

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$ , 且  $\{a_n\}$  为单调递增数列, 所以  $na_1 < S_n < na_n$ , 则  $\frac{n}{3} < S_n < \frac{n}{2}$ ,

又  $\frac{n}{3} > \frac{n-1}{6} (n \in \mathbf{N}^*)$ , 所以  $S_n > \frac{n-1}{6}$ ,

故 **A, B, D 正确**. 数列  $\left\{\frac{a_n-1}{a_n+1}\right\}$  中,

$\frac{a_1-1}{a_1+1} = -\frac{1}{2}, \frac{a_2-1}{a_2+1} = -\frac{2}{5}, \frac{a_3-1}{a_3+1} = -\frac{4}{11}$ , 不是等比数列, 故 **C 错误**. 故选 ABD.

**13. 【解】** 设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则  $d \geq 0, d \in \mathbf{N}^*$ , 等比数列  $\{b_n\}$  的公比

为  $q$ , 则  $q \geq 1, q \in \mathbf{N}^*$ , 此时  $c_n = 1 + (n-1)d + q^{n-1}$ , 则  $c_k = 1 + (k-1)d + q^{k-1} = 37 \Rightarrow (k-1)d + q^{k-1} = 36, c_{k+2} = 1 + (k+1)d + q^{k+1} = 307 \Rightarrow (k+1)d + q^{k+1} = 306$ .

情形一: 当  $k=1$  时,  $1=36$ , 矛盾.

情形二: 当  $k=2$  时,  $\begin{cases} d+q=36, \\ 3d+q^3=306, \end{cases}$  则  $q^3-3q=198 \Rightarrow (q-6)(q^2+6q+33)=0 \Rightarrow q=6$ , 所以  $d=30$ , 此时  $c_n = 6^{n-1} + 30n - 29$ .

情形三: 当  $k=3$  时,  $\begin{cases} 2d+q^2=36, \\ 4d+q^4=306, \end{cases}$  则

$q^4-2q^2=234 \Rightarrow q^2 = \sqrt{235} + 1$  (舍去,  $q$  应为正整数).

情形四: 当  $k=4$  时,  $\begin{cases} 3d+q^3=36, \\ 5d+q^5=306, \end{cases}$  则  $q^3 < 36 \Rightarrow 1 \leq q \leq 3, 3d < 36 \Rightarrow 0 \leq d < 12$ , 此时  $5d+q^5 < 60+3^5 = 303 < 306$ , 不满足题意.

情形五: 当  $k \geq 5$  时,  $1 \leq q \leq 2, 0 \leq d < 9$ , 此时  $(k-1)d + q^{k-1} = 36$ , 则  $(k+1) \cdot d + q^{k+1} = (k-1)d + 2d + q^{k-1}q^2 < (k-1) \cdot d + 18 + 4q^{k-1} < 18 + 4 \times 36 = 162 < 306$ , 不满足题意. 综上所述,  $c_n = 6^{n-1} + 30n - 29$ .

## 专题1 通项公式的求法

$$\frac{1}{n(n+1)} (n \in \mathbf{N}^*),$$

**点拨:**  $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , 从而简化计算

$$\begin{aligned} \text{所以 } a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{10 \times 11} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}. \end{aligned}$$

**归纳总结** 形如  $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$

$$\left( \frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n) \right) \text{ 型的递推数列 (其中 } f(n) \text{ 是关于 } n \text{ 的函数) 可构造}$$

$$\begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1), \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = f(n-2), \\ \cdots \\ \frac{a_2}{a_1} = f(1), \end{cases}$$

两边分别相乘, 可得  $a_n = f(n-1) \cdot f(n-2) \cdots f(2)f(1)a_1 (n \geq 2)$ .

**4. A 【解析】** 因为正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n, a_1 = 2$ , 且  $n \left( \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) =$

$$\frac{2}{S_{n+1}}, \text{ 所以 } \frac{n}{S_n} = \frac{n+2}{S_{n+1}}, \text{ 则 } \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n}, \text{ 所以 } \frac{S_2}{S_1} = \frac{3}{2}, \frac{S_3}{S_2} = \frac{4}{3}, \frac{S_4}{S_3} = \frac{5}{4}, \cdots, \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n},$$

上述等式左右两边分别相乘得  $\frac{S_{n+1}}{S_1} = \frac{3 \times 4 \times \cdots \times n \times (n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ , 则  $S_{n+1} = \frac{S_1(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)(n+2)$ , 故当  $n \geq 2$  且  $n \in \mathbf{N}^*$  时,  $S_n = n(n+1)$ , 且当  $n=1$  时,  $S_1=2$  满足  $S_n = n(n+1)$ , 所以对任意的  $n \in \mathbf{N}^*, S_n = n(n+1)$ , 故  $a_5 = S_5 - S_4 = 5 \times 6 - 4 \times 5 = 10$ . 故选 A.

**5. ACD 【解析】** 由  $a_{n+1} = 3S_n$  得, 当  $n \geq 2$  时,  $a_n = 3S_{n-1}$ , 两式相减得  $a_{n+1} - a_n = 3a_n$ , 即  $a_{n+1} = 4a_n$ , 又当  $n=1$  时,  $a_2 = 3S_1 = 3a_1 = 3$ , 所以  $a_n = \begin{cases} 1, n=1, \\ 3 \times 4^{n-2}, n \geq 2, \end{cases}$

所以 **B 错误, D 正确**;

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n = 1 + \frac{3(1-4^{n-1})}{1-4} = 4^{n-1},$$

当  $n=1$  时,  $S_1=1$ , 符合  $S_n = 4^{n-1}$ , 所以  $S_n = 4^{n-1}$ ,

当  $n \geq 2$  时,  $\frac{S_n}{S_{n-1}} = 4$ , 所以  $\{S_n\}$  为等比数列, **A, C 正确**. 故选 ACD.

**6. ACD 【解析】** 对于 A, 令  $n=1$  得,  $a_1 = \frac{a_1^2+1}{2a_1}$ , 解得  $a_1 = S_1 = 1$ , 故 **A 正确**;

对于 B 和 C, 当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , 所以  $S_n = \frac{(S_n - S_{n-1})^2 + 1}{2(S_n - S_{n-1})}$ , 化简得  $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$ , 所以  $\{S_n^2\}$  是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 所以  $S_n^2 = n$ . 又因为  $\{a_n\}$  是正项数列, 所以  $S_n = \sqrt{n}$ .

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , 所以  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ , 当  $n=1$  时,  $a_1=1$  也满足上式, 所以  $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ , 故 **B 错误, C 正确**; 对于 D, 因为  $0 < \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \leq 1 (n \in \mathbf{N}^*)$ , 故 **D 正确**, 故选 ACD.

**名师点拨** 在处理同时包含  $S_n$  和  $a_n$  的条件时, 基本的思路是消一个留一个, 而具体消谁留谁取决于条件的关系中谁好消, 消之后剩下的递推公式是否好研究.

本题的条件  $S_n = \frac{a_n^2+1}{2a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$ , 因为如果消  $S_n$ , 获得的  $a_n$  的递推式非常复杂, 不好研究, 所以消  $a_n$  留  $S_n$  是一个更好的选择.

**7. D 【解析】** 在数列  $\{a_n\}$  中, 由  $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$ , 得  $a_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3)$ , 而  $a_1 - 3 = 1$ , 因此数列  $\{a_n - 3\}$  是首项为 1, 公比为  $\frac{1}{3}$  的等比数列,  $a_n - 3 = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ , 即  $a_n = 3 + \frac{1}{3^{n-1}}$ , 所以  $a_{100} = \frac{3^{100}+1}{3^{99}}$ . 故选 D.

**归纳总结** 类型一: 形如  $a_{n+1} = pa_n + q$  ( $p \neq 1$  且  $q \neq 0$ ) 型的递推式. 数列  $\{a_n\}$  为线性递推数列, 其通项公式可通过待定系数法构造等比数列来求. 设  $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$ , 展开移项整理得  $a_{n+1} = pa_n + (p-1)\lambda$ , 与题设  $a_{n+1} = pa_n + q$  比较系数 (待定系数法) 得  $\lambda = \frac{q}{p-1} (p \neq 1, q \neq 0) \Rightarrow a_{n+1} + \frac{q}{p-1} =$

### 刷难关

**1. C 【解析】** 由题得  $a_{n+1} - a_n = 2n - 1$ , 则  $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = (2n-3) + (2n-5) + \cdots + 3 + 1 + 1 = \frac{(n-1)[(2n-3)+1]}{2} + 1 = n^2 - 2n + 2 (n \geq 2)$ , 所以  $a_7 = 7^2 - 2 \times 7 + 2 = 37$ .

**多种解法** 由题知  $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = 2n - 1$ , 所以  $a_7 = (a_7 - a_6) + (a_6 - a_5) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 + 1 = 37$ . 故选 C.

**归纳总结** 形如  $a_{n+1} = a_n + f(n)$  型的递推数列 (其中  $f(n)$  是关于  $n$  的函数) 可构造

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = f(n-1), \\ a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2), \\ \cdots \\ a_2 - a_1 = f(1), \end{cases}$$

将上述  $n-1$  个式子两边分别相加, 可得  $a_n = f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(2) + f(1) + a_1 (n \geq 2)$ .

(1) 若  $f(n)$  是关于  $n$  的一次函数, 累加后可转化为等差数列求和;  
(2) 若  $f(n)$  是关于  $n$  的指数函数, 累加后可转化为等比数列求和;  
(3) 若  $f(n)$  是关于  $n$  的二次函数, 累加后可分组求和;  
(4) 若  $f(n)$  是关于  $n$  的分式函数, 累加后可裂项求和.

**2. C 【解析】** 因为数列  $\{a_n\}$  的首项为 2, 且  $a_{n+1} - a_n = 2^n$ , 所以  $a_6 = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_6 - a_5) = 2 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^5 = 2 + \frac{2 \times (1-2^5)}{1-2} = 64$ . 故选 C.

**3. A 【解析】** 因为  $a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ ,  $a_1 = \frac{1}{2}$ , 所以  $a_n \neq 0$ , 所以当  $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$  时,  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n-2}{n}, \cdots, \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{4}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$ , 以上  $(n-1)$  个式子左右两边分别相乘得  $\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}$ , 即  $\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n} \times 2 \times 1$ , 所以  $a_n = \frac{1}{n(n+1)} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ . 当  $n=1$  时,  $a_1 = \frac{1}{2}$  满足上式, 所以  $a_n =$



$p\left(a_n + \frac{q}{p-1}\right) \Rightarrow a_n + \frac{q}{p-1} = p\left(a_{n-1} + \frac{q}{p-1}\right) (n \geq 2)$ , 即数列  $\left\{a_n + \frac{q}{p-1}\right\}$  构

成以  $a_1 + \frac{q}{p-1}$  为首项, 以  $p$  为公比的等比数列.

类型二: 形如  $a_{n+1} = pa_n + f(n) (p \neq 1)$  型的递推式. (1) 当  $f(n)$  为一次函数类型 (即等差数列) 时, 设  $a_n + An + B = p[a_{n-1} + A(n-1) + B]$ , 通过待定系数法确定  $A, B$  的值, 转化成以  $a_1 + A + B$  为首项, 以  $p$  为公比的等比数列  $\{a_n + An + B\}$ , 再利用等比数列的通项公式求出  $\{a_n + An + B\}$  的通项公式, 整理可得  $a_n$ .

(2) 当  $f(n)$  为指数函数类型 (即等比数列) 时, 设  $a_n + \lambda f(n) = p[a_{n-1} + \lambda f(n-1)]$ , 通过待定系数法确定  $\lambda$  的值, 转化成以  $a_1 + \lambda f(1)$  为首项, 以  $p$  为公比的等比数列  $\{a_n + \lambda f(n)\}$ , 再利用等比数列的通项公式求出  $\{a_n + \lambda f(n)\}$  的通项公式, 整理可得  $a_n$ .

8.  $\frac{3}{2^n - 1}$  【解析】因为  $a_{n+1} = \frac{3a_n}{a_n + 6}, a_1 = 3$ ,

所以  $a_n \neq 0, n \in \mathbf{N}^*$ , 所以  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{a_n + 6}{3a_n}$

$\frac{1}{3} + \frac{2}{a_n}$ , 所以  $\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{3} = 2\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}\right)$ . 又

因为  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq 0$ ,

所以  $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{3} \neq 0, n \in \mathbf{N}^*$ , 所以  $\frac{\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{3}}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}} =$

2, 所以数列  $\left\{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{3}\right\}$  是首项为  $\frac{2}{3}$ , 公

比为 2 的等比数列,

所以  $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot 2^{n-1} = \frac{2^n}{3}$ , 所以  $\frac{1}{a_n} =$

$\frac{2^n - 1}{3}$ , 故  $a_n = \frac{3}{2^n - 1}$ .

**归纳总结** 形如  $a_{n+1} - a_n = pa_{n-1}a_n (p$  为常数且  $p \neq 0, n \geq 2)$  的递推式, 两边同时除以  $a_{n-1}a_n$ , 转化为  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} +$

$p$  的形式, 求出  $\frac{1}{a_n}$  的表达式, 再求  $a_n$ ;

还有形如  $a_{n+1} = \frac{ma_n}{pa_n + q} (mpq \neq 0)$  的递推式, 也可采用取倒数的方法转化成  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{q}{m} + \frac{1}{a_n} + \frac{p}{m}$  的形式, 求出  $\frac{1}{a_n}$  的表达式, 再求  $a_n$ .

9.  $3^n - 2^n$  【解析】 $\because a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ , 两边

同时除以  $2^{n+1}$ , 得  $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{a_n}{2^n} + \frac{1}{2}$ ,

**点睛** 等式变形, 项与系数匹配, 构造等比数列

令  $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ , 则  $b_{n+1} = \frac{3}{2}b_n + \frac{1}{2}, \therefore b_{n+1} +$

$1 = \frac{3}{2}(b_n + 1), b_1 + 1 = \frac{a_1}{2^1} + 1 = \frac{3}{2}$ , 则

$\{b_n + 1\}$  是首项为  $\frac{3}{2}$ , 公比为  $\frac{3}{2}$  的等比

数列.  $\therefore b_n + 1 = \left(\frac{3}{2}\right)^n$ , 即  $\frac{a_n}{2^n} + 1 =$

$\left(\frac{3}{2}\right)^n$ , 则  $a_n = 3^n - 2^n$ .

**多种解法一**  $\because a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ , 两边

同时加上  $2^{n+1}$ , 则  $a_{n+1} + 2^{n+1} = 3a_n + 2^n +$

$2 \cdot 2^n = 3(a_n + 2^n)$ , 令  $b_n = a_n + 2^n$ , 则

$b_{n+1} = 3b_n, b_1 = a_1 + 2^1 = 3$ , 则  $\{b_n\}$  是首

项为 3, 公比为 3 的等比数列.  $\therefore b_n = 3^n$ , 则  $a_n = 3^n - 2^n$ .

**多种解法二**  $\because a_{n+1} = 3a_n + 2^n$ , 两边

同时除以  $3^{n+1}$ , 得  $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{2^n}{3^{n+1}} =$

$\frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ , 令  $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ , 则  $b_{n+1} -$

$b_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, b_1 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}$ ,

故当  $n \geq 2$  时,  $b_n - b_{n-1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ ,

$b_{n-1} - b_{n-2} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}, \dots, b_3 - b_2 =$

$\frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2, b_2 - b_1 = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^1$ , 累加

得  $b_n - b_1 = \frac{1}{3} \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{3} \right], \therefore b_n - b_1 = \frac{2}{3} -$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n, \therefore b_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n (n \geq 2)$ , 当

$n = 1$  时, 也符合此式, 则  $a_n = 3^n \cdot b_n = 3^n - 2^n$ .

10.  $10 - \frac{1}{2^{n-2}}$  【解析】对  $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \sqrt{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$  两边

**均思** 等式两边

侧次幂不同, 取对数消次幂

同时取常用对数可得  $\lg a_n - \lg a_{n-1} =$

$\frac{1}{2}(\lg a_{n-1} - \lg a_{n-2})$ . 令  $b_n = \lg a_{n+1} -$

$\lg a_n$ , 则  $b_1 = \lg a_2 - \lg a_1 = 1, b_{n-1} =$

$\frac{1}{2}b_{n-2} (n = 3, 4, 5, \dots)$ , 所以  $b_n =$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n = 1, 2, 3, \dots)$ , 所以  $\lg a_{n+1} -$

$\lg a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ , 故  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 10^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ .

由累乘法可得当  $n \geq 2$  时,  $\frac{a_n}{a_1} = 10 \times$

$10^{\frac{1}{2}} \times 10^{\frac{1}{4}} \times \dots \times 10^{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} = 10^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{1 - \frac{1}{2}}}$ ,

所以  $a_n = 10^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{1 - \frac{1}{2}}} (n \geq 2)$ , 又  $a_1 = 1$  也

符合此式, 所以  $a_n = 10^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{n-2}}}{1 - \frac{1}{2}}}$ .

**规律方法** 形如  $a_{n+1} = ca_n^k (k \neq 1, k \neq$

0) 的递推关系, 求其通项公式的方法

当  $a_n > 0, c > 0$  时, 对递推式两边取以

$t (t > 0$  且  $t \neq 1)$  为底的对数, 得

$\log_t a_{n+1} = k \log_t a_n + \log_t c$ , 视  $\log_t a_n$  为一

个整体, 即转化为  $\log_t a_{n+1} + \frac{\log_t c}{k-1} =$

$k \left( \log_t a_n + \frac{\log_t c}{k-1} \right)$  (当  $c \neq 1$  时, 可取

$t = c$  简化运算).

11. 210 【解析】因为  $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n + 2n +$

$2 = \frac{n+1}{n}a_n + 2(n+1)$ ,

所以  $\frac{a_{n+1}}{n+1} = \frac{a_n}{n} + 2$ , 即  $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 2$ ,

所以数列  $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$  是首项为 3, 公差为 2

的等差数列,

所以  $\frac{a_n}{n} = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$ ,

则  $a_n = 2n^2 + n$ , 则  $a_{10} = 2 \times 10^2 + 10 =$

210.

12. 6 【解析】因为  $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$ , 所以

$a_{n+1} + 1 = (a_n + 1)^2$ , 所以  $\ln(a_{n+1} + 1) =$

$2 \ln(a_n + 1)$ ,

又  $a_1 + 1 = 2$ , 所以  $\{\ln(a_n + 1)\}$  是以

$\ln 2$  为首项, 2 为公比的等比数列.

所以  $\ln(a_n + 1) = 2^{n-1} \ln 2$ , 所以  $a_n =$

$2^{2^{n-1}} - 1$ , 则  $\sqrt{a_n + 1} = \sqrt{2^{2^{n-1}}} > 2.025$ ,

则  $n$  最小正整数值为 6.

13. 【解】因为  $a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1} + 8$ , 所以

$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 8$ ,

所以数列  $\{a_{n+1} - a_n\}$  是公差为 8 的等

差数列, 其首项为  $a_2 - a_1 = 8$ ,

于是  $a_{n+1} - a_n = 8n$ ,

则当  $n \geq 2$  时,  $a_n - a_{n-1} = 8(n-1)$ ,

$a_{n-1} - a_{n-2} = 8(n-2), \dots, a_3 - a_2 = 8 \times 2,$

$a_2 - a_1 = 8$ ,

所以  $a_n - a_1 = 8(1 + 2 + \dots + n - 1) = 8 \times$

$\frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = 4n^2 - 4n$ ,

所以  $a_n = 4n^2 - 4n + 1 (n \geq 2)$ . 而  $a_1 = 1$

符合该式, 故  $a_n = 4n^2 - 4n + 1$ .

## 专题 2 数列求和

### 刷难关

1. D 【解析】 $\because a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8 = 12$ ,

$\therefore a_8 = 4$ . 又  $a_3 = 1, \therefore a_3 + a_8 = 5, \therefore S_{10} =$

$\frac{10(a_1 + a_{10})}{2} = \frac{10(a_3 + a_8)}{2} = 25$ . 故选 D.

**多种解法** 设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ,

$\because a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8 = 12$ ,

$\therefore a_8 = 4$ . 又  $a_3 = 1, \therefore d = \frac{a_8 - a_3}{5} = \frac{3}{5}$ ,

则  $a_1 = a_3 - 2d = 1 - 2 \times \frac{3}{5} = -\frac{1}{5}$ ,

$\therefore S_{10} = 10a_1 + \frac{10 \times 9}{2}d = 25$ . 故选 D.

2. C 【解析】由  $a_1 = 1, a_2 = 2$  可知  $\{a_n\}$

的公比  $q = 2$ , 所以  $a_n = a_1 q^{n-1} = 2^{n-1}$ , 所

以  $a_{n+1} = 2^n$ , 所以  $a_n a_{n+1} = 2^{n-1} \cdot 2^n =$

$2^{2n-1} = \frac{1}{2} \times (2^2)^n = \frac{1}{2} \times 4^n$ . 又  $a_1 a_2 = 2$ ,

所以  $\{a_n a_{n+1}\}$  是首项为 2, 公比为 4 的

等比数列, 所以其前  $n$  项和为

$\frac{2(1-4^n)}{1-4} = \frac{2}{3}(4^n - 1)$ . 故选 C.



**归纳总结** 公式法是数列求和最基本的方法,可直接利用等差数列的前  $n$  项和公式  $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ , 等比数列的前  $n$  项和公式

$$S_n = \begin{cases} na_1, q=1, \\ \frac{a_1-a_n q}{1-q} = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, q \neq 1 \end{cases} \text{求和.}$$

3. C 【解析】因为等差数列  $\{a_n\}$  满足  $a_{1013} = \frac{1}{2}$ , 所以对于  $p, q \in \mathbb{N}^*$ , 当  $p+q=2 \times 1013$  时,  $a_p + a_q = 2a_{1013} = 1$ ,

$$\text{则 } \frac{1}{4^{a_p+2}} + \frac{1}{4^{a_q+2}} = \frac{4^{a_p+q+4}}{4^{a_p+2} \cdot 4^{a_q+2}} = \frac{4^{a_p+a_q+4}}{4^{a_p+2} \cdot 4^{a_q+2}} = \frac{4^{2 \times 1013+4}}{4^{a_p+2} \cdot 4^{a_q+2}} = \frac{1}{2},$$

$$\text{设 } S_{2025} = \frac{1}{4^{a_1+2}} + \frac{1}{4^{a_2+2}} + \cdots + \frac{1}{4^{a_{2025}+2}}, \text{ 则}$$

$$S_{2025} = \frac{1}{4^{a_1+2}} + \frac{1}{4^{a_2+2}} + \cdots + \frac{1}{4^{a_1+2}},$$

两式相加可得  $2S_{2025} = 2025 \times \frac{1}{2}$ , 解得

$$S_{2025} = \frac{2025}{4}. \text{ 故选 C.}$$

**规律方法** 如果一个数列的前  $n$  项中,距首末两项“等距离”的两项之和都相等,那么可使用倒序相加法求数列的前  $n$  项和.

4.  $\frac{89}{2}$  【解析】 $\cos^2 n^\circ = \sin^2(90^\circ - n^\circ)$ ,  
 $S_{89} = \cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cdots + \cos^2 89^\circ$ ,  
 $S_{89} = \cos^2 89^\circ + \cos^2 88^\circ + \cos^2 87^\circ + \cdots + \cos^2 1^\circ$ .  
 $\therefore \cos^2 89^\circ = \sin^2 1^\circ, \cos^2 88^\circ = \sin^2 2^\circ$ ,  
 $\cos^2 87^\circ = \sin^2 3^\circ, \dots, \cos^2 1^\circ = \sin^2 89^\circ$ ,  
 $\therefore 2S_{89} = (\cos^2 1^\circ + \cos^2 89^\circ) + (\cos^2 2^\circ + \cos^2 88^\circ) + \cdots + (\cos^2 89^\circ + \cos^2 1^\circ)$   
 $= (\cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ) + (\cos^2 2^\circ + \sin^2 2^\circ) + \cdots + (\cos^2 89^\circ + \sin^2 89^\circ) = 1 \times 89 = 89, \therefore S_{89} = \frac{89}{2}.$

5. D 【解析】因为  $a_n = (-1)^n(3n-1)$ , 所以  $S_{20} = (-2) + 5 + (-8) + 11 + \cdots + (-56) + 59 = (-2+5) + (-8+11) + \cdots + (-56+59) = 3 \times 10 = 30$ ,  
 $S_{21} = S_{20} + a_{21} = 30 - 62 = -32$ ,

**避坑:** 运用并项求和法时注意项数与余项

所以  $S_{20} + S_{21} = -2$ . 故选 D.

6. D 【解析】在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 3, a_2 = 6, a_{2n+1} = a_{2n} - 2 = 2a_{2n-1} - 2$ , 则  $a_{2n+1} - 2 = 2(a_{2n-1} - 2)$ , 则数列  $\{a_{2n-1} - 2\}$  是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 于是  $a_{2n-1} - 2 = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$ , 则  $a_{2n-1} = 2^{n-1} + 2, a_{2n-1} + a_{2n} = 3a_{2n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} + 6$ , 则  $S_{20} = 3 \times \frac{1-2^{10}}{1-2} + 60 = 3129$ . 故选 D.

7. B 【解析】 $a_n = n^2 \sin \frac{(2n-1)\pi}{2} = n^2 \sin \left( n\pi - \frac{\pi}{2} \right) = -n^2 \cos(n\pi) = \begin{cases} -n^2, n \text{ 为偶数}, \\ n^2, n \text{ 为奇数}, \end{cases} \therefore S_{99} = 1^2 - 2^2 + 3^2 - \cdots - 98^2 + 99^2 = 1 + (3+2) \times (3-2) + (5+4) \times (5-4) + \cdots + (99+98) \times (99-98) = 1+2+3+\cdots+99=4950$ . 故选 B.

4<sup>2</sup>+...+99<sup>2</sup>=1+(3+2)×(3-2)+(5+4)×(5-4)+...+(99+98)×(99-98)=1+2+3+...+99=4 950. 故选 B.

**规律方法** 若数列中相邻两项或几项的和是同一常数或有规律可循(如构成某个特殊数列),采用并项求和法进行数列求和比较简便.

8.  $2^{n+1} - \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}$  【解析】由  $(2-a_{n+1}) \cdot (4+a_n) = 8$ , 可得  $2a_n - 4a_{n+1} = a_n a_{n+1}$ , 所以  $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} + \frac{1}{2}$ , 即  $\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{2} = 2\left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}\right)$ ,

令  $b_n = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2}$ , 得  $b_{n+1} = 2b_n$ , 即  $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2$ ,

因为  $b_0 = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{2} = 1$ , 所以  $b_n = 2^n$ , 即

$$\frac{1}{a_n} = 2^n - \frac{1}{2},$$

所以  $\sum_{i=0}^n \frac{1}{a_i} = (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n) - \frac{1}{2}(n+1) = \frac{1 \times (1-2^{n+1})}{1-2} - \frac{1}{2}(n+1) = 2^{n+1} - \frac{1}{2}n - \frac{3}{2}.$

9. (1) 【解】设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则  $a_1 + d + a_1 + 3d = 10$ , 又  $a_1 = 1$ , 解得  $d = 2$ . 则  $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$ , 故所求通项公式为  $a_n = 2n-1$ .

(2) 【证明】由于  $b_1 + 1 = 2 \neq 0, b_{n+1} + 1 = 2b_n + 1 + 1 = 2(b_n + 1)$ , 故  $\{b_n + 1\}$  是首项为 2, 公比为 2 的等比数列.

(3) 【解】由 (2) 知,  $\{b_n + 1\}$  是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 从而  $b_n + 1 = 2^n, c_n = 2^n + \log_2(b_n + 1) = 2^{2n-1} + \log_2 2^n = 2^{2n-1} + n$ , 分别使用等比数列和等差数列的求和公式, 可得

$$S_n = \frac{2(1-4^n)}{1-4} + \frac{n(1+n)}{2} = \frac{2^{2n+1}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{n(1+n)}{2}.$$

$$\text{所以 } S_n = \frac{2^{2n+1}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{n(1+n)}{2}.$$

**规律方法** 一个数列的通项公式是由若干个等差数列或等比数列或可求和的数列组成的, 则求和时可以用分组求和法, 分别求和后相加.

10. A 【解析】因为  $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots +$

$$\frac{1}{n}a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 6(n \in \mathbb{N}^*) \quad ①,$$

所以当  $n=1$  时,  $a_1 = 2 \times 3^2 - 6 = 12$ ,

所以当  $n \geq 2$  时,  $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{3}a_3 + \cdots +$

$$\frac{1}{n-1}a_{n-1} = 2 \cdot 3^n - 6 \quad ②,$$

①-②得  $\frac{1}{n}a_n = 2 \cdot 3^{n+1} - 6 - (2 \cdot 3^n - 6) = 4 \cdot 3^n$ , 所以  $a_n = 4n \cdot 3^n$ ,

当  $n=1$  时,  $a_1 = 12$  也满足上式, 所以  $a_n = 4n \cdot 3^n$ .

所以  $b_n = \frac{4n \cdot 3^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{3^{n+1}}{2n+3} \cdot \frac{3^n}{2n+1}$ , 记数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,

$$\text{则 } S_{15} = \left(\frac{3^2}{5} \cdot \frac{3}{3}\right) + \left(\frac{3^3}{7} \cdot \frac{3^2}{5}\right) + \left(\frac{3^4}{9} \cdot \frac{3^3}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{3^{16}}{33} \cdot \frac{3^{15}}{31}\right) = \frac{3^{16}}{33} - 1 = \frac{3^{15}}{11} - 1. \text{ 故选 A.}$$

**规律方法** 若数列的通项公式可拆成结构相同的两式之差, 则数列的前  $n$  项和可用裂项相消法求解. 使用此方法时必须注意消去了哪些项, 保留了哪些项, 一般未被消去的项有前后对称的特点, 必要时可以多写出前后几项, 观察哪些项消去了, 哪些项保留了, 避免出错.

11. A 【解析】设正项等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 且  $d \neq 0$ ,  $\therefore a_1, a_2, a_4$  成等比数列,  $\therefore a_2^2 = a_1 a_4$ , 即  $(a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 3d)$ , 整理得  $d^2 = a_1 d$ . 又  $d \neq 0$ ,  $\therefore d = a_1$ .

$$\therefore \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \quad \text{点悟: 分母含根号时, 优先考虑分母有理化}$$

$$= \sum_{k=1}^{24} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{(\sqrt{a_{k+1}} + \sqrt{a_k})(\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})}$$

$$= \sum_{k=1}^{24} \frac{\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k}}{a_{k+1} - a_k} = \sum_{k=1}^{24} \frac{1}{d} (\sqrt{a_{k+1}} - \sqrt{a_k})$$

$$= \frac{1}{d} (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1} + \sqrt{a_3} - \sqrt{a_2} + \cdots +$$

$$\sqrt{a_{25}} - \sqrt{a_{24}})$$

$$= \frac{1}{d} (\sqrt{a_{25}} - \sqrt{a_1})$$

$$= \frac{1}{d} (\sqrt{a_1 + 24d} - \sqrt{a_1}) = 3,$$

$$\therefore \frac{1}{a_1} (5\sqrt{a_1} - \sqrt{a_1}) = 3, \text{ 即 } 4\sqrt{a_1} = 3a_1.$$

$$\text{又 } a_1 > 0, \therefore a_1 = \frac{16}{9}. \text{ 故选 A.}$$

12. 【解】(1) 因为  $\{a_n\}$  是等差数列,  $\{b_n\}$  是等比数列, 所以可设  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ ,  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ , 由已知条件可得  $b_1 = a_2 = a_1 + d = 1 + d$ ,  $a_4 = b_2 \Rightarrow b_1 q = 1 + 3d, 2a_5 = b_3 + 2 \Rightarrow 2 + 8d = b_1 q^2 + 2$ ,

$$\text{则有 } \begin{cases} b_1 = 1 + d, \\ b_1 q = 1 + 3d, \\ b_1 q^2 = 8d, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} d = 1, \\ q = 2, \end{cases} \text{ 故 } a_n = \begin{cases} b_1 = 2, \\ b_1 q^{n-1} = 2^n. \end{cases}$$

$$a_1 + (n-1)d = n, b_n = b_1 q^{n-1} = 2^n.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 可知 } c_n = \frac{\log_2 b_n^2 + 1}{a_n^2 a_{n+1}^2} = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2},$$

$$\text{则 } S_n = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

$$\text{因为 } n \in \mathbb{N}^*, \text{ 所以 } \frac{1}{(n+1)^2} > 0, \text{ 故 } S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1.$$

$$\text{又由 } S_n - S_{n-1} = c_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} > 0, \text{ 得}$$

$$S_n > S_{n-1}, \text{ 即数列 } \{S_n\} \text{ 单调递增, 故}$$

$$S_n \geq S_1 = \frac{3}{4}, \text{ 综上可得 } \frac{3}{4} \leq S_n < 1.$$

13. BC 【解析】因为  $a_{n+1} - 2a_n = 2^{n+1}$ , 所以  $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = 1$ , 则  $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$  是公差为 1, 首项为  $\frac{a_1}{2} = 1$  的等差数列,

所以  $\frac{a_n}{2^n} = 1 + (n-1) = n$ , 则  $a_n = n \cdot 2^n$ .

对 A:  $na_n = n^2 \cdot 2^n$ , 因为  $\frac{(n+1)a_{n+1}}{na_n} = \frac{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}}{n^2 \cdot 2^n} = \frac{2(n+1)^2}{n^2}$  不是非零常数, 所以  $\{na_n\}$  不是等比数列, 故 A 错误;

对 B:  $\frac{a_n}{n} = 2^n$ , 因为  $\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$ , 所以  $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$  是以  $\frac{a_1}{1} = 2$  为首项, 以 2 为公比的等比数列, 故 B 正确;

对 C:  $a_n = n \cdot 2^n$ , 故 C 正确;

对 D: 因为  $a_n = n \cdot 2^n$ , 所以  $S_n = 2^1 + 2 \times 2^2 + \dots + n \cdot 2^n$ , 所以  $2S_n = 2^2 + 2 \times 2^3 + \dots + n \cdot 2^{n+1}$ , 两式相减得  $S_n = n \cdot 2^{n+1} - (2 + 2^2 + \dots + 2^n) = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$ , 故 D 错误. 故选 BC.

**规律方法** 如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的, 那么这个数列的前  $n$  项和可用错位相减法求解.

14. (1) 【解】设等差数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 则由题可知  $\begin{cases} (1+d) \cdot q = 6, \\ (1+2d) \cdot q^2 = 27, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} d=1, \\ q=3 \end{cases}$  或  $\begin{cases} d=-\frac{1}{3}, \\ q=9 \end{cases}$  (舍去),  $\therefore a_n = n, b_n = 3^{n-1}$ .

(2) 【证明】由 (1) 得  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{3^{n-1}}$ ,

$\therefore T_n = 1 \times \frac{1}{3^0} + 2 \times \frac{1}{3^1} + 3 \times \frac{1}{3^2} + \dots + (n-1) \times \frac{1}{3^{n-2}} + n \times \frac{1}{3^{n-1}}$ , ①

$\frac{1}{3} T_n = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3^2} + 3 \times \frac{1}{3^3} + \dots + (n-1) \times \frac{1}{3^{n-1}} + n \times \frac{1}{3^n}$ , ②

①-②得,  $\frac{2}{3} T_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} -$

$\frac{n}{3^n} = \frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{n}{3^n} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) - \frac{n}{3^n}$ ,

$\therefore T_n = \frac{9}{4} - \left(\frac{9}{4} + \frac{3}{2}n\right) \times \frac{1}{3^n}, n \in \mathbf{N}^*$ ,  
 $\therefore T_n < \frac{9}{4}$ .

15. A 【解析】将数列分组: 第一组有一项, 是  $2^0$ , 和为  $2^0$ ; 第二组有两项是  $2^0, 2^1$ , 其和为  $2^0 + 2^1$ , 依此类推, 第  $n$  组有  $n$  项, 是  $2^0, 2^1, \dots, 2^{n-1}$ , 其和为  $2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$ , 则前 63 组共有  $\frac{63 \times (1+63)}{2} = 2016$  (项),  $\therefore S_{2016} = (2^1-1) + (2^2-1) + \dots + (2^{63}-1) + 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} - 63 + \frac{1-2^{64}}{1-2} - 63 + 63 = 2^{64} - 2$ , 故选 A.

16.  $\frac{8(10^{n+1}-9n-10)}{81} (n \in \mathbf{N}^*)$  【解析】

记  $8, 88, 888, \dots, \underbrace{8 \dots 8}_{n \text{ 个 } 8}$  为数列  $\{a_n\}$ ,

其前  $n$  项和为  $S_n$ ,

因为  $a_1 = 8 = \frac{8}{9} \times (10-1)$ ,

$a_2 = 88 = \frac{8}{9} \times (10^2-1)$ ,

$a_3 = 888 = \frac{8}{9} \times (10^3-1)$ ,

$a_4 = 8888 = \frac{8}{9} \times (10^4-1)$ ,

.....

所以该数列的一个通项公式为  $a_n = \frac{8}{9} \times (10^n-1) (n \in \mathbf{N}^*)$ ,

所以  $S_n = \frac{8}{9} \times [(10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + \dots + (10^n-1)]$

$= \frac{8}{9} \times (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n)$

$= \frac{8}{9} \left[ \frac{10(1-10^n)}{1-10} - n \right]$

$= \frac{8(10^{n+1}-9n-10)}{81} (n \in \mathbf{N}^*)$ .

17. AC 【解析】因为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n = -n^2 + 31n$ ,

所以  $a_1 = S_1 = -1 + 31 = 30$ ,

$a_n = S_n - S_{n-1} = -n^2 + 31n + (n-1)^2 - 31(n-1) = -2n + 32 (n \geq 2)$ ,

当  $n=1$  时上式也成立, 所以  $a_n = 32 - 2n$ , 故 A 正确;

由 A 知  $a_n = 32 - 2n$ , 当  $n < 16$  时,  $a_n > 0$ , 当  $n=16$  时,  $a_n = 0$ , 当  $n > 16$  时,  $a_n < 0$ ,

所以  $S_n$  取得最大值时,  $n=15$  或  $n=16$ , 故 B 错误;

因为当  $n \leq 16$  时,  $a_n \geq 0$ ,

所以  $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{16}| = a_1 + a_2 + \dots +$

**敲黑板:** 看到绝对值号时, 一般先判断数列中项的正负

$a_{16} = S_{16} = -16^2 + 31 \times 16 = 15 \times 16 = 240$ , 故 C 正确;

因为  $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{30}| = S_{16} + (-a_{17} - a_{18} - \dots - a_{30}) = 2S_{16} - S_{30} = 2 \times 240 - (-30^2 + 31 \times 30) = 450$ , 故 D 错误. 故选 AC.

18. (1) 【解】设数列  $\{a_n\}$  的公差为  $d$ , 数列  $\{b_n\}$  的公比为  $q$ ,

$\therefore a_4 = 7, a_1 = 1, \therefore 3d = a_4 - a_1 = 6$ ,

$\therefore d = 2, \therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$ .

$\therefore a_1 + b_3 = a_2^2, a_2 b_3 = 4a_3 + b_2 (n \in \mathbf{N}^*)$ ,

$\therefore b_3 = 8, b_2 = 4, \therefore q = \frac{b_3}{b_2} = 2$ ,

$\therefore b_n = b_2 q^{n-2} = 2^n$ .

(2) 由 (1) 得  $a_n = 2n-1, b_n = 2^n$ ,

$\therefore C_n = \begin{cases} k-1, n=2^{k-1}, \\ C_{n-1}+2, 2^{k-1} < n < 2^k, \end{cases}$

①【证明】由题知  $C_{2^{k-1}}, C_{2^{k-1}+1}, C_{2^{k-1}+2}, \dots, C_{2^k-1}$  是以  $C_{2^{k-1}}$  为首项, 2 为公差的等差数列,

$\therefore C_{2^k-1} = (k-1) + 2(2^k-1-2^{k-1}) = (k-1) + 2(2^{k-1}-1)$ , 当  $n = b_{k+1}-1$ , 即  $n = 2^{k+1}-1$  时,  $C_n = C_{2^{k+1}-1} = k+2(2^k-1)$ ,

要证  $C_{2^{k+1}-1} \geq 2^{k+1}$ , 即证  $k+2(2^k-1) \geq 2^{k+1}$ , 又  $k+2(2^k-1) - 2^{k+1} = k-2 \geq 0$ , 则当  $k \geq 2, n = b_{k+1}-1$  时,  $C_n \geq b_{k+1}$ .

②【解】由 ① 知,  $C_{2^{n-1}} = (n-1) + 2(2^{n-1}-1) = 2^n + n - 3$ ,

$\therefore C_{2^n} + C_{2^{n+1}} + \dots + C_{2^{n+1}-1} = n + (n+2) + \dots + (2^{n+1} + n - 2) = \frac{(2^{n+1}-1-2^n+1) \cdot [n+(2^{n+1}+n-2)]}{2}$

$= \frac{2^n(2^n+n-1) + 4^n(n-1)}{2}$ ,

$\therefore \sum_{i=1}^{2^{n+1}} C_i = C_1 + \sum_{i=1}^n 4^i + \sum_{i=1}^n 2^i(i-1) + C_{2^{n+1}} = 1 + (n+1) + \sum_{i=1}^n 4^i + \sum_{i=1}^n 2^i(i-1)$ ,

又  $\sum_{i=1}^n 4^i = \frac{4(1-4^{n+1})}{1-4} = \frac{4^{n+1}-4}{3}$ ,

$\therefore 2^n(n-1) = -[(n-3) \cdot 2^n - (n-2) \cdot 2^{n+1}]$ ,

$\therefore \sum_{i=1}^n 2^i(i-1) = -\sum_{i=1}^n [(i-3) \cdot 2^i - (i-2) \cdot 2^{i+1}] = 4 + (n-2) \cdot 2^{n+1}$ ,

$\therefore \sum_{i=1}^{2^{n+1}} C_i = 1 + (n+1) + \frac{4^{n+1}-4}{3} + 4 + (n-2) \cdot 2^{n+1} = (n-2) \cdot 2^{n+1} + \frac{4^{n+1}}{3} + n + \frac{14}{3}$ .

故选 BC.

2. ABD 【解析】对于 A, 由题意可知  $AE = BF = EF \sin 15^\circ, BE = AH = EF \cos 15^\circ$ ,

则  $\frac{EF}{AB} = \frac{EF}{EF \sin 15^\circ + EF \cos 15^\circ} = \frac{1}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}$ ,

而  $\sin 15^\circ = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ$ .

### 专题 3 数列的综合应用

错误, C 正确.

对于 B, 当  $n=15$  时,  $8n^2+2n=1830$ ;

当  $n=16$  时,  $8n^2+2n=2080$ , 故 2 024 在第 16 轮报数中,  $2024 > 2080 - 4 \times 16 = 2016$ , 故数字 2 024 是丁报的, B 正确.

对于 D, 甲在前四轮所报数字之和为  $1 + (11 + \dots + 15) + (37 + \dots + 45) + (79 + \dots + 91) = 1540 < 1600$ , D 错误.

### 刷难关

1. BC 【解析】记甲、乙、丙、丁第  $n$  轮的报数个数分别为  $4n-3, 4n-2, 4n-1, 4n$ , 前  $n$  轮总的报数个数为  $1+2+\dots+4n = 2n(4n+1) = 8n^2+2n$ .

当  $n=35$  时,  $8n^2+2n=9870 < 10000$ ;

当  $n=36$  时,  $8n^2+2n=10440 > 10000$ , 且  $9870 + (4 \times 36 - 3) = 10011$ , 故 10000 是甲报的, 且甲报了 36 轮, A



$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \text{ 则 } \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{所以 } a_2 = EF = \frac{\sqrt{6}}{3} AB = \sqrt{6}, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{对于 B, 由上可知 } AE = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}, AH = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \frac{3+\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{所以 } S_1 = \frac{1}{2} AE \cdot AH = \frac{1}{2} \times \frac{3-\sqrt{3}}{2} \times \frac{3+\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}, \text{ 故 B 正确;}$$

对于 C, 易知  $\triangle MNF \sim \triangle EFB$ , 此后对应三角形均相似, 而相似比  $\frac{MN}{EF} =$

$$\frac{MN}{MN \sin 15^\circ + MN \cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{3}, \text{ 即 } \{a_n\} \text{ 是}$$

首项为 3, 公比为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  的等比数列,  $\{S_n\}$

是首项为  $\frac{3}{4}$ , 公比为  $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$  的等比

**点悟:** 边长的公比为  $\frac{\sqrt{6}}{3}$ , 故对应比例变化的三角形面积的公比为  $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$

数列, 故 C 错误;

对于 D, 由上可得  $a_n = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{n-1}$ , 则

$$a_n^2 = 9 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^{2n-2} = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \text{ 则}$$

$$T_n = \frac{9 \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1 - \frac{2}{3}} = 27 - 27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

显然  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^n$  单调递减, 又  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

所以  $0 < \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{2}{3}$  恒成立, 所以  $T_n$

满足  $9 \leq T_n < 27$ , 故 D 正确. 故选 ABD.

**3. BC** 【解析】由题可知  $n=1, \varphi(1) = \frac{1}{3}; n=2, \varphi(2) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3};$

$$n=3, \varphi(3) = 2^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3};$$

$$n=4, \varphi(4) = 2^3 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3},$$

由此可知  $\varphi(n) = 2^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ .

$$\text{对于 A, } \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{2}{3} \neq$$

$\frac{3}{2}$ , A 错误;

对于 B,  $\ln[\varphi(n)] + 1 = \ln\left[\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + 1 = n \ln \frac{2}{3} - \ln 2 + 1$ , 因

为  $\ln \frac{2}{3} < 0$ , 所以数列  $\left\{n \ln \frac{2}{3} - \ln 2 + 1\right\}$

为递减数列,

又因为当  $n=1$  时,  $\ln \frac{2}{3} - \ln 2 + 1 =$

$-\ln 3 + 1 < 0$ , 所以  $\ln[\varphi(n)] + 1 < 0$  恒成立, B 正确;

对于 C,  $\varphi(n) + \varphi(3n) > 2\varphi(2n)$ , 即

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{3n} > 2 \times \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{2n},$$

两边约去  $\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n$  得到  $1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} >$

$$2 \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

当  $n=1$  时,  $1 + \frac{4}{9} = \frac{13}{9} > \frac{4}{3}$ , 原式成立;

当  $n \geq 2$  时,  $1 > 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$  恒成立, 所以

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} > 2 \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ 恒成立, 即 } \varphi(n) +$$

$\varphi(3n) > 2\varphi(2n)$  恒成立, C 正确;

对于 D, 令  $k(n) = n^2 \varphi(n)$ , 则  $k(n+1) -$

**点悟:** 不等式左、右形式相同时, 可设函数, 利用函数单调性来验证不等式

$$k(n) = (n+1)^2 \varphi(n+1) - n^2 \varphi(n) = (n+1)^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - n^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n =$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \left[ \frac{2}{3} (n+1)^2 - n^2 \right] = \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot$$

$$(-n^2 + 4n + 2),$$

令  $-n^2 + 4n + 2 = 0$ , 解得  $n_1 = 2 + \sqrt{6}, n_2 = 2 - \sqrt{6}$  (舍), 因为  $n \in \mathbf{N}^*$ , 所以当  $n \leq 4$

时,  $k(n+1) - k(n) > 0$ ; 当  $n \geq 5$  时,  $k(n+1) - k(n) < 0$ ,

故  $k(5)$  为最大值,  $k(8) = 8^2 \varphi(8) = 64 \varphi(8)$ , 根据单调性可得  $k(5) >$

$k(8)$ , 即  $n^2 \varphi(n) \leq 64 \varphi(8)$  不恒成立, D 错误. 故选 BC.

**4. B** 【解析】由  $a_n + S_n = 1\,000$  ①, 可得

当  $n=1$  时,  $a_1 + S_1 = 1\,000$ , 即  $a_1 = 500$ ;

当  $n \geq 2$  时,  $a_{n-1} + S_{n-1} = 1\,000$  ②, 由 ① -

②得  $a_n - a_{n-1} + a_n = 0$ , 即  $a_n = \frac{1}{2} a_{n-1}$ ,

故数列  $\{a_n\}$  是首项为 500, 公比为  $\frac{1}{2}$

的等比数列, 故  $a_n = 500 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ .

$$\text{则 } T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 500^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1+2+\dots+n-1} = 500^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$\text{由 } \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{500^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)n}{2}}}{500^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}} = 500 \times$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ 因为 } n \in \mathbf{N}^*, \text{ 所以当 } 1 \leq n \leq 8$$

时,  $T_{n+1} > T_n$ , 当  $n \geq 9$  时,  $T_{n+1} < T_n$ ,

故使  $T_n$  取得最大值时  $n$  的值为 9. 故选 B.

**5. C** 【解析】在数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1$ ,

$a_{n+1} = S_n + n$ , 当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_{n-1} + n - 1$ ,

两式相减得  $a_{n+1} - a_n = a_n + 1$ , 即  $a_{n+1} = 2a_n + 1$ , 整理得  $a_{n+1} + 1 = 2(a_n + 1)$ , 而  $a_2 = S_1 + 1 = a_1 + 1 = 2$ ,

因此数列  $\{a_n + 1\}$  ( $n \geq 2$ ) 是首项为 3, 公比为 2 的等比数列,  $a_n + 1 = 3 \times 2^{n-2}$ ,  $a_1 = 1$  不满足上式,

$$\text{则 } b_1 = \frac{1}{a_1 + 1} = \frac{1}{2}, \text{ 当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = \frac{1}{3} \times$$

$$\frac{1}{2^{n-2}}, T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \times$$

$$\frac{1}{2^{n-2}} < \frac{7}{6}.$$

$$\text{又 } T_1 = b_1 = \frac{1}{2} < \frac{7}{6}, \text{ 依题意, } M \geq \frac{7}{6}, \text{ 所}$$

以实数  $M$  的最小值为  $\frac{7}{6}$ . 故选 C.

**6.  $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{9}\right)$**  【解析】由  $3a_{n+1} + a_n =$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^n, \text{ 得 } 3^{n+1} a_{n+1} + 3^n a_n = (-1)^n,$$

若  $n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} 3^{n+1} a_{n+1} + 3^n a_n = -1, \\ 3^{n+2} a_{n+2} + 3^{n+1} a_{n+1} = 1, \end{cases}$$

故  $3^{n+2} a_{n+2} - 3^n a_n = 2$ ,

若  $n = 2k, k \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} 3^{n+1} a_{n+1} + 3^n a_n = 1, \\ 3^{n+2} a_{n+2} + 3^{n+1} a_{n+1} = -1, \end{cases}$$

故  $3^{n+2} a_{n+2} - 3^n a_n = -2$ ,

所以  $\{3^n a_n\}$  的奇数项是以 2 为公差的等差数列, 偶数项是以 -2 为公差的等差数列,

由  $a_1 = 1, 3a_2 + a_1 = -\frac{1}{3} \Rightarrow a_2 = -\frac{4}{9}$ , 故

$$3a_1 = 3, 3^2 a_2 = -4, \text{ 所以 } 3^n a_n =$$

$$\begin{cases} 3 + 2 \times \frac{n-1}{2} = n+2, n=2k-1, \\ -4 + (-2) \times \frac{n-2}{2} = -(n+2), n=2k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{即 } a_n = \begin{cases} \frac{n+2}{3^n}, n=2k-1, \\ \frac{n+2}{3^n}, n=2k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{N}^*,$$

若  $n = 2k - 1, k \in \mathbf{N}^*$ , 则  $\left(\frac{n+2}{3^n} + t + \frac{n}{3^n}\right) \cdot$

$$\left(-\frac{n+3}{3^{n+1}} + t + \frac{n+1}{3^{n+1}}\right) = \left(t + \frac{2}{3^n}\right) \left(t - \frac{2}{3^{n+1}}\right) < 0$$

能成立,

所以  $-\frac{2}{3^n} < t < \frac{2}{3^{n+1}}$ , 根据不等式能成立

有  $-\frac{2}{3} < t < \frac{2}{9}$ ;

若  $n = 2k, k \in \mathbf{N}^*$ , 则  $\left(\frac{n+2}{3^n} + t + \frac{n}{3^n}\right) \cdot$

$$\left(\frac{n+3}{3^{n+1}} + t + \frac{n+1}{3^{n+1}}\right) = \left(t - \frac{2}{3^n}\right) \left(t + \frac{2}{3^{n+1}}\right) < 0$$

能成立,

所以  $-\frac{2}{3^{n+1}} < t < \frac{2}{3^n}$ , 根据不等式能成立

有  $-\frac{2}{27} < t < \frac{2}{9}$ . 综上, 实数  $t$  的取值范

围是  $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{9}\right)$ .

**7. 【解】**(1) 在数列  $\{a_n\}$  中,  $n \in \mathbf{N}^*, S_n =$

$2a_n - 2$ , 当  $n \geq 2$  时,  $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2$ ,

两式相减得  $a_n = 2a_{n-1}$ , 而  $a_1 = S_1 = 2a_1 - 2$ , 解得  $a_1 = 2$ ,

因此数列  $\{a_n\}$  是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以  $a_n = 2^n$ .

(2) 由(1)可得  $b_n = a_n \cdot \log_{\frac{1}{2}} a_n = -n \cdot 2^n$ , 则  $T_n = -1 \times 2 - 2 \times 2^2 - 3 \times 2^3 - \dots - (n-1) \times 2^{n-1} - n \times 2^n$ , 于是得  $2T_n = -1 \times 2^2 - 2 \times 2^3 - \dots - (n-1) \times 2^n - n \times 2^{n+1}$ , 两式相减得  $T_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1} + 2^n - n \cdot 2^{n+1} = \frac{2(1-2^{n+1})}{1-2} - n \cdot 2^{n+1} = (1-n) \cdot 2^{n+1} - 2$ , 因此  $T_n + n \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 > 50$ , 即  $2^{n+1} > 52$ , 解得  $n \geq 5$ , 所以正整数  $n$  的最小值为 5.

8. 【解】(1) 由条件可知,  $a_2 = 3a_1 + 1 = 7$ , 当  $n$  为偶数时,  $a_{n+1} = 2a_{n-1}$ , 所以数列  $\{a_n\}$  的奇数项是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以  $a_{2n-1} = a_1 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ , 所以当  $n$  为奇数时,  $a_n = 2^{\frac{n+1}{2}}$ ;

当  $n$  为偶数时,  $a_n = 3a_{n-1} + 1 = 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 1$ ,

所以  $a_n = \begin{cases} 2^{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ 为奇数}, \\ 3 \cdot 2^{\frac{n}{2}} + 1, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

(2) 当  $n$  为偶数时,  $S_n = 2 + (3 \times 2 + 1) + 4 + (3 \times 2^2 + 1) + \dots + 2^{\frac{n}{2}} + (3 \times 2^{\frac{n}{2}} + 1)$

$$= (2 + 4 + \dots + 2^{\frac{n}{2}}) + 3 \times (2 + 2^2 + \dots + 2^{\frac{n}{2}-1}) + \frac{n}{2}$$

$$= 4 \times \frac{2 \times (1-2^{\frac{n}{2}})}{1-2} + \frac{n}{2} = 2^{\frac{n}{2}+3} - 8 + \frac{n}{2};$$

$$\text{当 } n \text{ 为奇数时, } S_n = 2 + (3 \times 2 + 1) + 4 + (3 \times 2^2 + 1) + \dots + (3 \times 2^{\frac{n-1}{2}} + 1) + 2^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= (2 + 4 + \dots + 2^{\frac{n-1}{2}}) + 3 \times (2 + 2^2 + \dots + 2^{\frac{n-1}{2}-1}) + \frac{n-1}{2} + 2^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= \frac{2 \times (1-2^{\frac{n+1}{2}})}{1-2} + 3 \times \frac{2 \times (1-2^{\frac{n-1}{2}})}{1-2} + \frac{n-1}{2} + 2^{\frac{n+1}{2}}$$

$$= 5 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} - 8 + \frac{n-1}{2},$$

所以  $S_n = \begin{cases} 5 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} - 8 + \frac{n-1}{2}, & n \text{ 为奇数}, \\ 2^{\frac{n}{2}+3} - 8 + \frac{n}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

(3) 由(1)知  $b_n = \begin{cases} 2^{\frac{1-n}{2}}, & n \text{ 为奇数}, \\ 3 \cdot 2^{-\frac{n}{2}} + 2^{-n}, & n \text{ 为偶数}, \end{cases}$  所以当  $n$  为奇数时, 数列  $\{b_n\}$  单调递减, 当  $n$  为偶数时, 数列  $\{b_n\}$  单调递减,

$$b_1 = 1, b_2 = \frac{7}{4}, b_3 = \frac{1}{2}, b_4 = \frac{13}{16},$$

$$b_5 = \frac{1}{4}, b_6 = \frac{25}{64},$$

点悟: 要写出  $b_6$  的值, 比较其与  $b_5$  的大小, 会影响到  $\lambda$  的范围

若集合  $M = \{n | b_n \geq \lambda\}$  中恰好有 3 个元素, 则这三个元素为 1, 2, 4, 则实数  $\lambda$  的取值范围为  $(\frac{1}{2}, \frac{13}{16}]$ .

9. 【解】(1) 若选①, 因为  $S_{n+1} = 2S_n + 2$ , 当  $n \geq 2$  时,  $S_n = 2S_{n-1} + 2$ , 两式相减得  $a_{n+1} = 2a_n$ , 当  $n = 1$  时,  $S_2 = 2S_1 + 2$ , 即  $a_1 + a_2 = 2a_1 + 2$ ,

又  $a_1 = 2$ , 所以  $a_2 = 4$ , 故  $a_2 = 2a_1$  也满足  $a_{n+1} = 2a_n$ , 所以  $\{a_n\}$  是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 故  $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ .

若选②, 因为  $a_{n+1} - a_n = 2^n$ , 所以当  $n \geq 2$  时,  $a_n - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1})$

$$= 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = \frac{2(1-2^{n-1})}{1-2} = 2^n - 2,$$

又  $a_1 = 2$ , 故  $a_n = 2^n$ . 当  $n = 1$  时,  $a_1 = 2$  也满足  $a_n = 2^n$ , 故对任意的  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n = 2^n$ .

若选③, 因为  $S_n = a_{n+1} - 2$ , 当  $n \geq 2$  时,  $S_{n-1} = a_n - 2$ , 两式相减可得  $a_n = a_{n+1} - a_n$ , 即  $a_{n+1} = 2a_n$ ,

当  $n = 1$  时,  $S_1 = a_1 = a_2 - 2$ , 又  $a_1 = 2$ , 所以  $a_2 = 4$ ,  $a_2 = 2a_1$  也满足  $a_{n+1} = 2a_n$ , 所以  $\{a_n\}$  是首项为 2, 公比为 2 的等比数列, 故  $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ .

(2) 在  $a_n$  与  $a_{n+1}$  之间插入  $n$  个数, 使这  $n+2$  个数组成一个公差为  $d_n$  的等差数列,

$$\text{所以 } (n+1)d_n = a_{n+1} - a_n = 2^{n+1} - 2^n = 2^n,$$

$$\text{所以 } d_n = \frac{2^n}{n+1}, \text{ 即 } \frac{1}{d_n} = \frac{n+1}{2^n},$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{n+1}{2^n},$$

$$\frac{1}{2} T_n = \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}},$$

$$\text{两式相减可得 } \frac{1}{2} T_n = 1 + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{n+1}{2^{n+1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{n+1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{n+3}{2^{n+1}},$$

$$\text{故 } T_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}.$$

10. 【解】(1) 因为数列  $\{a_n\}$  是等差数列, 所以  $S_3 = 3a_2 = 15$ , 所以  $a_2 = 5$ . 又  $a_2 a_3 = 40$ , 所以  $a_3 = 8$ , 所以等差数列  $\{a_n\}$  的公差  $d = a_3 - a_2 = 3$ , 则  $a_n = a_2 + (n-2)d = 3n - 1$ .

$$\text{因为 } \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2^2} b_2 + \frac{1}{2^3} b_3 + \dots + \frac{1}{2^n} b_n = n (n \in \mathbb{N}^*),$$

$$\text{所以当 } n \geq 2 \text{ 时, } \frac{1}{2} b_1 + \frac{1}{2^2} b_2 + \frac{1}{2^3} b_3 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} b_{n-1} = n-1,$$

$$\text{两式作差得 } \frac{1}{2^n} b_n = 1 (n \geq 2), \text{ 即 } b_n = 2^n (n \geq 2),$$

$$\text{令 } n=1, \text{ 得 } \frac{1}{2} b_1 = 1, \text{ 则 } b_1 = 2, \text{ 满足上式, 则 } b_n = 2^n (n \in \mathbb{N}^*),$$

综上, 数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = 3n - 1$ , 数列  $\{b_n\}$  的通项公式为  $b_n = 2^n$ . (2) 由(1)可得,  $a_{50} = 149$ , 且  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 4$ ,  $b_3 = 8$ ,  $b_4 = 16$ ,  $b_5 = 32$ ,  $b_6 = 64$ ,  $b_7 = 128$ ,  $b_8 = 256$ , 经验证数列  $\{a_n\}$  前 50 项中与数列  $\{b_n\}$  的公共项共有 4 项, 分别为 2, 8, 32, 128, 又  $a_{54} = 3 \times 54 - 1 = 161 < 256$ ,

点悟: 此处要检验若去掉 4 项后, 新补上来的 4 项中是否含有  $\{b_n\}$  中的项 从而数列  $\{c_n\}$  的前 50 项为数列  $\{a_n\}$  的前 54 项去掉 2, 8, 32, 128 这 4 项, 所以  $T_{50} = S_{54} - (2 + 8 + 32 + 128) = 2 \times 54 + \frac{54 \times 53}{2} \times 3 - 170 = 4\,231$ .

## 专题 4 数列放缩求和

### 刷难关

1. 【证明】(1) 由  $a_{n+1} = 3a_n + 1$  得  $\frac{a_{n+1} + \frac{1}{2}}{1} = 3 \left( \frac{a_n + \frac{1}{2}}{1} \right)$ , 又  $a_1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ , 所以

点悟: 配凑法

$$a_n + \frac{1}{2} \neq 0, \text{ 所以 } \frac{a_{n+1} + \frac{1}{2}}{a_n + \frac{1}{2}} = 3, \text{ 所以}$$

$$\left\{ a_n + \frac{1}{2} \right\} \text{ 是等比数列, 首项为 } \frac{3}{2}, \text{ 公比为 } 3, \text{ 所以 } a_n + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \cdot 3^{n-1}, \text{ 解得 } a_n = \frac{3^n - 1}{2}.$$

$$(2) \text{ 由(1)知 } a_n = \frac{3^n - 1}{2}, \text{ 所以 } \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3^n - 1}.$$

因为当  $n \geq 1$  时,  $3^n - 1 \geq 2 \cdot 3^{n-1}$ , 所以

点悟: 数列  $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$

显然无法直接求和, 所以需要放缩再求和. 放缩的目标是能求和, 联想与此形式相近的能求和的形式, 考虑到指数形式, 联想等比数列; 放缩的方向是放大, 分子是常数不易动, 所以考虑把分母缩小

$$\frac{1}{3^n - 1} \leq \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}, \text{ 所以 } \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3^n - 1} \leq \frac{1}{3^{n-1}},$$

$$\text{于是 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} =$$

$$\frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{3^n} \right) < \frac{3}{2},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < \frac{3}{2}.$$

多种解法 (2) 由(1)知  $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ ,

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n} = \frac{2}{3^n - 1}, \text{ 由 } 0 < 2 \leq 3^n - 1, \text{ 得 } \frac{2}{3^n - 1} \leq \frac{2+1}{3^n - 1+1} = \frac{3}{3^n} = \left( \frac{1}{3} \right)^{n-1},$$

点悟: 糖水不等式:  $a > b > 0, c > 0 \Rightarrow \frac{b}{a} < \frac{b+c}{a+c}$

$$\text{故 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$



$$\leq \left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] < \frac{3}{2}.$$

**多种解法二** (2) 由(1)知  $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$ ,

所以  $\frac{1}{a_n} = \frac{2}{3^n - 1}, \frac{2}{3^n - 1} = \frac{2(3^{n+1} - 1)}{(3^n - 1)(3^{n+1} - 1)} < \frac{2 \cdot 3^{n+1}}{3 \cdot 3^{n+1}} = \frac{2}{3}$ ,

故  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{3} = \frac{2n}{3} < \frac{3}{2}$ .

2. (1)【解】依题意, 当  $n=1$  时,  $2S_1 = a_2 - \frac{1}{3} - 1 - \frac{2}{3}$ , 又  $S_1 = a_1 = 1$ , 所以  $a_2 = 4$ .

(2)【解】当  $n \geq 2$  时,  $2S_n = na_{n+1} - \frac{1}{3}n^3 - n^2 - \frac{2}{3}n$ ,  $2S_{n-1} = (n-1)a_n - \frac{1}{3}(n-1)^3 - (n-1)^2 - \frac{2}{3}(n-1)$ , 两式相减得  $2a_n = na_{n+1} - (n-1)a_n - \frac{1}{3}(3n^2 - 3n + 1) - (2n-1) - \frac{2}{3}$ , 整理得  $(n+1)a_n = na_{n+1} - n(n+1)$ , 即  $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = 1$ , 又  $\frac{a_2}{2} - \frac{a_1}{1} = 1$ ,

所以数列  $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$  是首项为  $\frac{a_1}{1} = 1$ , 公差为 1 的等差数列,

所以  $\frac{a_n}{n} = 1 + (n-1) \times 1 = n$ , 所以  $a_n = n^2$ .

(3)【证明】当  $n=1$  时,  $\frac{1}{a_1} = 1 < \frac{7}{4}$ ;

当  $n=2$  时,  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} < \frac{7}{4}$ ;

当  $n \geq 3$  时,  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ ,

【点悟】 $\frac{1}{n^2}$  无法直接求和, 考虑放缩, 又其为分式形式, 故联想裂项模型

$$\text{此时 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{7}{4} - \frac{1}{n} < \frac{7}{4},$$

综上, 对一切正整数  $n$ , 有  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < \frac{7}{4}$ .

**名师点拨**  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ , 这个放缩显然越靠前放缩的越多, 为了更精确, 需要保留前面部分项. 本题保留了前 2 项, 其中第 1 项无法按此式放缩, 第 2 项是人为保留, 为了更精确. 分母缩小时, 在保证可以裂项的前提下少缩小一点, 可以提高精确度.

**多种解法一** (3)  $\frac{1}{a_1} = 1, \frac{1}{a_2} = \frac{1}{4}$ , 当  $n \geq 3$  时,  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$ , 故  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{5}{4} + \frac{5}{12} = \frac{5}{3} < \frac{7}{4}$ .

**多种解法二** (3)  $\frac{1}{a_1} = 1$ , 当  $n \geq 2$  时,  $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$ , 故  $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{n+1} < \frac{5}{3} < \frac{7}{4}$ .

3.【解】(1) 因为数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且  $S_n = 2a_n - 2^{n+1}$ , 当  $n=1$  时,  $a_1 = S_1 = 2a_1 - 4$ , 则  $a_1 = 4$ , 当  $n \geq 2$  时, 由  $S_n = 2a_n - 2^{n+1}$  可得  $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2^n$ , 上述两个等式作差可得  $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-1} - 2^n$ , 所以  $a_n - 2a_{n-1} = 2^n$ , 等式  $a_n - 2a_{n-1} = 2^n$  两边同时除以  $2^n$  可得  $\frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} = 1$ , 所以数列  $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$  是以  $\frac{a_1}{2} = 2$  为首项, 1 为公差的等差数列,

故  $\frac{a_n}{2^n} = 2 + (n-1) = n+1$ , 所以  $a_n = (n+1) \cdot 2^n$ .

(2) 由(1)知  $a_n = (n+1) \cdot 2^n$ , 则  $b_n = \frac{(n+3) \cdot 2^{n-1}}{a_n a_{n+1}} = \frac{(n+3) \cdot 2^{n-1}}{(n+1)2^n \cdot (n+2)2^{n+1}} = \frac{n+3}{(n+1)(n+2) \cdot 2^{n+2}}$

$= \frac{2(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2) \cdot 2^{n+2}} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - \frac{1}{(n+2)2^{n+2}}$ , 所以  $T_n = \left(\frac{1}{2 \times 2^2} - \frac{1}{3 \times 2^3}\right) + \left(\frac{1}{3 \times 2^3} - \frac{1}{4 \times 2^4}\right) + \cdots + \left[\frac{1}{(n+1)2^{n+1}} - \frac{1}{(n+2)2^{n+2}}\right] = \frac{1}{8} - \frac{1}{(n+2)2^{n+2}}$ .

故数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n = \frac{1}{8} - \frac{1}{(n+2) \cdot 2^{n+2}}$ .

(3) 由(1)知  $a_n = (n+1) \cdot 2^n$ , 则  $c_n = \log_2 \frac{a_n}{n+1} = \log_2 2^n = n$ , 因为  $\frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} < \frac{1}{\sqrt{c_k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}}$ ,

【点悟】等价变形后放缩, 为后续裂项相消打下基础

所以  $2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) < \frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$ ,

则  $\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{c_k}} > 2[(\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{2026} - \sqrt{2025})] = 2(\sqrt{2026} - 1) > 2(\sqrt{2025} - 1) = 88$ ,  $\sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{c_k}} < 1 + 2[(-1 + \sqrt{2}) + (-\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \cdots + (-\sqrt{2024} + \sqrt{2025})] = 1 + 2(\sqrt{2025} - 1) = 89$ ,

所以  $88 < \sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{c_k}} < 89$ , 故

$$\left\lfloor \sum_{k=1}^{2025} \frac{1}{\sqrt{c_k}} \right\rfloor = 88.$$

4. **思路导引** (2) 不等式左侧为数列  $\left\{\frac{b_n+1}{b_n}\right\}$  前  $n$  项的积, 可以把右侧  $\sqrt{n+1}$  也视为一个数列  $\{c_n\}$  的积,

然后让  $\frac{b_n+1}{b_n} > c_n (b_n > 0, c_n > 0)$  即可证明此式.

记  $T_n = c_1 \cdot c_2 \cdots c_n = \sqrt{n+1}$ , 则  $c_n = \begin{cases} T_1, n=1, \\ \frac{T_n}{T_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{2}, n=1, \\ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}, n \geq 2 \end{cases}$   $\sqrt{\frac{n+1}{n}} (n \in \mathbf{N}^*)$ , 因此可按上述思路证明.

(1)【解】因为对任意的  $n \in \mathbf{N}^*$ , 点  $(n, S_n)$  均在函数  $y = b^x + r (b > 0 \text{ 且 } b \neq 1, r \text{ 均为常数})$  的图象上, 所以  $S_n = b^n + r$ , 当  $n=1$  时,  $a_1 = S_1 = b + r$ ; 当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = b^n + r - (b^{n-1} + r) = b^n - b^{n-1} = (b-1)b^{n-1}$ , 又因为  $\{a_n\}$  为等比数列, 所以  $r = -1$ ,  $\{a_n\}$  的公比为  $b$ , 此时  $a_n = (b-1)b^{n-1}$ .

【证明】当  $b=2$  时,  $b_n=2(\log_2 a_n+1)=2(\log_2 2^{n-1}+1)=2n$ ,  
 则  $\frac{b_n+1}{b_n}=\frac{2n+1}{2n}$ ,

$$\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^2=\frac{4n^2+4n+1}{4n^2}>\frac{4n^2+4n}{4n^2}=\frac{n+1}{n},$$

$$\text{则 } \frac{b_n+1}{b_n}>\sqrt{\frac{n+1}{n}},$$

$$\text{则 } \frac{b_1+1}{b_1} \cdot \frac{b_2+1}{b_2} \cdot \dots \cdot \frac{b_n+1}{b_n}$$

$$>\sqrt{\frac{2}{1}} \times \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \dots \cdot \sqrt{\frac{n+1}{n}}=\sqrt{n+1}.$$

#### 4.4\* 数学归纳法

##### 刷基础

1. B 【解析】当  $n=k$  时, 不等式左边为  $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^k-1}$ ,  
 当  $n=k+1$  时, 不等式左边为  $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^k-1}+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}-1}$ ,  
 故增加的项数为  $(2^{k+1}-1)-(2^k-1)=2 \times 2^k-2^k=2^k$ . 故选 B.

→ 避坑: 此处易错误认为只增加了一项  $\frac{1}{2^{k+1}-1}$

2.  $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$  【解析】由  $n \in \mathbf{N}$ , 且  $n>1$  可知  $n$  的第一个取值为  $n=2$ , 由题意

→ 敲黑板: 运用归纳法证明时, 注意  $n$  的第一个取值, 不一定从 1 开始  
 可知, 当  $n=2$  时,  $2^2-1=3$ , 所以第一步需验证的不等式为  $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}<2$ .

3.  $2(2k+1)$  【解析】由题意, 当  $n=k$  时, 左边为  $(k+1)(k+2) \cdot \dots \cdot (k+k)$ ;  
 当  $n=k+1$  时, 左边为  $(k+2)(k+3) \cdot \dots \cdot (k+1+k+1)$ , 从而增加两项为  $(2k+1) \cdot (2k+2)$ , 且减少一项为  $k+1$ , 故左边应增乘的因式为  $\frac{(2k+1)(2k+2)}{k+1}=2(2k+1)$ .

##### 刷速度

1. B 【解析】 $\therefore \frac{a_{10}}{b_{10}}=\frac{2a_{10}}{2b_{10}}=\frac{a_1+a_{19}}{b_1+b_{19}}=$

$$\frac{(a_1+a_{19}) \cdot \frac{19}{2}}{(b_1+b_{19}) \cdot \frac{19}{2}}=\frac{A_{19}}{B_{19}} \cdot \frac{A_n}{B_n}=\frac{n+3}{n+2},$$

$$\therefore \frac{a_{10}}{b_{10}}=\frac{A_{19}}{B_{19}}=\frac{19+3}{19+2}=\frac{22}{21}. \text{ 故选 B.}$$

2. C 【解析】在等比数列  $\{a_n\}$  中, 由公比  $q=2$ , 可得  $a_1+a_4+\dots+a_{85}, a_2+a_5+\dots+a_{86}, a_3+a_6+\dots+a_{87}$  构成公比为 2 的等比数列,  
 设  $a_1+a_4+\dots+a_{85}=m$ , 则  $a_2+a_5+\dots+a_{86}=2m, a_3+a_6+\dots+a_{87}=4m$ .  
 因为等比数列  $\{a_n\}$  的前 87 项和  $S_{87}=140$ , 所以  $m+2m+4m=140$ , 解得  $m=20$ , 所以  $a_3+a_6+a_9+\dots+a_{87}=80$ . 故选 C.

3. C 【解析】因为  $\forall n \in \mathbf{N}^*, a_{n+1}<a_n$  恒成立, 所以数列  $\{a_n\}$  是递减数列,  
 又数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n=\begin{cases} (1-3a)n+15a, n \leq 4, \\ 4a^{n-3}+4, n \geq 5, \end{cases}$  所以  $\begin{cases} 1-3a<0, \\ 0<a<1, \end{cases}$  即  $\begin{cases} 1-3a<0, \\ 0<a<1, \end{cases}$   
 $\begin{cases} a_4>a_5, \\ 4(1-3a)+15a>4a^2+4, \end{cases}$

→ 敲黑板: 注意衔接处两边值的大小

4. 【解】(1) 当  $n=1$  时, 由已知条件可得  $a_1+1=\frac{a_1^2+2}{2a_1}$ , 即  $a_1^2+2a_1-2=0$ , 解得  $a_1=\sqrt{3}-1(a_1>0)$ ;  
 当  $n=2$  时, 由已知条件可得  $a_1+a_2+1=\frac{a_2^2+2}{2a_2}$ , 将  $a_1=\sqrt{3}-1$  代入得  $a_2^2+2\sqrt{3}a_2-2=0$ , 解得  $a_2=\sqrt{5}-\sqrt{3}(a_2>0)$ ;  
 当  $n=3$  时, 由已知条件可得  $a_1+a_2+a_3+1=\frac{a_3^2+2}{2a_3}$ , 同理解得  $a_3=\sqrt{7}-\sqrt{5}(a_3>0)$ .

(2) 由 (1) 可以猜想  $a_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}, n=1, 2, 3$  时, 等式成立;  
 假设当  $n=k(k \geq 3, k \in \mathbf{N}^*)$  时, 等式成立, 即  $a_k=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}$ ,

$$\text{又因为 } a_{k+1}=S_{k+1}-S_k=\frac{a_{k+1}}{2}+\frac{1}{a_{k+1}}-$$

$$\frac{a_k}{2} \cdot \frac{1}{a_k},$$

将  $a_k=\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}$  代入上式解得  $a_{k+1}=\sqrt{2k+3}-\sqrt{2k+1}(a_{k+1}>0)$ , 所以当  $n=k+1$  时等式也成立.

综上,  $a_n=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$ .

5. 【证明】在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $a_n=a_1+(n-1) \cdot d=n, S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ ,  
 当  $n=1$  时,  $a_1^3=1, S_1^2=1$ , 原等式成立;

#### 第四章素养检测

$$\begin{cases} a>\frac{1}{3}, \\ 0<a<1, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{1}{3}<a<\frac{3}{4}. \text{ 故选 C.}$$

$$\begin{cases} 0<a<\frac{3}{4}, \\ 0<a<\frac{3}{4}, \end{cases}$$

4. B 【解析】因为  $a_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n+\frac{2}{n}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 所以  $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n(n+1)}$ , 即

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

所以当  $n \geq 2$  时, 有  $\frac{a_2}{2}-\frac{a_1}{1}=2\left(1-\frac{1}{2}\right), \frac{a_3}{3}-\frac{a_2}{2}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right), \frac{a_4}{4}-\frac{a_3}{3}=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right), \dots, \frac{a_n}{n}-\frac{a_{n-1}}{n-1}=2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$ , 累加得  $\frac{a_n}{n}-\frac{a_1}{1}=2\left(1-\frac{1}{n}\right)$  ( $n \geq 2$ ), 又  $a_1=-1$ , 所以

$$\frac{a_n}{n}=1-\frac{2}{n}(n \geq 2), \text{ 即 } a_n=n-2(n \geq 2).$$

当  $n=1$  时,  $a_1=1-2=-1$  符合上式, 所以  $a_n=n-2(n \in \mathbf{N}^*)$ . 则  $a_{22}=22-2=20$ . 故选 B.

假设当  $n=k(k \in \mathbf{N}^*)$  时, 原等式成立, 即  $\sum_{i=1}^k a_i^3=S_k^2, \sum_{i=1}^k i^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$ ,

$$\text{则当 } n=k+1(k \in \mathbf{N}^*) \text{ 时, } \sum_{i=1}^{k+1} a_i^3=\sum_{i=1}^k a_i^3+a_{k+1}^3=S_k^2+(k+1)^3=\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2+(k+1)^3$$

$$=\frac{(k+1)^2}{4} \cdot [k^2+4(k+1)]=\frac{(k+1)^2}{4} \cdot (k+2)^2$$

$$=\left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2=S_{k+1}^2,$$

即当  $n=k+1$  时, 原等式成立,

所以对一切  $n \in \mathbf{N}^*$ , 等式  $\sum_{i=1}^n a_i^3=S_n^2$  成立.

6. 【证明】①当  $n=1$  时,  $11^{n+1}+12^{2n-1}=11^2+12=133$  能被 133 整除, 所以当  $n=1$  时结论成立.

②假设当  $n=k(k \in \mathbf{N}^*)$  时,  $11^{k+1}+12^{2k-1}$  能被 133 整除, 那么当  $n=k+1$  时,  $11^{k+2}+12^{2k+1}=11^{k+1} \times 11+12^{2k-1} \times 12^2=11^{k+1} \times 11+12^{2k-1} \times 11-12^{2k-1} \times 11+12^{2k-1} \times 12^2=11 \times (11^{k+1}+12^{2k-1})+133 \times 12^{2k-1}$ .

由假设可知  $11 \times (11^{k+1}+12^{2k-1})+133 \times 12^{2k-1}$  能被 133 整除, 即  $11^{k+2}+12^{2k+1}$  能被 133 整除, 所以当  $n=k+1$  时结论也成立. 综上,  $11^{n+1}+12^{2n-1}(n \in \mathbf{N}^*)$  能被 133 整除.

5. A 【解析】因为  $\underbrace{11 \cdots 1}_n=1+10+\dots+10^{n-1}=\frac{1-10^n}{1-10}=\frac{1}{9}(10^n-1)$ ,

$$\text{所以 } \sqrt{\underbrace{44 \cdots 4}_{2n} \cdot \underbrace{88 \cdots 8}_n}=\sqrt{\frac{4}{9}(10^{2n}-1)-\frac{8}{9}(10^n-1)}$$

$$=\sqrt{\frac{4}{9}(10^n-1)^2}=\frac{2}{3}(10^n-1)=\underbrace{66 \cdots 6}_n. \text{ 故选 A.}$$

6. A 【解析】因为数列  $\{a_n\}$  为等差数列, 其首项为 1, 公差为 2, 所以  $a_n=1+(n-1) \cdot 2=2n-1$ .  
 因为数列  $\{b_n\}$  为等比数列, 其首项为 1, 公比为 2, 所以  $b_n=1 \cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ , 所以  $c_n=2 \cdot 2^{n-1}-1=2^n-1$ , 则  $T_n=c_1+c_2+c_3+\dots+c_n=\frac{2(1-2^{n+1})}{1-2}-n=2^{n+1}-2-n$ .

因为对任意的  $n \in \mathbf{N}^*, c_n>0$ , 所以数列  $\{T_n\}$  单调递增. 因为  $T_9=2^{10}-2-9=1\ 024-11=1\ 013<2\ 023, T_{10}=2^{11}-2-10=2\ 048-12=2\ 036>2\ 023$ , 所以当  $T_n<2\ 023$  时,  $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . 故选 A.

7. B 【解析】当  $n=1$  时,  $S_1+2T_1=a_1+2a_1=3a_1=1$ , 解得  $a_1=\frac{1}{3}$ ; 当  $n \geq 2$  时,