

第四章 数列

4.1 数列的概念

刷基础

1. **AD** 【解析】A: 对于常数数列, 所有项都相等, 故 **A 正确**.
B: 数列 10, 9, 8, 7 中的数有序, 但集合 {10, 9, 8, 7} 中的元素无序, 故 **B 错误**.
C: 根据数列的定义, 数列中的项是有序的, 故 **C 错误**.
D: 显然数列中的项随 n 的增大而变小, 为递减数列, 故 **D 正确**. 故选 AD.

名师点拨 数列与集合的区别

- (1) 数列中的项可以相同, 集合中的元素不可以相同;
(2) 数列中的项是有序的, 集合中的元素是无序的.

2. **BD** 【解析】A 选项, 有限数列的项数是有限的, 故 **A 错误**; B 选项, 数列的项数均为正整数, 则若将项数作为横坐标, 项作为纵坐标画在平面直角坐标系中, 相应图象为一系列孤立的点, 故 **B 正确**; C 选项, 数列中的项并不完全相同, 因此不为常数数列, 故 **C 错误**; D 选项, 数列的项数均为正整数, 项数与项一一对应, 且分为有限数列与无限数列, 则数列可看作定义在正整数集 (或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$) 上的函数, 故 **D 正确**. 故选 BD.

3. **ABD** 【解析】对于 A 项, 例如, 数列 1, -1, 1, -1, ... 的通项公式可以是 $a_n = (-1)^{n+1}$, 也可以是 $a_n = \cos[(n-1) \cdot \pi]$, 故 **A 正确**;
对于 B 项, 若通项公式是 $a_n = \frac{n(n-1)}{2} + 1$, 则 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 4, a_4 = 7$, 故 **B 正确**;
对于 C 项, 数列 0, 1, 0, 1, ... 的通项公式可以为 $a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ 为奇数} \\ 1, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 故 **C 错误**;

→ **避坑**: 通项公式可以是分段表示的形式, 且每一段合在一起表示的才是一个数列

- 对于 D 项, 由 $a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)a}{(n+1)b+c} - \frac{na}{nb+c} = \frac{ac}{[(n+1)b+c](nb+c)} > 0$, 得 $a_{n+1} > a_n$, 则此数列为递增数列, 故 **D 正确**. 故选 ABD.

4. **B** 【解析】令 $n^2 + 1 = 122$, 解得 $n = \pm 11$, 又 $n > 0$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以 $n = 11$, 即 122 是该数列的第 11 项. 故选 B.

5. **D** 【解析】 $a_5 = 2 \times 5 - 1 = 9, a_6 = 2^{6-1} = 32$, 故 $a_5 + a_6 = 41$. 故选 D.

6. **A** 【解析】观察数列的前 4 项: $\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{9}$, 可以发现奇数项为正, 偶数项为负, 可知该数列的符号规律可以用 $(-1)^{n+1}$ 来表示.

→ **敲黑板**: “+”“-”交替出现, 用 $(-1)^n$ 或 $(-1)^{n+1}$ 来处理
分母依次为 3, 5, 7, 9, 得该数列分母每
项的数值为 $2n+1$.

结合上述对符号规律和数值规律的分析, 可知该数列的通项公式为 $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$. 故选 A.

7. $a_n = \frac{n^2+n}{2}$ 【解析】由题图可知 $a_n =$

$$a_{n-1} + n, n \geq 2, \therefore a_n - a_{n-1} = n, \therefore a_2 - a_1 = 2, a_3 - a_2 = 3, a_4 - a_3 = 4, \dots, a_n - a_{n-1} = n, \\ \therefore a_n - a_1 = \frac{(n-1)(2+n)}{2}, \text{ 则 } a_n = \frac{n^2+n}{2} \\ (n \geq 2), \text{ 当 } n=1 \text{ 时也成立. } \therefore a_n = \frac{n^2+n}{2}.$$

链接教材 本题是教材第 6 页例 4 的变式. 此类与图、表结合求数列通项公式或某一项的题目, 关键在于找到相邻图形 (或表格相邻项) 之间的联系以及变化规律, 利用递推关系求解.

8. **C** 【解析】由题意得, $a_2 = a_1 + 2 + 2 = 6, a_3 = a_2 + 3 + 2 = 11, a_4 = a_3 + 4 + 2 = 17, a_5 = a_4 + 5 + 2 = 24$. 故选 C.

9. **D** 【解析】因为 $a_n a_{n+1} = 2^n, n \in \mathbb{N}^*$, 且 $a_1 = 1$, 所以 $a_1 a_2 = 2$, 则 $a_2 = 2$, $a_2 a_3 = 2^2$, 则 $a_3 = 2, a_3 a_4 = 2^3$, 则 $a_4 = 4$, $a_4 a_5 = 2^4$, 则 $a_5 = 4, a_5 a_6 = 2^5$, 则 $a_6 = 8$, $a_6 a_7 = 2^6$, 则 $a_7 = 8, a_7 a_8 = 2^7$, 则 $a_8 = 16, a_8 a_9 = 2^8$, 则 $a_9 = 16$. 所以数列 $\{a_n\}$ 的前 9 项和为 $1+2+2+4+4+8+8+16+16=61$. 故选 D.

10. **B** 【解析】由 $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 可得

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \\ \therefore \text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } \begin{cases} a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \\ a_3 - a_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \\ \dots \\ a_n - a_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}, \end{cases} \\ \therefore a_n - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \\ = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{2n}, \therefore a_n = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2n} = \frac{2n-1}{2n}.$$

经验证, a_1 也符合上式. 故选 B.

11. **C** 【解析】已知 $a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-1}, n \geq 2$,

$$n \in \mathbb{N}, \text{ 则 } a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} \\ = \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-2}{n-1} \times \frac{n-1}{n} \\ = \frac{1}{n} (n \geq 2), \text{ 当 } n=1 \text{ 时也符合上式, 故数} \\ \text{列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = \frac{1}{n}. \text{ 故选 C.}$$

规律方法 由递推公式求通项公式的常用方法

- (1) $a_{n+1} - a_n =$ 常数或 $a_{n+1} - a_n = f(n)$ ($f(n)$ 是可以求和的), 使用累加法或迭代法;
(2) $a_{n+1} = pa_n$ (p 为非零常数) 或 $a_{n+1} = f(n)a_n$ ($f(n)$ 是可以求积的), 使用累乘法或迭代法.

12. **A** 【解析】对于选项 A, $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - (n+1) - n^2 + n = 2n > 0$, 是递增数列, **A 正确**;

对于选项 B, $a_1 = -6, a_2 = -9$, 不是递增数列, **B 错误**;
对于选项 C, $a_5 = 25, a_6 = 13$, 不是递增数列, **C 错误**;
对于选项 D, $a_1 = a_2 = -1$, 不是递增数列, **D 错误**. 故选 A.

规律方法 判断数列的单调性一般利用 $a_{n+1} - a_n$ 与 0 的大小关系或 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ 与 1 的大小关系来确定.

13. **B** 【解析】 $a_n = \frac{2n-2}{2n-15} = \frac{2n-15+13}{2n-15} = 1 + \frac{13}{2n-15}$, 当 $n > 7, n \in \mathbb{N}^*$ 时, $2n-15 >$

0, $a_n = 1 + \frac{13}{2n-15}$ 单调递减, 此时 $a_n =$

$1 + \frac{13}{2n-15} > 1$; 当 $n \leq 7, n \in \mathbb{N}^*$ 时, $2n-15 < 0, a_n = 1 + \frac{13}{2n-15}$ 单调递减,

此时 $a_n = 1 + \frac{13}{2n-15} \geq a_7 = 1 + \frac{13}{-1} = -12$.

所以 a_n 取到最小值时 n 的值是 7.

故选 B.

14. **D** 【解析】写出周期数列 $\{b_n\}$ 的前几项: 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, 3, 2, -1, -3, -2, 1, ... 发现周期数列 $\{b_n\}$ 是从第 1 项起的周期为 6 的周期数列, 故 $b_{2023} = b_{337 \times 6 + 1} = b_1 = 1$. 故选 D.

15. **D** 【解析】 \because 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1}a_n = a_n - 1$, 易知 $a_n \neq 0, \therefore a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}, \therefore a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, a_3 = 1 - 2 = -1, a_4 = 1 - (-1) = 2, a_5 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$

→ **敲黑板**: 在无从下手的时候可以
多写出几项找一找数列的规律

$\therefore \{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列, 而 $2025 = 3 \times 675$, 故 $a_{2025} = a_3 = -1$.

故选 D.

16. **A** 【解析】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} =$

$$\begin{cases} 2a_n, & 0 \leq a_n \leq \frac{1}{2}, \\ 2a_n - 1, & \frac{1}{2} < a_n < 1, \end{cases} a_1 = \frac{3}{5},$$

则 $a_2 = 2a_1 - 1 = \frac{1}{5}, a_3 = 2a_2 = \frac{2}{5}, a_4 =$

$2a_3 = \frac{4}{5}, a_5 = 2a_4 - 1 = \frac{3}{5} = a_1,$

因此继续下去会循环, 数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的周期数列,

所以 $a_{10} = a_{2+2 \times 4} = a_2 = \frac{1}{5}$. 故选 A.

17. **A** 【解析】数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 1$, 则 $a_8 = S_8 - S_7 = (8^2 + 1) - (7^2 + 1) = 15$. 故选 A.

18. **C** 【解析】分别将 $n=1, 2$ 代入 $\frac{S_n}{n} = a_2 n - 4$ 中, 得 $\frac{S_1}{1} = a_2 - 4, \frac{S_2}{2} = 2a_2 - 4,$

→ **敲黑板**: 根据这个表达式无法直接
代入 $n=5$ 求 S_5 , 最主要的是要求出 a_2 的值
即 $S_1 = a_2 - 4, S_2 = 4a_2 - 8,$

两式相减得 $a_2 = S_2 - S_1 = 4a_2 - 8 - (a_2 - 4) = 3a_2 - 4$,

解得 $a_2 = 2$, 则 $S_n = 2n^2 - 4n$,

故 $S_5 = 2 \times 5^2 - 4 \times 5 = 30$, 故选 C.

19. AC 【解析】数列 $\{a_n\}$ 中, $S_n - a_n = n^2 - n$ ①,

$S_{n+1} - a_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1)$ ②,

②-①得 $a_n = 2n$,

所以 $S_n = a_n + n^2 - n = n^2 + n$, **A, C 正确**,

B, D 错误. 故选 AC.

规律方法 当条件中同时包含 S_n 和 a_n 时, 可以利用 $S_n - S_{n-1} = a_n (n \geq 2)$ 或 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ 消掉 S_n , 得到仅包含 a_n 的关系式再进一步研究.

刷易错

★易错点 1 忽略数列的单调性与函数的区别而致错

20. C 【解析】已知 $a_n = n^2 + kn$, 则 $a_{n+1} = (n+1)^2 + k(n+1)$.

所以 $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + k(n+1) - (n^2 + kn)$, 化简后得 $a_{n+1} - a_n = 2n + 1 + k$.

因为 $\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 $a_{n+1} - a_n > 0$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立,

即 $2n + 1 + k > 0$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 则 $k > -(2n+1)$ 对 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立.

对于函数 $y = -(2n+1)$, $n \in \mathbb{N}^*$, n 越大, 函数值越小, 则当 $n = 1$ 时, $y = -(2 \times 1 + 1)$ 取得最大值 $-(2 \times 1 + 1) = -3$, 所以 $k > -3$. 故选 C.

易错警示 由于数列是定义在正整数集或其有限子集上的函数, 因此涉及含参数的数列的单调性问题时应根据数列的单调性, 将问题转化为 $a_n < a_{n+1}$ 或 $a_n > a_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 恒成立的问题. 本题的易错之处是容易将数列 $\{a_n\}$ 的单调性与函数 $f(x) = x^2 + kx$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性混淆, 这是因为数列对应函数的定义域不是连续的区间, 所以不能利用 $-\frac{k}{2} \leq 1$ 求 k 的取值范围.

★易错点 2 求数列通项时, 忽视 $n = 1$ 的情况致错

21. $\begin{cases} 6, n=1, \\ 2n+1, n \geq 2 \end{cases}$ 【解析】当 $n = 1$ 时,

$S_1 = a_1 = 1 + 2 + 3 = 6$;

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + 2n + 3 - [(n-1)^2 + 2(n-1) + 3] = 2n + 1$.

显然 $a_1 = 6$ 不符合 $a_n = 2n + 1$,

故 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} 6, n=1, \\ 2n+1, n \geq 2. \end{cases}$

易错警示 只有当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 才存在, 所以根据 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 或数列 $\{a_n\}$ 的递推公式求通项公式时, 要特别考虑 a_1 , 根据条件中的等式确定 a_1 的值, 若符合由递推公式求得的通项公式 $a_n (n \geq 2)$, 则 a_1 可与 $a_n (n \geq 2)$ 合并, 若不符合则分段表示.

刷能力

1. B 【解析】设数列 $2, -\frac{4}{3}, \frac{6}{5}, -\frac{8}{7}, \dots$

为数列 $\{a_n\}$, 观察可得 $a_1 = \frac{2}{1}, a_2 =$

$-\frac{4}{3}, a_3 = \frac{6}{5}, a_4 = -\frac{8}{7}, \dots$, 归纳可得其

通项公式为 $a_n = (-1)^{n-1} \frac{2n}{2n-1}$, 所以第 8

项是 $a_8 = (-1)^{8-1} \times \frac{2 \times 8}{2 \times 8 - 1} = -\frac{16}{15}$. 故选 B.

点悟: 将相应序号代入通项公式, 就可以求出数列中的指定项.

2. B 【解析】在 $a_n = (n+2)(a_{n+1} - a_n)$

中, 取 $n = 1$, 可得 $a_1 = 3(a_2 - a_1)$, 代入

$a_2 = 2$, 解得 $a_1 = \frac{3}{2}$.

又由 $a_n = (n+2)(a_{n+1} - a_n)$ 可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} =$

$\frac{n+3}{n+2}$, 于是 $a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1}$.

$a_1 = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+2}{2}$

($n \geq 2$), 故 $a_{2024} = \frac{2024+2}{2} = 1013$. 故

选 B.

3. C 【解析】因为对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都有

$a_n > a_{n+1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 单调递减, 故

$\frac{1}{2} - a < 0$ 且 $0 < a < 1$, 则 $\frac{1}{2} < a < 1$.

此时 $a_n = \left(\frac{1}{2} - a\right)n + 2 (n > 8)$ 单调递减,

$a_n = a^{n-7} (n \leq 8)$ 单调递减, 故只需

$\left(\frac{1}{2} - a\right) \times 9 + 2 < a^{8-7}$, 解得 $a > \frac{13}{20}$, 所以

$\frac{13}{20} < a < 1$, 故实数 a 的取值范围为

$\left(\frac{13}{20}, 1\right)$. 故选 C.

特别注意 根据题中数列对应的函数的单调性, 知分段函数两段均单调

递减, 但是要注意数列与函数的区别, 数列是不连续的, 所以 $a_9 < a_8$, 即

$\left(\frac{1}{2} - a\right) \times 9 + 2 < a$, 而不是 $\left(\frac{1}{2} - a\right) \times$

$8 + 2 \leq a$.

4. B 【解析】设正方形数构成的数列为

$\{a_n\}$, 五边形数构成的数列为 $\{b_n\}$, 则

$a_1 = 1^2, a_2 = 2^2, a_3 = 3^2, a_4 = 4^2$, 由此

得出 $a_5 = 5^2 = 25$.

$b_1 = 1, b_2 = 5 = 1 + 4, b_3 = 12 = 1 + 4 + 7,$

$b_4 = 22 = 1 + 4 + 7 + 10$, 由此得出 $b_5 = 1 +$

$4 + 7 + 10 + 13 = 35$. 故选 B.

5. AC 【解析】由 $S_n = n^2 - n + 1$, 得

当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 1$,

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - n + 1 - (n-1)^2 + (n-1) - 1 = 2n - 2$,

当 $n = 1$ 时, $a_1 = 1$ 不满足上式,

所以 $a_n = \begin{cases} 1, n=1, \\ 2n-2, n \geq 2, \end{cases}$ 则 $a_5 = 8$, **A 正**

确, B 不正确;

由 $S_n < 7$, 即 $n^2 - n + 1 < 7$, 解得 $-2 < n < 3$, 又 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以其解集为 $\{1, 2\}$, **C 正确**;

因为 $S_5 = 21, 2a_5 + 3 = 19$, 所以 $S_5 \neq 2a_5 + 3$, **D 不正确**. 故选 AC.

6. ACD 【解析】由 $a_n = \frac{2n-7}{2n-15} = 1 + \frac{8}{2n-15}$,

点悟: 分式的分母和分子中都含有变量, 需要先分离常数, 转化为只有分母中含有变量的式子, 来研究其性质

得当 $n \leq 7, n \in \mathbb{N}^*$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的各项

小于 1, 且 $\{a_n\}$ 单调递减,

当 $n \geq 8, n \in \mathbb{N}^*$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的各项大于 1, 且 $\{a_n\}$ 单调递增,

所以数列 $\{a_n\}$ 的最小项为 $a_7 = -7$, 最大项为 $a_8 = 9$, 所以 **A 正确**.

当 $n \in \{1, 2, 3\}$ 时, 满足 $0 < a_n < 1$; 当 $n \in \{4, 5, 6, 7\}$ 时, 满足 $a_n < 0$; 当 $n \geq 8$, $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $a_n > 1$, 所以满足 $a_n a_{n+1} a_{n+2} < 0$

时, $n = 2, 4, 5, 7$, 共有 4 个值, 所以 **B 错误**.

由 B 的分析可知使得 S_n 取得最小值的 n 为 7, 所以 **C 正确**.

因为 T_n 为前 n 项积, 所以只有 T_4 和 T_6 为负数, 又 $a_5 = -\frac{3}{5}, a_6 = -\frac{5}{3}$, 故

$T_4 = T_6$, 所以 T_n 存在最小值, 为 T_4 或 T_6 , 从第 8 项开始, T_n 为正数且 $a_n > 1$, 可知 T_n 随着 n 的增大而增大, 所以 T_n 无最大值, 所以 **D 正确**. 故选 ACD.

规律方法 研究数列前 n 项和 S_n 的最值, 可以通过研究项的正负从而得到 S_n 的单调性继而得到 S_n 的最值.

研究数列前 n 项积 T_n 的最值, 若 a_n 恒正, 可以通过研究项与 1 的关系从而得到 T_n 的单调性继而得到 T_n 的最值, 若项有正有负则还需要考虑积的正负, 并考虑 $|a_n|$ 与 1 的关系.

7. ABC 【解析】对于 A, 由 $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} (n \geq 3, n \in \mathbb{N})$,

可得 $a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8$, 则 $\frac{a_6}{a_3} =$

4, 故 **A 正确**;

对于 B, $a_{n-2} + a_{n+2} = a_{n-2} + a_{n+1} + a_n = a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + a_n = 3a_n$, 故 **B 正确**;

对于 C, $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2023} = a_2 + (a_4 - a_2) + (a_6 - a_4) + \dots + (a_{2024} - a_{2022}) =$

a_{2024} , 故 **C 正确**;

对于 D, $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2024} = (a_3 - a_1) + (a_5 - a_3) + (a_7 - a_5) + \dots + (a_{2025} - a_{2023}) = a_{2025} - 1$, 故 **D 错误**. 故选 ABC.

多种解法 对于 C, D, $a_{2024} = a_{2023} +$

$a_{2022} = a_{2023} + a_{2021} + a_{2020} = a_{2023} + a_{2021} +$

$a_{2019} + a_{2018} = \dots = a_{2023} + a_{2021} + \dots + a_1$,

$a_{2025} = a_{2024} + a_{2023} = a_{2024} + a_{2022} + a_{2021} =$

$a_{2024} + a_{2022} + a_{2020} + a_{2019} = \dots = a_{2024} +$

$a_{2022} + \dots + a_2 + a_1$, 故 C 正确, D 错误.

名师点拨 研究陌生的递推数列的多阶递推性质, 要充分利用其本身的递推公式, 通过变形、迭代等方法进行代数变形从而得到结论.

8. $\frac{50}{17}$ 【解析】因为 $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n-1} -$

$\frac{1}{2n-3} = \frac{-2}{(2n-1)(2n-3)}$,

当 $n = 1$ 时, $a_2 - a_1 = 2 > 0$; 当 $n \geq 2$ 时,

$a_{n+1} - a_n < 0$.

点悟: 求绝对值数列 $\{|a_{n+1} - a_n|\}$ 的前 n 项和时, 必须判断 $(a_{n+1} - a_n)$ 的正负

所以 $|a_2 - a_1| + |a_3 - a_2| + \dots + |a_{10} - a_9| =$

$a_2 - a_1 + a_2 - a_3 + a_3 - a_4 + \dots + a_9 - a_{10} = 2a_2 -$

$a_{10} = 2 - (-1) - \frac{1}{2 \times 10 - 3} = 3 - \frac{1}{17} = \frac{50}{17}$.

刷素养

9. $a - \sqrt{2}b$ $b - \sqrt{2}a$ 【解析】由题意可知

$x_1 = a, x_2 = b$, 则 $x_3 = \sqrt{2}x_2 - x_1 = \sqrt{2}b - a$,

$x_4 = \sqrt{2}x_3 - x_2 = \sqrt{2}(\sqrt{2}b - a) - b = b - \sqrt{2}a$,

$x_5 = \sqrt{2}x_4 - x_3 = \sqrt{2}(b - \sqrt{2}a) - (\sqrt{2}b -$

$$\begin{aligned} a) &= -a, \\ x_6 &= \sqrt{2}x_5 - x_4 = \sqrt{2} \cdot (-a) - (b - \sqrt{2}a) = -b, \\ x_7 &= \sqrt{2}x_6 - x_5 = \sqrt{2} \cdot (-b) - (-a) = a - \sqrt{2}b, \\ x_8 &= \sqrt{2}x_7 - x_6 = \sqrt{2} \cdot (a - \sqrt{2}b) - (-b) = \sqrt{2}a - b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_9 &= \sqrt{2}x_8 - x_7 = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}a - b) - (a - \sqrt{2}b) = a, \\ x_{10} &= \sqrt{2}x_9 - x_8 = \sqrt{2}a - (\sqrt{2}a - b) = b, \dots, \\ \text{故数列 } \{x_n\} &\text{是以 } 8 \text{ 为最小正周期的周期数列.} \\ \therefore 2\,023 &= 252 \times 8 + 7, \therefore x_{2\,023} = x_7 = a - \sqrt{2}b. \\ \text{又 } \therefore \text{数列 } \{x_n\} &\text{的前 } 8 \text{ 项和为} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_8 &= a + b + (\sqrt{2}b - a) + (b - \sqrt{2}a) + (-a) + (-b) + (a - \sqrt{2}b) + (\sqrt{2}a - b) = 0, \\ \therefore \text{数列 } \{x_n\} &\text{的前 } 2\,023 \text{ 项的和为 } x_1 + x_2 + \dots + x_{2\,023} = x_1 + x_2 + \dots + x_7 \\ &= a + b + (\sqrt{2}b - a) + (b - \sqrt{2}a) + (-a) + (-b) + (a - \sqrt{2}b) = b - \sqrt{2}a. \end{aligned}$$

4.2.1 等差数列的概念

刷基础

1. CD 【解析】对于 A, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \neq 2 \times \frac{1}{3}$, 故 A 不是等差数列; 对于 B, $\lg 5 + \lg 7 = \lg 35 \neq \lg 36 = 2\lg 6$, 故 B 不是等差数列; 对于 C, $1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 2 \times \frac{7}{8}$, 故 C 是等差数列; 对于 D, $3 + 3 = 2 \times 3$, 故 D 是等差数列. 故选 CD.

2. C 【解析】因为 $(a_{n+1} + a_{n+3}) - (a_n + a_{n+2}) = (a_{n+1} - a_n) + (a_{n+3} - a_{n+2}) = d + d = 2d$, 所以数列 $a_1 + a_3, a_2 + a_4, a_3 + a_5, \dots$ 是公差为 $2d$ 的等差数列. 故选 C.

3. ACD 【解析】 $a_n = kn + b$ (k, b 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$), 则 $a_{n+1} - a_n = k(n+1) + b - kn - b = k$, 符合等差数列的定义, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 故 A 正确; $a_{n+2} - a_n = d$ (d 为常数, $n \in \mathbb{N}^*$) 不符合从第二项起, 每一项与它的前一项的差都为同一个常数, 故 B 错误; $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 即 $2a_{n+1} = a_{n+2} + a_n$, 符合等差中项的性质, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 故 C 正确; $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n = n^2 + n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = 2n$, 且 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = 2$ 符合上式, 则 $a_n = 2n$ 符合一次函数的形式, 所以 $\{a_n\}$ 为等差数列, 故 D 正确. 故选 ACD.

归纳总结 判断一个数列是否为等差数列的常用方法

(1) 定义法

$$a_{n+1} - a_n = d \quad (d \text{ 为常数}, n \in \mathbb{N}^*) \text{ 或 } a_n - a_{n-1} = d \quad (d \text{ 为常数}, n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \text{数列 } \{a_n\} \text{ 是等差数列.}$$

(2) 等差中项法

$$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \{a_n\} \text{ 为等差数列.}$$

(3) 通项公式法

$$\text{数列 } \{a_n\} \text{ 的通项公式形如 } a_n = pn + q \quad (p, q \text{ 为常数}, n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \text{数列 } \{a_n\} \text{ 为等差数列.}$$

4. 【解】(1) 数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列. 理由如下: 由 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2}$, 可知 $a_n \neq 0$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 2}{2a_n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{a_n}$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}$, 所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$, 公差 $d = \frac{1}{2}$ 的等差数列.

敲黑板: 符合等差数列的定义

公差 $d = \frac{1}{2}$ 的等差数列.

4.2 等差数列

$$(2) \text{ 由 (1) 可知, } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d = \frac{n}{2}, \text{ 所以 } a_n = \frac{2}{n}.$$

5. B 【解析】由已知可得, $a+b = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 2\sqrt{2}.$$

设 a, b 的等差中项为 m , 根据等差中项的定义, 有 $m = \frac{a+b}{2} = \sqrt{2}$, 故选 B.

6. C 【解析】因为内角 A, B, C 依次成等差数列, 所以 $A+C=2B$. 又 $A+B+C=\pi$, 解得 $B=\frac{\pi}{3}$, 所以 $2A+B+2C=5B=\frac{5\pi}{3}$, 故选 C.

7. 16 【解析】由等差中项的定义可得 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, 故 $a+9b = (a+9b) \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} + 9 \geq 10 + 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{9b}{a}} = 16$ (当且仅当 $a=4, b=\frac{4}{3}$ 时取等号).

8. D 【解析】由已知可得等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1=3$, 公差 $d=11-3=8$, 所以通项公式 $a_n=3+8(n-1)=8n-5$. 由 $a_n=67$ 可得 $8n-5=67$, 解得 $n=9$. 故选 D.

链接教材 本题是教材第 15 页例 2 的同类试题. 首先根据所给数据或关系写出数列的通项公式, 要判断数列中是否存在某项, 只需将此数代入数列的通项公式中, 求出 n 的值. 若求出的 n 为正整数, 则该数是数列中的项, 否则该数不是数列中的项, 求出的 n 即为该数是数列的第几项的项数.

9. D 【解析】设 16 个数对应公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 16 项, 则由题意可知, $a_1=1, a_{16}=31$, 故 $a_{16}-a_1=15d=30$, 解得 $d=2$. 故选 D.

10. B 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 为递增等差数列, 所以 $a_3+a_7=a_4+a_6=34$, 且 $a_4 < a_6$, 又因为 $a_4 \cdot a_6=280$, 所以 $a_4=14, a_6=20$. 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d = \frac{a_6 - a_4}{6-4} = \frac{20-14}{2} = 3$, $a_1 = a_4 - 3d = 14 - 9 = 5$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d = 3n+2$. 故选 B.

11. D 【解析】由 $a_2+a_{10}=2a_6=16$, 解得 $a_6=8$. 又 $a_6a_{10}=96$, 所以 $a_{10}=12$, 故公差 $d = \frac{a_{10}-a_6}{10-6} = 1$. 故选 D.

12. D 【解析】由 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$, 得 $a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$, 则 $\{a_n\}$ 为等差数列. 又 $a_5+a_9=16$, 所以由等差数列的

性质知 $a_1+a_2+\dots+a_{12}=6(a_5+a_9)=96$. 故选 D.

13. B 【解析】记 7 根横梁的长度从上到下依次成等差数列 $\{a_n\}$ ($1 \leq n \leq 7, n \in \mathbb{N}$), 由题意得 $a_1+a_2+a_3=1.5, a_5+a_6+a_7=2, \therefore 3a_2=1.5, 3a_6=2$, 解得 $a_2=\frac{1}{2}, a_6=\frac{2}{3}$. $\therefore 2a_4=a_2+a_6, \therefore a_4=\frac{7}{12}$, 即正中间的一根横梁的长度是 $\frac{7}{12}$ m. 故选 B.

14. -n (答案不唯一) 【解析】假设数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 设其公差为 d , 由条件②可得 $a_1+(m+n-1)d=a_1+(m-1)d+a_1+(n-1)d$, 所以 $a_1=d$; 再根据条件① $\{a_n\}$ 是递减数列, 可知 $d < 0$, 则 $a_n=a_1+(n-1)d=nd$, 且 $d < 0$. 取 $d=-1$, 此时 $a_n=-n$, 满足题意.

二级结论 $\{a_n\}$ 是等差数列的一个

充分条件为 $a_{m+n}=a_m+a_n$ 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 成立, 或 $a_{m-n}=a_m-a_n$ 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 且 $m > n$ 成立.

下面证: $\{a_n\}$ 是等差数列的一个充分条件为 $a_{m+n}=a_m+a_n$ 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 成立.

证明: 取 $m=1$, 有 $a_{n+1}=a_n+a_1$, 即 $a_{n+1}-a_n=a_1$, 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列, 首项为 a_1 , 公差为 a_1 , 通项公式为 $a_n=na_1$, 此时 $a_{m+n}=(m+n)a_1=ma_1+na_1=a_m+a_n$ 满足条件.

15. A

思路导引 由已知可得 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是等差数列, 从而先利用等差数列的通项公式求出 $\sqrt{a_n}$, 进而可求出 a_n .

【解析】因为 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$, 所以 $\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} = \sqrt{2}$, 所以 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是首项为 $\sqrt{a_1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, 公差为 $\sqrt{2}$ 的等差数列, 所以 $\sqrt{a_n} = 2\sqrt{2} + (n-1)\sqrt{2} = \sqrt{2}(n+1)$, 所以 $a_n = 2(n+1)^2$. 故选 A.

16. A 【解析】由数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{3}, \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n a_{n+1}} = 2$, 可得 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 2$, $\frac{1}{a_1} = 3$, 所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是首项为 3, 公差为 2 的等差数列, 所以 $\frac{1}{a_{10}} = 3 + 9 \times 2 = 21$, 所以 $a_{10} = \frac{1}{21}$, 故选 A.

17. 【解】(1) 因为 $a_1=1, na_{n+1}-(n+1) \cdot a_n = 3n(n+1)$, 所以 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + 3(n+1)$, 则 $a_2 = 2a_1 + 3 \times 2 = 8, a_3 = \frac{3}{2}a_2 + 3 \times 3 = 21$.