

11. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d . 当 $n=1$ 时, a_1, a_2 是方程 $x^2 - 4x + b_1 = 0$ 的两个根, 由根与系数的关系得 $a_1 + a_2 = 2a_1 + d = 4$. ①

当 $n=2$ 时, a_2, a_3 是方程 $x^2 - 8x + b_2 = 0$ 的两个根, 由根与系数的关系得 $a_2 + a_3 = 2a_1 + 3d = 8$. ②

由①②联立解得 $a_1 = 1, d = 2$, 所以 $a_2 = 3$.

(2) 由(1)知 $a_1 = 1, d = 2$, 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$, 则 $a_{n+1} = 2n+1$.

对于方程 $x^2 - 4nx + b_n = 0$, 由根与系数的关系得 $a_n a_{n+1} = b_n$, 即 $b_n = (2n-1) \cdot (2n+1) = 4n^2 - 1$.

(3) $c_n = \frac{1}{b_n} + (-1)^n a_n =$

$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + (-1)^n \cdot (2n-1) =$

$(-1)^n \cdot (2n-1) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$

所以 $S_{2n} = -1 + 3 - 5 + 7 - \dots + (-1)^{2n} \cdot$

$(4n-1) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots +$

$\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+1} \right) = 2n + \frac{1}{2} \left(1 -$

$\frac{1}{4n+1} \right) = \frac{4n(2n+1)}{4n+1}.$

12. 【解】(1) 因为 $2b_{n-1} - b_n b_{n-1} = 1$, 所以 $b_{n-1} \neq 0, b_n = 2 - \frac{1}{b_{n-1}}$, 所以 $1 - b_n = 1 -$

$\left(2 - \frac{1}{b_{n-1}} \right) = \frac{1 - b_{n-1}}{b_{n-1}}$, 又 $b_1 = \frac{4}{5}$, 所以 $b_n \neq 1$,

则 $\frac{2}{1 - b_n} = \frac{2b_{n-1}}{1 - b_{n-1}}$, 即 $\frac{2}{1 - b_n} - \frac{2}{1 - b_{n-1}} =$

$$\frac{2b_{n-1}}{1 - b_{n-1}} - \frac{2}{1 - b_{n-1}} = -2(n \geq 2).$$

因为 $b_1 = \frac{4}{5}$, 所以 $\frac{2}{1 - b_1} = 10$, 又 $a_n =$

$\frac{2}{1 - b_n}$, 所以 $a_n - a_{n-1} = -2, a_1 = 10$.

所以 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 10$, 公差 $d = -2$ 的等差数列, 故 $a_n = a_1 + (n-1)d = 10 + (n-1) \times (-2) = 12 - 2n$.

(2) 根据等差数列的前 n 项和公式可得 $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(10 + 12 - 2n)}{2} =$

$$11n - n^2.$$

对于二次函数 $y = -x^2 + 11x$, 其图象的对称轴为直线 $x = \frac{11}{2 \times (-1)} = \frac{11}{2} = 5.5$.

因为 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以当 $n=5$ 或 $n=6$ 时, S_n 取得最大值,

当 $n=5$ 时, $S_5 = 11 \times 5 - 5^2 = 30$, 当 $n=6$ 时, $S_6 = 11 \times 6 - 6^2 = 30$,

所以 S_n 存在最大值, 最大值为 30, 此时 $n=5$ 或 $n=6$.

13. (1) ①【解】 $c_1 = b_1 - a_1 = 1 - 1 = 0$, $c_2 = \max\{b_1 - 2a_1, b_2 - 2a_2\} = \max\{1 - 2 \times 1, 3 - 2 \times 2\} = -1$,

$c_3 = \max\{b_1 - 3a_1, b_2 - 3a_2, b_3 - 3a_3\} = \max\{1 - 3 \times 1, 3 - 3 \times 2, 5 - 3 \times 3\} = -2$.

②【证明】当 $n \geq 3$ 时, $(b_{k+1} - na_{k+1}) - (b_k - na_k) = (b_{k+1} - b_k) - n(a_{k+1} - a_k) = 2 - n < 0$, 所以数列 $\{b_k - na_k\} (k \in \mathbb{N}^*)$ 是递减数列.

所以 $c_n = \max\{b_1 - a_1 n, b_2 - a_2 n, \dots, b_n - a_n n\} = b_1 - a_1 n = 1 - n$, 又 $c_1 = 0, c_2 = -1$, 所以对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = 1 - n$,

于是 $c_{n+1} - c_n = -1$, 所以 $\{c_n\}$ 是等差数列.

(2) 【证明】设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的公差分别为 d_1, d_2 ,

则 $b_k - na_k = b_1 + (k-1)d_2 - [a_1 + (k-1)d_1] = b_1 - a_1 n + (d_2 - nd_1)(k-1)$, 所以

$$c_n = \begin{cases} b_1 - a_1 n + (n-1)(d_2 - nd_1), & d_2 > nd_1, \\ b_1 - a_1 n, & d_2 \leq nd_1. \end{cases}$$

①当 $d_1 > 0$ 时, 取正整数 $m > \frac{d_2}{d_1}$, 则当

$n \geq m$ 时, $nd_1 > d_2$, 因此 $c_n = b_1 - a_1 n$. 此时, $c_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots$ 是等差数列.

②当 $d_1 = 0$ 时, 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = b_1 - a_1 n + (n-1) \max\{d_2, 0\} = b_1 - a_1 + (n-1)(\max\{d_2, 0\} - a_1)$.

此时, $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$ 是等差数列.

③当 $d_1 < 0$ 时, 当 $n > \frac{d_2}{d_1}$ 时, 有 $nd_1 < d_2$.

$$\text{所以 } \frac{c_n}{n} = \frac{b_1 - a_1 n + (n-1)(d_2 - nd_1)}{n} =$$

$$n(-d_1) + d_1 - a_1 + d_2 + \frac{b_1 - d_2}{n} \geq n(-d_1) +$$

$$d_1 - a_1 + d_2 - |b_1 - d_2| > M.$$

对任意正数 M , 取正整数 $m >$

$$\max\left\{\frac{M + |b_1 - d_2| + a_1 - d_1 - d_2}{-d_1}, \frac{d_2}{d_1}\right\},$$

故当 $n \geq m$ 时, $\frac{c_n}{n} > M$.

刷素养

14. 【解】设 $f(k) = 1 + 2 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$,

则 $f(63) < 2024 < f(64)$. 设数列 $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, \dots$ 为数列 $\{a_n\}$, 则 $a_{2024} = 64$, 64 模 5 的余数为 4. 因此第 2024 项模 5 的值为 4.

4.3 等比数列

4.3.1 等比数列的概念

刷基础

1. B 【解析】由等比数列的定义可知, 等比数列是根据比值来定义的, 故等比数列的每一项和公比都不能为零, 故①②错误; 一个非零的常数列, 一定是等比数列, 其公比为 1, 故③正确; 由于 $\frac{4^2}{2^2} \neq$

$\frac{6^2}{4^2}$, 故不成等比数列, 故④错误. 故选 B.

→ 敲黑板: 不满足数列中的每一项与它的前一项的比都等于同一个常数

2. A 【解析】因为 $\{a_n\}$ 为等比数列且通项公式为 $a_n = -2 \times 3^n$, 所以公比 $q =$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{-2 \times 3^n}{-2 \times 3^{n-1}} = 3, \text{ 故选 A.}$$

3. ABD 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q \neq 0)$.

对于 A, $a_2^2 = (a_1 q)^2 = a_1^2 q^2, a_3 \cdot a_7 = (a_1 q^2) \cdot (a_1 q^6) = a_1^2 q^8$,

所以 $a_2^2 = a_3 \cdot a_7$, 则 a_3, a_5, a_7 成等比数列, A 正确;

对于 B, 因为 $\frac{a_{n+1}^3}{a_n^3} = q^3$, 所以 $\{a_n^3\}$ 是等比

数列, B 正确;

对于 C, 不妨设等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 1$, 则 $\lg a_n = 0$, 此时 $\{\lg a_n\}$ 不是等比数列, C 错误;

对于 D, 因为 $\frac{a_{n+1}}{\frac{1}{a_n}} = \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}$, 所以 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等比数列, D 正确. 故选 ABD.

归纳总结 判断一个数列是否为等比数列的方法

(1) 定义法: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q (q \neq 0, n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*, a_n \neq 0) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 等比中项法: $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*, a_n \neq 0) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是等比数列;

(3) 通项公式法: $a_n = k \cdot q^{n-1} (k \neq 0, q \neq 0, n \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow \{a_n\}$ 是首项为 k , 公比为 q 的等比数列.

4. (1) 【解】因为 $S_n = 2a_n + 1$, 所以当 $n=1$ 时, $S_1 = 2a_1 + 1$, 所以 $a_1 = -1$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} + 1$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}$, 即 $a_n = 2a_{n-1}$, 所以 $\{a_n\}$ 是以 -1 为首项, 2 为公比的等比数列,

所以 $a_n = -1 \times 2^{n-1} = -2^{n-1}$.

(2) 【证明】由(1)知 $b_n = a_{n+1} + 2a_n = -2^n - 2^n = -2^{n+1}$, 所以 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{-2^{n+2}}{-2^{n+1}} = 2$, 所以 $\{b_n\}$ 是等比数列.

5. D 【解析】由题意知 $a^2 = 1 \times b > 0$, 即 $b > 0$, 又 $b^2 = 1 \times 9 = 9$, 则 $b = 3$. 故选 D.

→ 避坑: 等比数列的奇数项的符号相同, 偶数项的符号相同, 注意隐含条件

6. D 【解析】若 $b=0, a=0, c=0$, 则 $b = \sqrt{ac}$, 但 a, b, c 不是等比数列, 充分性不成立;

若 a, b, c 是等比数列, 则 $b^2 = ac$, 则 $b = \pm \sqrt{ac}$, 必要性不成立,

所以“ $b = \sqrt{ac}$ ”是“ a, b, c 是等比数列”的既不充分也不必要条件. 故选 D.

7. ±4 【解析】因为 a_1, a_7 是方程 $x^2 - 10x + 16 = 0$ 的两个不相等的实数根, 所以由根与系数的关系得 $a_1 a_7 = 16$. 因为 a_4 是 a_1, a_7 的等比中项, 所以 $a_4^2 = a_1 a_7 = 16$, 所以 $a_4 = \pm 4$.

8. C 【解析】设 $\{b_n\}$ 的公比为 q . 由 $b_3 - b_2 = 12$, 得 $2q^2 - 2q = 12$, 解得 $q = 3$ 或 $q = -2$. 又公比大于 0, 所以 $q = 3$, 所以 $b_n = 2 \times 3^{n-1}$. 故选 C.

9. B 【解析】因为 $a_3 - a_1 = 3, a_6 - a_4 = 81$, 所以 $a_6 - a_4 = a_3 \cdot q^3 - a_1 \cdot q^3 = q^3(a_3 - a_1) = 3q^3 = 81$, 解得 $q = 3$. 故选 B.

链接教材 本题是教材第 31 页练习第 3 题的同类试题, 都是根据等比数列中项的关系求 a_1, q, a_n 等.

在等比数列的通项公式 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ 中, 有 a_1, q, n, a_n 四个基本量, 知其

中的三个便可解出最后一个. 另外, a_1, q 是等比数列的基本量, 只要求出

这两个基本量,就能求出其他的量.因此,在求等比数列的通项公式时,常将已知条件转化为关于基本量 a_1, q 的方程(组),然后解方程(组)求得基本量 a_1, q ,进而可求得等比数列的通项公式,这是解决有关等比数列问题的基本方法.当然,也要观察所给项之间的关系,可以整体代入的话则向所给条件中的一个进行转化,本题中 a_6 与 a_3, a_4 与 a_1 的比值刚好都是 q^3 .

10. BC 【解析】由 $a_3 + a_4 = 4(a_1 + a_2)$, 可得 $q^2 = 4$ 或 $q = -1$ (舍去), 所以 $q = 2$ ($q = -2$ 舍去), 故 A 错误; $a_5 = a_3 \times 4 = \frac{16}{3}$, 故 B 正确;

$a_n = a_3 q^{n-3} = \frac{4}{3} \times 2^{n-3} = \frac{2^{n-1}}{3}$, 又 $\frac{1}{3} \cdot \frac{1024}{3} = \frac{2^{11-1}}{3}$, 故 C 正确; 由 $q = 2, a_3 = \frac{4}{3}$, 可得

$a_1 = \frac{1}{3}$, 则 $a_2 + a_3 = 2, a_4 = \frac{8}{3}$, 显然

$a_1, a_2 + a_3, a_4$ 不是等差数列, 故 D 错误. 故选 BC.

11. 【解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$), 由题意得 $a_9^2 = a_2 a_{16} = 16$, 所以 $a_9 = a_1 q^8 = 4$ (负值舍去).

$$\text{又 } \frac{a_6 + a_7}{a_3 + a_4} = \frac{(a_3 + a_4)q^3}{a_3 + a_4} = q^3 = \frac{1}{8},$$

所以 $q = \frac{1}{2}$, 所以 $a_1 = 1024$, 所以

$$a_n = a_1 q^{n-1} = 1024 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2^{11-n}.$$

(2) 由 (1) 知 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n = 2^{10+9+8+\cdots+(11-n)} = 2^{\frac{(21-n)n}{2}}$.

$$\text{二次函数 } y = \frac{(21-x)x}{2} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{21}{2}x$$

的图象的对称轴为直线 $x = \frac{21}{2} =$

10.5, 所以当 $n = 10$ 或 11 时, T_n 取得

最大值, 且最大值为 2^{55} . 故 T_n 的最大值为 2^{55} , 此时 n 的值为

10 或 11.

12. BD 【解析】 $\because a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{q} \cdot q^n$, $\{a_n\}$ 为递减数列, 则 $a_1 > 0, 0 < q < 1$ 或 $a_1 < 0, q > 1$, 故 B, D 正确. 故选 BD.

归纳总结 对于等比数列 $\{a_n\}$, 已知首项为 a_1 , 公比为 q , 则:

(1) 当 $\begin{cases} a_1 > 0, \\ q > 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 < 0, \\ 0 < q < 1 \end{cases}$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列;

(2) 当 $\begin{cases} a_1 > 0, \\ 0 < q < 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1 < 0, \\ q > 1 \end{cases}$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;

(3) 当 $q = 1$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为常数列 (各项均不为 0);

(4) 当 $q < 0$ 时, 等比数列 $\{a_n\}$ 为摆动数列, 它的所有奇数项同号, 所有偶数项异号, 但奇数项与偶数项异号.

13. C 【解析】充分性: 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $a_{n+2} > a_n$, 得 $a_{n+2} - a_n = a_n(q^2 - 1) > 0$, 当 $a_n > 0$ 时, $q^2 - 1 > 0$, 则 $q > 1$ 或 $q < -1$, 当 $q > 1$ 时, 显然 $\{a_n\}$ 是递增数列, 当 $q < -1$ 时, 则数列 $\{a_n\}$ 为摆动数列, 不能保证对任意正整数 n 使得

$a_n > 0$ (舍去);

同理当 $a_n < 0$ 时, $q^2 - 1 < 0$, 当 $0 < q < 1$ 时, 显然 $\{a_n\}$ 是递增数列,

当 $-1 < q < 0$ 时, $\{a_n\}$ 为摆动数列, 不能保证对任意正整数 n 使得 $a_n < 0$ (舍去), 故充分性成立.

必要性: 若 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则从第二项开始, 每一项都比它的前一项大, 所以 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} > a_n$, 故 $a_{n+2} > a_{n+1}$, 由以上两个式子可得 $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+2} > a_n$, 必要性成立. 故选 C.

14. B 【解析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 a_3 + 2a_2 a_6 + a_5 a_7 = 12$, 则 $a_1^2 + 2a_2 a_6 + a_6^2 = (a_2 + a_6)^2 = 12$, 则 $a_2 + a_6 = \pm 2\sqrt{3}$. 故选 B.

15. D 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 当 $k = 0$ 时, $ka_n = 0$, 数列 $\{ka_n\}$ 不是等比数列, A 错误; 当 $q = -1$ 时, $a_n + a_{n+1} = 0$, 数列 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 不是等比数列, B 错误; 当 $a_n = -1$ 时, $a_n + 1 = 0$, 数列 $\{a_n + 1\}$ 不是等比数列, C 错误; 因为 $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = a_n(1 + q + q^2) \neq 0$, 所以 $\frac{a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3}}{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}} = \frac{(a_n + a_{n+1} + a_{n+2})q}{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}} = q$, 由等比数列的定义可知, 数列 $\{a_n + a_{n+1} + a_{n+2}\}$ 是等比数列, D 正确. 故选 D.

16. C 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $a_5 a_6 a_7 = a_6^3 = -27$, 所以 $a_6 = -3$, 所以 $a_2 = \frac{a_6}{q^4} < 0$, 所以 $a_2 a_6 + a_2 a_{10} +$

避坑: 注意等比数列中奇数项同号, 偶数项同号

$$a_6 a_{10} = a_2 a_6 + a_6^2 + \frac{a_6^3}{a_2} = -3a_2 + 9 - \frac{27}{a_2} \geq$$

$$2\sqrt{(-3a_2) \cdot \left(-\frac{27}{a_2}\right)} + 9 = 27,$$

当且仅当 $-3a_2 = -\frac{27}{a_2}$, 即 $a_2 = -3$ 时取等号. 故选 C.

多种解法 因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $a_5 a_6 a_7 = a_6^3 = -27$, 所以 $a_6 = -3$, 所以 $a_2 a_6 + a_2 a_{10} + a_6 a_{10} = a_2^2 + a_6^2 + a_6^2 \geq 2a_2 a_6 + 9 = 2a_2^2 + 9 = 2 \times 9 + 9 = 27$, 当且仅当 $a_4 = a_8 = -3$ 时取等号. 故选 C.

归纳总结 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $m+t=p+k$, 则 $a_m a_t = a_p a_k$ ($m, t, p, k \in \mathbf{N}^*$). 当条件或结论中涉及等差或等比数列中的两项或多项的关系时, 先观察分析下标之间的关系, 再考虑能否应用性质解决, 要特别注意等差、等比数列性质的区别.

17. $a_n = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 【解析】由题意可得

$$a_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}(a_n - 4), \text{ 又 } a_1 - 4 = 1, \text{ 所以 } a_n - 4 \neq 0,$$

所以数列 $\{a_n - 4\}$ 是以 1 为首项, $\frac{1}{2}$ 为

公比的等比数列, 即 $a_n - 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,

$$\text{所以 } a_n = 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

规律方法 当已知数列不是等比数列时, 往往需要利用待定系数法构造与之相关的等比数列. 利用等比数列的通项公式, 求出包含 a_n 的关系式, 进而求出 a_n .

对于 $a_{n+1} = ca_n + d$ ($c \neq 1, cd \neq 0$) 型递

推公式, 可转化为 $a_{n+1} - \frac{d}{1-c} = c \cdot$

$\left(a_n - \frac{d}{1-c}\right)$, 当 $a_1 - \frac{d}{1-c} \neq 0$ 时, 数列

$\left\{a_n - \frac{d}{1-c}\right\}$ 为等比数列, 或者消去常

数项: 由 $a_{n+1} = ca_n + d, a_n = ca_{n-1} + d$ ($n \geq 2$), 两式相减得 $a_{n+1} - a_n = c(a_n - a_{n-1})$ ($n \geq 2$), 当 $a_2 - a_1 \neq 0$ 时, 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是公比为 c 的等比数列, 从而把一个非等比数列问题转化为等比数列问题.

18. $a_n = 2^n + (-1)^n$ 【解析】由 $a_{n+1} + a_n = 3 \times 2^n$, 得 $a_{n+1} - 2^{n+1} = -(a_n - 2^n)$, 又 $a_1 - 2 = -1$, 则 $a_n - 2^n \neq 0$, 则 $\{a_n - 2^n\}$ 是首项为 -1 , 公比为 -1 的等比数列, 故 $a_n - 2^n = (-1)^n$, 所以 $a_n = 2^n + (-1)^n$.

19. C 【解析】一个细胞分裂后细胞个数是一个以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, 则一个细胞经过五次分裂后的细胞个数为 $2 \times 2^{5-1} = 32$. 故选 C.

20. B 【解析】依题意, 数列 $\{a_n\}$ 的相邻两项 a_n, a_{n+1} 分别为同一个等腰直角三角形的底边和腰, 即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

因此数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 1$,

公比 $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的等比数列, 所以 $a_n =$

$$a_1 q^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}, \text{ 所以 } a_7 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 =$$

$$\frac{1}{8}. \text{ 故选 B.}$$

刷提升

1. B 【解析】在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 a_7 = a_3 a_8 = 8$, 所以 $\log_2 a_4 + \log_2 a_7 = \log_2(a_4 a_7) = \log_2 8 = 3$. 故选 B.

点悟: 通过对数运算性质将和转化为积, 向已知条件靠拢

2. AC 【解析】因为等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q \neq 0$), 且 $a_5 = a_3 q^2 = 1$, 所以 $a_3 = \frac{1}{q^2}, a_4 = \frac{1}{q}, a_6 = q, a_7 = q^2$.

$a_3 + a_7 = \frac{1}{q^2} + q^2 \geq 2$, 当且仅当 $q^2 = 1$ 时取等号, 故 A 正确;

$a_4 + a_6 = \frac{1}{q} + q$, 当 $q < 0$ 时, $a_4 + a_6 < 0$, 故 B 错误;

$a_7 - 2a_6 + 1 = q^2 - 2q + 1 = (q-1)^2 \geq 0$, 故 C 正确;

$$a_3 - 2a_4 - 1 = \frac{1}{q^2} - \frac{2}{q} - 1 = \left(\frac{1}{q} - 1\right)^2 - 2,$$

因为 $\frac{1}{q}$ 的大小不确定, 所以 $a_3 - 2a_4 - 1$ 与 0 的大小关系不确定, 故 D 错误. 故选 AC.

3. D 【解析】由题意, 数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 且 $a_3 = 1, \begin{vmatrix} a_6 & 4 \\ 4 & a_8 \end{vmatrix} = 0$, 所以 $a_6 \cdot a_8 - 4 \times 4 = 0$, 所以 $a_6 \cdot a_8 = 16$, 则 $a_7 = \pm 4$.

由等比数列的性质知, a_7 与 a_3 的符号一致, 故 $a_7 = 4$. 故选 D.

→ 避坑: a_7 可通过等比中项性质求得, 但 a_6 与 a_8 的等比中项不仅仅只有 a_7 .

4. AD 【解析】对于 A, 由等比数列的定义知, $\{a_n\}$ 一定为等比数列, A 符合题意;

对于 B, 当 $a_n = 0$ 时, $a_{n+1}^2 = a_n \cdot a_{n+2}$ 成立, $\{a_n\}$ 不为等比数列, B 不符合题意;

对于 C, 由 $S_n = 3^n - 2$, 得 $a_1 = S_1 = 1$, $a_2 = S_2 - S_1 = 6$, $a_3 = S_3 - S_2 = 18$, 则 $a_2^2 \neq a_1 a_3$, 因此 $\{a_n\}$ 不为等比数列, C 不符合题意;

对于 D, 由 $\frac{S_n}{a_1} = n$, 得 $a_1 \neq 0$, 则 $S_n = na_1$, 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = (n-1)a_1$, 则 $S_n - S_{n-1} = a_n = a_1$, 则 $\{a_n\}$ 是首项为 a_1 , 公比为 1 的等比数列, D 符合题意. 故选 AD.

5. C 【解析】设第 n 个正方形的边长为 x_n , 则 $x_{n+1} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}x_n\right)^2 + \left(\frac{1}{4}x_n\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}x_n$, 所以正方形的边长成等比数列, 其公比为 $\frac{\sqrt{10}}{4}$. 设第 n 个正方形的面积为 a_n , 则 $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}$ ($n \geq 2$),

当 $n=1$ 时, $a_1 = 1$, 所以 $a_n = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$. 由 $a_n < \frac{1}{50}a_1$, 得 $\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} < \frac{1}{50}$, 所以 $(n-1)\lg \frac{5}{8} < \lg \frac{1}{50}$,

即 $n-1 > \frac{-\lg 50}{\lg 5 - \lg 8} = \frac{-\lg 5 - 1}{\lg 5 - 3\lg 2} = \frac{-(1-\lg 2)-1}{1-\lg 2-3\lg 2} = \frac{\lg 2-2}{1-4\lg 2} \approx \frac{0.3-2}{1-4 \times 0.3} = 8.5$, 所以 $n > 9.5$, 所以 $k=10$. 故选 C.

6. C 【解析】由题意得当 $n \geq 2$ 时, $\frac{S_n}{S_{n-1}} = \frac{S_{n+1}-S_n}{S_n-S_{n-1}}$, 化简得 $S_n^2 = S_{n-1}S_{n+1}$, 又 $S_1 = a_1 = 1$, $S_2 = a_1 + a_2 = 2$, 故数列 $\{S_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 故 $S_n = 2^{n-1}$,

从而 $b_n = \sqrt{1 + \log_2 2^{n-1}} = \sqrt{n}$, 所以 $\log_2 b_n = \log_2 \sqrt{n} = \frac{1}{2} \log_2 n$. 故当 $1 \leq n \leq 3$ 时, $[\log_2 b_n] = 0$; 当 $4 \leq n \leq 15$ 时, $[\log_2 b_n] = 1$; 当 $16 \leq n \leq 63$ 时, $[\log_2 b_n] = 2$; 当 $64 \leq n \leq 255$ 时, $[\log_2 b_n] = 3$; 当 $n=256$ 时, $[\log_2 b_n] = 4$,

所以 $\sum_{i=1}^{256} [\log_2 b_i] = 3 \times 0 + 12 \times 1 + 48 \times 2 + 192 \times 3 + 4 = 688$. 故选 C.

7. BC 【解析】设正项等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ($q > 0$), $T_9 = a_5^2 > 1$, 则 $a_5 > 1$, $T_8 = (a_4 a_5)^4 < 1$, 则 $a_4 a_5 < 1$, 则 $0 < a_4 < 1$. 对于 A, $a_3 a_6 = a_4 a_5 < 1$, A 错误;

对于 B, $\frac{a_9}{a_8} = q = \frac{a_5}{a_4} > 1$, B 正确;

对于 C, D, 由 $a_1 > 0, q > 1$, 得数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 则 $0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 1 <$

$a_5 < \dots$, 于是 $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$, 当 $n \geq 4$ 时, $T_{n+1} > T_n$, 因此 $T_n \geq T_4$, T_n 无最大值, C 正确, D 错误. 故选 BC.

8. 3 或 $\frac{1}{3}$ 【解析】不妨设这三个正数分

别为 $\frac{a}{q}, a, aq$, 且 $q > 0$, 三个正数的乘积为 $\frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = a^3 = 27$, 解得 $a = 3$.

由三个正数的平方和为 91,

得 $\frac{9}{q^2} + 9 + 9q^2 = 91 \Rightarrow 9q^4 - 82q^2 + 9 = 0$, 解得 $q = \pm 3$ 或 $q = \pm \frac{1}{3}$,

又 $q > 0$, 所以 $q = 3$ 或 $q = \frac{1}{3}$.

9. 2^{n-1} 【解析】因为 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2-a_n}, a_1 = \frac{1}{2}$,

所以 $a_n \neq 2, a_n \neq 0$, 所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} - 1$,

所以 $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{2}{a_n} - 2 = 2\left(\frac{1}{a_n} - 1\right)$. 因为

→ 点悟: 这种形式的递推关系, 一般通过取倒数构造等比数列求解

$\frac{1}{a_1} - 1 = 1$, 所以 $\frac{1}{a_n} - 1 \neq 0$, 又 $b_n = \frac{1}{a_n} - 1$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1, 公比为 2 的等比数列, 所以 $b_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

10. 10 {4, 5, 6, 32, 40, 42, 256}

【解析】当 $m=26$ 时, 则按运算法则得 $26 \rightarrow 13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, 即使得 $a_n = 1$ 需要 10 步“赛程”.

若 $a_9 = 1$, 则 $a_8 = 2, a_7 = 4, a_6 = 8$ 或 1,

(1) 当 $a_6 = 8$ 时, $a_5 = 16, a_4 = 32$ 或 5,

①若 $a_4 = 32$, 则 $a_3 = 64, a_2 = 128$ 或 21,

若 $a_2 = 21$, 则 $a_1 = 42$;

②当 $a_4 = 5$ 时, $a_3 = 10, a_2 = 20$ 或 3,

若 $a_2 = 20$, 则 $a_1 = 40$,

若 $a_2 = 3$, 则 $a_1 = 6$.

(2) 当 $a_6 = 1$ 时, $a_5 = 2, a_4 = 4, a_3 = 8$ 或 1,

①若 $a_3 = 8$, 则 $a_2 = 16, a_1 = 32$ 或 5;

②若 $a_3 = 1$, 则 $a_2 = 2, a_1 = 4$.

故 m 所有可能的取值集合 M 为 {4, 5, 6, 32, 40, 42, 256}.

链接教材 本题目由教材第 56 页第 10 题改编数据而成, 解此题要能从题目的猜想内容抽象出数列的递推关系, 并能正向、逆向利用递推关系生成数列中的前后项.

11. 【解】(1) 由已知得,

$\begin{cases} 3a_1 + 3d = 9, \\ (a_1 + d)^2 = a_1(a_1 + 4d), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases}$

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n - 1$.

(2) 若存在实数 p, q 使数列 $\{b_n + pn + q\}$ 是等比数列,

结合 $b_{n+1} = 2b_n + a_n$ 可知其公比为 2,

则 $b_{n+1} + p(n+1) + q = 2(b_n + pn + q)$, 即

$b_{n+1} = 2b_n + pn + q - p$, 又 $a_n = 2n - 1$,

→ 点悟: 待定系数法求 p, q

所以 $\begin{cases} p = 2, \\ q - p = -1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} p = 2, \\ q = 1, \end{cases}$

因此当 $\begin{cases} p = 2, \\ q = 1 \end{cases}$ 时, 数列 $\{b_n + 2n + 1\}$ 是

首项为 2, 公比为 2 的等比数列.

因为 $b_n + 2n + 1 = 2^n$, 所以 $b_n = 2^n - 2n - 1$.

12. (1) 【证明】 $\because S_n = a_n - 4a_{n+1}$ ①,

$\therefore S_{n+1} = a_{n+1} - 4a_{n+2}$ ②,

②-① $\Rightarrow a_{n+1} = a_{n+1} - 4a_{n+2} - a_n + 4a_{n+1}$,

$\therefore 4a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n$,

故 $4a_{n+2} - 2a_{n+1} = 2a_{n+1} - a_n$,

$\therefore 2a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(2a_{n+1} - a_n)$.

在①中令 $n=1 \Rightarrow a_1 = a_1 - 4a_2$, $\therefore a_2 = 0$.

又 $a_1 = S_1 = -1$, $\therefore 2a_2 - a_1 = 1 \neq 0$,

\therefore 数列 $\{2a_{n+1} - a_n\}$ 是首项为 1, 公比

为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

(2) 【解】由 (1) 得 $2a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, 则

$2^n a_{n+1} - 2^{n-1} a_n = 1$,

\therefore 数列 $\{2^{n-1} a_n\}$ 是以 -1 为首项, 1 为公差的等差数列,

$\therefore 2^{n-1} a_n = n - 2$, 解得 $a_n = \frac{n-2}{2^{n-1}}$.

由 $a_{n+1} - a_n = \frac{n-1}{2^n} - \frac{n-2}{2^{n-1}} = \frac{3-n}{2^n}$ 得,

当 $n \leq 2$ 时, $\{a_n\}$ 单调递增; 当 $n=3$ 时, $a_4 = a_3$; 当 $n \geq 4$ 时, $\{a_n\}$ 单调递减,

$\therefore a_1 < a_2 < a_3 = a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > \dots > a_n > \dots$,

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 的最大项为 $a_3 = a_4 = \frac{1}{4}$.

刷易错

★易错点 1 项的正负判断不准确, 出现多解而致错

13. $-\sqrt{3}$ 【解析】根据题意可得 $a_6 \cdot a_{10} = 3, a_6 + a_{10} = -4$, 则 $a_6 < 0, a_{10} < 0$.

又 $a_6 \cdot a_{10} = a_8^2 = 3$, 解得 $a_8 = \pm\sqrt{3}$.

设 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 则 $a_8 = a_6 q^2 < 0$, 故

$a_8 = -\sqrt{3}$.

易错警示 等比数列中各项不为 0, 且奇数项的符号相同, 偶数项的符号相反. 本题易错解为 $a_8 = \pm\sqrt{3}$.

★易错点 2 条件应用不充分, 出现公比多解而致错

14. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . $\because a_n a_{n+1} = 4^{n-1} > 0$, $\therefore a_{n+1} a_{n+2} = 4^n$

且 $q > 0$, 两式相除可得 $\frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{4^n}{4^{n-1}} = 4$, 即 $q^2 = 4$, $\therefore q = 2$. 故选 C.

15. 2^n 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $2(a_n + a_{n+2}) = 5a_{n+1}$, 整理得

$2q^2 - 5q + 2 = 0$, 解得 $q = 2$ 或 $q = \frac{1}{2}$. 由

$a_5^2 = a_{10} = a_1 q^9 > 0$ 得 $a_1 > 0$. 又因为数列

$\{a_n\}$ 是递增数列, 所以 $q = 2$. 由

$(a_1 q^4)^2 = a_1 q^9$, 解得 $a_1 = q = 2$, 所以数列

$\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^n$.

易错警示 第 14 题易忽略 $q > 0$, 错解为 $q = \pm 2$; 第 15 题易忽略 $a_1 > 0$, 错解为 $q = 2$ 或 $q = \frac{1}{2}$, 原因在于没有充分利用条件.

★易错点 3 等比数列的设法忽视公比的取值范围致错

16. $3 \pm 2\sqrt{2}$ 或 $-5 \pm 2\sqrt{6}$ 【解析】设该等比数列的前 4 项依次为 a, aq, aq^2, aq^3

(其中 $aq \neq 0$),

$$\text{由题意得} \begin{cases} a \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 = \frac{1}{16}, \\ aq + aq^2 = \sqrt{2}, \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} a^2 q^3 = \pm \frac{1}{4}, \\ a^2 (q + q^2)^2 = 2, \end{cases}$$

$$\text{所以} \frac{a^2 q^3}{a^2 (q + q^2)^2} = \pm \frac{1}{8}, \text{整理得 } q^2 - 6q + 1 = 0 \text{ 或 } q^2 + 10q + 1 = 0, \text{解得 } q = 3 \pm 2\sqrt{2} \text{ 或 } q = -5 \pm 2\sqrt{6}.$$

易错警示 涉及三个数依次成等比数列时常将此三个数依次设为 $\frac{a}{q}, a, aq (aq \neq 0)$. 涉及四个数依次成等比数列时,若已知四个数同号,则常依次设为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3 (aq \neq 0)$;若不能确定这四个数的符号,则常依次设为 $a, aq, aq^2, aq^3 (aq \neq 0)$. 本题易错设四个数依次为 $\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q}, aq, aq^3 (aq \neq 0)$, 公比为 q^2 , 相当于规定了这个等比数列各项要么同正,要么同负,而算出公比为 $3 \pm 2\sqrt{2}$, 造成漏解.

素养

17. 【解】 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

$$\text{由题意得 } a_1 = 2, a_3 (a_9 + 6) = a_6^2, \text{ 则 } (2+2d)(2+8d+6) = (2+5d)^2, \text{ 解得 } d=2 \text{ 或 } d=-\frac{2}{3}.$$

$$\text{由 } \sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i} = 3^n - 1 \text{ ①,}$$

$$\text{得 } \sum_{i=1}^n a_i b_{n+2-i} = 3^{n+1} - 1 \text{ ②,}$$

$$\text{②}-\text{①, 得 } a_1 b_{n+1} + d \sum_{i=1}^n b_i = 2 \cdot 3^n.$$

$$\text{当 } d=2 \text{ 时, } 2b_{n+1} + 2 \sum_{i=1}^n b_i = 2 \cdot 3^n, \text{ 即}$$

$$2 \sum_{i=1}^{n+1} b_i = 2 \cdot 3^n, \text{ 得 } T_{n+1} = 3^n, \text{ 则 } T_n = 3^{n-1}.$$

$$\text{当 } d=-\frac{2}{3} \text{ 时, } 2b_{n+1} - \frac{2}{3} T_n = 2 \cdot 3^n, \text{ 即}$$

$$2(T_{n+1} - T_n) - \frac{2}{3} T_n = 2 \cdot 3^n, \text{ 得 } T_{n+1} = \frac{4}{3} T_n + 3^n,$$

$$\text{则 } T_{n+1} - \frac{3}{5} \cdot 3^{n+1} = \frac{4}{3} \left(T_n - \frac{3}{5} \cdot 3^n \right),$$

$$\text{又 } n=1 \text{ 时, } a_1 b_1 = 3^1 - 1 = 2, \text{ 则 } b_1 = 1,$$

$$\text{所以 } T_1 - \frac{3}{5} \times 3 = -\frac{4}{5},$$

$$\text{所以 } \left\{ T_n - \frac{3}{5} \cdot 3^n \right\} \text{ 是首项为 } -\frac{4}{5}, \text{ 公$$

$$\text{比为 } \frac{4}{3} \text{ 的等比数列,}$$

$$\text{所以 } T_n - \frac{3}{5} \cdot 3^n = -\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}, \text{ 则}$$

$$T_n = \frac{3^{n+1}}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right].$$

$$\text{综上所述, 当 } d=2 \text{ 时, } T_n = 3^{n-1}; \text{ 当 } d=-\frac{2}{3} \text{ 时, } T_n = \frac{3^{n+1}}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9} \right)^n \right].$$

4.3.2 等比数列的前 n 项和公式

课时 1 等比数列的前 n 项和(1)

刷基础

1. B 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $a_2 a_3 = 8$, 得 $a_1 q a_1 q^2 = 8$, 由 $a_1 = 1$, 得 $q^3 = 8$, 解得 $q = 2$. 所以 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$. 故选 B.

2. D 【解析】已知 $\{a_n\}$ 为等比数列, 设公比为 q . 当 $a_3 > a_2 > a_1$ 时, 数列 $\{S_n\}$ 不一定是递增数列, 如当 $a_1 = -1, q = \frac{1}{2}$ 时, $a_2 =$

$$-\frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{4},$$

$$S_n = \frac{-1 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} - 2,$$

$\therefore \{S_n\}$ 是递减数列, 充分性不成立; 当数列 $\{S_n\}$ 为递增数列时, $a_3 > a_2 > a_1$ 不一定成立, 如当 $a_1 = 1, q = 1$ 时, $a_2 = 1, a_3 = 1, a_1 = a_2 = a_3$, \therefore 必要性不成立. \therefore “ $a_3 > a_2 > a_1$ ” 是 “数列 $\{S_n\}$ 为递增数列” 的既不充分也不必要条件. 故选 D.

3. D 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q ,

A, 当 $a_n = 1$ 时, $S_n = n$, A 中图符合.

B, 当 $a_1 = 1, q = 1$ 时, $a_n = 1, S_n = 1 - 1 \cdot 1^n = 0$, B 中图符合.

C, 当 $a_1 = 1, q = -2$ 时, $a_n = (-2)^{n-1}$,

$$S_n = \frac{1 - (-2)^n}{3}, \text{ C 中图符合.}$$

D, 由题图可知, a_1, a_2, a_3 都是负数, 所以 $a_1 < 0, q > 0$, 则 $a_n < 0, S_n < 0$, 但 D 中图显示当 $n \geq 4$ 时, a_n 或 S_n 为正数, 矛盾, 故 D 中图不符合. 故选 D.

4. 18 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 当 $q = 1$ 时, $S_n = n$, 不满足题意, 故 $q \neq 1$, 此时 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q} \cdot q^n$, 所以 q^n 的系数和常数项互为相反数, 则 $m = 3, q = 3$. 故 $a_1 = S_1 = 6$, 所以 $a_2 = a_1 q = 18$.

多种解法 因为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = m \cdot 3^n - 3$ (m 是常数), 所以当 $n = 1$ 时, $a_1 = S_1 = 3m - 3$, 当 $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = (m \cdot 3^n - 3) - (m \cdot 3^{n-1} - 3) = 2m \cdot 3^{n-1}$. 因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $a_1 = 3m - 3$ 也满足 $a_n = 2m \cdot 3^{n-1}$, 即 $a_1 = 3m - 3 = 2m$, 解得 $m = 3$, 故 $a_n = 2 \cdot 3^n$, 则 $a_2 = 2 \cdot 3^2 = 18$.

二级结论 当公比 $q \neq 1$ 时, 等比数列的前 n 项和公式是 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n + \frac{a_1}{1-q}$. 由此可见, 非常数列的等比数列的前 n 项和 S_n 是一个关于 n 的指数型函数与一个常数的和, 且指数型函数的系数与该常数互为相反数.

5. B 【解析】不妨设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $a_2 a_5 = 2a_3$ 可得 $a_1^2 q^7 = 2a_1 q^2$, 因为 $a_n > 0, q > 0$, 所以 $a_4 = a_1 q^3 = 2$ ①.

又由 a_4 与 a_6 的等差中项为 $\frac{5}{4}$ 可得

$$a_4 + a_6 = \frac{5}{2}, \text{ 即 } a_4(1+q^2) = \frac{5}{2} \text{ ②,}$$

将①代入②中, 可得 $q = \frac{1}{2}$, 回代入①中, 解得 $a_1 = 16$,

$$\text{于是 } S_4 = \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = \frac{16 \times \left(1 - \frac{1}{16} \right)}{\frac{1}{2}} = 30. \text{ 故}$$

选 B.

6. A 【解析】由已知可得 $2a_4 = a_1 + a_3$ -

$$a_1 \Rightarrow q = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_k = \frac{a_1 \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^k \right]}{1 - \frac{1}{2}} >$$

$$\frac{31}{16} a_1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^k > \left(\frac{1}{2} \right)^5 \Rightarrow k < 5 \Rightarrow k_{\max} = 4, \text{ 故选 A.}$$

7. AC 【解析】由等比数列通项公式得 $a_2 + a_3 = a_1 q + a_2 q = q(a_1 + a_2)$, 又因为 $a_1 + a_2 = 3, a_2 + a_3 = 6$, 所以 $6 = q \times 3 \Rightarrow q = 2$, 故 A 正确, B 错误;

由 $a_1 + a_2 = 3 \Rightarrow a_1 + 2a_1 = 3 \Rightarrow a_1 = 1$, 所以

$$S_4 = \frac{1 \times (1-2^4)}{1-2} = 15, \text{ 故 C 正确, D 错}$$

误. 故选 AC.

8. $\frac{21}{4}$ 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比

为 q , 由题意得 $q \neq 1$, 所以 $\frac{S_{2n}}{S_n} = \frac{1-q^{2n}}{1-q^n} =$

$$1+q^n, \text{ 所以 } q=2,$$

$$\text{所以 } \frac{S_6}{S_4 - S_2} = \frac{1-2^6}{(1-2^4) - (1-2^2)} = \frac{21}{4}.$$

9. B 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$, 则 $\begin{cases} S_3 = a_1(1+q+q^2) = 14, \\ a_3 = a_1 q^2 = 8, \end{cases}$

$$\text{上述两个等式相除得 } \frac{1+q+q^2}{q^2} = \frac{7}{4}, \text{ 整}$$

理可得 $3q^2 - 4q - 4 = 0$. 因为 $q > 0$, 解得

$$q=2, \text{ 故 } \frac{a_7 + a_{11}}{a_5 + a_9} = \frac{a_1 q^6 (1+q^4)}{a_1 q^4 (1+q^4)} = q^2 = 4. \text{ 故}$$

选 B.

10. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比

为 q , 因为 $S_3 = 3, S_6 = 9$,

若 $q = 1$, 则 $S_3 = 3a_1 = 3$, 得 $a_1 = 1$, 则

$$S_6 = 6a_1 = 6 \neq 9, \text{ 故 } q \neq 1,$$

$$\frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = \frac{1-q^6}{1-q^3} = 1+q^3 = \frac{9}{3} =$$

3, 所以 $q^3 = 2$.

$$\text{所以 } \frac{S_{15}}{S_3} = \frac{1-q^{15}}{1-q^3} = \frac{1-q^{15}}{1-q^3} = \frac{1-2^5}{1-2} =$$

$$\frac{1-q^{15}}{1-q^3} = 31, \text{ 所以 } S_{15} = 31S_3 = 31 \times 3 = 93. \text{ 故}$$

选 C.

链接教材 本题是教材第 36 页例 8 的变式与延伸.

在等比数列的通项公式 a_n 与前 n 项

和公式 S_n 中,共涉及五个相关量: a_1, q, n, a_n, S_n , 利用等比数列的通项公式及前 n 项和公式即可“知三求二”. 同时还要注意整体思想,有时可把 q^n 看作一个整体代换求解.

11. C 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q .

由 $a_3 = 1, a_6 = \frac{1}{8}$, 得 $\frac{a_6}{a_3} = q^3 = \frac{1}{8}, q = \frac{1}{2}$, 则 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = 4$, 所以 $a_n = a_1 q^{n-1} = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$, 所以 $a_n a_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-5}$. 所以 $\frac{a_n a_{n+1}}{a_{n-1} a_n} = \frac{1}{4}, n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$, 所以数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 是首项为 $a_1 a_2 = 4 \times 2 = 8$, 公比为 $\frac{1}{4}$ 的等比数列. 所以 $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \cdots + a_n a_{n+1} = 8 \left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{32}{3} (1 - 4^{-n})$. 故

选 C.

课时 2 等比数列的前 n 项和(2)

刷基础

1. A 【解析】 \because 等比数列 $\{a_n\}$ 共有 $2n+1$ 项, \therefore 等比数列中偶数项有 n 项, 奇数项有 $n+1$ 项. 由题意得 $q \neq \pm 1, \therefore$ 偶数项和为 $\frac{a_1 q (1-q^{2n})}{1-q^2} = 84, \therefore \frac{q^2 - q^{2n+2}}{1-q^2} =$

$42q$ ①, 奇数项和为 $\frac{a_1 (1-q^{2n+2})}{1-q^2} = 170,$

$\therefore \frac{1-q^{2n+2}}{1-q^2} = 85$ ②, 两式相减得 $-1 =$

$42q - 85$, 解得 $q = 2, \therefore \frac{2 \times 2 (1-4^n)}{1-4} = 84,$

④思: 等比数列的项数为 $2n+1$ 时, $\frac{S_{2n+1} - a_1}{S_n} = q$

即 $4^n = 64$, 解得 $n = 3$. 故选 A.

2. B 【解析】由等比数列的前 n 项和性质得 $S_{10}, S_{20} - S_{10}, S_{30} - S_{20}$ 成等比数列, 所以 $(S_{20} - S_{10})^2 = S_{10} (S_{30} - S_{20})$, 所以 $(30 - 10)^2 = 10 (S_{30} - 30)$, 解得 $S_{30} = 70$. 故选 B.

多种解法 对等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 有 $S_{n+m} = S_n + q^m S_n, \therefore S_{20} = S_{10} + q^{10} S_{10}$, 即 $10(1+q^{10}) = 30, \therefore q^{10} = 2$. $\therefore S_{30} = S_{10} + q^{10} S_{20} = 70$, 故选 B.

链接教材 本题是教材第 37 页例 9 的变式与延伸, 考查等比数列前 n 项和性质的应用.

在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 当 $q \neq -1$ 时, $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, \dots$ 是公比为 q^k 的等比数列 ($k \in \mathbf{N}^*, S_k \neq 0$); 当 $q = -1$ 且 k 为偶数时, $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, \dots$ 不是等比数列; 当 $q = -1$ 且 k 为奇数时, $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, \dots$ 是公比为 -1 的等比数列.

3. D 【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q , 前 n 项和为 S_n , 共有 $2n$ 项, 则 $S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}} = S_{2n}$, 则 $S_{\text{偶}} = S_{2n} - S_{\text{奇}} = 2S_{\text{奇}}$, 则 $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = \frac{a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1}} = q = 2$. 又 $a_1 \cdot a_2 = a_1^2 \cdot q = 8$, 所以 $a_1 = \pm 2$. 故选 D.

多种解法 设数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q , 共有 $2n$ 项, 则 $\{a_{2n-1}\}$ 的首项为 a_1 , 公比为 q^2 , 项数为 n , 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 所有奇数项的和为 T_n , 因为所有项的和是奇数项的和的 3 倍, 所以 $q \neq 1$, 所以 $T_n = a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = \frac{a_1 [1 - (q^2)^n]}{1 - q^2}, S_{2n} = \frac{a_1 (1 - q^{2n})}{1 - q}$. 故 $\frac{S_{2n}}{T_n} = \frac{1 - q}{a_1 [1 - (q^2)^n]} = 3$, 解得 $q = 2$, 又 $a_1 \cdot a_2 = a_1^2 \cdot q = 8$, 所以 $a_1 = \pm 2$. 故选 D.

二级结论 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的性质

(1) $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}$ 仍构成等比数列 (注意: $q \neq -1, m \in \mathbf{N}^*$).

(2) $S_{m+n} = S_m + q^m S_n$.

(3) 若 $\{a_n\}$ 的项数为偶数, 则 $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = q$;

若 $\{a_n\}$ 的项数为奇数, 则 $\frac{S_{\text{奇}} - a_1}{S_{\text{偶}}} = q$.

4. D 【解析】由题意知 $S_3, S_6 - S_3, S_9 - S_6$ 成等比数列, 所以 $(S_6 - S_3)^2 = S_3 (S_9 - S_6)$, 即 $(S_6 - 4)^2 = 4 (S_9 - S_6)$, 所以 $S_9 = \frac{1}{4} (S_6^2 - 4S_6 + 16) = \frac{1}{4} [(S_6 - 2)^2 + 12]$, 当 $S_6 = 2$ 时, S_9 取得最小值 3. 故选 D.

5. $3 + (2n-3) \cdot 2^n$ 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则由题意得 $\begin{cases} a_1 + a_1 + 2d = 6, \\ a_1 + 2d + a_1 + 3d = 12, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a_1 + d = 3, \\ 2a_1 + 5d = 12, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2, \end{cases}$ 所以等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)d = 1 + 2(n-1) = 2n-1$.

由 $b_n = 2b_{n-1}, n \geq 2$ 可得, 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列, 且公比为 2, 又因为 $b_1 = a_1 = 1$, 所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = 2^{n-1}$.

由于 $c_n = a_n \cdot b_n = (2n-1) \cdot 2^{n-1}$, 则 $T_n = 1 \times 1 + 3 \times 2 + 5 \times 2^2 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^{n-2} + (2n-1) \cdot 2^{n-1}$, 又 $2T_n = 1 \times 2 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n-3) \cdot 2^{n-1} + (2n-1) \cdot 2^n$, 上面两式相减得,

$-T_n = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 2^2 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-1} - (2n-1) \cdot 2^n = 1 + 2 \cdot \frac{2 \cdot (1-2^{n-1})}{1-2} - (2n-1) \cdot 2^n = 1 - 4(1-2^{n-1}) - (2n-1) \cdot 2^n$, 所以 $T_n = -1 + 4(1-2^{n-1}) + (2n-1) \cdot 2^n = 3 + (2n-3) \cdot 2^n$.

6. 【解】 (1) 由题意知 $\begin{cases} b_2 = 3, \\ S_3 = 9, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a_1(d+1) = 3, \\ 3a_1 + 3d = 9, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} a_1 = 3, \\ d = 0 \end{cases}$ (舍去),

所以 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$, 则 $b_1 = a_1 = 1, q = d+1 = 3$, 所以 $b_n = 1 \times 3^{n-1} = 3^{n-1}$.

(2) 由 (1) 知 $c_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{2n-1}{3^{n-1}} = (2n-1) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

则 $T_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + (2n-3) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} + (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, 所以 $\frac{1}{3} T_n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 + 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + (2n-3) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

两式相减得 $\frac{2}{3} T_n = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 2 \left[\left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right] - (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

⑤敲黑板: 错位相减法求和, 宁可多写几项, 也不要简单的问问题上丢分

$= 1 + 2 \times \frac{\frac{1}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]}{1 - \frac{1}{3}} - (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 + \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] - (2n-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 - (2n+2) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$,

故 $T_n = 3 - \frac{n+1}{3^{n-1}}$.

7. D 【解析】设每年偿还的金额为 x 元, 则 $a(1+p)^n = x + x(1+p) + x(1+p)^2 + \cdots + x(1+p)^{n-1}$,

则 $a(1+p)^n = x \cdot \frac{1 - (1+p)^n}{1 - (1+p)}$, 解得 $x = \frac{ap(1+p)^n}{(1+p)^{n-1} - 1}$, 所以该学生家长每年的偿还金额是 $\frac{ap(1+p)^n}{(1+p)^{n-1} - 1}$ 元. 故选 D.

8. D 【解析】第 n 个正方形的周长为 a_n , 则边长为 $\frac{a_n}{4}$, 则第 $n+1$ 个正方形的边长为 $\sqrt{\left(\frac{1}{3} \times \frac{a_n}{4}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \times \frac{a_n}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{a_n}{4}$,

周长 $a_{n+1} = \frac{\sqrt{5}}{3} a_n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是公比为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 首项为 m 的等比数列,

所以 $a_2 = \frac{\sqrt{5}}{3} a_1 = \frac{\sqrt{5}}{3} m, a_3 = m \times \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} m, S_2 = a_1 + a_2 = m + \frac{\sqrt{5}}{3} m, S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = m + \frac{\sqrt{5}}{3} m + \frac{5}{9} m = \frac{\sqrt{5}}{3} m + \frac{14}{9} m$. 故选 D.

刷易错

★易错点1 错认项数和而致错

9. $\frac{2}{7}(8^{n+4}-1)$ 【解析】∵ 数列 $2, 2^4, \dots, 2^{3n+10}$ 是首项为 2, 公比为 $2^3=8$, 项数为 $n+4$ 的等比数列, $\therefore f(n)=$

点悟: $3n+10=1+3(m-1)$, 解得 $m=n+4$

$$\frac{2(1-8^{n+4})}{1-8} = \frac{2}{7} \cdot (8^{n+4}-1).$$

易错警示 本题容易错误地认为项数为 n . 数列的项数需通过计算得出, 不能盲目地认为数列的项数都为 n , 从而造成错解.

★易错点2 利用等比数列求和公式时忽视 $q=1$ 的情形而致错

10. B 【解析】因为 $a_1=1$, 所以当 $q=1$ 时, $a_1+a_2+a_3=3$, 所以 $S_3=3$,

当 $q \neq 1$ 时, $S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q} = 3(q \neq 1)$, 解得 $q=-2$, 所以“ $S_3=3$ ”是“ $q=-2$ ”的必要不充分条件. 故选 B.

易错警示 在等比数列的求和公式中, 当公比 $q=1$ 时, $S_n=na_1$, 因此涉及等比数列求和时要注意对 q 分类讨论, 本题求解的易错之处是忽视对 $q=1$ 的讨论而错解.

刷提升

1. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q, q>0$,

因为 $S_2=1, S_4=5$, 所以 $q \neq 1$,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{a_1(1-q^2)}{1-q} = 1, \\ \frac{a_1(1-q^4)}{1-q} = 5, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = \frac{1}{3}, \\ q = 2, \end{cases}$$

所以 $a_1 = \frac{1}{3}$. 故选 C.

2. C 【解析】因为 $\log_2 a_{n+1} - \log_2 a_n = 1$, 所以 $\log_2 \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 则 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=1$ 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $S_n = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2^{n+1}-1$, 故选 C.

3. A 【解析】由题知, $S_3=4, S_6-S_3=8$, 可得 $\frac{S_6-S_3}{S_3} = \frac{S_9-S_6}{S_6-S_3} = \frac{S_{12}-S_9}{S_9-S_6} = 2$,

点悟: 等比数列片段和性质的应用

可得 $S_6=4+8=12, S_9=2 \times 8+12=28, S_{12}=2 \times (28-12)+28=60$,

$$\text{则 } \frac{S_{12}}{S_9} = \frac{60}{28} = \frac{15}{7}. \text{ 故选 A.}$$

4. C 【解析】因为 $S_n = 2a_n - 4$, 所以令 $n=1$, 解得 $a_1=4$,

当 $n \geq 2$ 时, 由 $\begin{cases} S_n = 2a_n - 4, \\ S_{n-1} = 2a_{n-1} - 4 \end{cases}$ 得 $a_n = S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2a_{n-1}$, 则 $a_n = 2a_{n-1} (n \geq 2)$, 又 $a_1=4$, 所以 $a_n \neq 0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n = 2^{n+1}$.

由 $\lambda a_n \geq 2 \log_2 a_n + 1$, 得 $\lambda \geq \frac{2n+3}{2^{n+1}}$ 对任意正整数 n 恒成立,

$$\text{令 } c_n = \frac{2n+3}{2^{n+1}}, \text{ 则 } \lambda \geq (c_n)_{\max}, \text{ 而 } c_{n+1} -$$

$$c_n = \frac{-2n-1}{2^{n+2}} < 0, \text{ 所以 } c_{n+1} < c_n,$$

即数列 $\{c_n\}$ 是递减数列, 故 $(c_n)_{\max} = c_1 = \frac{5}{4}$, 所以 $\lambda \geq \frac{5}{4}$, 所以 λ 的最小值为 $\frac{5}{4}$. 故选 C.

5. B 【解析】由题意得 $a_5 = a_1 q^4 = 5q^4$, $a_{15} = a_5 + 10d = 5q^4 + 10d = 240$, 当 $q=1$ 时, d 不是正整数; 当 $q=2$ 时, $d=16$; 当 $q \geq 3$ 时, $5q^4 \geq 405$, 此时 d 不是正整数, 所以 $q=2, d=16$, 所以该数列前 5 项的和为 $\frac{5 \times (1-2^5)}{1-2} = 155$. 故选 B.

6. B 【解析】联立 $\begin{cases} a_1+a_4=18, \\ a_2a_3=a_1a_4=32, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} a_1=2, \\ a_4=16 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=16, \\ a_4=2 \end{cases}$. 又因为数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列, 所以 $\begin{cases} a_1=2, \\ a_4=16, \end{cases}$ 则公比 $q=2, a_n=2^n$, $S_{k+6} - S_k = a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+6} = \frac{2^{k+1}(1-2^6)}{1-2} = 2^{k+7} - 2^{k+1}$, 所以 $S_{k+6} - S_k = 2^{k+7} - 2^{k+1} = 2^{11} - 2^5$, 所以 $k=4$. 故选 B.

7. B 【解析】由 $2a_n a_{n+1} + a_{n+1} = 3a_n, a_2 = \frac{9}{11}$ 可得 $2a_1 a_2 + a_2 = 3a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{5}$, 易知 $a_n \neq 0$, 则 $2a_n a_{n+1} + a_{n+1} = 3a_n$ 等式两边同时除以 $a_n a_{n+1}$, 可得 $2 + \frac{1}{a_n} = \frac{3}{a_{n+1}}$, 整理得 $\frac{1}{a_n} - 1 = 3\left(\frac{1}{a_{n+1}} - 1\right)$, 又 $\frac{1}{a_1} - 1 = \frac{2}{3}$, 所以 $\frac{1}{a_n} - 1 \neq 0$,

点悟: 一定要说明等比数列中的项不为 0

所以 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是以 $\frac{2}{3}$ 为首项, $\frac{1}{3}$ 为公比的等比数列, 则 $\frac{1}{a_n} - 1 = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} =$

$$2\left(\frac{1}{3}\right)^n, \text{ 故 } \frac{1}{a_1} - 1 + \frac{1}{a_2} - 1 + \dots + \frac{1}{a_n} - 1 = \frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) - n, \text{ 故 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = n + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

易知 $f(n) = n + 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n (n \in \mathbf{N}^*)$ 单调递增, $f(99) = 100 - \frac{1}{3^{99}} < 100 < f(100) = 101 - \frac{1}{3^{100}}$, 所以使不等式 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 100$ 成立的 n 的最大值为 99. 故选 B.

8. ABD 【解析】对于 A, 因为 a_4, a_3, a_5 成等差数列, 所以 $2a_3 = a_4 + a_5$, 即 $2a_3 = a_3 q + a_3 q^2$, 因为 $a_3 \neq 0$, 所以

$q^2 + q - 2 = 0$, 解得 $q = -2$ 或 $q = 1$ (舍去), 故 A 正确;

对于 B, 由 A 知 $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \times (-2)^{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot 2^n$, 则 $|a_n| = 2^n$, 则 $\log_2 |a_n| = n$, 所以 $\log_2 |a_{n+1}| - \log_2 |a_n| = n+1-n=1$, 即数列 $\{\log_2 |a_n|\}$ 是等差数列, 故 B 正确;

对于 C, 由 B 知 $a_n = (-1)^{n-1} \cdot 2^n$, 则 $a_3 a_4 \dots a_8 a_9 = (-1)^{2+3+4+\dots+8} \times 2^{3+4+5+\dots+9} = (-1)^{35} \times (2^6)^7 = -64^7$, 故 C 错误;

对于 D, 数列 $\{a_n\}$ 的所有奇数项之和为 $S_{\text{奇}} = a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2m-1} = 2 + 2^3 + 2^5 + \dots + 2^{2m-1} = 2 \times \frac{4^m - 1}{4 - 1} = \frac{2}{3} (4^m - 1)$,

所有偶数项之和为 $S_{\text{偶}} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2m} = -(2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2m}) = -4 \times \frac{4^m - 1}{4 - 1} = -\frac{4}{3} (4^m - 1)$, 则 $\frac{S_{\text{偶}}}{S_{\text{奇}}} = -2$, 故 D 正确. 故选 ABD.

9. BC 【解析】对于 A, 由 $\frac{a_2 a_{24} - 1}{a_2 a_{25} - 1} < 0$ 得

$(a_2 a_{24} - 1)(a_2 a_{25} - 1) < 0$, 由 $a_2 a_{24} a_2 a_{25} = a_2^2 a_{24} a_{25} q = a_2^2 a_{24} q > 1$, 可得 $q > 0$,

当 $q \geq 1$ 时, 因为 $a_1 > 1$, 所以 $a_2 a_{24} = a_1 q^{2 \times 23} > 1, a_2 a_{25} = a_1 q^{2 \times 24} > 1$, 此时 $(a_2 a_{24} - 1)(a_2 a_{25} - 1) > 0$, 不符合题意, 所以 $0 < q < 1$.

因为 $a_1 > 1$, 所以 $a_2 a_{24} = a_1 q^{2 \times 23} > 0, a_2 a_{25} = a_1 q^{2 \times 24} > 0, a_2 a_{24} > a_2 a_{25} q = a_2 a_{25}$, 结合 $(a_2 a_{24} - 1)(a_2 a_{25} - 1) < 0$ 且 $a_2 a_{24} a_2 a_{25} > 1$, 可得 $a_2 a_{24} > 1, 0 < a_2 a_{25} < 1$, 则 $S_2 a_{24} < S_2 a_{24} + a_2 a_{25} = S_2 a_{25}$, 所以 A 错误.

对于 B, 因为 $a_2 a_{24} a_2 a_{26} - 1 = a_2^2 a_{25} - 1 < 0$, 所以 $a_2 a_{24} a_2 a_{26} < 1$, 所以 B 正确.

对于 CD, 由 $a_1 > 1, a_2 a_{24} > 1, 0 < a_2 a_{25} < 1$, 且 $0 < q < 1$, 可知 a_1, a_2, \dots, a_{24} 均大于 1, $a_2 a_{25}, a_2 a_{26}, \dots$ 均大于 0 且小于 1, 由 $T_n = a_1 a_2 \dots a_n$, 可知 T_{24} 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大值, 故 C 正确, D 错误. 故选 BC.

10. ACD 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$.

对于 A 选项, 因为 $a_1 = b_1$, 所以 $a_1 + b_1 = a_2 = 2b_1$, 所以 $a_2 + b_2 = b_3 = 2b_1 + b_2$, 即 $b_1 q^2 = 2b_1 + b_1 q$, 所以 $q^2 - q - 2 = 0$, 因为 $q > 0$, 解得 $q = 2$, A 正确;

对于 B 选项, 由题意可得 $d = a_2 - a_1 = b_1$, 则 $a_n = a_1 + (n-1)d = nb_1$, 又 $b_n = b_1 q^{n-1} = 2^{n-1} b_1$, 且 $b_1 > 0$, 所以 $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n}{2^{n-1}}$,

令 $c_n = \frac{n}{2^{n-1}}$, 则 $c_{n+1} - c_n = \frac{n+1}{2^n} - \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{1-n}{2^n}$, 当 $n \geq 2$ 时, $c_{n+1} - c_n < 0$, 即 $c_{n+1} < c_n$, 所以数列 $\{c_n\}$ 从第二项开始单调

递减, 当 $n \geq 3$ 时, $c_n \leq c_3 = \frac{3}{4} < 1$, 则

$a_n \neq b_n$, 故对任意的 $m \geq 3$ 且 $m \in \mathbf{N}^*$, $a_m \neq b_m$, B 错误;

对于 C 选项, $b_n - \lambda a_n = (2^{n-1} - \lambda n) b_1$, 令 $x_n = (2^{n-1} - \lambda n) b_1$,

对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$, $x_{n+1} - x_n = [2^n - \lambda(n+1)] b_1 - (2^{n-1} - \lambda n) b_1 = (2^{n-1} - \lambda) b_1$,

由于 $2^{n-1} \geq 2^0 = 1$, 则对任意的 $\lambda < 1$,

$x_{n+1}-x_n=(2^{n+1}-\lambda)b_1>0$, 则 $x_{n+1}>x_n$, 所以 $\forall \lambda<1$, 数列 $\{b_n-\lambda a_n\}$ 为递增数列, C 正确;

对于 D 选项, $b_n=\frac{2^{n-1}}{n}$,

则 $\sum_{k=1}^{10} \frac{b_k}{a_k}=1+\frac{2}{2}+\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{4}+\frac{2^4}{5}+\frac{2^5}{6}+\frac{2^6}{7}+\frac{2^7}{8}+\frac{2^8}{9}+\frac{2^9}{10}<1+1+2+2+4+6+10+16+29+52=123<150$, D 正确.

故选项 ACD.

11. 2.88 【解析】由题意可知第 3 年新建设了 $2 \times (1+0.2)^2=2.88$ 万个充电桩; 假设 n 年后充电桩总量达到 30 万个, 则 $2+2 \times (1+0.2)+\cdots+2 \times (1+0.2)^{n-1} \geq 30$,

即 $\frac{2(1-1.2^n)}{1-1.2} \geq 30 \Rightarrow 1.2^n \geq 4$, 取常用

对数整理得 $n \geq \frac{2 \lg 2}{\lg 6 - \lg 5} \approx \frac{0.602}{0.079} \approx$

7.62, 即约 8 年后, 可达到要求.

12. 【解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $\begin{cases} a_5=a_2+a_3, \\ S_5=5a_1+10d=25, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} (a_1+4d)^2=(a_1+d) \cdot (a_1+13d), \\ 5a_1+10d=25, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1=5, \\ d=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=1, \\ d=2 \end{cases}$, 所以 $a_n=5$ 或 $a_n=2n-1$.

(2) 由数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 得 $a_n=2n-1$, 所以 $b_n=2^n \cdot a_n=(2n-1) \cdot 2^n$, 所以 $T_n=1 \cdot 2^1+3 \cdot 2^2+5 \cdot 2^3+\cdots+(2n-3) \cdot 2^{n-1}+(2n-1) \cdot 2^n$, 则 $2T_n=1 \cdot 2^2+3 \cdot 2^3+5 \cdot 2^4+\cdots+(2n-3) \cdot 2^n+(2n-1) \cdot 2^{n+1}$, 两式相减得, $-T_n=2+2 \times (2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots+2^n)-(2n-1) \cdot 2^{n+1}$ $=2+2 \times \frac{4(1-2^{n+1})}{1-2}-(2n-1) \cdot 2^{n+1}$ $=(3-2n) \cdot 2^{n+1}-6$, 则 $T_n=(2n-3) \cdot 2^{n+1}+6$.

13. 【解】(1) 因为 $a_{n+1}=a_n+2^n$, 即 $a_{n+1}-a_n=2^n$, 所以 $a_2-a_1=2^1, a_3-a_2=2^2, \cdots, a_n-a_{n-1}=2^{n-1}$, 将以上 $n-1$ 个等式累加, 得 $a_n-a_1=2+2^2+\cdots+2^{n-1}=\frac{2(1-2^{n-1})}{1-2}=2^n-2(n \geq 2)$,

又 $a_1=2$, 所以 $a_n=2^n(n \geq 2)$, 当 $n=1$ 时, $a_1=2$ 也满足 $a_n=2^n$, 所以 $a_n=2^n$.

(2) (i) 因为 $2b_{n+1}=b_n+b_{n+2}$, 所以 $\{b_n\}$ 为等差数列. 设 $\{b_n\}$ 的公差为 d , 又 $b_1=3, b_3=a_3+1=9$, 所以 $d=\frac{b_3-b_1}{3-1}=3$,

所以 $b_n=3n$, 所以 $S_n=\frac{(3+3n)n}{2}$,

所以 $\frac{1}{S_n}=\frac{2}{(3+3n)n}=\frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$,

所以 $T_n=\frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$

$=\frac{2}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{2}{3}$.

(ii) 因为对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $b_n-5 \leq \lambda a_n$ 恒成立, 即对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $3n-5 \leq \lambda \cdot 2^n$ 恒成立, 所以对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $\lambda \geq \frac{3n-5}{2^n}$ 恒成立,

令 $c_n=\frac{3n-5}{2^n}$, 则 $c_{n+1}-c_n=\frac{3n-2}{2^{n+1}}-\frac{3n-5}{2^n}=\frac{3n-2-2(3n-5)}{2^{n+1}}=\frac{8-3n}{2^{n+1}}$,

所以当 $1 \leq n \leq 2$ 时, $c_{n+1}-c_n>0$, 当 $n \geq 3$ 时, $c_{n+1}-c_n<0$,

所以 $c_1<c_2<c_3>c_4>c_5>\cdots$,

所以 $(c_n)_{\max}=c_3=\frac{1}{2}$, 所以 $\lambda \geq \frac{1}{2}$,

故实数 λ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

第 4.3 节综合训练

刷能力

1. A 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 依题意得 $\begin{cases} a_3=a_1q^2=3, \\ S_3=a_1+a_2+a_3=a_1+a_1q+a_1q^2=9, \end{cases}$ 解得 $q=1$ 或 $q=-\frac{1}{2}$. 故选 A.

2. C 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q \neq 0)$, 则 $a_1a_5=\frac{a_2a_6}{q^2}, a_3a_5=a_2a_6$, $a_2a_8=a_2a_6q^2$. $\therefore a_1a_5+2a_3a_5+a_2a_8=36, a_2a_6=8$, $\therefore \frac{8}{q^2}+16+8q^2=36$, 解得 $q=\pm\sqrt{2}$ 或 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. \therefore 等比数列 $\{a_n\}$ 是递减数列, $a_n>0, \therefore q=\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\therefore a_2a_6=8, \therefore a_1^2q^6=8$. 又 $a_n>0, \therefore a_1=8$, $\therefore a_n=a_1q^{n-1}=8 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1}=2^3 \times \left(2^{-\frac{1}{2}} \right)^{n-1}=2^{\frac{7-n}{2}}, \therefore b_n=\log_2 a_n=\frac{7-n}{2}$,

$\therefore |b_n|=\left| \frac{7-n}{2} \right|=\begin{cases} \frac{7-n}{2}, & 1 \leq n \leq 7, n \in \mathbf{N}, \\ \frac{n-7}{2}, & n \geq 8, n \in \mathbf{N}, \end{cases}$ $\therefore T_{12}=\frac{6+5+4+3+2+1+0}{2}+\frac{1+2+3+4+5}{2}=18$. 故选 C.

3. A 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q \neq 0)$. 由 S_3, S_6, S_9 依次成等差数列, 可得 $2S_6=S_3+S_9$, 当 $q=1$ 时, $S_9=9a_1, S_3=3a_1, S_6=6a_1$, 不满足 $2S_6=S_3+S_9$, 故 $q \neq 1$, $\therefore \frac{2a_1(1-q^6)}{1-q}=\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^9)}{1-q}$, $\therefore a_1 \neq 0, q \neq 0, \therefore 2q^6-q^3-1=0$, 解得 $q^3=-\frac{1}{2}$ 或 $q^3=1$ (舍).

当 $q^3=-\frac{1}{2}$ 时, $2a_8=2a_1q^7=2a_1q \times (q^3)^2=\frac{1}{2}a_1q, a_2+a_5=a_1q(1+q^3)=$

$\frac{1}{2}a_1q, \therefore 2a_8=a_2+a_5$, 即 a_2, a_8, a_5 依次成等差数列, 故充分性成立.

由 a_2, a_8, a_5 依次成等差数列可得 $2a_8=a_2+a_5$, 即 $2a_1q^7=a_1q+a_1q^5$, 由 $a_1q \neq 0$ 得 $2q^6-q^3-1=0$, 解得 $q^3=1$

或 $q^3=-\frac{1}{2}$, 故 $q=1$ 或 $q=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}}$.

当 $q=1$ 时, $S_9=9a_1, S_3=3a_1, S_6=6a_1$, 不满足 $2S_6=S_3+S_9$, 故必要性不成立. 综上可得, “ S_3, S_6, S_9 依次成等差数列”是“ a_2, a_8, a_5 依次成等差数列”的充分不必要条件. 故选 A.

4. D 【解析】设第五只猴子来的时候有 $5x+1$ 个桃子,

则第四只猴子来的时候有 $\frac{5(5x+1)}{4}+$

$1=\frac{5^2}{4}x+\frac{5}{4}+1$ 个桃子,

则第三只猴子来的时候有 $\frac{5}{4} \left[\frac{5(5x+1)}{4}+1 \right]+1=\frac{5^3}{4^2}x+\left(\frac{5}{4} \right)^2+\frac{5}{4}+1$ 个桃子,

则第二只猴子来的时候有 $\frac{5}{4} \left[\frac{5^3}{4^2}x+\left(\frac{5}{4} \right)^2+\frac{5}{4}+1 \right]+1=\frac{5^4}{4^3}x+\left(\frac{5}{4} \right)^3+\left(\frac{5}{4} \right)^2+\frac{5}{4}+1$ 个桃子,

则第一只猴子来的时候有 $\frac{5}{4} \left[\frac{5^4}{4^3}x+\left(\frac{5}{4} \right)^3+\left(\frac{5}{4} \right)^2+\frac{5}{4}+1 \right]+1=\frac{5^5}{4^4}x+\left(\frac{5}{4} \right)^4+\left(\frac{5}{4} \right)^3+\left(\frac{5}{4} \right)^2+\frac{5}{4}+1$ 个桃子, $\frac{5^5}{4^4}x+\left(\frac{5}{4} \right)^4+\left(\frac{5}{4} \right)^3+\left(\frac{5}{4} \right)^2+\frac{5}{4}+1=$

$\frac{5^5}{4^4}x+\frac{1-\left(\frac{5}{4} \right)^5}{1-\frac{5}{4}}=\frac{5^5}{4^4}x-4+\frac{5^5}{4^4}=$

$\frac{5^5}{4^4}(x+1)-4$, 因为 4 与 5 互质, 且 $\frac{5^5}{4^4}(x+1)-4$ 为整数, 所以 $x+1$ 能被 $4^4=256$ 整除, 故 $x+1$ 的最小值为 256, 所以 x 的最小值为 255, 此时 $\frac{5^5}{4^4}(x+1)-4=3\ 121$, $4x=1\ 020$. 故选 D.

5. A 【解析】依题意 $a_1+a_2=1$, 所以 $a_n+a_{n+1}=2^{n-1}$, 当 $n \geq 2$ 时, $a_{n-1}+a_n=2^{n-2}$, 则 $a_{n+1}-a_{n-1}=2^{n-2}$, 所以 $a_{2\ 024}=a_2+(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{2\ 024}-a_{2\ 022})$ $=1+2+2^3+2^5+\cdots+2^{2\ 021}$ $=\frac{2(1-4^{1\ 011})}{1-4}=\frac{2^{2\ 023}+1}{3}$,

故选 A.

6. ABC 【解析】对于 B, 因为数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 所以 $a_2a_3=a_1a_4=32$, 由 $\begin{cases} a_2a_3=32, \\ a_2+a_3=12, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_2=4, \\ a_3=8 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_2=8, \\ a_3=4 \end{cases}$, 则 $q=\frac{a_3}{a_2}=2$ 或 $\frac{1}{2}$, 又 q 为整数, 所以

$q=2$,故 B 正确;

对于 A,此时 $a_2=4$,则 $a_n=a_2q^{n-2}=4 \times 2^{n-2}=2^n$,故 A 正确;

对于 C, D, $a_1=\frac{a_2}{q}=2$,所以 $S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$,则 $S_2=2^3-2=6$, $S_4=2^5-2=30$, $S_6=2^7-2=126$,

因为 $\frac{S_4}{S_2} \neq \frac{S_6}{S_4}$,所以 S_2, S_4, S_6, \dots 不是等比数列,故 C 正确, D 错误. 故选 ABC.

7. BD 【解析】对于 A,设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q \neq 0)$,由 $a_{n+1}=S_n+2$,得 $a_n=S_{n-1}+2(n \geq 2)$,

两式相减得 $a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}=a_n$,即 $a_{n+1}=2a_n$,所以 $q=2$,

因为 $\{a_n\}$ 为等比数列,所以 $a_2=2a_1$,又 $a_2=S_1+2=a_1+2$,所以 $a_1=2$,

所以 $a_n=2 \times 2^{n-1}=2^n$,A 错误;

对于 B,设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ,由 $b_2=a_1=2, b_8=a_3=8$,

得 $6d=b_8-b_2=6$,解得 $d=1$,所以 $b_n=b_2+(n-2)d=n$,B 正确;

对于 C,由 $A=\{x \in \mathbb{N}^* | b_n \leq x \leq a_n\}$,得 $A=\{x \in \mathbb{N}^* | n \leq x \leq 2^n\}$,

则集合 A 中元素的个数为 2^n-n+1 ,即 $c_n=2^n-n+1$,C 错误;

对于 D, $T_n=(2+2^2+\dots+2^n)-(1+2+\dots+n)+n=\frac{2(1-2^{n+1})}{1-2}-\frac{n(n+1)}{2}+n=2^{n+1}-\frac{n(n+1)}{2}-2$,D 正确. 故选 BD.

8. $2^{n+1}+n^2-2$ 【解析】由 $a_1=1, a_2=2$,
 $a_{n+2}=\begin{cases} a_n+2, n=2k-1, \\ 2a_n, n=2k \end{cases} (k \in \mathbb{N}^*)$,

可得数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 1 为首项,2 为公差的等差数列;偶数项是以 2 为首项,2 为公比的等比数列.

\therefore 对任意正整数 $k, a_{2k-1}=1+2(k-1)=2k-1, a_{2k}=2^k$.

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases} n, n=2k-1, \\ 2^{\frac{n}{2}}, n=2k, \end{cases} k \in \mathbb{N}^*$.

则 $S_{2n}=(a_1+a_3+\dots+a_{2n-1})+(a_2+a_4+\dots+a_{2n})=\frac{n(1+2n-1)}{2}+\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}+n^2-2$.

9. $-\frac{73}{512}$ 【解析】设 $\frac{n^2}{2^n}=\frac{a(n-1)^2+b(n-1)+c}{2^{n-1}}-\frac{an^2+bn+c}{2^n}=\frac{an^2+(b-4a)n+2a-2b+c}{2^n}$,

悟: 知道目标形式但不知道具体系数时,可以通过待定系数法求出系数

则 $\begin{cases} a=1, \\ b-4a=0, \\ 2a-2b+c=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a=1, \\ b=4, \\ c=6, \end{cases}$

则 $\frac{n^2}{2^n}=\frac{(n-1)^2+4(n-1)+6}{2^{n-1}}-\frac{n^2+4n+6}{2^n}$,

则数列 $\left\{\frac{n^2}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n=\left(\frac{6}{2^0}-\frac{1^2+4+6}{2^1}\right)+\left(\frac{1^2+4+6}{2^1}-\frac{2^2+4+6}{2^2}\right)+\dots+\left(\frac{1^2+4+6}{2^{n-1}}-\frac{2^2+4+6}{2^n}\right)=\frac{6}{2^0}-\frac{2^2+4+6}{2^n}=\frac{6}{2^0}-\frac{2^2+4+6}{2^n}$

$$\frac{2^2+4 \times 2+6}{2^2} \Big) + \left(\frac{2^2+4 \times 2+6}{2^2} - \frac{3^2+4 \times 3+6}{2^3} \right) + \dots + \left[\frac{(n-1)^2+4(n-1)+6}{2^{n-1}} - \frac{n^2+4n+6}{2^n} \right] = 6 - \frac{n^2+4n+6}{2^n},$$

$$\text{则 } T_{10}-6=-\frac{10^2+4 \times 10+6}{2^{10}}=-\frac{146}{2^{10}}=-\frac{73}{2^9}=-\frac{73}{512}.$$

10. 【解】(1) 因为 $\frac{S_n+S_{n+1}+3}{a_{n+1}}=2$,

所以 $S_n+S_{n+1}+3=2a_{n+1}$,又 $a_1=3$,当 $n=1$ 时, $S_1+S_2+3=2a_2$,解得 $a_2=9$;

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1}+S_n+3=2a_n$,所以 $S_n+S_{n+1}+3-(S_{n-1}+S_n+3)=2a_{n+1}-2a_n$,

即 $a_n+a_{n+1}=2a_{n+1}-2a_n$,即 $a_{n+1}=3a_n$,

由 $a_2 \neq 0$,可知 $a_n \neq 0$,则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3(n \geq 2)$,又 $\frac{a_2}{a_1}=3$,所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=3(n \in \mathbb{N}^*)$,

所以 $\{a_n\}$ 是以 3 为首项,3 为公比的等比数列,所以 $a_n=3^n$.

(2) 若选①, $b_n=na_n=n \cdot 3^n$,则 $T_n=1 \times 3^1+2 \times 3^2+3 \times 3^3+4 \times 3^4+\dots+n \cdot 3^n$,

$3T_n=1 \times 3^2+2 \times 3^3+3 \times 3^4+4 \times 3^5+\dots+n \cdot 3^{n+1}$,

所以 $-2T_n=3^1+3^2+3^3+3^4+\dots+3^n-n \cdot 3^{n+1}$,

$3^{n+1}=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n \cdot 3^{n+1}=-\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}-n\right) \cdot 3^{n+1}$,

所以 $T_n=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}\right) \cdot 3^{n+1}$.

若选②, $b_n=[a_n-3^n+(-1)^n] \cdot \frac{2n+1}{n(n+1)}=(-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$,

$=(-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$,

悟: 看到 $(-1)^n$,要考虑对 n 分奇偶讨论

当 n 为偶数时, $T_n=-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)-\dots+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=-1-\frac{1}{n+1}=-\frac{n+2}{n+1}$,

当 n 为奇数时, $T_n=-\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=-1-\frac{1}{n+1}=-\frac{n+2}{n+1}$,

所以 $T_n=-\frac{n+2}{n+1}$,
 $\begin{cases} -\frac{n+2}{n+1}, n \text{ 为偶数}, \\ -\frac{n+2}{n+1}, n \text{ 为奇数}. \end{cases}$

若选③, $b_n=(-1)^{n-1}a_n a_{n+1}=(-1)^{n-1} \times 3^n \times 3^{n+1}=(-1)^{n-1} \times 3^{2(n-1)+3}=(-1)^{n-1} \times 3^3 \times (3^2)^{n-1}=27 \times (-9)^{n-1}$,

$$\text{所以 } T_n=\frac{27[1-(-9)^n]}{1-(-9)}=\frac{27[1-(-9)^n]}{10}.$$

11. 【解】(1) 因为不超过正整数 6 且与 6 互素的正整数只有 1,5,所以 $\varphi(6)=2$.

因为不超过正整数 10 且与 10 互素的正整数只有 1,3,7,9,

所以 $\varphi(10)=4$. 正偶数与 2^n 不互素,所有正奇数与 2^n 互素,比 2^n 小的正奇数有 2^{n-1} 个,所以 $\varphi(2^n)=2^{n-1}$.

(2) 所有不超过正整数 3^n 的正整数有 3^n 个,其中与 3^n 不互素的正整数有 $1 \times 3, 2 \times 3, 3 \times 3, \dots, 3^{n-1} \times 3$,共 3^{n-1} 个,所以所有不超过正整数 3^n 且与 3^n 互素的正整数的个数为 $3^n-3^{n-1}=2 \times 3^{n-1}$,即 $\varphi(3^n)=2 \times 3^{n-1}$.

则 $a_n=\frac{1}{2}n \cdot \varphi(3^n)=n \cdot 3^{n-1}$,

则 $S_n=1 \times 3^0+2 \times 3^1+3 \times 3^2+\dots+(n-1) \cdot 3^{n-2}+n \cdot 3^{n-1}$,

$3S_n=1 \times 3^1+2 \times 3^2+3 \times 3^3+\dots+(n-1) \cdot 3^{n-1}+n \cdot 3^n$,

两式相减得 $-2S_n=1+3^1+3^2+3^3+\dots+3^{n-1}-n \cdot 3^n=\frac{1}{2}(3^n-1)-n \cdot 3^n$,则

$$S_n=\frac{1}{4}(2n-1)3^n+\frac{1}{4}.$$

(3) 由 (2) 可知 $\frac{4S_n-1}{2n-1}=\frac{(2n-1)3^n+1-1}{2n-1}=3^n$, 则 $T_n=\frac{3(1-3^n)}{1-3}=\frac{3}{2} \times 3^n-\frac{3}{2}$.

由 $\lambda \cdot \left(T_n+\frac{3}{2}\right)-2n+3 \geq 0$ 得 $\lambda \geq \frac{2}{3} \times \frac{2n-3}{3^n}$ 恒成立,令 $b_n=\frac{2}{3} \times \frac{2n-3}{3^n}$,

则 $b_{n+1}-b_n=\frac{2}{3} \times \frac{2n-1}{3^{n+1}}-\frac{2}{3} \times \frac{2n-3}{3^n}=\frac{2}{3} \times \frac{-4n+8}{3^{n+1}}$,可得 $b_2 > b_1$;当 $n > 2$ 时,

$b_{n+1} < b_n$,当 $n=2$ 时, $b_{n+1}=b_n$,所以 $b_n=\frac{2}{3} \times \frac{2n-3}{3^n}$ 的最大值为 $b_2=$

$b_3=\frac{2}{27}$,故 $\lambda \geq \frac{2}{27}$. 故实数 λ 的取值范围为 $\left[\frac{2}{27}, +\infty\right)$.

刷素养

12. ABD 【解析】由题可知 $a_{n+1}=\frac{-1}{2a_n-3}$,利用不动点方法令 $a_{n+1}=a_n=x$,可得 $x_1=1, x_2=\frac{1}{2}$,于是可求得

$$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-\frac{1}{2}}=2 \cdot \frac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}}, \text{ 所以 } \left\{ \frac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}} \right\} \text{ 是以 } \frac{a_1-1}{a_1-\frac{1}{2}}=4 \text{ 为首项, } 2 \text{ 为公比的等比数列, 则 } \frac{a_n-1}{a_n-\frac{1}{2}}=2^{n+1}, \text{ 则}$$

$$a_n=\frac{2^n-1}{2^{n+1}-1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n+1}-1}, \text{ 故}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{2}$, 且 $\{a_n\}$ 为单调递增数列, 所以 $na_1 < S_n < na_n$, 则 $\frac{n}{3} < S_n < \frac{n}{2}$,

又 $\frac{n}{3} > \frac{n-1}{6} (n \in \mathbf{N}^*)$, 所以 $S_n > \frac{n-1}{6}$,

故 A, B, D 正确. 数列 $\left\{\frac{a_n-1}{a_n+1}\right\}$ 中,

$\frac{a_1-1}{a_1+1} = -\frac{1}{2}, \frac{a_2-1}{a_2+1} = -\frac{2}{5}, \frac{a_3-1}{a_3+1} = -\frac{4}{11}$, 不是等比数列, 故 C 错误. 故选 ABD.

13. 【解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d \geq 0, d \in \mathbf{N}^*$, 等比数列 $\{b_n\}$ 的公比

为 q , 则 $q \geq 1, q \in \mathbf{N}^*$, 此时 $c_n = 1 + (n-1)d + q^{n-1}$, 则 $c_k = 1 + (k-1)d + q^{k-1} = 37 \Rightarrow (k-1)d + q^{k-1} = 36, c_{k+2} = 1 + (k+1)d + q^{k+1} = 307 \Rightarrow (k+1)d + q^{k+1} = 306$.

情形一: 当 $k=1$ 时, $1=36$, 矛盾.

情形二: 当 $k=2$ 时, $\begin{cases} d+q=36, \\ 3d+q^3=306, \end{cases}$ 则 $q^3-3q=198 \Rightarrow (q-6)(q^2+6q+33)=0 \Rightarrow q=6$, 所以 $d=30$, 此时 $c_n = 6^{n-1} + 30n - 29$.

情形三: 当 $k=3$ 时, $\begin{cases} 2d+q^2=36, \\ 4d+q^4=306, \end{cases}$ 则

$q^4-2q^2=234 \Rightarrow q^2 = \sqrt{235} + 1$ (舍去, q 应为正整数).

情形四: 当 $k=4$ 时, $\begin{cases} 3d+q^3=36, \\ 5d+q^5=306, \end{cases}$ 则 $q^3 < 36 \Rightarrow 1 \leq q \leq 3, 3d < 36 \Rightarrow 0 \leq d < 12$, 此时 $5d+q^5 < 60+3^5 = 303 < 306$, 不满足题意.

情形五: 当 $k \geq 5$ 时, $1 \leq q \leq 2, 0 \leq d < 9$, 此时 $(k-1)d + q^{k-1} = 36$, 则 $(k+1) \cdot d + q^{k+1} = (k-1)d + 2d + q^{k-1}q^2 < (k-1) \cdot d + 18 + 4q^{k-1} < 18 + 4 \times 36 = 162 < 306$, 不满足题意. 综上所述, $c_n = 6^{n-1} + 30n - 29$.

专题1 通项公式的求法

$$\frac{1}{n(n+1)} (n \in \mathbf{N}^*),$$

【点拨】 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 从而简化计算

$$\text{所以 } a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{10 \times 11} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}, \text{ 故选 A.}$$

【归纳总结】形如 $a_{n+1} = a_n \cdot f(n)$

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} = f(n) \right) \text{ 型的递推数列 (其中 } f(n) \text{ 是关于 } n \text{ 的函数) 可构造}$$

$$\begin{cases} \frac{a_n}{a_{n-1}} = f(n-1), \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = f(n-2), \\ \cdots \\ \frac{a_2}{a_1} = f(1), \end{cases}$$

两边分别相乘, 可得 $a_n = f(n-1) \cdot f(n-2) \cdots f(2)f(1)a_1 (n \geq 2)$.

4. A 【解析】因为正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1 = 2$, 且 $n \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) =$

$$\frac{2}{S_{n+1}}, \text{ 所以 } \frac{n}{S_n} = \frac{n+2}{S_{n+1}}, \text{ 则 } \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n}, \text{ 所以 } \frac{S_2}{S_1} = \frac{3}{2}, \frac{S_3}{S_2} = \frac{4}{3}, \frac{S_4}{S_3} = \frac{5}{4}, \cdots, \frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+2}{n},$$

上述等式左右两边分别相乘得 $\frac{S_{n+1}}{S_1} = \frac{3 \times 4 \times \cdots \times n \times (n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, 则 $S_{n+1} = \frac{S_1(n+1)(n+2)}{2} = (n+1)(n+2)$, 故当 $n \geq 2$ 且 $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $S_n = n(n+1)$, 且当 $n=1$ 时, $S_1=2$ 满足 $S_n = n(n+1)$, 所以对任意的 $n \in \mathbf{N}^*, S_n = n(n+1)$, 故 $a_5 = S_5 - S_4 = 5 \times 6 - 4 \times 5 = 10$. 故选 A.

5. ACD 【解析】由 $a_{n+1} = 3S_n$ 得, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = 3S_{n-1}$, 两式相减得 $a_{n+1} - a_n = 3a_n$, 即 $a_{n+1} = 4a_n$, 又当 $n=1$ 时, $a_2 = 3S_1 = 3a_1 = 3$, 所以 $a_n = \begin{cases} 1, n=1, \\ 3 \times 4^{n-2}, n \geq 2, \end{cases}$

所以 B 错误, D 正确;

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_n = 1 + \frac{3(1-4^{n-1})}{1-4} = 4^{n-1},$$

当 $n=1$ 时, $S_1=1$, 符合 $S_n = 4^{n-1}$, 所以 $S_n = 4^{n-1}$,

当 $n \geq 2$ 时, $\frac{S_n}{S_{n-1}} = 4$, 所以 $\{S_n\}$ 为等比数列, A, C 正确. 故选 ACD.

6. ACD 【解析】对于 A, 令 $n=1$ 得, $a_1 = \frac{a_1^2+1}{2a_1}$, 解得 $a_1 = S_1 = 1$, 故 A 正确;

对于 B 和 C, 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$, 所以 $S_n = \frac{(S_n - S_{n-1})^2 + 1}{2(S_n - S_{n-1})}$, 化简得 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = 1$, 所以 $\{S_n^2\}$ 是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列, 所以 $S_n^2 = n$. 又因为 $\{a_n\}$ 是正项数列, 所以 $S_n = \sqrt{n}$.

当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1}$, 所以 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, 当 $n=1$ 时, $a_1=1$ 也满足上式, 所以 $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$, 故 B 错误, C 正确; 对于 D, 因为 $0 < \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \leq 1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 故 D 正确, 故选 ACD.

名师点拨 在处理同时包含 S_n 和 a_n 的条件时, 基本的思路是消一个留一个, 而具体消谁留谁取决于条件的关系中谁好消, 消之后剩下的递推公式是否好研究.

本题的条件 $S_n = \frac{a_n^2+1}{2a_n} (n \in \mathbf{N}^*)$, 因为如果消 S_n , 获得的 a_n 的递推式非常复杂, 不好研究, 所以消 a_n 留 S_n 是一个更好的选择.

7. D 【解析】在数列 $\{a_n\}$ 中, 由 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 2$, 得 $a_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}(a_n - 3)$, 而 $a_1 - 3 = 1$, 因此数列 $\{a_n - 3\}$ 是首项为 1, 公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列, $a_n - 3 = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, 即 $a_n = 3 + \frac{1}{3^{n-1}}$, 所以 $a_{100} = \frac{3^{100}+1}{3^{99}}$. 故选 D.

【归纳总结】类型一: 形如 $a_{n+1} = pa_n + q$ ($p \neq 1$ 且 $q \neq 0$) 型的递推式. 数列 $\{a_n\}$ 为线性递推数列, 其通项公式可通过待定系数法构造等比数列来求. 设 $a_{n+1} + \lambda = p(a_n + \lambda)$, 展开移项整理得 $a_{n+1} = pa_n + (p-1)\lambda$, 与题设 $a_{n+1} = pa_n + q$ 比较系数 (待定系数法) 得 $\lambda = \frac{q}{p-1} (p \neq 1, q \neq 0) \Rightarrow a_{n+1} + \frac{q}{p-1} =$

刷难关

1. C 【解析】由题得 $a_{n+1} - a_n = 2n - 1$, 则 $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = (2n-3) + (2n-5) + \cdots + 3 + 1 + 1 = \frac{(n-1)[(2n-3)+1]}{2} + 1 = n^2 - 2n + 2 (n \geq 2)$, 所以 $a_7 = 7^2 - 2 \times 7 + 2 = 37$.

多种解法 由题知 $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = 2n - 1$, 所以 $a_7 = (a_7 - a_6) + (a_6 - a_5) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 + 1 = 37$. 故选 C.

【归纳总结】形如 $a_{n+1} = a_n + f(n)$ 型的递推数列 (其中 $f(n)$ 是关于 n 的函数) 可构造

$$\begin{cases} a_n - a_{n-1} = f(n-1), \\ a_{n-1} - a_{n-2} = f(n-2), \\ \cdots \\ a_2 - a_1 = f(1), \end{cases}$$

将上述 $n-1$ 个式子两边分别相加, 可得 $a_n = f(n-1) + f(n-2) + \cdots + f(2) + f(1) + a_1 (n \geq 2)$.

(1) 若 $f(n)$ 是关于 n 的一次函数, 累加后可转化为等差数列求和;
(2) 若 $f(n)$ 是关于 n 的指数函数, 累加后可转化为等比数列求和;
(3) 若 $f(n)$ 是关于 n 的二次函数, 累加后可分组求和;
(4) 若 $f(n)$ 是关于 n 的分式函数, 累加后可裂项求和.

2. C 【解析】因为数列 $\{a_n\}$ 的首项为 2, 且 $a_{n+1} - a_n = 2^n$, 所以 $a_6 = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_6 - a_5) = 2 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^5 = 2 + \frac{2 \times (1-2^5)}{1-2} = 64$. 故选 C.

3. A 【解析】因为 $a_n = \frac{n-1}{n+1} a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $a_n \neq 0$, 所以当 $n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*$ 时, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}, \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = \frac{n-2}{n}, \cdots, \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{4}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$, 以上 $(n-1)$ 个式子左右两边分别相乘得 $\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n-2}{n} \times \cdots \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3}$, 即 $\frac{a_n}{a_1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n} \times 2 \times 1$, 所以 $a_n = \frac{1}{n(n+1)} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$. 当 $n=1$ 时, $a_1 = \frac{1}{2}$ 满足上式, 所以 $a_n =$