

\therefore 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 $\frac{1}{3}$, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列, $\therefore a_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\therefore S_n = 1 - 2a_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\therefore b_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n (1 \leq n \leq 500, n \in \mathbf{N}^*)$.
 \therefore 当 $1 \leq n \leq 500$ 时, $T_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = n - \left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = n - \frac{\frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]}{1 - \frac{2}{3}} = n - 2 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

当 $501 \leq n \leq 1\,000$ 时, $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_{500} + b_{501} + b_{502} + \cdots + b_n = 500 - 2 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{499} + \cdots + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,001-n} = 498 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,001-n}$.
 点拨: b_n 共有 1 000 项, 故从第 501 项开始, 与前面的项对称
 $\left(\frac{2}{3}\right)^{500} + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{499} + \cdots + 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,001-n} = 498 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + n - 500 - \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{500} + \left(\frac{2}{3}\right)^{499} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,001-n} \right] = 498 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + n - 500 -$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{500} \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-500} \right] = \frac{1 - \frac{3}{2}}{\frac{3}{2} - 1} = 498 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} + n - 500 + 2 \left(\frac{2}{3}\right)^{500} \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-500} \right] = n - 2 + 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,000-n}$.
 $\therefore T_n = \begin{cases} n - 2 + 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n, & 1 \leq n \leq 500, n \in \mathbf{N}, \\ n - 2 + 4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{500} - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{1\,000-n}, & 501 \leq n \leq 1\,000, n \in \mathbf{N}. \end{cases}$

第五章 一元函数的导数及其应用

5.1 导数的概念及其意义

5.1.1 变化率问题

刷基础

1. C 【解析】 $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(3+\Delta t) - s(3)}{\Delta t}$ 是物体在 3 s 这一时刻的瞬时速度, 是物体从 3 s 到 $(3+\Delta t)$ s 这段时间内的平均速度的极限值, 即是物体在 3 s 这一时刻的瞬时速度. 故选 C.

2. A 【解析】由题意可得平均速度是 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2+\Delta t) - s(2)}{\Delta t} = \frac{2(2+\Delta t)^2 - 2 - (2 \times 4 - 2)}{\Delta t} = \frac{8\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t} = 8 + 2\Delta t$. 故选 A.

3. AD 【解析】选项 A: 在 $0 \leq t \leq 0.2$ 这段时间里, 运动员的平均速度 $\bar{v} = \frac{h(0.2) - h(0)}{0.2 - 0} = \frac{11.364 - 11}{0.2} = 1.82 \text{ (m/s)}$, A 正确.

选项 B: 令 $h(t) = 11$ 得 $t = 0$ 或 $t = \frac{4}{7}$, 在 $0 \leq t \leq \frac{4}{7}$ 这一段上的平均速度 $\bar{v} = \frac{11 - 11}{\frac{4}{7} - 0} = 0 \text{ (m/s)}$, B 不正确.

选项 C: 假设 $t = t_0$ 时刻的瞬时速度为 0, 有 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t_0 + \Delta t) - h(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-9.8\Delta t \cdot t_0 - 4.9(\Delta t)^2 + 2.8\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-9.8t_0 - 4.9\Delta t + 2.8) = -9.8t_0 + 2.8 = 0$, 解得 $t_0 = \frac{2}{9.8}$, 故瞬时速度可以为 0 m/s, C 不正确.

选项 D: 第 0.2 s 时刻瞬时速度为 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(0.2 + \Delta t) - h(0.2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{-1.96\Delta t - 4.9(\Delta t)^2 + 2.8\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (-1.96 - 4.9\Delta t + 2.8) = -1.96 + 2.8 = 0.84 \text{ (m/s)}$, D 正确.

故选 AD.

4. 【解】(1) $\bar{v} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{5 \times 2^2 + 45 \times 2 + 4 - (5 \times 1^2 + 45 \times 1 + 4)}{1} = 60 \text{ (m/s)}$.

(2) 飞机在 $t = 2$ s 时的瞬时速度为 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta t) - f(2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5(2 + \Delta t)^2 + 45(2 + \Delta t) + 4 - (5 \times 2^2 + 45 \times 2 + 4)}{\Delta t}$

$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{5(\Delta t)^2 + 65\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (5\Delta t + 65) = 65 \text{ (m/s)}$.
 因此, 飞机在 $t = 2$ s 时的瞬时速度为 65 m/s.

链接教材 本题是教材第 61 页练习第 2 题的变式, 考查平均速度与瞬时速度的计算. 求平均速度与瞬时速度的步骤:

(1) 设非匀速直线运动的规律 $s = s(t)$;
 (2) 求时间改变量 Δt 和位置改变量 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$;

(3) 求平均速度 $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$;

(4) 计算瞬时速度 v : 当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\frac{\Delta s}{\Delta t} \rightarrow$ 常数.

5. B 【解析】设 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 则

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 + \Delta x + \frac{1}{1 + \Delta x} - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{1 + \Delta x} = 0$. 故选 B.

6. BC 【解析】在 0 到 t_0 范围内, 甲、乙的平均速度都为 $\frac{s_0}{t_0}$, 故 A 错误, B 正确;

因为甲对应的曲线在 $t = t_0$ 处的切线的斜率大于乙对应的曲线在 $t = t_0$ 处的切线的斜率, 故 $t = t_0$ 时, 甲的瞬时速度大于乙的瞬时速度, 故 C 正确, D 错误. 故选 BC.

7. $x + 0.4$ 【解析】由题意知 $Q(x, x^2)$, $P(0.4, 0.16)$, 所以割线 PQ 的斜率 $k_{PQ} = \frac{x^2 - 0.16}{x - 0.4} = x + 0.4$.

5.1.2 导数的概念及其几何意义

课时 1 导数的概念

刷基础

1. C 【解析】平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{1.1^2 - 1^2}{0.1} = 2.1$. 故选 C.

2. C 【解析】 \because 函数 $y = f(x) = x^2 - m^2$ 在区间 $[2, t]$ 上的平均变化率为 5, $\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(t^2 - m^2) - (2^2 - m^2)}{t - 2} = 5$, 解得 $t = 3$. 故选 C.

3. C 【解析】函数 $f(x)$ 在区间上的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 由函数 $f(x)$ 的图象可得, 在区间 $[4, 7]$ 上, $\frac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, 即函数 $f(x)$ 在区间 $[4, 7]$ 上的平均变化率小于 0. 在区间 $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ 上, $\frac{\Delta y}{\Delta x} > 0$ 且 Δx 相同, 故只需找 Δy 最大的即可, 由 $f(x)$ 的图象可知, 函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的 Δy 最大, 故函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 最大, 所以函数 $f(x)$ 在区间 $[3, 4]$ 上的平均变化率最大. 故选 C.

4. D 【解析】因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x^2}$, 所以 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $x = 3$ 处的瞬时变化率为 $-\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}$. 故选 D.

5. A 【解析】因为 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{2\Delta x} = \frac{1}{2} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{2} f'(x_0) = 3$, 所以 $f'(x_0) = 6$, 故选 A.

6. -1 在第 3 h 附近, 原油温度大约以 1°C/h 的速率下降 【解析】自变量 x

高中必刷题 数学

从 3 变化到 $3+\Delta x$ 的过程中, $\Delta y=f(3+\Delta x)-f(3)=(\Delta x)^2-\Delta x$,

则该函数的平均变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x-1$.

当 Δx 趋于 0 时, 平均变化率趋于 -1, 则在第 3 h 时, 原油温度的瞬时变化率为 $-1^\circ\text{C}/\text{h}$, 即在第 3 h 附近, 原油温度大约以 $1^\circ\text{C}/\text{h}$ 的速率下降.

7. 16 **【解析】** $\because \Delta V = V(2+\Delta r) - V(2) = \frac{4\pi(2+\Delta r)^3}{3} - \frac{4\pi \times 2^3}{3} = \frac{4\pi}{3} \cdot \Delta r [12+6\Delta r+(\Delta r)^2]$, $\therefore \frac{\Delta V}{\Delta r} = \frac{4\pi}{3} [12+6\Delta r+(\Delta r)^2]$, $\therefore \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta r} = 16\pi$.

特别注意 $(\Delta r)^2, (\Delta x)^2$ 不要写成 $\Delta r^2, \Delta x^2$.

8. **【解】** (1) 因为物体在 $[3, 5]$ 内的时间变化量 $\Delta t = 5-3=2$, 物体在 $[3, 5]$ 内的位移变化量 $\Delta s = 3 \times 5^2 + 2 - (3 \times 3^2 + 2) = 3 \times (5^2 - 3^2) = 48$, 所以物体在 $[3, 5]$ 内的平均速度为 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{48}{2} = 24 (\text{m/s})$.

(2) 求物体的初速度 v_0 , 即求物体在 $t=0$ 时的瞬时速度.

因为 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(0+\Delta t)-s(0)}{\Delta t} = \frac{29+3[(0+\Delta t)-3]^2-29-3 \times (0-3)^2}{\Delta t}$

$= 3\Delta t - 18$, 所以物体在 $t=0$ 时的瞬时

速度为 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (3\Delta t - 18) = -18$,

即物体的初速度 v_0 为 -18 m/s .

(3) 物体在 $t=1$ 时的瞬时速度, 即为函数 $s(t)$ 在 $t=1$ 处的瞬时变化率.

因为 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(1+\Delta t)-s(1)}{\Delta t} = \frac{29+3[(1+\Delta t)-3]^2-29-3 \times (1-3)^2}{\Delta t}$

$= 3\Delta t - 12$, 所以函数 $s(t)$ 在 $t=1$ 处的瞬时变化率为 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (3\Delta t - 12) = -12$, 即物体在 $t=1$ 时的瞬时速度为 -12 m/s .

刷易错

★易错点 忽略导数定义式中 $\Delta x, \Delta y$ 的对应关系

9. C **【解析】** $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} = 3 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{3\Delta x} = 3$. 故选 C.

易错警示

由导数的定义可知, 若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 则 $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, 它仅与 x_0 有关, 与 Δx 无关. 使用导数 $f'(x_0)$ 的定义式时要明确公式的形式, 当分子为 $f(x_0+m\Delta x)-f(x_0)$ 时, 分母应该是分子中自变量的变化量 $m\Delta x$, 要注意公式的变形.

课时 2 导数的几何意义

刷基础

1. D **【解析】** 因为 $y = x^2 + \frac{3}{x}$, 所以

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + \frac{3}{x+\Delta x} - (x^2 + \frac{3}{x})}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[2x + \Delta x + \frac{-3}{x(x+\Delta x)} \right] = 2x - \frac{3}{x^2}$, 所以曲线 $y = x^2 + \frac{3}{x}$ 在点 $(1, 4)$ 处的切线的斜率 $k = 2 \times 1 - \frac{3}{1^2} = -1 = \tan 135^\circ$, 即倾斜角为 135° , 故选 D.

2. A **【解析】** 由题知, $\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = -2, f(2) = 2$, \therefore 曲线 $f(x)$ 在 $x=2$ 处的

点悟: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

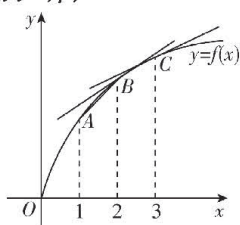
切线斜率 $k = -2$, 且切线过点 $(2, 2)$, 代入直线的点斜式方程得 $y - 2 = -2(x - 2)$, 即 $2x + y - 6 = 0$. 故选 A.

链接教材 本题是教材第 70 页练习第 3 题的变式, 考查导数的几何意义及切线方程的求法. 若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线的斜率存在, 则斜率 $k=f'(x_0)$, 切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

3. B **【解析】** 依题意, $\begin{cases} 2a - f(2) + 2 = 0, \\ a - m + 2 = 0, \\ m + f'(2) = -4, \\ f'(2) = a, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = -3, \\ m = -1, \\ f(2) = -4, \\ f'(2) = -3. \end{cases}$ 故选 B.

特别注意 对于条件“函数图象在点 P 处的切线方程为 l ”, 其包含两个信息, 一是点 P 为函数图象与直线的公共点, 二是点 P 处的导数值等于切线的斜率, 不要遗漏信息.

4. BC **【解析】** 记点 $A(1, f(1)), B(2, f(2)), C(3, f(3))$, 设直线 AB, BC 的倾斜角分别为 α, β , 函数 $f(x)$ 在点 B, C 处的切线的倾斜角分别为 θ, φ ,



对于 A 选项, 由图可知, $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$, 则

$k_{AB} > k_{BC}$, 即 $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} > \frac{f(3)-f(2)}{3-2}$, 即 $f(2) - f(1) > f(3) - f(2)$, A 错误;

对于 B 选项, 由图可知, $0 < \varphi < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $f'(2) > f'(3)$, B 正确;

对于 C 选项, 由图可知, $0 < \varphi < \beta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $f'(3) < k_{BC} = f(3) - f(2)$, C 正确;

对于 D 选项, 由图可知, $0 < \beta < \theta < \frac{\pi}{2}$, 所以 $f'(2) > k_{BC} = f(3) - f(2)$, D 错误. 故选 BC.

5. $2x + y - 8 = 0$ **【解析】** 设 $A(x_1, y_1)$,

$B(x_2, y_2)$, 由曲线 $y = \frac{4}{x}$, 得 $y' =$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{4}{x+\Delta x} - \frac{4}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{4}{x(x+\Delta x)} = -\frac{4}{x^2}$,

所以 $k_{PA} = -\frac{4}{x_1^2}$, 所以曲线 C 在点 A 处

的切线方程为 $y - y_1 = -\frac{4}{x_1^2}(x - x_1)$,

把 $P(1, 2)$ 代入切线方程, 得 $2 - y_1 = -\frac{4}{x_1^2}(1 - x_1)$, 又 $y_1 = \frac{4}{x_1}$, 化简得 $2x_1 +$

$y_1 - 8 = 0$, 同理可得曲线 C 在点 B 处的切线方程为 $2x_2 + y_2 - 8 = 0$,

因为 A, B 都满足直线 $2x + y - 8 = 0$, 所以直线 AB 的方程为 $2x + y - 8 = 0$.

6. **【解】** (1) 由函数 $f(x) = x^3 - x + 1$, 可得 $f'(x_0) =$

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - (x_0 + \Delta x) + 1 - (x_0^3 - x_0 + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0 - \Delta x + 1 - x_0^3 + x_0 + 1}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - 1] = 3x_0^2 - 1$,

可得 $f'(1) = 2$, 即曲线在点 $P(1, 1)$ 处的切线斜率 $k = 2$, 所以曲线在点 $P(1, 1)$ 处的切线方程为 $y = 2(x - 1) + 1$, 即 $y = 2x - 1$.

(2) 因为点 $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 不在曲线

$f(x) = x^3 - x + 1$ 上,

设切点为 $A(x_0, y_0)$, 所以 $f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$,

点悟: 题中已知点不是切点, 先设切点.

所以切线方程为 $y = (3x_0^2 - 1)(x - x_0) + x_0^3 - x_0 + 1$,

又因为 $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 在直线上, 所以

$\frac{1}{3} = (3x_0^2 - 1)\left(\frac{2}{3} - x_0\right) + x_0^3 - x_0 + 1$,

即 $2x_0^3 - 2x_0^2 = 0$, 解得 $x_0 = 1$ 或 $x_0 = 0$.

当切点为 $(1, 1)$ 时, 切线方程为 $y = 2x - 1$;

当切点为 $(0, 1)$ 时, 切线的斜率为 $f'(0) = -1$, 切线方程为 $y = -x + 1$.

综上所述, 过点 $Q\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ 且与曲线 $y = f(x)$ 相切的直线方程为 $y = 2x - 1$ 或 $y = -x + 1$.

规律方法 求曲线 $y=f(x)$ 的切线方程

若已知曲线 $y=f(x)$ 和点 $P(x_0, y_0)$, 求曲线过点 P 的切线方程:

(1) 当点 $P(x_0, y_0)$ 是切点时, 切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

(2) 当点 $P(x_0, y_0)$ 不是切点时, 可分以下几步完成: 第一步: 设出切点坐标 $P'(x_1, f(x_1))$; 第二步: 写出曲线在点 $P'(x_1, f(x_1))$ 处的切线方程 $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$; 第三步: 将点 P 的坐标 (x_0, y_0) 代入切线方程求出 x_1 ; 第四步: 将 x_1 的值代入方程 $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$ 可得过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线方程.

刷易错

★易错点1 没有正确理解导数的几何意义致误

7.D 【解析】曲线的切线和曲线除有切点这个公共点外,还可能其他的公共点,故A错误,B错误; $f'(x_0)$ 不存在,即曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率不存在,但切线可能存在,故C错误,D正确.

易错警示 曲线上某点的导数的几何意义是曲线在该点处的切线的斜率,若 $f'(x_0)$ 不存在,不一定无切线,有可能切线的倾斜角为 90° ,此时只是斜率不存在而已,但切线是存在的.

★易错点2 没有把握好切点的“双重身份”(既在切线上,又在原函数图象上)致误

8.C 【解析】根据题意,函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程是 $y=2x-3$,即 $f'(2)=2$,且 $f(2)=2\times 2-3=1$,所以 $f(2)+f'(2)=1+2=3$. 故选C.

易错警示 只关注好切点的“双重身份”(既在切线上,又在原函数图象上),才能把条件弄清楚,从而解决问题.一定要注意切线的斜率 $k=f'(x_0)$ (切线斜率存在),另外注意切点 $(x_0, f(x_0))$ 的坐标既符合原来的函数解析式,也符合切线的方程.

第5.1节综合训练

刷能力

1.D 【解析】依题意,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = -3 \lim_{-3\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{-3\Delta x} = -3f'(x_0). \text{ 故选D.}$$

2.C 【解析】函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间 $[1, 3]$ 上的平均变化率为 $\frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在 $x=m$ 时的瞬

$$\text{时变化率为 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(m+\Delta x)-f(m)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(m+\Delta x)^2 - \frac{1}{2}m^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\Delta x + m \right) = m,$$

5.2.1 基本初等函数的导数

刷基础

1.D 【解析】 $(\ln 2)'=0$, A 错误;

$(\cos x)'=-\sin x$, B 错误;

$(4^x)'=4^x \ln 4$, C 错误;

$(\lg x)'=\frac{1}{x \ln 10}$, D 正确. 故选D.

2.B 【解析】由 $f'(x)=4x^3$ 知 $f(x)$ 中含有 x^4 项,然后将 $x=1$ 代入选项中验证可得 $f(x)=x^4-2$. 故选B.

3.B 【解析】由题意, $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=f_1'(x)=\cos x$, $f_3(x)=f_2'(x)=$

所以 $m=2$. 故选C.

3.D 【解析】A 选项,根据题图可知,在 t_1 时刻,两图象相交,甲、乙两人血管中的药物浓度相同, A 正确; B 选项,根据题图以及导数的知识可知,在 t_2 时刻,两图象的切线斜率不相等,即甲、乙两人血管中药物浓度的瞬时变化率不同, B 正确; C 选项,根据题图可知,在 $[t_2, t_3]$ 这个时间段内,甲、乙两人血管中药物浓度的平均变化率均为 $\frac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2}$, C 正确; D 选项,在 $[t_1, t_2]$ 这个时间段内,甲血管中药物浓度的平均变化率为 $\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$,在 $[t_2, t_3]$ 这个时间段内,甲血管中药物浓度的平均变化率为 $\frac{f(t_3)-f(t_2)}{t_3-t_2}$,显然不相等, D 错误. 故选D.

4.AC 【解析】由题意可知 $V_1=\frac{S_0-0}{t_1-0}=\frac{S_0}{t_1}$, $V_2=\frac{S_0-0}{t_2-0}=\frac{S_0}{t_2}$, $V_3=\frac{S_0-0}{t_2-t_1}=\frac{S_0}{t_2-t_1}$, 由题图可知 $t_1 < t_2$, $t_2-t_1 < t_1$, 即 $2t_1 > t_2$, 因此 $V_1 < V_2 = \frac{S_0}{t_2} < V_3 = \frac{S_0}{t_2-t_1}$, 因此 $V_1 < V_2 < V_3$, 故 A 正确;

由 $V_1+V_3-2V_2=S_0 \left[\frac{1}{2t_1} + \frac{1}{2(t_2-t_1)} - \frac{2}{t_2} \right] = S_0 \left[\frac{t_2}{2t_1(t_2-t_1)} - \frac{2}{t_2} \right] = S_0 \cdot \frac{t_2^2-4t_1(t_2-t_1)}{2t_1t_2(t_2-t_1)} = \frac{S_0(t_2-2t_1)^2}{2t_1t_2(t_2-t_1)} > 0$, 故 $\frac{V_1+V_3}{2} > V_2$, 故 B 不正确;

由题图可知,直线与曲线的交点为 $\left(t_1, \frac{S_0}{2}\right)$, 故存在 $m_i \in (0, t_2)$, 使得 $V(m_i)=V_i$, 即当 $m_i=t_1$ 时, $V(t_1)=V_1$, 故 C 正确; t 时刻的瞬时速度为 $V(t)$, 判断瞬时

5.2 导数的运算

$-\sin x$, $f_4(x)=f_3'(x)=-\cos x$, $f_5(x)=f_4'(x)=\sin x=f_1(x)$, 所以 $f_n(x)$ 是周期为4的函数, 则 $f_{2024}(x)=f_4(x)=-\cos x$. 故选B.

4. $\frac{1}{6}$ 【解析】设 $f(x)=\ln x$, 则 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(3+h)-\ln 3}{2h} = \frac{1}{2}f'(3) = \frac{1}{6}$.

5. 【解】(1) $y'=(x\sqrt{x})'=(x^{\frac{3}{2}})'=\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=\frac{3}{2}\sqrt{x}$.

速度的快慢,可以看整个曲线在各点处的切线方程的斜率,由题图可知,当 $t=t_1$ 时,切线方程的斜率最大,故在此时速度最快,故 D 不正确. 故选AC.

5. (0,0) 【解析】设 $P(x_0, y_0)$, 则 $f'(x_0)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0+\Delta x)^2+2(x_0+\Delta x)-(x_0^2+2x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0+2+\Delta x) = 2x_0+2$, 因为点 P 处的切线垂直于直线 $x+2y=0$, 所以点 P 处的切线的斜率为2, 所以

悟: 斜率存在且不为0的两直线互相垂直, 则斜率之积等于-1. $2x_0+2=2$, 解得 $x_0=0$, 则 $y_0=0$, 即点 P 的坐标是(0,0).

6. -1 【解析】因为 $f(x)=x^3-x+3$, 所以 $f'(x)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 3x^2-1$, 所

以 $f'(1)=2$, 即 $\tan \theta=2$, 故黑板: 可结合课时2第6题的化简过程自行化简.

$$\text{所以 } \frac{\cos \theta - 2 \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{\cos \theta - 2 \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \frac{1 - 2 \tan \theta}{1 + \tan \theta} = -1.$$

7. 【证明】设 $f(x)=x^3$, 由导函数的定义, 可知 $f'(x)=\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x} = 3x^2$, 不妨设 $P(x_0, x_0^3)$, 则点 P 处的切线斜率 $k_1=3x_0^2$, 切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$,

由 $\begin{cases} y=x^3, \\ y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0), \end{cases}$ 得 $x^3-3x_0^2x+2x_0^3=0$, 即 $(x-x_0)^2(x+2x_0)=0$, 解得 $x=x_0$ 或

故黑板: 解高次方程的基本思路是试根法因式分解, 上式显然有根 x_0 , 所以有因式 $(x-x_0)$, 通过配凑或大除法(即多项式除法)得到 $x^3-3x_0^2x+2x_0^3=(x-x_0)(x^2+x_0x-2x_0^2)=(x-x_0)^2(x+2x_0)$. $x=-2x_0$, 所以点 Q 的横坐标为 $-2x_0$, 所以点 Q 处的切线斜率为 $k_2=f'(-2x_0)=12x_0^2$, 故 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{3x_0^2}{12x_0^2}=\frac{1}{4}$, 为定值.

$$= 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x,$$

悟: 二倍角公式的应用

$$\therefore y' = (\sin x)' = \cos x.$$

链接教材 本题是教材第 75 页例 1 的同类试题,考查基本初等函数的求导,难度虽然不大,但是对函数准确求导是利用导数解决函数问题的基础. 需要注意 (1) $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$, $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 应加深公式的理解, 从而强化记忆.

(2) 对不能直接运用公式求导的要进行适当变形, 如 $y = \frac{1}{x^7} = x^{-7}$, $y =$

$$\sqrt{x^2} = x^{\frac{2}{2}}$$

6. A 【解析】因为 $y' = (\sin x)' = \cos x$, 所以曲线 $y = \sin x$ 在点 $T(2\pi, 0)$ 处的切线的斜率 $k = \cos 2\pi = 1$, 所以曲线 $y = \sin x$ 在点 $T(2\pi, 0)$ 处的切线方程是 $y - 0 = 1 \cdot (x - 2\pi)$, 即 $x - y - 2\pi = 0$. 故选 A.

7. C 【解析】由 $y = \ln x$, 得 $y' = \frac{1}{x}$, 设切点为 $(x_0, \ln x_0)$, 则把 $x = x_0$ 代入 $y' = \frac{1}{x}$ 中, 得 $\frac{1}{x_0} = 1$, 解得 $x_0 = 1$, 所以切点为 $(1, 0)$, 则 $0 = 1 + b$, 解得 $b = -1$. 故选 C.

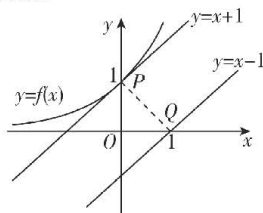
8. 【解】(1) 因为 $f(x) = e^x$, 所以 $f'(x) = e^x$, 所以 $f'(0) = f(0) = 1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = x + 1$, 即 $x - y + 1 = 0$.

(2) 根据题意, 将直线 $y = x - 1$ 往靠近曲线 $y = f(x)$ 的方向平移, 当平移到直线与曲线相切时, 切点 P 与直线间的距离最近.

设切线方程为 $y = x + c$,

由 (1) 可知, 当切线斜率为 1 时, 切点坐标为 $(0, 1)$, 此时切线方程为 $y = x + 1$,

此时点 $P(0, 1)$, 过点 P 向直线 $y = x - 1$ 作垂线, 垂足为 Q , 此时 $|PQ|$ 取最小值, 即 $|PQ| = \frac{2}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2}$, 所以 $|PQ|$ 的最小值为 $\sqrt{2}$.



名师点拨 对于具有某些特征的函数图象或曲线, 可以借助图象和切线求解图象上的点到直线距离的最值问题. 如本题的指数函数、选择性必修第一册学习过的椭圆均适用于此方法.

9. A 【解析】由函数 $y = \sin x$, 得 $y' = \cos x$. 设 $P(x_0, y_0)$, 则以点 P 为切点的切线 l 的斜率 $k = \cos x_0 \in [-1, 1]$. 设以点 P 为切点的切线 l 的倾斜角为 α , 则 $\tan \alpha = k \in [-1, 1]$, 由 $\alpha \in [0, \pi)$, 可得 $\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi)$,

所以直线 l 的倾斜角的取值范围为

$$[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi). \text{ 故选 A.}$$

10. D 【解析】因为 $y' = (n+1)x^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 曲线 $y = x^{n+1}$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线斜率 $k = n+1$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 所以在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y - 1 = (n+1) \cdot (x - 1)$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 与 x 轴交点的横坐标为 $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$. 所以数列 $\{x_n\}$ 的前 n 项的积为 $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$, 所以数列 $\{x_n\}$ 的前 2 023 项的积为 $\frac{1}{2\,024}$. 故选 D.

5.2.2 导数的四则运算法则

刷基础

1. BD 【解析】 $f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$, 故 A 错误; $f'(x) = \ln x + 1$, 令 $f'(x_0) = 2$, 所以 $\ln x_0 + 1 = 2 \Rightarrow \ln x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = e$, 故 B 正确;

$f'(x) = 3 \times (2xe^x + x^2e^x)$, 所以 $f'(1) = 3 \times (2 \times 1 \times e + e) = 9e$, 故 C 错误;

$(\frac{x}{x+1} - 2^x)' = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2^x \ln 2 = \frac{1}{(x+1)^2} - 2^x \ln 2$, 故 D 正确. 故选 BD.

链接教材 本题是教材第 76 页例 3 的同类试题,考查导数的四则运算法则,在对函数求导中常有涉及,一定要牢牢掌握.

对于较复杂的函数解析式,应先进行适当的化简变形,化为较简单的函数解析式后再求导,可简化求导过程.

2. A 【解析】函数 $f(x) = x^3 - f'(1)x^2 + 3$, 求得 $f'(x) = 3x^2 - 2f'(1)x$, 当 $x = 1$ 时 $f'(1) = 3 - 2f'(1)$, 所以 $f'(1) = 1$. 故选 A.

规律方法 (1) $f'(x)$ 与 $f'(x_0)$ 的区别与联系: $f'(x)$ 是一个函数, $f'(x_0)$ 是函数 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处的函数值 (常数), 所以 $[f'(x_0)]' = 0$.

(2) 求 $f'(x_0)$ 时, 应先求导再代入求值.

3. BCD 【解析】对于 A, $f(x) = 3 \cos x$, 定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = -3 \sin x$, $f'(x)$ 为奇函数, 图象不关于 y 轴对称, 不符合题意; 对于 B, $f(x) = x^3 + x$, 定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = 3x^2 + 1$, $f'(x)$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 符合题意;

对于 C, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 关于原点对称, $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$,

$f'(x)$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 符合题意; 对于 D, $f(x) = 2x - 3$, 定义域为 \mathbf{R} , $f'(x) = 2$, $f'(x)$ 是偶函数, 图象关于 y 轴对称, 符合题意. 故选 BCD.

4. A 【解析】 $f'(x) = 1 + 4 \cos x$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 5$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = 5x$, 即 $5x - y = 0$. 故选 A.

5. BC 【解析】直线 $y = \frac{1}{2}x + b$ 能作为函数图象的切线, 即函数图象存在某点

处的导数值为 $\frac{1}{2}$.

选项 A, $f(x) = \frac{1}{x}$, 故 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, 令

$-\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2}$, 无解, 故 A 不正确;

选项 B, $g(x) = x \ln x$, 故 $g'(x) = \ln x + 1$, 令 $\ln x + 1 = \frac{1}{2}$, 得 $x = e^{-\frac{1}{2}}$, 故 B

正确;

选项 C, $m(x) = \sin x$, 故 $m'(x) = \cos x$, 令 $\cos x = \frac{1}{2}$, 解得 $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

或 $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 故 C 正确;

陷阱: 容易漏掉 $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

选项 D, $n(x) = e^x + x$, 故 $n'(x) = e^x + 1$, 令 $e^x + 1 = \frac{1}{2}$, 故 $e^x = -\frac{1}{2}$, 无解, 故 D

不正确. 故选 BC.

6. 【解】(1) 直线 $y = x + 2$ 的斜率为 1, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(1, f(1))$ 处的切线的斜率为 -1,

由 $f(x) = \frac{2}{x} + a \ln x, a \in \mathbf{R}$, 得 $f'(x) = -\frac{2}{x^2} + \frac{a}{x}$, 则 $f'(1) = -2 + a = -1$, 所以 $a = 1$.

(2) 若 $a = 0$, 则 $f(x) = \frac{2}{x}$, 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$, 作

出函数 $f(x)$ 的大致

图象如图所示.

由图可知过点

$P(1, 0)$ 作曲线 $y =$

$f(x)$ 的切线, 切线

斜率一定存在, 且

切点不为点 P .

设切点为

$Q(x_0, \frac{2}{x_0})$, 切线

斜率为 k , 则 $k = f'(x_0) = -\frac{2}{x_0^2}$,

又因为切线过 P, Q 两点, 所以 $k = \frac{\frac{2}{x_0} - 0}{x_0 - 1} = \frac{2}{x_0^2 - x_0}$, 所以 $-\frac{2}{x_0^2} = \frac{2}{x_0^2 - x_0}$,

解得 $x_0 = \frac{1}{2}$ 或 $x_0 = 0$ (舍去).

所以 $Q(\frac{1}{2}, 4)$, $k = f'(x_0) = -\frac{2}{x_0^2} = -8$,

则切线方程为 $y - 0 = -8(x - 1)$, 即 $8x + y - 8 = 0$.

令 $x = 0$, 则 $y = 8$, 则切线横截距为 1, 纵截距为 8, 所以此切线与坐标轴围成的

三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1 \times 8 = 4$.

名师点拨 (1) 曲线 $y = f(x)$ 在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线是指 P 为切点, 斜率 $k = f'(x_0)$ 的切线, 是唯一的一条切线;

(2) 曲线 $y = f(x)$ 过点 $P(x_0, y_0)$ 的切线, 是指切线经过点 P , 点 P 可以是切点, 也可以不是切点, 而且这样的

直线可能有多条.

7. C 【解析】当 $x = 1$ 时, $f(1) + g(1) = 0$,

由 $f(1)=1$, 得 $g(1)=-1$. 原式两边求导, 得 $f'(x)+g'(x)+xg'(x)=2x$, 当 $x=1$ 时, $f'(1)+g'(1)+g'(1)=2$, 得 $f'(1)+g'(1)=2-g'(1)=2-(-1)=3$. 故选 C.

8. C 【解析】因为 $f(x)=\frac{1}{2}x^2\sin x+x\cos x$, 所以 $f'(x)=\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)\cos x$, 所以 $f'(x)$ 为偶函数, 其图象关于 y 轴对称, 故排除选项 A, B; 又 $f'(0)=1$, 故排除选项 D. 故选 C.

9. C 【解析】由函数 $f(x)=\frac{kx+1}{x}$ 和 $g(x)=\ln x$, 可得 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $g'(x)=\frac{1}{x}$, 设两曲线公共点的横坐标为 t , 可得 $f'(t)=-\frac{1}{t^2}$, $g'(t)=\frac{1}{t}(t>0)$, 由公共点处的切线互相垂直, 可得 $f'(t)g'(t)=-1$, 即 $\frac{1}{t^3}=1$, 解得 $t=1$, 又由 $f(1)=g(1)$, 可得 $k+1=0$, 解得 $k=-1$. 故选 C.

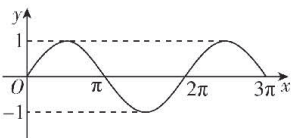
刷提升

1. A 【解析】由题设得 $f'(x)=2mx+\frac{1}{x}$, 则 $f'(1)=2m+1$, 而 $f(1)=m$, 所以函数 $f(x)=mx^2+\ln x$ 的图象在 $x=1$ 处的切线的方程为 $y-m=(2m+1)(x-1)$, 令 $x=0$, 则 $y=-m-1=2$, 可得 $m=-3$. 故选 A.

2. C 【解析】函数 $f(x)=ae^x\ln x+\frac{be^{x-1}}{x}$, 求导得 $f'(x)=ae^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)+\frac{be^{x-1}(x-1)}{x^2}$, 显然 $f'(1)=e$, 因此 $ae=e$, 解得 $a=1$. 故选 C.

3. B 【解析】因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $f(x)=-f(-x)$, 由 $f(3-x)-f(x-1)=0$ 可得 $f(x)=f(2-x)=-f(x-2)$, 即 $f(x+2)=-f(x)$, 则 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$, 故 4 是函数 $f(x)$ 的一个周期. 因为当 $x\in[1, 2]$ 时, $f(x)=2^x-4$, 则 $f(19)=f(-1)=-f(1)=2$, 当 $x\in[1, 2]$ 时, $f'(x)=2^x\ln 2$, 则 $f'\left(\frac{3}{2}\right)=2\sqrt{2}\ln 2$, 于是 $f(19)+f'\left(\frac{3}{2}\right)=2\sqrt{2}\ln 2+2$. 故选 B.

4. D 【解析】设函数 $f(x)$ 在 $[0, 3\pi]$ 上的“拉格朗日中值点”为 x_0 , 由题意可知 $\frac{f(3\pi)-f(0)}{3\pi-0}=f'(x_0)$, 即 $\frac{\cos 3\pi-\cos 0}{3\pi-0}=-\sin x_0$, $\therefore \frac{2}{3\pi}=\sin x_0$, 函数 $h(x)=\sin x$ 在 $[0, 3\pi]$ 上的大致图象如图.



$\therefore \frac{2}{3\pi} \in (0, 1)$, \therefore 直线 $y=\frac{2}{3\pi}$ 与函数 $h(x)=\sin x$ 在 $[0, 3\pi]$ 上的图象有 4 个交点, 即方程 $\frac{2}{3\pi}=\sin x_0$ 存在 4 个不同的解, 即“拉格朗日中值点”的个数为 4. 故选 D.

5. D 【解析】由 $f'(x)=-e^x-1$, 得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=m$ 处的切线斜率为 $f'(m)=-e^m-1<-1$, 由 $g'(x)=3a-2\sin x$, 得曲线 $y=g(x)$ 在 $x=n$ 处的切线斜率为 $g'(n)=3a-2\sin n$. 又曲线 $g(x)$ 上总存在切线 l_2 满足 $l_1 \perp l_2$, 且 $\frac{1}{e^m+1} \in (0, 1)$, 而 $\sin n \in [-1, 1]$, 则

点悟: $\frac{1}{e^m+1}$ 为直线 l_2 的斜率

$3a-2\sin n \in [3a-2, 3a+2]$, 故 $(0, 1) \subseteq [3a-2, 3a+2]$. 所以 $\begin{cases} 3a-2 \leq 0 \\ 3a+2 \geq 1 \end{cases}$, 解得 $-\frac{1}{3} \leq a \leq \frac{2}{3}$, 即 $a \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. 故选 D.

6. $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$ 【解析】 $\because y=(x+1+a)e^x$, $\therefore y'=(x+2+a)e^x$, 设切点为 (x_0, y_0) , 则 $y_0=(x_0+1+a)e^{x_0}$, 切线方程为 $y-(x_0+1+a)e^{x_0}=(x_0+2+a)e^{x_0}(x-x_0)$, \therefore 切线过原点, $\therefore -(x_0+1+a)e^{x_0}=(x_0+2+a)e^{x_0}(-x_0)$, 整理得 $x_0^2+(a+1)x_0-a-1=0$. \therefore 切线有两条, $\therefore \Delta=(a+1)^2+4(a+1)>0$, $\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty, -5) \cup (-1, +\infty)$.

7. $\pm\frac{\sqrt{7}}{6}$ 【解析】因为 $f(x)=2x^3-3ax^2$, 所以 $f'(x)=6x^2-6ax$, 所以 $f'(-1)=6+6a$. 又 $f(-1)=-2-3a$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=-1$ 处的切线方程为 $y+2+3a=(6+6a)(x+1)$, 即切线方程为 $y=(6a+6)x+(4+3a)$. 因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线也是曲线 $y=g(x)$ 的切线, 所以 $x^2+7x+6=(6a+6)x+(4+3a)$ 有唯一解, 即 $x^2+(1-6a)x+(2-3a)=0$ 有唯一解, 所以 $\Delta=(1-6a)^2-4(2-3a)=0$, 解得 $a=\pm\frac{\sqrt{7}}{6}$, 所以 a 的值为 $\pm\frac{\sqrt{7}}{6}$.

名师点拨 借助导数研究直线与函数图象相切是一般性思路, 但对于某些特定函数或曲线, 也有其他的思路, 比如本题函数 $g(x)$ 是二次函数, 直线与二次函数的图象相切还可以通过联立判别式法研究.

8. 【解】 \because 点 $P(1, 2)$ 在曲线 $f(x)=x^3+ax$ 上, $\therefore 2=1+a$, $\therefore a=1$. 又函数 $f(x)=x^3+ax$ 和 $g(x)=x^2+bx+c$ 的导函数分别为 $f'(x)=3x^2+a$ 和 $g'(x)=2x+b$, 且两曲线在点 P 处有公切线, $\therefore 3 \times 1^2+a=2 \times 1+b$, 解得 $b=2$. 又由点 $P(1, 2)$ 在曲线 $g(x)=x^2+bx+c$ 上, 可得 $2=1^2+2 \times 1+c$, 解得 $c=-1$. 综上, $a=1, b=2, c=-1$.

刷易错

★易错点 混淆“过某点”和“在某点处”切线方程的求法致误

9. 【解】(1) 由题意得 $f'(x)=3x^2-4x+1$, $f'(2)=5$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2, 2)$ 处的切线方程为 $y-2=5(x-2)$, 整理得 $5x-y-8=0$. (2) 设切点为 (x_0, y_0) . 因为切点在曲线 $y=f(x)$ 上, 所以 $y_0=x_0^3-2x_0^2+x_0$, $f'(x_0)=3x_0^2-4x_0+1$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $y-(x_0^3-2x_0^2+x_0)=(3x_0^2-4x_0+1)(x-x_0)$. 因为切线过原点, 所以 $0-(x_0^3-2x_0^2+x_0)=(3x_0^2-4x_0+1) \cdot (0-x_0)$, 解得 $x_0=0$ 或 $x_0=1$. 当 $x_0=0$ 时, 切点为 $(0, 0)$, $f'(0)=1$, 切线方程为 $y=x$; 当 $x_0=1$ 时, 切点为 $(1, 0)$, $f'(1)=0$, 切线方程为 $y=0$. 所以切线方程为 $y=x$ 或 $y=0$.

易错警示 求“过某点”的切线方程时, 先设出切点的坐标, 然后利用导数求得切线的斜率, 写出切线方程, 利用已知点在切线上, 代入切线方程求解; 求“在某点处”的切线方程时, 将已知点的横坐标代入导数公式中即可得切线的斜率, 利用点斜式求得切线方程.

5.2.3 简单复合函数的导数

刷基础

1. D 【解析】对于 A, $(e^{1-x})'=-e^{1-x}$, 故 A 错误; 对于 B, $(\cos 3x)'=-3\sin 3x$, 故 B 错误; 对于 C, $(\sqrt{x-1})'=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$, 故 C 错误; 对于 D, $(x^2\ln x)'=x(2\ln x+1)$, 故 D 正确. 故选 D.

2. A 【解析】令 $t=x^2$, $u=\sin t$, $y=u^3$, 则 $y'_x=y'_u \cdot u'_t \cdot t'_x=3u^2 \cdot \cos t \cdot (2x)$, 所以 $y'=3(\sin x^2)^2 \cdot (\cos x^2) \cdot (2x)=3x\sin x^2 \cdot \sin 2x^2$. 故选 A.

规律方法 复合函数的求导法则

对于由函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 复合而成的函数 $y=f(g(x))$, 它的导数与函数 $y=f(u)$, $u=g(x)$ 的导数间的关系为 $y'_x=y'_u \cdot u'_x$. 对于复合函数的求导, 先确定复合关系, 由外向内逐层求导, 必要时可换元.

3. $-e^{-1}$ 【解析】 $\because f(x)=\ln(1-x)$, \therefore 由复合函数的求导法则可知, $f'(x)=\frac{-1}{1-x}=\frac{1}{x-1}$, $\therefore f'(1-e)=\frac{1}{1-e-1}=-\frac{1}{e}$.

4. 【解】(1) $y'=-e^{-x}(x+1)^2+e^{-x} \cdot 2(x+1)=e^{-x}(1-x^2)$.

(2) $y'=-3\sin(3x-1)-\frac{2}{-2x+1}=-3\sin(3x-1)-\frac{2}{2x-1}$.

(3) $y'=2\cos 2x+2\cos x(-\sin x)=2\cos 2x-\sin 2x$.

(4) $y'=\frac{2}{2\sqrt{2x-1}} \cdot \frac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2}=\frac{x-(2x-1)}{x^2\sqrt{2x-1}}=\frac{1-x}{x^2\sqrt{2x-1}}$.

5. A 【解析】由 $f(x) = e^{\sin x} - 3f'(0)x$ 求导可得 $f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x - 3f'(0)$, 则 $f'(0) = e^0 \cdot \cos 0 - 3f'(0) = 1 - 3f'(0)$, 解得 $f'(0) = \frac{1}{4}$, 所以 $f(x) = e^{\sin x} - \frac{3}{4}x$, 则 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{\sin \frac{\pi}{3}} - \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{3} = e^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\pi}{4}$. 故选 A.

6. C 【解析】 $f(x) = \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x^{12}$, $f(1) = \frac{8}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} + 1 = 1$, $f'(x) = -\frac{8}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{\pi}{2} + 12x^{11} = -4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 12x^{11}$, $f'(1) = -4\sin \frac{\pi}{2} + 12 = 8$,

所以函数 $f(x) = \frac{8}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + x^{12}$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-1=8(x-1)$, 则 $y=8x-7$. 因为直线 $nx-y+2=0$ 与直线 $y=8x-7$ 没有交点, 所以直线 $nx-y+2=0$ 与直线 $y=8x-7$ 平行, 则 $n=8$. 故选 C.

7. D 【解析】由 $y=e^x$ 得 $y'=e^x$, 由 $y=\ln(x+a)$ 得 $y'=\frac{1}{x+a}$. 设过原点的直线 l 分别与曲线 $y=e^x$, $y=\ln(x+a)$ 相切于点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则由导数的几何意义得 $\frac{y_1}{x_1} = e^{x_1}$, 且 $y_1 = e^{x_1}$, 故 $x_1=1$, 所以直线 l 的斜率为 e . 所以 $\frac{y_2}{x_2} = \frac{1}{x_2+a} = e$, 所以 $x_2+a = \frac{1}{e}$.

☞ 悟: 根据斜率相等列方程

$\ln(x_2+a) = ex_2$, 所以 $ex_2 = -1$, 即 $x_2 = -\frac{1}{e}$, 代入 $\frac{1}{x_2+a} = e$ 得 $a = \frac{2}{e}$. 故选 D.

8. $x^x(\ln x+1)$ 【解析】因为 $y=x^x$, 故可得 $\ln y = x \ln x$, 所以 $(\ln y)' = (x \ln x)'$, 即 $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + 1$, 所以 $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.

9. 【解】 $\because f'(x) = (e^{2x})' \cdot \cos 3x + e^{2x} \cdot (\cos 3x)' = 2e^{2x} \cdot \cos 3x - 3e^{2x} \cdot \sin 3x$, $\therefore f'(0) = 2$. \therefore 曲线 $f(x) = e^{2x} \cdot \cos 3x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-0)$, 即 $y=2x+1$.

由题意知直线 l 与切线 $y=2x+1$ 平行, 故设满足题意的直线 l 的方程为 $y=2x+b(b \neq 1)$. 根据题意, 得 $\sqrt{5} = \frac{|b-1|}{\sqrt{5}}$, 解得 $b=6$ 或 $b=-4$. \therefore 满足题意的直线 l 的方程为 $y=2x+6$ 或 $y=2x-4$.

刷易错

★易错点 求复合函数的导数时忽视中间变量致误

10. A 【解析】 $\because y = \log_a(2x^2-1)$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$, $\therefore y' = \frac{(2x^2-1)'}{(2x^2-1) \ln a} = \frac{4x}{(2x^2-1) \ln a}$, 故选 A.

易错警示 设 $t=2x^2-1$, 则函数 $y = \log_a(2x^2-1) = \log_a t$ 是复合函数, 其导数为 $y' = \frac{t'}{t \ln a}$. 注意将 $t=2x^2-1$ 代入分母并且对其求导的结果代入分子.

第 5.2 节综合训练

刷能力

1. C 【解析】由函数 $f(x) = ax^{a+b}$, 可得 $f'(x) = a(a+b)x^{a+b-1}$, 因为 $f'(x) = 12x^3$, 所以 $\begin{cases} a(a+b)=12, \\ a+b-1=3, \end{cases}$ 解得 $a=3, b=1$. 故选 C.

2. D 【解析】由 $y = x^3 - x + \frac{2}{3}$ 可得 $y' = 3x^2 - 1$, $\therefore y' \in [-1, +\infty)$, 即 $k = \tan \alpha \in [-1, +\infty)$, $\alpha \in [0, \pi)$.

当 $\tan \alpha \in [0, +\infty)$ 时, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$;

当 $\tan \alpha \in [-1, 0)$ 时, $\alpha \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$,

$\therefore \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$, 故选 D.

3. B 【解析】函数 $f(x) = \frac{x^2+1+2x+\sin x}{x^2+1} = 1 + \frac{2x+\sin x}{x^2+1}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 则 $f'(x) = \frac{(2+\cos x)(x^2+1) - 2x(2x+\sin x)}{(x^2+1)^2}$, $f'(-x) = \frac{[2+\cos(-x)](x^2+1) - 2(-x)[2(-x)+\sin(-x)]}{(x^2+1)^2} =$

$f'(x)$, 因此函数 $f'(x)$ 是偶函数, 所以 $f'(2 023) - f'(-2 023) = 0$. 故选 B.

多种解法 $f(x) = \frac{x^2+1+2x+\sin x}{x^2+1} = 1 + \frac{2x+\sin x}{x^2+1}$, 令 $g(x) = \frac{2x+\sin x}{x^2+1}$, 因为 $g(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , 且 $g(-x) = \frac{2x+\sin x}{x^2+1} = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 为奇函数, 则 $g'(x)$ 为偶函数, 从而 $f'(x) = g'(x)$ 为偶函数, 则 $f'(2 023) - f'(-2 023) = 0$.

二级结论 具有奇偶性的函数与导函数奇偶性的关系:

① $f(x)$ 是奇函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是偶函数;
② $f(x)$ 是偶函数 $\Rightarrow f'(x)$ 是奇函数.

4. A 【解析】因为 $g(x) = 2xg'(1) + x^2$, 所以 $g'(x) = 2g'(1) + 2x$. 因为 $g'(1) = 2g'(1) + 2$, 所以 $g'(1) = -2$, 所以 $g(x) = -4x + x^2$. 因为当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = g(x)$, 所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x^2 - 4x$, 由 $x^2 - 4x > 0$, 可得 $x > 4$. 因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以当 $x < 0$ 时, 由 $f(x) > 0$, 可得 $-4 < x < 0$. 故不等式 $f(x) > 0$ 的解集为

☞ 悟: 根据奇函数图象的性质得到 $(-4, 0) \cup (4, +\infty)$. 故选 A.

5. D 【解析】对于 A, 由 $f(x) = \sin x + \cos x$, 得 $f'(x) = \cos x - \sin x$, 则 $f''(x) = -\sin x - \cos x = -(\sin x + \cos x)$, 因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\sin x > 0, \cos x > 0$, 所以 $f''(x) < 0$, 所以函数 $f(x) =$

$\sin x + \cos x$ 是“凸函数”, 故 A 错误; 对于 B, 由 $f(x) = \ln x - 2x$, 得 $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$, 则 $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, 因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, 所以函数 $f(x) = \ln x - 2x$ 是“凸函数”, 故 B 错误;

对于 C, 由 $f(x) = -x^3 + 2x - 1$, 得 $f'(x) = -3x^2 + 2$, 则 $f''(x) = -6x$,

因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $f''(x) = -6x < 0$,

所以函数 $f(x) = -x^3 + 2x - 1$ 是“凸函数”, 故 C 错误;

对于 D, 由 $f(x) = -xe^{-x}$, 得 $f'(x) = -e^{-x} + xe^{-x}$, 则 $f''(x) = e^{-x} + e^{-x} - xe^{-x} = (2-x)e^{-x}$,

因为 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $f''(x) = (2-x) \cdot e^{-x} > 0$, 所以函数 $f(x) = -xe^{-x}$ 不是“凸函数”, 故 D 正确. 故选 D.

6. AC 【解析】由 $f(x) = x^2 - x - 6$ 得 $f'(x) = 2x - 1$, 所以曲线 $f(x)$ 在点 $(x_n, f(x_n))$ 处的切线方程为 $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$, 令 $y = 0$, 得 $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - x_n - 6}{2x_n - 1}$, 故 A 正确.

$\frac{x_{n+1} + 2}{x_{n+1} - 3} = \frac{x_n^2 + 6}{x_n^2 - 1} = \left(\frac{x_n + 2}{x_n - 3}\right)^2$, 故 $\ln \frac{x_{n+1} + 2}{x_{n+1} - 3} = 2 \ln \frac{x_n + 2}{x_n - 3}$, 即 $a_{n+1} = 2a_n$,

所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 且为递增数列, 故 B 错误, C 正确. 所以 $S_{2 024} = \frac{1 \times (1 - 2^{2 024})}{1 - 2} = 2^{2 024} - 1$, 故 D 错误. 故选 AC.

链接教材 此题背景源自教材第 82 页“探究与发现”: 牛顿法——用导数方法求方程的近似解. 此方法承接必修第一册学习的二分法, 借助导数与切线, 可以更快速地找出较准确的零点的取值范围.

7. 0 或 $\frac{1}{2}$ 【解析】由 $y = x + \ln x$, 得 $y' = 1 + \frac{1}{x}$, 当 $x=1$ 时, 切线的斜率 $k=2$, 所以曲线 $y = x + \ln x$ 在点 $(1, 1)$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$, 即 $y=2x-1$. 因为切线 $y=2x-1$ 与曲线 $y=ax^2+x-a$ 只有一个公共点, 所以方程 $2x-1 = ax^2+x-a$ 只有一个解, 即 $ax^2-x+1-a=0$ 有唯一解. 当 $a=0$ 时, $y=ax^2+x-a$ 为 $y=x$, 此时其图象与切线 $y=2x-1$ 只有一个交点, 符合题意, 当 $a \neq 0$ 时有 $\Delta =$

0 , 解得 $a = \frac{1}{2}$. 故 a 的值为 0 或 $\frac{1}{2}$.

8. $(-16, 0]$ 【解析】由题意知, $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域为 $(0, +\infty)$, 结合 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大致图象可知, 在 $(0, +\infty)$ 上, $f(x) < g(x)$.

设直线 $l: y = kx + b$, 直线 l 与 $f(x)$ 在

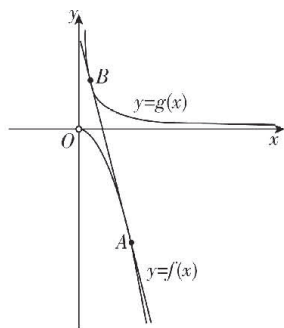
$(0, +\infty)$ 上的图象切于点 $A(x_1, -2x_1^2)$, 与 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的图象切于点 $B(x_2, \frac{16}{x_2})$,

$$f'(x) = -4x, g'(x) = -\frac{16}{x^2}, \text{ 则 } k =$$

$$\frac{-2x_1^2 - \frac{16}{x_2}}{x_1 - x_2} = -4x_1 = -\frac{16}{x_2^2}, \text{ 则 } \frac{8}{x_2} = x_1^2 -$$

$$2x_1x_2, \text{ 且 } x_1 = \frac{4}{x_2}, \text{ 解得 } x_2 = 1,$$

所以公切线的斜率 $k = -16$, 结合图象可知, “隔离直线”斜率的取值范围为 $(-16, 0]$.



名师点拨 利用极限的思想, $y=0$ 即 x 轴可以看作是 $g(x)$ 在正无穷大处的切线, 也是一条公切线, 所以所求直线的斜率介于两条公切线斜率之间.

5.3 导数在研究函数中的应用

5.3.1 函数的单调性

刷基础

1. AD 【解析】对于 A, $y' = 1 + \ln x$, 当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $y' < 0$, 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $y' > 0$,

因此函数 $y = x \ln x$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递

减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增, **A 符合**;

对于 B, $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $0 < x < e$ 时, $y' > 0$,

当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 因此函数 $y = \frac{\ln x}{x}$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, **B 不符合**;

对于 C, 当 $x > 0$ 时, $y' = (x+1)e^x > 0$, 函数 $y = xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, **C 不符合**;

对于 D, $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, 因此函数 $y = \frac{e^x}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, **D 符合**. 故选 AD.

2. C 【解析】令 $f(x) = \frac{\lg |x|}{x}$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

❶ 黑板: 定义域优先原则

$$\therefore f(-x) = \frac{\lg |-x|}{-x} = -\frac{\lg |x|}{x} = -f(x),$$

$\therefore f(x)$ 是奇函数, **排除 B**;

又当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$ 恒成立, **排除 A**;

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = \frac{\lg x}{x},$$

$$\therefore f'(x) = \frac{x \cdot \frac{1}{x \ln 10} - \lg x}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 10} - \lg x}{x^2} = \frac{\lg e - \lg x}{x^2},$$

\therefore 当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 当 $x > e$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 故 **D 不正确**. 故选 C.

3. C 【解析】因为 $f'(x) = \frac{4}{x} - \frac{3}{x^2} - 1 = \frac{-x^2 + 4x - 3}{x^2}$ ($x > 0$), 所以令 $f'(x) > 0$, 即 $-x^2 + 4x - 3 > 0$, 解得 $1 < x < 3$, 所以函数的单调递增区间为 $(1, 3)$. 故选 C.

4. C 【解析】由题图可得, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增. 结合选项可知 C 符合题意. 故选 C.

链接教材 本题是教材第 89 页练习第 3 题的延伸, 考查导函数图象与原函数图象的关系, 解决函数问题时经常会利用导函数判断原函数的单调性. 对导函数图象, 应注意分析其在区间内的正负; 对原函数图象, 应注意分析其在区间内的单调趋势. 导数值在哪个区间内大于 0, 则原函数在对应区间内单调递增; 导数值在哪个区间内小于 0, 则原函数在对应区间内单调递减.

5. 【解】 (1) 因为 $f(x) = x + a \sin x$, 所以 $f'(x) = 1 + a \cos x$.

因为 $f(x)$ 的图象在 $x=0$ 处的切线方程为 $x+y=0$, 所以 $f'(0) = 1+a = -1$, 所以 $a = -2$.

(2) 由 (1) 知 $f(x) = x - 2 \sin x$, 则 $f'(x) = 1 - 2 \cos x$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{3}$ 或 $x = \frac{5\pi}{3}$.

当 $x \in (0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$ 上单调递减;

当 $x \in (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$ 上单调递增.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$, 单调递减区间为 $(0, \frac{\pi}{3})$, $(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$.

6. C 【解析】由 $f(x) = ae^x - x$ 求导可得 $f'(x) = ae^x - 1$, 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 无单调递增区间, 不符合题意; 当 $a > 0$ 时, 因为函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0, +\infty)$, 则有 $f'(0) = ae^0 - 1 = a - 1 = 0$, 解得 $a = 1$. 当 $a = 1$ 时, $f'(x) = e^x - 1$, 则当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单

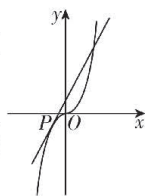
刷素养

9. $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 【解析】依

题意得 $ax + 2 = x^3 - ax$, 即方程 $x^3 = 2ax + 2$ 有三个不同的实数根. 假设直线 $y = 2ax + 2$ 与曲线 $y = x^3$ 相切于点 $P(x_0, y_0)$,

$$\text{则 } \begin{cases} x_0^3 = 2ax_0 + 2, \\ 2a = 3x_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -1, \\ a = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

又直线 $y = 2ax + 2$ 过定点 $(0, 2)$, 画出函数 $y = x^3$ 的图象如图, 结合图象可知 $a \in (\frac{3}{2}, +\infty)$.



调递减; 当 $x=0$ 时, $f'(x) = 0$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0, +\infty)$, 符合题意. 所以 $a = 1$. 故选 C.

特别注意 函数的单调递增区间为 $[0, +\infty)$ 与函数在 $[0, +\infty)$ 上单调递增含义不同, 前者指的是函数完整的单调递增区间为 $[0, +\infty)$, 后者指的是 $[0, +\infty)$ 包含于函数的完整的单调递增区间.

7. D 【解析】由函数 $f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x -$

$$a \cos x + 2x, \text{ 可得 } f'(x) = \cos 2x + a \sin x + 2 = -2 \sin^2 x + a \sin x + 3.$$

因为 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上单调递增, 所以 $-2 \sin^2 x + a \sin x + 3 \geq 0$ 恒成立.

整理为 $2 \sin^2 x - a \sin x - 3 \leq 0$ 恒成立. 令 $t = \sin x$ ($-1 \leq t \leq 1$), 可得 $g(t) = 2t^2 - at - 3$ ($-1 \leq t \leq 1$),

由二次函数的单调性, 可知满足 $g(-1) = a - 1 \leq 0$ 且 $g(1) = -a - 1 \leq 0$, 可得 $-1 \leq a \leq 1$, 即实数 a 的取值范围为 $[-1, 1]$. 故选 D.

规律方法 由函数在区间 D 上的单调性求参数取值范围的方法

(1) 若函数 $f(x)$ 单调递增, 则在区间 D 上 $f'(x) \geq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为 0;

(2) 若函数 $f(x)$ 单调递减, 则在区间 D 上 $f'(x) \leq 0$ 且 $f'(x)$ 不恒为 0;

(3) 若函数 $f(x)$ 为常函数, 则 $f'(x) = 0$ 恒成立.

具体解题时, 先由导函数在区间 D 上恒非负 (单调递增) 或恒非正 (单调递减) 求出参数的取值范围, 再验证此范围内是否存在参数值使得导数值在区间 D 的某个子区间上恒为 0, 若存在, 需要剔除, 若不存在, 不需要在卷面体现验证过程, 本题不存在这样的参数值, 所以利用导函数在 \mathbb{R} 上恒非负解得的范围即为最终答案.

8. A 【解析】由 $f(x) = \frac{1}{2} x^2 - 9 \ln x$, 则函

数 $f(x)$ 的定义域是 $(0, +\infty)$, 又函数 $f(x)$ 在区间 $[a-1, a+1]$ 上单调递减,

$$\text{由 } f'(x) = x - \frac{9}{x} \leq 0, \text{ 得 } 0 < x \leq 3,$$

所以 $\begin{cases} a-1 > 0, \\ a+1 \leq 3, \end{cases}$ 解得 $1 < a \leq 2$, 所以实数

❷ 点悟: $[a-1, a+1] \subseteq (0, 3]$