

【证明】当 $b=2$ 时, $b_n=2(\log_2 a_n+1)=2(\log_2 2^{n-1}+1)=2n$,
 则 $\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{2n+1}{2n}$,

$$\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2=\frac{4n^2+4n+1}{4n^2}>\frac{4n^2+4n}{4n^2}=\frac{n+1}{n},$$

$$\text{则 } \frac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{\frac{n+1}{n}},$$

$$\text{则 } \frac{b_1+1}{b_1} \cdot \frac{b_2+1}{b_2} \cdot \dots \cdot \frac{b_n+1}{b_n}$$

$$>\sqrt{\frac{2}{1}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \dots \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}}=\sqrt{n+1}.$$

4.4* 数学归纳法

刷基础

1. B 【解析】当 $n=k$ 时, 不等式左边为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^k-1}$,
 当 $n=k+1$ 时, 不等式左边为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}-1}$,
 故增加的项数为 $(2^{k+1}-1)-(2^k-1)=2 \times 2^k-2^k=2^k$. 故选 B.

→ 避坑: 此处易错误认为只增加了一项 $\frac{1}{2^{k+1}-1}$

2. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$ 【解析】由 $n \in \mathbf{N}$, 且 $n>1$ 可知 n 的第一个取值为 $n=2$, 由题意

→ 敲黑板: 运用归纳法证明时, 注意 n 的第一个取值, 不一定从 1 开始
 可知, 当 $n=2$ 时, $2^2-1=3$, 所以第一步需验证的不等式为 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$.

3. $2(2k+1)$ 【解析】由题意, 当 $n=k$ 时, 左边为 $(k+1)(k+2) \cdot \dots \cdot (k+k)$;
 当 $n=k+1$ 时, 左边为 $(k+2)(k+3) \cdot \dots \cdot (k+1+k+1)$, 从而增加两项为 $(2k+1) \cdot (2k+2)$, 且减少一项为 $k+1$, 故左边应增乘的因式为 $\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}=2(2k+1)$.

刷速度

1. B 【解析】 $\because \frac{a_{10}}{b_{10}}=\frac{2a_{10}}{2b_{10}}=\frac{a_1+a_{19}}{b_1+b_{19}}=$

$$\frac{(a_1+a_{19}) \cdot \frac{19}{2}}{(b_1+b_{19}) \cdot \frac{19}{2}}=\frac{A_{19}}{B_{19}} \cdot \frac{A_n}{B_n}=\frac{n+3}{n+2},$$

$$\therefore \frac{a_{10}}{b_{10}}=\frac{A_{19}}{B_{19}}=\frac{19+3}{19+2}=\frac{22}{21}. \text{ 故选 B.}$$

2. C 【解析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 由公比 $q=2$, 可得 $a_1+a_4+\dots+a_{85}, a_2+a_5+\dots+a_{86}, a_3+a_6+\dots+a_{87}$ 构成公比为 2 的等比数列,
 设 $a_1+a_4+\dots+a_{85}=m$, 则 $a_2+a_5+\dots+a_{86}=2m, a_3+a_6+\dots+a_{87}=4m$.
 因为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 87 项和 $S_{87}=140$, 所以 $m+2m+4m=140$, 解得 $m=20$, 所以 $a_3+a_6+a_9+\dots+a_{87}=80$. 故选 C.

3. C 【解析】因为 $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_{n+1}<a_n$ 恒成立, 所以数列 $\{a_n\}$ 是递减数列,
 又数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=\begin{cases} (1-3a)n+15a, n \leq 4, \\ 4a^{n-3}+4, n \geq 5, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} 1-3a<0, \\ 0<a<1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 1-3a<0, \\ 0<a<1, \end{cases}$
 $\begin{cases} a_4>a_5, \\ 4(1-3a)+15a>4a^2+4, \end{cases}$

→ 敲黑板: 注意衔接处两边值的大小

4. 【解】(1) 当 $n=1$ 时, 由已知条件可得 $a_1+1=\frac{a_1^2+2}{2a_1}$, 即 $a_1^2+2a_1-2=0$, 解得 $a_1=\sqrt{3}-1(a_1>0)$;
 当 $n=2$ 时, 由已知条件可得 $a_1+a_2+1=\frac{a_2^2+2}{2a_2}$, 将 $a_1=\sqrt{3}-1$ 代入得 $a_2^2+2\sqrt{3}a_2-2=0$, 解得 $a_2=\sqrt{5}-\sqrt{3}(a_2>0)$;
 当 $n=3$ 时, 由已知条件可得 $a_1+a_2+a_3+1=\frac{a_3^2+2}{2a_3}$, 同理解得 $a_3=\sqrt{7}-\sqrt{5}(a_3>0)$.

(2) 由 (1) 可以猜想 $a_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}, n=1, 2, 3$ 时, 等式成立;
 假设当 $n=k(k \geq 3, k \in \mathbf{N}^*)$ 时, 等式成立, 即 $a_k=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}$,

$$\text{又因为 } a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=\frac{a_{k+1}}{2}+\frac{1}{a_{k+1}}-$$

$$\frac{a_k}{2} \cdot \frac{1}{a_k},$$

将 $a_k=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}$ 代入上式解得 $a_{k+1}=\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1}(a_{k+1}>0)$, 所以当 $n=k+1$ 时等式也成立.

综上, $a_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$.

5. 【证明】在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n=a_1+(n-1) \cdot d=n, S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$,
 当 $n=1$ 时, $a_1^3=1, S_1^2=1$, 原等式成立;

第四章素养检测

$$\begin{cases} a>\frac{1}{3}, \\ 0<a<1, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{1}{3}<a<\frac{3}{4}. \text{ 故选 C.}$$

$$\begin{cases} 0<a<\frac{3}{4}, \\ 0<a<\frac{3}{4}, \end{cases}$$

4. B 【解析】因为 $a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n+\frac{2}{n}(n \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n(n+1)}$, 即

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

所以当 $n \geq 2$ 时, 有 $\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=2\left(1-\frac{1}{2}\right), \frac{a_3}{3}-\frac{a_2}{2}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right), \frac{a_4}{4}-\frac{a_3}{3}=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right), \dots, \frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$, 累加得 $\frac{a_n}{n}-\frac{a_1}{1}=2\left(1-\frac{1}{n}\right)(n \geq 2)$, 又 $a_1=-1$, 所以

$$\frac{a_n}{n}=1-\frac{2}{n}(n \geq 2), \text{ 即 } a_n=n-2(n \geq 2).$$

当 $n=1$ 时, $a_1=1-2=-1$ 符合上式, 所以 $a_n=n-2(n \in \mathbf{N}^*)$. 则 $a_{22}=22-2=20$. 故选 B.

假设当 $n=k(k \in \mathbf{N}^*)$ 时, 原等式成立, 即 $\sum_{i=1}^k a_i^3=S_k^2, \sum_{i=1}^k i^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$,

$$\text{则当 } n=k+1(k \in \mathbf{N}^*) \text{ 时, } \sum_{i=1}^{k+1} a_i^3=\sum_{i=1}^k a_i^3+a_{k+1}^3=S_k^2+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{(k+1)^2}{4} \cdot [k^2+4(k+1)]=\frac{(k+1)^2}{4} \cdot (k+2)^2$$

$$=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2=S_{k+1}^2,$$

即当 $n=k+1$ 时, 原等式成立,

所以对一切 $n \in \mathbf{N}^*$, 等式 $\sum_{i=1}^n a_i^3=S_n^2$ 成立.

6. 【证明】①当 $n=1$ 时, $11^{n+1}+12^{2n-1}=11^2+12=133$ 能被 133 整除, 所以当 $n=1$ 时结论成立.

②假设当 $n=k(k \in \mathbf{N}^*)$ 时, $11^{k+1}+12^{2k-1}$ 能被 133 整除, 那么当 $n=k+1$ 时, $11^{k+2}+12^{2k+1}=11^{k+1} \times 11+12^{2k-1} \times 12^2=11^{k+1} \times 11+12^{2k-1} \times 11-12^{2k-1} \times 11+12^{2k-1} \times 12^2=11 \times (11^{k+1}+12^{2k-1})+133 \times 12^{2k-1}$.

由假设可知 $11 \times (11^{k+1}+12^{2k-1})+133 \times 12^{2k-1}$ 能被 133 整除, 即 $11^{k+2}+12^{2k+1}$ 能被 133 整除, 所以当 $n=k+1$ 时结论也成立. 综上, $11^{n+1}+12^{2n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$ 能被 133 整除.

5. A 【解析】因为 $\underbrace{11 \cdots 1}_{n \uparrow}=1+10+\dots+$

$$10^{n-1}=\frac{1-10^n}{1-10}=\frac{1}{9}(10^n-1),$$

$$\text{所以 } \sqrt{\underbrace{44 \cdots 4}_{2n \uparrow} \underbrace{-88 \cdots 8}_{n \uparrow}}=$$

$$=\sqrt{\frac{4}{9}(10^{2n}-1)-\frac{8}{9}(10^n-1)}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{9}(10^n-1)^2}=\frac{6}{9}(10^n-1)=$$

$$\underbrace{66 \cdots 6}_{n \uparrow}. \text{ 故选 A.}$$

6. A 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其首项为 1, 公差为 2, 所以 $a_n=1+(n-1) \cdot 2=2n-1$.

因为数列 $\{b_n\}$ 为等比数列, 其首项为 1, 公比为 2, 所以 $b_n=1 \cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$, 所以 $c_n=2 \cdot 2^{n-1}-1=2^n-1$, 则 $T_n=c_1+$

$$c_2+c_3+\dots+c_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n=2^{n+1}-2-n.$$

因为对任意的 $n \in \mathbf{N}^*, c_n>0$, 所以数列 $\{T_n\}$ 单调递增. 因为 $T_9=2^{10}-2-9=1\ 024-11=1\ 013<2\ 023, T_{10}=2^{11}-2-10=2\ 048-12=2\ 036>2\ 023$, 所以当 $T_n<2\ 023$ 时, $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. 故选 A.

7. B 【解析】当 $n=1$ 时, $S_1+2T_1=a_1+2a_1=3a_1=1$, 解得 $a_1=\frac{1}{3}$; 当 $n \geq 2$ 时,

由 $S_n + 2T_n = 1$, 得 $n \geq 2$ 时, $\frac{T_n}{T_{n-1}} + 2T_n = 1$, 即 $T_n + 2T_n \cdot T_{n-1} - T_{n-1} = 0$, $\therefore \frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n-1}} = 2$, \therefore 数列 $\left\{\frac{1}{T_n}\right\}$ 是以 $\frac{1}{T_1} = \frac{1}{a_1} = 3$ 为首项, 2 为公差的等差数列, $\therefore \frac{1}{T_n} = 3 + 2(n-1) = 2n+1$, 即 $T_n = \frac{1}{2n+1}$,
 \therefore 当 $n \geq 2$ 时, $S_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{\frac{1}{2n+1}}{\frac{1}{2n-1}} = \frac{2n-1}{2n+1}$.

经检验, $S_1 = a_1 = \frac{1}{3}$ 满足 $S_n = \frac{2n-1}{2n+1}$,

$\therefore S_n = \frac{2n-1}{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$, $\therefore a_5 = S_5 - S_4 = \frac{9}{11} - \frac{7}{9} = \frac{4}{99}$, 故选 B.

8. A 【解析】由题意得当 $n \geq 3$ 时, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, 则 $a_{n-1} = a_n - a_{n-2}$, 所以 $a_2 = a_3 - a_1$, $a_3 = a_4 - a_2$, \dots , $a_{n-1} = a_n - a_{n-2}$, $a_n = a_{n+1} - a_{n-1}$, 所以 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n = a_1 + (a_3 - a_1) + (a_4 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-2}) + (a_{n+1} - a_{n-1}) = a_n + a_{n+1} - a_2 = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1$, 所以 $S_{2023} = a_{2025} - 1 = a$, 所以 $a_{2025} = a + 1$.
 因为当 $n \geq 3$ 时, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, 则 $a_{n-1} = a_n - a_{n-2}$, 所以 $a_{n-1}^2 = a_{n-1} (a_n - a_{n-2}) = a_{n-1} a_n - a_{n-1} a_{n-2}$, 所以 $a_n^2 = a_n a_{n+1} - a_n a_{n-1}$, 所以 $b = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_{2024}^2 = a_1^2 + (a_2 a_3 - a_1 a_2) + (a_3 a_4 - a_2 a_3) + \dots + (a_{2024} a_{2025} - a_{2023} a_{2024}) = a_{2024} a_{2025} + a_1^2 - a_1 a_2 = a_{2024} a_{2025} + 1 - 1 \times 1 = a_{2024} a_{2025}$, 所以 $b = (a+1) a_{2024}$, 所以 $a_{2024} = \frac{b}{a+1}$. 故选 A.

9. ABC 【解析】 $\because a_1, a_2 + 6, a_3$ 成等差数列, $\therefore 2(a_2 + 6) = a_1 + a_3$, 又 $a_1 + a_2 = 12$, $\therefore 2(12 - a_1 + 6) = a_1 + a_3$, 整理可得 $3a_1 + a_3 = 3a_1 + a_1 q^2 = 36$,
 $\therefore \frac{a_1 + a_2}{3a_1 + a_3} = \frac{1+q}{3+q^2} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, 解得 $q = 0$ (舍) 或 $q = 3$, 故 **C** 正确;
 由 $a_1 + a_2 = 12$ 得 $a_1 + 3a_1 = 12$, 解得 $a_1 = 3$, $\therefore a_n = a_1 \times 3^{n-1} = 3^n$, 故 **B** 正确;
 $\therefore S_n = \frac{3(1-3^n)}{1-3} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot 3^n$, $\therefore S_4 = \frac{3^5 - 3}{2} = 120$, 故 **A** 正确;
 $\therefore a_n + a_{n+1} = 3^n + 3^{n+1} = 4 \times 3^n$, $a_{n+2} = 3^{n+2} = 9 \times 3^n$, $\therefore a_n + a_{n+1} < a_{n+2}$, 故 **D** 错误. 故选 ABC.

10. BCD 【解析】 $\because S_{2023} < 0, S_{2024} > 0$,
 $\therefore S_{2023} = \frac{2023(a_1 + a_{2023})}{2} = 2023a_{1012} < 0$,
 $S_{2024} = \frac{2024(a_1 + a_{2024})}{2} = 1012 \cdot (a_{1012} + a_{1013}) > 0$, $\therefore a_{1012} < 0, a_{1012} + a_{1013} > 0$, $\therefore a_{1012} < 0, a_{1013} > 0$, 且 $|a_{1012}| < |a_{1013}|$, 故

点悟: 由 $a_{1012} < 0, a_{1013} > 0, a_{1012} + a_{1013} > 0$, 得 $a_{1013} > -a_{1012}$, 即 $|a_{1013}| > |a_{1012}|$.
B, C 正确;

\therefore 公差 $d = a_{1013} - a_{1012} > 0$, \therefore 等差数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 **A** 错误;
 $\because a_{1012} < 0, a_{1013} > 0$, 当 $n = 1012$ 时, S_n 取得最小值, $\therefore S_n \geq S_{1012}$, 故 **D** 正确. 故选 BCD.

11. BC 【解析】因为 $a_1 + a_3 = \cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{3\pi}{2} = 0, 2a_2 = 2\cos \frac{2\pi}{2} = -2$,
 则 $a_1 + a_3 > 2a_2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 不是“凸数列”, 故 **A** 错误;
 因为 $a_n + a_{n+2} = \log_2 n + \log_2 (n+2) = \log_2 [n(n+2)]$, $2a_{n+1} = \log_2 (n+1)^2$,
 且 $n(n+2) - (n+1)^2 = -1 < 0$, 所以 $a_n + a_{n+2} < 2a_{n+1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 为“凸数列”, 故 **B** 正确;
 因为 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, S_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}, S_{n+2} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2}$,
 所以 $S_n + S_{n+2} = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + a_{n+1} + a_{n+2}, 2S_{n+1} = 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 2a_{n+1}$,
 所以 $(S_n + S_{n+2}) - 2S_{n+1} = (a_{n+1} + a_{n+2}) - 2a_{n+1} = a_{n+2} - a_{n+1}$,
 又数列 $\{a_n\}$ 是单调递减数列, 则 $a_{n+2} - a_{n+1} < 0$,
 所以 $(S_n + S_{n+2}) - 2S_{n+1} < 0$, 即 $S_n + S_{n+2} < 2S_{n+1}$, 即数列 $\{S_n\}$ 为“凸数列”, 故 **C** 正确;
 因为数列 $\{S_n\}$ 为“凸数列”, 所以 $S_n + S_{n+2} < 2S_{n+1}$, 即 $(S_{n+2} - S_{n+1}) - (S_{n+1} - S_n) < 0$, 即 $a_{n+2} - a_{n+1} < 0$,
 对任意的正整数 n , 满足 $a_{n+2} < a_{n+1}$, 而 $a_2 - a_1$ 的符号不确定, 故 $\{a_n\}$ 不一定为单调递减数列, 故 **D** 错误. 故选 BC.

12. $\frac{8}{125}$ 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由题意知 $q > 0$ 且 $q \neq 1$, 则 $\frac{a_1(1-q^4)}{S_4} = \frac{1-q}{1-q^8} = \frac{1}{1+q^4} = \frac{3}{51} = \frac{1}{17}$, 解得 $q = 2$, 则 $S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 15a_1 = 3$, 所以 $a_1 = \frac{1}{5}, a_2 = \frac{2}{5}, a_3 = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{8}{5}$.
 易知当 $n \leq 3$ 时, $a_n < 1$, 当 $n \geq 4$ 时, $a_n > 1$, 故 $a_1 a_2 \dots a_n$ 的最小值为 $\frac{8}{125}$.

13. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$
 【解析】由题意知 $\frac{S_n}{3n+1} = \frac{n}{2}$, 则 $S_n = \frac{3n^2 + n}{2}$, 当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$;
 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n - 1$. 而 $a_1 = 3 \times 1 - 1 = 2$, 符合上式, 所以 $a_n = 3n - 1, n \in \mathbf{N}^*$,
 所以 $b_n = (-1)^n a_n = (-1)^n (3n - 1)$, 所以 $T_n = -2 + 5 - 8 + 11 - \dots + (-1)^n \cdot (3n - 1)$, 当 n 为偶数时, $T_n = \frac{3n}{2}$,
 当 n 为奇数时, $T_n = \frac{3(n-1)}{2} - (3n - 1) = -\frac{3n+1}{2}$, 所以 $|T_n|$ 单调递增,

要使 $|T_n| \leq 20$, 即 $\frac{3n+1}{2} \leq 20 (n \text{ 为奇数})$ 或 $\frac{3n}{2} \leq 20 (n \text{ 为偶数})$, 解得 $n \leq 13$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$.

故所求 n 的集合为 $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

14. $(4, +\infty)$ 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $S_n = \frac{n}{m}, S_m = \frac{m}{n}$,

所以 $\begin{cases} S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n}{m}, \\ S_m = ma_1 + \frac{m(m-1)}{2}d = \frac{m}{n}, \end{cases}$

两式相减得 $a_1 + \frac{n+m-1}{2}d = \frac{m+n}{mn}$,

则 $S_{n+m} = (n+m)a_1 + \frac{(n+m)(n+m-1)}{2}d =$

$(n+m) \left(a_1 + \frac{n+m-1}{2}d \right)$

$= \frac{(m+n)^2}{mn} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} + 2 > 2 + 2 = 4 (m \neq n)$,

所以 S_{n+m} 的取值范围是 $(4, +\infty)$.

名师点拨 研究数列的前 n 项和时, 如果没有合适的性质使用, 基本量的运算或运用是一个普适的思路.

15. (1) 【证明】由 $a_{n+1} = 3a_n + 2n - 1$ 得 $a_{n+1} + (n+1) = 3(a_n + n)$, 且 $a_1 + 1 = 2 \neq 0$, 所以数列 $\{a_n + n\}$ 是首项为 2, 公比为 3 的等比数列.

(2) 【解】由 (1) 知数列 $\{a_n + n\}$ 是首项为 2, 公比为 3 的等比数列.

所以 $a_n + n = 2 \times 3^{n-1}$, 即 $a_n = 2 \times 3^{n-1} - n$.

所以数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = 2 \times (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}) - (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \times \frac{1-3^n}{1-3} - \frac{(1+n)n}{2} = 3^n -$

$1 - \frac{(1+n)n}{2}$.

16. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$,

因为 $a_5 \cdot a_6 = a_2 \cdot a_{17}$, 所以 $(a_1 + 4d) \cdot (a_1 + 5d) = (a_1 + d) \cdot (a_1 + 16d)$,

整理得 $d^2 = 2a_1 d$, 且 $d \neq 0$, 即 $d = 2a_1$.

又因为 $S_5 - S_3 = 16$, 则 $a_4 + a_5 = 2a_1 + 7d = 16a_1 = 16$, 解得 $a_1 = 1, d = 2$, 所以 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$.

(2) 由 (1) 可知 $b_n = 2^n (2n - 2) = (n - 1) 2^{n+1}$,

则 $T_n = 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + \dots + (n-2) \times 2^n + (n-1) \times 2^{n+1}$,

$2T_n = 0 \times 2^3 + 1 \times 2^4 + \dots + (n-2) \times 2^{n+1} + (n-1) \times 2^{n+2}$.

两式相减得 $-T_n = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n+1} - (n-1) 2^{n+2}$

$= \frac{8(1-2^{n+1})}{1-2} - (n-1) \cdot 2^{n+2} = (2-n) \cdot$

$2^{n+2} - 8$, 所以 $T_n = (n-2) \cdot 2^{n+2} + 8$.

17. (1) 【证明】由 $a_{n-1} = 3a_n + 2a_{n-1}a_n, a_1 =$

$\frac{1}{2}$ 得 $a_n \neq 0$, 由 $a_{n-1} = 3a_n + 2a_{n-1}a_n$ 得

$\frac{1}{a_n} = 3 + \frac{1}{a_{n-1}}$, 点悟: 递推式中同时含有 $a_n,$

$a_{n-1}, a_n a_{n-1}$ 时, 一般左、右两边同时除以 $a_n a_{n-1}$ 进行变形

进而 $\frac{1}{a_n} + 1 = 3 \left(\frac{1}{a_{n-1}} + 1 \right)$, 又 $\frac{1}{a_1} + 1 = 3$,

所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列.

(2)【解】由(1)得 $\frac{1}{a_n}+1=3 \cdot 3^{n-1}=3^n$, 所以 $a_n=\frac{1}{3^n-1}$.

由 $b_{n+1}^2=b_n(2b_{n+1}+3b_n)$ 得 $(b_{n+1}-3b_n) \cdot (b_{n+1}+b_n)=0$, 因为 $b_n>0$, 所以 $b_{n+1}=3b_n$.
又 $b_1=3$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列, 所以 $b_n=3^n$.

(3)【证明】 $b_n a_n a_{n+1} = \frac{3^n}{(3^n-1)(3^{n+1}-1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3^n-1} - \frac{1}{3^{n+1}-1} \right)$,
所以 $S_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{26} + \cdots + \frac{1}{3^n-1} - \frac{1}{3^{n+1}-1} \right) = \frac{1}{4} \frac{1}{2(3^{n+1}-1)}$.
因为 $\frac{1}{2(3^{n+1}-1)} > 0$, 所以 $S_n < \frac{1}{4}$,
易知 $S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(3^{n+1}-1)}$ 是关于 n 的增函数, 所以 $S_n \geq S_1 = \frac{3}{16}$, 综上 $\frac{3}{16} \leq S_n < \frac{1}{4}$.

18.【解】(1) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,
由 $2S_n = a_n + \frac{1}{a_n}$, 得 $2S_1 = a_1 + \frac{1}{a_1} = S_1 + \frac{1}{S_1}$, 解得 $S_1^2 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_n = \frac{1}{2} \left(S_n - S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}} \right)$, 整理得 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$,

因此数列 $\{S_n^2\}$ 是首项为 1, 公差为 1 的等差数列, 所以 $S_n^2 = n$.

(2) 由(1)知 $S_n^2 = n$, 则 $S_1^2 b_1 + S_2^2 b_2 + \cdots + S_n^2 b_n = 3^n - 1$ 化为 $b_1 + 2b_2 + \cdots + nb_n = 3^n - 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $b_1 + 2b_2 + \cdots + (n-1)b_{n-1} = 3^{n-1} - 1$, 两式相减得 $nb_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, 即 $b_n = \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{n}$.

当 $n=1$ 时, $b_1=2$, 满足上式, 所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式是 $b_n = \frac{2 \cdot 3^{n-1}}{n}$.

(3) 令 $f(n) = 1 - \frac{S_n^2}{b_n} = 1 - \frac{n^2}{2 \cdot 3^{n-1}}$, 则 $f(n+1) - f(n) = 1 - \frac{(n+1)^2}{2 \cdot 3^n} - \left(1 - \frac{n^2}{2 \cdot 3^{n-1}} \right) = \frac{2n^2 - 2n - 1}{2 \cdot 3^n}$.

当 $n=1$ 时, $f(2) - f(1) = -\frac{1}{6} < 0$, 即 $f(2) < f(1)$;
当 $n \geq 2$ 时, $2n^2 - 2n - 1 > 0$, 则 $f(n+1) > f(n)$, $f(n)$ 单调递增, 即 $f(2) < f(3) < f(4) < \cdots$.

当 n 是偶数时, 由 $(-1)^n \lambda < 1 - \frac{S_n^2}{b_n}$ 对任意正整数 n 恒成立, 得 $\lambda < 1 - \frac{S_n^2}{b_n}$, 而此时 $f(n)$ 的最小值为 $f(2) = \frac{1}{3}$, 因此

⚠ 陷阱: 注意 $f(2)$ 是 n 为偶数时 $f(n)$ 的最小值

$\lambda < \frac{1}{3}$;

第四章高考强化

刷真题

1. D 【解析】由已知, $b_1 = 1 + \frac{1}{\alpha_1}$, $b_2 = 1 + \frac{1}{\alpha_2}$, $\frac{1}{\alpha_1} > \frac{1}{\alpha_2}$, 故 $b_1 > b_2$.

同理得 $b_2 < b_3$, $b_1 > b_3$,
又 $\frac{1}{\alpha_2} > \frac{1}{\alpha_3 + \frac{1}{\alpha_4}}$, 故 $b_2 < b_4$.

则 $b_1 > b_3 > b_2 > b_4 > \cdots$, $b_2 < b_4 < b_6 < \cdots$, 且 $b_n < b_{n+1}$ (n 为正偶数). 由上可知, $b_1 > b_5$, 故 A 错误; $b_3 > b_9 > b_8$, 故 B 错误; $b_6 > b_2$, 故 C 错误; $b_4 < b_6 < b_7$, 故 D 正确. 故选 D.

2. 【解】(1) $2S_n = na_n$ ①,
当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$ ②,
由①-②得, $2a_n = na_n - (n-1)a_{n-1}$,
即 $(n-1)a_{n-1} = (n-2)a_n$.
当 $n=2$ 时, $a_1=0$;
当 $n \geq 3$ 时, $\frac{a_{n-1}}{n-2} = \frac{a_n}{n-1}$.

\therefore 当 $n \geq 2$ 时, $\left\{\frac{a_n}{n-1}\right\}$ 为常数列,
 $\therefore \frac{a_n}{n-1} = \frac{a_2}{1} = 1$, $\therefore a_n = n-1$ ($n \geq 2$).
由 $2S_n = na_n$, 当 $n=1$ 时, $2a_1 = a_1$, $a_1 = 0 = 1-1$.
 $\therefore a_n = n-1$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(2) 由(1)知, $\frac{a_{n+1}}{2^n} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ③,
 $\frac{1}{2} T_n = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + (n-1) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ④,
由③-④得 $\frac{1}{2} T_n = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,
 $\therefore T_n = 2 - (2+n) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3. B 【解析】记 $\{a_n\}$ 的公差为 d .
因为 $S_3 = 6$, $S_5 = -5$, 所以 $\begin{cases} 3a_1 + 3d = 6, \\ 5a_1 + 10d = -5, \end{cases}$
解得 $\begin{cases} a_1 = 5, \\ d = -3, \end{cases}$

⚠ 陷阱: 因为 $S_3 = \frac{3 \times (a_1 + a_3)}{2} = \frac{3 \times 2a_2}{2} = 3a_2 = 6$, 所以 $a_2 = 2$; 因为 $S_5 = \frac{5 \times (a_1 + a_5)}{2} = \frac{5 \times 2a_3}{2} = 5a_3 = -5$, 所以 $a_3 = -1$, 所以 $d = a_3 - a_2 = -3$, 所以 $a_1 = a_2 - d = 5$

当 n 是奇数时, 由 $(-1)^n \lambda < 1 - \frac{S_n^2}{b_n}$ 对任意正整数 n 恒成立, 得 $\lambda < 1 - \frac{S_n^2}{b_n}$,
而 $f(1) = f(3) = \frac{1}{2}$, 当 $n \geq 3$ 时, $f(n)$ 单调递增, 即 $f(3) < f(5) < f(7) < \cdots$,
因此 $\lambda < \frac{1}{2}$, 解得 $\lambda > -\frac{1}{2}$,

所以 λ 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

19. (1) 【解】由题意可设 $a_n - b_n = d_n \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, 则 $b_n = a_n - d_n$,

若 $a_n = 2^n + \frac{6}{5}$, 则 $b_n = 2^n + \frac{6}{5} - d_n \in \left(2^n + \frac{19}{20}, 2^n + \frac{29}{20}\right)$,
且 $b_n \in \mathbf{Z}$, 可得 $b_n = 2^n + 1$, 所以 $b_1 = 3$, $b_2 = 5$, $b_3 = 9$.

(2) ①【解】由(1)可得 $b_n = a_n - d_n$,
若 $a_n = n + 1$, 则 $b_n = n + 1 - d_n \in \left(n + \frac{3}{4}, n + \frac{5}{4}\right)$,
且 $b_n \in \mathbf{Z}$, 可得 $b_n = n + 1$, 所以 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n + 1$.

②【证明】因为 $\sqrt{b_n} c_n = 1$, 即 $\sqrt{n+1} c_n = 1$,
则 $c_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{2}{2\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,
可得 $T_n < 2(\sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2(\sqrt{n+1} - 1) = \frac{2}{c_n} - 2$,
所以 $T_n + 2 < \frac{2}{c_n}$.

所以 $S_6 = 6a_1 + 15d = 6 \times 5 + 15 \times (-3) = -15$. 故选 B.

⚠ 陷阱: $a_6 = a_2 + 4d = 2 - 12 = -10$, $S_6 = a_6 + S_5 = -10 - 5 = -15$

4. B 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\therefore S_5 = 5a_1 + 10d$, $S_{10} = 10a_1 + 45d$, $S_5 = S_{10}$, $\therefore 5a_1 + 10d = 10a_1 + 45d$, 即 $a_1 = -7d$. $\therefore a_5 = a_1 + 4d = 1$, $\therefore d = -\frac{1}{3}$,
 $\therefore a_1 = -7d = \frac{7}{3}$. 故选 B.

5. C

思路导引 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 \rightarrow 分析 a_n 的正负 \rightarrow 求 $\{a_n\}$ 的前 12 项和

【解析】由 $S_n = -n^2 + 8n$, 可得
当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = -1 + 8 = 7$;
当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (-n^2 + 8n) - [-(n-1)^2 + 8(n-1)]$,
整理可得 $a_n = -2n + 9$,
经检验, 当 $n=1$ 时, $a_1 = 7$ 符合上式.
综上, $a_n = -2n + 9$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 可知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.
当 $n \leq 4$ 时, $a_n > 0$; 当 $n \geq 5$ 时, $a_n < 0$,
所以 $\{a_n\}$ 的前 12 项和 $T_{12} = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) - (a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{12})$

$$= \frac{4 \times (7+1)}{2} - \frac{8 \times (-1-15)}{2} = 16 + 64 =$$

80. 故选 C.

6. B 【解析】由等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $\frac{2\pi}{3}$, 可知 $\cos a_{n+3} = \cos\left(a_n + \frac{2\pi}{3} \times 3\right) = \cos a_n$, 所以数列 $\{\cos a_n\}$ 是周期为 3 的数列, 所以 $\cos a_1, \cos a_2 = \cos\left(a_1 + \frac{2\pi}{3}\right), \cos a_3 = \cos\left(a_1 + \frac{4\pi}{3}\right)$ 为一个周期的三项. 由 $S = \{a, b\}$ 可知 S 中只有两个元素, 则 $\cos a_1 = \cos a_2$ 或 $\cos a_1 = \cos a_3$ 或 $\cos a_2 = \cos a_3$.

①若 $\cos a_1 = \cos\left(a_1 + \frac{2\pi}{3}\right)$,

即 $\cos a_1 = -\frac{1}{2} \cos a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a_1$,

可得 $\begin{cases} \cos a_1 = \frac{1}{2}, \\ \sin a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \cos a_1 = -\frac{1}{2}, \\ \sin a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$,

此时 $\cos\left(a_1 + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cos a_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a_1 = -1$ 或 1 , 则 $S = \left\{\frac{1}{2}, -1\right\}$ 或

$S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$, 则 $ab = -\frac{1}{2}$.

②同理若 $\cos a_1 = \cos\left(a_1 + \frac{4\pi}{3}\right)$,

可得 $\begin{cases} \cos a_1 = \frac{1}{2}, \\ \sin a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \cos a_1 = -\frac{1}{2}, \\ \sin a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$,

此时 $\cos\left(a_1 + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \cos a_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a_1 = -1$ 或 1 , 则 $S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ 或

$\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$, 则 $ab = -\frac{1}{2}$.

③同理若 $\cos\left(a_1 + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(a_1 + \frac{4\pi}{3}\right)$, 可得 $\begin{cases} \cos a_1 = 1, \\ \sin a_1 = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \cos a_1 = -1, \\ \sin a_1 = 0 \end{cases}$,

此时 $\cos\left(a_1 + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(a_1 + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{2}$, 则 $S = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$ 或

$\left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$, 则 $ab = -\frac{1}{2}$.

综上, 可知 $ab = -\frac{1}{2}$. 故选 B.

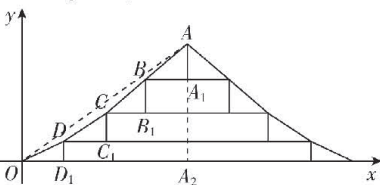
7. D 【解析】如图, 连接 OA , 延长 AA_1 与 x 轴交于点 A_2 , 则 $OA_2 = 4OD_1$. 因为 k_1, k_2, k_3 成公差为 0.1 的等差数列, 所以 $k_1 = k_3 - 0.2, k_2 = k_3 - 0.1$, 所以 $CC_1 = DC_1(k_3 - 0.2), BB_1 = CB_1(k_3 - 0.1), AA_1 = k_3 BA_1$, 即 $CC_1 = OD_1(k_3 - 0.2), BB_1 = OD_1(k_3 - 0.1), AA_1 = k_3 OD_1$. 又

敲黑板: 利用等差数列的性质, 将各线段用 k_3 和 OD_1 表示出来

$\frac{DD_1}{OD_1} = 0.5$, 所以 $DD_1 = 0.5OD_1$, 所以 $AA_2 = 0.5OD_1 + OD_1(k_3 - 0.2) + OD_1(k_3 - 0.1) + k_3 OD_1 = OD_1(3k_3 + 0.2)$. 所以

$$\tan \angle AOA_2 = \frac{AA_2}{OA_2} = \frac{OD_1(3k_3 + 0.2)}{4OD_1} = 0.725,$$

解得 $k_3 = 0.9$, 故选 D.



8. 95 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\therefore a_3 + a_4 = 7, 3a_2 + a_5 = 5$, $\therefore \begin{cases} 2a_1 + 5d = 7, \\ 4a_1 + 7d = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = -4, \\ d = 3. \end{cases} \therefore a_n = 3n - 7$,

$$\therefore S_{10} = \frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10 \times (-4 + 23)}{2} = 95.$$

9. $3n^2 - 2n$ 【解析】数列 $\{2n-1\}$ 表示首项为 1, 公差为 2 的等差数列, 各项均为正奇数, 而数列 $\{3n-2\}$ 表示首项为 1, 公差为 3 的等差数列, 各项分别为交替出现的正奇数与正偶数, 它们的公共项为数列 $\{3n-2\}$ 中的奇数项, 所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1, 公差为 6 的等差数列, 其前 n 项和 $S_n = n \times 1 + \frac{n(n-1)}{2} \times 6 = 3n^2 - 2n$.

10. 【解】(1) 由 $3a_2 = 3a_1 + a_3$, 得 $3(a_1 + d) = 3a_1 + a_1 + 2d$,

$$\text{整理得 } a_1 = d, \text{ 所以 } a_n = nd, b_n = \frac{n+1}{d}.$$

$$\text{由 } S_3 + T_3 = 21, \text{ 得 } d + 2d + 3d + \frac{2}{d} + \frac{3}{d} + \frac{4}{d} = 21,$$

$$\text{整理得 } 2d^2 - 7d + 3 = 0, \text{ 解得 } d = 3 \text{ 或 } d = \frac{1}{2} \text{ (舍)}, \text{ 故 } a_n = 3n.$$

(2) 若 $\{b_n\}$ 是等差数列, 则 $b_1 + b_3 = 2b_2$, 即 $\frac{2}{a_1} + \frac{12}{a_3} = 2 \times \frac{6}{a_2}$, 所以 $a_2 a_3 + 6a_1 a_2 = 6a_1 a_3$, 所以 $(a_1 + d)(a_1 + 2d) + 6a_1(a_1 + d) = 6a_1(a_1 + 2d)$, 整理得 $a_1^2 - 3a_1 d + 2d^2 = 0$, 解得 $a_1 = d$ 或 $a_1 = 2d$.

①若 $a_1 = d$, 则 $a_n = nd, b_n = \frac{n+1}{d}$,

$$\text{由 } S_{99} - T_{99} = 99, \text{ 得 } 50d - \frac{51}{d} = 1, \text{ 即 } 50d^2 - d - 51 = 0,$$

$$\text{解得 } d = -1 \text{ (舍)} \text{ 或 } d = \frac{51}{50};$$

②若 $a_1 = 2d$, 则 $a_n = (n+1)d, b_n = \frac{n}{d}$,

$$\text{由 } S_{99} - T_{99} = 99, \text{ 得 } 51d - \frac{50}{d} = 1, \text{ 即 } 51d^2 - d - 50 = 0,$$

$$\text{解得 } d = 1 \text{ (舍)} \text{ 或 } d = -\frac{50}{51} \text{ (舍)}.$$

$$\text{综上, } d = \frac{51}{50}.$$

11. (1) 【解】由题知, 数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是首项为

$$1, \text{ 公差为 } \frac{1}{3} \text{ 的等差数列, 所以 } \frac{S_n}{a_n} = 1 +$$

$$\frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3}, \text{ 所以 } S_n = \frac{n+2}{3} a_n.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = \frac{n+1}{3} a_{n-1}, \text{ 所以 } a_n =$$

$$S_n - S_{n-1} = \frac{n+2}{3} a_n - \frac{n+1}{3} a_{n-1}, \text{ 所以 } \frac{a_n}{a_{n-1}} =$$

$$\frac{n+1}{n-1}, \text{ 所以 } a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1}.$$

$$a_1 = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdots \frac{3}{1} \cdot 1 =$$

$$\frac{(n+1)n}{2}. \text{ 当 } n=1 \text{ 时, } a_1=1 \text{ 满足上式,}$$

$$\text{所以 } a_n = \frac{(n+1)n}{2}.$$

(2) 【证明】由 (1) 知, $\frac{1}{a_n} = \frac{2}{(n+1)n}$

$$2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \text{ 所以 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots +$$

$$\frac{1}{a_n} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} -$$

$$\frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1} < 2.$$

12. AD 【解析】根据题意, 由 $\begin{cases} S_3 = 7, \\ a_3 = 1, \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 7 \text{ ①,} \\ a_1 q^2 = 1 \text{ ②,} \end{cases} \text{ ①} \div \text{② 得 } \frac{1}{q^2} +$$

$$\frac{1}{q} + 1 = 7, \text{ 化简得 } 6q^2 - q - 1 = 0, \text{ 解得}$$

$$q = \frac{1}{2} \text{ 或 } q = -\frac{1}{3} \text{ (舍去)}, \text{ 故 A 正确;}$$

由 A 可知 $q = \frac{1}{2}$, 则 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 4$, 因此

$$a_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{则 } a_5 = 4 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{4}, \text{ 故 B 错误;}$$

$$\text{巧思: } a_5 = a_3 \cdot q^2 = 1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$S_5 = \frac{4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{31}{4}, \text{ 故 C 错误;}$$

$$a_n + S_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} +$$

$$4 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} + 8 -$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 8, \text{ 故 D 正确. 故选 AD.}$$

$$\text{多种解法 对于 A, 由 } S_3 = a_1 + a_2 +$$

$$a_3 = \frac{a_3}{q^2} + \frac{a_3}{q} + a_3 = \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q} + 1 = 7, \text{ 整理}$$

$$\text{得 } 6q^2 - q - 1 = 0, \text{ 解得 } q = \frac{1}{2} \text{ 或 } q = -\frac{1}{3}$$

$$\text{(舍去)}, \text{ 故 A 正确; 对于 C, 因为 } S_3 =$$

$$7, a_4 = a_3 q = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, a_5 = a_4 q = \frac{1}{2} \times$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \text{ 所以 } S_5 = S_3 + a_4 + a_5 = 7 + \frac{1}{2} +$$

$$\frac{1}{4} = \frac{31}{4}, \text{ 故 C 错误.}$$

13. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为

$$q. \text{ 因为 } S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 21S_2 = 21 \cdot$$

$$\text{敲黑板: } q \neq \pm 1$$

$a_1(1-q^2)$, 整理得 $1-q^6=21(1-q^2)$,
又 $1-q^6=(1-q^2)(1+q^2+q^4)$, 所以 $1+q^2+q^4=21$, 即 $(q^2-4)(q^2+5)=0$, 解得 $q^2=4$.

又 $S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}$, $S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=-5$,

所以 $\frac{S_8}{S_4}=\frac{1-q^8}{1-q^4}=1+q^4=17$, 故 $S_8=-85$, 故选 C.

多种解法 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 根据等比数列前 n 项和的性质得 $S_2, S_4-S_2, S_6-S_4, S_8-S_6$ 成等比数列, 因为 $S_4=-5, S_6=21S_2$, 即 $S_2, -5-S_2, 21S_2+5, S_8-21S_2$ 成等比数列, 公比为 q^2 , 所以 $(-5-S_2)^2=(21S_2+5)S_2$, 整理得 $(4S_2-5)(S_2+1)=0$, 解得 $S_2=\frac{5}{4}$ 或 $S_2=-1$. 当 $S_2=\frac{5}{4}$ 时, $\frac{S_4-S_2}{S_2}=-5<0$, 不符合题意; 当 $S_2=-1$ 时, 即 $-1, -4, -16, S_8+21$ 成等比数列, 所以 $(S_8+21) \times (-4) = (-16)^2$, 解得 $S_8=-85$, 故选 C.

14.2 【解析】 设该等比数列为 $\{a_n\}$ 且公比为 $q(q>0)$. 若 $q=1$, 则 $S_8=2S_4=$

点悟: 由等比数列的各项均为正数, 可知公比 $q>0$
 $8 \neq 68$, 所以 $q \neq 1$.

黑板: 使用等比数列前 n 项和公式时, 先考虑公比是否为 1

根据题意可得 $\begin{cases} S_4=\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=4, \\ S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=68, \end{cases}$ 解

得 $q=2$ (负值舍去).

多种解法一 由解析可知, 该数列的公比 q 是不为 1 的正数, 则 $S_4, S_8-S_4, S_{12}-S_8, \dots$ 成公比为 q^4 的等比数列, 所以 $\frac{S_8-S_4}{S_4}=\frac{68-4}{4}=q^4$, 解得 $q=2$ (负值舍去).

多种解法二 由解析可知, 该数列的公比 q 是不为 1 的正数, 由已知可得 $S_8=S_4+q^4S_4=4+4q^4=68$, 解得 $q=2$

点悟: 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $S_m+n=S_m+q^mS_n=S_n+q^nS_m, m, n \in \mathbb{N}^*$ (负值舍去).

15.23 $\frac{115}{2}$ 【解析】 设升量器的高为

h_1 , 底面半径为 r_1 , 容积为 V_1 , 斗量器的高为 h_2 , 底面半径为 r_2 , 容积为 V_2 , 斛量器的高为 h_3 , 底面半径为 r_3 , 容积为 V_3 , 则 $r_1=\frac{65}{2}$ mm, $r_2=\frac{325}{2}$ mm,

$r_3=\frac{325}{2}$ mm, $h_3=230$ mm,

$V_1=\pi r_1^2 h_1=\left(\frac{65}{2}\right)^2 \pi h_1$ (mm³), $V_2=\pi r_2^2 h_2=\left(\frac{325}{2}\right)^2 \pi h_2$ (mm³), $V_3=\pi r_3^2 h_3=\left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230 \pi$ (mm³).

$\therefore V_1, V_2, V_3$ 成等比数列且公比 $q=10$,

$\therefore V_1 \cdot q^2=V_3$, 即 $\left(\frac{65}{2}\right)^2 \pi \cdot h_1 \cdot 100=$
 $\left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230 \pi$, 解得 $h_1=\frac{115}{2}$ mm,

$V_2 \cdot q=V_3$, 即 $\left(\frac{325}{2}\right)^2 \pi \cdot h_2 \cdot 10=$
 $\left(\frac{325}{2}\right)^2 \times 230 \pi$, 解得 $h_2=23$ mm. \therefore 斗

量器的高 $h_2=23$ mm, 升量器的高

$h_1=\frac{115}{2}$ mm.

16. 【解】 (1) 因为 $4S_n=3a_n+4$, 所以 $4S_{n+1}=3a_{n+1}+4$, 两式相减得 $4a_{n+1}=3a_{n+1}-3a_n$, 即 $a_{n+1}=-3a_n$.

又因为 $4S_1=3a_1+4$, 所以 $a_1=4$, 故数列 $\{a_n\}$ 是首项为 4, 公比为 -3 的等比数列. 所以 $a_n=4 \cdot (-3)^{n-1}$.

(2) 由 (1) 及题意得, $b_n=(-1)^{n-1}na_n=4n \cdot 3^{n-1}$, 所以 $T_n=4(1 \cdot 3^0+2 \cdot 3^1+3 \cdot 3^2+\dots+n \cdot 3^{n-1})$,

$3T_n=4(1 \cdot 3^1+2 \cdot 3^2+3 \cdot 3^3+\dots+n \cdot 3^n)$, 两式相减可得 $-2T_n=4(1+3^1+$

$3^2+\dots+3^{n-1}-n \cdot 3^n)=4\left(\frac{1-3^n}{1-3}-n \cdot 3^n\right)=$
 $(2-4n)3^n-2$, 所以 $T_n=(2n-1)3^n+1$.

多种解法 由 (1) 及题意, 得 $b_n=(-1)^{n-1}na_n=4n \cdot 3^{n-1}$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $T_n=T_{n-1}+4n \cdot 3^{n-1}$, 两边同时减去 $(2n-1)3^n$, 得 $T_n-(2n-1)3^n=T_{n-1}-(2n-3)3^{n-1}$, 故 $\{T_n-(2n-1)3^n\}$ 为常数列.

所以 $T_n-(2n-1)3^n=T_1-(2 \times 1-1) \cdot 3=1$, 所以 $T_n=(2n-1)3^n+1, n \geq 2$. 当 $n=1$ 时, $T_1=b_1=4$, 满足上式, 所以 $T_n=(2n-1)3^n+1$.

17. C 【解析】 因为 a, b, c 成等差数列, 所以 $a-2b+c=0$, 所以直线 $ax+by+c=0$ 恒过点 $P(1, -2)$. $x^2+y^2+4y-1=0$ 化为标准方程得 $x^2+(y+2)^2=5$, 则圆心 C 为 $(0, -2)$, 半径 $r=\sqrt{5}$, 则 $|PC|=1$, 当 $PC \perp AB$ 时, $|AB|$ 取得最小值, 此时 $|AB|=2\sqrt{5-|PC|^2}=4$, 故选 C.

18.5 $240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$ 【解析】 记对折 n

次可以得到不同规格图形的种数为数列 $\{a_n\}$, 依题意有 $a_1=2, a_2=3$, 对折 3 次, 可以得到 $2.5 \text{ dm} \times 12 \text{ dm}, 5 \text{ dm} \times 6 \text{ dm}, 10 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}, 20 \text{ dm} \times 1.5 \text{ dm}$ 四种规格的图形, 即 $a_3=4$; 对折 4 次, 可以得到 $1.25 \text{ dm} \times 12 \text{ dm}, 2.5 \text{ dm} \times 6 \text{ dm}, 5 \text{ dm} \times 3 \text{ dm}, 10 \text{ dm} \times 1.5 \text{ dm}, 20 \text{ dm} \times 0.75 \text{ dm}$ 五种规格的图形, 即 $a_4=5$.

于是数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=n+1$. 记对折 n 次可以得到不同规格图形的面积之和为 $\{S_n\}$, 依题意有 $S_1=2 \times 120=240, S_2=3 \times 60=180, S_3=4 \times 30=120, S_4=5 \times 15=75$, 于是数列 $\{S_n\}$ 的通项公式为 $S_n=120(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

则 $\sum_{k=1}^n S_k=120\left[2 \times 1+3 \times \frac{1}{2}+4 \times$

$\frac{1}{2^2}+\dots+n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}+(n+1) \cdot \frac{1}{2^n}\right]$, 所以 $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k=120\left[2 \times \frac{1}{2}+3 \times \frac{1}{2^2}+4 \times \frac{1}{2^3}+\dots+n \cdot \frac{1}{2^{n-1}}+(n+1) \cdot \frac{1}{2^n}\right]$,

两式作差得,

$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n S_k=120\left[2 \times 1+1 \times \frac{1}{2}+1 \times \frac{1}{2^2}+1 \times \frac{1}{2^3}+\dots+1 \times \frac{1}{2^{n-1}}-(n+1) \cdot \frac{1}{2^n}\right]$

$=120\left[2+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{1}{2}\right]$

$=120\left[3-\frac{1}{2^{n-1}}-(n+1) \cdot \frac{1}{2^n}\right]$

$=120\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$,

所以 $\sum_{k=1}^n S_k=240\left(3-\frac{n+3}{2^n}\right)$.

19. (1) 【解】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $b_n=\begin{cases} a_n-6, n \text{ 为奇数}, \\ 2a_n, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 所以 $b_1=a_1-6, b_2=2a_2=2a_1+2d, b_3=a_3-6=a_1+2d-6$. 因为 $S_4=32, T_3=16$, 所以 $\begin{cases} 4a_1+6d=32, \\ (a_1-6)+(2a_1+2d)+(a_1+2d-6)=16, \end{cases}$

整理得 $\begin{cases} 2a_1+3d=16, \\ a_1+d=7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=5, \\ d=2. \end{cases}$

所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n+3$.

(2) 【证明】由 (1) 知 $a_n=2n+3$, 所以

$S_n=\frac{n[5+(2n+3)]}{2}=n^2+4n$,

$b_n=\begin{cases} 2n-3, n \text{ 为奇数}, \\ 4n+6, n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

当 n 为奇数时, $T_n=-1+14+3+22+7+30+\dots+(2n-7)+(4n+2)+2n-3$
 $=[-1+3+\dots+(2n-7)]+(2n-3)+[14+22+\dots+(4n+2)]$

$=\frac{n+1}{2}(-1+2n-3)+\frac{n-1}{2}(14+4n+2)$
 $=\frac{3n^2+5n-10}{2}$.

当 $n>5$ 时, $T_n-S_n=\frac{3n^2+5n-10}{2}-(n^2+4n)$

$=\frac{n^2-3n-10}{2}=\frac{(n-5)(n+2)}{2}>0$,

所以 $T_n>S_n$.

当 n 为偶数时, $T_n=-1+14+3+22+7+30+\dots+(2n-5)+(4n+6)$
 $=[-1+3+\dots+(2n-5)]+[14+22+\dots+(4n+6)]$

$=\frac{n}{2}(-1+2n-5)+\frac{n}{2}(14+4n+6)$
 $=\frac{3n^2+7n}{2}$.

当 $n>5$ 时, $T_n-S_n=\frac{3n^2+7n}{2}-(n^2+4n)$

$=\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}>0$, 所以 $T_n>S_n$.

综上所述, 当 $n>5$ 时, $T_n>S_n$.

20. (1) 【证明】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 则由 $a_2-b_2=a_3-b_3$, 得 $a_3-a_2=b_3-b_2$, 即 $d=$

$$b_1 q^2 - b_1 q = 2b_1 \text{ ①.}$$

又由 $a_2 - b_2 = b_4 - a_4$, 得 $a_4 + a_2 = b_4 + b_2$, 即 $2a_1 + 4d = b_1 q^3 + b_1 q = 10b_1$ ②.

将①代入②, 得 $2a_1 + 8b_1 = 10b_1$, 即 $a_1 = b_1$.

(2)【解】由(1)可得 $a_m = a_1 + (m-1)d = b_1 + (m-1) \cdot 2b_1 = 2mb_1 - b_1$.

又 $b_k = b_1 q^{k-1} = b_1 \cdot 2^{k-1}$, 则由 $b_k = a_m + a_1$, 得 $b_1 \cdot 2^{k-1} = 2mb_1 - b_1 + a_1 = 2mb_1 - b_1 + b_1 = 2mb_1$, 即 $2^{k-1} = 2m$, 所以 $2^{k-2} = m$. 由 $1 \leq 2^{k-2} \leq 500$, 得 $0 \leq k-2 < 9$, 即 $2 \leq k < 11$.

因为 $k \in \mathbb{N}^*$, 所以 $k = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$, 所以集合中共有 9 个元素.

21. (1)【解】满足题意的 (i, j) 为 $(1, 2), (1, 6), (5, 6)$.

(2)【证明】因为在公差为 0 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_p, a_q, a_m, a_n 成等差数列 $\Leftrightarrow p, q, m, n$ 成等差数列,

当 $m > 3$ 时, $a_{15}, a_{16}, \dots, a_{4m+2}$ 可连续 4 项为一组等差数列,

故需证明序号为 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14 的项可分成三组项数为 4 的等差数列, 易知分为 $(1, 4, 7, 10), (3, 6, 9, 12), (5, 8, 11, 14)$ 三组

满足题意, 所以当 $m \geq 3$ 时, 数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 $(2, 13)$ -可分数列.

(3)【证明】由(2)可知, 等差数列 $a_1, a_2, \dots, a_{4m+2}$ 是 (i, j) -可分数列 \Leftrightarrow 数列 $1, 2, \dots, 4m+2$ 是 (i, j) -可分数列.

下面证明 $1, 2, \dots, 4m+2$ 是 $(4k+1, 4r+2)$ -可分数列 ($0 \leq k \leq r \leq m$).

当 $r = k$ 时, $4k+1$ 与 $4r+2$ 是相邻两项, 可分为 $(1, 2, 3, 4), (5, 6, 7, 8), \dots, (4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k), (4k+3, 4k+4, 4k+5, 4k+6), \dots, (4m-1, 4m, 4m+1, 4m+2)$.

当 $r > k$ 时, $4k+1, 4k+2, \dots, 4r+1, 4r+2$, 共 $4(r-k)+2$ 项, 中间的 $4(r-k)$ 项可连续 4 项为一组, 前后的项可分为 $(1, 2, 3, 4), \dots, (4k-3, 4k-2, 4k-1, 4k)$ 与 $(4(r+1)-1, 4(r+1), 4(r+1)+1, 4(r+1)+2), \dots, (4m-1, 4m, 4m+1, 4m+2)$.

此时, (k, r) 共有 $C_{m+1}^2 + (m+1) = \frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ 组.

再证: $1, 2, \dots, 4m+2$ 是 $(4k+2, 4r+1)$ -可分数列 ($0 \leq k < r \leq m$).

易知 $1 \sim 4k$ 与 $4r+3 \sim 4m+2$ 是可分的, 只需考虑 $4k+1, 4k+3, 4k+4, \dots, 4r-1, 4r, 4r+2$ 的可分性.

设 $p = r - k \in \mathbb{N}^*$, 只需证: $1, 3, 4, \dots, 4p-1, 4p, 4p+2$ 可分.

当 $p = 1$ 时, $1, 3, 4, 6$, 无法做到;

当 $p = 2$ 时, $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10$,

可以做到;

当 $p = 3$ 时,

$1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14$,

可以做到;

当 $p = 4$ 时, $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18$,

$(1, 5, 9, 13), (3, 7, 11, 15), (4, 8, 12, 16), (6, 10, 14, 18)$ 满足题意.

故 $\forall p \geq 2$, 可划分为:

$(1, p+1, 2p+1, 3p+1), (3, p+3, 2p+3, 3p+3), (4, p+4, 2p+4, 3p+4), (5, p+5, 2p+5, 3p+5), \dots, (p, 2p, 3p, 4p), (p+2, 2p+2, 3p+2, 4p+2)$, 共 p 组.

事实上, 就是 $(i, p+i, 2p+i, 3p+i), i = 1, 3, \dots, p, p+2$, 且把 2 换成 $4k+2$, 此时, (k, r) 即 $(k, k+p), p \geq 2$ 共有 $C_{m+1}^2 - m = \frac{1}{2}m(m-1)$ 组.

点悟: $(0, 1), (1, 2), \dots, (m-1, m)$ 不可行

综上, 可行的 $(4k+2, 4r+1)$ 与 $(4k+1, 4r+2)$ 至少有 $\frac{1}{2}m(m-1) + \frac{1}{2}(m+1) \cdot (m+2)$ 组,

$$\begin{aligned} \text{故 } P_m &\geq \frac{\frac{1}{2}(2m^2+2m+2)}{C_{4m+2}^2} = \\ &= \frac{m^2+m+1}{(2m+1)(4m+1)} = \frac{m^2+m+1}{8m^2+6m+1} > \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

得证!

刷原创

1. B 【解析】 $\because \{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_3 + a_6 + a_9 = 9$, $\therefore 3a_6 = 9$, $\therefore a_6 = 3$.

$\therefore \{b_n\}$ 是等比数列, 且 $b_3 b_6 b_9 = 64$,

$\therefore b_6^3 = 64$, $\therefore b_6 = 4$.

$\therefore a_2 b_4 b_8 + b_4 b_8 a_{10} = b_4 b_8 (a_2 + a_{10}) = b_6^2 \cdot 2a_6 = 96$. 故选 B.

2. B 【解析】等比数列 $\{a_n\}$ 中依次 k 项之和成等比数列, 即 $S_k, S_{2k}-S_k, S_{3k}-S_{2k}, \dots$ 成等比数列,

点悟: 等比数列片段和性质的应用

$$\therefore \frac{S_3}{S_6} = \frac{1}{7}, \therefore \frac{S_6-S_3}{S_3} = 6, \therefore \frac{S_9-S_6}{S_6-S_3} = 6.$$

令 $S_3 = m$, 得 $S_6 = 7m, S_9 = 43m$,

$$\therefore \frac{S_6}{S_9} = \frac{7}{43}, \text{ 故选 B.}$$

3. $\frac{512}{257}$ 【解析】 $\because \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}$, $\therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{2^n} = -\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{2^{n-1}}\right)$,

$$\text{又 } \frac{1}{a_1} - \frac{1}{2^0} = -\frac{1}{2}, \therefore \text{数列 } \left\{\frac{1}{a_n} - \frac{1}{2^{n-1}}\right\} \text{ 是}$$

首项为 $-\frac{1}{2}$, 公比为 -1 的等比数列.

$$\therefore \frac{1}{a_n} - \frac{1}{2^{n-1}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1)^{n-1}, \text{ 即 } a_n = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right) \times (-1)^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}}, \therefore a_{10} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^9}} = \frac{2^9}{2^8+1} = \frac{512}{257}.$$

4. $\frac{13}{6}$ 【解析】当 $n \geq 2$ 时, $b_n = b_1 + (b_2 - b_1) + (b_3 - b_2) + \dots + (b_n - b_{n-1}) = 5 + 3 + 5 + \dots + 2(n-1) + 1$,

$$\text{即 } b_n = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1 + 4 = \frac{n \cdot 2n}{2} + 4 = n^2 + 4, \text{ 当 } n = 1 \text{ 时, } b_1 = 5 \text{ 满足上式,}$$

$$\therefore b_n = n^2 + 4, \therefore S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = 1^2 + 4 + 2^2 + 4 + 3^2 + 4 + \dots + n^2 + 4 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4n,$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4n \geq \lambda n^2 + \lambda n,$$

$$\text{即 } \lambda \leq \frac{1}{6}(2n+1) + \frac{4}{n+1}, \text{ 令 } f(n) = \frac{1}{6}(2n+1) + \frac{4}{n+1} = \frac{1}{6}(n+1) + \frac{4}{n+1} - \frac{1}{6},$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}(x+1) + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{6} \geq 2\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{1}{6}} = \frac{8\sqrt{3}-1}{6} (x > -1), \text{ 当且仅当 } x = 2\sqrt{3}-1 \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore f(n)_{\min} = f(2) = f(3) = \frac{13}{6},$$

点悟: n 为正整数, 故需比较 $f(2)$ 与 $f(3)$ 的大小

$$\therefore S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 4n \geq \lambda n^2 + \lambda n,$$

$$\text{即 } \lambda \leq \frac{1}{6}(2n+1) + \frac{4}{n+1}, \text{ 令 } f(n) = \frac{1}{6}(2n+1) + \frac{4}{n+1} = \frac{1}{6}(n+1) + \frac{4}{n+1} - \frac{1}{6},$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3}(x+1) + \frac{4}{x+1} - \frac{1}{6} \geq 2\sqrt{\frac{4}{3} - \frac{1}{6}} = \frac{8\sqrt{3}-1}{6} (x > -1), \text{ 当且仅当 } x = 2\sqrt{3}-1 \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore f(n)_{\min} = f(2) = f(3) = \frac{13}{6},$$

点悟: n 为正整数, 故需比较 $f(2)$ 与 $f(3)$ 的大小

$$\therefore \lambda \leq \frac{13}{6}, \text{ 故 } \lambda_{\max} = \frac{13}{6}.$$

5. (1)【解】由已知可设 $\{a_n\}$ 的公比为 q 且 $q > 0$,

$$\therefore \frac{1}{a_3} \cdot \frac{1}{a_2} = 6, a_1 = 1, \therefore \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{q} = 6,$$

$$\therefore 6q^2 + q - 1 = 0, \therefore (2q+1)(3q-1) = 0,$$

$$\therefore q = \frac{1}{3} \text{ 或 } q = -\frac{1}{2} \text{ (舍)}, \therefore a_n = \frac{1}{3^{n-1}}.$$

$$\text{又 } \because 3b_n - na_n = 0, \therefore b_n = \frac{n}{3} a_n = \frac{n}{3^{n-1}}.$$

$$(2) \text{【证明】由(1)可得, } A_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}},$$

$$B_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n}, \text{ ①}$$

$$\frac{1}{3} B_n = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}}, \text{ ②}$$

$$\text{①}-\text{②得}$$

$$\frac{2}{3} B_n = \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^{n+1}},$$

$$\therefore 2B_n = \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n} = A_n - \frac{n}{3^n},$$

$$\therefore A_n - 2B_n = \frac{n}{3^n} > 0, \therefore A_n > 2B_n.$$

6. 【解】(1) 设数列 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 的公比为 q , 又 $a_1 = 1, a_5 = 81$,

$$\text{所以 } q^4 = \frac{a_5}{a_1} = 81, \text{ 即 } q = \pm 3,$$

$$\text{故数列 } \{a_n\} \text{ 为 } 1, -3, 9, -27, 81, -27, 9, -3, 1 \text{ 或 } 1, 3, 9, 27, 81, 27, 9, 3, 1.$$

(2) 因为 $a_{30}, a_{31}, \dots, a_{99}$ 是首项为 2, 公差为 3 的等差数列,

$$\text{所以 } S = a_1 + a_2 + \dots + a_{99} = 2(a_{30} + a_{31} + \dots + a_{99}) - a_{30} = 2 \times \left(50 \times 2 + \frac{50 \times 49 \times 3}{2}\right) - 2 = 7548.$$

$$(3) \because S_n + 2a_n = 1, \therefore S_n = 1 - 2a_n, \therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = 1 - 2a_{n-1},$$

$$\therefore a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2a_n, \therefore a_n = \frac{2}{3} a_{n-1}, \text{ 又当 } n = 1 \text{ 时, } a_1 = \frac{1}{3},$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3^n}.$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3^n}.$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3^n}.$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3^n}.$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3^n}.$$

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列, $\therefore a_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\therefore S_n = 1 - 2a_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\therefore b_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ($1 \leq n \leq 500, n \in \mathbf{N}^*$).
 \therefore 当 $1 \leq n \leq 500$ 时, $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = n - \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] = n - \frac{\frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{2}{3}} = n - 2 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

当 $501 \leq n \leq 1\,000$ 时, $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_{500} + b_{501} + b_{502} + \cdots + b_n = 500 - 2 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{499} + \cdots + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,001-n} = 498 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,001-n}$
 点拨: b_n 共有 1 000 项, 故从第 501 项开始, 与前面的项对称
 $\left(\frac{2}{3}\right)^{500} + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{499} + \cdots + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,001-n} = 498 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + n - 500 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{500} + \left(\frac{2}{3}\right)^{499} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,001-n}\right] = 498 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + n - 500 -$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{500} \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-500}\right] = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = 498 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + n - 500 + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{500} \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-500}\right] = n - 2 + 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,000-n}$.
 $\therefore T_n = \begin{cases} n - 2 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n, & 1 \leq n \leq 500, n \in \mathbf{N}, \\ n - 2 + 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,000-n}, & 501 \leq n \leq 1\,000, n \in \mathbf{N}. \end{cases}$

第五章 一元函数的导数及其应用

5.1 导数的概念及其意义

5.1.1 变化率问题

刷基础

1. C 【解析】 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(3+\Delta t) - s(3)}{\Delta t}$ 是物体在 3 s 这一时刻的瞬时速度, 是物体从 3 s 到 $(3+\Delta t)$ s 这段时间内的平均速度的极限值, 即是物体在 3 s 这一时刻的瞬时速度. 故选 C.

2. A 【解析】由题意可得平均速度是 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2+\Delta t) - s(2)}{\Delta t} = \frac{2(2+\Delta t)^2 - 2 - (2 \times 4 - 2)}{\Delta t} = \frac{8\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t} = 8 + 2\Delta t$. 故选 A.

3. AD 【解析】选项 A: 在 $0 \leq t \leq 0.2$ 这段时间里, 运动员的平均速度 $\bar{v} = \frac{h(0.2) - h(0)}{0.2 - 0} = \frac{11.364 - 11}{0.2} = 1.82$ (m/s), A 正确.

选项 B: 令 $h(t) = 11$ 得 $t = 0$ 或 $t = \frac{4}{7}$, 在 $0 \leq t \leq \frac{4}{7}$ 这一段上的平均速度 $\bar{v} = \frac{11 - 11}{\frac{4}{7} - 0} = 0$ (m/s), B 不正确.

选项 C: 假设 $t = t_0$ 时刻的瞬时速度为 0, 有 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-9.8\Delta t \cdot t_0 - 4.9(\Delta t)^2 + 2.8\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-9.8t_0 - 4.9\Delta t + 2.8) = -9.8t_0 + 2.8 = 0$, 解得 $t_0 = \frac{2}{9.8}$, 故瞬时速度可以为 0 m/s, C 不正确.

选项 D: 第 0.2 s 时刻瞬时速度为 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(0.2 + \Delta t) - h(0.2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-1.96\Delta t - 4.9(\Delta t)^2 + 2.8\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-1.96 - 4.9\Delta t + 2.8) = -1.96 + 2.8 = 0.84$ (m/s), D 正确.

故选 AD.

4. 【解】(1) $\bar{v} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{5 \times 2^2 + 45 \times 2 + 4 - (5 \times 1^2 + 45 \times 1 + 4)}{1} = 60$ (m/s).

(2) 飞机在 $t = 2$ s 时的瞬时速度为 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta t) - f(2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5(2 + \Delta t)^2 + 45(2 + \Delta t) + 4 - (5 \times 2^2 + 45 \times 2 + 4)}{\Delta t}$

$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5(\Delta t)^2 + 65\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (5\Delta t + 65) = 65$ (m/s).

因此, 飞机在 $t = 2$ s 时的瞬时速度为 65 m/s.

链接教材 本题是教材第 61 页练习第 2 题的变式, 考查平均速度与瞬时速度的计算. 求平均速度与瞬时速度的步骤:

(1) 设非匀速直线运动的规律 $s = s(t)$;
 (2) 求时间改变量 Δt 和位置改变量 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$;

(3) 求平均速度 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$;

(4) 计算瞬时速度 v : 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow$ 常数.

5. B 【解析】设 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 则

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + \Delta x + \frac{1}{1 + \Delta x} - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{1 + \Delta x} = 0$. 故选 B.

6. BC 【解析】在 0 到 t_0 范围内, 甲、乙的平均速度都为 $\frac{s_0}{t_0}$, 故 A 错误, B 正确;

因为甲对应的曲线在 $t = t_0$ 处的切线的斜率大于乙对应的曲线在 $t = t_0$ 处的切线的斜率, 故 $t = t_0$ 时, 甲的瞬时速度大于乙的瞬时速度, 故 C 正确, D 错误. 故选 BC.

7. $x + 0.4$ 【解析】由题意知 $Q(x, x^2)$, $P(0.4, 0.16)$, 所以割线 PQ 的斜率 $k_{PQ} = \frac{x^2 - 0.16}{x - 0.4} = x + 0.4$.

5.1.2 导数的概念及其几何意义

课时 1 导数的概念

刷基础

1. C 【解析】平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{1.1^2 - 1^2}{0.1} = 2.1$. 故选 C.

2. C 【解析】 \because 函数 $y = f(x) = x^2 - m^2$ 在区间 $[2, t]$ 上的平均变化率为 5, $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(t^2 - m^2) - (2^2 - m^2)}{t - 2} = 5$, 解得 $t = 3$. 故选 C.

3. C 【解析】函数 $f(x)$ 在区间上的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 由函数 $f(x)$ 的图象可得, 在区间 $[4, 7]$ 上, $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, 即函数 $f(x)$ 在区间 $[4, 7]$ 上的平均变化率小于 0. 在区间 $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ 上, $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ 且 Δx 相同, 故只需找 Δy 最大的即可, 由 $f(x)$ 的图象可知, 函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的 Δy 最大, 故函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 最大, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的平均变化率最大. 故选 C.

4. D 【解析】因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x + \Delta x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 3$ 处的瞬时变化率为 $-\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$. 故选 D.

5. A 【解析】因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{2} f'(x_0) = 3$, 所以 $f'(x_0) = 6$, 故选 A.

6. -1 在第 3 h 附近, 原油温度大约以 $1^\circ\text{C}/\text{h}$ 的速率下降 【解析】自变量 x