

$$\begin{aligned} a) &= -a, \\ x_6 &= \sqrt{2}x_5 - x_4 = \sqrt{2} \cdot (-a) - (b - \sqrt{2}a) = -b, \\ x_7 &= \sqrt{2}x_6 - x_5 = \sqrt{2} \cdot (-b) - (-a) = a - \sqrt{2}b, \\ x_8 &= \sqrt{2}x_7 - x_6 = \sqrt{2} \cdot (a - \sqrt{2}b) - (-b) = \sqrt{2}a - b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_9 &= \sqrt{2}x_8 - x_7 = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}a - b) - (a - \sqrt{2}b) = a, \\ x_{10} &= \sqrt{2}x_9 - x_8 = \sqrt{2}a - (\sqrt{2}a - b) = b, \dots, \\ \text{故数列 } \{x_n\} &\text{是以 } 8 \text{ 为最小正周期的周期数列.} \\ \therefore 2\,023 &= 252 \times 8 + 7, \therefore x_{2\,023} = x_7 = a - \sqrt{2}b. \\ \text{又 } \therefore \text{数列 } \{x_n\} &\text{的前 } 8 \text{ 项和为} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_8 &= a + b + (\sqrt{2}b - a) + (b - \sqrt{2}a) + (-a) + (-b) + (a - \sqrt{2}b) + (\sqrt{2}a - b) = 0, \\ \therefore \text{数列 } \{x_n\} &\text{的前 } 2\,023 \text{ 项的和为 } x_1 + x_2 + \dots + x_{2\,023} = x_1 + x_2 + \dots + x_7 \\ &= a + b + (\sqrt{2}b - a) + (b - \sqrt{2}a) + (-a) + (-b) + (a - \sqrt{2}b) = b - \sqrt{2}a. \end{aligned}$$

4.2.1 等差数列的概念

刷基础

1. CD 【解析】对于 A, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 2 \times \frac{1}{3}$, 故 A 不是等差数列; 对于 B, $\lg 5 + \lg 7 = \lg 35 \neq \lg 36 = 2\lg 6$, 故 B 不是等差数列; 对于 C, $1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 2 \times \frac{7}{8}$, 故 C 是等差数列; 对于 D, $3 + 3 = 2 \times 3$, 故 D 是等差数列. 故选 CD.

2. C 【解析】因为 $(a_{n+1} + a_{n+3}) - (a_n + a_{n+2}) = (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+3} - a_{n+2}) = d + d = 2d$, 所以数列 $a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_5, \dots$ 是公差为 $2d$ 的等差数列. 故选 C.

3. ACD 【解析】 $a_n = kn + b$ (k, b 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$), 则 $a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - kn - b = k$, 符合等差数列的定义, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 故 A 正确; $a_{n+2} - a_n = d$ (d 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$) 不符合从第二项起, 每一项与它的前一项的差都为同一个常数, 故 B 错误; $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 即 $2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$, 符合等差中项的性质, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 故 C 正确; $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2 + n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n$, 且 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$ 符合上式, 则 $a_n = 2n$ 符合一次函数的形式, 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列, 故 D 正确. 故选 ACD.

归纳总结 判断一个数列是否为等差数列的常用方法

(1) 定义法

$a_{n+1} - a_n = d$ (d 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$) 或 $a_n - a_{n-1} = d$ (d 为常数, $n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*$) \Leftrightarrow 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列.

(2) 等差中项法

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) $\Leftrightarrow \{a_n\}$ 为等差数列.

(3) 通项公式法

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式形如 $a_n = pn + q$ (p, q 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$) \Leftrightarrow 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

4. 【解】(1) 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列. 理由如下: 由 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$, 可知 $a_n \neq 0$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a_n}$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}$, 所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$,

敲黑板: 符合等差数列的定义

公差 $d = \frac{1}{2}$ 的等差数列.

4.2 等差数列

(2) 由 (1) 可知, $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d = \frac{n}{2}$, 所以 $a_n = \frac{2}{n}$.

5. B 【解析】由已知可得, $a+b = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2\sqrt{2}.$$

设 a, b 的等差中项为 m , 根据等差中项的定义, 有 $m = \frac{a+b}{2} = \sqrt{2}$, 故选 B.

6. C 【解析】因为内角 A, B, C 依次成等差数列, 所以 $A+C=2B$. 又 $A+B+C=\pi$, 解得 $B=\frac{\pi}{3}$, 所以 $2A+B+2C=5B=\frac{5\pi}{3}$, 故选 C.

7. 16 【解析】由等差中项的定义可得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 故 $a+9b = (a+9b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} + 9 \geq 10 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 16$ (当且仅当 $a=4, b=\frac{4}{3}$ 时取等号).

8. D 【解析】由已知可得等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1=3$, 公差 $d=11-3=8$, 所以通项公式 $a_n=3+8(n-1)=8n-5$. 由 $a_n=67$ 可得 $8n-5=67$, 解得 $n=9$. 故选 D.

链接教材 本题是教材第 15 页例 2 的同类试题. 首先根据所给数据或关系写出数列的通项公式, 要判断数列中是否存在某项, 只需将此数代入数列的通项公式中, 求出 n 的值. 若求出的 n 为正整数, 则该数是数列中的项, 否则该数不是数列中的项, 求出的 n 即为该数是数列的第几项的项数.

9. D 【解析】设 16 个数对应公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 16 项, 则由题意可知, $a_1=1, a_{16}=31$, 故 $a_{16}-a_1=15d=30$, 解得 $d=2$. 故选 D.

10. B 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为递增等差数列, 所以 $a_3+a_7=a_4+a_6=34$, 且 $a_4 < a_6$, 又因为 $a_4 \cdot a_6=280$, 所以 $a_4=14, a_6=20$. 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = \frac{a_6-a_4}{6-4} = \frac{20-14}{2} = 3, a_1=a_4-3d=14-9=5$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=a_1+(n-1)d=3n+2$. 故选 B.

11. D 【解析】由 $a_2+a_{10}=2a_6=16$, 解得 $a_6=8$. 又 $a_6a_{10}=96$, 所以 $a_{10}=12$, 故公差 $d = \frac{a_{10}-a_6}{10-6} = 1$. 故选 D.

12. D 【解析】由 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$, 得 $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$, 则 $\{a_n\}$ 为等差数列. 又 $a_5+a_9=16$, 所以由等差数列的

性质知 $a_1+a_2+\dots+a_{12}=6(a_5+a_9)=96$. 故选 D.

13. B 【解析】记 7 根横梁的长度从上到下依次成等差数列 $\{a_n\}$ ($1 \leq n \leq 7, n \in \mathbb{N}$), 由题意得 $a_1+a_2+a_3=1.5, a_5+a_6+a_7=2, \therefore 3a_2=1.5, 3a_6=2$, 解得 $a_2=\frac{1}{2}, a_6=\frac{2}{3}$. $\therefore 2a_4=a_2+a_6, \therefore a_4=\frac{7}{12}$, 即正中间的一根横梁的长度是 $\frac{7}{12}$ m. 故选 B.

14. -n (答案不唯一) 【解析】假设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其公差为 d , 由条件②可得 $a_1+(m+n-1)d=a_1+(m-1)d+a_1+(n-1)d$, 所以 $a_1=d$; 再根据条件① $\{a_n\}$ 是递减数列, 可知 $d < 0$, 则 $a_n=a_1+(n-1)d=nd$, 且 $d < 0$. 取 $d=-1$, 此时 $a_n=-n$, 满足题意.

二级结论 $\{a_n\}$ 是等差数列的一个

充分条件为 $a_{m+n}=a_m+a_n$ 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 成立, 或 $a_{m-n}=a_m-a_n$ 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 且 $m > n$ 成立.

下面证: $\{a_n\}$ 是等差数列的一个充分条件为 $a_{m+n}=a_m+a_n$ 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

证明: 取 $m=1$, 有 $a_{n+1}=a_n+a_1$, 即 $a_{n+1}-a_n=a_1$, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 首项为 a_1 , 公差为 a_1 , 通项公式为 $a_n=na_1$, 此时 $a_{m+n}=(m+n)a_1=ma_1+na_1=a_m+a_n$ 满足条件.

15. A

思路导引 由已知可得 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是等差数列, 从而先利用等差数列的通项公式求出 $\sqrt{a_n}$, 进而可求出 a_n .

【解析】因为 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = \sqrt{2}$, 所以 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是首项为 $\sqrt{a_1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 公差为 $\sqrt{2}$ 的等差数列, 所以 $\sqrt{a_n} = 2\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} = \sqrt{2}(n+1)$, 所以 $a_n = 2(n+1)^2$. 故选 A.

16. A 【解析】由数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{3}, \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = 2$, 可得 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2, \frac{1}{a_1} = 3$, 所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 3, 公差为 2 的等差数列, 所以 $\frac{1}{a_{10}} = 3 + 9 \times 2 = 21$, 所以 $a_{10} = \frac{1}{21}$, 故选 A.

17. 【解】(1) 因为 $a_1=1, na_{n+1}-(n+1) \cdot a_n = 3n(n+1)$, 所以 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + 3(n+1)$, 则 $a_2 = 2a_1 + 3 \times 2 = 8, a_3 = \frac{3}{2}a_2 + 3 \times 3 = 21$.

(2) 已知 $a_1 = 1$, $na_{n+1} - (n+1)a_n = 3n(n+1)$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 3$,

所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{1} = 1$, 公差为 3

的等差数列, 则 $\frac{a_n}{n} = 3n - 2$,

所以 $a_n = n(3n - 2) = 3n^2 - 2n$.

18. D 【解析】设等差数列的公差为 $d(d > 0)$, 则 5 人出钱数依次为 $27 - 3d, 27 - 2d, 27 - d, 27, 27 + d$.

依题意, 得 $27 - 3d + 27 - 2d + 27 - d + 27 + 27 + d = 100$, 解得 $d = 7$,

所以公士出钱数为 34 钱. 故选 D.

19. C 【解析】被 3 除余 1 且被 4 除余 2 的正整数按照从小到大的顺序排成一列, 构成首项为 10, 公差为 $3 \times 4 = 12$ 的等差数列,

所以 $a_n = 10 + 12 \times (n - 1) = 12n - 2$, 则 $a_{2025} = 12 \times 2025 - 2 = 24\,298$. 故选 C.

20. A 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $3a_1^2 + a_2^2 = 4$, 得 $3a_1^2 + (a_1 + d)^2 = 4$, 整理得 $d^2 + 2a_1d + 4a_1^2 - 4 = 0$, 把该式看

作关于 d 的一元二次方程, 则 $\Delta = 4a_1^2 - 4(4a_1^2 - 4) \geq 0$, 解得 $-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq a_1 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 A.

21. $15\sqrt{3}$ 【解析】不妨设 $A = 120^\circ$, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 令 $c < b$, 则 $a = b + 4, c = b - 4$. 由余弦定理得 $\cos 120^\circ = \frac{b^2 + (b-4)^2 - (b+4)^2}{2b(b-4)} = -\frac{1}{2}$, 解得 $b = 10$.

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin 120^\circ = 15\sqrt{3}$.

刷提升

1. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 因为 $a_6 = a_3 + 9$, 所以 $a_1 + 5d = a_1 + 2d + 9$, 即 $5d = 2d + 9$, 解得 $d = 3$. 因为 $2a_2 = a_5 - 1$, 所以 $2(a_1 + d) = a_1 + 12 - 1$, 解得 $a_1 = 5$. 则 $a_n = 5 + 3(n - 1) = 3n + 2$. 故选 A.

2. C 【解析】由题意得数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, 则 $a_n = a_8 + (n - 8) \times 1 = n - 18$. 由 $a_m = m - 18 = 0$, 得 $m = 18$. 故选 C.

多种解法 由题意知, 数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, 则 $1 = \frac{a_m - a_8}{m - 8} = 1$, 代入解得 $m = 18$. 故选 C.

3. A 【解析】数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设公差为 d , 可得 $a_{n+1} - a_n = d$. 对于 A, 例如, 若等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n$, 则 $|a_n| = n$, 此时数列 $\{|a_n|\}$ 是等差数列, 若等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n - 2$, 则 $|a_1| = 1, |a_2| = 0, |a_3| = 1, |a_4| = 2$, 此时数列 $\{|a_n|\}$ 不是等差数列, 所以 A 符合题意;

只有当等差数列 $\{a_n\}$ 中的项全为非负数或非正数的前提下, $\{|a_n|\}$ 才为等差数列

对于 B, 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 中, $a_{n+1} - a_n = d$,

所以数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 为常数列, 所以数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 一定是等差数列, 所以 B 不符合题意;

对于 C, 数列 $\{pa_n + q\}$ (p, q 为常数) 中, $(pa_{n+1} + q) - (pa_n + q) = p(a_{n+1} - a_n) = pd$ (常数), 所以数列 $\{pa_n + q\}$ 一定是等差数列, 所以 C 不符合题意;

对于 D, 数列 $\{2a_n + n\}$ 中, $(2a_{n+1} + n + 1) - (2a_n + n) = 2(a_{n+1} - a_n) + 1 = 2d + 1$ (常数), 所以数列 $\{2a_n + n\}$ 一定是等差数列, 所以 D 不符合题意. 故选 A.

4. C 【解析】设这十二个节气日影长构成数列 $\{a_n\}$, 则 $\{a_n\}$ 是等差数列. 由题可知 $a_1 + a_4 + a_7 = 33, a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 108$.

由等差数列的性质得 $a_1 + a_4 + a_7 = 3a_4 = 33 \Rightarrow a_4 = 11, a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 9a_5 = 108 \Rightarrow a_5 = 12$, 所以公差 $d = a_5 - a_4 = 1$, 则 $a_9 = a_5 + 4d = 12 + 4 = 16$. 故选 C.

5. A 【解析】设等差数列的公差为 d , 则 $a_n = a_1 + (n - 1)d, a_m = a_1 + (m - 1)d, a_p = a_1 + (p - 1)d$.

当 $2n = m + p$ 时, $2a_n = 2a_1 + (2n - 2)d = 2a_1 + (m + p - 2)d = a_m + a_p$,

\therefore 由 $2n = m + p$ 可得 $2a_n = a_m + a_p$.

当 $d = 0$ 时, $a_n = a_m = a_p = a_1, 2a_n = a_m + a_p$ 恒成立, 不能得到 $2n = m + p$,

\therefore 由 $2a_n = a_m + a_p$ 不能得到 $2n = m + p$, \therefore “ $2n = m + p$ ” 是 “ $2a_n = a_m + a_p$ ” 的充分不必要条件. 故选 A.

名师点拨 等差数列的诸多性质是等差数列的必要条件, 不一定具有充分性, 判断其充分性时既可以利用定义、通项公式等等差数列的充要条件, 也可以思考特殊等差数列即常数列是否为反例.

6. C 【解析】设这四个数构成的等差数列的项依次为 $a - 3d, a - d, a + d, a + 3d$, 由题意得

$$\begin{cases} (a - 3d)^2 + (a - d)^2 + (a + d)^2 + (a + 3d)^2 = 94, \\ (a - d)(a + d) = (a - 3d)(a + 3d) + 18, \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} 2a^2 + 10d^2 = 47, \\ 4d^2 = 9, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{7}{2}, \\ d = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{7}{2}, \\ d = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{7}{2}, \\ d = -\frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{7}{2}, \\ d = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = -\frac{7}{2}, \\ d = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

当 $a = \frac{7}{2}, d = \frac{3}{2}$ 时, 等差数列为 $-1, 2,$

$5, 8$; 当 $a = \frac{7}{2}, d = -\frac{3}{2}$ 时, 等差数列为 $8, 5, 2, -1$, 以上两种情况等差数列的和都为 14.

当 $a = -\frac{7}{2}, d = \frac{3}{2}$ 时, 等差数列为 $-8,$

$-5, -2, 1$; 当 $a = -\frac{7}{2}, d = -\frac{3}{2}$ 时, 等差数列为 $1, -2, -5, -8$, 以上两种情况等差数列的和都为 -14 . 故选 C.

7. B 【解析】因为集合 $\{n | n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 500\}$ 中, 被 5 除余 3 的元素有 3, 8, 13, \dots , 498, 这些元素构成以 3 为首项, 5 为公差的等差数列.

设共有 m 个数, 则 $498 = 3 + 5(m - 1)$, 解得 $m = 100$, 故这些元素共有 100 个. 故选 B.

8. C 【解析】因为 $a_1 = \frac{1}{3}, a_n = a_{n+1} + 2a_n a_{n+1} (n \in \mathbb{N}^+)$, 易知 $a_n \neq 0$,

故 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 2$, 即 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$, 又

$a_1 = \frac{1}{3}$, 所以 $\frac{1}{a_1} = 3$, 故 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是以 3 为首项, 2 为公差的等

差数列, 则 $\frac{1}{a_n} = 3 + 2(n - 1) = 2n + 1$, 故 $a_n = \frac{1}{2n + 1}$, 所以 $a_{100} = \frac{1}{201}$. 故选 C.

9. C 【解析】由题意知, $OA_n = \sqrt{OA_{n-1}^2 + 1}, n \geq 2$, 即 $OA_n^2 - OA_{n-1}^2 = 1, n \geq 2$, 又 OA_1, OA_2, \dots, OA_n 的长度构成的数列为 $\{a_n\}$, 则 $a_n^2 - a_{n-1}^2 = 1, n \geq 2$, 则数列 $\{a_n^2\}$ 是首项为 $a_1^2 = 1$, 公差

为 1 的等差数列. 所以 $a_n^2 = 1 + (n - 1) \times 1 = n$, 即 $a_n = \sqrt{n}$, 所以 $a_{100} = 10$. 故选 C.

10. ACD 【解析】因为 $2 \times 2^b = 2^{b+1} = 2^a + 2^c > 2\sqrt{2^a 2^c} = 2^{\frac{a+c}{2}}$, 所以 $b > \frac{a+c}{2}$, D

正确;

因为 $2 \times 2^b = 2^{b+1} = 2^a + 2^c > 2^a$, 所以 $a < b + 1$, C 正确;

因为 $2 \times 2^b = 2^{b+1} = 2^a + 2^c$, 所以 $2^2 \times 2^{b+1} = 2^2 \times 2^a + 2^2 \times 2^c$, 即 $2 \times 2^{b+2} = 2^{a+2} + 2^{c+2}$, A 正确;

设 $2^a = m, 2^b = n, 2^c = q$ 成等差数列, 得出 $2n = m + q$,

若 $2^{2a} = m^2, 2^{2b} = n^2, 2^{2c} = q^2$ 成等差数列, 则 $2n^2 = m^2 + q^2 = \frac{(m+q)^2}{2} \Rightarrow m^2 +$

$q^2 - 2mq = 0 \Rightarrow (m - q)^2 = 0 \Rightarrow m = q$, 已知 $a > b > c$, 所以 $m > n > q$, 矛盾, B 错误. 故选 ACD.

11. 16 【解析】等差数列 2, 6, 10, \dots , 190 的首项为 2, 公差为 4; 等差数列 2, 8, 14, \dots , 200 的首项为 2, 公差为 6, 故这两个等差数列的公共项 2, 14, 26, \dots 也是等差数列, 设为 $\{c_n\}$. 因为首项为 2, 公差为 4 和 6 的最小公倍数, 即为 12, 所以 $c_n = 2 + (n - 1) \times 12 = 12n - 10$, 所以 $12n - 10 \leq 190$, 所以 $n \leq \frac{50}{3}$.

因为 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以新数列的项数为 16.

规律方法 求两个等差数列的公共项的方法

若等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2 , 则数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的公共项仍然构成一个等差数列, 其公差为 d_1, d_2 的最小公倍数, 首项为数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 中第一个公共项.

12. $\frac{3}{1\,015}$ 【解析】数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $\frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+2}}$, 得 $\frac{1}{a_{n+2}} + \frac{1}{a_n} = \frac{2}{a_{n+1}}$,

则数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1} = 1$ 的等差数列, 设其公差为 d , 则 $\frac{1}{a_n} = 1 + (n -$

$1)d$, 即 $a_n = \frac{1}{dn + 1 - d}$.

$$\text{于是 } a_n a_{n+1} = \frac{1}{dn+1-d} \cdot \frac{1}{dn+1} = \frac{1}{d} \cdot \left(\frac{1}{dn+1-d} - \frac{1}{dn+1} \right), \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} = \frac{1}{d} \cdot \left(1 - \frac{1}{dn+1} \right) = \frac{n}{dn+1},$$

$$\text{由 } a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_6 a_7 = 3, \text{ 得 } \frac{6}{6d+1} = 3, \text{ 解得 } d = \frac{1}{6}, \text{ 因此 } a_n = \frac{6}{n+5}.$$

$$\text{所以 } a_{2025} = \frac{6}{2025+5} = \frac{3}{1015}.$$

13. $\left[-\frac{52}{3}, +\infty\right)$ 【解析】由 $a_1 = \frac{1}{2}$,

$$\frac{n+1}{n} a_{n+1} = \frac{a_n}{na_{n+1}}, \text{ 可得 } (n+1)a_{n+1} = \frac{na_n}{na_{n+1}}, \text{ 整理得 } \frac{1}{(n+1)a_{n+1}} - \frac{1}{na_n} = 1,$$

【点悟】 na_n 在等式两侧形式统一, 不用动, 右侧有分母而左侧没有, 可以尝试两边同时取倒数使两侧均有分母, 并对右侧进行分离使得代数形式进一步统一

$$\frac{1}{a_1} = 2, \text{ 所以数列 } \left\{ \frac{1}{na_n} \right\} \text{ 表示首项为 } 2, \text{ 公差为 } 1 \text{ 的等差数列. 故 } \frac{1}{na_n} = 2 +$$

$$n-1 = n+1, \text{ 则 } a_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\text{又由 } \frac{10}{n^2} + \frac{1}{n} + \lambda a_n \geq 0 \text{ 恒成立, 即}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lambda \geq -\left(\frac{10}{n^2} + \frac{1}{n}\right)(n^2 + n) \text{ 恒成立,}$$

$$\text{令 } f(n) = -\left(\frac{10}{n^2} + \frac{1}{n}\right)(n^2 + n) = -\left(11 + \frac{10}{n} + n\right), \text{ 则 } f(n) \leq -(11 + 2\sqrt{10}),$$

$$\text{当且仅当 } n = \frac{10}{n}, \text{ 即 } n = \sqrt{10} \text{ 时等号}$$

$$\text{成立, 又 } n \in \mathbb{N}^*, \text{ 则 } n \neq \sqrt{10},$$

【点悟】函数 $f(n)$ 的自变量 n 是正整数, 取不到 $\sqrt{10}$, 结合对勾函数单调性, 最值应在 $\sqrt{10}$ 附近的整数取到

$$\text{所以当 } n=3 \text{ 时, } f(3) = -\frac{52}{3}, \text{ 当 } n=4$$

$$\text{时, } f(4) = -\frac{35}{2}.$$

$$\text{由对勾函数 } y = -\left(\frac{10}{n} + n\right) \text{ 的单调性,}$$

$$\text{得 } f(n) \leq -\frac{52}{3}, \text{ 所以 } \lambda \geq -\frac{52}{3}.$$

$$\text{所以实数 } \lambda \text{ 的取值范围是 } \left[-\frac{52}{3}, +\infty\right).$$

14. 【解】(1) 由 $a_{n+1} = a_n + 2$ 可得 $a_{n+1} - a_n = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 -1 , 公差为 2 的等差数列.

$$\text{所以 } a_n = -1 + 2 \times (n-1) = 2n-3, \text{ 故数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2n-3.$$

$$(2) \text{ 因为 } \{a_n\} \text{ 为等差数列, } a_2 + a_6 = 26, \text{ 所以 } 2a_4 = 26, \text{ 解得 } a_4 = 13. \text{ 设数列 } \{a_n\} \text{ 的公差为 } d,$$

$$\text{又 } a_5 = 15, \text{ 所以 } d = a_5 - a_4 = 15 - 13 = 2, \text{ 所以 } a_n = a_4 + 2 \times (n-4) = 2n+5.$$

$$\text{令 } 2n+5=91, \text{ 解得 } n=43, \text{ 即 } 91 \text{ 为数列中的第 } 43 \text{ 项.}$$

15. 【解】(1) 由 $a_{n+1} = \frac{3a_n-4}{a_n-1}$, 可得 $a_{n+1} - 2 = \frac{3a_n-4}{a_n-1} - 2 = \frac{a_n-2}{a_n-1}$, 易知 $a_n \neq 2$,

【点悟】要证 $\left\{ \frac{1}{a_n-2} \right\}$ 是等差数列,

需将已知等式整理、化简、取倒数等凑出 $\frac{1}{a_{n+1}-2}$ 与 $\frac{1}{a_n-2}$ 的差的形式

$$\text{所以 } \frac{1}{a_{n+1}-2} = \frac{1}{a_n-2} + 1, \text{ 即 } \frac{1}{a_{n+1}-2} - \frac{1}{a_n-2} = 1. \text{ 又由 } a_1 = \frac{5}{2}, \text{ 可得 } \frac{1}{a_1-2} =$$

$$\frac{1}{\frac{5}{2}-2} = 2, \text{ 所以 } \left\{ \frac{1}{a_n-2} \right\} \text{ 是以 } 2 \text{ 为首项, } 1 \text{ 为公差的等差数列, 所以 } \frac{1}{a_n-2} =$$

$$2 + (n-1) \cdot 1 = n+1, \text{ 则 } a_n = \frac{1}{n+1} + 2 = \frac{2n+3}{n+1}, \text{ 即数列 } \{a_n\} \text{ 的}$$

$$\text{通项公式为 } a_n = \frac{2n+3}{n+1}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } a_n = \frac{2n+3}{n+1}, \text{ 可得 } b_n = \frac{9^n}{(a_n-2) \times 10^n} = \frac{1}{a_n-2} \times \left(\frac{9}{10}\right)^n = (n+1) \times \left(\frac{9}{10}\right)^n, \text{ 易知 } b_n > 0,$$

$$\text{又 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+2) \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1}}{(n+1) \left(\frac{9}{10}\right)^n} = \frac{9(n+2)}{10(n+1)},$$

$$\text{令 } \frac{b_{n+1}}{b_n} > 1, \text{ 得 } n < 8, \text{ 令 } \frac{b_{n+1}}{b_n} = 1, \text{ 得 } n = 8,$$

$$\text{令 } \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1, \text{ 得 } n > 8, \text{ 故 } b_1 < b_2 < \cdots < b_8 = b_9 > b_{10} > b_{11} > \cdots,$$

$$\text{则当 } n=8 \text{ 或 } n=9 \text{ 时, } \{b_n\} \text{ 中的项取得最大值.}$$

$$\text{【规律方法】求数列最值的常用方法}$$

$$(1) \text{ 利用 } a_n = f(n) \text{ 对应的函数 } y = f(x) \text{ 的最值求数列的最值, 此方法要注意 } f(n) \text{ 的定义域 (本题数列对应函数的形式复杂, 不好直接求函数的最值, 所以不适合此思路);}$$

$$(2) \text{ 通过作差 } a_{n+1} - a_n \text{ 或作商 } \frac{a_{n+1}}{a_n} \text{ 得}$$

$$\text{数列的单调性, 继而求数列的最值.}$$

【刷易错】

★易错点 1 误认通项公式致错

16. D 【解析】在 $3n+11$ 中, 令 $n=1$ 得 14, 它是这个数列的第 4 项, 前面还有 5, 8, 11 三项, 故这个数列的项数为 $n+3$. 故选 D.

【易错警示】本题易误认为 $3n+11$ 为数列的通项公式, 其实它为数列的最后一项, 而不是第 n 项.

★易错点 2 判断等差数列时忽视 n 的取值而致误

17. 【解】当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 6$; 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 3n + 2) - [(n-1)^2 + 3(n-1) + 2] = 2n+2$, \therefore 当 $n=1$ 时, $a_1 = 6$ 不满足上式,

$$\therefore a_n = \begin{cases} 6, & n=1, \\ 2n+2, & n \geq 2. \end{cases} \therefore a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2, \therefore \{a_n\} \text{ 不是等差数列.}$$

【易错警示】本题容易产生如下错解:

$$\because a_n = S_n - S_{n-1} = (n^2 + 3n + 2) - [(n-1)^2 + 3(n-1) + 2] = 2n+2, \therefore a_{n+1} - a_n = [2(n+1) + 2] - (2n+2) = 2 \text{ (常数)}, \therefore \text{数列 } \{a_n\} \text{ 是等差数列. 这是因为忽视了 } a_n = 2n+2 \text{ 中 } n \text{ 的最小值是 } 2, \text{ 因此使用 } a_{n+1} - a_n \text{ 时 } n \text{ 的最小值是 } 2, \text{ 只能得到 } a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots, \text{ 而不含 } a_2 - a_1.$$

★易错点 3 忽略隐含条件致错

18. D 【解析】因为等差数列的首项为 $a_1 = -12$, 公差为 d , 且从第 10 项开始为正数,

$$\text{所以 } \begin{cases} a_9 \leq 0, \\ a_{10} > 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -12+8d \leq 0, \\ -12+9d > 0, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\frac{4}{3} < d \leq \frac{3}{2}, \text{ 故 D 正确.}$$

【易错警示】解答本题易出现的错误是忽略隐含条件 a_n 的取值范围, 导致公差 d 的取值范围变大.

4.2.2 等差数列的前 n 项和公式

课时 1 等差数列的前 n 项和(1)

刷基础

1. C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_1 = 2, S_3 = 15$,

$$\text{得 } S_3 = 3a_1 + \frac{3 \times 2}{2}d = 6 + 3d = 15, \text{ 解得 } d = 3. \text{ 所以 } a_4 = 2 + 3 \times 3 = 11. \text{ 故选 C.}$$

2. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 因为 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 所以由 $S_3 = 6, S_9 = 15$ 可得

$$\begin{cases} 3a_1 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2d = 6, \\ 9a_1 + \frac{1}{2} \times 9 \times 8d = 15, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = \frac{19}{9}, \\ d = -\frac{1}{9}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } S_{12} = 12 \times \frac{19}{9} + \frac{1}{2} \times 12 \times 11 \times$$

$$\left(-\frac{1}{9}\right) = 18, \text{ 故选 B.}$$

3. BC 【解析】由已知有

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + d = 4, \\ S_5 = 5a_1 + 10d = 30, \end{cases} \text{ 解得 } a_1 = d = 2,$$

$$\text{因为 } d = 2 > 0, \text{ 所以 } \{a_n\} \text{ 是递增数列, 故 A 错误, B 正确, C 正确;}$$

$$\frac{4(a_1 + a_4)}{S_4} = \frac{2(2a_1 + 3d)}{a_1 + 3d} = \frac{5}{2}, \text{ 故 D 错误. 故选 BC.}$$

4. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 因为 $a_6 = a_2 + 4d$, 所以 $10 = 2 + 4d$, 得 $d = -3$, 所以 $a_1 = a_2 - d = 25$, 所以 $a_n = 28 - 3n$.

$$(2) \text{ 因为 } \{a_n\} \text{ 是等差数列, 所以 } a_2, a_4, a_6, \cdots, a_{20} \text{ 也是等差数列, 公差为 } 2d, \text{ 所以 } a_2, a_4, \cdots, a_{20} \text{ 是首项为 } a_2 = 22, \text{ 公差为 } -6 \text{ 的等差数列, 共有 } 10 \text{ 项, 则 } a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{20} = 10 \times 22 + \frac{9 \times 10}{2} \times (-6) = -50.$$

5. B 【解析】由等差数列 $\{a_n\}$ 得 $a_2 + a_5 + a_8 = 3a_4$, 故 $3(a_5 + a_6) = 18$, 即 $a_5 + a_6 = 6$. 所以 $S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = 5(a_5 + a_6) = 30$. 故选 B.

【点悟】观察下角标之间的关系, 整体代换, 简化运算

6. B 【解析】设这个等差数列为 $\{a_n\}$. 由前四项之和为 21, 末四项之和为 67, 得 $4(a_1 + a_n) = 21 + 67 = 88$, 即 $a_1 + a_n = 22$. 又由前 n 项和为 286, 则 $286 = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = 11n$, 所以 $n = 26$. 故选 B.

7. ABD 【解析】对于 A, $S_9 = \frac{9(a_1 + a_9)}{2} = \frac{9(a_3 + a_7)}{2} = 18$, 故 A 正确;

→ 微黑板: 应用下标和性质进行整体代换

对于 B, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $(a_3 + a_4) - (a_1 + a_2) = 4d = 4$, 得 $d = 1$, 则 $a_7 + a_8 = (a_1 + a_2) + 12d = 5 + 12 = 17$, 故 B 正确;

对于 C, $S_{15} = \frac{15(a_1 + a_{15})}{2} = 15a_8 > 0$, 则

$$a_8 > 0, S_{16} = \frac{16(a_1 + a_{16})}{2} = 8(a_8 + a_9) < 0,$$

则 $a_8 + a_9 < 0$, 即 $0 < a_8 < -a_9$, 所以 $a_8^2 < a_9^2$,

→ 微黑板: 应用下标和性质转化为与相邻两项和有关的式子判断符号

故 C 错误; 对于 D, 若 $S_9 = S_{10}$, 则 $a_{10} = 0$, $S_{18} = \frac{18(a_1 + a_{18})}{2} = 9(a_9 + a_{10}) = 9a_9$,

因为 $a_1 > 0$, $a_{10} = 0$, 所以公差 $d = \frac{a_{10} - a_1}{9} < 0$, 则 $a_9 = a_{10} - d > 0$,

所以 $S_{18} > 0$, 故 D 正确. 故选 ABD.

8. $\begin{cases} n^2 + 2, n \text{ 为奇数}, \\ n^2, n \text{ 为偶数} \end{cases}$ 【解析】依题意,

$a_n + a_{n+1} = 4n$, $a_{n+1} + a_{n+2} = 4n + 4$, 两式相减可得, $a_{n+2} - a_n = 4$.

因为 $a_1 = 3$, 且 $a_1 + a_2 = 4$, 则 $a_2 = 1$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是首项 $a_1 = 3$, 公差为 4 的等差数列,

同时数列 $\{a_n\}$ 的偶数项是首项 $a_2 = 1$, 公差为 4 的等差数列,

所以当 n 为偶数时,

$$S_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_n)$$

$$= 3 \cdot \frac{n}{2} + \frac{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)}{2} \cdot 4 + 1 \cdot \frac{n}{2} + \frac{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right)}{2} \cdot 4 = n^2;$$

同理可得, 当 n 为奇数时,

$$S_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_n) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{n-1})$$

$$= 3 \cdot \frac{n+1}{2} + \frac{\frac{n+1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{2} - 1\right)}{2} \cdot 4 + 1 \cdot \frac{n-1}{2} + \frac{\frac{n-1}{2} \cdot \left(\frac{n-1}{2} - 1\right)}{2} \cdot 4 = n^2 + 2.$$

综上所述, $S_n = \begin{cases} n^2 + 2, n \text{ 为奇数}, \\ n^2, n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

规律方法 对于 $a_{n+1} + a_n = f(n)$ 这样的递推数列, 研究通项的一个思路为通过 $a_{n+2} + a_{n+1} = f(n+1)$ 与原条件作差得到 $a_{n+2} - a_n = f(n+1) - f(n) = g(n)$, 得到数列隔项的递推关系, 然后利用累加法分别研究奇偶数列的通项.

9. C 【解析】由 $S_n = na_1 + \frac{1}{2}n(n-1)d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$, $d < 0$, $a_1 > 0$, 得 $\frac{d}{2} < 0$, $a_1 - \frac{d}{2} > 0$, 所以点 (n, S_n) 所在的曲线开口向下, 且曲线的对称轴为直线 $x = -\frac{a_1 - \frac{d}{2}}{d} > 0$, 故排除 A, B, D. 故选 C.

10. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . \therefore 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ 可看作是关于 n 的二次函数且 $S_3 = S_{10}$, \therefore 二次函数图象的对称轴方程为 $n = \frac{3+10}{2} = \frac{13}{2}$.

又 $\therefore S_6 = S_k$, $\therefore \frac{6+k}{2} = \frac{13}{2}$, 解得 $k = 7$.

11. AD 【解析】对于 A, 因为 $S_n = 11n - n^2$, 所以当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 11 - 1^2 = 10$, 故 A 正确;

对于 B, 当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 11(n-1) - (n-1)^2$, 所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = 11n - n^2 - [11(n-1) - (n-1)^2] = 12 - 2n$, 经检验 $n = 1$ 时也成立, 所以 $a_n = 12 - 2n$, 所以 $a_2 = 8$, $a_3 = 6$, 则 $a_3 < a_2$, 故 B 错误;

对于 C, 因为 $S_n = 11n - n^2 = -\left(n - \frac{11}{2}\right)^2 + \frac{121}{4}$, 所以当 $n = 5$ 或 $n = 6$ 时, S_n 取得

最大值, 且 $(S_n)_{\max} = 30$, 即数列 $\{S_n\}$ 有最大项, 无最小项, 故 C 错误;

对于 D, 因为 $\frac{S_n}{n} = 11 - n$, 所以 $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = 11 - (n+1) - (11 - n) = -1$, 又

$\frac{S_1}{1} = 11 - 1 = 10$, 所以 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是首项为 10, 公差为 -1 的等差数列, 故 D 正确. 故选 AD.

链接教材 本题是教材第 23 页例 9 的变式, 主要考查利用二次函数的性质求等差数列前 n 项和的最值. 等差数列的前 n 项和 S_n 可以写成 $S_n = An^2 + Bn$ (A, B 为常数) 的形式, 利用配方法或二次函数的图象、单调性等求出最值, 但需注意, 因为 n 取正整数, 所以 S_n 不一定是在抛物线的顶点处取得最值, 而可能是在离顶点最近的横坐标取正整数的点处取得最值.

12. -4 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 所以 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$, 又 $S_n = (n+2)^2 + \lambda = n^2 + 4n + 4 + \lambda$,

→ 点悟: 等差数列的前 n 项和可以写成 $An^2 + Bn$ 的形式, 看作二次函数时, 它的常数项为 0

所以 $4 + \lambda = 0$, 解得 $\lambda = -4$.

13. D 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_2 = -3$, $S_5 = -10$,

可得 $\begin{cases} a_1 + d = -3, \\ 5a_1 + 10d = -10, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = -4, \\ d = 1, \end{cases}$ 所以 $a_n = n - 5$.

令 $a_n \geq 0$, 解得 $n \geq 5$, 又数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 $a_5 = 0$, 所以当 $n = 4$ 或 $n = 5$ 时, S_n 取得最小值. 故选 D.

14. ABC 【解析】对 A, 因为等差数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 $d > 0$, 故 A 正确;

对 B, 因为 $a_7 = 3a_5$, 所以 $a_1 + 6d = 3(a_1 + 4d)$, 即 $a_1 = -3d < 0$, 故 B 正确;

对 D, $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2}n^2 - \frac{7d}{2}n$, 则对应二次函数图象的对称轴为 $n = \frac{7}{2}$, 且图象开口向上, 所以当 $n = 3$ 或

4 时, S_n 取得最小值, 故 D 错误;

对 C, 由 $S_n > 0$, 即 $\frac{d}{2}n^2 - \frac{7d}{2}n > 0$, 即 $n^2 - 7n > 0$, 解得 $n < 0$ (舍去) 或 $n > 7$, 所以 $S_n > 0$ 时, n 的最小值为 8, 故 C 正确. 故选 ABC.

15. BC 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 由 $S_{10} = S_{20}$ 得 $a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{20} = 5(a_{11} + a_{20}) = 0$, 解得 $a_{11} + a_{20} = 0$, 所以 $a_1 + a_{30} = 0$.

所以 $S_{30} = \frac{30(a_1 + a_{30})}{2} = 0$, 故 B 正确.

当 $d > 0$ 时, 由 $a_1 + a_{30} = 0 \Rightarrow a_{15} + a_{16} = 0$, 所以 $a_{15} < 0$, $a_{16} > 0$, 所以 $a_{10} + a_{22} = 2a_{16} > 0$, 故 C 正确.

当 $d < 0$ 时, 由 $a_1 + a_{30} = 0 \Rightarrow a_{15} + a_{16} = 0$, 所以 $a_{15} > 0$, $a_{16} < 0$, 所以 $a_{10} + a_{22} = 2a_{16} < 0$, 即 $0 < a_{10} < -a_{22} \Rightarrow |a_{10}| < |a_{22}|$, 故 D 错误.

当 $d > 0$ 时, $n = 15$ 时, S_n 取最小值; 当 $d < 0$ 时, $n = 15$ 时, S_n 取最大值, 故 A 错误. 故选 BC.

16. 1 012 【解析】由 $S_{2\,024} > 0$ 可得 $S_{2\,024} = \frac{2\,024(a_1 + a_{2\,024})}{2} = 1\,012(a_{1\,012} + a_{1\,013}) > 0$, 即 $a_{1\,012} + a_{1\,013} > 0$.

由 $S_{2\,025} < 0$ 可得 $S_{2\,025} = \frac{2\,025(a_1 + a_{2\,025})}{2} = 2\,025a_{1\,013} < 0$, 即

$a_{1\,013} < 0$, 所以 $a_{1\,012} > 0$.

则数列 $\{a_n\}$ 是前 1 012 项为正数, 从第 1 013 项开始为负数的递减数列, 故当 S_n 最大时, $n = 1\,012$.

17. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $a_3 + a_7 + a_{10} = -8$ 及 $S_5 + 2a_4 = -66$, 得 $\begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 6d + a_1 + 9d = -8, \\ 5a_1 + 10d + 2(a_1 + 3d) = -66, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 3a_1 + 17d = -8, \\ 7a_1 + 16d = -66, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = -14, \\ d = 2, \end{cases}$ 则 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n - 16$, $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(n-15)}{2}$, 所以 $a_8 = 0$, $S_{20} = 100$.

(2) 由 (1) 知, $\frac{S_n}{n} = n - 15$, 显然数列

$\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列, 且其首项为 -14, 公差为 1.

易知数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是递增数列, 前 14 项均为负数, 第 15 项为 0, 从第 16 项起为正数,

因此数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 14 项和或前 15

项和最小. 设数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则 $T_{14} = T_{15} = \frac{14 \times (-14-1)}{2} = -105$, 所以数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 的前 14 项和或前 15 项和最小, 最小值为 -105.

刷易错

★易错点 1 错认项数而求和致错

18. C 【解析】易知数列 $1, 4, 7, \dots, 3n+4, 3n+7$ 为等差数列, 且首项为 1, 公差为 3, 项数为 $n+3$, 所以原式 $= \frac{(1+3n+7)(n+3)}{2} = \frac{(n+3)(3n+8)}{2}$.

故选 C.

易错警示 本题的项数为 $n+3$, 易错认为有 n 项.

★易错点 2 忽略零项而致错

19. BC 【解析】令 $a_n = 26 - 2n \geq 0$, 解得 $n \leq 13$, 故数列的前 12 项大于 0, 第 13 项等于 0, 第 13 项后面的项均小于 0. 所以数列 $\{a_n\}$ 的前 12 项和或前 13 项和最大, 故使其前 n 项和 S_n 取最大值的 n 的值为 12 或 13. 故选 BC.

20. 9 或 10 【解析】数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\therefore S_{19} = 0$, $\therefore 19a_1 + \frac{19 \times 18}{2}d = 0$, $\therefore a_1 = -9d$, $\therefore a_1 + 9d = 0$, 即 $a_{10} = 0$. 又 $a_1 > 0$, 则 $d < 0$, 故 $a_9 > 0, a_{10} = 0, a_{11} < 0$, 则当 $n = 9$ 或 10 时, S_n 取得最大值.

易错警示 本题容易漏掉其中的一解而致错, 错因在于忽略零项, 在涉及数列前 n 项和求最值的题目时, 要格外注意是否有零项.

课时 2 等差数列的前 n 项和(2)

刷基础

1. D 【解析】根据等差数列前 n 项和的性质, 可得 $S_4, S_8 - S_4, S_{12} - S_8$ 成等差数列, 所以 $2(S_8 - S_4) = S_{12} - S_8 + S_4$, 即 $2(48 - S_4) = 168 - 48 + S_4$, 解得 $S_4 = -8$. 故选 D.

二级结论 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 d , 则 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}, S_{4n} - S_{3n}, \dots$ 仍成等差数列, 且公差为 n^2d .

2. A 【解析】由等差数列前 n 项和的性质得 $S_{20}, S_{40} - S_{20}, S_{60} - S_{40}$ 成等差数列, $\therefore 2(S_{40} - S_{20}) = S_{20} + S_{60} - S_{40}$, 即 $2(40 - 15) = 15 + S_{60} - 40$, 解得 $S_{60} = 75$. 故选 A.

3. A 【解析】项数为 $2m+1$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 中奇数项共有 $(m+1)$ 项, 其和为 $\frac{(m+1)(a_1 + a_{2m+1})}{2} = \frac{(m+1) \cdot 2a_{m+1}}{2} = (m+1)a_{m+1} = 140$. 项数为 $2m+1$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 中偶数项共有 m 项, 其和为 $\frac{m(a_2 + a_{2m})}{2} = \frac{m \cdot 2a_{m+1}}{2} = ma_{m+1} = 120$, 所以 $\frac{(m+1)a_{m+1}}{ma_{m+1}} = \frac{140}{120} = \frac{7}{6}$, 解得 $m =$

6. 故选 A.

链接教材 本题是教材第 23 页练习第 5 题的同类试题, 考查等差数列奇数项的和与偶数项的和之间的关系与性质. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为 $2n(n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} = nd$, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} =$

$\frac{a_n}{a_{n+1}}$; 若等差数列 $\{a_n\}$ 的项数为 $2n-1(n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} = a_n$, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} = \frac{n}{n-1}$.

4. 5 【解析】设偶数项和为 $32k$, 则奇数项和为 $27k$, 由 $32k + 27k = 59k = 354$ 可得 $k = 6$, 故公差 $d = \frac{32k - 27k}{6} = \frac{5k}{6} = 5$.

5. $\frac{7}{3}$ 【解析】由等差数列的性质得 $\frac{17(a_1 + a_{17})}{2} = \frac{a_9}{b_9} = \frac{2a_9}{b_9} = \frac{a_1 + a_{17}}{b_1 + b_{17}} = \frac{S_{17}}{T_{17}} = \frac{3 \times 17 + 5}{17 + 7} = \frac{56}{24} = \frac{7}{3}$.

二级结论 已知等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n , 则 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}, \frac{a_m}{b_m} = \frac{2n-1}{2m-1} \cdot \frac{S_{2m-1}}{T_{2m-1}}$.

6. $\frac{19}{18}$ 【解析】设 $a_n = k_1n + b_1, b_n = k_2n + b_2(k_1, k_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R})$, 则 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(k_1n + k_1 + 2b_1)}{2}$, $T_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2} = \frac{n(k_2n + k_2 + 2b_2)}{2}$. 故 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{k_1n + k_1 + 2b_1}{k_2n + k_2 + 2b_2} = \frac{2n+1}{n+3}$, 则 $\frac{k_1}{k_1 + 2b_1} = \frac{2}{3}$, $\frac{k_2}{k_2 + 2b_2} = \frac{1}{3}$, 且 $\frac{k_1}{k_2} = 2$. 故 $b_1 = -\frac{1}{4}k_1, b_2 = \frac{1}{2}k_2, k_1 = 2k_2$, 则 $a_n = k_1n - \frac{1}{4}k_1, b_n = \frac{1}{2}k_1n + \frac{1}{2}k_1$, 则 $\frac{a_5}{b_8} = \frac{5k_1 - \frac{1}{4}k_1}{4k_1 + \frac{1}{2}k_1} = \frac{19}{18}$.

7. B 【解析】由等差数列的性质可得 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列, 所以 $\frac{S_{2m-1}}{2m-1} + S_1 = 2$. $\frac{S_m}{m}$, 则 $\frac{S_{2m-1}}{2m-1} - S_1 = 2\left(\frac{S_m}{m} - S_1\right) = 2$. 故选 B.

归纳总结 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 a_1 为首项, 数列 $\{a_n\}$ 的公差的一半为公差的等差数列.

8. ABD 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 由 $S_2 = -7, S_4 = -2$ 可得 $\begin{cases} 2a_1 + d = -7 \\ 4a_1 + 6d = -2 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = -5 \\ d = 3 \end{cases}$, 所以数列

$\{a_n\}$ 的公差为 3, A 正确;

依题意可得 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{3n^2 - 13n}{2}$, 所以 $\frac{S_n}{n} = \frac{3n-13}{2}, \frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = \frac{3(n+1)-13}{2} - \frac{3n-13}{2} = \frac{3}{2} > 0$, B 正确;

由 $S_n = \frac{3n^2 - 13n}{2} = \frac{3\left(n^2 - \frac{13}{3}n\right)}{2} = \frac{3\left(n - \frac{13}{6}\right)^2 - \frac{169}{12}}{2}$, 由二次函数的性质以及 $n \in \mathbf{N}^*$ 可得, 当 $n = 2$ 时, S_n 取得最小值, 因此数列 $\{S_n\}$ 中的最小项为 S_2 , C 错误;

由 $S_n + (S_{3n} - S_{2n}) - 2(S_{2n} - S_n) = S_{3n} - 3S_{2n} + 3S_n = \frac{27n^2 - 39n}{2} - 3 \cdot \frac{12n^2 - 26n}{2} + 3 \cdot \frac{3n^2 - 13n}{2} = \frac{1}{2}(27n^2 - 39n - 36n^2 + 78n + 9n^2 - 39n) = 0$, 所以 $S_n, S_{2n} - S_n, S_{3n} - S_{2n}$ 成等差数列, D 正确. 故选 ABD.

9. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由题意可得 $\begin{cases} a_1 + 7d = -6 \\ 6a_1 + \frac{6 \times 5}{2}d = 18 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 8 \\ d = -2 \end{cases}$, 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 10 - 2n, n \in \mathbf{N}^*$. (2) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则由 (1) 可得, $S_n = 8n + \frac{n(n-1)}{2} \times (-2) = -n^2 + 9n, n \in \mathbf{N}^*$.

由 (1) 知 $a_n = 10 - 2n$, 令 $a_n = 0$, 得 $n = 5$, 当 $n > 5$ 时, $a_n < 0$, 当 $n < 5$ 时, $a_n > 0$. 因此当 $n \leq 5$ 时, 可得 $T_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = a_1 + a_2 + \dots + a_n = -n^2 + 9n$, 当 $n \geq 6$ 时, 可得 $T_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| = a_1 + a_2 + \dots + a_5 - a_6 - a_7 - \dots - a_n = S_5 - (S_n - S_5) = 2S_5 - S_n$. 因为 $S_5 = 45 - 25 = 20$, 所以 $T_n = 40 - (-n^2 + 9n) = n^2 - 9n + 40$.

所以 $T_n = \begin{cases} -n^2 + 9n, n \leq 5 \\ n^2 - 9n + 40, n \geq 6 \end{cases}, n \in \mathbf{N}^*$.

名师点拨 求解第 (2) 问时, 等差数列 $\{a_n\}$ 中有正数项也有负数项, 去绝对值符号前应先分类讨论, 故需先判断出当 $n \leq 5$ 时, $a_n \geq 0$, 当 $n \geq 6$ 时, $a_n < 0$, 再分 $n \leq 5$ 和 $n \geq 6$ 两种情况求解 T_n .

10. B 【解析】 $\because a_n \cdot b_n = 1$, $\therefore b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2 + 3n + 2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. 设数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则

敲黑板: 把分母因式分解为 $(n+1) \cdot (n+2)$ 的形式即可裂项 $S_{100} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) + \left(\frac{1}{101} - \frac{1}{102}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{102} = \frac{25}{51}$. 故选 B.

11. B 【解析】因为 $S_n = n^2$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = (n-1)^2$, 所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n-1$, $a_1 = S_1 = 1$ 也符合上式, 故 $a_n = 2n-1$.

→ **避坑:** 此步不可省略

$$\begin{aligned} \text{因此 } \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n+1}}} &= \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n-1} + \sqrt{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}}{2n-1 - (2n+1)} \\ &= \frac{\sqrt{2n-1} - \sqrt{2n+1}}{-2} = \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}}{2} \end{aligned}$$

选 B.

规律方法 裂项相消法求和的关键是将数列的通项列成两个结构相同的式子之差的形式, 求和时相邻两项相消或隔项相消, 需要特别注意前面几项和后面几项, 找到相消的规律, 保证正确相消, 避免多项或漏项. 常见的裂项技巧

$$\begin{aligned} (1) a_n &= \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right) \quad (k \neq 0); \\ (2) a_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}; \\ (3) a_n &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right); \\ (4) a_n &= \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]; \\ (5) a_n &= \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}. \end{aligned}$$

刷提升

1. C 【解析】由 $S_3 = 9, S_6 = 36$, 得 $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 9, a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3(a_2 + a_5) = 36$, 所以 $a_2 = 3, a_4 + a_5 = 12$, 解得 $a_5 = 9$. 故选 C.

2. D 【解析】∵ 等差数列的前 n 项、前 $2n$ 项、前 $3n$ 项的和分别为 A, B, C , ∴ $A, B-A, C-B$ 仍然成等差数列, ∴ $2(B-A) = C-B+A$, 化简得 $3A+C=3B$, 即 $3(B-A)=C$. 故选 D.

3. D 【解析】由 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n-1}{3n+2}$, 可设 $S_n = kn(2n-1), T_n = kn(3n+2), k \neq 0$, 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = kn(2n-1) - k(n-1)(2n-3) = k(4n-3), b_n = T_n - T_{n-1} = kn(3n+2) - k(n-1)(3n-1) = k(6n-1)$, 所以 $\frac{a_6}{b_3} = \frac{4 \times 6 - 3}{6 \times 3 - 1} = \frac{21}{17}$, 故选 D.

4. C 【解析】因为 $a_{n+1} = a_n + n + 1$, 所以 $a_{n+1} - a_n = n + 1$, 又因为 $a_1 = 1$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1$

$$= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

其中 $a_1 = 1$ 也满足 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, 故对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的第 100 项为 $a_{100} = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$, 故 A 正确, D 正确;

$$\text{又由 } \frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right),$$

所以数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 的前 100 项和为

$$2 \times \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101} \right) \right] = 2 \times \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{200}{101},$$

故 B 正确, C 错误. 故选 C.

5. A 【解析】∵ 最上层有 1 个球, 第二层有 3 个, 第三层有 6 个, ∴ $a_{n+1} - a_n = n+1$, 且 $a_1 = 1$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}, \text{ 又 } a_1 = 1 \text{ 也符合该式, } \therefore \frac{a_n}{n} = \frac{n+1}{2}.$$

$$\therefore a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_{10}}{10} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \cdots +$$

$$\frac{11}{2} = \frac{10 \times \left(1 + \frac{11}{2} \right)}{2} = \frac{65}{2}. \text{ 故选 A.}$$

6. ABC 【解析】因为 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 所以 $S_n = an^2 + bn(a, b \text{ 为常数, } n \in \mathbb{N}^*)$.

当 $a=0, b \neq 0$ 时, 该函数的图象是过原点的直线上一些孤立的点, 如选项 C;

当 $a \neq 0$ 时, 该函数的图象是过原点的抛物线上一些孤立的点, 如选项 A, B; 选项 D 中的曲线不过原点, 不符合题意. 故选 ABC.

7. ABC 【解析】对于 A, 因为等差数列 $\{a_n\}$ 中, $S_{16} = \frac{16(a_1 + a_{16})}{2} = \frac{16(a_8 + a_9)}{2} > 0, a_9 < 0$, 所以 $a_8 > 0, d = a_9 - a_8 < 0$, A 正确;

对于 B, 由 A 知当 $n=8$ 时, S_n 取得最大值, B 正确;

对于 C, $a_4 + a_5 + a_{18} = 3a_1 + 24d = 3(a_1 + 8d) = 3a_9 < 0$, C 正确;

$$\text{对于 D, } S_{16} > 0, S_{17} = \frac{17(a_1 + a_{17})}{2} =$$

$17a_9 < 0$, 故使得 $S_n > 0$ 成立的最大自然数 n 是 16, D 错误. 故选 ABC.

8. ACD 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

对于 A: $S_6 = 6a_1 + 15d, 3(S_4 - S_2) = 3[4a_1 + 6d - (2a_1 + d)] = 6a_1 + 15d$, 所以 $S_6 = 3(S_4 - S_2)$, 故 A 正确;

$$\text{对于 B: } S_{15} = 15a_1 + \frac{15 \times 14}{2}d = 15a_1 +$$

$$105d, 5(a_4 + a_8 + a_k) = 5[a_1 + 3d + a_1 + 7d + a_1 + (k-1)d] = 15a_1 + 5(k+9)d,$$

又 $d \neq 0, S_{15} = 5(a_4 + a_8 + a_k)$, 所以 $105 = 5(k+9)$, 解得 $k=12$, 故 B 错误;

对于 C: 由等差数列前 n 项和的性质可知, $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}$ 是公差为 k^2d

的等差数列, 所以 $S_{2n}, S_{4n} - S_{2n}, S_{6n} - S_{4n}$ 成等差数列, 故 C 正确;

$$\text{对于 D: 因为 } \frac{S_{2n}}{2n} = \frac{2na_1 + (2n^2 - n)d}{2n} =$$

$$a_1 + \left(n - \frac{1}{2} \right)d, \text{ 所以 } \frac{S_{2(n+1)}}{2(n+1)} - \frac{S_{2n}}{2n} =$$

$$\left[a_1 + \left(n+1 - \frac{1}{2} \right)d \right] - \left[a_1 + \left(n - \frac{1}{2} \right)d \right] =$$

$$d, \text{ 所以 } \left\{ \frac{S_{2n}}{2n} \right\} \text{ 是公差为 } d \text{ 的等差数列,}$$

故 D 正确. 故选 ACD.

9. 55 【解析】要求满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 2025$ 的 k 的最大值, 且 $a_1 = 9$,

那么若 $\{a_n\} (n=1, 2, \cdots, k-1, n \in \mathbb{N}^*)$ 是公差为 1 的等差数列,

→ **点悟:** 数列 $\{a_n\}$ 各项之间的差尽可能小, 但前 k 项的和恰好为 2025, 所以 $\{a_n\}$ 可能不是从第 1 项到第 k 项的等差数列

则 $a_n = a_1 + (n-1)d = n+8$, 则 $a_1 +$

$$a_2 + \cdots + a_{k-1} = \frac{(a_1 + a_{k-1})(k-1)}{2} =$$

$$\frac{(k+16)(k-1)}{2}, \text{ 则 } \frac{(k+16)(k-1)}{2} \leq 2025,$$

当 $k=56$ 时, $a_{k-1} = 63$, 此时 $a_k = 2025 - \frac{(56+16) \times (56-1)}{2} = 45 < 63$, 不满足题意;

当 $k=55$ 时, $a_{k-1} = 62$, 此时 $a_k = 2025 - \frac{(55+16) \times (55-1)}{2} = 108 > 62$, 满足题意.

$$\text{综上, } k \text{ 的最大值为 } 55.$$

10. $-m-n$ 【解析】∵ $\{a_n\}$ 是等差数列, ∴ $\left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 也为等差数列, 设其公差为 D .

$$\therefore \frac{S_{m+n}}{m+n} - \frac{S_m}{m} = nD, \frac{S_n}{n} - \frac{S_m}{m} = (n-m)D,$$

$$\therefore \frac{S_{m+n}}{m+n} - \frac{n}{m} = \frac{m-n}{m}, \text{ 解得 } S_{m+n} =$$

$$-m-n.$$

$$\therefore \frac{S_{m+n}}{m+n} = \frac{n}{n-m}, \text{ 解得 } S_{m+n} =$$

$$-m-n.$$

多种解法 不妨设 $m > n$,

$$\text{则 } S_m - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{m-1} +$$

$$a_m = \frac{(m-n)(a_{n+1} + a_m)}{2} = n-m,$$

$$\therefore a_1 + a_{m+n} = a_{n+1} + a_m = -2.$$

$$\therefore S_{m+n} = \frac{(m+n)(a_1 + a_{m+n})}{2} = -m-n.$$

11. 【解】 (1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , ∴ $a_2 + a_5 = 12, a_6 = 11$,

$$\therefore \begin{cases} a_1 + d + a_1 + 4d = 12, \\ a_1 + 5d = 11, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases}$$

$$\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } a_n = 2n-1,$$

$$\therefore b_1 b_n = 2^{11-a_n} = 2^{11-(2n-1)} = 2^{12-2n},$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } b_1^2 = 2^{10}, \text{ 又 } b_1 > 0, \therefore b_1 = 2^5, \therefore b_n = 2^{7-2n}.$$

$$\text{则 } T_n = b_1 b_2 b_3 \cdots b_n = 2^5 \cdot 2^3 \cdot$$

$$2^1 \cdots 2^{7-2n} = 2^{5+3+1+\cdots+(7-2n)} = 2^{-n^2+6n}.$$

12. 【解】 (1) 当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 4-25=-21$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (4n^2 - 25n) - [4(n-1)^2 - 25(n-1)] = 8n-29$.

当 $n=1$ 时, $a_1 = -21 = 8 \times 1 - 29$ 也符合上式, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 8n-29$.

(2) 令 $a_n = 8n - 29 \geq 0$, 又 $n \in \mathbb{N}^+$, 解得 $n \geq 4$.

当 $n \leq 3$ 时, $T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = -S_n = 25n - 4n^2$;

当 $n \geq 4$ 时, $T_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_6| + |a_7| + \cdots + |a_n| = -a_1 - a_2 - a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_n = -S_3 + S_n - S_3 = 4n^2 - 25n + 78$,

所以 $T_n = \begin{cases} 25n - 4n^2, & n \leq 3, \\ 4n^2 - 25n + 78, & n \geq 4. \end{cases}$

❶ 黑板: $a_1 < 0, d > 0$, 则若

$a_k \leq 0, a_{k+1} > 0$, 有 $T_n = \begin{cases} -S_n, & n \leq k, \\ S_n - 2S_k, & n \geq k+1 \end{cases}$

特别注意 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和的注意事项

一般地, 数列 $\{|a_n|\}$ 与数列 $\{a_n\}$ 是两个不相同的数列, 只有数列 $\{a_n\}$ 中的每一项都是非负数时, 它们表示的才是同一数列. 因此, 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和时, 应先弄清 n 取什么值时 $a_n \geq 0$ 或 $a_n < 0$, 去掉绝对值符号后再求和.

13. 【解】(1) 由 $a_2 + a_4 = 10, S_7 = 49$, 可得 $\begin{cases} 2a_1 + 4d = 10, \\ 7a_1 + 21d = 49, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases}$ 所以 $a_n = 2n - 1$.

(2) 由(1)可得 $S_n = \frac{n(1+2n-1)}{2} = n^2$,

所以 $\frac{1}{S_{n+1}-1} = \frac{1}{(n+1)^2-1} = \frac{1}{2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)}$,

所以 $T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3n^2 + 5n}{4(n+1)(n+2)}$.

(3) 假设存在正整数 $m, n (n > m > 2)$, 使得 $\frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_m}, \frac{1}{a_n}$ 成等差数列, 则 $\frac{2}{a_m} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_2}$, 即 $\frac{2}{2m-1} = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3}$, 整理得 $3(2n-1) = (2m-1)(n+1)$, 得 $n = \frac{2(m+1)}{7-2m}$, 由 n 为正整数, 可知

$7-2m > 0$, 即 $m < \frac{7}{2}$, 又 $m > 2, m$ 为正整数, 所以 $m=3$, 可得 $n=8$, 所以 $n=8, m=3$ 满足题意.

第 4.2 节综合训练

刷能力

1. A 【解析】 $S_5 = \frac{(a_1+a_5) \times 5}{2} = 5a_3 > 0$,

则 $a_3 = a_2 + d = 2 + d > 0$, 得 $d > -2$.

$S_6 = \frac{(a_1+a_6) \times 6}{2} = 3(a_2+a_5) < 0$, 则 $a_2 +$

$a_5 < 0$, 则 $2a_2 + 3d < 0$, 得 $d < -\frac{4}{3}$.

故公差 d 的取值范围为 $\left(-2, -\frac{4}{3}\right)$. 故选 A.

2. C 【解析】由 $a_k^2 - a_{k-1} - a_{k+1} = 0$, 得 $a_k^2 = a_{k-1} + a_{k+1} = 2a_k$, 解得 $a_k = 0$ 或 2.

由于 $S_{2k-1} = \frac{(2k-1)(a_1+a_{2k-1})}{2} = (2k-1) \cdot a_k = 22$, 显然 $a_k = 2$, 解得 $k=6$. 故选 C.

二级结论 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 有 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$; $S_{2n} = n(a_n + a_{n+1})$.

3. C 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, 所以 $a_{2n-1} + 2a_{2n} - (a_{2n-3} + 2a_{2n-2}) = (a_{2n-1} - a_{2n-3}) + 2(a_{2n} - a_{2n-2}) = 2 + 2 \times 2 = 6 (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^+)$, 所以 $\{a_{2n-1} + 2a_{2n}\}$ 是公差为 6 的等差数列. 故选 C.

4. C 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 16 项和中奇数项的和为 $S_{奇}$, 偶数项的和为 $S_{偶}$, 则 $S_{奇} = a_1 + a_3 + \cdots + a_{15}$, $S_{偶} = a_2 + a_4 + \cdots + a_{16}$. 根据题意可得 $S_{奇} + S_{偶} = 640$, 又 $S_{偶} : S_{奇} = 11 : 9$, 解得 $S_{奇} = 288, S_{偶} = 352$. 则 $S_{偶} - S_{奇} = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{16} - a_{15}) = 8d = 352 - 288$, 解得 $d = \frac{64}{8} = 8$. 故选 C.

5. D 【解析】已知 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+2}{4n+5}$, 不妨设 $S_n = (3n+2)nk, T_n = (4n+5)nk (k \neq 0)$.

因为 P, B, C 三点共线, 所以 $\frac{a_2+a_6}{b_3} + \lambda = 1$, 所以 $\frac{2a_4}{b_3} + \lambda = 1, \frac{a_4}{b_3} = \frac{2a_4}{2b_3} =$

$\frac{a_1+a_7}{b_1+b_5} \times \frac{7}{5} = \frac{S_7}{T_5} \times \frac{5}{7} = \frac{a_1+a_7}{b_1+b_5} \times \frac{5}{7} = \frac{7k(21+2)}{5k(20+5)} \times \frac{5}{7} = \frac{23}{25}$, 所以 $\frac{2a_4}{b_3} + \lambda = \frac{46}{25} + \lambda = 1$, 解得 $\lambda = -\frac{21}{25}$, 故选 D.

6. C 【解析】若某个二阶等差数列的前 4 项为 2, 3, 6, 11, 设这个二阶等差数列为 $\{a_n\}$, 则 $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 6, a_4 = 11$, 可得 $a_2 - a_1 = 1, a_3 - a_2 = 3, a_4 - a_3 = 5, \cdots, a_n - a_{n-1} = 2n-3$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = 2 + \frac{(n-1)(1+2n-3)}{2} = n^2 - 2n + 3$,

所以 $a_{28} = 28^2 - 2 \times 28 + 3 = 731$. 故选 C.

7. D 【解析】当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{3}{4}$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1}{4}n(n+2) - \frac{1}{4}(n-1)(n+1) = \frac{2n+1}{4}$.

$a_1 = \frac{3}{4}$ 也满足上式, 故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{2n+1}{4}$.

所以 $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{16}{(2k+1)(2k+3)} = 8 \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right)$,

则 $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = 8 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{21} - \frac{1}{23} \right) = 8 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{23} \right) = \frac{160}{69}$. 故选 D.

8. ACD 【解析】根据题意可得 $\begin{cases} S_8 < S_9, \\ S_{10} < S_9, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} S_9 - S_8 = a_9 > 0, \\ S_{10} - S_9 = a_{10} < 0, \end{cases}$

则 $\begin{cases} a_1 + 8d > 0, \\ a_{10} - a_9 = d < 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 > 0, \\ d < 0, \end{cases}$ 故 A 正确; 由 $S_{10} < S_8$, 可得 $a_9 + a_{10} < 0$, 所以 $a_8 + a_{11} < 0$, 又 $a_9 > 0, d < 0$, 所以 $a_8 > 0, a_{11} < 0$, 所以 $a_{10} + a_{11} + a_8 + a_9 < 0$, 又 $a_{10} < 0$, 所以 $|a_8 + a_9| < |a_{10} + a_{11}|$, 故 C 正确; 由以上可得, $a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_9 > 0 > a_{10} > a_{11} > \cdots$,

$S_{17} = \frac{17(a_1+a_{17})}{2} = 17a_9 > 0$, 而 $S_{18} = \frac{18(a_1+a_{18})}{2} = 9(a_9+a_{10}) < 0$,

当 $n \leq 17$ 时, $S_n > 0$, 当 $n \geq 18$ 时, $S_n < 0$, 所以使得 $S_n > 0$ 成立的最大自然数 $n=17$, 故 B 错误;

当 $n \leq 9$ 或 $n \geq 18$ 时, $\frac{S_n}{a_n} > 0$; 当 $9 < n < 18$ 时, $\frac{S_n}{a_n} < 0$, 由 $0 > a_{10} > a_{11} > \cdots > a_{17}, S_{10} >$

$S_{11} > S_{12} > \cdots > S_{17} > 0$, 所以 $\left\{ \frac{S_n}{a_n} \right\}$ 中的最小项为 $\frac{S_{10}}{a_{10}}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

❶ 黑板: 此部分内, 分子大于 0 且

递减, 分母小于 0 且递减, 则数列 $\left\{ \frac{S_n}{a_n} \right\}$ 单调递增

9. $a_n = n^2 + 2n$ 【解析】因为 $a_{n+1} = a_n +$

$2\sqrt{a_n+1} + 1$, 所以 $a_{n+1} + 1 = (\sqrt{a_n+1})^2 + 2\sqrt{a_n+1} + 1$, 即 $a_{n+1} + 1 = (\sqrt{a_n+1} + 1)^2$, 又 $a_1 = 3$, 所以 $a_n > 1$, 等式两边开方可得 $\sqrt{a_{n+1}+1} = \sqrt{a_n+1} + 1$, 即 $\sqrt{a_{n+1}+1} - \sqrt{a_n+1} = 1$, 所以数列 $\{\sqrt{a_n+1}\}$ 是首项为 $\sqrt{a_1+1} = 2$, 公差为 1 的等差数列, 所以 $\sqrt{a_n+1} = 2 + (n-1) \times 1 = n+1$, 所以 $a_n = n^2 + 2n$.

规律方法 碰到整式和根式同时出现时, 要有意识地把根式当作主元, 把整式看作是与根式的平方有关系的式子去进行代数变形.

10. ①②④ 【解析】由题意, 3, 15, 21 是等差数列的三项, 若数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则 $0 < d \leq 6$, 且因为 $21 - 15 = 6, 15 - 3 = 12, 21 - 3 = 18$, 所以 6, 12, 18 都是公差 d 的倍数, 且 d 是整数, 所以 d 的可能取值是 1, 2, 3, 6. 同理, 若数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, 则 $-6 \leq d < 0$, d 的可能取值是 -1, -2, -3, -6. 所以满足条件的 d 有 8 个不同的取值, 故 ① 正确;

因为 $99 - 21 = 78$, 是 6 的倍数, 所以是公差 d 的倍数, 即 $99 = 21 + nd, n \in \mathbb{N}^+$, 所以存在 a_1 , 使得 99 一定是数列 $\{a_n\}$ 中的一项, 故 ② 正确; 因为 $30 - 21 = 9$ 不是 6 的倍数, 若公差 $d=6$, 则 30 不是数列 $\{a_n\}$ 中的一项, 故 ③ 错误;

若 $S_{2n} = 4S_n$, 则 $2na_1 + \frac{2n(2n-1)}{2}d = 4 \times \left[na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \right]$, 化简得 $d = 2a_1$, 所以只要 $d = 2a_1$, 对任意的 $n \in \mathbb{N}^+$, $S_{2n} = 4S_n$ 成立, 故 ④ 正确.

11. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 当 $n=1$ 时, a_1, a_2 是方程 $x^2-4x+b_1=0$ 的两个根, 由根与系数的关系得 $a_1+a_2=2a_1+d=4$. ①

当 $n=2$ 时, a_2, a_3 是方程 $x^2-8x+b_2=0$ 的两个根, 由根与系数的关系得 $a_2+a_3=2a_1+3d=8$. ②

由①②联立解得 $a_1=1, d=2$, 所以 $a_2=3$.

(2) 由(1)知 $a_1=1, d=2$, 所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$, 则 $a_{n+1}=2n+1$.

对于方程 $x^2-4nx+b_n=0$, 由根与系数的关系得 $a_n a_{n+1}=b_n$, 即 $b_n=(2n-1) \cdot (2n+1)=4n^2-1$.

(3) $c_n = \frac{1}{b_n} + (-1)^n a_n =$

$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + (-1)^n \cdot (2n-1) =$

$(-1)^n \cdot (2n-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$

所以 $S_{2n} = -1+3-5+7-\cdots+(-1)^{2n} \cdot$

$(4n-1) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots +$

$\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1} \right) = 2n + \frac{1}{2} \left(1 -$

$\frac{1}{4n+1} \right) = \frac{4n(2n+1)}{4n+1}.$

12. 【解】(1) 因为 $2b_{n-1}-b_n b_{n-1}=1$, 所以 $b_{n-1} \neq 0, b_n=2-\frac{1}{b_{n-1}}$, 所以 $1-b_n=1-$

$\left(2-\frac{1}{b_{n-1}} \right) = \frac{1-b_{n-1}}{b_{n-1}}$, 又 $b_1=\frac{4}{5}$, 所以 $b_n \neq 1$,

则 $\frac{2}{1-b_n} = \frac{2b_{n-1}}{1-b_{n-1}}$, 即 $\frac{2}{1-b_n} - \frac{2}{1-b_{n-1}} =$

$$\frac{2b_{n-1}}{1-b_{n-1}} - \frac{2}{1-b_{n-1}} = -2(n \geq 2).$$

因为 $b_1=\frac{4}{5}$, 所以 $\frac{2}{1-b_1}=10$, 又 $a_n=$

$\frac{2}{1-b_n}$, 所以 $a_n - a_{n-1} = -2, a_1=10$.

所以 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=10$, 公差 $d=-2$ 的等差数列, 故 $a_n=a_1+(n-1)d=10+(n-1) \times (-2)=12-2n$.

(2) 根据等差数列的前 n 项和公式可得 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = \frac{n(10+12-2n)}{2} =$

$$11n - n^2.$$

对于二次函数 $y=-x^2+11x$, 其图象的对

称轴为直线 $x=-\frac{11}{2 \times (-1)} = \frac{11}{2} = 5.5$.

因为 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以当 $n=5$ 或 $n=6$ 时,

S_n 取得最大值, 当 $n=5$ 时, $S_5=11 \times 5 - 5^2 = 30$, 当 $n=6$

$$\text{时, } S_6=11 \times 6 - 6^2 = 30,$$

所以 S_n 存在最大值, 最大值为 30, 此

时 $n=5$ 或 $n=6$.

13. (1) ①【解】 $c_1=b_1-a_1=1-1=0$, $c_2=\max\{b_1-2a_1, b_2-2a_2\}=\max\{1-2 \times 1, 3-2 \times 2\}=-1$,

$c_3=\max\{b_1-3a_1, b_2-3a_2, b_3-3a_3\}=\max\{1-3 \times 1, 3-3 \times 2, 5-3 \times 3\}=-2$.

②【证明】当 $n \geq 3$ 时, $(b_{k+1}-na_{k+1})-(b_k-na_k)=(b_{k+1}-b_k)-n(a_{k+1}-a_k)=2-n < 0$, 所以数列 $\{b_k-na_k\} (k \in \mathbb{N}^*)$ 是递减数列.

所以 $c_n=\max\{b_1-a_1n, b_2-a_2n, \dots, b_n-a_n n\}=b_1-a_1n=1-n$, 又 $c_1=0, c_2=-1$, 所以对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n=1-n$,

于是 $c_{n+1}-c_n=-1$, 所以 $\{c_n\}$ 是等差数列.

4.3 等比数列

$$\frac{1}{a_n}$$

对于 D, 因为 $\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}$, 所以

$\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 是等比数列, D 正确. 故选 ABD.

归纳总结 判断一个数列是否为等比数列的方法

(1) 定义法: $\frac{a_n}{a_{n-1}}=q (q \neq 0, n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*, a_n \neq 0) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 等比中项法: $a_n^2=a_{n-1} \cdot a_{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*, a_n \neq 0) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列;

(3) 通项公式法: $a_n=k \cdot q^{n-1} (k \neq 0, q \neq 0, n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是首项为 k , 公比为 q 的等比数列.

4. (1) 【解】因为 $S_n=2a_n+1$, 所以当 $n=1$ 时, $S_1=2a_1+1$, 所以 $a_1=-1$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1}=2a_{n-1}+1$, 所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$, 即 $a_n=2a_{n-1}$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 -1 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n=-1 \times 2^{n-1}=-2^{n-1}$.

(2) 【证明】由(1)知 $b_n=a_{n+1}+2a_n=-2^n-2^n=-2^{n+1}$, 所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{-2^{n+2}}{-2^{n+1}}=2$, 所以 $\{b_n\}$ 是等比数列.

(2) 【证明】设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2 ,

则 $b_k-na_k=b_1+(k-1)d_2-[a_1+(k-1)d_1]n=b_1-a_1n+(d_2-nd_1)(k-1)$, 所以

$$c_n=\begin{cases} b_1-a_1n+(n-1)(d_2-nd_1), & d_2>nd_1, \\ b_1-a_1n, & d_2\leq nd_1. \end{cases}$$

①当 $d_1>0$ 时, 取正整数 $m>\frac{d_2}{d_1}$, 则当

$n \geq m$ 时, $nd_1>d_2$, 因此 $c_n=b_1-a_1n$. 此时, $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$ 是等差数列.

②当 $d_1=0$ 时, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n=b_1-a_1n+(n-1)\max\{d_2, 0\}=b_1-a_1+(n-1)(\max\{d_2, 0\}-a_1)$. 此时, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ 是等差数列.

③当 $d_1<0$ 时, 当 $n>\frac{d_2}{d_1}$ 时, 有 $nd_1<d_2$.

$$\text{所以 } \frac{c_n}{n} = \frac{b_1-a_1n+(n-1)(d_2-nd_1)}{n} =$$

$$n(-d_1)+d_1-a_1+d_2+\frac{b_1-d_2}{n} \geq n(-d_1)+$$

$$d_1-a_1+d_2-|b_1-d_2|>M.$$

对任意正数 M , 取正整数 $m>$

$$\max\left\{\frac{M+|b_1-d_2|+a_1-d_1-d_2}{-d_1}, \frac{d_2}{d_1}\right\},$$

故当 $n \geq m$ 时, $\frac{c_n}{n}>M$.

刷素养

14. 【解】设 $f(k)=1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$,

则 $f(63)<2\ 024<f(64)$. 设数列 $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$ 为数列 $\{a_n\}$, 则

$a_{2\ 024}=64, 64$ 模 5 的余数为 4. 因此第 2 024 项模 5 的值为 4.

4.3.1 等比数列的概念

刷基础

1. B 【解析】由等比数列的定义可知, 等比数列是根据比值来定义的, 故等比数列的每一项和公比都不能为零, 故①②错误; 一个非零的常数列, 一定是等比数列, 其公比为 1, 故③正确; 由于 $\frac{4^2}{2^2} \neq$

$\frac{6^2}{4^2}$, 故不成等比数列, 故④错误. 故选 B.

【敲黑板】不满足数列中的每一项与它的前一项的比都等于同一个常数

2. A 【解析】因为 $\{a_n\}$ 为等比数列且通项公式为 $a_n=-2 \times 3^n$, 所以公比 $q=$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{-2 \times 3^n}{-2 \times 3^{n-1}} = 3, \text{ 故选 A.}$$

3. ABD 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$.

对于 A, $a_2^2=(a_1q)^2=a_1^2q^2, a_3 \cdot a_7=(a_1q^2) \cdot (a_1q^6)=a_1^2q^8$,

所以 $a_2^2=a_3 \cdot a_7$, 则 a_3, a_5, a_7 成等比数列, A 正确;

对于 B, 因为 $\frac{a_{n+1}^3}{a_n^3}=q^3$, 所以 $\{a_n^3\}$ 是等比数列, B 正确;

对于 C, 不妨设等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=1$, 则 $\lg a_n=0$, 此时 $\{\lg a_n\}$ 不是等比数列, C 错误;

对于 D, 因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, 所以 $\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=q^2$, 所以 $\{a_n^2\}$ 是等比数列, D 正确.

对于 E, 因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, 所以 $\frac{a_{n+1}^3}{a_n^3}=q^3$, 所以 $\{a_n^3\}$ 是等比数列, E 正确.

对于 F, 因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, 所以 $\frac{a_{n+1}^4}{a_n^4}=q^4$, 所以 $\{a_n^4\}$ 是等比数列, F 正确.