

## 高中必刷题 数学

**12. A** 【解析】观察散点图可知, A 图中的散点更集中落在一条直线附近, 故选 A.

**13. 【解】**(1) 由题中的数据是按从小到大的顺序排列的, 可知该组数据的极差为  $216.93 - 206.78 = 10.15$ ,

$$\text{中位数为 } \frac{209.35 + 210.68}{2} = 210.015.$$

(2) 10 个数据中有 4 个数据是大于 211 的, 故从中任意抽取

$$3 \text{ 个数据, 恰有 2 个大于 211 的概率 } P = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}.$$

(3) 由题意可得  $\bar{y} = \frac{1}{10} \times (206.78 + 207.46 + 207.95 + 209.34 + 209.35 + 210.68 + 213.73 + 214.84 + 216.93 + 216.93) = 211.399$ , 由回归直线过样本点的中心  $(\bar{x}, \bar{y})$ ,

可得  $211.399 = -0.311 \times 2006 + \hat{a}$ , 解得  $\hat{a} = 835.265$ ,

则回归直线的方程为  $y = -0.311x + 835.265$ .

当  $x = 2028$  时,  $y = -0.311 \times 2028 + 835.265 = 204.557 \approx 204.56$ ,

故预测 2028 年冠军队的成绩为 204.56.

**14. 【解】**(1) 根据题表数据可知, 超声波检查结果不正常的有 200 人, 其中患该疾病的有 180 人, 因此估计超声波检查结果

不正常者患该疾病的概率  $p = \frac{180}{200} = \frac{9}{10}$ .

**陷阱:** 注意该问所求概率中用到的数据, 数据找错, 计算也就出错

(2) 零假设为  $H_0$ : 超声波检查结果与患该疾病无关.

$$\chi^2 = \frac{1000 \times (20 \times 20 - 180 \times 780)^2}{200 \times 800 \times 800 \times 200} = 765.625 > 10.828.$$

根据小概率值  $\alpha = 0.001$  的独立性检验, 超声波检查结果与患该疾病有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.001.

### 刷原创

**1. 【解】**(1) 由题意得  $\bar{x} = \frac{1}{100} \times (18 \times 1000 + 36 \times 3000 + 24 \times 5000 + 12 \times 7000 + 10 \times 9000) = 4200$ .

(2) 由题意可得  $\mu = 4200, \sigma = 250$ ,

$$P(4200 < X < 4700) = \frac{1}{2} P(3700 < X < 4700) \approx \frac{1}{2} \times 0.954 =$$

0.477,

结合样本估计整体,  $\xi$  服从二项分布  $B(3, 0.477)$ , 所以

**敲黑板:** 若随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, p)$ , 则  $E(X) = np$

$$E(\xi) = 3 \times 0.477 = 1.431.$$

**2. 【解】**(1) 依题意,  $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{2}{3}$ ,

$X$  的所有可能取值为  $-1, 0, 1$ ,

$$\text{则 } P(X = -1) = P(\bar{A}B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 0) = P(AB + \bar{A}\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{12},$$

$$P(X = 1) = P(\bar{A}B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	-1	0	1
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{所以 } E(X) = -\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

(2) 若乙队得 0 分, 则甲队得 2 分, 且第 4 轮甲队得分, 其概率为

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 \times C_3^1 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{768};$$

若乙队得 1 分, 则甲队得 3 分, 且第 4 轮甲队得分, 乙队不得分,

前 3 轮中不出现甲在前 2 轮得 2 分, 乙在第 3 轮得分的情况, 其概率为  $(C_3^2 C_3^1 - 1) \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{48}$ ;

若乙队得 2 分, 则甲队得 4 分, 且第 4 轮甲队得分, 乙队不得分,

$$\text{其概率为 } C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3}{64},$$

所以恰好在第 4 轮对抗后比赛结束且甲队获胜的概率为

$$\frac{1}{768} + \frac{1}{48} + \frac{3}{64} = \frac{53}{768}.$$

## 专练 1 新定义、新情境专练

### 刷素养

**1. C** 【解析】满足  $36 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  的自然数  $a, b, c, d$  有四组, 分别是:  $6, 0, 0, 0; 5, 3, 1, 1; 4, 4, 2, 0; 3, 3, 3, 3$ ,

那么有序数组  $(a, b, c, d)$  有  $A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + 1 = 29$  个. 故选 C.

**2. C** 【解析】用算筹随机摆出一个不含数字 0 的两位数, 个位用纵式, 十位用横式, 共可以摆出  $9 \times 9 = 81$  个两位数, 其中个位和十位上的算筹都为 1 根的有  $1 \times 1 = 1$  个,

个位和十位上的算筹都为 2 根的有  $2 \times 2 = 4$  个, 个位和十位上的算筹都为 3 根的有  $2 \times 2 = 4$  个, 个位和十位上的算筹都为 4 根的有  $2 \times 2 = 4$  个, 个位和十位上的算筹都为 5 根的有  $2 \times 2 = 4$  个, 共有  $4 \times 4 + 1 = 17$  个, 所以个位和十位上的算筹一

样多的概率为  $\frac{17}{81}$ . 故选 C.

**3. A** 【解析】 $(-1+2x)^{2025}$  的展开式的通项为  $T_{k+1} = C_{2025}^k \cdot$

$$(-1)^{2025-k} \cdot (2x)^k = C_{2025}^k \cdot (-1)^{2025-k} 2^k x^k (0 \leq k \leq 2025, k \in \mathbf{N}),$$

$$\text{又因为 } (2x-1)^{2025} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{2025} x^{2025} (x \in \mathbf{R}),$$

$$\text{所以 } a_k = C_{2025}^k \cdot (-1)^{2025-k} 2^k (0 \leq k \leq 2025, k \in \mathbf{N}),$$

当  $k$  为奇数时,  $a_k > 0$ ; 当  $k$  为偶数时,  $a_k < 0$ .

$$\text{令 } f(x) = (2x-1)^{2025}, \text{ 则 } f(-1) = (-3)^{2025} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2024} - a_{2025},$$

$$\text{所以 } a = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{2025}| = -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2024} + a_{2025} = -f(-1) = 3^{2025},$$

$$\text{又 } 3^{2025} = (4-1)^{2025} = C_{2025}^0 4^{2025} - C_{2025}^1 4^{2024} + C_{2025}^2 4^{2023} - C_{2025}^3 4^{2022} + \cdots + C_{2025}^{2024} 4 - 1,$$

故  $a$  被 4 除的余数为 3,

而  $2023$  被 4 除的余数为 3,  $2024$  被 4 整除,  $2025$  被 4 除的余数为 1,  $2026$  被 4 除的余数为 2, 故选 A.

4.45 4.095 【解析】 $n \leq 1024 = 2^{10} = (10\,000\,000\,000)_2$ ,

要使  $f(n) = 2$ ,

则  $n$  是 2~10 位二进制数,且  $n$  的二进制各个位数中恰好有两个 1,其余位均为 0,

因为最高位必为 1,所以有  $C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + C_5^1 + C_6^1 + C_7^1 + C_8^1 + C_9^1 = \frac{9 \times (1+9)}{2} = 45$  个满足题意的  $n$  的值.

由于  $63 = 64 - 1 = 2^6 - 1 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = (111\,111)_2$  是最大的 6 位二进制数,故 1~63 的二进制数中最少 1 个 1,最多 6 个 1,即当  $n \in \{1, 2, 3, \dots, 63\}$  时,  $f(n) \in \{1, 2, 3, \dots, 6\}$ .

当  $f(n) = 1$  时,1~6 位二进制数最高位必为 1,其余位为 0,故共有  $C_6^1 = 6$  个二进制数(或者理解为前 6 位中恰有 1 个 1,其余位均为 0);

当  $f(n) = 2$  时,2~6 位二进制数最高位必为 1,其余位只有 1 个 1,故共有  $C_1^1 + C_2^1 + C_3^1 + C_4^1 + C_5^1 = C_5^2 = 10$  个二进制数(或者理解为前 6 位中恰有 2 个 1,其余位均为 0);

当  $f(n) = 3$  时,3~6 位二进制数最高位必为 1,其余位只有 2 个 1,故共有  $C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 = C_5^3 = 10$  个二进制数(或者理解为前 6 位中恰有 3 个 1,其余位均为 0);

.....

当  $f(n) = 6$  时,6 位二进制数全是 1,故共有  $C_6^6$  个二进制数,所以  $3^{f(1)} + 3^{f(2)} + \dots + 3^{f(63)} = 3^1 C_6^1 + 3^2 C_6^2 + \dots + 3^6 C_6^6 = 3^0 C_6^0 + 3^1 C_6^1 + 3^2 C_6^2 + \dots + 3^6 C_6^6 - 1 = (1+3)^6 - 1 = 4^6 - 1 = 2^{12} - 1 = 4\,095$ .

5.C 【解析】因为  $f(-x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} = f(x)$ ,且  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,所以该函数是偶函数,其图象关于  $y$  轴对称.

由  $P(|X| \leq \sqrt{3}) = \frac{2}{3}$ ,可得  $P(0 \leq X \leq \sqrt{3}) = \frac{1}{3}$ ,又因为  $P(1 <$

$X \leq \sqrt{3}) = \frac{1}{12}$ ,所以  $P(0 \leq X \leq 1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ ,因此  $P(-1 \leq$

$X \leq 0) = \frac{1}{4}$ ,所以  $P(X \leq -1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ,故选 C.

6.ABD 【解析】对于 A,由  $X \sim NB\left(2, \frac{1}{3}\right)$ ,则  $P(X=3) =$

$C_2^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{4}{27}$ ,故 A 正确;

对于 B,由  $X \sim NB\left(1, \frac{1}{2}\right)$ ,则  $P(X=k) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \left(\frac{1}{2}\right)^k, k=1, 2, 3, \dots$ ,故 B 正确;

对于 C,若  $X \sim NB(r, p)$ ,则  $P(X=k) = C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{k-r} p = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, k=r, r+1, r+2, \dots$ ,故 C 错误;

对于 D,若  $X \sim NB(r, p)$ ,则  $P(X=k)$  最大时,当且仅当  $\begin{cases} P(X=k) \geq P(X=k-1), \\ P(X=k) \geq P(X=k+1) \end{cases}$  成立,

即  $\begin{cases} C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \geq C_{k-2}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r-1}, \\ C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \geq C_k^{r-1} p^r (1-p)^{k-r+1}, \end{cases}$  解得  $\frac{r-1}{p} \leq k \leq 1 + \frac{r-1}{p}$ .

故当  $k$  取不小于  $\frac{r-1}{p}$  的最小正整数时,  $P(X=k)$  最大,故 D 正确. 故选 ABD.

7.BC 【解析】小球落下要经过 6 次碰撞,每次向左、向右落下的概率均为  $\frac{1}{2}$ ,小球从第 6 行第  $m(m \in \mathbf{N}_+, m \leq 7)$  个缝隙落

下,则 6 次碰撞有  $(m-1)$  次向右,其概率为  $P_m =$

$C_6^{m-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-(m-1)} = \frac{C_6^{m-1}}{64} (m \in \mathbf{N}_+, m \leq 7)$ ,于是得

$P_1 = P_7 = \frac{1}{64}, P_2 = P_6 = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}, P_3 = P_5 = \frac{15}{64}, P_4 = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$ ,所以

→ 敲黑板: 根据  $C_n^r = C_n^{n-r} (r=0, 1, 2, \dots, n)$  得到

选项 A, D 不可能,选项 B, C 可能.

8.A 【解析】由已知得  $\kappa = \frac{P_o - P_e}{1 - P_e} =$

$\frac{P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) - P(A)P(B) - P(\bar{A})P(\bar{B})}{1 - P(A)P(B) - P(\bar{A})P(\bar{B})}$ ,

根据  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 1 - P(\bar{A}\bar{B})$ ,

所以  $P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB)$ ,

则上式可化为  $\kappa =$

$\frac{P(AB) + 1 - P(A) - P(B) + P(AB) - P(A)P(B) - P(\bar{A})P(\bar{B})}{1 - P(A)P(B) - P(\bar{A})P(\bar{B})}$   
 $= \frac{2P(AB) + 1 - P(A) - P(B) - P(A)P(B) - [1 - P(A)][1 - P(B)]}{1 - P(A)P(B) - [1 - P(A)][1 - P(B)]}$

$= \frac{2P(AB) - 2P(A)P(B)}{-2P(A)P(B) + P(A) + P(B)} = \frac{\frac{2P(AB)}{P(A)P(B)} - 2}{-2 + \frac{1}{P(B)} + \frac{1}{P(A)}}$

$= \frac{\frac{2P(AB)P(AB)}{P(A)P(B)} - 2P(AB)}{-2P(AB) + \frac{P(AB)}{P(B)} + \frac{P(AB)}{P(A)}}$   
 $= \frac{2P(B|A)P(A|B) - 2P(AB)}{-2P(AB) + P(A|B) + P(B|A)} = \frac{2QR - 2P(AB)}{-2P(AB) + Q + R}$ . 故选 A.

9.【解】(1)记破解后信息字符为“ $\beta$ ”为事件  $M$ ,传递信息字符为“ $\beta$ ”为事件  $N$ .

因为传递信息字符为“ $\alpha$ ”“ $\beta$ ”“ $\gamma$ ”时,均有  $\frac{1}{3}$  的概率被破解

为“ $\beta$ ”,所以  $P(M) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ ,

因为  $P(N) = \frac{1}{4}, P(M|N) = \frac{1}{3}$ ,

所以  $P(MN) = P(N)P(M|N) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ ,

所以  $P(N|M) = \frac{P(MN)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$ .

(2)由题可知,若传递信息字符为“ $\beta$ ”,则被破解正确的概率为  $\frac{1}{3}$ ,则  $X \sim B\left(3, \frac{1}{3}\right)$ .

$P(X=0) = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}, P(X=1) = C_3^1 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ ,

$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}, P(X=3) = C_3^3 \times$



$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

$$\text{所以 } E(X) = 3 \times \frac{1}{3} = 1.$$

(3)  $P_1 < P_3 < P_2$ , 理由如下:

记传递信息字符只有一种为事件  $A$ , 传递信息字符有两种为事件  $B$ , 传递信息字符有三种为事件  $C$ , 被破解后信息字符均为“ $\beta$ ”为事件  $Y$ .

$$\text{由题意知, } P(A) = \frac{C_4^1}{C_4^1 C_4^1 C_4^1} = \frac{1}{16}, P(B) = \frac{C_4^2 C_2^1 C_3^1}{C_4^1 C_4^1 C_4^1} = \frac{9}{16}, P(C) = \frac{A_4^3}{C_4^1 C_4^1 C_4^1} = \frac{3}{8},$$

$$P(Y|A) = \frac{C_3^1}{C_4^1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{36}, P(Y|B) = \frac{C_3^2}{C_4^2} \times$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{54}, P(Y|C) = \frac{C_3^3}{C_4^3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{108},$$

$$\text{所以 } P(AY) = P(A)P(Y|A) = \frac{1}{16} \times \frac{1}{36} = \frac{1}{576},$$

$$P(BY) = P(B)P(Y|B) = \frac{9}{16} \times \frac{1}{54} = \frac{1}{96},$$

$$P(CY) = P(C)P(Y|C) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{108} = \frac{1}{288},$$

$$\text{所以 } P(Y) = P(AY) + P(BY) + P(CY) = \frac{1}{576} + \frac{1}{96} + \frac{1}{288} = \frac{1}{64},$$

$$\text{则 } P_1 = P(A|Y) = \frac{P(AY)}{P(Y)} = \frac{1}{576} \times 64 = \frac{1}{9},$$

$$P_2 = P(B|Y) = \frac{P(BY)}{P(Y)} = \frac{1}{96} \times 64 = \frac{2}{3}, P_3 = P(C|Y) = \frac{P(CY)}{P(Y)} =$$

$$\frac{1}{288} \times 64 = \frac{2}{9}, \text{ 所以 } P_1 < P_3 < P_2.$$

## 专练2 开放题专练

### 刷素养

1. 14 (答案不唯一) 【解析】由题意得  $x^2 =$

$$\frac{20x \cdot (30x^2 - 20x^2)^2}{10x \cdot 10x \cdot 9x \cdot 11x} = \frac{20x}{99} > 2.706, \text{ 故 } x > 13.3947, \text{ 所以 } 14 \leq$$

$x < 20, x \in \mathbb{N}_+$ . 故答案为 14 (答案不唯一).

2. 【解】(1) 若选①, 易知  $2^n = 64$ , 则  $n = 6$ , 此时  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$  的常数

项为  $C_6^3 x^3 (2x^{-1})^3 = 160$ .

若选②, 易知  $C_n^2 = 15$ , 则  $n = 6$ , 此时  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$  的常数项为

$$C_6^3 x^3 (2x^{-1})^3 = 160.$$

若选③, 令  $x = 1$ , 则  $\left(1 + \frac{2}{1}\right)^n = 3^n = 729$ ,

$$\text{解得 } n = 6, \text{ 此时 } \left(x + \frac{2}{x}\right)^6 \text{ 的常数项为 } C_6^3 x^3 (2x^{-1})^3 = 160.$$

(2) 由(1)可知不论选①②③中的哪一个, 都有  $n = 6$ ,

则问题为求  $(1+x^2)\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$  展开式中  $x^4$  的系数,

先求  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$  展开式中含  $x^4$  的项, 易知该项为

$$C_6^1 x^3 (2x^{-1})^1 = 12x^4,$$

再求  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$  展开式中含  $x^2$  的项, 易知该项为

$$C_6^2 x^4 (2x^{-1})^2 = 60x^4,$$

所以  $(1+x^2)\left(x + \frac{2}{x}\right)^6$  展开式中含  $x^4$  的项为  $12x^4 + 60x^4 =$

$$72x^4, \text{ 所以 } x^4 \text{ 的系数为 } 72.$$

3. 【解】(1) 因为  $(0.005 + m + 0.032 + 0.024 + n + 0.006) \times 10 = 1$ , 所

以  $m + n = 0.033$ . 又  $m - n = \frac{1}{1000}$ , 所以  $m = 0.017, n = 0.016$ , 所以

成绩在  $[90, 100)$  内的有 5 人, 成绩在  $[100, 110)$  内的有 17 人,

所以任取 3 人, 至少有 2 人的成绩在  $[90, 100)$  内的概率  $P =$

$$\frac{C_5^2 C_{17}^1 + C_5^3}{C_{22}^3} = \frac{9}{77}.$$

(2) 由题意得成绩在  $[110, 120)$ ,  $[120, 130)$  和  $[130, 140)$  内的人数分别为 32, 24, 16, 因此, 抽取的 9 人中成绩在  $[110,$

$$120)$$
 内的有 4 人, 成绩在  $[120, 130)$  内的有 3 人, 成绩在  $[130,$

$$140)$$
 内的有 2 人, 所以  $\xi$  的取值范围为  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,

$$\text{所以 } P(\xi = 0) = \frac{C_5^4}{C_9^4} = \frac{5}{126}, P(\xi = 1) = \frac{C_4^1 C_5^3}{C_9^4} = \frac{20}{63}, P(\xi = 2) =$$

$$\frac{C_4^2 C_5^2}{C_9^4} = \frac{10}{21}, P(\xi = 3) = \frac{C_4^3 C_5^1}{C_9^4} = \frac{10}{63}, P(\xi = 4) = \frac{C_4^4}{C_9^4} = \frac{1}{126},$$

$$\text{所以 } \xi \text{ 的分布列为}$$

$\xi$	0	1	2	3	4
$P$	$\frac{5}{126}$	$\frac{20}{63}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{63}$	$\frac{1}{126}$

$$E(\xi) = 0 \times \frac{5}{126} + 1 \times \frac{20}{63} + 2 \times \frac{10}{21} + 3 \times \frac{10}{63} + 4 \times \frac{1}{126} = \frac{16}{9}.$$

(3) 在所抽取的这 100 人的成绩中, 成绩在  $[120, 130)$ ,  $[130,$

140) 和  $[140, 150]$  内的人数分别为 24, 16, 6, 所以方案一所需费用约为  $(24 + 16 + 6) \times 10 \times 333 = 153\,180$  (元), 方案二所需

费用约为  $(24 \times 200 + 16 \times 400 + 6 \times 600) \times 10 = 148\,000$  (元).

因为  $153\,180 > 148\,000$ , 所以选择方案一, 既能使得获奖人员得到的奖励资金总额较多, 又淡化了等级意识, 可以更好地发挥激励作用 (也可以选择方案二, 既能相对的节约资金, 又激励等级竞争意识).

## 模块综合测试

## 刷综合

1. C 【解析】 $A_m^5 = \frac{m!}{(m-5)!}$ .

对于 A,  $A_5^5 \cdot C_m^2 = \frac{m(m-1) \times 5!}{2}$ , 当  $m=7$  时,  $A_m^5 = A_5^5 \cdot C_m^2$ , 成立;

对于 B,  $\frac{A_m^m}{A_{m-5}^{m-5}} = \frac{m!}{(m-5)!} = A_m^5$ , 故  $A_m^5 = \frac{A_m^m}{A_{m-5}^{m-5}}$ , 成立;

对于 C,  $A_{m-1}^5 + A_{m-1}^4 = \frac{(m-1)!}{(m-6)!} + \frac{(m-1)!}{(m-5)!} = \frac{(m-4) \cdot (m-1)!}{(m-5)!}$ , 显然无论  $m$  取何值和  $A_m^5$  与  $A_{m-1}^5 + A_{m-1}^4$  都不相等;

对于 D,  $A_m^5 = \frac{m!}{(m-5)!}$  成立. 故选 C.

2. C 【解析】由题意, 甲先放, 有  $C_2^1 C_2^1$  种放法, 乙再放, 有  $C_2^1$  种放法, 则甲、乙两人有  $C_2^1 C_2^1 C_2^1$  种放法, 丙再放, 有  $C_2^1 C_3^1$  种放法, 最后放丁, 有  $C_3^1$  种放法, 所以甲、乙、丙、丁共有  $C_2^1 C_2^1 C_2^1 C_3^1 C_3^1 = 144$  种放法. 故选 C.

3. B 【解析】因为随机变量  $\xi \sim N\left(1, \frac{1}{4}\right)$ , 所以  $E(\xi) = 1$ ,

$D(\xi) = \frac{1}{4}$ , 因为  $(1+2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ , 所以

$a_1 = C_n^1 \cdot 2 = 2n$ ,  $a_2 = C_n^2 \cdot 2^2 = 2n(n-1)$ , 所以  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2n}{2n(n-1)} =$

$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{4}$ , 解得  $n=5$ . 令  $f(x) = (1+2x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ , 所以  $f(0) = a_0 = 1$ ,  $f(1) = (1+2)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$ , 故  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3^5 - 1 = 242$ . 故选 B.

4. D 【解析】记事件 A: 甲去北京旅游, 事件 B: 乙去北京旅游, 则  $P(A) = \frac{3}{4}$ ,  $P(B) = \frac{2}{3}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ ,

因为  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ , 即  $\frac{5}{6} = \frac{3}{4} + \frac{2}{3} -$

$P(AB)$ , 解得  $P(AB) = \frac{7}{12}$ .

又因为  $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B})$ , 即  $\frac{3}{4} = \frac{7}{12} + P(A\bar{B})$ , 解得

$P(A\bar{B}) = \frac{1}{6}$ .

因为  $P(B) = \frac{2}{3}$ , 所以  $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = \frac{1}{3}$ ,

所以  $P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ . 故选 D.

5. C 【解析】A. 相关系数的绝对值不超过 1, A 错误;

→ 敲黑板: 相关系数  $|r| \leq 1$ ,  $r > 0$  时正相关,  $r < 0$  时负相关

B. 由回归直线方程知,  $x$  每增加一个单位,  $y$  平均减少 1.25 个单位, B 错误;

C. 第二个样本点对应的残差  $\hat{e}_2 = 6 - (-1.25 \times 6 + 13.75) = -0.25$ , C 正确;

D. 第三个样本点对应的残差  $\hat{e}_3 = 4.5 - (-1.25 \times 7 + 13.75) = -0.5$ , D 错误. 故选 C.

6. D 【解析】对于 C, 由条件知  $10+b+c+30=105$ ,  $\frac{10+c}{105} = \frac{2}{7}$ , 得

$b=45, c=20$ , 故 C 错误;

对于 A, 由于甲班人数为  $10+b=10+45=55$ ,

乙班人数为  $c+30=20+30=50 < 55$ , 故 A 错误;

对于 B, 由于甲班优秀率为  $\frac{10}{55} = \frac{2}{11}$ , 乙班优秀率为  $\frac{20}{50} = \frac{2}{5} > \frac{2}{11}$ , 故 B 错误;

对于 D, 由于  $\chi^2 = \frac{105 \times (10 \times 30 - 45 \times 20)^2}{55 \times 50 \times 30 \times 75} \approx 6.109 > 5.024$ , 故 D

正确.

故选 D.

7. D 【解析】设事件  $D_1, D_2, D_3$  分别为“此人来自甲、乙、丙三个地区”,

事件  $F_1, F_2, F_3$  分别为“此人患了流感, 且分别来自甲、乙、丙地区”,

事件  $G$  为“此人患了流感”.

由题可知,  $P(F_1) = \frac{5x}{1000}$ ,  $P(F_2) = \frac{3x+3}{1000}$ ,  $P(F_3) = \frac{2x+4}{1000}$ ,

$P(G) = P(F_1) + P(F_2) + P(F_3) = \frac{10x+7}{1000}$ ,

由条件概率公式可得  $P(D_1|G) = \frac{P(D_1G)}{P(G)} = \frac{P(F_1)}{P(G)} = \frac{5x}{10x+7}$ ,

$P(D_2|G) = \frac{P(D_2G)}{P(G)} = \frac{P(F_2)}{P(G)} = \frac{3x+3}{10x+7}$ ,  $P(D_3|G) = \frac{P(D_3G)}{P(G)} =$

$\frac{P(F_3)}{P(G)} = \frac{2x+4}{10x+7}$ ,

由题意可得  $\begin{cases} P(D_1|G) > P(D_2|G), \\ P(D_1|G) > P(D_3|G), \end{cases}$  即  $\begin{cases} 5x > 3x+3, \\ 5x > 2x+4, \end{cases}$  解得  $x > \frac{3}{2}$ ,

故选 D.

8. C 【解析】由条件可知,  $E_2 = (1-p) \cdot (E_2+1) + p^2 \cdot 2 + p(1-p)(E_2+2)$ , 解得  $E_2 = \frac{1+p}{p^2}$ . 故选 C.

9. BCD 【解析】对于 A,  $\because X \sim N(1, 2)$ ,  $\therefore D(X) = 2$ , 根据方差的性质可得,  $D(2X+2) = 2^2 D(X) = 8$ , 故 A 错误;

对于 B,  $\because X$  服从二项分布  $B(2, p)$ ,  $\therefore P(X \geq 1) = P(X=1) +$

$P(X=2) = C_2^1 p(1-p) + p^2 = 2p - p^2 = \frac{5}{9}$ , 解得  $p = \frac{1}{3}$  或  $p =$

$\frac{5}{3}$  (舍),

$\therefore P(Y < 0) = \frac{1}{6}$ , 根据正态分布的对称性可得,  $P(2 < Y < 4) =$

$\frac{1-2P(Y < 0)}{2} = \frac{1}{3}$ , 故 B 正确;

对于 C,  $X$  服从超几何分布  $H(10, 2, 4)$ , 根据超几何分布的期望公式可得,  $E(X) = \frac{2 \times 4}{10} = \frac{4}{5}$ , 故 C 正确;

对于 D,  $X$  服从二项分布  $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ , 根据二项分布方差公式

得,  $D(X) = np(1-p) = 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$ , 故 D 正确.

故选 BCD.



10. CD 【解析】对于 A, 由  $A_n^3 = 6C_n^4$  得  $n(n-1)(n-2) = 6 \times \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} (n \geq 4)$ , 解得  $n=7$ , 故 A 错误;

对于 B, 令  $x=0$ , 得  $a_0=1$ , 令  $x=\frac{1}{2}$ , 得  $0=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+$

$\frac{a_{2025}}{2^{2025}}, \therefore \frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{2025}}{2^{2025}}=-1$ , 故 B 错误;

对于 C,  $(1+2x^2)(1+x)^4 = (1+x)^4 + 2x^2(1+x)^4$ ,  $(1+x)^4$  展开式的通项为  $T_{r+1} = C_4^r x^r$ , 则  $(1+2x^2)(1+x)^4$  的展开式中含  $x^3$  的项为  $T_4 + 2x^2 T_2$ , 所以  $x^3$  的系数为  $1 \times C_4^3 + 2C_4^1 = 12$ , 故 C 正确;

对于 D, 二项式  $(3x-2y)^6$  的通项为  $T_{r+1} = C_6^r (3x)^{6-r} (-2y)^r$ , 设第  $r+1$  项的系数绝对值最大, 所以有  $\begin{cases} C_6^r \cdot 3^{6-r} \cdot |(-2)^r| \geq C_6^{r+1} \cdot 3^{6-r-1} \cdot |(-2)^{r+1}|, \\ C_6^r \cdot 3^{6-r} \cdot |(-2)^r| \geq C_6^{r-1} \cdot 3^{6-r+1} \cdot |(-2)^{r-1}|, \end{cases}$  解得  $\frac{9}{5} \leq r \leq \frac{14}{5}$ , 因为  $r \in \mathbb{N}_+$ , 所以  $r=2$ , 所以系数绝对值最大的项是第 3 项, D 正确. 故选 CD.

→ 陷阱:  $r=2$  时, 为展开式中的第 3 项

11. ABD 【解析】对于 A, 若  $n=3, m=1$ , 每个人出的手势都有 3 种可能, 所以 3 个人出手势的总情况数为  $3^3=27$ , 因为 3 个人都有可能获胜, 所以只有一人获胜的情况数为  $3 \times 3=9$ , 所以只有一人获胜的概率为  $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ , 故 A 正确.

对于 B, 若  $n=5, m=1$ , 5 个人出手势的总情况数为  $3^5=243$ , 下面计算平局的情况:

所有人出相同手势的情况有 3 种 (都出石头、都出剪刀、都出布).

三种手势都出现的情况: 用间接法, 先计算不满足三种手势都出现的情况, 即只有一种手势的情况 (3 种) 和只有两种手势的情况.

计算只有两种手势的情况: 从 3 种手势中选 2 种, 有  $C_3^2=3$  种选法,

设选的两种手势为 A 和 B, 把 5 个人分配到这两种手势中, 排除 5 个人都出 A 和 5 个人都出 B 的情况, 有  $2^5-2=30$  种情况,

所以只有两种手势的情况有  $3 \times 30=90$  种,

那么三种手势都出现的情况有  $243-3-90=150$  种.

综上所述, 平局的情况共有  $3+150=153$  种, 所以平局的概率

为  $\frac{153}{243} = \frac{17}{27}$ , 故 B 正确.

对于 C, 当  $n=2$  时, 两人每次出手势都有 3 种情况, 所以每局的情况数为  $3 \times 3=9$ , 恰经过 5 局比赛结束, 说明前 3 局没有一人连续两局获胜, 第 4 局和第 5 局是同一人获胜.

设两人为甲和乙, 若恰经过 5 局比赛甲获胜, 则第 4, 5 局甲胜, 第 3 局甲不赢, 前两局中不能出现甲连输或甲连赢的情况,

当第 3 局为平局时, 经过 5 局比赛甲获胜的概率为  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times$

$\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{243}$ ,

当第 3 局甲输时, 经过 5 局比赛甲获胜的概率为  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times$

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{243}$ ,

因此经过 5 局比赛甲获胜的概率为  $\frac{7}{243} + \frac{5}{243} = \frac{4}{81}$ , 同理, 经

过 5 局比赛乙获胜的概率为  $\frac{4}{81}$ ,

所以恰经过 5 局比赛结束的概率为  $\frac{4}{81} \times 2 = \frac{8}{81}$ , 故 C 错误.

对于 D, 若  $n=3$ , 每局比赛打平, 则 3 个人出的手势一样, 有 3 种情况, 或者各不相同, 有  $A_3^3=6$  种情况, 所以三人打平的

概率为  $\frac{3+A_3^3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3}$ .

不妨设三人分别为甲、乙、丙, 最后经过 5 局比赛甲获胜, 有以下几种情况:

①前 4 局, 三人都是平局, 第 5 局甲胜乙、丙, 其概率为

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3^6}$ ;

②前 3 局, 三人都是平局, 第 4 局甲、丙胜乙输, 第 5 局甲胜

丙, 其概率为  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{3 \times 3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3^6}$ ;

③前 3 局, 三人都是平局, 第 4 局甲、乙胜丙输, 第 5 局甲胜

乙, 其概率为  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{3 \times 3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3^6}$ ;

④第 1, 2 局三人打平, 第 3 局甲、乙胜丙输, 第 4 局甲、乙打平, 第 5 局甲胜乙,

其概率为  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{3 \times 3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3^6}$ ;

⑤第 1, 2 局三人打平, 第 3 局甲、丙胜乙输, 第 4 局甲、丙打平, 第 5 局甲胜丙,

其概率为  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{3}{3 \times 3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3^6}$ ;

⑥第 1 局三人打平, 第 2 局甲、丙胜乙输, 第 3, 4 局甲、丙打平, 第 5 局甲胜丙,

其概率为  $\frac{1}{3} \times \frac{3}{3 \times 3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3^6}$ ;

⑦第 1 局三人打平, 第 2 局甲、乙胜丙输, 第 3, 4 局甲、乙打平, 第 5 局甲胜乙,

其概率为  $\frac{1}{3} \times \frac{3}{3 \times 3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3^6}$ ;

⑧第 1 局甲、乙胜丙输, 第 2, 3, 4 局甲、乙都是平局, 第 5 局甲胜乙, 其概率为

$\frac{3}{3 \times 3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3^6}$ ;

⑨第 1 局甲、丙胜乙输, 第 2, 3, 4 局甲、丙都是平局, 第 5 局甲胜丙, 其概率为

$\frac{3}{3 \times 3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} \times \frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3^6}$ .

综上, 甲获胜的概率为  $\frac{1}{3^6} \times 9 = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$ ,

所以恰经过 5 局比赛决出最终胜利者的概率为  $\frac{1}{81} \times 3 = \frac{1}{27}$ ,

陷阱: 最终胜利者可能是甲、乙、丙中的一人, 所以需要乘 3

故 D 正确. 故选 ABD.

12.  $\frac{7}{6}$   $\frac{17}{4}$  【解析】 $\xi$  的所有可能取值为 0, 1, 2.

$$P(\xi=0) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6},$$

$$P(\xi=1) = \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2},$$

$$P(\xi=2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

$$E(\xi) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{7}{6},$$

$$E(\xi^2) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{3} = \frac{11}{6},$$

$$D(\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 = \frac{17}{36}.$$

$$\text{由 } \eta = 3\xi - 1, \text{ 则 } D(\eta) = 9D(\xi) = \frac{17}{4}.$$

13. 450

**思路导引** 由题意每位同学每年所修课程数可以分为 1, 2, 3 或 2, 2, 2 两类, 先将 6 门必修课分成三组, 再分到三个学年中, 根据分步乘法计数原理与分类加法计数原理可求解.

【解析】已知三学年修完 6 门课程, 每学年至少选 1 门, 至多选 3 门, 且不能提前修完, 则每位同学每年所修课程数可以分为 1, 2, 3 或 2, 2, 2.

若按 1, 2, 3 选择 6 门课程, 则先将 6 门必修课分成三组, 有  $C_6^1 C_5^2 C_3^3 = 60$  种不同方式, 再分配到三个学年中, 共有  $A_3^3 = 6$  种不同的分配方式, 由分步乘法计数原理可得共有  $60 \times 6 = 360$  种不同的选择方式;

若按 2, 2, 2 选择 6 门课程, 则先将 6 门必修课分成三组, 有  $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} = 15$  种不同方式, 再分配到三个学年中, 共有  $A_3^3 = 6$

种不同的分配方式, 由分步乘法计数原理可得共有  $15 \times 6 = 90$  种不同的选择方式.

综上所述, 每位同学的不同选择方式有  $360 + 90 = 450$  种.

14.  $\frac{21}{40}$  【解析】设黄色小球有  $n$  个, 则  $0 < n < 5, n \in \mathbb{N}_+$ ,

$$\text{则 } P = \frac{C_n^1 C_{10-n}^2}{C_{10}^3} = \frac{n \times \frac{(10-n)(9-n)}{2 \times 1}}{\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{n(10-n)(9-n)}{240},$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } P = \frac{1 \times (10-1) \times (9-1)}{240} = \frac{3}{10},$$

$$\text{当 } n=2 \text{ 时, } P = \frac{2 \times (10-2) \times (9-2)}{240} = \frac{7}{15},$$

$$\text{当 } n=3 \text{ 时, } P = \frac{3 \times (10-3) \times (9-3)}{240} = \frac{21}{40},$$

$$\text{当 } n=4 \text{ 时, } P = \frac{4 \times (10-4) \times (9-4)}{240} = \frac{1}{2},$$

所以  $P$  的最大值为  $\frac{21}{40}$ .

15. 【解】 $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$  展开式的通项为  $T_{k+1} = C_n^k (\sqrt{x})^{n-k} \cdot$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^k = C_n^k (-1)^k x^{\frac{3n-5k}{6}}.$$

方案一: 选条件①.

$$(1) \text{ 由题可知 } \frac{C_n^4 (-1)^4}{C_n^2 (-1)^2} = \frac{14}{3}, \text{ 所以 } \frac{n!}{4! (n-4)!} \times$$

$$\frac{2! (n-2)!}{n!} = \frac{14}{3},$$

所以  $n^2 - 5n - 50 = 0$ , 解得  $n = 10$  或  $n = -5$  (舍去).

所以展开式共有 11 项, 其中二项式系数最大的项是第 6 项,

黑板: 当  $n$  是偶数时, 中间一项的二项式系数最大, 当  $n$  是奇数时, 中间两项的二项式系数相等且最大

$T_6 = C_{10}^5 (-1)^5 x^{\frac{5}{6}} = -252x^{\frac{5}{6}}$ , 所以展开式中二项式系数最大的项是第 6 项,  $T_6 = -252x^{\frac{5}{6}}$ .

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } n=10, T_{k+1} = C_{10}^k (-1)^k x^{\frac{5-5k}{6}}.$$

令  $5 - \frac{5}{6}k = 5$ , 则  $k=0$ , 所以  $T_1 = x^5$ , 所以展开式中含  $x^5$  的项是第 1 项, 为  $x^5$ .

方案二: 选条件②.

$$(1) \text{ 由题可知 } C_n^1 + C_n^{n-2} = C_n^1 + C_n^2 = \frac{n^2+n}{2} = 55, \text{ 整理得 } n^2 + n -$$

$110 = 0$ , 解得  $n = 10$  或  $n = -11$  (舍去).

所以展开式共有 11 项, 其中二项式系数最大的项是第 6 项,

$T_6 = C_{10}^5 (-1)^5 x^{\frac{5}{6}} = -252x^{\frac{5}{6}}$ , 所以展开式中二项式系数最大的项是第 6 项,  $T_6 = -252x^{\frac{5}{6}}$ .

(2) 同方案一(2).

方案三: 选条件③.

(1)  $C_{n+1}^2 - C_n^{n-2} = C_{n+1}^2 - C_n^2 = C_n^1 = 10$ , 所以  $n = 10$ , 所以展开式共有 11 项, 其中二项式系数最大的项是第 6 项,

$T_6 = C_{10}^5 (-1)^5 x^{\frac{5}{6}} = -252x^{\frac{5}{6}}$ , 所以展开式中二项式系数最大的项是第 6 项,  $T_6 = -252x^{\frac{5}{6}}$ .

(2) 同方案一(2).

16. 【解】(1) 第 1 次和第 4 次为次品, 第 2, 3 次均为正品, 共有  $A_4^2 A_2^2 = 24$  种抽法.

(2) 一共抽取 5 次结束, 则有两种情况, 第一种: 前 4 次有 1 次为次品剩下 3 次为正品, 第 5 次是正品, 有  $C_4^1 C_3^3 A_4^4 = 192$  种抽法.

第二种: 前 4 次有 1 次为次品剩下 3 次为正品, 第 5 次是次品, 有  $C_4^1 A_2^2 A_4^3 = 192$  种抽法.

综上, 一共有  $192 + 192 = 384$  种抽法.

(3) 第 1, 2 次测出次品结束, 有  $A_2^2 = 2$  种抽法;

前 2 次有 1 次测出次品, 第 3 次测出次品结束, 有  $C_4^1 C_2^2 A_2^2 = 16$  种抽法;

前 3 次有 1 次测出次品, 第 4 次测出次品结束, 有  $C_4^1 C_2^2 A_3^3 = 72$  种抽法;

前 4 次全部测出正品, 有  $A_4^4 = 24$  种抽法. 综上, 共有  $2 + 16 + 72 + 24 = 114$  种抽法.



(4) ①若最终以正品结束,则共抽 5 次,第 1 次为次品,其余均为正品,共有  $C_2^1 A_4^4 = 48$  种抽法;  
 ②最终以次品结束,则分两种情况:  
 共抽 4 次,则第 1, 4 次为次品,第 2, 3 次为正品,共有  $A_2^2 A_4^2 = 24$  种抽法;  
 共抽 5 次,则第 1, 5 次为次品,第 2, 3, 4 次为正品,共有  $A_2^2 A_4^3 = 48$  种抽法.  
 综上,共有  $48+24+48=120$  种抽法.

17. 【解】(1) 记事件  $A$  = “某天进行测试时处于安静环境”,  $\bar{A}$  = “某天进行测试时处于嘈杂环境”, 事件  $B$  = “测试结果为语音识别成功”.

根据题意得  $P(A) = 0.3, P(\bar{A}) = 0.7, P(B|A) = 0.8, P(B|\bar{A}) = 0.6$ .

(i) 由全概率公式得  $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.3 \times 0.8 + 0.7 \times 0.6 = 0.66$ .

(ii) 已知测试结果为语音识别成功,求当天处于安静环境的概率,就是求在事件  $B$  发生的条件下  $A$  发生的概率,

$$\text{即 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} = \frac{0.3 \times 0.8}{0.66} = \frac{4}{11}.$$

【微黑板: 贝叶斯公式的应用】

(2) 方案一的测试次数的数学期望为 4.

用  $X$  表示“方案二测试的次数”,由题意得  $X$  的可能取值为 3, 5.

$$\text{则 } P(X=3) = 0.7^3 = 0.343,$$

$$P(X=5) = 1 - P(X=3) = 1 - 0.343 = 0.657,$$

所以方案二测试次数的数学期望为  $E(X) = 3 \times 0.343 + 5 \times 0.657 = 4.314$ .

$$\text{又 } E(X) > 4,$$

所以以测试次数的期望值大小为决策依据,应选择方案一.

18. 【解】(1) 由题意完成  $2 \times 2$  列联表如下:

	好评	非好评	合计
更换厨师前	600	200	800
更换厨师后	1 600	400	2 000
合计	2 200	600	2 800

根据列联表中的数据,经计算得到  $\chi^2 = \frac{2\,800 \times (600 \times 400 - 1\,600 \times 200)^2}{800 \times 2\,000 \times 2\,200 \times 600} \approx 8.485 > 6.635$ ,

所以有 99% 的把握认为该餐馆订单的好评率与更换厨师有关联.

(2) 依题意,用分层随机抽样法抽取的 8 个订单中,好评订单有  $8 \times \frac{600}{2\,800} = 6$  个,非好评订单有  $8 - 6 = 2$  个,

而从这 8 个订单中随机抽取 3 个,其中好评的订单个数  $\xi$  的可能取值有 1, 2, 3,

$$\text{则 } P(\xi=1) = \frac{C_6^1 C_2^2}{C_8^3} = \frac{3}{28}, P(\xi=2) = \frac{C_6^2 C_2^1}{C_8^3} = \frac{15}{28}, P(\xi=3) = \frac{C_6^3 C_2^0}{C_8^3} = \frac{5}{14},$$

$$\text{所以 } \xi \text{ 的分布列为}$$

$\xi$	1	2	3
$P$	$\frac{3}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{14}$

$$\text{数学期望 } E(\xi) = 1 \times \frac{3}{28} + 2 \times \frac{15}{28} + 3 \times \frac{5}{14} = \frac{9}{4}.$$

【微黑板:  $\xi$  服从超几何分布,即  $\xi \sim H(8, 3, 6)$ , 则  $E(\xi) = \frac{3 \times 6}{8} = \frac{9}{4}$ 】

$$(3) \text{依题意,更换厨师后好评率为 } \frac{1\,600}{2\,000} = 0.8,$$

从更换厨师后所有订单中随机抽取 100 个订单,则  $\eta \sim B(100, 0.8)$ ,

$$\text{于是 } P(\eta=r) = C_{100}^r 0.8^r \times 0.2^{100-r}, r \leq 100, r \in \mathbb{N},$$

$$\text{由 } \frac{P(\eta=r+1)}{P(\eta=r)} = \frac{C_{100}^{r+1} 0.8^{r+1} \times 0.2^{99-r}}{C_{100}^r 0.8^r \times 0.2^{100-r}} = \frac{400-4r}{r+1},$$

$$\text{由 } \frac{400-4r}{r+1} > 1, \text{解得 } r < 79 \frac{4}{5}, \text{而 } r \in \mathbb{N}, \text{则当 } 0 \leq r \leq 79 (r \in \mathbb{N})$$

时,  $P(\eta=r)$  单调递增;

$$\text{由 } \frac{400-4r}{r+1} \leq 1, \text{解得 } r \geq 79 \frac{4}{5}, \text{而 } r \in \mathbb{N}, \text{则当 } r \geq 80 (r \in \mathbb{N})$$

时,  $P(\eta=r)$  单调递减,

所以当事件“ $\eta=r$ ”的概率最大时  $r$  的值为 80.

19. 【解】(1) 由题意可知,随机变量  $X$  服从超几何分布,且  $X$  的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$\text{且 } P(X=0) = \frac{C_3^0 \cdot C_4^3}{C_7^3} = \frac{4}{35}, P(X=1) = \frac{C_3^1 \cdot C_4^2}{C_7^3} = \frac{18}{35}, P(X=2) = \frac{C_3^2 \cdot C_4^1}{C_7^3} = \frac{12}{35}, P(X=3) = \frac{C_3^3 \cdot C_4^0}{C_7^3} = \frac{1}{35}.$$

则  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$E(X) = 0 \times \frac{4}{35} + 1 \times \frac{18}{35} + 2 \times \frac{12}{35} + 3 \times \frac{1}{35} = \frac{9}{7}.$$

(2) (i) 依题意,  $y = \lambda e^{cx}$  两边取对数,得  $\ln y = cx + \ln \lambda$ , 即  $z = cx + \ln \lambda$ ,

$$\bar{x} = \frac{32+41+54+68+74+80+92}{7} = 63,$$

由已知可得  $c \approx 0.02$ , 又  $-0.642 \approx 0.02 \times 63 + \ln \lambda$ , 故  $\ln \lambda \approx -1.9$ ,

$$\text{可得 } \lambda \approx 0.15, \text{故 } \hat{y} \approx 0.15 \times e^{0.02x}.$$

当  $x=60$  时,  $\hat{y} \approx 0.15 \times e^{0.02 \times 60} = 0.498$ , 即估计其绩效等级优秀率为 0.498.

(ii) 由(i)及提供的参考数据可知  $\mu \approx \bar{x} = 63, \sigma \approx s \approx 20$ , 又  $\hat{y} > 0.7875$ , 即  $0.15 \times e^{0.02x} > 0.7875$ , 可得  $0.02x > \ln 5.25$ , 即  $x > 83$ .

$$\text{又 } \mu + \sigma = 83, \text{且 } P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827,$$

$$\text{由正态分布的性质,得 } P(x > 83) = \frac{1}{2} [1 - P(\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma)] \approx 0.15865,$$

记“绩效等级优秀率高于 0.7875”为事件  $A$ , 则  $P(A) = P(x > 83) \approx 0.15865$ ,

所以某个部门绩效等级优秀率高于 0.7875 的概率约为 0.15865.