

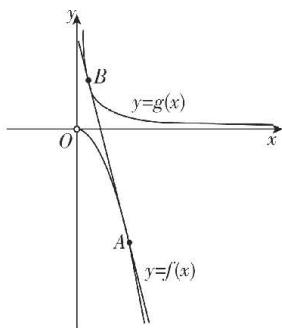
$(0, +\infty)$ 上的图象切于点 $A(x_1, -2x_1^2)$, 与 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的图象切于点 $B(x_2, \frac{16}{x_2})$,

$$f'(x) = -4x, g'(x) = -\frac{16}{x^2}, \text{ 则 } k =$$

$$-\frac{2x_1^2}{x_2} = -4x_1 = -\frac{16}{x_2^2}, \text{ 则 } \frac{8}{x_2} = x_1 -$$

$$2x_1x_2, \text{ 且 } x_1 = \frac{4}{x_2}, \text{ 解得 } x_2 = 1,$$

所以公切线的斜率 $k = -16$, 结合图象可知, “隔离直线”斜率的取值范围为 $(-16, 0]$.



名师点拨 利用极限的思想, $y=0$ 即 x 轴可以看作是 $g(x)$ 在正无穷大处的切线, 也是一条公切线, 所以所求直线的斜率介于两条公切线斜率之间.

5.3 导数在研究函数中的应用

5.3.1 函数的单调性

刷基础

1. AD 【解析】对于 A, $y' = 1 + \ln x$, 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $y' < 0$, 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $y' > 0$,

因此函数 $y = x \ln x$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递

减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, **A 符合**;

对于 B, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $0 < x < e$ 时, $y' > 0$,

当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 因此函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, **B 不符合**;

对于 C, 当 $x > 0$ 时, $y' = (x+1)e^x > 0$, 函数 $y = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, **C 不符合**;

对于 D, $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, 因此函数 $y = \frac{e^x}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, **D 符合**. 故选 AD.

2. C 【解析】令 $f(x) = \frac{\lg |x|}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

❶ 黑板: 定义域优先原则

$$\therefore f(-x) = \frac{\lg |-x|}{-x} = -\frac{\lg |x|}{x} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数, **排除 B**;

又当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, **排除 A**;

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{\lg x}{x},$$

$$\therefore f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x \ln 10} - \lg x}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 10} - \lg x}{x^2} = \frac{\lg e - \lg x}{x^2},$$

\therefore 当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 故 **D 不正确**. 故选 C.

3. C 【解析】因为 $f'(x) = \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} - 1 = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2}$ ($x > 0$), 所以令 $f'(x) > 0$, 即 $-x^2 + 4x - 3 > 0$, 解得 $1 < x < 3$, 所以函数的单调递增区间为 $(1, 3)$. 故选 C.

4. C 【解析】由题图可得, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 结合选项可知 C 符合题意. 故选 C.

链接教材 本题是教材第 89 页练习第 3 题的延伸, 考查导函数图象与原函数图象的关系, 解决函数问题时经常会利用导函数判断原函数的单调性. 对导函数图象, 应注意分析其在区间内的正负; 对原函数图象, 应注意分析其在区间内的单调趋势. 导数值在哪个区间内大于 0, 则原函数在对应区间内单调递增; 导数值在哪个区间内小于 0, 则原函数在对应区间内单调递减.

5. 【解】 (1) 因为 $f(x) = x + a \sin x$, 所以 $f'(x) = 1 + a \cos x$.

因为 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $x+y=0$, 所以 $f'(0) = 1+a = -1$, 所以 $a = -2$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = x - 2 \sin x$, 则 $f'(x) = 1 - 2 \cos x$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{3}$ 或 $x = \frac{5\pi}{3}$.

当 $x \in (0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$ 上单调递减;

当 $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ 上单调递增.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$, 单调递减区间为 $(0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$.

6. C 【解析】由 $f(x) = ae^x - x$ 求导可得 $f'(x) = ae^x - 1$, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 无单调递增区间, 不符合题意; 当 $a > 0$ 时, 因为函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0, +\infty)$, 则有 $f'(0) = ae^0 - 1 = a - 1 = 0$, 解得 $a = 1$. 当 $a = 1$ 时, $f'(x) = e^x - 1$, 则当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单

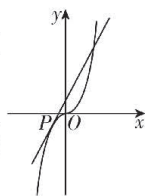
刷素养

9. $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 【解析】依

题意得 $ax + 2 = x^3 - ax$, 即方程 $x^3 = 2ax + 2$ 有三个不同的实数根. 假设直线 $y = 2ax + 2$ 与曲线 $y = x^3$ 相切于点 $P(x_0, y_0)$,

$$\text{则 } \begin{cases} x_0^3 = 2ax_0 + 2, \\ 2a = 3x_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1, \\ a = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

又直线 $y = 2ax + 2$ 过定点 $(0, 2)$, 画出函数 $y = x^3$ 的图象如图, 结合图象可知 $a \in (\frac{3}{2}, +\infty)$.



调递减; 当 $x=0$ 时, $f'(x) = 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0, +\infty)$, 符合题意. 所以 $a = 1$. 故选 C.

特别注意 函数的单调递增区间为 $[0, +\infty)$ 与函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递增含义不同, 前者指的是函数完整的单调递增区间为 $[0, +\infty)$, 后者指的是 $[0, +\infty)$ 包含于函数的完整的单调递增区间.

7. D 【解析】由函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x -$

$$a \cos x + 2x, \text{ 可得 } f'(x) = \cos 2x + a \sin x + 2 = -2 \sin^2 x + a \sin x + 3.$$

因为 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 所以 $-2 \sin^2 x + a \sin x + 3 \geq 0$ 恒成立.

整理为 $2 \sin^2 x - a \sin x - 3 \leq 0$ 恒成立. 令 $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$), 可得 $g(t) = 2t^2 - at - 3$ ($-1 \leq t \leq 1$),

由二次函数的单调性, 可知满足 $g(-1) = a - 1 \leq 0$ 且 $g(1) = -a - 1 \leq 0$, 可得 $-1 \leq a \leq 1$, 即实数 a 的取值范围为 $[-1, 1]$. 故选 D.

规律方法 由函数在区间 D 上的单调性求参数取值范围的方法

(1) 若函数 $f(x)$ 单调递增, 则在区间 D 上 $f'(x) \geq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为 0;

(2) 若函数 $f(x)$ 单调递减, 则在区间 D 上 $f'(x) \leq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为 0;

(3) 若函数 $f(x)$ 为常函数, 则 $f'(x) = 0$ 恒成立.

具体解题时, 先由导函数在区间 D 上恒非负 (单调递增) 或恒非正 (单调递减) 求出参数的取值范围, 再验证此范围内是否存在参数值使得导数值在区间 D 的某个子区间上恒为 0, 若存在, 需要剔除, 若不存在, 不需要在卷面体现验证过程, 本题不存在这样的参数值, 所以利用导函数在 \mathbb{R} 上恒非负解得的范围即为最终答案.

8. A 【解析】由 $f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 9 \ln x$, 则函

数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 又函数 $f(x)$ 在区间 $[a-1, a+1]$ 上单调递减,

$$\text{由 } f'(x) = x - \frac{9}{x} \leq 0, \text{ 得 } 0 < x \leq 3,$$

所以 $\begin{cases} a-1 > 0, \\ a+1 \leq 3, \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq 2$, 所以实数

❷ 点悟: $[a-1, a+1] \subseteq (0, 3]$

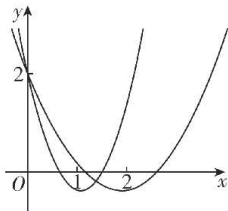
a 的取值范围是 $(1, 2]$. 故选 A.

9. (2, 2, 3) 【解析】由 $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a}{2}x^2 + 2x + 1$, 得 $g'(x) = x^2 - ax + 2$.

因为 $g(x)$ 在 $(1, 2)$ 内不单调, 所以 $g'(x) = 0$ 在 $(1, 2)$ 内有实数根且无重根.

① 信: 函数不单调意味着导函数有正有负, 当导函数连续时, 导函数正负交替意味着有变号零点.

若 $g'(x) = 0$ 在 $(1, 2)$ 内有且只有一个实数根, 则 $g'(x)$ 的图象如图①所示, 则 $g'(1)g'(2) = (1^2 - a \times 1 + 2)(2^2 - a \times 2 + 2) < 0$, 即 $2(3-a)^2 < 0$, 显然不等式无解;

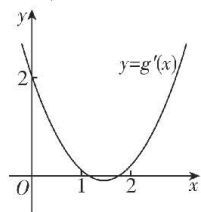


图①

若 $g'(x) = 0$ 在 $(1, 2)$ 内有两个不相等的实数根, 则 $g'(x)$ 的图象如图②所示,

$$\begin{cases} g'(\frac{a}{2}) < 0, \\ g'(2) > 0, \\ g'(1) > 0, \\ 1 < \frac{a}{2} < 2, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} (\frac{a}{2})^2 - a \times \frac{a}{2} + 2 < 0, \\ 3 - a > 0, \\ 2 < a < 4, \end{cases}$$

解得 $2\sqrt{2} < a < 3$. 综上, 实数 a 的取值范围是 $(2\sqrt{2}, 3)$.



图②

10. 【解】(1) 由 $a = 1$, 所以 $f(x) = -\frac{e^{2x}}{2} + x$, $f'(x) = 1 - e^{2x}$, 所以所求切线的斜率 $k = f'(1) = 1 - e^2$, 又 $f(1) = 1 - \frac{e^2}{2}$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - (1 - \frac{e^2}{2}) = (1 - e^2)(x - 1)$, 即 $y = (1 - e^2)x + \frac{1}{2}e^2$.

(2) 由 $f(x) = ax + (1-a)e^x - \frac{e^{2x}}{2}$, 定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = a + (1-a)e^x - e^{2x} = (e^x + a)(1 - e^x)$.

② 黑板: 求导研究函数单调性的关键在于判断导函数的正负, 而因式分解是常见的判断正负的方法, 所以求导后要有意识地对导函数进行因式分解. 本题 e^{2x} 与 e^x 是平方关系, 所以导函数是关于 e^x 的二次式, 可以通过十字相乘进行因式分解.

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \ln(-a)$.

(i) 当 $a < -1$ 时, $-a > 1$, $\ln(-a) > 0$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < \ln(-a)$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > \ln(-a)$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \ln(-a))$, 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, $(\ln(-a), +\infty)$;

(ii) 当 $a = -1$ 时, $f'(x) = (e^x - 1)(1 - e^x) = -(e^x - 1)^2 \leq 0$, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减;

(iii) 当 $-1 < a < 0$, 即 $0 < -a < 1$ 时, $\ln(-a) < 0$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $\ln(-a) < x < 0$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < \ln(-a)$ 或 $x > 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln(-a), 0)$, 单调递减区间为 $(-\infty, \ln(-a))$, $(0, +\infty)$;

当 $a \geq 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x < 0$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

综上所述, 当 $a < -1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \ln(-a))$, 单调递减区间为 $(-\infty, 0)$, $(\ln(-a), +\infty)$;

当 $a = -1$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减;

当 $-1 < a < 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\ln(-a), 0)$, 单调递减区间为 $(-\infty, \ln(-a))$, $(0, +\infty)$;

当 $a \geq 0$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, 0)$, 单调递减区间为 $(0, +\infty)$.

名师点拨 求 $y = f(x)$ 的单调区间, 若导函数 $y = f'(x)$ 中含参数, 实质上就是解含参数的不等式 $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$.

11. B 【解析】 $a = \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$, $b = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$, $c = \frac{\ln 3}{3}$,

令 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$,

当 $x \geq e$ 时, $\varphi'(x) \leq 0$ 且不恒为 0, 函数 $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x}$ 在 $[e, +\infty)$ 上单调递减,

又 $e < 3 < 4$, 所以 $\varphi(e) > \varphi(3) > \varphi(4)$, 所以 $\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln 3}{3} > \frac{\ln 4}{4}$, 所以 $a < c < b$.

故选 B.

12. D 【解析】令 $f(x) = \frac{e}{x} - \ln x$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 由 $f'(x) = -\frac{e}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$, 知 $f(x) = \frac{e}{x} - \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $f(e) = 0$, 所以不等式 $f(x) > 0$ 的解集是 $(0, e)$, 即原不等式的解集为 $(0, e)$, 故选 D.

13. D 【解析】令 $h(x) = e^x f(x)$, 则 $h'(x) = e^x [f(x) + f'(x)]$, 而 $f(x) + f'(x)$ 的正负不确定, 则函数 $h(x)$ 的单调性不确定, 当 $a > b$ 时, $h(a)$, $h(b)$ 的大小关系不确定, 故 A, C 错误;

令 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, 由 $f(x) > f'(x)$, 得 $g'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} < 0$, 函数 $g(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减,

由 $a > b$, 得 $g(a) < g(b)$, 即 $e^b f(a) < e^a f(b)$, B 错误, D 正确. 故选 D.

14. BC 【解析】令 $f(x) = e^x + \ln x (0 < x < 1)$, 所以 $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 所以 $f(x_1) < f(x_2)$,

所以 $e^{x_1} + \ln x_1 < e^{x_2} + \ln x_2$, 可得 $e^{x_1} - e^{x_2} < \ln x_2 - \ln x_1$, 故 A 错误, C 正确;

令 $g(x) = \frac{e^x}{x} (0 < x < 1)$, 所以 $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

因为 $0 < x < 1$, 所以 $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 所以 $g(x_1) > g(x_2)$, 所以 $\frac{e^{x_1}}{x_1} > \frac{e^{x_2}}{x_2}$, 即 $x_2 \cdot e^{x_1} > x_1 \cdot e^{x_2}$, 故 B 正确, D 错误. 故选 BC.

15. (2 024, 2 025) 【解析】构造函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, 其中 $x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} < 0$, 所以函数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 为 $(0, +\infty)$ 上的减函数.

由 $f(m-2 024) > (m-2 024)f(1)$ 可得 $\frac{f(m-2 024)}{m-2 024} > f(1)$, 即 $g(m-2 024) > g(1)$, 所以 $0 < m-2 024 < 1$, 解得 $2 024 < m < 2 025$.

③ 避坑: 用函数单调性解函数不等式时要注意函数的定义域, 本题不要遗漏自变量 $x > 0$ 这个条件.

因此, 实数 m 的取值范围是 $(2 024, 2 025)$.

刷易错

★易错点 1 混淆原函数图象与导函数图象致错

16. ACD 【解析】由题图可知, $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 则在 $(-\infty, 0)$ 上 $f'(x) > 0$,

故 C, D 选项的图象不可能是 $y = f'(x)$ 的图象;

$y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上先单调递减后单调递增再单调递减, 则在 $(0, +\infty)$ 上 $f'(x)$ 先负后正再负,

故 A 选项的图象不可能是 $y = f'(x)$ 的图象, B 选项的图象可能是 $y = f'(x)$ 的图象. 故选 ACD.

易错警示 在处理与函数图象有关的问题时, 要注意所研究的图象是原函数的图象还是导函数的图象. 对于原函数, 要注意其图象在哪个区间内上升、在哪个区间内下降; 而对于导函数, 则应注意其函数值在哪个区间内大于零、在哪个区间内小于零, 并分析这些区间与原函数的单调区间是否一致.

★易错点 2 利用导数研究函数单调性时考虑不全致误

17. $(-\infty, -16] \cup [2, +\infty)$ 【解析】 $f'(x) = 2x^2 - 4x + a$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[-1, 4]$ 上单调等价于 $f'(x) = 2x^2 - 4x + a \leq 0$ 或 $f'(x) = 2x^2 - 4x + a \geq 0$ 在 $[-1, 4]$ 上恒成立, 且等号不恒成立, 则在区间 $[-1, 4]$ 上, $a \leq (-2x^2 + 4x)_{\min}$ 或 $a \geq (-2x^2 + 4x)_{\max}$, 即 $a \leq -16$ 或 $a \geq 2$.

易错警示 本题中, 由于函数 $f(x)$ 在 $[-1, 4]$ 上单调, 因此应分函数在该区间上单调递增或单调递减两种情况讨论. 另外, 求解本题应注意函数 $f(x)$ 在某一区间内 $f'(x) > 0$ (或

$f'(x) < 0$ 只是函数 $f(x)$ 在该区间上单调递增 (或减) 的充分不必要条件, 若函数 $f(x)$ 在该区间上单调递增 (或减), 则可以得到 $f'(x) \geq 0$ 且等号不恒成立 (或 $f'(x) \leq 0$ 且等号不恒成立) 在该区间上恒成立.

★易错点 3 不清楚函数存在单调区间与函数在区间上单调的区别致误

18. $\left(-\frac{1}{9}, +\infty\right) \quad [0, +\infty)$ 【解析】

(1) $f'(x) = -x^2 + x + 2a$, 由于 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ 上存在单调递增区间, 故 $\exists x_0 \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, 使得 $f'(x_0) > 0$, $\therefore a > \left(\frac{x^2 - x}{2}\right)_{\min}$, 由于 $y = \frac{x^2 - x}{2}$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 且当 $x = \frac{2}{3}$ 时, $\left(\frac{x^2 - x}{2}\right)_{\min} = -\frac{1}{9}$, $\therefore a > -\frac{1}{9}$.

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 上单调递增, 则 $\forall x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$, $f'(x) \geq 0$ 恒成立, 所以 $a \geq \left(\frac{x^2 - x}{2}\right)_{\max}$,

由于 $y = \frac{x^2 - x}{2}$ 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 故 $y = \frac{x^2 - x}{2}$ 在 $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 上单调递增, 当 $x = 1$ 时, $\left(\frac{x^2 - x}{2}\right)_{\max} = 0$, $\therefore a \geq 0$.

易错警示 (1) 函数 $f(x)$ 在区间 D 上存在单调递增 (或减) 区间.

方法一: 转化为 " $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$) 在区间 D 上有解";

方法二: 转化为 "存在区间 D 的一个子区间使 $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$) 成立".

(2) 函数 $f(x)$ 在区间 D 上单调递增 (或减).

方法一: 转化为 " $f'(x) \geq 0$ (或 $f'(x) \leq 0$) 在区间 D 上恒成立 ($f'(x)$ 不恒等于 0)";

方法二: 转化为 "区间 D 是函数 $f(x)$ 的单调递增 (或减) 区间的子区间".

刷提升

1. D 【解析】对于选项 A, 有可能曲线对应的函数为原函数, 直线对应的函数为导函数, 原函数先减后增, 导函数先负后正, 符合要求, 故 A 正确; 对于选项 B, 有可能在 x 轴上方的曲线对应的函数为导函数, 另一支曲线对应的函数为原函数, 原函数始终单调递增, 导函数始终为正, 符合要求, 故 B 正确;

对于选项 C, 有可能在 x 轴上方的曲线对应的函数为导函数, 另一支曲线对应的函数为原函数, 原函数始终单调递增, 导函数始终为正, 符合要求, 故 C 正确;

对于选项 D, 无论谁作为导函数, 谁作

为原函数, 都无法相对应, 故 D 错误. 故选 D.

2. C 【解析】由题可得 $f'(x) = ax^2 + bx + c$, 根据 $f'(x) > 0$ 的解集为 $(-3, 1)$, 可得 $f'(x) = a(x+3)(x-1)$, $a < 0$, 则有 $b = 2a, c = -3a$, $\therefore b < a < c$, 故选 C.

3. C 【解析】由函数 $f(x) = e^x (a + \cos x)$, 求导得 $f'(x) = e^x (-\sin x + \cos x + a)$.

由函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减, 得 $f'(x) \leq 0$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立,

即 $-\sin x + \cos x + a \leq 0$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立, 因此 $a \leq \sin x - \cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上恒成立,

点悟: 分离参数, 转化为求 $\sin x - \cos x$ 的最小值

而 $\sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right]_{\min} = -\sqrt{2}$, 则 $a \leq -\sqrt{2}$, 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -\sqrt{2}]$. 故选 C.

4. D 【解析】设 $F(x) = \frac{f(x) - 2}{e^x}$, 则

$F'(x) = \frac{f'(x) - f(x) + 2}{e^x}$, $\therefore f(x) - f'(x) > 2$, $\therefore f'(x) - f(x) + 2 < 0$, $\therefore F'(x) < 0$, 即 $F(x)$ 在定义域 \mathbb{R} 上单调递减. $\because f(0) = 5$, $\therefore F(0) = 3$, \therefore 不等式 $f(x) \leq 3e^x + 2$ 等价于 $\frac{f(x) - 2}{e^x} \leq 3$, 即 $F(x) \leq F(0)$, 解得 $x \geq 0$, 故选 D.

5. C 【解析】令函数 $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln x$, $x > 1$, 求导得 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} = \frac{2x - 1}{x^2} > 0$,

因此函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(2) < f(e) < f(3)$, 即 $\frac{1}{2} + 2\ln 2 < \frac{1}{e} + 2 < \frac{1}{3} + 2\ln 3$, 所以 $a < c < b$. 故选 C.

6. ACD 【解析】不妨设 $1 \leq x_1 < x_2 \leq e$, 则 $x_2 - x_1 > 0$,

由 $\frac{x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1}{x_2 - x_1} < a$, 得 $x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1 < a(x_2 - x_1)$, 即 $x_1(\ln x_2 + a) < x_2(\ln x_1 + a)$, 则 $\frac{\ln x_2 + a}{x_2} < \frac{\ln x_1 + a}{x_1}$. 令 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x}$,

点悟: 化同构, 再构造新函数求解

于是当 $1 \leq x_1 < x_2 \leq e$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$, 因此 $f(x) = \frac{\ln x + a}{x}$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递减, 求导得 $f'(x) = \frac{1 - (\ln x + a)}{x^2} \leq$

0 对于 $x \in [1, e]$ 恒成立 ($f'(x)$ 不恒等于 0), 即 $1 - \ln x - a \leq 0$ 对于 $x \in [1, e]$ 恒成立, 从而 $a \geq 1 - \ln x$ 对于 $x \in [1, e]$ 恒成立.

而函数 $y = 1 - \ln x$ 在区间 $[1, e]$ 上单调递减, 当 $x = 1$ 时, $(1 - \ln x)_{\max} = 1$, 则 $a \geq 1$, 所以 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$, B 正确, A, C, D 错误. 故选 ACD.

7. $\left(\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$ 【解析】令 $f(x) = \sin x -$

$\cos x + 2x - \frac{\pi}{2}$, 则 $f'(x) = \cos x + \sin x +$

$2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 > 0$ 恒成立,

则 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

又 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, 则 $f(x) > 0$ 的解集为 $\left(\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$.

综上, 原不等式的解集为 $\left(\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$.

多种解法 不等式 $\sin x - \cos x + 2x -$

$\frac{\pi}{2} > 0$ 可化为 $\sin x + x > \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \frac{\pi}{2} - x$, 构造函数 $f(x) = \sin x + x$, 则 $f'(x) = \cos x + 1 \geq 0$ 且不恒为 0, 所以 $f(x) = \sin x + x$ 为增函数, 从而原不等式可化为 $x > \frac{\pi}{2} - x$, 解得 $x > \frac{\pi}{4}$, 因此原不等式的解集为 $\left(\frac{\pi}{4}, +\infty\right)$.

8. 【解】(1) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + 2b = \frac{2bx^2 + x - a}{x^2}$.

\therefore 曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $2x - y - 2 = 0$,

$\therefore \begin{cases} f'(1) = 2, \\ f(1) = 0, \end{cases} \therefore \begin{cases} 2b + 1 - a = 2, \\ a + 2b = 0, \end{cases}$ 解得 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$.

(2) 当 $2b = a + 1$ 时, $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} + (a+1)x$,

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} + a + 1 = \frac{(a+1)x^2 + x - a}{x^2} = \frac{[(a+1)x - a](x+1)}{x^2}, x \in (0, +\infty)$.

① 当 $a = -1$ 时, $f'(x) = \frac{x+1}{x^2} > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

② 当 $a \neq -1$ 时, $f'(x) = \frac{(a+1)\left(x - \frac{a}{a+1}\right)(x+1)}{x^2}$. 令 $f'(x) = 0$,

解得 $x_1 = \frac{a}{a+1}, x_2 = -1$ (舍去).

若 $a > 0$, 则 $a+1 > 0, \frac{a}{a+1} > 0$, 又 $\because x \in (0, +\infty)$, $\therefore x+1 > 0$,

\therefore 当 $x \in \left(0, \frac{a}{a+1}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in$

$\left(\frac{a}{a+1}, +\infty\right)$ 时 $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a}{a+1}\right)$ 上单调递减, 在

$\left(\frac{a}{a+1}, +\infty\right)$ 上单调递增.

若 $-1 < a \leq 0$, 则 $a+1 > 0$, $\frac{a}{a+1} \leq 0$,

又 $\because x \in (0, +\infty)$, $\therefore x - \frac{a}{a+1} > 0$, $x+1 > 0$,

$\therefore f'(x) > 0$,

\therefore 当 $-1 < a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

若 $a < -1$, 则 $a+1 < 0$, $\frac{a}{a+1} > 0$,

又 $\because x \in (0, +\infty)$, \therefore 当 $x \in$

$\left(0, \frac{a}{a+1}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in$

$\left(\frac{a}{a+1}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a}{a+1}\right)$ 上单调递增, 在

$\left(\frac{a}{a+1}, +\infty\right)$ 上单调递减.

综上所述, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在

$\left(0, \frac{a}{a+1}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{a}{a+1}, +\infty\right)$

上单调递增;

当 $-1 \leq a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单

调递增;

当 $a < -1$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a}{a+1}\right)$ 上单

调递增, 在 $\left(\frac{a}{a+1}, +\infty\right)$ 上单调递减.

刷素养

9. $[-7, 2]$ 【解析】由 $f(x) = 2x^3 + 3ax^2 + 6(3-a)x + 2022a$, 得 $f'(x) = 6(x^2 + ax + 3 - a)$.

又 $f(x)$ 在区间 $[-2, 2]$ 上单调递增, 所以当 $x \in [-2, 2]$ 时 $f'(x) \geq 0$ 恒成立 ($f'(x)$ 不恒等于 0), 即 $x^2 + ax + 3 - a \geq 0$ 在区间 $[-2, 2]$ 上恒成立.

令 $g(x) = x^2 + ax + 3 - a$, $x \in [-2, 2]$, 函数 $y = x^2 + ax + 3 - a$ 图象的对称轴为直线 $x = -\frac{a}{2}$.

当 $-\frac{a}{2} < -2$, 即 $a > 4$ 时, $g(x)_{\min} =$

$g(-2) = 4 - 2a + 3 - a \geq 0$, 解得 $a \leq \frac{7}{3}$,

又 $a > 4$, 所以此时无解;

当 $-2 \leq -\frac{a}{2} \leq 2$, 即 $-4 \leq a \leq 4$ 时,

$g(x)_{\min} = g\left(-\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + 3 - a \geq 0$, 解

得 $-6 \leq a \leq 2$, 故 $-4 \leq a \leq 2$;

当 $-\frac{a}{2} > 2$, 即 $a < -4$ 时, $g(x)_{\min} =$

$g(2) = 4 + 2a + 3 - a \geq 0$, 解得 $a \geq -7$, 故 $-7 \leq a < -4$.

综上可得, 实数 a 的取值范围是 $[-7, 2]$.

10. 1 【解析】令 $f(x) = 24x^5 - 15x^4 + 40x^3 - 30x^2 + 120x + 1$, 则 $f'(x) = 60 \cdot$

$$(2x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 2) = 60 \cdot \left[\frac{7}{4}x^4 + \left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2x^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right] >$$

0, 所以 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. 又

$f(1) = 140$, $f(-1) = -228$, 所以 $f(1) \cdot$

$f(-1) < 0$, 所以 $f(x)$ 有且仅有一个零

点, 即所求方程有且仅有一个实数根.

点悟: 根据函数零点存在定理的加强定理判断零点的个数

5.3.2 函数的极值与最大(小)值

课时 1 函数的极值

刷基础

1. B 【解析】根据 $f'(x)$ 的图象可知, 在 $(-2, 3)$ 上, $f'(x) \leq 0$ 且仅在 $x=1$ 处有 $f'(1)=0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-2, 3)$ 上单调递减, 故①错误;

由 $f'(-2)=0$ 可知, $f(x)$ 的图象在 $x=-2$ 处的切线斜率等于 0, 故②正确;

$f(x)$ 在区间 $(-2, 3)$ 上单调递减, 没有极值点, 故③错误;

由 $f'(x)$ 的图象可知, $f'(x)$ 在 $(-2, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 所以 $f'(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极小值, 故④正确. 故选 B.

2. BD 【解析】 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$, 则 $\Delta = 4b^2 - 12ac > 0$, 所以 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1x_2 = \frac{c}{3a} < 0$. 故选 BD.

3. B 【解析】由题意知, $y' = 3(1-x^2)$, 当 $-1 < x < 1$ 时 $y' > 0$, 当 $x < -1$ 或 $x > 1$ 时 $y' < 0$, 所以 $y = 3x - x^3$ 在 $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-1, 1)$ 上单调递增, 所以函数 $y = 3x - x^3$ 的极大值点是 1. 故选 B.

4. C 【解析】 $f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$, 且 $x \in (0, +\infty)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$, 所以当 $x \in$

$\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单

调递增. 所以 $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 处取得极

小值 $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{\sqrt{e}} = -\frac{1}{2e}$. 故选 C.

特别注意 求函数极值的注意事项

(1) 定义域优先, 若使 $f'(x) = 0$ 的点不在定义域内, 需要舍去;

(2) 检查导数值为 0 的点的附近左右两侧的导数值是否异号, 若异号, 则该点是极值点, 否则不是极值点.

5. 【解】(1) 由已知可得 $f'(x) = (2x-a) \cdot e^x + (x^2 - ax - a)e^x = (x^2 + 2x - ax - 2a)e^x$, 而直线 $2x + y + 3 = 0$ 的斜率 $k = -2$, 所以 $f'(0) = -2a = -2$, 解得 $a = 1$.

(2) 由 (1) 得 $f(x) = (x^2 - x - 1)e^x$, 则 $f'(x) = e^x(x^2 + x - 2) = e^x(x-1)(x+2)$,

令 $f'(x) = 0$, 得 $x=1$ 或 $x=-2$.

当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数

$f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (-2, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增.

故 $f(x)$ 的极大值为 $f(-2) = \frac{5}{e^2}$, 极小值为 $f(1) = -e$.

6. A 【解析】对 $f(x) = (x+2)(x^2+x+m)$ 求导得 $f'(x) = 3x^2 + 6x + m + 2$, 因为函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上既有极大值也有极小值, 所以 $f'(x) = 3x^2 + 6x + m + 2 = 0$ 必有两个相异实根, 即 $\Delta = 36 - 12(m+2) > 0$, 解得 $m < 1$. 检验:

点悟: 利用导函数有两个不相等的零点求出参数的范围后, 需要进行验证函数是否有两个极值

不妨设方程 $3x^2 + 6x + m + 2 = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 则 $f'(x) = 3(x-x_1)(x-x_2)$, 当 $x < x_1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x_1 < x < x_2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > x_2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 即 $f(x)$ 在 $x=x_1$ 时取得极大值, 在 $x=x_2$ 时取得极小值, 符合题意. 故选 A.

7. D 【解析】 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + \ln x$ 的定义域为 $\{x | x > 0\}$, $f'(x) = x - a + \frac{1}{x}$. 要

使函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - ax + \ln x$ 在 $(0, 2)$

上有极值, 则 $f'(x) = x - a + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$

上有变号零点, 即 $a = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 2)$ 上有

变号实数根. 令 $g(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \in (0, 2)$,

点悟: 参变分离, 转化为参数值和函数值域之间的关系

则 $g(x) = x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$, 当且仅当 $x=1$ 时等号成立, 所以 $a \geq 2$.

当 $a=2$ 时, $f'(x) = x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$ 且等号

不恒成立, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调

递增, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上没有极值, 故

$a > 2$. 故选 D.

8. B 【解析】由题意得 $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} -$

$$\frac{2c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3},$$

又函数 $f(x)$ 既有极大值也有极小值,

故方程 $ax^2 - bx - 2c = 0$ 有两个不相等的正实根, 设方程的两根为 x_1, x_2 ,

$$\begin{cases} \Delta = b^2 + 8ac > 0, \\ x_1 + x_2 = \frac{b}{a} > 0, \text{ 则 } b^2 + 8ac > 0, ab > 0, \\ x_1x_2 = -\frac{2c}{a} > 0, \end{cases}$$

$ac < 0$, 故排除 A, C, D.

因为 $ab > 0$, $ac < 0$, 所以 b, c 异号, 故 $bc < 0$. 故选 B.

9. 【解】(1) 因为 $f(x) = \ln x - \frac{a}{x}$, 所以

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2}, \text{ 所以 } f'(1) = 1+a,$$

又 $f(1) = -a$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y+a=(1+a)(x-1)$, 因为切线经过点 $(0,1)$, 所以 $1+a=(1+a)(0-1)$, 解得 $a=-1$.

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} = \frac{x+a}{x^2}, \text{ 函}$$

数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无极值.

当 $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = -a$, 所以 $0 < x < -a$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递减,

当 $x > -a$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x = -a$ 时, 函数 $f(x)$ 有极小值, 极小值为 $f(-a) = \ln(-a) + 1$,

由 $\ln(-a) + 1 > 2$, 得 $a < -e$, 所以 a 的取值范围为 $(-\infty, -e)$.

10. D 【解析】因为 $f(x) = x + 2\sin x$, 所以 $f'(x) = 1 + 2\cos x$,

$$\text{由 } f'(x) < 0, \text{ 得 } \cos x < -\frac{1}{2}, \text{ 则 } 2k\pi +$$

$$\frac{2\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{4\pi}{3} (k \in \mathbb{N}),$$

$$\text{由 } f'(x) > 0, \text{ 得 } \cos x > -\frac{1}{2}, \text{ 则 } 0 < x <$$

$$\frac{2\pi}{3} \text{ 或 } 2k\pi + \frac{4\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{8\pi}{3} (k \in \mathbb{N}),$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(2k\pi + \frac{2\pi}{3},$

$2k\pi + \frac{4\pi}{3}) (k \in \mathbb{N})$ 上单调递减, 在区

间 $(0, \frac{2\pi}{3}), (2k\pi + \frac{4\pi}{3}, 2k\pi + \frac{8\pi}{3})$

$(k \in \mathbb{N})$ 上单调递增, 所以函数 $f(x)$ 的

极小值点为 $x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{N})$.

将函数 $f(x) = x + 2\sin x (x > 0)$ 的所有

极小值点从小到大排列成数列 $\{a_n\}$,

则 $a_1 = \frac{4\pi}{3}, a_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi, \dots$, 易知数列

$\{a_n\}$ 为等差数列,

且数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = a_2 - a_1 = 2\pi$, 则

$$a_9 = a_1 + 8d = \frac{4\pi}{3} + 16\pi,$$

$$\sin a_9 = \sin\left(\frac{4\pi}{3} + 16\pi\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$-\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ 故选 D.}$$

11. C 【解析】由 $f(x) = 2ax - \ln x$, 得

$$f'(x) = 2a - \frac{1}{x} = \frac{2ax-1}{x}.$$

因为 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上不单调, 所以

$f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上有极值点.

当 $a=0$ 时, $f'(x) = -\frac{1}{x} < 0$ 在 $(1, 3)$

上恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上单调

递减, 不满足题意; 当 $a \neq 0$ 时, 令

$$f'(x) = 0, \text{ 得 } x = \frac{1}{2a}, \text{ 所以有 } 1 < \frac{1}{2a} < 3,$$

$$\text{解得 } \frac{1}{6} < a < \frac{1}{2}.$$

综上所述, 实数 a 的取值范围为

$$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right). \text{ 故选 C.}$$

12. 【解】(1) 因为 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$, 所以 $f'(x) = 6x^2 - 2ax$, 因为函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 -4 ,

$$\text{所以 } \begin{cases} f'(1) = 6 - 2a = 0, \\ f(1) = 2 - a + b = -4, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 3, \\ b = -3, \end{cases}$$

$$\text{此时 } f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1),$$

当 $x < 0$ 或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调

递增; 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单

调递减. 所以 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得极小值, 符

$$\text{合题意, 所以 } \begin{cases} a = 3, \\ b = -3. \end{cases}$$

$$(2) f'(x) = 6x^2 - 2ax = 2x(3x-a), \text{ 令}$$

$$f'(x) = 0, \text{ 得 } x=0 \text{ 或 } x=\frac{a}{3},$$

若 $a=0$, 则 $f'(x) \geq 0$ 且不恒为 0, 所

以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;

若 $a < 0$, 则当 $x < \frac{a}{3}$ 或 $x > 0$ 时, $f'(x) >$

0 , $f(x)$ 单调递增;

当 $\frac{a}{3} < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调

递减, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为

$$\left(-\infty, \frac{a}{3}\right), (0, +\infty), \text{ 单调递减区间}$$

$$\text{为 } \left(\frac{a}{3}, 0\right).$$

若 $a > 0$, 当 $x < 0$ 或 $x > \frac{a}{3}$ 时, $f'(x) > 0$,

$f(x)$ 单调递增;

当 $0 < x < \frac{a}{3}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调

递减, 所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,$

$$0), \left(\frac{a}{3}, +\infty\right), \text{ 单调递减区间}$$

$$\text{为 } \left(0, \frac{a}{3}\right).$$

(3) 由 (2) 可知, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 的单

调递增区间为 $(-\infty, 0), \left(\frac{a}{3}, +\infty\right)$;

单调递减区间为 $\left(0, \frac{a}{3}\right)$.

当 $x=0$ 时, 函数 $f(x)$ 取到极大值, 即

$$f(0) = b = 1, \text{ 所以 } f(x) = 2x^3 - ax^2 + 1,$$

易知当 $x = \frac{a}{3}$ 时, 函数 $f(x)$ 取到极小

$$\text{值 } f\left(\frac{a}{3}\right) = 2 \times \left(\frac{a}{3}\right)^3 - a \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 +$$

$$1 = \frac{2a^3}{27} - \frac{a^3}{9} + 1 = -\frac{a^3}{27} + 1, \text{ 且当 } x \rightarrow -\infty$$

$$\text{时, } f(x) \rightarrow -\infty, \text{ 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) \rightarrow$$

$$+\infty. \text{ 则当 } -\frac{a^3}{27} + 1 > 0, \text{ 即 } 0 < a < 3 \text{ 时, } f(x) \text{ 有}$$

$$1 \text{ 个零点;}$$

$$\text{当 } -\frac{a^3}{27} + 1 = 0, \text{ 即 } a = 3 \text{ 时, } f(x) \text{ 有 } 2 \text{ 个}$$

$$\text{零点;}$$

$$\text{当 } -\frac{a^3}{27} + 1 < 0, \text{ 即 } a > 3 \text{ 时, } f(x) \text{ 有 } 3 \text{ 个}$$

$$\text{零点.}$$

刷易错

★易错点 1 混淆极值点与极值致误

13. D 【解析】由题意, 得 $f'(x) = e^x + a$, 显然当 $a \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 无极值点, 不符合题意, 所以 $a < 0$, 所以 $f'(x) = 0$ 的根 $x = \ln(-a) > 0$, 所以 $-a > 1$, 即 $a < -1$. 当 $a < -1$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln(-a))$ 上单调递减, 在 $(\ln(-a), +\infty)$ 上单调递增, 有极小值, 故选 D.

易错警示 极值点指的是取极值时 x 的值, 极值是指 $f(x)$ 的值, 所以有大于零的极值点, 即 $f'(x) = 0$ 有大于零的变号根.

★易错点 2 根据极值点求参数时忘记检验致误

14. $-\frac{11}{4}$ 【解析】 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$, 由

$$\text{题意得 } \begin{cases} f'(1) = 3 + 2a + b = 0, \\ f(1) = 1 + a + b + a^2 = 10, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a = -3, \\ b = 3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a = 4, \\ b = -11. \end{cases}$$

当 $a = -3, b = 3$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$ 且等号不恒成立, 所以 1 不是极值点, 舍去.

当 $a = 4, b = -11$ 时, $f'(x) = 3x^2 + 8x - 11 = (x-1)(3x+11)$,

当 $-\frac{11}{3} < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x < -\frac{11}{3}$

或 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$,

所以 $-\frac{11}{3}$ 是极大值点, 1 是极小值点,

$$\text{满足题意. 故 } b = -\frac{11}{4}.$$

易错警示 已知函数的极值点 x_0 求参数的值时, 可根据 $f'(x_0) = 0$ 建立关于参数的方程(组), 通过解方程(组)得到参数的值后还需要进行验证, 因为“ $f'(x_0) = 0$ ”是“ x_0 为极值点”的必要不充分条件, 而不是充要条件, 因此在解答此类问题时不要忘了验证, 以免产生多解而造成解答错误.

刷提升

1. B 【解析】由题图可知, 当 $x \in (-\infty, -4)$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, -4)$ 上单调递减;

当 $x \in (-4, 0)$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-4, 0)$ 上单调递增;

当 $x \in (0, 4)$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递增;

当 $x \in (4, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(4, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $x = -4$ 处取得极小值, 在 $x = 4$ 处取得极大值.

故 $f(x)$ 极值点的个数为 2. 故选 B.

2. B 【解析】由 $f(x) = x^2 - 2x + 3a \ln x$, 令

$$f'(x) = 2x - 2 + \frac{3a}{x} = 0 (x > 0) \Rightarrow 3a =$$

$$-2x^2 + 2x = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2},$$

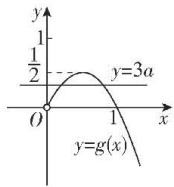
当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x) = -2 \cdot$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \text{ 单调递增, 当 } x > \frac{1}{2} \text{ 时, 函}$$

数 $g(x)$ 单调递减,

所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 $g(x) = -2 \cdot$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ 有最大值 $\frac{1}{2}$, 且 $g(0) = g(1) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2x + 3a \ln x$ 有两个不同的极值点, 等价于直线 $y = 3a$ 与函数 $g(x) = -2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$ 的图象有两个不同的交点, 作出 $y = g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的大致图象如图,



所以 $3a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 即 $0 < a < \frac{1}{6}$. 故选 B.

3. BC 【解析】由 $f(x) = x^3 + 3x^2 + bx + 1$ 得 $f'(x) = 3x^2 + 6x + b$, 令 $g(x) = 3x^2 + 6x + b$, 则 $g'(x) = 6x + 6$, 令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = -1$, 所以 -1 是函数 $g(x)$ 的极小值点. 又 $f'(x)$ 的极值点是函数 $f(x)$ 的零点, 所以 $f(-1) = -1 + 3 - b + 1 = 0$, 解得 $b = 3$. 此时 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

对于 A, $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0$ 且等号不恒成立, 所以函数 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数, 则 $f(x)$ 没有极值点, 故 A 错误;

对于 B, 由 A 知, 函数 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数, 且 $f(-1) = 0$, 即 $f(x)$ 有且只有一个零点, 故 B 正确;

对于 C, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$, 则 $f(-c-2) = (-c-1)^3 = -(c+1)^3 = -f(c)$, 因为函数 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的增函数, 所以由 $a+c > -2$, 即 $a > -c-2$ 可得 $f(a) > f(-c-2) = -f(c)$, 即 $f(a) + f(c) > 0$, 故 C 正确;

对于 D, 不妨设切点为 $P(x_0, y_0)$, 由 $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2$, 可得切线斜率为 $3(x_0+1)^2$, 则切线方程为 $y - (x_0+1)^3 = 3(x_0+1)^2(x-x_0)$, 由切线过原点, 得 $-(x_0+1)^3 = 3(x_0+1)^2(-x_0)$, 整理得 $(x_0+1)^2(1-2x_0) = 0$, 解得 $x_0 = -1$ 或 $x_0 = \frac{1}{2}$, 即过坐标原点有两条直线与曲线 $y = f(x)$ 相切, 故 D 错误. 故选 BC.

4. AB 【解析】 $f'(x) = a(x-1)^2 + 2(x-1)(ax-b) = (x-1)(3ax-a-2b)$, 由 $f'(x) = 0$ 可得 $x = 1$ 或 $x = \frac{a+2b}{3a}$, 又 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极大值, 则 $\frac{a+2b}{3a} \neq 1$, 即 $a \neq b$. 已知 $a \neq 0$,

若 $a > 0$, 则 $\frac{a+2b}{3a} > 1$, 所以 $b > a > 0$, 此时有 $a^2 < ab < b^2$, A 成立.

若 $a < 0$, 则 $\frac{a+2b}{3a} < 1$, 所以 $b > a$, 此时若 $b < 0$, 则有 $a^2 > ab > b^2$, B 成立. 若 $b > 0$, 则 $ab < 0$, 又 $a^2 > 0$, 且 $b^2 > 0$, 没有与之对应的选项. 故选 AB.

5. D 【解析】 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{a^x}{\ln a}$, 则 $f'(x) = x^2 - a^x$, 要使函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 -$

$\frac{a^x}{\ln a}$ 在其定义域 $(0, +\infty)$ 内既有极大值也有极小值, 只需方程 $x^2 - a^x = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根,

即 $\ln a = \frac{2 \ln x}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不相等的实数根. 令 $g(x) = \frac{2 \ln x}{x}$, 则

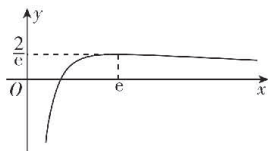
$$g'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}.$$

当 $x \in (0, e)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 当 $x > 1$ 时,

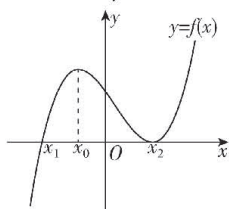
$g(x) > 0$, 且 $g(e) = \frac{2}{e}$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$g(x) \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 则 $g(x)$ 的大致图象如图所示.



所以 $\ln a \in \left(0, \frac{2}{e}\right)$, 则 $1 < a < e^{\frac{2}{e}}$. 故选 D.

6. 4 【解析】因为函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 有一个极大值点 x_0 , 所以该函数必有一个极小值点, 且极小值点大于 x_0 , 又 $f(x)$ 仅有两个零点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_0 < x_2$, 作出 $f(x)$ 的大致图象如图, 则易得 x_2 是 $f(x)$ 的极小值点, 又 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$,



则 x_0, x_2 是方程 $f'(x) = 0$ 的两个实数根, 有

$$\begin{cases} \Delta = 4a^2 - 12b > 0, \\ x_0 + x_2 = -\frac{2}{3}a, \\ x_0 x_2 = \frac{1}{3}b, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a^2 - 3b > 0, \\ a = -\frac{3}{2}(x_0 + x_2), \\ b = 3x_0 x_2, \end{cases}$$

显然 $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)^2 = x^3 - (x_1+2x_2)x^2 + (2x_1+x_2)x_2x - x_1x_2^2$, 则 $-(x_1+2x_2) = a = -\frac{3}{2}(x_0+x_2)$, 整理得 $2x_1+x_2 = 3x_0$, 两边平方得 $4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2 = 9x_0^2$, 因为 $x_0^2 = x_1x_2$, 于是得 $4x_1^2+4x_1x_2+x_2^2 = 9x_1x_2$, 即 $(4x_1-x_2)(x_1-x_2) = 0$, 而 $x_1 < x_2$, 有 $4x_1-x_2 = 0$, 所以 $\frac{x_2}{x_1} = 4$.

7. (1) 【解】 $f(x) = ax - a - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = \frac{ax-1}{x} < 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{1}{a}$, 当

$f'(x) < 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{a}$,

故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减, 在

$\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递

减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(2) 【证明】当 $a = 1$ 时, $g(x) = xf(x) = x^2 - x - x \ln x$, $g'(x) = 2x - 1 - \ln x = 2x - 2 - \ln x$,

记 $t(x) = 2x - 2 - \ln x (x > 0)$, 则 $t'(x) = 2 - \frac{1}{x}$,

令 $t'(x) < 0$, 解得 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 令

$t'(x) > 0$, 解得 $x \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,

所以 $t(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增,

所以 $t(x)_{\min} = t\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 - 1 < 0$, 又

$x \rightarrow 0^+$ 时, $t(x) \rightarrow +\infty$, $t(1) = 0$,

从而 $t(x) = 0$ 有两个不同的解, 即 $g'(x) = 0$ 有两个不同的解, 且两个零

点分别为 $x_0, 1$, 其中 $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$,

令 $g'(x) > 0$, 解得 $x \in (0, x_0) \cup (1, +\infty)$; 令 $g'(x) < 0$, 解得 $x \in (x_0, 1)$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减,

所以 $g(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $2x_0 - 2 - \ln x_0 = 0$, 即 $\ln x_0 = 2x_0 - 2$,

$g(x_0) = x_0^2 - x_0 - x_0 \ln x_0 = x_0^2 - x_0 - x_0(2x_0 - 2) = x_0^2 - x_0 - 2x_0^2 + 2x_0 = -x_0^2 + x_0 = -\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$,

2) = $x_0^2 - x_0 = -\left(x_0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$,

悟: 研究函数值的取值范围, 优先考虑利用函数单调性, 通过自变量的取值范围得到函数值的取值范围

由 $x_0 < \frac{1}{2}$ 可知 $g(x_0) < \frac{1}{4} = 2^{-2}$.

由 $g'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2}{e} - 2 + 1 < 0$ 可知 $x_0 < \frac{1}{e} <$

$\frac{1}{2}$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增,

在 $\left(x_0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 所以 $g(x_0) >$

$g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e^2}$.

综上所述, $g(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 , 且 $e^{-2} < g(x_0) < 2^{-2}$.

刷素养

8. A 【解析】 $f'(x) = ax - (1+2a) + \frac{2}{x} = \frac{(x-2)(ax-1)}{x}$, $\therefore f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上有极大值, $\therefore \frac{1}{a} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 即 $a \in (1, 2)$, 故选 A.

课时2 函数的最大(小)值

刷基础

1. D 【解析】由题图可知当 $x > -1$ 时, $(x+1)f'(x) > 0$, 则 $f'(x) > 0$, 当 $-3 < x < -1$ 时, $(x+1)f'(x) > 0$, 则 $f'(x) < 0$, 当 $x < -3$ 时, $(x+1)f'(x) < 0$, 则 $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, -3)$ 上单调递增, 在 $(-3, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, **C 错误**; $f(-1)$ 是函数 $f(x)$ 的极小值, 但无法确定是不是最小值, **A 错误**; $f(-3)$ 是函数 $f(x)$ 的极大值, **B 错误**; 由 $(0+1)f'(0) > 0$, 得 $f'(0) > 0$, 故曲线 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处的切线的斜率大于 0, **D 正确**. 故选 D.

2. D 【解析】 $f'(x) = -\sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x$, $x \in [0, \pi]$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x=0$ 或 $x=\frac{\pi}{2}$,

当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $f'(x) \geq 0$ 且不恒为 0, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时,

$f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以函数 $f(x)$ 的最大值是 $f(\frac{\pi}{2}) =$

$\frac{\pi}{2}$, $f(0) = 1$, $f(\pi) = -1$, 所以函数 $f(x)$ 的最小值是 -1. 故选 D.

3. A 【解析】由题意得 $f'(x) = e^x - 1$, 当 $-2 \leq x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $0 < x \leq 2$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $[-2, 0]$ 上单调递减, 在 $(0, 2]$ 上单调递增. 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值, 也是最小值, 故 $f(x)_{\min} = f(0) = 3$. 因为 $f(-2) = e^{-2} + 4 < f(2) = e^2$, 所以 $f(x)_{\max} = e^2$. 故所求的值域为 $[3, e^2]$. 故选 A.

4. 【解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = 3x - 4a + \frac{a^2}{x} = \frac{3x^2 - 4ax + a^2}{x} = \frac{(3x-a)(x-a)}{x}$, $x > 0$,

令 $f'(x) = 0$ 得 $x=a$ 或 $x=\frac{a}{3}$.

①当 $a=1$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $\frac{1}{3} < x < 1$, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{3})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{3}, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 此时函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 处取得极大值, 在 $x=1$ 处取得极小值, 与函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值不符;

②当 $\frac{a}{3}=1$, 即 $a=3$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < 1$ 或 $x > 3$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $1 < x < 3$, 故函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增, 此时函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值, 在 $x=3$ 处取得极小值, 符合题意. 所以 $a=3$.

(2) 由(1)得 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 9 \ln x$, $f'(x) = \frac{3(x-1)(x-3)}{x}$, $x > 0$,

函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, +\infty)$ 上单调递增.

因为 $x \in [\frac{1}{e}, 8]$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 在 $(3, 8)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 的极大值为 $f(1) = \frac{3}{2} -$

$12 = -\frac{21}{2}$, 且 $f(8) = \frac{3}{2} \times 64 - 12 \times 8 + 9 \ln 8 = 27 \ln 2$.

因为 $f(8) > f(1)$, 所以 $f(x)_{\max} = f(8) = 27 \ln 2$.

5. D 【解析】由函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$, 可得 $f'(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, 当 $x < -1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $-1 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 要使得函数 $f(x)$ 在区间 $(m, 6-m^2)$ 上有最小值,

则满足 $\begin{cases} m < 1 < 6-m^2, \\ f(m) \geq f(1), \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -\sqrt{5} < m < 1, \\ \frac{1}{3}m^3 - m \geq -\frac{2}{3}, \end{cases}$

由 $\frac{1}{3}m^3 - m \geq -\frac{2}{3}$, 可得 $m^3 - 3m + 2 \geq 0$,

即 $(m-1)^2(m+2) \geq 0$, 解得 $m \geq -2$ 或 $m=1$,

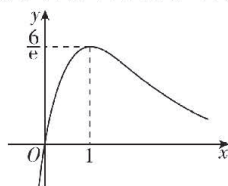
所以 $-2 \leq m < 1$, 即实数 m 的取值范围为 $[-2, 1)$. 故选 D.

6. A 【解析】 $\because f'(x) = ae^x - 6x = e^x \cdot (a - \frac{6x}{e^x})$, 令 $g(x) = \frac{6x}{e^x}$, $\therefore g'(x) = \frac{6(1-x)}{e^x}$,

当 $x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, 此时 $g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增;

当 $x > 1$ 时, $g'(x) < 0$, 此时 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

由 $g(0) = 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$, 故可作出 $g(x)$ 的大致图象如图,



$\therefore g(x)_{\max} = g(1) = \frac{6}{e}$,

\therefore 当 $a \geq \frac{6}{e}$ 时, 则 $a - \frac{6x}{e^x} \geq 0$, 则

$f'(x) \geq 0$ 且不恒为 0, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, 因此当 $x \in [0, 2]$ 时, $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得最大值, 不满足题意;

当 $a \leq 0$ 时, 当 $x \in [0, 2]$ 时, $f'(x) \leq 0$ 且不恒为 0, $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上单调递减, 此时 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最大值, 满足题意;

当 $0 < a < \frac{6}{e}$ 时, 由图知 $a - \frac{6x}{e^x} = 0$ 有两个根 x_1, x_2 ($0 < x_1 < 1 < x_2$),

当 $x < x_1$ 时, $a - \frac{6x}{e^x} > 0$, $f'(x) > 0$,

当 $x_1 < x < x_2$ 时, $a - \frac{6x}{e^x} < 0$, $f'(x) < 0$,

当 $x > x_2$ 时, $a - \frac{6x}{e^x} > 0$, $f'(x) > 0$,

\therefore 当 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $[0, x_1]$, $[x_2, +\infty)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减, 显然当 $x \in [0, 2]$ 时 $f(x)$ 不会在 $x=0$ 处取得最大值, 不满足题意.

综上所述可知, a 的取值范围为 $(-\infty, 0]$. 故选 A.

7. -5 【解析】因为 $f(x) = x^2 + 2\cos x + a$, $x \in \mathbf{R}$, 所以 $f'(x) = 2x - 2\sin x$, 令 $g(x) = 2x - 2\sin x$, 则 $g'(x) = 2 - 2\cos x \geq 0$ 恒成立且不恒为 0, 所以函数 $g(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 即 $f'(x)$ 是 \mathbf{R} 上的增函数, 又 $f'(0) = 0 - 2\sin 0 = 0$,

则当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 故函数 $f(x)$ 的最小值是 $f(0) = 0 + 2\cos 0 + a = 2 + a = -3$, 所以 $a = -5$.

8. 【解】(1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{a}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x-a}{x^2}$.

因为 $a > 0$, 所以由 $f'(x) > 0$, 可得 $0 < x < a$, 由 $f'(x) < 0$, 可得 $x > a$, 因此函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a)$, 单调递减区间为 $(a, +\infty)$.

(2) 当 $0 < a \leq \frac{1}{e}$ 时, 函数 $f(x)$ 在

$[\frac{1}{e}, e]$ 上单调递减, 此时 $g(a) =$

$f(\frac{1}{e}) = 2 - ae$;

当 $\frac{1}{e} < a < e$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, a]$ 上单调递增, 在 $(a, e]$ 上单调递减, 此时 $g(a) = f(a) = -\ln a$;

当 $a \geq e$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, e]$ 上单

调递增, 此时 $g(a) = f(e) = -\frac{a}{e}$.

综上所述, $g(a) = \begin{cases} 2 - ae, & 0 < a \leq \frac{1}{e}, \\ -\ln a, & \frac{1}{e} < a < e, \\ -\frac{a}{e}, & a \geq e. \end{cases}$

9. B 【解析】由题意得, $k > \frac{\ln x}{x} + 4$ 在

$(1, +\infty)$ 上恒成立, 设 $g(x) = \frac{\ln x}{x} + 4$,

$x \in (1, +\infty)$, 则 $k > g(x)_{\max}$. $g'(x) =$

$\frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $x \in (1, e)$ 时, $g'(x) > 0$, 当

$x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调

递减, $g(x)_{\max} = g(e) = \frac{1}{e} + 4 \in (4, 5)$,

所以整数 $k \geq 5$, 则整数 k 的最小值为 5. 故选 B.

规律方法 由不等式恒成立 (或能成立) 求参数的常用方法

(1) 对不等式变形, 分离参数, 根据分离参数后的结果, 构造函数, 利用导数求出函数的最值, 进而可求出结果;

(2) 根据不等式, 直接构造函数, 求导后通过对参数分类讨论求函数的最值, 进而得出结果.

10. D 【解析】因为函数 $f(x) = x + e^{-x}$, 若存在实数 x , 使得 $f(x) = ax$ 成立, 则当 $x > 0$ 时, $x + e^{-x} = ax$, 所以 $a = 1 + \frac{1}{xe^x} > 1$;

当 $x = 0$ 时, $0 + e^0 = a \cdot 0$ 不成立;

当 $x < 0$ 时, $x + e^{-x} = ax$, 所以 $a = 1 + \frac{1}{xe^x}$

成立, 令 $g(x) = 1 + \frac{1}{xe^x}$, 则 $g'(x) = \frac{-(x+1)e^x}{(xe^x)^2}$,

当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x) = 1 + \frac{1}{xe^x}$ 单调递增;

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x) = 1 + \frac{1}{xe^x}$ 单调递减,

所以 $g(x)_{\max} = g(-1) = 1 - e$, $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, 所以此时 $a \leq 1 - e$.

综上可得, 实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1 - e] \cup (1, +\infty)$. 故选 D.

11. $2\sqrt{e}$ 【解析】因为 $\forall x \in (0, +\infty)$, $f(x) \leq g(x)$ 恒成立, 所以 $\forall x \in (0, +\infty)$, $n \leq e^x - mx$ 恒成立.

设 $h(x) = e^x - mx$, 所以 $h'(x) = e^x - m$. 当 $m \leq 0$ 时, $h'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 故函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 此时 $h(x) > h(0) = 1$, 所以 $n \leq 1$, 则 $m + 2n \leq 2$.

当 $m > 0$ 时, 当 $x \in (0, \ln m)$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x)$ 单调递减, 当 $x \in (\ln m, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 单调递增.

所以在 $(0, +\infty)$ 上, $h(x)_{\min} = h(\ln m) = m - m \ln m = m(1 - \ln m)$, 所以 $n \leq m(1 - \ln m)$, 所以 $m + 2n \leq m + 2m(1 - \ln m)$.

设 $p(m) = m + 2m(1 - \ln m)$, $m > 0$, 所以 $p'(m) = 1 - 2 \ln m$,

当 $0 < m < \sqrt{e}$ 时, $p'(m) > 0$, 函数 $p(m)$ 单调递增, 当 $m > \sqrt{e}$ 时, $p'(m) < 0$, 函数 $p(m)$ 单调递减,

所以 $p(m)_{\max} = p(\sqrt{e}) = 3\sqrt{e} - 2\sqrt{e} \ln \sqrt{e} = 2\sqrt{e}$, 故 $m + 2n \leq 2\sqrt{e}$.

综上可得, $m + 2n$ 的最大值为 $2\sqrt{e}$.

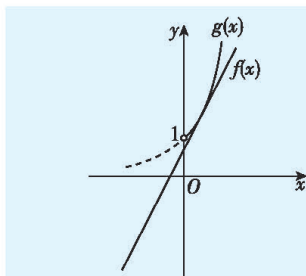
多种解法 $m + 2n = 2 \left(\frac{1}{2}m + n \right) =$

$$2f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 2g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e},$$

当 $m + 2n = 2\sqrt{e}$ 时, $f(x) \leq g(x)$ 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = g\left(\frac{1}{2}\right)$,

结合 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象可知, 此时 $f(x)$ 为 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的切线, 又 $g'(x) = e^x$,

$$\text{联立} \begin{cases} m + 2n = 2\sqrt{e}, \\ m = g'\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases} \text{得} \begin{cases} m = \sqrt{e}, \\ n = \frac{\sqrt{e}}{2}. \end{cases}$$



因此 $m + 2n$ 的最大值为 $2\sqrt{e}$.

12. 【解】(1) 函数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = 0$ 或 $x = 2$, $f'(x)$, $f(x)$ 随 x 的变化情况如表所示.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	单调递增	极大值	单调递减	极小值	单调递增

故函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(0) = a$, 极小值为 $f(2) = a - 4$.

(2) 若 $\forall x_1 \in [1, 3]$, $\forall x_2 \in \left[\frac{1}{e^2}, e\right]$, 都有 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 则 $f(x)_{\min} \geq g(x)_{\max}$.

由(1)可知, 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, 3]$ 上单调递增, 故当 $x \in [1, 3]$ 时, $f(x)_{\min} = f(2) = a - 4$.

因为 $g(x) = x \ln x$, $g'(x) = 1 + \ln x$, 所以当 $x \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$ 时, $g'(x) < 0$,

当 $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ 时, $g'(x) > 0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{e}, e\right)$ 上单调递增, $g\left(\frac{1}{e^2}\right) =$

$$\frac{2}{e^2}, g(e) = e, \text{ 当 } x \in \left[\frac{1}{e^2}, e\right] \text{ 时,}$$

$$g(x)_{\max} = g(e) = e.$$

由题意可得 $a - 4 \geq e$, 故 $a \geq e + 4$, 即实数 a 的取值范围为 $[e + 4, +\infty)$.

13. 【解】(1) 函数 $f(x) = \ln x$, $g(x) = 1 - \frac{1}{x}$,

$$\text{分别求得 } f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = \frac{1}{x^2},$$

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } f'(x) = g'(x) = 1;$$

$$\text{当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } g'(x) > f'(x) > 1;$$

当 $x > 1$ 时, $0 < g'(x) < f'(x) < 1$, 函数 $f(x)$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上都是增函数, 在区间 $(0, 1)$ 上, $g(x)$ 的图象比 $f(x)$ 的图象要“陡峭”;

在区间 $(1, +\infty)$ 上, $g(x)$ 的图象比 $f(x)$ 的图象要“平缓”, 所以函数 $f(x)$, $g(x)$ 的图象分别对应题图中的 C_2, C_1 .

(2) 由(1)及题图知, $f(x) \geq g(x)$, 即

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \text{ 证明如下: 设 } h(x) =$$

$$\ln x - \left(1 - \frac{1}{x}\right), \text{ 求得 } h'(x) = \frac{1}{x} -$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}, \text{ 当 } 0 < x < 1 \text{ 时, } h'(x) = \frac{x-1}{x^2} <$$

$$0, \text{ 当 } x > 1 \text{ 时, } h'(x) = \frac{x-1}{x^2} > 0,$$

函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $h(x) \geq h(1) = 0$, 所以 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$, 即 $f(x) \geq g(x)$, 得证.

链接教材 此题源自教材第 89 页例 4 和第 94 页的结论与证明.

一方面, 在学习完用导数研究函数最值后, 我们可以利用最值证明一些函数不等式, 其基本的解题思路为将不等式转化成差函数大于或等于 (小于或等于) 0 的形式, 继而利用导数研究差函数的最小 (大) 值, 证明其大于或等于 (小于或等于) 0 即可;

另一方面, 我们可以通过函数图象直观感受到函数的大小, 但有些性质在草图中无法定量研究, 需要求导去研究, 比如本题两个函数都过点 $(1, 0)$ 且都单调递增, 还都是越增越缓, 那么在此点附近两个函数的大小关系, 就需要比较导数大小得到.

同时, 在研究这些不等式时, 我们也要积累一些常见的不等关系, 在后续利用放缩研究不等式时, 需要用到这些结论, 比如本题所证明的 $\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$.

14. (1) 【解】 因为 $f(x) = ae^x - x$ ($a \in \mathbf{R}$), 所以 $f'(x) = ae^x - 1$, 依题意可得 $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

所以 $a \geq \frac{1}{e^x}$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立. 令

$$t(x) = \frac{1}{e^x}, \text{ 因为 } t(x) = \frac{1}{e^x} \text{ 在 } [1, +\infty)$$

上单调递减, 所以 $t(x)_{\max} = t(1) = \frac{1}{e}$, 所以 $a \geq \frac{1}{e}$, 即 a 的取值范围为

$$\left[\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

(2) (i) 【解】 $f'(x) = ae^x - 1$, 依题意可得 $f'(1) = ae - 1 = 0$, 解得 $a = \frac{1}{e}$,

此时 $f(x) = e^{x-1} - x$, 则 $f'(x) = e^{x-1} - 1$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 因此 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 符合题意, 故 $a = \frac{1}{e}$.

(ii) 【证明】由(i)可知 $f(x) = e^{x-1} - x$, 令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}(x-1)^2 = e^{x-1} - x -$

$$\frac{1}{2}(x-1)^2 = e^{x-1} - (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - 1, x \in [1, +\infty),$$

$$\text{令 } h(x) = e^{x-1} - x - \frac{1}{2}x^2 - 1, x \in [0,$$

$$+\infty), \text{ 则 } h'(x) = e^{x-1} - 1 - x,$$

$$\text{令 } m(x) = h'(x) = e^{x-1} - 1 - x, x \in [0,$$

$$+\infty), \text{ 则 } m'(x) = e^{x-1} - 1 \geq 0 \text{ 且不恒为 } 0,$$

→ **黑板:** 二次求导, 当导函数的正负无法直接判断时, 可以把导函数当作一个新的函数, 对新函数求导研究其单调性, 继而得到它的最值和正负, 从而得到原函数的单调性.

所以 $m(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $m(x) \geq m(0) = 0$,
即 $h'(x) = e^x - 1 - x \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立 (仅在 $x=0$ 处取等号), 所以 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,
所以 $h(x) \geq h(0) = 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $e^x - x - \frac{1}{2}x^2 - 1 \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立,
所以 $e^{x-1} - x - \frac{1}{2}(x-1)^2 \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 即当 $x \geq 1$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{2}(x-1)^2$.

15. (1) 【解】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,
 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$. $\because 2$ 是 $f(x)$ 的极值点, $\therefore f'(2) = 0$, 即 $ae^2 - \frac{1}{2} = 0$,
 $\therefore a = \frac{1}{2e^2}$, 则 $f(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \ln x - 1$,
 $f'(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \frac{1}{x}$.
设 $u(x) = \frac{1}{2e^2}e^x - \frac{1}{x} (x > 0)$, 则 $u'(x) = \frac{1}{2e^2}e^x + \frac{1}{x^2} > 0$, \therefore 函数 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $u(2) = 0$,
 \therefore 当 $0 < x < 2$ 时, $u(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$;
当 $x > 2$ 时, $u(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$,
 $\therefore f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 2)$, 单调递增区间为 $(2, +\infty)$, 此时极小值为 2 , 无极大值点.

(2) 【证明】当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq e^{x-1} - \ln x - 1$.
设 $g(x) = e^{x-1} - \ln x - 1 (x > 0)$, 则 $g'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x} = \frac{xe^{x-1} - 1}{x}$.
设 $h(x) = xe^{x-1} - 1 (x > 0)$, 则 $h'(x) = e^x + xe^{x-1} > 0$, $\therefore h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $h(1) = 0$,
 \therefore 当 $0 < x < 1$ 时, $h(x) < 0$, 即 $g'(x) < 0$;
当 $x > 1$ 时, $h(x) > 0$, 即 $g'(x) > 0$,
 $\therefore g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore 1$ 是 $g(x)$ 的极小值点, 也是最小值点.

【设黑板: 定义域为开区间, 若有最小值, 则最小值只能在极小值点处取得】
故当 $x > 0$ 时, $g(x) \geq g(1) = 0$.
 \therefore 当 $a \geq \frac{1}{e}$ 时, $f(x) \geq 0$.

16. 【解】(1) 因为 $f(x) = \frac{e^x(2x-3)}{x+3}$ 的定义域为 $(-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$,
 $f'(x) = (e^x)' \cdot \frac{2x-3}{x+3} + e^x \cdot \left(\frac{2x-3}{x+3}\right)' = e^x \cdot \frac{2x-3}{x+3} + e^x \cdot \frac{9}{(x+3)^2} = e^x \cdot \frac{x(2x+3)}{(x+3)^2}$.
令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = -\frac{3}{2}$,
 $f'(x), f(x)$ 随 x 的变化情况列表如下:

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty, -3)$	+	单调递增
-3	/	/

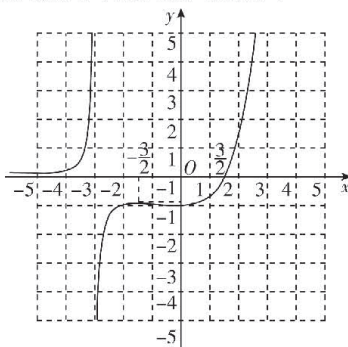
续表

x	$f'(x)$	$f(x)$
$(-3, -\frac{3}{2})$	+	单调递增
$-\frac{3}{2}$	0	极大值
$(-\frac{3}{2}, 0)$	-	单调递减
0	0	极小值
$(0, +\infty)$	+	单调递增

由表可得, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty, -3), (-3, -\frac{3}{2}), (0, +\infty)$, 单调递减区间为 $(-\frac{3}{2}, 0)$.
极大值为 $f(-\frac{3}{2}) = -4e^{-\frac{3}{2}}$, 极小值为 $f(0) = -1$.

(2) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0^+$,
当 $x \rightarrow -3^-$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$,
当 $x \rightarrow -3^+$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$,
当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$.

【设黑板: 仅有单调性和极值无法获得较为准确的图象, 后续研究函数零点信息也不足, 必须把所有单调区间端点处的函数值或极限都求出来】
故函数 $f(x)$ 的大致图象如图.



(3) 方程 $f(x) = a$ 实数解的个数等价于函数 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = a$ 的公共点的个数.
由(2)中 $f(x)$ 的图象可得, 当 $a < -1$ 或 $-4e^{-\frac{3}{2}} < a \leq 0$ 时, 方程 $f(x) = a$ 有 1 个实数解;
当 $a = -1$ 或 $a = -4e^{-\frac{3}{2}}$ 或 $a > 0$ 时, 方程 $f(x) = a$ 有 2 个实数解;
当 $-1 < a < -4e^{-\frac{3}{2}}$ 时, 方程 $f(x) = a$ 有 3 个实数解.

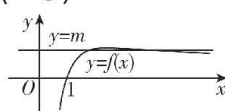
【链接教材】本题是教材第 95 页例 7 的同类试题, 考查利用函数的单调性、最值等画出函数的图象后, 研究方程解的个数或函数的零点. 方程解的个数或函数零点问题一般利用导数研究函数的单调性、极值等性质, 并借助函数图象, 判断函数零点或图象的交点情况, 实现形与数的统一.

17. 【解】(1) 因为 $f(x) = \frac{a \ln x}{x} + bx$, 所以 $f'(x) = \frac{a - a \ln x}{x^2} + b$,

又函数 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $2x - y - 2 = 0$, 因此切点为 $(1, 0)$,
所以 $\begin{cases} f'(1) = a + b = 2, \\ f(1) = b = 0, \end{cases}$ 解得 $a = 2, b = 0$, 所以函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = \frac{2 \ln x}{x}$.

(2) 因为 $f(x) = \frac{2 \ln x}{x}$, 所以 $f'(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = e$,
当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增,
且当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < 0$, 当 $x = 1$ 时, $f(x) = 0$, 当 $x \in (1, e)$ 时, $f(x) > 0$;
当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减,
且当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0^+$, $f(x)_{\max} = f(e) = \frac{2 \ln e}{e} = \frac{2}{e}$, 作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.

若方程 $f(x) = m$ (m 为常数) 有两个根, 则 $0 < m < \frac{2}{e}$, 故实数 m 的取值范围为 $(0, \frac{2}{e})$.



18. B 【解析】由题意, 利润函数 $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + ax^2 + x - (2+x) (0 \leq x \leq 10)$, 即 $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + ax^2 - 2$,
则 $\frac{23}{2} = -\frac{1}{6} \times 3^3 + 9a - 2$, 解得 $a = 2$.

故 $g(x) = -\frac{1}{6}x^3 + 2x^2 - 2$, 则 $g'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x = -\frac{1}{2}x(x-8)$.
令 $g'(x) > 0$, 则有 $0 < x < 8$, 令 $g'(x) < 0$, 则有 $8 < x \leq 10$, 所以 $g(x)$ 的极大值点即为最大值点, 为 8 ,
故要使销售利润最大, 每年需种植莲藕 8 万斤. 故选 B.

19. D 【解析】设圆锥的底面半径为 r , 体积为 V , 则 $r^2 + h^2 = 1$,
因此 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (1 - h^2) h = \frac{1}{3} \pi h - \frac{1}{3} \pi h^3 (0 < h < 1)$, 可得 $V' = \frac{1}{3} \pi - \pi h^2$, 令 $V' = \frac{1}{3} \pi - \pi h^2 = 0$, 解得 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
当 $0 < h < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $V' > 0$, 函数 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ 在区间 $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 上单调递增;
当 $\frac{\sqrt{3}}{3} < h < 1$ 时, $V' < 0$, 函数 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ 在区间 $(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1)$ 上单调递减,
所以当 $h = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, V 取到极大值, 并且这个极大值为最大值, 故选 D.

20. $\frac{3}{2}$ 【解析】设投入 m 千元 ($0 \leq m \leq 5$) 销售 B 商品, 则投入 $(5-m)$ 千元销售 A 商品, 所获得的总收益为 $S(m)$ 千元,

则 $S(m) = 2(5-m) + 4\ln(2m+1) = 4\ln(2m+1) - 2m + 10$ ($0 \leq m \leq 5$),

可得 $S'(m) = 4 \times \frac{2}{2m+1} - 2 = \frac{6-4m}{2m+1}$.

当 $0 \leq m < \frac{3}{2}$ 时, $S'(m) > 0$, 函数 $S(m)$ 单调递增;

当 $\frac{3}{2} < m \leq 5$ 时, $S'(m) < 0$, 函数 $S(m)$ 单调递减.

所以当 $m = \frac{3}{2}$ 时, 函数 $S(m)$ 取得最大值, 即总收益最大.

刷提升

1. D 【解析】因为 $f(x) = e^x + ax + c$ ($a, c \in \mathbb{R}$), 所以 $f'(x) = e^x + a$, 所以 $f'(0) = e^0 + a = 3$, 解得 $a = 2$, 所以 $f(x) = e^x + 2x + c$, $f'(x) = e^x + 2$, 所以当 $x \in [0, 1]$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增, 所以 $f(1) = e + 2 + c = 5$, 解得 $c = 3 - e$. 故选 D.

2. D 【解析】如图所示, 连接 AC 与 BD 交于点 O, 连接 PO. 因为四棱锥 P-ABCD 为正四棱锥, 所以 PO ⊥ 平面 ABCD.

又因为 AO ⊂ 平面 ABCD, 所以 PO ⊥ AO. 由题意知, 正四棱锥的侧棱长为 3, 且正四棱柱 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 的侧棱长为 1, 设正四棱柱 ABCD-A₁B₁C₁D₁ 的底面边长为 $2a$,

在正方形 ABCD 中, 可得 $AO = \sqrt{2}a$, 所以 $PO = \sqrt{PA^2 - AO^2} = \sqrt{9 - 2a^2}$,

则该几何体的体积 $V(a) = 4a^2 \times 1 + \frac{1}{3} \times 4a^2 \times \sqrt{9 - 2a^2}$. 令 $t = \sqrt{9 - 2a^2}$,

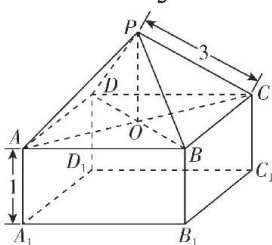
可得 $a^2 = \frac{9-t^2}{2}$ 且 $0 < t < 3$,

可得 $V(t) = 4 \times \frac{9-t^2}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{9-t^2}{2} \times t$
 $t = -\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + 6t + 18$,

则 $V'(t) = -2t^2 - 4t + 6 = -2(t+3)(t-1)$, 当 $t \in (0, 1)$ 时, $V'(t) > 0$, $V(t)$ 单调递增; 当 $t \in (1, 3)$ 时, $V'(t) < 0$, $V(t)$ 单调递减.

所以当 $t = 1$ 时, 函数 $V(t)$ 取得最大值, 最大值为 $V(1) = \frac{64}{3}$, 所以该几何

体体积的最大值为 $\frac{64}{3}$. 故选 D.



3. A 【解析】令 $f(x) = e^x + \sin x - ax - 1$, $x \geq 0$, 则 $f'(x) = e^x + \cos x - a$, 由题意可知, $f(x) \geq 0$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立, 且 $f(0) = 0$,

所以 $f'(0) = 2 - a \geq 0$, 解得 $a \leq 2$.

④悟: 若 $f'(0) < 0$, 则在 $x = 0$ 附近 $f(x)$ 单调递减, 由 $f(0) = 0$ 知在 $x = 0$ 右侧附近 $f(x) < 0$, 不满足题意.

当 $a \leq 2$ 时, 令 $g(x) = f'(x)$, $x \geq 0$, 则 $g'(x) = e^x - \sin x \geq 1 - \sin x \geq 0$ 且等号不同时取到, 则 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 可得 $g(x) \geq g(0) = 2 - a \geq 0$,

即 $f'(x) \geq 0$ 对任意 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立且等号不恒成立, 则 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 可得 $f(x) \geq f(0) = 0$, 符合题意,

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$. 故选 A.

4. B 【解析】因为 $f(x) = e^x - \ln(x+3)$, $x > -3$, 所以 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+3}$, $x > -3$, 显然 $f'(x)$ 在 $(-3, +\infty)$ 上单调递增. 又

$f'(-1) = \frac{1}{e} - \frac{1}{2} < 0$, $f'(0) = \frac{2}{3} > 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(-3, +\infty)$ 上有唯一的零点, 设为 x_0 , 且 $x_0 \in (-1, 0)$, 则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点, 也是最小值点, 且

$e^{x_0} = \frac{1}{x_0+3}$, 即 $x_0 = -\ln(x_0+3)$. 故 $f(x) \geq f(x_0) = e^{x_0} - \ln(x_0+3) = \frac{1}{x_0+3} - \ln(x_0+3)$.

设函数 $y = \frac{1}{x+3} + x$, $y' = -\frac{1}{(x+3)^2} + 1$, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $y' > 0$, 所以 $\frac{1}{x_0+3} +$

$x_0 > \frac{1}{-1+3} - 1 = -\frac{1}{2}$, 即 $f(x) > -\frac{1}{2}$. 故选 B.

5. D 【解析】对命题①: 因为 $e^x \geq x+1$, 所以 $e^{x-1} \geq (x-1)+1 = x$ 恒成立, 则当 $x > 0$ 时, $\ln e^{x-1} \geq \ln x$, 即 $x-1 \geq \ln x$, 则 $x \geq \ln x+1$,

所以 $e^{x-1} \geq x \geq \ln x+1$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 且当 $x = 1$ 时两个等号均成立, 所以①正确;

对命题②: 因为 $e^x \geq x+1$, 所以 $e^{x-a} \geq x-a+1$, 两边同乘 e^a 得 $e^x \geq e^a(x-a+1)$, 且当 $x = a$ 时等号成立, 所以②正确;

对命题③: 设 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$, 则 $f'(x) = -\sin x + x$, 设 $h(x) = -\sin x + x$, 则 $h'(x) = -\cos x + 1 \geq 0$ 恒成立且不恒为 0,

所以 $h(x) = -\sin x + x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增, 又 $h(0) = 0$, 所以当 $x < 0$ 时, $h(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $h(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$, 且当 $x = 0$ 时等号成立, 所以③正确;

对命题④: 因为 $e^x \geq x+1$, 所以当 $x > 0$ 时, $e^{x+\ln x} \geq x+\ln x+1$, 即 $xe^x \geq x+\ln x+1$, 且当 $x+\ln x = 0$ 时等号成立, 所以④正确, 故选 D.

6. B 【解析】设 $f(m) = g(n) = k > 0$, 则有 $e^m = k$, 解得 $m = \ln k + 1$;

$1 + \ln n = k$, 解得 $n = e^{k-1}$.

故 $m - n = \ln k + 1 - e^{k-1}$.

④悟: 将 m, n 都用同一个参数表示出来, 转化为求新函数的最值.

令 $h(x) = \ln x + 1 - e^{x-1}$ ($x > 0$), 则

$h'(x) = \frac{e-xe^x}{e^x}$ ($x > 0$),

令 $t(x) = e - xe^x$ ($x > 0$), 则 $t'(x) = -(1+x)e^x < 0$ 恒成立,

则当 $x > 0$ 时, $t(x) = e - xe^x$ 单调递减, 又 $t(1) = 0$,

则当 $0 < x < 1$ 时, $t(x) > 0$, 则 $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $x > 1$ 时, $t(x) < 0$, 则 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减,

则 $h(x)_{\max} = h(1) = 0$, 则 $\ln k + 1 - e^{k-1}$ 的最大值为 0.

故 $m - n$ 的最大值是 0. 故选 B.

7. ABD 【解析】当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^x - x$, $f'(x) = e^x - 1$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 0$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) \geq f(0) = 1 > 0$, 故 A 正确, B 正确;

若 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ($x_1 \neq x_2$) 恒成立, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上是增函数,

所以 $f'(x) = e^x - a - 1 \geq 0$ 在 \mathbb{R} 上恒成立, 即 $a \leq e^x - 1$ 恒成立.

又 $e^x - 1 > -1$, 所以 $a \leq -1$,

所以“ $a < -1$ ”是“ $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ ($x_1 \neq x_2$)

恒成立”的充分不必要条件, C 错误;

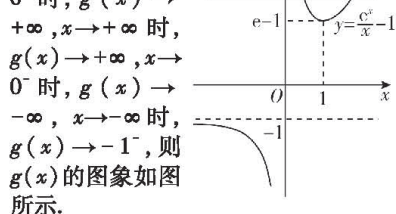
由题易得 $x = 0$ 不是函数 $f(x)$ 的零点, 令 $f(x) = 0$, 得 $a = \frac{e^x}{x} - 1$,

令 $g(x) = \frac{e^x}{x} - 1$, 则 $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$,

令 $g'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 令 $g'(x) < 0$, 得 $x < 1$ 且 $x \neq 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

$g(x)$ 的极小值是 $g(1) = e - 1$, $x \rightarrow 0^+$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0^-$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -1^-$, 则 $g(x)$ 的图象如图



所示.

由图可得, 若 $y = a$ 与 $y = \frac{e^x}{x} - 1$ 的图象

有两个交点, 则 $a > e - 1$, D 正确. 故选 ABD.

8. $[\frac{8}{27}, 2)$ 【解析】由 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + 2$

求得 $f'(x) = 6x^2 - 2ax = 6x(x - \frac{a}{3})$,

若 $0 < a \leq 2$, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{a}{3})$ 上单

调递减, 在区间 $(\frac{a}{3}, 1)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f(\frac{a}{3})$, 而 $f(0) = 2$, $f(1) = 4 - a \geq 2 = f(0)$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$,

$$\text{所以 } M-m=f(1)-f\left(\frac{a}{3}\right)=(4-a)-\left[2\left(\frac{a}{3}\right)^3-a\left(\frac{a}{3}\right)^2+2\right]=\frac{a^3}{27}-a+2,$$

设函数 $g(x)=\frac{x^3}{27}-x+2$, 则 $g'(x)=\frac{x^2}{9}-1$, 当 $0 < x \leq 2$ 时, $g'(x) < 0$, 从而 $g(x)$ 单调递减,

则由 $0 < a \leq 2$, 可得 $\frac{8}{27} \leq \frac{a^3}{27}-a+2 < 2$, 即 $M-m$ 的取值范围是 $\left[\frac{8}{27}, 2\right)$;

若 $2 < a < 3$, 则 $f(x)$ 在区间 $\left(0, \frac{a}{3}\right)$ 上单调递减, 在区间 $\left(\frac{a}{3}, 1\right)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最小值为 $f\left(\frac{a}{3}\right)$, 而 $f(0)=2, f(1)=4-a < 2=f(0)$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(0)$,

所以 $M-m=f(0)-f\left(\frac{a}{3}\right)=2-\left[2\left(\frac{a}{3}\right)^3-a\left(\frac{a}{3}\right)^2+2\right]=\frac{a^3}{27}$, 由 $2 < a < 3$, 可得 $\frac{8}{27} < \frac{a^3}{27} < 1$, 即 $M-m$ 的取值范围是 $\left(\frac{8}{27}, 1\right)$.

综上, $M-m$ 的取值范围是 $\left[\frac{8}{27}, 2\right)$.

- 9.4 【解析】因为 $e^{a+4b} \leq 4e\sqrt{ab}$, 所以两边同时取以 e 为底的对数, 得 $\ln e^{a+4b} \leq \ln(4e\sqrt{ab})$, 可得 $a+4b \leq \ln 4+1+\frac{1}{2}\ln ab$. 因为 a, b 都是正实数, 所以 $a+4b \geq 2\sqrt{a \cdot 4b} = 4\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=4b$ 时取等号, 所以 $4\sqrt{ab} \leq$

❶ 黑板: 应用基本不等式时, 取等条件不要忘记

$$\ln 4+1+\frac{1}{2}\ln ab,$$

所以 $8\sqrt{ab} \leq 2\ln 4+2+\ln ab$, 即 $8\sqrt{ab}-\ln ab \leq 2\ln 4+2$.

$$\text{令 } f(x)=8\sqrt{x}-\ln x(x>0), \text{ 则 } f'(x)=\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{4\sqrt{x}-1}{x},$$

当 $x \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in \left(\frac{1}{16}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

$$\text{所以 } f(x) \geq f\left(\frac{1}{16}\right)=2+2\ln 4, \text{ 即}$$

$$8\sqrt{ab}-\ln ab \geq 2+2\ln 4,$$

又 $8\sqrt{ab}-\ln ab \leq 2\ln 4+2$, 所以 $8\sqrt{ab}-\ln ab=2\ln 4+2$,

此时 $ab=\frac{1}{16}$. 由 $a=4b$, 可得 $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{8}$, 所以 $\frac{a}{b}=4$.

名师点拨 如果题目条件中出现不等关系, 但问题是求值(相等关系), 那么可能需要用到夹逼的思想, 我们需要构造一个代数式, 证明其既大于或等于 C , 还小于或等于 C , 则其等于 C , 然后根据等号成立的条件, 即可求解.

本题通过基本不等式构造了一个以 ab 为主元的代数式 $8\sqrt{ab}-\ln ab$, 从题目条件中获得其小于或等于 $2\ln 4+2$, 再根据此代数式的最值得到其大于或等于 $2\ln 4+2$, 从而得到此式等于 $2\ln 4+2$, 进而根据等号成立条件求得 a, b 的比值.

10. 【解】(1) 由 $g(x)=x^2+1-\frac{e^x}{2}$ 求导可得 $g'(x)=2x-\frac{e^x}{2}$, 则 $g'(0)=-\frac{e^0}{2}=-\frac{1}{2}$.

又 $g(0)=0+1-\frac{e^0}{2}=\frac{1}{2}$, 所以 $g(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}x$, 即 $x+2y-1=0$.

(2) 由题意 $f(x)=mx^2+(2m-1)x-\ln x(m \in \mathbb{R})$, 定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $f'(x)=2mx+(2m-1)-\frac{1}{x}=\frac{2mx^2+(2m-1)x-1}{x}=\frac{(2mx-1)(x+1)}{x}$,

因为 $x \in (0, +\infty)$, 所以 $x+1 > 0$, 当 $m \leq 0$ 时, $2mx-1 < 0$, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $m > 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$ 得 $x > \frac{1}{2m}$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < \frac{1}{2m}$,

故 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2m}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{2m}, +\infty\right)$ 上单调递增.

综上, 当 $m \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $m > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2m}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{2m}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(3) 当 $m > 0$ 时, 若对于任意 $x_1 > 0$, 总存在 $x_2 \in [-2, -1]$, 使得 $f(x_1) \geq g(x_2)$, 即 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最小值大于或等于 $g(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上的最小值, 由 (2) 知, 当 $m > 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2m}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{2m}, +\infty\right)$ 上单调递增,

$$\text{故 } f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{2m}\right)=m\left(\frac{1}{2m}\right)^2+(2m-1)\times\frac{1}{2m}-\ln\frac{1}{2m}=-\frac{1}{4m}+1+\ln(2m).$$

由 (1) 知 $g'(x)=2x-\frac{e^x}{2}$,

当 $-2 \leq x \leq -1$ 时, $\frac{e^x}{2} > 0, 2x < 0$, 所以 $g'(x) < 0$ 在 $[-2, -1]$ 上恒成立, 故 $g(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上单调递减,

则 $g(x)$ 在 $[-2, -1]$ 上的最小值为 $g(-1)=1+1-\frac{e^{-1}}{2}=2-\frac{1}{2e}$, 所以 $-\frac{1}{4m}+1+\ln(2m) \geq 2-\frac{1}{2e}$, 即 $\frac{1}{4m}-\ln(2m)-\frac{1}{2e}+1 \leq 0$,

$$\text{令 } w(m)=\frac{1}{4m}-\ln(2m)-\frac{1}{2e}+1, m>0,$$

$$\text{则 } w'(m)=-\frac{1}{4m^2}-\frac{1}{2m}\cdot 2=-\frac{1}{4m^2}-\frac{1}{m}<0,$$

所以 $w(m)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$$\text{又 } w\left(\frac{e}{2}\right)=\frac{1}{2e}-\ln e-\frac{1}{2e}+1=0,$$

所以当 $m \geq \frac{e}{2}$ 时, $w(m) \leq 0$, 当 $0 < m < \frac{e}{2}$ 时, $w(m) > 0$,

故 m 的取值范围为 $\left[\frac{e}{2}, +\infty\right)$.

11. 【解】(1) 由题意可知, 销售收入为 200x 万元, 当产量不足 60 万箱, 即 $0 < x < 60$ 时, $y=200x-p(x)-400=-\frac{1}{150}x^3+50x-400$. 当产量不小于 60 万箱, 即 $x \geq 60$ 时, $y=200x-p(x)-400=1\,460-\left(x+\frac{6\,400}{x}\right)$.

综上, $y=\begin{cases} -\frac{1}{150}x^3+50x-400, & 0 < x < 60, \\ 1\,460-\left(x+\frac{6\,400}{x}\right), & x \geq 60. \end{cases}$

(2) 设 $f(x)=$

$$\begin{cases} -\frac{1}{150}x^3+50x-400, & 0 < x < 60, \\ 1\,460-\left(x+\frac{6\,400}{x}\right), & x \geq 60, \end{cases}$$

当 $0 < x < 60$ 时, $f'(x)=-\frac{1}{50}(x+50) \cdot (x-50)$,

则当 $0 < x < 50$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $50 < x < 60$ 时, $f'(x) < 0$, 可知 $f(x)$ 在 $(0, 50)$ 上单调递增, 在 $(50, 60)$ 上单调递减, 则 $f(x) \leq f(50)=\frac{3\,800}{3}$.

当 $x \geq 60$ 时, 由基本不等式可得 $1\,460-\left(x+\frac{6\,400}{x}\right) \leq 1\,460-2 \cdot$

$$\sqrt{x \cdot \frac{6\,400}{x}}=1\,300, \text{ 当且仅当 } x=\frac{6\,400}{x}, \text{ 即 } x=80 \text{ 时取等号.}$$

又 $1\,300 > \frac{3\,800}{3}$, 所以当产量为 80 万箱时, 所获利润最大, 最大值为 1 300 万元.

12. (1) 【解】对 $g(x)$ 求导得 $g'(x)=b+\frac{1}{x}=\frac{bx+1}{x}$, 因为 $x \geq 1$, 所以当 $b \geq 0$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增. 当 $b < 0$ 时, 由 $g'(x)=0$ 得 $x=-\frac{1}{b} > 0$,

若 $0 < -\frac{1}{b} \leq 1$, 即 $b \leq -1$, 当 $x \geq 1$ 时,
 $bx+1 \leq 0$, 则 $g'(x) \leq 0$ 且不恒为 0,
 所以 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减.

若 $-\frac{1}{b} > 1$, 即 $-1 < b < 0$, 当 $x \in$
 $\left[1, -\frac{1}{b}\right)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调

递增;
 当 $x \in \left(-\frac{1}{b}, +\infty\right)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$

单调递减.
 综上所述: 当 $b \geq 0$ 时, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $b \leq -1$ 时, $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调

递减;
 当 $-1 < b < 0$ 时, $g(x)$ 在 $\left[1, -\frac{1}{b}\right)$ 上单

调递增, 在 $\left(-\frac{1}{b}, +\infty\right)$ 上单调递减.

(2) 【证明】当 $b=1$ 时, $g(x) = x + \ln x$,
 要证 $f(x) \geq g(x) + 1$, 即证 $x(e^{2x}-a) -$
 $(x + \ln x) \geq 1$,

又因为 $a \leq 1$, 所以 $-a \geq -1$, 所以 $e^{2x} -$
 $a \geq e^{2x} - 1$, 又 $x > 0$, 即证 $x(e^{2x}-1) - (x +$

点悟: 放缩法的应用

$\ln x) \geq 1$.

设 $\varphi(x) = x(e^{2x}-1) - (x + \ln x) = xe^{2x} -$
 $2x - \ln x (x > 0)$,

则 $\varphi'(x) = (2x+1)\left(e^{2x} - \frac{1}{x}\right)$,

设 $m(x) = e^{2x} - \frac{1}{x} (x > 0)$,

所以 $m'(x) = 2e^{2x} + \frac{1}{x^2} > 0$, 且 $m\left(\frac{1}{4}\right) =$

$\sqrt{e} - 4 < 0$, $m(1) = e^2 - 1 > 0$,

所以 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, 使 $m(x_0) = 0$, 即

使 $\varphi'(x_0) = (2x_0+1)\left(e^{2x_0} - \frac{1}{x_0}\right) = 0$,

即 $e^{2x_0} - \frac{1}{x_0} = 0$,

则 $\ln e^{2x_0} = \ln \frac{1}{x_0}$, 即 $2x_0 = \ln \frac{1}{x_0} =$

$-\ln x_0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 当 $x \in$
 $(x_0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) > 0$,

所以 $\varphi(x)_{\min} = \varphi(x_0) = x_0 e^{2x_0} - 2x_0 -$
 $\ln x_0 = x_0 \cdot \frac{1}{x_0} - 2x_0 + 2x_0 = 1$,

所以 $\varphi(x) \geq 1$, 即 $f(x) \geq g(x) + 1$.

多种解法 (2) 当 $a \leq 1$ 时, $f(x) \geq$
 $x(e^{2x}-1) (x > 0)$, 当 $b=1$ 时 $g(x) =$
 $x + \ln x$, 即证 $xe^{2x} - x \geq x + 1 + \ln x$,
 即证 $e^{2x+1} - (2x+1) \geq 1$,

令 $t = 2x + 1$ ($t \in \mathbb{R}$), 令 $h(t) = e^t - t$
 $(t \in \mathbb{R})$,

则 $h'(t) = e^t - 1$, 由 $h'(t) = 0$ 得 $t = 0$,
 当 $t < 0$ 时, $h'(t) < 0$, $h(t)$ 单调递减,

当 $t > 0$ 时, $h'(t) > 0$, $h(t)$ 单调递增,
 则 $h(t) \geq h(0) = e^0 - 0 = 1$,

即 $e^{2x+1} - (2x+1) \geq 1$, 即 $f(x) \geq$
 $g(x) + 1$.

刷素养

13. $-\frac{8}{3}$ 【解析】由已知得 $f'(x) =$

$3ax^2 + 2bx + c$, $x \in [0, 1]$, 则 $|3ax^2 +$
 $2bx + c| \leq 1$,

所以 $|f'(0)| = |c| \leq 1$, $|f'(1)| =$
 $|3a + 2b + c| \leq 1$, $\left|f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| =$

$\left|\frac{3}{4}a + b + c\right| \leq 1$,

则有 $\frac{3}{2}|a| = \left|f'(0) + f'(1) - 2f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq$
 $|f'(0)| + |f'(1)| + \left|2f'\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 4$,

可得 $-\frac{8}{3} \leq a \leq \frac{8}{3}$,

当且仅当 $a = -\frac{8}{3}, c = -1, b = 4$ 或 $a = \frac{8}{3},$
 $b = -4, c = 1$ 时取等号, 所以 $a_{\min} = -\frac{8}{3}$.

14. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ 【解析】设 $f(x) = ax^3 +$
 $bx^2 + x + 1$, 则 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$, $\Delta =$
 $4b^2 - 12a > 0$, 故 $f'(x) = 0$ 有两根, 不

妨设为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$, 又 $a < 0$,
 $f'(0) = 1 > 0$, 则 $x_1 < 0, x_2 > 0$, 易知

$f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1,$
 $x_2)$ 上单调递增, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调

递减.
 又 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时,

$f(x) \rightarrow -\infty$, 且 $f(0) = 1 > 0$, $f(x) = 0$
 恰有两个解, 所以 $f(x_1) = ax_1^3 + bx_1^2 +$
 $x_1 + 1 = 0$.

联立 $\begin{cases} f'(x_1) = 0, \\ f(x_1) = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = \frac{x_1+2}{x_1^3}, \\ b = -\frac{2x_1+3}{x_1^2}, \end{cases}$

则 $a+b = \frac{-2x_1^2-2x_1+2}{x_1^3}$.

因为 $a = \frac{x_1+2}{x_1^3} < 0$, 所以 $-2 < x_1 < 0$, 令

$g(x) = \frac{-2x^2-2x+2}{x^3} (-2 < x < 0)$, 则

$g'(x) = \frac{2(x+3)(x-1)}{x^4}$, 当 $-2 < x < 0$

时, $g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 在 $(-2, 0)$ 上单

调递减, 当 $x \rightarrow -2$ 时, $g(x) \rightarrow \frac{1}{4}$, 当

$x \rightarrow 0^-$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$. 故 $a+b$ 的取值

范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$.

15. 【解】令 $f(x) = x^3 + ax^2 - (1-a)^2$, 则
 $f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x+2a)$, 令

$f'(x) = 0$, 得 $x=0$ 或 $x = -\frac{2a}{3}$.

因为关于 x 的方程 $x^3 + ax^2 - (1-a)^2 =$
 0 有三个不同的实根 x_1, x_2, x_3 ,

所以 $f(0)f\left(-\frac{2a}{3}\right) < 0$, 且 $a \neq 0$,

所以 $-(1-a)^2 \left[\frac{4}{27}a^3 - (1-a)^2\right] < 0$, 即

$(a-1)^2(a-3)^2(4a-3) > 0$, 解得 $a >$
 $\frac{3}{4}$, 且 $a \neq 1, a \neq 3$.

根据一元三次方程根与系数的关系,

得 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -a, \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 0, \\ x_1x_2x_3 = -(1-a)^2, \end{cases}$

所以 $\frac{x_1}{x_2x_3} + \frac{x_2}{x_3x_1} + \frac{x_3}{x_1x_2} =$

$\frac{(x_1+x_2+x_3)^2 - 2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)}{x_1x_2x_3} =$

$\frac{a^2}{(1-a)^2} > \frac{3}{2}$, 解得 $3-\sqrt{6} < a < 3+\sqrt{6}$, 且

$a \neq 1$.

综上所述, 实数 a 的取值范围为

$\left(\frac{3}{4}, 1\right) \cup (1, 3) \cup (3, 3+\sqrt{6})$.

第5.3节综合训练

刷能力

1. B 【解析】对 $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 - x^2 + bx$ 求

导得 $f'(x) = ax^2 - 2x + b$, 因为函数 $f(x)$
 的一个极值点为 2, 所以 $f'(2) = 4a -$
 $4 + b = 0$, 即 $4a + b = 4$.

又 $a > 0, b > 0$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}(4a +$
 $b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4}\left(5 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b}\right) \geq$

$\frac{1}{4}\left(5 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}}\right) = \frac{9}{4}$, 当且仅当

$\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$, 即 $b = 2a = \frac{4}{3}$ 时取等号, 所以

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$. 故选 B.

2. D 【解析】由 $f(x) = 4x^3 - ax^2 + 3$ 可得
 $f(0) = 3$,

函数 $f(x) = 4x^3 - ax^2 + 3, x \in [0, 2]$ 的导

函数 $f'(x) = 12x^2 - 2ax = 2x(6x - a)$,
 $x \in [0, 2]$,

若 $a \leq 0$, 则当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f'(x) \geq 0$ 且

等号不恒成立, 则函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$
 上单调递增, $f(x)$ 的最大值为 $f(2) >$
 $f(0) = 3$, 不符合题意;

若 $0 < a < 12$, 当 $0 < x < \frac{a}{6}$ 时, $f'(x) < 0$, 函

数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{a}{6}\right)$ 上单调递减,

当 $\frac{a}{6} < x < 2$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在

$\left(\frac{a}{6}, 2\right)$ 上单调递增,

由函数 $f(x) = 4x^3 - ax^2 + 3$ 在 $[0, 2]$ 上

的最大值为 3, 可得 $f(2) \leq f(0) = 3$, 所以

$4 \times 8 - 4a + 3 \leq 3$, 即 $a \geq 8$, 又 $0 < a < 12$,
 所以 $8 \leq a < 12$;

若 $a \geq 12$, 当 $0 \leq x \leq 2$ 时, $f'(x) \leq 0$ 且

等号不恒成立, 则函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$
 上单调递减, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的

最大值为 $f(0) = 3$, 满足条件, 所以当
 $a \geq 12$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上的最大

值为 3.
 综上所述, 实数 a 的取值范围是 $[8,$
 $+\infty)$. 故选 D.

3. B 【解析】因为 $f(x)$ 有零点, 所以方

程 $f(x) = 0$ 有解, 即 $x - a = 0$ 在 $(0, 4)$
 上有解, 所以 $a \in (0, 4)$. 又 $f'(x) =$
 $\frac{x^2 + (1-a)x + 1}{(x+1)^2} e^x$ 且 $f(x)$ 是单调函数,

令 $g(x) = x^2 + (1-a)x + 1$, 则函数

$g(x) = x^2 + (1-a)x + 1 \geq 0$ 在 $(0, 4)$ 上恒

成立或 $g(x) = x^2 + (1-a)x + 1 \leq 0$ 在

$(0, 4)$ 上恒成立.

因为 $g(0) = 1 > 0$, 所以 $g(x) = x^2 + (1-$
 $a)x + 1 \leq 0$ 在 $(0, 4)$ 上不可能恒成立,
 即函数 $g(x) = x^2 + (1-a)x + 1 \geq 0$ 在

$(0, 4)$ 上恒成立, 即 $x + \frac{1}{x} + 1 - a \geq 0$ 在

$(0,4)$ 上恒成立.

因为 $x + \frac{1}{x} + 1 - a \geq 3 - a$ (当且仅当 $x = 1$ 时等号成立), 所以 $3 - a \geq 0$, 解得 $a \leq 3$.

综上, 实数 a 的取值范围是 $(0, 3]$. 故选 B.

4. A 【解析】不等式 $\ln \frac{b}{3a} > 8^a - 2^b$ 可化为 $\ln b + 2^b > \ln(3a) + 2^{3a}$, 令 $f(x) = \ln x + 2^x (x > 0)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} + 2^x \ln 2 > 0$, 则函数 $f(x) = \ln x + 2^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 由 $f(b) > f(3a)$ 可得 $b > 3a$, 故选 A.

5. D
思路导引 根据 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$, 联想函数单调递增的一个等价条件 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$, 本题右边是 -1 , 可以将其移项到左边, 通分, 构造一个新的函数满足上述不等式, 从而得到此函数的单调性, 进而翻译成此函数导函数的正负去求参数的取值范围.

【解析】因为对任意两个不相等的实数 x_1, x_2 , 都有 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > -1$,

$$\text{即 } \frac{f(x_1) - f(x_2) + x_1 - x_2}{x_1 - x_2} > 0, \\ \text{令 } g(x) = f(x) + x, \text{不妨设 } x_1 < x_2, \text{则有} \\ \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 0,$$

所以 $g(x_1) - g(x_2) < 0$, 即 $g(x_1) < g(x_2)$, 所以 $g(x) = f(x) + x = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax + x$ 在 \mathbf{R} 上单调递增,

所以 $g'(x) = e^x - x - a + 1 \geq 0$ 在 \mathbf{R} 上恒成立, 即 $a \leq e^x - x + 1$ 在 \mathbf{R} 上恒成立. 令 $h(x) = e^x - x + 1, x \in \mathbf{R}$, 则 $h'(x) = e^x - 1$, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = 0$, 所以当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 所以 $h(x)_{\min} = h(0) = 2$, 所以 $a \leq 2$. 即 a 的最大值为 2. 故选 D.

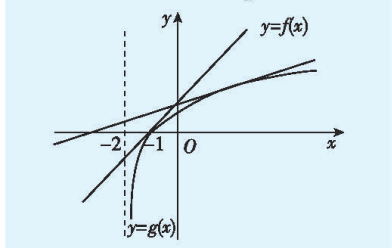
6. B 【解析】由题意, $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \geq 0$, 令 $t(x) = f(x) - g(x) = ax + b - \ln(x+2) (x \geq -2)$, 则 $\forall x > -2, f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 即 $t(x) \geq 0$ 恒成立, 即 $t(x)_{\min} \geq 0$, $t'(x) = a - \frac{1}{x+2} = \frac{ax+2a-1}{x+2} (x > -2)$, 令 $t'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{1-2a}{a} = \frac{1}{a} - 2 > -2$, 令 $t'(x) > 0$ 得 $x > \frac{1-2a}{a}$, 则 $t(x)$ 在 $(\frac{1-2a}{a}, +\infty)$ 上单调递增; 令 $t'(x) < 0$ 得 $-2 < x < \frac{1-2a}{a}$, 则 $t(x)$ 在 $(-2, \frac{1-2a}{a})$ 上单调递减. $\therefore t(x)_{\min} = t(\frac{1}{a} - 2) \geq 0 \Rightarrow 1 - 2a + b +$

$$\ln a \geq 0, \therefore b \geq 2a - 1 - \ln a, \therefore \frac{b}{a} \geq 2 - \frac{\ln a + 1}{a}.$$

令 $h(a) = 2 - \frac{\ln a + 1}{a}$, $\therefore h'(a) = \frac{\ln a}{a^2}$, 令 $h'(a) > 0$ 得 $a > 1$, 则 $h(a)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增; 令 $h'(a) < 0$ 得 $0 < a < 1$, 则 $h(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $\therefore h(a)_{\min} = h(1) = 1$, $\therefore \frac{b}{a} \geq 1$, 即 $\frac{b}{a}$ 的取值范围为 $[1, +\infty)$. 故选 B.

多种解法 $f(x) = ax + b$ 为一条直线, 其与 x 轴交于点 $P(-\frac{b}{a}, 0)$, 即 $x_P = -\frac{b}{a}$. 则要求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围可求 x_P 的取值范围.

$f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 即直线 $y = f(x)$ 恒在曲线 $y = g(x)$ 的上方或与曲线 $y = g(x)$ 相切, 作出 $y = g(x)$ 的图象与 x 轴交于点 $(-1, 0)$, 临界情况为直线 $y = f(x)$ 与曲线 $y = g(x)$ 相切且交 x 轴于点 $(-1, 0)$, 要使 $f(x) \geq g(x)$ 恒成立, 则有 $x_P \leq -1$, 故 $\frac{b}{a} \geq 1$.



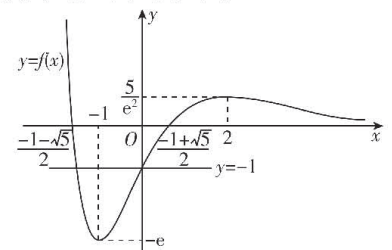
7. ACD 【解析】 $f'(x) = \frac{-x^2+x+2}{e^x} = \frac{-(x-2)(x+1)}{e^x}$,

由 $f'(x) < 0$ 解得 $x < -1$ 或 $x > 2$, 由 $f'(x) > 0$ 解得 $-1 < x < 2$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(-1, 2)$ 上单调递增, 则 $-1, 2$ 分别是 $f(x)$ 的极小值点和极大值点, A 正确.

当 $k = 0$ 时, 令 $f(x) = \frac{x^2+x-1}{e^x} = 0$, 即 $x^2+x-1=0$, 解得 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$,

所以此时关于 x 的方程 $f(x) = k$ 有且仅有两个实根, 故 B 错误.

$f(-1) = -e, f(2) = \frac{5}{e^2}$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0^+$, 结合函数 $f(x)$ 的单调性画出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



对于关于 x 的方程 $f(f(x)) = -1$, 令 $t = f(x)$, 注意到 $f(0) = -1$, 观察图象可知 $f(t) = -1$ 有两根, 设为

t_1, t_2 , 且规定 $t_1 < t_2$,

则有 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < t_1 < -1 < 0 = t_2$, 其中

$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 是 $f(x)$ 的一个零点. 若 $f(x) =$

$t_2 = 0$, 则有两个根 $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, x_2 =$

$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, 若 $f(x) = t_1$, 而 $-e < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} <$

$t_1 < -1 < 0 = t_2$,

观察图象可知 $f(x) = t_1$ 也有两个根.

综上所述, 关于 x 的方程 $f(f(x)) = -1$ 共有 4 个实根, 故 C 正确.

由于 $f(1) + f(-1) = \frac{1}{e} - e < 0 = a + (-a)$, 故 $f(1) < a$ 或 $f(-1) < -a$,

悟: 否则 $f(1) \geq a$ 且 $f(-1) \geq -a$, 则 $f(1) + f(-1) \geq a + (-a) = 0$, 这与 $f(1) + f(-1) = \frac{1}{e} - e < 0$ 矛盾

即 $f(1) < a$ 或 $f(-1) < -a$, 又 $f(0) = -1 < 0 = 0 \times a$ 恒成立, 故 $f(x) \leq ax$ 至少有两个整数解, D 正确. 故选 ACD.

8. $(-\infty, e]$ 【解析】由题意知, $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} + \frac{k(1-x)}{x} = \frac{(e^x - kx)(x-1)}{x^2}.$$

因为函数 $f(x)$ 有唯一的极值点, 所以 1 是函数 $f(x)$ 的唯一极值点, 所以 $y = e^x - kx$ 在 $(0, +\infty)$ 上无零点或无变号零点. 令 $g(x) = e^x - kx$, 则 $g'(x) = e^x - k$, 当 $k \leq 0$ 时, $g'(x) = e^x - k > 0$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(0) = 1$, 所以 $g(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上无解, 符合题意.

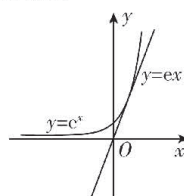
当 $k > 0$ 时, $g'(x) = e^x - k = 0$ 有解, 且 $x = \ln k$,

又 $0 < x < \ln k$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, \ln k)$ 上单调递减,

当 $x > \ln k$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(\ln k, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(\ln k) = k - k \ln k \geq 0$. 令 $h(x) = x - x \ln x$, 则 $h'(x) = 1 - (1 + \ln x) = -\ln x$, 令 $h'(x) = 0$, 则 $x = 1$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 又 $x \rightarrow 0^+$ 时, $h(x) \rightarrow 0^+$, $h(e) = 0$, 所以 $h(x) \geq 0$ 的解集为 $(0, e]$, 即 $k - k \ln k \geq 0$ 的解集为 $(0, e]$.

当 $k = e$ 时, 作出函数 $y = e^x$ 和 $y = ex$ 的图象, 如图所示.



由导数的几何意义易知直线 $y = ex$ 是曲线 $y = e^x$ 在点 $(1, e)$ 处的切线, 所以符合题意.

综上可得, $k \in (-\infty, e]$.

9. 【解】(1) 由题意函数 $f(x) = xe^x$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$, 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x \in (-1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$,

$\therefore f(x) = xe^x$ 有极小值 $f(-1) = -\frac{1}{e}$, 无极大值.

(2) 由题知函数 $g(x) = x + a \ln x + m$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 求得 $g'(x) = 1 + \frac{a}{x}$.

当 $a \geq 0$ 时, $g'(x) > 0$ 恒成立, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a < 0$ 时, 由 $g'(x) < 0$, 得 $x \in (0, -a)$; 由 $g'(x) > 0$, 得 $x \in (-a, +\infty)$, 则函数 $g(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递减, 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递减, 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增.

(3) 当 $a = 1$ 时, $g(x) = x + \ln x + m$, 不等

式 $g(x) \leq f(x) \Leftrightarrow m \leq xe^x - x - \ln x$, 令函数 $h(x) = xe^x - x - \ln x$, 依题意 $\forall x \in (0, +\infty)$, $m \leq h(x)$ 恒成立, 则 $m \leq h(x)_{\min}$,

则 $h'(x) = e^x + xe^x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{xe^x + x^2e^x - x - 1}{x} = \frac{(xe^x - 1)(x+1)}{x}$,

令 $\varphi(x) = xe^x - 1$, $x > 0$, 求得 $\varphi'(x) = e^x(x+1) > 0$, 则函数 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

而 $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{e} - 1 < 0$, $\varphi(1) = e - 1 > 0$, 则存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, 使 $\varphi(x_0) = 0$,

即 $h'(x_0) = 0$, 此时 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, 则函数 $h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

因此 $h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0e^{x_0} - x_0 - \ln x_0$, 由 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 得 $x_0 = -\ln x_0$,

则 $h(x_0) = 1 - x_0 + x_0 = 1$, 则 $m \leq 1$, 故实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

多种解法 (3) 由题得 $m \leq xe^x - x - \ln x = e^{x+\ln x} - (x + \ln x)$ ($x > 0$), 记 $t = x + \ln x$ ($t \in \mathbb{R}$), 令 $h(t) = e^t - t$, 则 $h'(t) = e^t - 1$, 当 $t < 0$ 时, $h'(t) < 0$, $h(t)$ 单调递减, 当 $t > 0$ 时, $h'(t) > 0$, $h(t)$ 单调递增, 则 $h(t) \geq h(0) = e^0 - 0 = 1$, 则 $m \leq 1$. 故实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

专题5 含参函数单调性的分类讨论

刷难关

1. 【解】 (1) 当 $a = 3$ 时, $f(x) = x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 2x - \frac{1}{2}$, 则 $f'(x) = 3x^2 + 5x - 2$, $f'(1) = 6$.

又 $f(1) = 1 + \frac{5}{2} - 2 - \frac{1}{2} = 1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = 6(x - 1) + 1$, 即 $6x - y - 5 = 0$.

(2) $f'(x) = ax^2 + (2a - 1)x - 2 = (ax - 1)(x + 2)$. 当 $a = 0$ 时, 由 $f'(x) = -(x + 2) = 0$ 可得 $x = -2$, 当 $x \in (-\infty, -2)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (-2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = (ax - 1)(x + 2) = 0$, 可得 $x = \frac{1}{a}$ 或 $x = -2$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增, 在 $\left(-2, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递减.

当 $a < 0$ 时, 若 $-\frac{1}{2} < a < 0$, 则 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{1}{a}\right)$, $(-2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, -2\right)$ 上单调递增.

若 $a = -\frac{1}{2}$, 则 $f'(x) \leq 0$ 且等号不恒成立, $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上为减函数.

若 $a < -\frac{1}{2}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减, 在 $\left(-2, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增.

若 $a = -\frac{1}{2}$, 则 $f'(x) \leq 0$ 且等号不恒成立, $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上为减函数.

若 $a < -\frac{1}{2}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减, 在 $\left(-2, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增.

综上所述, 若 $a = 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增, 在 $(-2, +\infty)$ 上单调递减.

若 $a > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减, 在 $\left(-2, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增.

若 $-\frac{1}{2} < a < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{a})$, $(-2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, -2\right)$ 上单调递增.

若 $a = -\frac{1}{2}$, 则 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上为减函数.

若 $a < -\frac{1}{2}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$, $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 上单调递减, 在 $\left(-2, \frac{1}{a}\right)$ 上单调递增.

规律方法 对于利用导数讨论含参函数的单调性问题, 常见的分类讨论点有以下三个:

(1) 求导后, 考虑 $f'(x) = 0$ 是否有实根, 从而引起分类讨论;

(2) 求导后, $f'(x) = 0$ 有实根, 但不清楚 $f'(x) = 0$ 的实根是否落在定义域内, 从而引起分类讨论;

(3) 求导后, $f'(x) = 0$ 有实根, 且根落在定义域内, 但不清楚这些根的大小关系, 从而引起分类讨论.

在求解导数中含参数的函数单调性问题时, 可根据题意选择恰当的分类讨论方法. 在具体问题中, 可能要讨论其中的两点或三点, 这时的讨论就会复杂一些了, 有些题目也可以根据式子和题目的特点进行灵活处理, 减少分类讨论.

2. (1) 【证明】 当 $a = -1$ 时, $f(x) = x - \ln x$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, $x > 0$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 1$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) \geq f(1) = 1$.

(2) 【解】 $h(x) = f(x) - g(x) = x - (a + 2) \ln x - \frac{a+1}{x}$, 其中 $x > 0$,

则 $h'(x) = 1 - \frac{a+2}{x} + \frac{a+1}{x^2} = \frac{x^2 - (a+2)x + (a+1)}{x^2} = \frac{(x-1)[x-(a+1)]}{x^2}$.

① 当 $a+1 \leq 0$, 即 $a \leq -1$ 时,

② 当 $0 < a+1 < 1$, 即 $-1 < a < 0$ 时, 由 $h'(x) < 0$, 可得 $0 < x < 1$, 由 $h'(x) > 0$, 可得 $x > 1$, 此时函数 $h(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$;

③ 当 $0 < a+1 < 1$, 即 $-1 < a < 0$ 时, 由 $h'(x) < 0$, 可得 $a+1 < x < 1$, 由 $h'(x) > 0$, 可得 $0 < x < a+1$ 或 $x > 1$,

此时函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a+1)$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a+1, 1)$;

④ 当 $a+1 > 1$, 即 $a > 0$ 时, 由 $h'(x) > 0$, 可得 $0 < x < 1$ 或 $x > a+1$, 由 $h'(x) < 0$, 可得 $1 < x < a+1$, 此时函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(a+1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, a+1)$.

综上所述, ① 当 $a \leq -1$ 时, 函数 $h(x)$ 的单调递减区间为 $(0, 1)$, 单调递增区间为 $(1, +\infty)$;

② 当 $-1 < a < 0$ 时, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, a+1)$, $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(a+1, 1)$;

③ 当 $a = 0$ 时, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递减区间;

④ 当 $a > 0$ 时, 函数 $h(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, $(a+1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(1, a+1)$.

3. 【解】 (1) 由题意得 $f(\pi) = \pi^2 - 2$, 又 $f'(x) = 2x - 2\sin x$, 所以 $f'(\pi) = 2\pi$, 因此曲线 $y = f(x)$ 在点 $(\pi, f(\pi))$ 处的切线方程为 $y - (\pi^2 - 2) = 2\pi(x - \pi)$, 即 $y = 2\pi x - \pi^2 - 2$.

(2) 由题意得 $h(x) = e^x(\cos x - \sin x + 2x - 2) - a(x^2 + 2\cos x)$, 则 $h'(x) = e^x(\cos x - \sin x + 2x - 2) + e^x(-\sin x - \cos x + 2) - a(2x - 2\sin x) = 2e^x(x - \sin x) - 2a(x - \sin x) = 2(e^x - a)(x - \sin x)$.

③ 当 $a = 0$ 时, $e^x - a > 0$ 恒成立, 当 $x < 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 所以当 $x = 0$ 时 $h(x)$ 取得极小值, 极小值是 $h(0) = -2a - 1$.

④ 当 $a > 0$ 时, $h'(x) = 2(e^x - e^{\ln a})(x - \sin x)$.

悟: 复杂的导数不要怕, 先尝试能否因式分解, 如果可以因式分解, 就把一个复杂代数式的正负转化成了多个简单代数式的正负.

令 $m(x) = x - \sin x$, 则 $m'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ 且等号不恒成立, 所以 $m(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增.

又因为 $m(0) = 0$, 所以当 $x > 0$ 时, $m(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $m(x) < 0$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $e^x - a > 0$ 恒成立, 当 $x < 0$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 所以当 $x = 0$ 时 $h(x)$ 取得极小值, 极小值是 $h(0) = -2a - 1$.

② 当 $a > 0$ 时, $h'(x) = 2(e^x - e^{\ln a})(x - \sin x)$.