{x_0}(x-x_0)$ ,

将  $(0,0)$  代入, 整理得  $x_0^2+ax_0-a=0$ , 由题意得  $\Delta = a^2+4a > 0$ , 解得  $a < -4$  或

**【微黑板】** 有两条切线对应方程有两个解, 对应判别式大于 0

$a > 0$ , 所以  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ .

**5.  $\ln 2$  【解析】**

令  $f(x) = e^x + x$ , 则  $f'(x) = e^x + 1$ , 所以曲线  $y = e^x + x$  在点  $(0,1)$  处的切线斜率为  $f'(0) = 2$ , 所以切线方程为  $y = 2x+1$ . 令  $g(x) = \ln(x+1) + a$ , 则  $g'(x) = \frac{1}{x+1}$ . 因为直线  $y = 2x+1$  也是曲线  $y = g(x)$  的切线, 所以

令  $\frac{1}{x+1} = 2$ , 解得  $x = -\frac{1}{2}$ , 则曲线  $y = g(x)$  与直线  $y = 2x+1$  的切点坐标为  $(-\frac{1}{2}, 0)$ , 所以  $0 = a - \ln 2$ , 解得  $a = \ln 2$ .

**6. (1) 【证明】**

已知  $\frac{a_{n+1}}{n} = \frac{a_n}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$ , 等式两边同乘  $n(n+1)$ , 得  $(n+1) \cdot a_{n+1} = na_n + 1$ ,

即  $(n+1)a_{n+1} - na_n = 1$ , 又因为  $a_1 = 3$ , 所以数列  $\{na_n\}$  是首项为 3, 公差为 1 的等差数列.

(2) 【解】由 (1) 知,  $na_n = 3 + (n-1) \times 1 = n+2$ .

因为  $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_mx^m$ , 所以  $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + ma_mx^{m-1}$ ,

则  $f'(x) = 3 + 4x + 5x^2 + \dots + (m+2) \cdot x^{m-1}$ , ①

所以  $xf'(x) = 3x + 4x^2 + 5x^3 + \dots + (m+2) \cdot x^m$ , ②

①-②, 得  $(1-x)f'(x) = 3 + (x+x^2+\dots+x^{m-1}) - (m+2)x^m = 3 + \frac{x(1-x^{m-1})}{1-x} - (m+2)x^m$ .

当  $x = -2$  时,  $3f'(-2) = 3 + \frac{-2[1-(-2)^{m-1}]}{1-(-2)} - (m+2) \cdot (-2)^m$ ,

故  $f'(-2) = \frac{7}{9} - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m$ .

**【微黑板】** 作差与 0 比较大小

**【微黑板】** 作商与 1 比较大小

显然当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $\tan x > x$ , 所以

$\frac{c}{b} = \frac{\frac{4\sin \frac{1}{4}}{\cos \frac{1}{4}}}{\frac{\tan \frac{1}{4}}{1}} = \frac{4\sin \frac{1}{4}}{\cos \frac{1}{4}} > 1$ , 即  $b < c$ .

因此  $c > b > a$ . 故选 A.

**9.  $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$  【解析】**

求出  $f'(x) - yf'(x) \geq 0$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立  $\rightarrow$  进一步转化为  $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -\left(\frac{1+a}{a}\right)^x \rightarrow$  由指数函数的单调性求出  $-\left(1+\frac{1}{a}\right)^x$  的取值范围  $\rightarrow$  由对数函数的单调性建立关于  $a$  的不等式  $\rightarrow a$  的取值范围

【解析】由  $f(x) = a^x + (1+a)^x$ , 得  $f'(x) = a^x \ln a + (1+a)^x \cdot \ln(1+a)$ , 则由题意知不等式  $a^x \ln a + (1+a)^x \ln(1+a) \geq 0$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立.

因为  $a \in (0, 1)$ , 所以  $1+a \in (1, 2)$ , 则  $\ln(1+a) > 0$ , 所以不等式  $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -\left(\frac{1+a}{a}\right)^x$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立.

因为  $1 + \frac{1}{a} > 1$ , 所以当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x > 1, -\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x < -1$ , 所以  $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -1$ , 即  $\ln a \geq -\ln(1+a)$ ,  $\ln a \geq \ln \frac{1}{1+a}$ , 所以  $a \geq \frac{1}{1+a}$ , 即  $a^2 + a - 1 \geq 0$ , 解得  $a \leq \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$  (舍去) 或  $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

又  $a \in (0, 1)$ , 所以  $a$  的取值范围是  $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$ .

所以  $f'(-2) = a_1 + 2a_2 \cdot (-2) + 3a_3 \cdot (-2)^2 + \dots + ma_m \cdot (-2)^{m-1} = 3 + 4 \times (-2) + 5 \times (-2)^2 + \dots + (m+2) \cdot (-2)^{m-1}$ .

而  $(m+2) \cdot (-2)^{m-1} = \frac{3(m-1)+7}{9} \cdot (-2)^{m-1}$ .

$(-2)^{m-1} - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m$ , 所以

$f'(-2) = \frac{3 \times 0 + 7}{9} \times (-2)^0 - \frac{3 \times 1 + 7}{9} \times (-2)^1 + \frac{3 \times 1 + 7}{9} \times (-2)^1 - \frac{3 \times 2 + 7}{9} \times (-2)^2 + \dots + \frac{3(m-1)+7}{9} \cdot (-2)^{m-1} - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m = \frac{3 \times 0 + 7}{9} \times (-2)^0 - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m = \frac{7}{9} - \frac{3m+7}{9} \cdot (-2)^m$ .

**7. C 【解析】**

$f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$ , 由  $f(x)$  在区间  $(1, 2)$  单调递增可知, 当  $x \in (1, 2)$  时,  $f'(x) \geq 0$  恒成立.

当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$ , 不符合题意.

当  $a > 0$  时, 设  $h(x) = ae^x - \frac{1}{x}$ , 则

$h'(x) = ae^x + \frac{1}{x^2} > 0$ , 则  $h(x)$  在  $(1, 2)$  单调递增, 所以只需  $f'(1) = h(1) = ae^1 - 1 \geq 0$ , 解得  $a \geq e^{-1}$ , 故选 C.

**【微黑板】** 有两条切线对应方程有两个解, 对应判别式大于 0

**【微黑板】** 作差与 0 比较大小

**【微黑板】** 作商与 1 比较大小

显然当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $\tan x > x$ , 所以

$\frac{c}{b} = \frac{\frac{4\sin \frac{1}{4}}{\cos \frac{1}{4}}}{\frac{\tan \frac{1}{4}}{1}} = \frac{4\sin \frac{1}{4}}{\cos \frac{1}{4}} > 1$ , 即  $b < c$ .

因此  $c > b > a$ . 故选 A.

**9.  $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$  【解析】**

求出  $f'(x) - yf'(x) \geq 0$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立  $\rightarrow$  进一步转化为  $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -\left(\frac{1+a}{a}\right)^x \rightarrow$  由指数函数的单调性求出  $-\left(1+\frac{1}{a}\right)^x$  的取值范围  $\rightarrow$  由对数函数的单调性建立关于  $a$  的不等式  $\rightarrow a$  的取值范围

【解析】由  $f(x) = a^x + (1+a)^x$ , 得  $f'(x) = a^x \ln a + (1+a)^x \cdot \ln(1+a)$ , 则由题意知不等式  $a^x \ln a + (1+a)^x \ln(1+a) \geq 0$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立.

因为  $a \in (0, 1)$ , 所以  $1+a \in (1, 2)$ , 则  $\ln(1+a) > 0$ , 所以不等式  $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -\left(\frac{1+a}{a}\right)^x$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立.

因为  $1 + \frac{1}{a} > 1$ , 所以当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x > 1, -\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x < -1$ , 所以  $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -1$ , 即  $\ln a \geq -\ln(1+a)$ ,  $\ln a \geq \ln \frac{1}{1+a}$ , 所以  $a \geq \frac{1}{1+a}$ , 即  $a^2 + a - 1 \geq 0$ , 解得  $a \leq \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$  (舍去) 或  $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

又  $a \in (0, 1)$ , 所以  $a$  的取值范围是  $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$ .

**10. ABD 【解析】**

因为  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 所以  $f(0) = 0$ , 故 A 正确; 当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ , 因此  $f(-x) = [(-x)^2 - 3]e^{-x} + 2 = -f(x)$ , 因此  $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$ , 故 B 正确; 当  $x > 0$  时,  $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x + 2$ ,  $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = (x+3)(x-1) \cdot e^x$ , 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > 1$ , 令  $f'(x) < 0$ , 得

$0 < x < 1$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(x) \geq f(1) = -1$ , 故 C 错误; 当  $x < 0$  时,  $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$ ,  $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^{-x} = (x+3)(x-1) \cdot e^{-x}$ , 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x < -3$  或  $0 < x < 1$ , 令  $f'(x) < 0$ , 得  $-3 < x < 0$  或  $x > 1$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -3)$  上单调递增, 在  $(-3, 0)$  上单调递减, 在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上不恒为奇函数, 故 D 正确. 故选 ABD.

**【微黑板】** 有两条切线对应方程有两个解, 对应判别式大于 0

**【微黑板】** 作差与 0 比较大小

**【微黑板】** 作商与 1 比较大小

显然当  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  时,  $\tan x > x$ , 所以

$\frac{c}{b} = \frac{\frac{4\sin \frac{1}{4}}{\cos \frac{1}{4}}}{\frac{\tan \frac{1}{4}}{1}} = \frac{4\sin \frac{1}{4}}{\cos \frac{1}{4}} > 1$ , 即  $b < c$ .

因此  $c > b > a$ . 故选 A.

**9.  $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$  【解析】**

求出  $f'(x) - yf'(x) \geq 0$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立  $\rightarrow$  进一步转化为  $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -\left(\frac{1+a}{a}\right)^x \rightarrow$  由指数函数的单调性求出  $-\left(1+\frac{1}{a}\right)^x$  的取值范围  $\rightarrow$  由对数函数的单调性建立关于  $a$  的不等式  $\rightarrow a$  的取值范围

【解析】由  $f(x) = a^x + (1+a)^x$ , 得  $f'(x) = a^x \ln a + (1+a)^x \cdot \ln(1+a)$ , 则由题意知不等式  $a^x \ln a + (1+a)^x \ln(1+a) \geq 0$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立.

因为  $a \in (0, 1)$ , 所以  $1+a \in (1, 2)$ , 则  $\ln(1+a) > 0$ , 所以不等式  $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -\left(\frac{1+a}{a}\right)^x$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立.

因为  $1 + \frac{1}{a} > 1$ , 所以当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x > 1, -\left(1 + \frac{1}{a}\right)^x < -1$ , 所以  $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -1$ , 即  $\ln a \geq -\ln(1+a)$ ,  $\ln a \geq \ln \frac{1}{1+a}$ , 所以  $a \geq \frac{1}{1+a}$ , 即  $a^2 + a - 1 \geq 0$ , 解得  $a \leq \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$  (舍去) 或  $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .

又  $a \in (0, 1)$ , 所以  $a$  的取值范围是  $[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1)$ .

**10. ABD 【解析】**

因为  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数, 所以  $f(0) = 0$ , 故 A 正确; 当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ , 因此  $f(-x) = [(-x)^2 - 3]e^{-x} + 2 = -f(x)$ , 因此  $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$ , 故 B 正确; 当  $x > 0$  时,  $f(x) = (x^2 - 3) \cdot e^x + 2$ ,  $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x = (x+3)(x-1) \cdot e^x$ , 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > 1$ , 令  $f'(x) < 0$ , 得

$0 < x < 1$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(x) \geq f(1) = -1$ , 故 C 错误; 当  $x < 0$  时,  $f(x) = -(x^2 - 3)e^{-x} - 2$ ,  $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^{-x} = (x+3)(x-1) \cdot e^{-x}$ , 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x < -3$  或  $0 < x < 1$ , 令  $f'(x) < 0$ , 得  $-3 < x < 0$  或  $x > 1$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, -3)$  上单调递增, 在  $(-3, 0)$  上单调递减, 在  $(0, 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上不恒为奇函数, 故 D 正确. 故选 ABD.



$0 < x < 1$ , 因此  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极小值, 因此奇函数  $f(x)$  在  $x=-1$  处取得极大值, 故 **D 正确**; 当  $x > 0$  时,  $f(x) \geq 2$ ,

【微黑板】奇函数在关于原点对称的区间上单调性相同

即  $(x^2-3)e^x \geq 0$ , 解得  $x \geq \sqrt{3}$ , 当  $x < 0$  时,  $f(x)$  在  $x=-1$  处取得极大值,  $f(-1) = -(1-3)e^{-2} = 2e^{-2} > 2$ , 因此在  $(-\infty, 0)$  上也存在满足  $f(x) \geq 2$  的区间, 故 **C 错误**. 故选 **ABD**.

**11. ACD** 【解析】由题可得  $f'(x) = 2(x-1)(x-4) + (x-1)^2 = 3x^2 - 12x + 9$ , 令  $f'(x) > 0$ , 即  $3x^2 - 12x + 9 > 0$ , 得  $x < 1$  或  $x > 3$ ; 令  $f'(x) < 0$ , 得  $1 < x < 3$ , 所以  $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$ ,  $(3, +\infty)$  上单调递增, 在  $(1, 3)$  上单调递减, 所以  $x=3$  是  $f(x)$  的极大值点, **A 正确**. 当  $0 < x < 1$  时,  $0 < x^2 < x < 1$ , 所以  $f(x) > f(x^2)$ , **B 错误**. 当  $1 < x < 2$  时,  $1 < 2x-1 < 3$ , 因为  $f(x)$  在  $(1, 3)$  上单调递减, 所以  $-4 < f(2x-1) < 0$ , **C 正确**.  $f(2-x) = (2-x-1)^2(2-x-4) = (x-1)^2(-x-2)$ , 所以  $f(2-x) - f(x) = (x-1)^2(-x-2-x) = (x-1)^2(-2x-2) > 0$ , 得  $x < 1$ , 所以当  $-1 < x < 0$  时,  $f(2-x) > f(x)$  成立, **D 正确**. 故选 **ACD**.

**12. AD** 【解析】 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$ , 则  $f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x-a)$ . **A 选项**, 当  $a > 1$  时,  $f'(x)$  的零点为  $x_1 = 0, x_2 = a$ , 则  $x_2 > x_1$ . 当  $x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $0 < x < a$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x > a$  时,  $f'(x) > 0$ , 则  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 在  $(0, a)$  上单调递减, 在  $(a, +\infty)$  上单调递增, 则  $x=0$  是  $f(x)$  的极大值点,  $x=a$  是  $f(x)$  的极小值点, 又  $f(0) = 1 > 0, f(a) = 2a^3 - 3a^3 + 1 = 1 - a^3 < 0$ , 且  $f(-a) < 0, f(2a) > 0$ , 所以  $f(x)$  有三个零点, **A 正确**; **B 选项**, 当  $a < 0$  时, 易知  $f(x)$  在  $(-\infty, a)$  上单调递增, 在  $(a, 0)$  上单调递减, 在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $x=0$  是  $f(x)$  的极小值点, **B 错误**; **C 选项**, 若直线  $x=b$  是曲线  $y=f(x)$  的对称轴, 则  $f(x+b) = f(b-x)$ , 即  $2(x+b)^3 - 3a(x+b)^2 + 1 = 2(b-x)^3 - 3a(b-x)^2 + 1$ , 即  $x^3 + 3b^2x = 3abx$ , 不存在  $a, b$  使等式恒成立, 故不存在  $a, b$ , 使得直线  $x=b$  为曲线  $y=f(x)$  的对称轴, **C 错误**; **D 选项**, 若  $(1, f(1))$  为曲线  $y=f(x)$  的对称中心, 则  $f(1+x) + f(1-x) = 2f(1)$ , 即  $2(1+x)^3 - 3a(1+x)^2 + 1 + 2(1-x)^3 - 3a(1-x)^2 + 1 = 6 - 6a$ , 整理得  $(12-6a)x^2 - 6a + 6 = 6 - 6a$ , 解得  $a=2$ , 所以存在  $a$ , 使得点  $(1, f(1))$  为曲线  $y=f(x)$  的对称中心, **D 正确**. 故选 **AD**.

**13. BCD** 【解析】依题意,  $x > 0, f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}$ . 设  $g(x) = ax^2 - bx - 2c$ , 由题意  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有两个零点  $x_1, x_2$ ,

所以  $\Delta = b^2 + 8ac > 0, x_1 + x_2 = \frac{b}{a} > 0$ ,

$x_1x_2 = -\frac{2c}{a} > 0$ ,

则  $-\frac{2bc}{a^2} > 0$ , 所以  $ab > 0, ac < 0, bc < 0$ , 故

**A 错误, B 正确, C 正确, D 正确**.

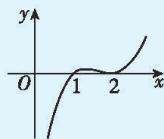
故选 **BCD**.

**14. -4** 【解析】因为  $f(x) = (x-1)(x-2)(x-a) = x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a$ , 所以  $f'(x) = 3x^2 - 2(a+3)x + 3a+2$ .

因为  $x=2$  是  $f(x)$  的极值点, 所以  $f'(2) = 12 - 4(a+3) + 3a+2 = 0$ , 解得  $a=2$ , 经检验, 符合题意, 所以  $f(x) = (x-1)(x-2)^2$ , 所以  $f(0) = -4$ .

**多种解法**  $f'(x) = (x-2)(x-a) + (x-1)(x-a) + (x-1)(x-2)$ , 因为  $x=2$  是  $f(x)$  的极值点, 所以  $f'(2) = 2-a=0$ , 得  $a=2$ , 经检验, 符合题意, 所以  $f(x) = (x-1)(x-2)^2$ , 所以  $f(0) = -4$ .

**快解** (数形结合法) 因为  $x=2$  是  $f(x)$  的极值点, 所以由数轴标根法可得  $a=2$ , 作出  $f(x)$  的图象如图所示, 所以  $a=2$  符合题意, 则  $f(x) = (x-1)(x-2)^2$ , 所以  $f(0) = -4$ .



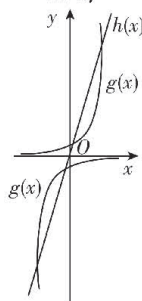
**15.  $(\frac{1}{e}, 1)$**  【解析】 $f'(x) = 2a^x \ln a - 2ex$ , 因为  $x=x_1, x=x_2$  分别是函数  $f(x)$  的极小值点和极大值点, 所以方程  $a^x \ln a - ex = 0$  的两根分别为  $x_1, x_2$ . 令  $g(x) = a^x \ln a, h(x) = ex$ , 结合函数  $g(x), h(x)$  的图象 (如图①), 可知  $0 < a < 1$ .

问题转化为  $\frac{a^x}{x} = \frac{e}{\ln a}$  有两个不等的负根, 令  $\varphi(x) = \frac{a^x}{x}$ , 则  $\varphi(x) = \frac{a^x}{x}$  的图象与直线  $y = \frac{e}{\ln a}$  有两个交点,

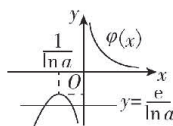
$\varphi'(x) = \frac{a^x(x \ln a - 1)}{x^2}$ ,

令  $\varphi'(x) > 0$ , 则  $x < \frac{1}{\ln a}$ , 则  $\varphi(x)$  在

$(-\infty, \frac{1}{\ln a})$  上单调递增;



图①



图②

令  $\varphi'(x) < 0$ , 则  $x > \frac{1}{\ln a}$  且  $x \neq 0$ , 则

$\varphi(x)$  在  $(\frac{1}{\ln a}, 0)$ ,  $(0, +\infty)$  上分别单调递减.

又当  $x > 0$  时,  $\varphi(x) > 0$ , 当  $x < 0$  时,  $\varphi(x) < 0$ , 所以画出  $\varphi(x)$  的大致图象

如图②, 结合图象可知,  $\frac{e}{\ln a} < \frac{a^{\frac{1}{\ln a}}}{\frac{1}{\ln a}}$ , 即

$e > \ln^2 a \cdot a^{\frac{1}{\ln a}}$ .

令  $t = \ln a < 0$ , 则  $e > t^2 e$ , 解得  $-1 < t < 0$ ,

即  $-1 < \ln a < 0$ , 得  $\frac{1}{e} < a < 1$ .

故  $a$  的取值范围是  $(\frac{1}{e}, 1)$ .

**16.  $(-2, 1)$**  【解析】令  $x^3 - 3x = -(x-1)^2 + a$ , 则  $a = x^3 - 3x + (x-1)^2$ , 设  $\varphi(x) = x^3 - 3x + (x-1)^2$ , 求导得  $\varphi'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x+5)(x-1)$ ,

令  $\varphi'(x) = 0$ , 得  $x = -\frac{5}{3}$  或  $x = 1$ , 因为

$x > 0$ , 所以  $\varphi(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 在  $(0, 1)$  上单调递减. 因为曲线  $y = x^3 - 3x$  与  $y = -(x-1)^2 + a$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不同的交点, 所以直线  $y = a$  与函数  $\varphi(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的图象有两个交点. 因为  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi(1) = -2$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $\varphi(x) \rightarrow +\infty$ , 所以  $a$  的取值范围为  $(-2, 1)$ .

**17. (1) 【证明】** 由  $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$ , 得  $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - 3kx^2 = \frac{x^2}{x+1} - 3kx^2 = x^2(\frac{1}{x+1} - 3k)$ .

当  $x > 0$  时, 令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x_0 = \frac{1}{3k} - 1$ .

1. 因为  $0 < k < \frac{1}{3}$ , 所以  $0 < 3k < 1$ , 则

$x_0 = \frac{1}{3k} - 1 > 0$ .

当  $0 < x < x_0$  时,  $f'(x) > 0, f(x)$  单调递增;

当  $x > x_0$  时,  $f'(x) < 0, f(x)$  单调递减,

所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有唯一的极大值点  $x_0 = \frac{1}{3k} - 1$ .

因为  $x=0$  时,  $f(x)=0$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , 且  $f(x_0) > f(0) = 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  上有唯一的零点, 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上有唯一的零点.

(2) (i) 【证明】 $g(t) = f(x_1+t) - f(x_1-t)$

且由 (1) 知  $x_1 = x_0 = \frac{1}{3k} - 1$ , 则

$3k = \frac{1}{x_1+1}$ .

则  $g'(t) = f'(x_1+t) + f'(x_1-t)$

$= (x_1+t)^2 \left( \frac{1}{x_1+t+1} - 3k \right) + (x_1-t)^2 \left( \frac{1}{x_1-t+1} - 3k \right)$

$= (x_1+t)^2 \left( \frac{1}{x_1+t+1} - 3k \right) + (x_1-t)^2 \left( \frac{1}{x_1-t+1} - 3k \right)$



$$\begin{aligned}
 &= (x_1+t)^2 \left( \frac{1}{x_1+t+1} - \frac{1}{x_1+1} \right) + (x_1-t)^2 \left( \frac{1}{x_1-t+1} - \frac{1}{x_1+1} \right) \\
 &= (x_1+t)^2 \cdot \frac{-t}{(x_1+t+1)(x_1+1)} + (x_1-t)^2 \cdot \frac{t}{(x_1-t+1)(x_1+1)} \\
 &= \frac{-t[(x_1+t)^2(x_1-t+1) - (x_1-t)^2(x_1+t+1)]}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)} \\
 &= \frac{-t[(x_1+t)(x_1^2-t^2) + (x_1+t)^2 - (x_1-t)(x_1^2-t^2) - (x_1-t)^2]}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)} \\
 &= \frac{-t[2t(x_1^2-t^2) + 4x_1t]}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)} \\
 &= \frac{-2t^2(x_1^2-t^2+2x_1)}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)},
 \end{aligned}$$

因为  $t \in (0, x_1)$  时,  $x_1^2 - t^2 + 2x_1 > 0$ ,  $(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1) > 0$ ,  $-2t^2 < 0$ , 所以  $g'(t) < 0$ ,

则  $g(t)$  在区间  $(0, x_1)$  上单调递减.

(ii) 【解】  $2x_1 > x_2$ , 证明如下:

由(i)知  $g(t)$  在  $(0, x_1)$  上单调递减, 则  $g(x_1) < g(0) = f(x_1+0) - f(x_1-0) = 0$ , 所以  $g(x_1) = f(x_1+x_1) - f(x_1-x_1) = f(2x_1) - f(0) = f(2x_1) - 0 = f(2x_1) < 0$ . 因为  $x_2$  是  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的零点, 所以  $f(x_2) = 0$ , 即  $f(2x_1) < f(x_2)$ . 由(1)知  $x_2 \in (x_1, +\infty)$ , 且  $f(x)$  在  $(x_1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $2x_1 > x_2$ .

18. 【解】(1)  $f'(x) = -5\sin x + 5\sin 5x = 5(\sin 5x - \sin x) = 5 \times 2\cos 3x \sin 2x = 10\sin 2x \cos 3x$ .

令  $f'(x) = 0$ , 即  $\sin 2x = 0$  或  $\cos 3x = 0$ , 则  $x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$  或  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$ ,

又  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ,  $\therefore x = 0$  或  $x = \frac{\pi}{6}$ .

☞ 悟: 函数在闭区间上的最值在区间端点或极值点处取得

① 当  $x = 0$  时,  $f(0) = 5\cos 0 - \cos 0 = 4$ ;

② 当  $x = \frac{\pi}{4}$  时,  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{4} = 3\sqrt{2}$ ;

③ 当  $x = \frac{\pi}{6}$  时,  $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} = 6\cos \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$ ,

又  $4 < 3\sqrt{2} < 3\sqrt{3}$ ,  $\therefore$  当  $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$  时,  $f(x)$  的最大值为  $3\sqrt{3}$ .

(2) 【证明】  $\forall a \in \mathbb{R}, \exists k \in \mathbb{Z}$ , 使得  $a = 2k\pi + a'$ , 其中  $a' \in [-\pi, \pi)$ .

当  $a' = 0$  时,  $[a' - \theta, a' + \theta] = [-\theta, \theta]$ , 取  $y = 2k\pi + \theta$ , 则  $y \in [a - \theta, a + \theta]$ , 且  $\cos y = \cos \theta$ .

当  $a' \in (0, \pi)$  时,  $a' - \theta \in (-\theta, \pi - \theta)$ ,  $a' + \theta \in (\theta, \pi + \theta)$ ,

设  $y_1 = \min\{\pi, a' + \theta\}$ , 则  $y_1 \in (\theta, \pi]$ ,  $\therefore g(x) = \cos x$  在  $[\theta, y_1]$  上单调递减,  $\therefore \cos y_1 < \cos \theta$ ,

取  $y = 2k\pi + y_1$ , 则  $y \in [a - \theta, a + \theta]$ , 且  $\cos y = \cos y_1 < \cos \theta$ .

当  $a' \in [-\pi, 0)$  时,  $a' - \theta \in [-\pi - \theta, -\theta)$ ,  $a' + \theta \in [-\pi + \theta, \theta)$ ,

记  $y_2 = \max\{-\pi, a' + \theta\}$ , 则  $y_2 \in [-\pi, -\theta)$ ,

$\therefore g(x) = \cos x$  在  $[y_2, -\theta]$  上单调递增,  $\therefore \cos y_2 < \cos(-\theta) = \cos \theta$ ,

取  $y = 2k\pi + y_2$ , 则  $y \in [a - \theta, a + \theta]$ , 且  $\cos y = \cos y_2 < \cos \theta$ .

综上, 存在  $y \in [a - \theta, a + \theta]$  使得  $\cos y \leq \cos \theta$ .

**快解** 假设对任意  $y \in [a - \theta, a + \theta]$ , 有  $\cos y > \cos \theta$ .

由  $\cos y > \cos \theta$ , 可得  $y \in (2k\pi - \theta, 2k\pi + \theta), k \in \mathbb{Z}$ , 则  $[a - \theta, a + \theta] \subseteq (2k\pi - \theta, 2k\pi + \theta), k \in \mathbb{Z}$ ,

$\therefore \begin{cases} a - \theta > 2k\pi - \theta, \\ a + \theta < 2k\pi + \theta, \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ ,

$\therefore \begin{cases} a > 2k\pi, \\ a < 2k\pi, \end{cases} k \in \mathbb{Z}$ , 无解.

$\therefore$  假设不成立.

故存在  $y \in [a - \theta, a + \theta]$  使得  $\cos y \leq \cos \theta$ .

(3) 【解】 当  $\varphi = 0$  时,  $y = 5\cos x - \cos 5x$ , 记  $f(x) = 5\cos x - \cos 5x$ ,

$\therefore y = f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的偶函数,  $\therefore$  只需考虑  $x \in [0, \pi]$  时即可.

由(1)知  $f'(x) = 10\sin 2x \cos 3x = 20(4\cos^2 x - 3) \cdot \cos^2 x \cdot \sin x$ ,

当  $x \in [0, \frac{\pi}{6})$  时,  $x \in (\frac{\pi}{6}, \pi]$  时,  $f'(x) \geq 0$  且不恒为 0,  $f(x)$  单调递增, 当  $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$  时,  $f'(x) \leq 0$  且不恒为 0,  $f(x)$  单调递减,  $\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$ ,  $f(\pi) = -4$ ,

$\therefore f(x)_{\min} = -4$ ,  $\therefore b \geq 3\sqrt{3}$ .

当  $\varphi \neq 0$  时, 由(2)知  $\exists y \in [\varphi - \frac{5\pi}{6}, \varphi + \frac{5\pi}{6}]$ , 使得  $\cos y \leq \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

记  $y = 5x_0 + \varphi$ , 由  $y \in [\varphi - \frac{5\pi}{6}, \varphi + \frac{5\pi}{6}]$  知  $x_0 \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ ,

$\therefore 5\cos x_0 - \cos(5x_0 + \varphi) = 5\cos x_0 - \cos y \geq 5\cos x_0 - \cos \frac{5\pi}{6} = 5\cos x_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\therefore b_{\min} = 3\sqrt{3}$ .

19. (1) 【解】 因为  $f(x) = a(e^x + a) - x$ , 所以  $f'(x) = ae^x - 1$ , 当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) < 0$  恒成立,

所以  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递减;

当  $a > 0$  时, 令  $f'(x) = 0$ , 可得  $x = -\ln a$ , 当  $x$  变化时,  $f(x)$  与  $f'(x)$  变化如下表:

$x$	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

当  $x \in (-\infty, -\ln a)$  时,  $f'(x) < 0$ ,

$f(x)$  单调递减,

当  $x \in (-\ln a, +\infty)$  时,  $f'(x) > 0$ ,  $f(x)$  单调递增.

综上, 当  $a \leq 0$  时,  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递减;

当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, -\ln a)$  上单调递减, 在  $(-\ln a, +\infty)$  上单调递增.

(2) 【证明】 由(1)可知当  $a > 0$  时,  $f(x)$  在  $(-\infty, -\ln a)$  上单调递减, 在  $(-\ln a, +\infty)$  上单调递增,

所以  $f(x)_{\min} = f(-\ln a) = a\left(\frac{1}{a} + a\right) +$

$\ln a = a^2 + \ln a + 1$ , 构造函数  $g(a) = a^2 + \ln a + 1 - 2\ln a -$

$\frac{3}{2} = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$ ,

则  $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$ ,

令  $g'(a) = 0$ , 解得  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (负值舍去).

当  $a \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$  时,  $g'(a) < 0$ ,  $g(a)$  单调递减,

当  $a \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$  时,  $g'(a) > 0$ ,  $g(a)$  单调递增,

所以  $g(a)_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2^{-\frac{1}{2}} -$

$\frac{1}{2} = \ln \sqrt{2} > 0$ ,

所以当  $a > 0$  时,  $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ .

20. 【解】 (1) 当  $a = 1$  时,  $f(x) = e^x - x - 1$ , 则  $f'(x) = e^x - 1$ , 所以  $f'(1) = e - 1$ .

又  $f(1) = e - 2$ , 所以曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y - (e - 2) = (e - 1)(x - 1)$ , 即  $y = (e - 1)x - 1$ .

(2)  $f(x) = e^x - ax - a^3$ , 则  $f'(x) = e^x - a$ , 当  $a \leq 0$  时,  $f'(x) = e^x - a > 0$ , 则  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上单调递增, 无极值点, 所以  $a > 0$ .

令  $f'(x) < 0$ , 得  $x < \ln a$ , 令  $f'(x) > 0$ , 得  $x > \ln a$ ,

所以  $f(x)$  在  $(-\infty, \ln a)$  上单调递减, 在  $(\ln a, +\infty)$  上单调递增,

所以  $x = \ln a$  是  $f(x)$  的极小值点, 极小值为  $f(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a - a^3 = a - a \ln a - a^3$ , 则问题转化为解不等式  $a - a \ln a - a^3 < 0$ .

又  $a > 0$ , 所以不等式可化为  $a^2 + \ln a - 1 > 0$ .

令  $g(a) = a^2 + \ln a - 1$ , 则  $g'(a) = 2a + \frac{1}{a} > 0$  恒成立,

所以  $g(a)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. 又  $g(1) = 0$ , 所以不等式  $a - a \ln a - a^3 < 0$  的解集为  $(1, +\infty)$ , 所以  $a$  的取值范围是  $(1, +\infty)$ .

21. (1) 【解】 当  $b = 0$  时,  $f(x) = \ln \frac{x}{2-x} +$

$ax, x \in (0, 2)$ ,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{2-x}{x} \cdot \left(\frac{x}{2-x}\right)' + a = \frac{2-x}{x} \cdot \frac{2-x-(-1)x}{(2-x)^2} + a = \frac{2}{x(2-x)} + a.$$

$\therefore f'(x) \geq 0, \therefore a \geq \frac{2}{x(x-2)}$  在  $(0, 2)$  上恒成立.

当  $x \in (0, 2)$  时,  $x(x-2) \in [-1, 0)$ ,

$$\therefore \frac{2}{x(x-2)} \in (-\infty, -2],$$

$\therefore a \in [-2, +\infty)$ , 即  $a$  的最小值为  $-2$ .

(2)【证明】 $\because f(x) = \ln \frac{x}{2-x} + ax + b(x-1)^3, x \in (0, 2)$ ,

$$\therefore f(x+1) = \ln \frac{1+x}{1-x} + ax + a + bx^3, x \in (-1, 1).$$

$$\text{令 } g(x) = f(x+1) - a = \ln \frac{1+x}{1-x} + ax + bx^3,$$

$$x \in (-1, 1), \text{ 则 } g(-x) = \ln \frac{1-x}{1+x} - ax -$$

$$bx^3 = -\ln \frac{1+x}{1-x} - ax - bx^3 = -g(x), \therefore g(x)$$

是定义域为  $(-1, 1)$  的奇函数, 其图象关于坐标原点  $O$  对称.

又  $\because f(x)$  的图象可由  $g(x)$  的图象向右平移 1 个单位长度, 再向上平移  $a$  个单位长度得到,  $\therefore$  曲线  $y=f(x)$  是中心对称图形.

(3)【解】 $\because f(x) > -2$  当且仅当  $1 < x < 2, \therefore f(1) = -2 \Rightarrow a = -2$ ,

$\therefore f(x) = \ln \frac{x}{2-x} - 2x + b(x-1)^3 > -2$  对任意  $x \in (1, 2)$  恒成立,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} - 2 + 3b(x-1)^2 = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)} + 3b(x-1)^2 = (x-1)^2 \cdot \left[ \frac{2}{x(2-x)} + 3b \right].$$

$$\text{令 } m(x) = \frac{2}{x(2-x)} + 3b, \therefore \text{必有 } m(1) = 2 + 3b \geq 0 \Rightarrow b \geq -\frac{2}{3}.$$

否则若  $b < -\frac{2}{3}$ , 则存在  $\delta (1 < \delta < 2)$  使得当  $x \in (1, \delta)$  时,  $f'(x) < 0, f(x)$  在  $(1, \delta)$  上单调递减,  $\therefore f(\delta) < f(1) = -2$ .

当  $b \geq -\frac{2}{3}$  时, 对任意  $x \in (1, 2)$ ,

$$f(x) \geq \ln \frac{x}{2-x} - 2x - \frac{2}{3}(x-1)^3,$$

$$\text{令 } h(x) = \ln \frac{x}{2-x} - 2x - \frac{2}{3}(x-1)^3, \text{ 则}$$

$$h'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)} - 2(x-1)^2 = 2(x-1)^2 \left[ \frac{1}{x(2-x)} - 1 \right] > 0, \text{ 对任意 } x \in (1,$$

$2)$  恒成立,  $\therefore h(x) > h(1) = -2$ , 符合条件.

综上可得  $b$  的取值范围是  $\left[-\frac{2}{3}, +\infty\right)$ .

22.【解】(1)  $f(x) = \left(\frac{1}{x} + a\right) \ln(x+1)$ ,

$$f'(x) = -\frac{\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{x} + a\right), \text{ 当}$$

$a = -1$  时,  $f(1) = 0, f'(1) = -\ln 2$ , 故曲线  $y=f(x)$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $y = -\ln 2(x-1)$ , 即  $x \ln 2 + y - \ln 2 = 0$ .

$$(2) \text{ 设 } g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = (x+a) \ln \frac{x+1}{x},$$

$x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ , 由题设知对于任意  $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ , 都有  $g(x) = g(2b-x)$ ,

【微黑板】:  $g(x)$  的图象关于直线  $x=b$  对称与  $g(x) = g(2b-x)$  互为充要条件

$$\text{又 } g(2b-x) = (2b-x+a) \ln \frac{2b-x+1}{2b-x} = (x-2b-a) \ln \frac{x-2b}{x-2b-1},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} -2b-a=a, \\ -2b=1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=-\frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$(3) f'(x) = -\frac{\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{x} + a\right) = \frac{-\ln(x+1) + \frac{ax^2+x}{x+1}}{x^2},$$

$$\text{设 } h(x) = -\ln(x+1) + \frac{ax^2+x}{x+1}, x \in (0, +\infty), \text{ 则 } h'(x) = \frac{x(ax+2a-1)}{(x+1)^2}.$$

①当  $a \geq \frac{1}{2}$  时,  $h'(x) > 0$ , 函数  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 所以  $h(x) > 0$ , 即  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 无极值点.

②当  $a \leq 0$  时,  $h'(x) < 0$ , 函数  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 所以  $h(x) < 0$ , 即  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 无极值点.

③当  $0 < a < \frac{1}{2}$  时, 易得  $h(x)$  在  $\left(0, \frac{1}{a} - 2\right)$  上单调递减,

在  $\left(\frac{1}{a} - 2, +\infty\right)$  上单调递增, 又当  $x \rightarrow 0$  时,  $h(x) \rightarrow 0$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) > 0$ ,

所以在  $\left(\frac{1}{a} - 2, +\infty\right)$  上存在  $x_0$  使得  $h(x_0) = 0$ ,

当  $x \in (0, x_0)$  时,  $h(x) < 0$ , 即  $f'(x) < 0, f(x)$  单调递减,

当  $x \in (x_0, +\infty)$  时,  $h(x) > 0$ , 即  $f'(x) > 0, f(x)$  单调递增, 故函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  存在极值点  $x_0$ .

综上,  $a$  的取值范围为  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ .

### 刷原创

1. A 【解析】 $\because f(x)$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递增,

$$\therefore f'(x) = \frac{2}{x} + \frac{-m}{x^2} \geq 0 \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上恒}$$

成立, 即  $\frac{2x-m}{x^2} \geq 0$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立,  $\therefore m \leq 2x$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立. 又  $x \rightarrow 1$  时,  $2x \rightarrow 2, \therefore m \leq 2$ , 故选 A.

2. D 【解析】因为  $a = \frac{2\sqrt{e}}{3} > 0, b = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} >$

$$0, \text{ 且 } \frac{a}{b} = \frac{3}{3} = \frac{2\sqrt{2\pi e}}{9} < 1, \text{ 所以 } a < b.$$

$$\text{令 } h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{1}{x} -$$

$$\frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}, \text{ 则 } h'(x) > 0 \text{ 在 } (1, +\infty) \text{ 上恒成立,}$$

则  $h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增,

又  $h(1) = 0$ , 则  $h(x) > 0$  在  $(1, +\infty)$  上恒成立,

即  $x > 1$  时,  $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$  恒成立,

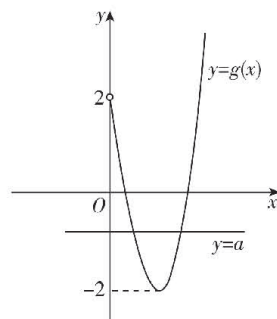
令  $x = 2$ , 则  $\ln 2 > \frac{2 \times (2-1)}{2+1} = \frac{2}{3}$ , 所以  $c = 3(1 - \ln 2) < 1$ .

又  $a = \frac{2\sqrt{e}}{3} > 1$ , 所以  $a > c$ . 综上所述,  $c < a < b$ . 故选 D.

3.  $(-2, 2)$  【解析】由  $x^3 - 3x = a - 2(x-1)^2$ , 即  $a = x^3 + 2x^2 - 7x + 2$ .

令  $g(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 2$ , 则  $g'(x) = 3x^2 + 4x - 7 = (3x+7)(x-1)$ , 所以当  $x \in (0, 1)$  时,  $g'(x) < 0, g(x)$  单调递减, 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g'(x) > 0, g(x)$  单调递增, 且  $g(0) = 2, g(1) = -2$ , 作出  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上的大致图象如图所示.

方程  $x^3 - 3x = a - 2(x-1)^2$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不同的实数解, 等价于直线  $y=a$  与曲线  $y=g(x)$  有两个交点, 所以  $a \in (-2, 2)$ .



4. 【解】(1) 函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 且  $f'(x) = a + 1 + \ln x$ .

由  $f'(x) > 0$  得  $x > e^{-(a+1)}$ , 由  $f'(x) < 0$  得  $0 < x < e^{-(a+1)}$ , 故函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $(e^{-(a+1)}, +\infty)$ , 单调递减区间为  $(0, e^{-(a+1)})$ .

(2) 由  $\forall x \in [1, +\infty)$ , 得  $\ln x \geq 0$ , 则当  $m < 0$  时,  $e^{2mx^2} > 0, -\frac{\ln x}{m} \geq 0$ , 故  $e^{2mx^2} - \frac{\ln x}{m} \geq 0$  成立.



当  $m > 0$  时,  $e^{2mx^2} - \frac{\ln x}{m} \geq 0$  等价于  $mx^2 e^{2mx^2} \geq x^2 \ln x$ , 即  $mx^2 e^{2mx^2} \geq \ln x \cdot e^{2\ln x}$ , 即  $2mx^2 e^{2mx^2} \geq 2\ln x \cdot e^{2\ln x}$ , 等价于  $e^{2mx^2} \ln e^{2mx^2} \geq e^{2\ln x} \cdot \ln e^{2\ln x}$ ,

【破题板】对不等式进行变形构造相同结构以便通过构建新函数求解

由(1)知, 令  $a=0$ , 得  $f(x)=x \ln x$ , 所以  $f(e^{2mx^2}) \geq f(e^{2\ln x})$ . 由指数函数的性质及  $x \in [1, +\infty)$ , 得  $e^{2mx^2} > 1$ ,  $e^{2\ln x} = x^2 \geq 1$ , 又因为  $f(x) = x \ln x$  在区间  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $e^{2mx^2} \geq e^{2\ln x}$ , 即  $mx^2 \geq \ln x$ , 即  $m \geq \frac{\ln x}{x^2}$  对任意  $x \in [1, +\infty)$  恒成立.

记函数  $g(x) = \frac{\ln x}{x^2} (x \geq 1)$ , 则  $g'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$ , 由  $g'(x) > 0$ , 得  $1 \leq x < \sqrt{e}$ , 由  $g'(x) < 0$ , 得  $x > \sqrt{e}$ , 故  $g(x)$  在区间  $[1, \sqrt{e})$  上单调递增, 在区间  $(\sqrt{e}, +\infty)$  上单调递减, 所以  $g(x)_{\max} = g(\sqrt{e}) = \frac{1}{2e}$ .

故  $m \geq \frac{1}{2e}$ .

综上所述, 实数  $m$  的取值范围为  $(-\infty, 0) \cup \left[\frac{1}{2e}, +\infty\right)$ .

5. 【证明】(1) 由题得,  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f'(x) = 1 - ae^x$ , 则当  $a > 0$  时, 由  $f'(x) > 0$  得  $x < -\ln a$ , 由  $f'(x) < 0$  得  $x > -\ln a$ , 故函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, -\ln a)$  上单调递增, 在区间  $(-\ln a, +\infty)$  上单调递减.

由  $g(x) = \ln x - ax, x > 0$  得  $g'(x) = \frac{1}{x} - a$ , 则由  $g'(x) > 0$  得  $0 < x < \frac{1}{a}$ , 由  $g'(x) < 0$

得  $x > \frac{1}{a}$ , 故函数  $g(x)$  在区间  $\left(0, \frac{1}{a}\right)$  上单调递增, 在区间  $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$  上单调递减.

设  $y = \frac{1}{a} + \ln a (0 < a < 1)$ , 则  $y' = -\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a^2}$ , 当  $0 < a < 1$  时,  $y' < 0$ , 则  $y = \frac{1}{a} + \ln a$  在  $(0, 1)$  上单调递减, 当  $a \rightarrow 1$

时,  $y \rightarrow 1$ , 所以  $\frac{1}{a} > -\ln a$ , 所以在  $g(x)$  的单调递减区间上,  $f(x)$  也单调递减. (2) 由  $f(x) = 0, g(x) = 0$  分别得  $a =$

$\frac{x}{e^x}, a = \frac{\ln x}{x}$ , 因此函数  $f(x), g(x)$  共有 3 个不同的零点, 即直线  $y=a$  与曲线  $F(x) = \frac{x}{e^x}, G(x) = \frac{\ln x}{x}$  共有 3 个交点, 只需证这 3 个交点的横坐标依次成等比数列.

由  $F'(x) = \frac{1-x}{e^x}, G'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$  知, 当  $F'(x) = 0$  时,  $x=1$ , 当  $G'(x) = 0$  时,  $x=e$ , 则函数  $F(x)$  在区间  $(0, 1)$  上单调递增, 在区间  $(1, +\infty)$  上单调递减, 函数  $G(x)$  在区间  $(0, e)$  上单调递增, 在区间  $(e, +\infty)$  上单调递减, 故  $G(x)_{\max} = F(x)_{\max} = \frac{1}{e}$ .

故  $y=F(x)-G(x)$  在  $(1, e)$  上单调递减, 且  $F(1)-G(1) > 0, F(e)-G(e) < 0$ , 由函数零点存在定理知, 存在唯一实数  $x_0 \in (1, e)$ , 使  $F(x) = G(x)$ , 当  $x \rightarrow 0$  时,  $F(x) \rightarrow 0, G(x) \rightarrow -\infty$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $F(x) \rightarrow 0, G(x) \rightarrow 0$ , 所以直线  $y=a$  与曲线  $F(x), G(x)$  过同一点  $(x_0, a)$ .

设直线  $y=a$  与曲线  $F(x) = \frac{x}{e^x}$  的另一交点为  $(x_1, a)$ , 与曲线  $G(x) = \frac{\ln x}{x}$  的另一交点为  $(x_2, a)$ , 则  $0 < x_1 < 1 < x_0 < e < x_2$ ,  $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{x_0}{e^{x_0}} = a = \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{\ln x_2}{x_2}$ .

故  $\frac{x_1}{e^{x_1}} = \frac{\ln x_0}{x_0} = \frac{\ln x_2}{x_2}$ , 即  $F(x_1) = F(\ln x_0)$ , 又  $\ln x_0 \in (0, 1)$ , 则由函数  $F(x)$  的单调性得  $x_1 = \ln x_0$ . 同理, 由  $\frac{x_0}{e^{x_0}} = \frac{\ln x_2}{x_2} =$

$\frac{\ln e^{x_0}}{e^{x_0}}$  得  $x_2 = e^{x_0}$ . 故  $x_1 x_2 = e^{x_0} \ln x_0 = x_0^2$ .

综上, 函数  $f(x), g(x)$  的 3 个零点从小到大依次成等比数列.

6. (1) 【解】函数  $f(x) = -2\ln x + \frac{a}{x} + x$  的定义域是  $(0, +\infty)$ , 令  $f'(x) = -\frac{2}{x} - \frac{a}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 2x - a}{x^2} = 0$ , 即  $x^2 - 2x - a = 0$ ,  $\Delta = 4 + 4a$ .

①当  $\Delta \leq 0$ , 即  $a \leq -1$  时,  $f'(x) \geq 0$  且等号不恒成立, 则函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增.

②当  $\Delta > 0$ , 即  $a > -1$  时, 令  $f'(x) < 0$ , 得  $1 - \sqrt{a+1} < x < 1 + \sqrt{a+1}$ ; 令  $f'(x) > 0$ ,

得  $x < 1 - \sqrt{a+1}$  或  $x > 1 + \sqrt{a+1}$ , 又因为  $x \in (0, +\infty)$ , 令  $1 - \sqrt{a+1} > 0$ , 即  $-1 < a < 0$ , 所以当  $-1 < a < 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, 1 - \sqrt{a+1})$ ,  $(1 + \sqrt{a+1}, +\infty)$  上单调递增, 在  $(1 - \sqrt{a+1}, 1 + \sqrt{a+1})$  上单调递减; 当  $a \geq 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, 1 + \sqrt{a+1})$  上单调递减, 在  $(1 + \sqrt{a+1}, +\infty)$  上单调递增. 综上可知:

①当  $a \leq -1$  时, 函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增;

②当  $-1 < a < 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, 1 - \sqrt{a+1})$ ,  $(1 + \sqrt{a+1}, +\infty)$  上单调递增, 在  $(1 - \sqrt{a+1}, 1 + \sqrt{a+1})$  上单调递减;

③当  $a \geq 0$  时,  $f(x)$  在  $(0, 1 + \sqrt{a+1})$  上单调递减, 在  $(1 + \sqrt{a+1}, +\infty)$  上单调递增.

(2) 【解】当  $x \geq 1$  时,  $f(x) \geq \frac{1}{x} - x$  恒成立, 即  $a \geq 2x \ln x - 2x^2 + 1$  恒成立.

设  $g(x) = 2x \ln x - 2x^2 + 1, x \geq 1$ , 则  $g'(x) = 2 \ln x + 2 - 4x = 2(\ln x - 2x + 1)$ , 令  $u(x) = \ln x - 2x + 1, x \geq 1$ , 则  $u'(x) = \frac{1}{x} - 2$ , 当  $x \geq 1$  时,  $u'(x) < 0$ , 所以  $u(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减, 则  $u(x) \leq u(1) = -1 < 0$ , 即  $g'(x) < 0$ ,  $g(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $g(x)_{\max} = g(1) = -1$ , 故  $a \geq -1$ , 即实数  $a$  的取值范围为  $[-1, +\infty)$ .

(3) 【证明】由(1)知,  $f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2$ , 即方程  $x^2 - 2x - a = 0$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不相等的实根  $x_1, x_2$ , 所以  $x_1 + x_2 = 2, x_1 x_2 = -a$ , 不妨设

$x_1 < x_2$ , 则  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{-2\ln x_1 + 2\ln x_2 + x_1 - x_2 + a}{x_1 - x_2} =$

$\frac{2\ln x_2 - 2\ln x_1}{x_1 - x_2} + 2$ , 要证  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} <$

3, 即证  $\frac{2\ln x_2 - 2\ln x_1}{x_1 - x_2} < 1$ ,

即证  $2\ln x_2 + x_2 > 2\ln x_1 + x_1$ .

令  $h(x) = 2\ln x + x$ , 则  $h'(x) = \frac{2}{x} + 1 > 0$

恒成立, 所以  $h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增, 又  $0 < x_1 < x_2$ , 所以  $h(x_1) < h(x_2)$ ,

即  $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 3$ .

## 专练 1 新定义、新情境专练

### 刷素养

1. A 【解析】被 2 除余 1 且被 3 除余 2 的数, 按从小到大的顺序排成一列, 把这列数记为数列  $\{a_n\}$ ,

则数列  $\{a_n\}$  是一个以 5 为首项, 以 6 为公差的等差数列, 所以  $a_n = 5 + (n-1) \cdot 6 = 6n - 1 (1 \leq n \leq 337, n \in \mathbf{N}^*)$ , 故  $b_n = (\sqrt{2})^{a_n} =$

$(\sqrt{2})^{6n-1}$ .

故  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(\sqrt{2})^{6n+5}}{(\sqrt{2})^{6n-1}} = (\sqrt{2})^6 = 8$ . 故选 A.