

## 高中必刷题 数学

种情况:前三题全对;前三题对两题,后两题答对一题;前三题答对一题,后两题全对.

$$\text{所以 } P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left[\frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{3}\right] + C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{3}{8}.$$

(2) 设选择方式一、二的班级团队挑战成功的概率分别为  $P_1, P_2$ .

当选择方式一时,因为两人都回答错误的概率为  $(1-p)^2$ ,则两人中至少有一人回答正确的概率为  $1 - (1-p)^2$ ,所以  $P_1 = [1 - (1-p)^2]^n = p^n(2-p)^n$ .

当选择方式二时,因为一个小组闯关成功的概率为  $p^n$ ,则一个小组闯关不成功的概率为  $1 - p^n$ ,所以  $P_2 = 1 - (1 - p^n)^2 = p^n(2 - p^n)$ ,

所以  $P_1 - P_2 = p^n(2-p)^n - p^n(2-p^n) = p^n[(2-p)^n + p^n - 2]$ ,  
构造  $f(n) = (2-p)^n + p^n - 2$ , 则  $f(n+1) - f(n) = (2-p)^{n+1} + p^{n+1} - (2-p)^n - p^n = (2-p)^n(1-p) + p^n(p-1) = (1-p)[(2-p)^n - p^n]$ ,  
因为  $0 < p < 1$ , 则  $1-p > 0, 2-p > 1$ , 可得  $(2-p)^n > 1, p^n < 1$ ,  
所以  $f(n+1) - f(n) > 0$ , 即  $f(n+1) > f(n)$ , 所以  $f(n)$  单调递增,  
又因为  $f(2) = (2-p)^2 + p^2 - 2 = 2p^2 - 4p + 2 = 2(p-1)^2 > 0$ ,  
且  $n \geq 10$ , 所以  $f(n) > 0$ , 从而  $P_1 - P_2 > 0$ , 即  $P_1 > P_2$ ,  
所以为使本班团队挑战成功的可能性更大,应选择方式一.

3. 【解】(1) 设底面边长为  $a$ , 则  $\frac{1}{3} \times a^2 \times \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ , 得  $a = 2$ .

连接  $AC$  交  $BD$  于点  $O$ , 连接  $PO$ , 作  $OM \perp PD$  交  $PD$  于点  $M$ , 连接  $AM$ , 如图所示.

因为  $PO \perp$  平面  $ABCD$ ,  $AC \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PO \perp AC$ ,  
又  $AC \perp BD, PO \cap BD = O, PO, BD \subset$  平面  $PBD$ ,  
所以  $AC \perp$  平面  $PBD$ , 因为  $PD \subset$  平面  $PBD$ , 所以  $AC \perp PD$ .  
又  $OM \perp PD$ , 且  $AC \cap OM = O, AC, OM \subset$  平面  $AOM$ ,  
所以  $PD \perp$  平面  $AOM$ , 又  $AM \subset$  平面  $AOM$ ,

所以  $PD \perp AM$ , 所以  $\angle AMO$  为平面  $PAD$  与平面  $PBD$  的夹角.

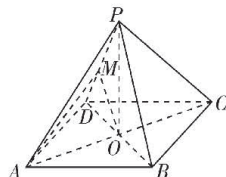
因为  $PO = \sqrt{2}, AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$ , 所以  $PA = \sqrt{PO^2 + AO^2} = 2$ ,

所以  $\triangle PAD$  是等边三角形,  $AM = \sqrt{3}$ , 且  $M$  为  $PD$  的中点, 所以  $OM = \frac{1}{2}PD = 1$ ,

因为  $AC \perp$  平面  $PBD, OM \subset$  平面  $PBD$ , 所以  $AC \perp OM$ ,

$$\text{所以 } \cos \angle AMO = \frac{MO}{AM} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

所以平面  $PAD$  与平面  $PBD$  的夹角的余弦值为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .



(2) 由题意可知, 蚂蚁从点  $P$  处沿  $PA, PB, PC, PD$  移动的概率都是  $\frac{1}{4}$ .

2 秒后蚂蚁移动了 2 个单位长度, 由 (1) 知侧棱长为 2, 所以若沿  $PA$  移动, 蚂蚁到达点  $A$ , 若沿  $PB$  移动, 蚂蚁到达点  $B$ , 若沿  $PC$  移动, 蚂蚁到达点  $C$ , 若沿  $PD$  移动, 蚂蚁到达点  $D$ , 因为  $AB = AD = 2, AC = 2\sqrt{2}$ , 所以  $X$  的所有可能取值为 0, 2,  $2\sqrt{2}$ , 则  $X$  的分布列为

$X$	0	2	$2\sqrt{2}$
$P$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

则数学期望  $E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} + 2\sqrt{2} \times \frac{1}{4} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

## 第四章素养检测

### 刷速度

1. B 【解析】依题意可得  $P(X=1) = 0.8, P(X=0) = 0.2$ , 所以  $E(X) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.8 = 0.8$ . 故选 B.

2. D 【解析】由题可得  $E(X) = 1, E(Y) = 4 \times \frac{1}{2} = 2, D(X) = 3$ ,

$$D(Y) = 4 \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1, \text{ 所以 } E(X) = D(Y). \text{ 故选 D.}$$

3. C 【解析】记事件  $A =$  “第一次正面朝上的点数为奇数”, 事件  $B =$  “第二次正面朝上的点数大于 4”.

投掷一枚正方体骰子两次, 所有的样本点  $(x, y)$  ( $x$  为第一次正面朝上的点数,  $y$  为第二次正面朝上的点数) 共 36 个, 其中事件  $A$  包含的样本点有 18 个, 事件  $AB$  包含的样本点有 6 个, 所以  $P(AB) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ , 所以  $P(B|A) =$

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}. \text{ 故选 C.}$$

4. A 【解析】由题设知样本数据  $(x_i, y_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, 9$ ) 满足

$$\bar{x} = \frac{33}{9} = \frac{11}{3}, \text{ 则 } \bar{y} = 2\bar{x} - 1 = 2 \times \frac{11}{3} - 1 = \frac{19}{3},$$

增加数据  $(-3, 3)$  后,  $\bar{x}_1 = \frac{33-3}{10} = 3, \bar{y}_1 = \frac{9 \times \frac{19}{3} + 3}{10} = 6$ , 且回归直线方程为  $\hat{y} = 2.1x + \hat{a}$ ,

$$\text{所以 } 6 = 2.1 \times 3 + \hat{a} \Rightarrow \hat{a} = -0.3, \text{ 则 } \hat{y} = 2.1x - 0.3,$$

所以当  $x = 4$  时, 有  $\hat{y} = 2.1 \times 4 - 0.3 = 8.1$ , 故残差的绝对值为  $|8 - 8.1| = 0.1$ . 故选 A.

5. A 【解析】由已知表格中的数据, 可知  $\bar{X} < \bar{Y}$ , 即数学成绩分布曲线的对称轴在物理成绩分布曲线的对称轴的左侧.

又  $\sigma(X) = 94 > \sigma(Y) = 23$ , 所以数学成绩分布曲线“矮胖”, 物理成绩分布曲线“瘦高”, 结合选项可知 A 正确. 故选 A.

6. D 【解析】设事件  $A$  表示“小孩诚实”, 事件  $B$  表示“小孩说谎”, 则  $P(B|A) = 0.1, P(B|\bar{A}) = 0.5, P(A) = 0.9, P(\bar{A}) = 0.1$ , 所以  $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.9 \times 0.1 + 0.1 \times 0.5 = 0.14$ , 故选 D.

7. D 【解析】对于 A, 放回摸球, 第 2 次摸到红球的概率

$$p_1 = \frac{a}{a+b},$$

不放回摸球, 第 2 次摸到红球的概率  $p_2 = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1} +$

$$\frac{b}{a+b} \cdot \frac{a}{a+b-1} = \frac{a}{a+b}, \text{A 不正确};$$

对于 B, 设事件 A = “第 1 次摸到红球”, 事件 B = “第 2 次摸到

$$\text{红球}”, 则 P(A) = \frac{a}{a+b}, P(AB) = \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a-1}{a+b-1},$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{a-1}{a+b-1}, \text{B 不正确};$$

❶思: 第 1 次摸到红球不放回, 第 2 次摸球前袋中有

$a-1$  个红球和  $b$  个蓝球, 故所求概率为  $\frac{a-1}{b+a-1}$

对于 C, 由题意  $X \sim B\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$ , 则  $D(X) = n \cdot \frac{a}{a+b} \left(1 - \frac{a}{a+b}\right) =$

$$\frac{nab}{(a+b)^2}, \text{C 不正确};$$

对于 D, 袋子中有  $a$  个红球和  $b$  个蓝球, 摸到红球的个数  $Y=k$

$$\text{的概率是 } P(Y=k) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}, \text{D 正确}.$$

故选 D.

8. B 【解析】对于①,  $y = \sqrt{1-|x|} + \sqrt{|x|-1}$  的定义域为  $\{1, -1\}$ , 关于原点对称, 且  $y=0$ , 所以①既是奇函数又是偶函数;

对于②, 令  $y=f(x)$ , 则  $f(x)$  的定义域为  $\{x|x \neq 0\}$ , 关于原点对称,  $f(-x) = -\frac{2}{-x} = \frac{2}{x} = -f(x)$ , 所以②为奇函数;

对于③, 令  $y=g(x)$ , 则  $g(x)$  的定义域为  $\{x|x \neq 0\}$ , 关于原点对称,  $g(-x) = \frac{|\sin(-x)|}{-x} = -\frac{|\sin x|}{x} = -g(x)$ , 所以③为奇函数;

对于④, 令  $y=h(x)$ , 则  $h(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $h(-x) = \ln(e^{-x} + e^x) = \ln(e^x + e^{-x}) = h(x)$ , 所以④为偶函数;

对于⑤,  $y = \frac{x-1}{x+1}$  的定义域为  $\{x|x \neq -1\}$ , 不关于原点对称, 所以⑤为非奇非偶函数;

对于⑥,  $y = 2^x \cdot \log_2 x$  的定义域为  $(0, +\infty)$ , 不关于原点对称, 所以⑥为非奇非偶函数.

所以事件 A 包含①②③, 事件 B 包含①④,  $P(A) = \frac{1}{2},$

$$P(B) = \frac{1}{3}.$$

对于 A,  $P(A+B) - P(B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$ , 所以  $P(A) \neq$

$P(A+B) - P(B)$ , 故 A 错误;

对于 B,  $\bar{A}$  表示取到的函数不是奇函数,  $\bar{B}$  表示取到的函数不是偶函数, 故  $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{3}, P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ , 则

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}), \text{故 B 正确};$$

对于 C,  $P(\bar{A}+B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}\bar{B})$ , 由于  $P(\bar{A}\bar{B}) \neq 0$ , 故 C 错误;

对于 D,  $P(\bar{A}|B) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{1}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}, P(\bar{B}|A) = \frac{P(\bar{B}A)}{P(A)} =$

$$\frac{P(\bar{B}A)}{P(A)} = \frac{1}{2}, \text{故 D 正确}.$$

❷思: 求  $D(X)$  的另一种通用方法

对于 D 选项,  $E(X^2) - D(X) = 4 - \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$ , D 正确. 故选 BD.

$$\frac{1}{\frac{3}{1} - \frac{2}{3}} = \frac{2}{\frac{2}{3}}, \text{故 D 错误. 故选 B}.$$

9. BCD 【解析】对于 A, 由方差的性质可知, 若随机变量  $\xi, \eta$

满足  $\eta = 2\xi + 1$ , 则  $D(\eta) = 2^2 D(\xi) = 4D(\xi)$ , 故 A 错误;

对于 B, 根据正态分布的图象的对称性可得  $P(3 < \xi < 6) = P(\xi < 6) - 0.5 = 0.34$ , 故 B 正确;

对于 C, 由  $\chi^2 = 4.712 > 3.841$  可判断  $X$  与  $Y$  有关且犯错误的概率不超过 0.05, 故 C 正确;

对于 D, 根据回归直线过样本点的中心可知 D 正确. 故选 BCD.

10. BD 【解析】①由题意,  $X=0$  表示若该题有 2 个正确选项,

小明从 2 个错误选项中选择 1 个, 若该题有 3 个正确选项,

小明从 1 个错误选项中选择 1 个, 则  $P(X=0) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^1}{C_4^1} +$

$$\frac{1}{3} \times \frac{C_1^1}{C_4^1} = \frac{5}{12};$$

$X=2$  表示该题有 3 个正确选项, 小明从 3 个正确选项中选择 1 个, 则  $P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{C_3^1}{C_4^1} = \frac{1}{4};$

$$X=3 \text{ 表示该题有 2 个正确选项, 小明从 2 个正确选项中选择 1 个, 则 } P(X=3) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^1}{C_4^1} = \frac{1}{3}.$$

② $Y=0$  表示若该题有 2 个正确选项, 小明从 2 个错误选项中选择 1 个, 再从 2 个正确选项中选择 1 个或选择 2 个错误选项;

若该题有 3 个正确选项, 小明从 1 个错误选项中选择 1 个, 再从 3 个正确选项中选择 1 个, 则  $P(Y=0) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2} + \frac{2}{3} \times$

$$\frac{C_2^2}{C_4^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^1 C_1^1}{C_4^2} = \frac{13}{18};$$

$Y=4$  表示该题有 3 个正确选项, 小明从 3 个正确选项中选择 2 个, 则  $P(Y=4) = \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_4^2} = \frac{1}{6};$

$Y=6$  表示该题有 2 个正确选项, 小明从 2 个正确选项中选择 2 个, 则  $P(Y=6) = \frac{2}{3} \times \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{9}.$

对于 A 选项,  $P(X=3) = \frac{1}{3}, P(Y=4) + P(Y=6) = \frac{5}{18}$ , 故 A 错误.

对于 B 选项,  $E(X) = 0 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2}; E(Y) = 0 \times$

$$\frac{13}{18} + 4 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{9} = \frac{4}{3}, \text{所以 } E(Y) < E(X), \text{B 正确}.$$

对于 C 选项,  $E(X^2) = 0 \times \frac{5}{12} + 4 \times \frac{1}{4} + 9 \times \frac{1}{3} = 4$ , 则  $D(X) =$

$$E(X^2) - [E(X)]^2 = 4 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}, \text{C 错误}.$$

❸思: 求  $D(X)$  的另一种通用方法

对于 D 选项,  $E(X^2) - D(X) = 4 - \frac{7}{4} = \frac{9}{4}$ , D 正确. 故选 BD.

11. CD 【解析】由题意, 设事件  $A_0$  为“发送信号 0”, 事件  $A_1$  为“发送信号 1”, 事件  $B_0$  为“接收信号为 0”, 事件  $B_1$  为“接



收信号为 1”，

则  $P(B_0|A_0) = 0.8, P(B_1|A_0) = 0.2, P(B_0|A_1) = 0.1, P(B_1|A_1) = 0.9$ ,

若重复发送信号 0 两次, 则接收信号均为 0 的概率为  $P(B_0|A_0) \times P(B_0|A_0) = 0.64$ , **A 错误**;

若重复发送信号 1 两次, 则两次接收信号不同的概率为  $C_2^1 \times P(B_0|A_1) \times P(B_1|A_1) = 0.18$ , **B 错误**;

若发送信号为 1 或 0 的概率均为 0.5, 则接收信号为 1 的概率为  $P(A_0)P(B_1|A_0) + P(A_1)P(B_1|A_1) = 0.1 + 0.45 = 0.55$ , **C 正确**;

若接收信号为 1 的概率为 0.76, 即  $P(A_0)P(B_1|A_0) + P(A_1) \cdot P(B_1|A_1) = [1 - P(A_1)] \times 0.2 + 0.9P(A_1) = 0.76$ , 解得  $P(A_1) = 0.8$ , **D 正确**. 故选 CD.

12.  $\frac{1}{5}$  【解析】因为考生成绩  $X$  服从正态分布  $N(75, \sigma^2)$ ,

$$\text{所以 } P(X > 90) = P(X \geq 75) - P(75 \leq X \leq 90) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5},$$

所以从参加这次测试的考生中任意选取 1 名考生, 该考生的成绩高于 90 的概率为  $\frac{1}{5}$ .

13.  $\frac{7}{9}$  【解析】由题意, 甲不去 A 校的概率  $P_1 = \frac{3A_3^3}{A_4^4} = \frac{3}{4}$ ,

$$\text{甲不去 A 校且乙不去 B 校的概率 } P_2 = \frac{A_3^3 + C_2^1 C_2^1 A_2^2}{A_4^4} = \frac{7}{12},$$

$$\text{则在甲不去 A 校的条件下, 乙不去 B 校的概率 } P = \frac{P_2}{P_1} =$$

$$\frac{\frac{7}{12}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{9}.$$

14.  $\frac{10}{3}$  84 或 82

**思路导引** 最终得分由抛掷骰子过程中得 1 分的次数和得 3 分的次数决定, 所以求得  $n$  分的概率先设得 1 分的次数  $x$ , 再计算  $a_n$  的概率, 列不等式组求出概率最大时  $x$  的值, 再计算  $n$ .

【解析】抛掷一次骰子得 1 分的概率为  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ , 得 3 分的概率为  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ,

$$\text{率} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

$$X \text{ 的所有可能取值为 } 2, 4, 6, P(X=2) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}, P(X=$$

$$4) = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}, P(X=6) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$\text{则随机变量 } X \text{ 的期望是 } E(X) = 2 \times \frac{4}{9} + 4 \times \frac{4}{9} + 6 \times \frac{1}{9} = \frac{10}{3}.$$

记得 1 分的次数为  $x$ , 则得 3 分的次数为  $50-x$ ,

因此抛掷 50 次骰子, 最终得分  $n = x + 3(50-x) = 150-2x$ ,

则得 1 分的次数为  $x$  时最终得分为  $n$  分的概率为  $a_n = C_{50}^x \cdot$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{50-x} \quad (0 \leq x \leq 50, x \in \mathbb{N}), \text{ 若 } a_n \text{ 取最大值, 则}$$

$$\begin{cases} C_{50}^x \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{50-x} \geq C_{50}^{x+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{49-x}, \\ C_{50}^x \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{50-x} \geq C_{50}^{x-1} \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{51-x}, \end{cases} \text{ 可得 } 33 \leq x \leq 34,$$

→ 敲黑板: 利用组合数公式可以简化运算

因为  $0 \leq x \leq 50, x \in \mathbb{N}$ , 所以  $x=33$  或  $x=34$ .

当  $x=33$  时,  $n=150-2 \times 33=84$ ,

当  $x=34$  时,  $n=150-2 \times 34=82$ .

15. 【解】(1) 甲正确完成面试题数  $\xi$  的所有可能取值为 1, 2, 3,

$$\text{所以 } P(\xi=1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}, P(\xi=2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}, P(\xi=3) =$$

$$\frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5},$$

所以甲正确完成面试题数  $\xi$  的分布列为

$\xi$	1	2	3
$P$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\text{所以 } E(\xi) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2.$$

(2) 乙正确完成面试题数  $\eta$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$\text{所以 } P(\eta=0) = C_3^0 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^3 = \frac{1}{27},$$

$$P(\eta=1) = C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9},$$

$$P(\eta=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{3}\right)^1 = \frac{4}{9},$$

$$P(\eta=3) = C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},$$

所以乙正确完成面试题数  $\eta$  的分布列为

$\eta$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

$$\text{所以 } E(\eta) = 0 \times \frac{1}{27} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{8}{27} = 2,$$

$$\text{所以 } D(\eta) = (0-2)^2 \times \frac{1}{27} + (1-2)^2 \times \frac{2}{9} + (2-2)^2 \times \frac{4}{9} +$$

$$(3-2)^2 \times \frac{8}{27} = \frac{2}{3}.$$

(3) 甲通过面试的可能性更大. 理由如下: 由 (1) (2) 知

$$P(\xi \geq 2) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}, P(\eta \geq 2) = \frac{4}{9} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27},$$

所以  $P(\xi \geq 2) > P(\eta \geq 2)$ , 所以甲通过面试的可能性更大.

16. 【解】(1) 根据列联表中的数据, 经计算得到  $\chi^2 =$

$$\frac{200 \times (50 \times 60 - 50 \times 40)^2}{100 \times 100 \times 90 \times 110} = \frac{200}{99} \approx 2.020,$$

因为  $2.020 < 2.706$ , 所以在犯错误的概率不超过 0.1 的前提下, 没有充分证据证明观看这两部影片的观众的男女比例有差异.

$$(2) \text{ 由题意知 } \chi'^2 = \frac{kn(ka \cdot kd - kb \cdot kc)^2}{k(a+b) \cdot k(c+d) \cdot k(a+c) \cdot k(b+d)} =$$

$$\frac{kn(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)} = \frac{200k}{99},$$

$$\text{令 } \frac{200k}{99} \geq 6.635, \text{ 即 } k \geq \frac{6.635 \times 99}{200},$$

$$\text{又 } \frac{6.635 \times 99}{200} \approx 3.284, k \in \mathbf{N}_+,$$

所以  $k$  的最小值为 4.

17. 【解】(1) 由题中频率分布直方可估计这 100 颗车厘子直径的平均数  $\bar{x} = 2 \times (0.05 \times 25 + 0.125 \times 27 + 0.2 \times 29 + 0.075 \times 31 + 0.05 \times 33) = 28.8 \approx 29$ ,

即  $\mu = \bar{x} \approx 29$ , 又  $\sigma = s \approx 1$ , 所以  $X \sim N(29, 1^2)$ ,

$$\text{则 } P(X \geq 30) = \frac{1 - P(29 - 1 < X < 29 + 1)}{2} \approx \frac{1 - 0.6827}{2} =$$

$$0.15865 \approx 0.16,$$

所以从该批次车厘子中任取一颗, 该车厘子为一等品的概率约为 0.16.

(2) 由频率分布直方可知  $(0.05 + 0.05) \times 2 \times 100 = 20$ , 其中直径在  $[32, 34)$  的车厘子有 10 个, 故  $\eta$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(\eta=0) = \frac{C_{10}^3 C_{20}^0}{C_{30}^3} = \frac{2}{19}, P(\eta=1) = \frac{C_{10}^2 C_{20}^1}{C_{30}^3} = \frac{15}{38},$$

$$P(\eta=2) = \frac{C_{10}^1 C_{20}^2}{C_{30}^3} = \frac{15}{38}, P(\eta=3) = \frac{C_{10}^0 C_{20}^3}{C_{30}^3} = \frac{2}{19},$$

随机变量  $\eta$  的分布列为

$\eta$	0	1	2	3
$P$	$\frac{2}{19}$	$\frac{15}{38}$	$\frac{15}{38}$	$\frac{2}{19}$

$$\text{所以 } \eta \text{ 的数学期望 } E(\eta) = 0 \times \frac{2}{19} + 1 \times \frac{15}{38} + 2 \times \frac{15}{38} + 3 \times \frac{2}{19} = \frac{3}{2}.$$

18. 【解】(1) 由题知  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 且  $X$  服从超几何分布.

$$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_3^2}{C_6^2} = \frac{1}{5}, P(X=1) = \frac{C_3^1 C_3^1}{C_6^2} = \frac{3}{5}, P(X=2) =$$

$$\frac{C_3^2 C_3^0}{C_6^2} = \frac{1}{5},$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2
$P$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = 1.$$

(2) (i) 记  $C =$  “每位员工经过培训合格”,  $A_i =$  “每位员工第  $i$  轮培训达到优秀” ( $i = 1, 2, 3$ ),  $C = A_1 A_2 A_3 \cup \bar{A}_1 A_2 A_3 \cup$

$A_1 \bar{A}_2 A_3 \cup A_1 A_2 \bar{A}_3$ , 则

$$\begin{aligned} P(C) &= P(A_1 A_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(A_1 A_2 \bar{A}_3) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(\bar{A}_2) \cdot \\ &P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \\ &\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

即每位员工经过培训合格的概率为  $\frac{1}{2}$ .

(ii) 记  $A, B$  两部门开展培训后合格的人数为  $Y$ , 则  $Y \sim$

$$B\left(50, \frac{1}{2}\right), E(Y) = 50 \times \frac{1}{2} = 25,$$

则  $25 \times 30 + 25 \times 20 - 50 \times 3 = 1100$  (万元),

即估计该公司  $A, B$  两部门培训后的年利润为 1100 万元.

19. 【解】(1) 刚开始用药时, 指标  $A$  的数量  $y$  变化明显, 随着天数增加,  $y$  的变化趋缓, 故  $y = a + b \ln x$  适宜作为  $y$  关于  $x$  的回归方程类型.

$$\text{令 } u = \ln x, \text{ 得 } \hat{y} = \hat{a} + \hat{b}u, \text{ 于是 } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^5 (u_i - \bar{u})^2} \approx$$

$$\frac{19.38}{1.615} = 12,$$

因为  $\sum_{i=1}^5 u_i \approx 4.79$ ,  $\sum_{i=1}^5 y_i = 62$ , 所以  $\bar{u} = 0.958$ ,  $\bar{y} = 12.4$ ,

所以  $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{u} = 12.4 - 12 \times 0.958 = 0.904$ , 因此  $\hat{y} = 0.904 + 12u$ , 即  $\hat{y} = 0.904 + 12 \ln x$ .

(2) (i) 设  $A =$  “随机抽取一件该企业生产的药品为不合格品”,

$B_1 =$  “随机抽取一件药品为第 1 条生产线生产”,

$B_2 =$  “随机抽取一件药品为第 2 条生产线生产”,

$$\text{则 } P(B_1) = \frac{2}{3}, P(B_2) = \frac{1}{3},$$

又  $P(A|B_1) = 0.012$ ,  $P(A|B_2) = 0.009$ , 于是  $P(A) = P(A \cap (B_1 \cup B_2)) = P(AB_1 \cup AB_2) = P(AB_1) + P(AB_2) =$

$$P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) = \frac{2}{3} \times 0.012 + \frac{1}{3} \times 0.009 = 0.011.$$

(ii) 由 (i) 可知所求概率  $P(B_1 | A) = \frac{P(AB_1)}{P(A)} =$

$$\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{3} \times 0.012}{0.011} = \frac{8}{11}.$$

## 第四章高考强化

### 刷真题

1.  $\frac{3}{5} \frac{1}{2}$  【解析】甲同学从 5 个项目中选 3 个参加, 全部的情况有  $C_5^3$  种, 参加“整地做畦”项目的情况有  $C_4^2$  种,  $\therefore$  甲同学参加“整地做畦”项目的概率为  $\frac{C_4^2}{C_5^3} = \frac{3}{5}$ . 用  $A$  表示事件“乙同学参加的 3 个项目中有整地做畦”, 用  $B$  表示事件“乙同学

参加的 3 个项目中有田间灌溉”, 则  $P(A) = \frac{3}{5}$ ,  $P(AB) =$

$$\frac{C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10}, \therefore P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{2}.$$

2. 0.85 【解析】由题可知,  $A$  组题占比为  $\frac{5}{12}$ ,  $B$  组题占比为  $\frac{1}{3}$ ,  $C$  组题占比为  $\frac{1}{4}$ ,  $\therefore$  随机从题库中抽取一道题, 小王做对的



概率是  $\frac{5}{12} \times 0.92 + \frac{1}{3} \times 0.86 + \frac{1}{4} \times 0.72 = 0.85$ .

## 3. ABD

**思路导引** 对于 A 与 B, 根据相互独立事件的概率公式求解;

对于 C, 分两种情况讨论  $\left\{ \begin{array}{l} \text{发送 1, 依次收到 1, 1, 1,} \\ \text{发送 1, 恰好收到两次 1, 一次 0;} \end{array} \right.$

对于 D, 分别算出采用三次传输方案译码为 0 的概率以及单次传输方案译码为 0 的概率  $\rightarrow$  将两个概率作差  $\rightarrow$  设函数  $f(\alpha) \rightarrow$  根据  $0 < \alpha < 0.5$  判断  $f(\alpha)$  的符号  $\rightarrow$  结论

**【解析】** 对于 A 选项, 采用单次传输方案, 依次发送 1, 0, 1, 依次收到 1, 0, 1 的概率为  $(1-\beta)(1-\alpha)(1-\beta) = (1-\alpha)(1-\beta)^2$ , 所以 A 选项正确.

对于 B 选项, 采用三次传输方案, 发送 1, 依次收到 1, 0, 1 的概率为  $(1-\beta)\beta(1-\beta) = \beta(1-\beta)^2$ , 所以 B 选项正确.

对于 C 选项, 采用三次传输方案, 发送 1, 依次收到 1, 1, 1 (即译码为 1) 的概率为  $(1-\beta)(1-\beta)(1-\beta) = (1-\beta)^3$ ; 发送 1, 依次收到 1, 0, 1 (即译码为 1), 0, 1, 1 (即译码为 1), 1, 1, 0 (即译码为 1) 的概率为  $3(1-\beta)\beta(1-\beta) = 3(1-\beta)^2\beta$ , 于是译码为 1 的概率为  $(1-\beta)^3 + 3(1-\beta)^2\beta$ , 所以 C 选项不正确.

对于 D 选项, 采用三次传输方案, 发送 0, 依次收到 0, 0, 0 (即译码为 0) 的概率为  $(1-\alpha)(1-\alpha)(1-\alpha) = (1-\alpha)^3$ ; 发送 0, 依次收到 0, 0, 1 (即译码为 0), 0, 1, 0 (即译码为 0), 1, 0, 0 (即译码为 0) 的概率为  $3(1-\alpha)\alpha(1-\alpha) = 3(1-\alpha)^2\alpha$ , 于是译码为 0 的概率为  $(1-\alpha)^3 + 3(1-\alpha)^2\alpha$ . 采用单次传输方案, 发送 0, 译码为 0 的概率为  $1-\alpha$ . 依题意, 有  $(1-\alpha)^3 + 3(1-\alpha)^2\alpha > 1-\alpha$ ,  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ , 即  $-2\alpha^2 + \alpha > 0$ ,  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ . 令函数  $f(\alpha) = -2\alpha^2 + \alpha$ ,  $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ , 则  $f(\alpha) = \alpha(1-2\alpha) > 0$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上恒成立, 所以 D 选项正确. 故选 ABD.

**4. D** **【解析】** 设该棋手在第二盘与甲比赛连胜两盘的概率为  $p_{\text{甲}}$ , 第二盘与乙比赛连胜两盘的概率为  $p_{\text{乙}}$ , 第二盘与丙比赛连胜两盘的概率为  $p_{\text{丙}}$ , 则  $p_{\text{甲}} = p_1 p_2 (1-p_3) + p_1 p_3 (1-p_2) = p_1 p_2 + p_1 p_3 - 2p_1 p_2 p_3$ ,

$$p_{\text{乙}} = p_1 p_2 (1-p_3) + p_2 p_3 (1-p_1) = p_1 p_2 + p_2 p_3 - 2p_1 p_2 p_3,$$

$$p_{\text{丙}} = p_1 p_3 (1-p_2) + p_2 p_3 (1-p_1) = p_1 p_3 + p_2 p_3 - 2p_1 p_2 p_3,$$

所以  $p_{\text{丙}} - p_{\text{甲}} = p_2(p_3 - p_1) > 0$ ,  $p_{\text{丙}} - p_{\text{乙}} = p_1(p_3 - p_2) > 0$ , 所以  $p_{\text{丙}}$

**【易错】** 将  $p_{\text{丙}}$  与  $p_{\text{甲}}$ ,  $p_{\text{乙}}$  分别相减, 运用因式分解求出差的符号

最大, 故选 D.

**5. ①0.6 ②3.2** **【解析】** ①小桐一周跑 11 圈有两种情况: 第一次跑 5 圈、第二次跑 6 圈和第一次跑 6 圈、第二次跑 5 圈, 两种情况的概率分别为  $P_1 = 0.5 \times 0.6 = 0.3$ ,  $P_2 = 0.5 \times 0.6 = 0.3$ , 所以小桐一周跑 11 圈的概率  $P = P_1 + P_2 = 0.3 + 0.3 = 0.6$ .

②小桐一周跑的圈数的所有可能取值为 10, 11, 12, 其中达标的圈数为 11, 12, 则小桐一周内运动量达标的概率  $P = 1 - 0.5 \times 0.4 = 0.8$ . 合格周数  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,  $X$  服从二项分布  $B(4, 0.8)$ , 所以  $X$  的数学期望  $E(X) = 4 \times$

$0.8 = 3.2$ .

**规律方法** 若随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, p)$ , 则  $X$  的数学期望  $E(X) = np$ , 方差  $D(X) = np(1-p)$ .

**6. (1)【解】** 设事件 A: 打完 3 个球后, 甲比乙多得 3 分, 即甲赢了 3 个球, 则  $P(A) = p^3$ ,

则  $p_3 = p^3$ .

设事件 B: 打完 4 个球后, 甲比乙多得 2 分, 即甲赢了 3 个球, 输了 1 个球, 则  $P(B) = C_4^3 p^3 (1-p)$ ,

设事件 C: 打完 4 个球后, 甲比乙多得 4 分, 即甲赢了 4 个球, 则  $P(C) = p^4$ .

则  $p_4 = P(B) + P(C) = 4p^3(1-p) + p^4 = p^3(4-3p)$ .

(2) **【解】** 易知  $q_4 = 4(1-p)^3 p + (1-p)^4 = (1-p)^3(3p+1)$ ,  $q_3 = (1-p)^3$ ,

$$\text{因此 } \frac{p_4 - p_3}{q_4 - q_3} = \frac{3p^3(1-p)}{3p(1-p)^3} = \frac{p^2}{(1-p)^2} = 4,$$

解得  $p = 2$  (舍去) 或  $p = \frac{2}{3}$ .

(3) **【证明】** 易知  $p_{2m+2} = p_{2m+1} + pC_{2m+1}^{m+1} p^{m+1} (1-p)^m$ ,

$$q_{2m+2} = q_{2m+1} + qC_{2m+1}^{m+1} q^{m+1} p^m,$$

$$p_{2m+1} = p_{2m} - (1-p)C_{2m}^m p^{m+1} (1-p)^{m-1},$$

$$q_{2m+1} = q_{2m} - pC_{2m}^m q^{m+1} p^{m-1},$$

$$\text{则 } \frac{p_{2m+1} - p_{2m}}{q_{2m+1} - q_{2m}} = \frac{-C_{2m}^{m+1} (1-p)^m p^{m+1}}{-C_{2m}^{m+1} (1-p)^{m+1} p^m} = \frac{p}{1-p} > 1,$$

$$\text{则 } p_{2m+1} - p_{2m} < q_{2m+1} - q_{2m},$$

$$\text{即 } p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m}.$$

$$(p_{2m+2} - p_{2m}) - (q_{2m+2} - q_{2m})$$

$$= C_{2m+1}^{m+1} p^{m+2} q^m - C_{2m+1}^{m+1} p^{m+1} q^{m+1} - (C_{2m+1}^{m+1} q^{m+2} p^m - C_{2m+1}^{m+1} q^{m+1} p^{m+1})$$

$$= C_{2m+1}^{m+1} p^{m+2} q^m - C_{2m+1}^{m+1} q^{m+2} p^m - (C_{2m+1}^{m+1} p^{m+1} q^{m+1} - C_{2m+1}^{m+1} q^{m+1} p^{m+1})$$

$$= C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m (p^2 - q^2) - C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m (p - q)$$

$$= C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m (p - q) - C_{2m+1}^{m+1} p^m q^m (p - q)$$

$$= p^m q^m (p - q) (C_{2m+1}^{m+1} - C_{2m+1}^{m+1}) > 0,$$

$$\text{因此 } p_{2m+2} - p_{2m} > q_{2m+2} - q_{2m},$$

$$\text{即 } p_{2m+2} - q_{2m+2} > p_{2m} - q_{2m}.$$

$$\text{综上, } p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}.$$

**多种解法** (3) 先考虑  $p_{2m+1}$  与  $p_{2m}$  的关系, 令  $X_n$  表示打  $n$

个球后甲的得分, 则若打  $2m$  个球后有  $X_{2m} \geq m+2$ , 那无论如何都会有  $X_{2m+1} \geq m+2$ ; 如果  $X_{2m} = m+1$ , 那么需要最后一个球甲得分, 才能使得  $X_{2m+1} \geq m+2$ ; 如果  $X_{2m} < m+1$ , 那无论

如何都不能得到  $X_{2m+1} \geq m+2$ , 因此  $p_{2m+1} = P(X_{2m+1} \geq m+2) =$

$$P(X_{2m+1} \geq m+2 | X_{2m} \geq m+2) \cdot P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m+1} \geq m+2 |$$

$$X_{2m} = m+1) P(X_{2m} = m+1) = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m+1) \cdot$$

$$p = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m+1) - P(X_{2m} = m+1) q =$$

$$p_{2m} - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m,$$

$$\text{同理有 } q_{2m+1} = q_{2m} - C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^m,$$

$$p_{2m+1} - q_{2m+1} = p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^m = p_{2m} - q_{2m} + C_{2m}^{m+1} \cdot$$

$$(pq)^m (q - p) < p_{2m} - q_{2m}.$$

先考虑  $p_{2m+2}$  与  $p_{2m}$  的关系, 当已经有  $X_{2m} \geq m+2$  时, 无论如何都会有  $X_{2m+2} \geq m+2$ ; 当  $X_{2m} = m+1$  时, 只要保证接下来甲不连输两球即可; 当  $X_{2m} = m$  时, 接下来甲必须赢两球; 当  $X_{2m} < m$  时, 无论如何都不符合要求, 因此  $p_{2m+2} = P(X_{2m+2} \geq m+2) = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m) p^2 + P(X_{2m} = m+1) [1 - (1-p)^2] = P(X_{2m} \geq m+2) + P(X_{2m} = m) + P(X_{2m} = m+1) + (p^2 - 1)P(X_{2m} = m) - (1-p)^2 P(X_{2m} = m+1) = P(X_{2m} \geq m) + (p^2 - 1) \cdot C_{2m}^m p^m q^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m+1} = p_{2m} + P(X_{2m} = m) + (p^2 - 1) C_{2m}^m p^m q^m - C_{2m}^{m+1} p^{m+1} q^{m+1}$ ,  
同理  $q_{2m+2} = q_{2m} + P(X_{2m} = m) + (q^2 - 1) C_{2m}^m q^m p^m - C_{2m}^{m+1} q^{m+1} p^{m+1}$ ,  
因此  $p_{2m+2} - q_{2m+2} = p_{2m} - q_{2m} + (p^2 - q^2) C_{2m}^m p^m q^m > p_{2m} - q_{2m}$ .  
综上,  $p_{2m+1} - q_{2m+1} < p_{2m} - q_{2m} < p_{2m+2} - q_{2m+2}$ .

7.  $\frac{61}{25}$  【解析】由题意得  $X=1, 2, 3$ .

黑板:  $X=1$  表示三次取出的都是同一个数字的球,  $X=2$  表示三次取出了两个不同数字的球,  $X=3$  表示三次取出的球的数字各不相同

$$P(X=1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{5}{125}, P(X=3) = A_5^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{60}{125};$$

$$P(X=2) = C_5^2 \times 2 \times \frac{A_3^3}{A_2^2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{60}{125}.$$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{5}{125} + 2 \times \frac{60}{125} + 3 \times \frac{60}{125} = \frac{61}{25}.$$

**多种解法** 令  $X_i = \begin{cases} 1, & \text{球 } i \text{ 至少被取出一次,} \\ 0, & \text{球 } i \text{ 没被取出过,} \end{cases}$  则  $X = X_1 + X_2 +$

$$X_3 + X_4 + X_5,$$

$$E(X_i) = P(\text{球 } i \text{ 至少被取出一次}) = 1 - P(\text{球 } i \text{ 没被取出过}) = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{61}{125}.$$

$$\text{故 } E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) = 5 \times \frac{61}{125} = \frac{61}{25}.$$

8. 【解】(1) 从甲校抽取的 100 人中, 有 80 人答对, 用频率估计概率, 估计甲校高一年级学生该题选择正确的概率  $p = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$ .

(2) 由题意,  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2,

$$\text{从乙校随机抽取 1 人, 答对该题目的概率 } p' = \frac{75}{100} = \frac{3}{4},$$

$$\text{所以 } P(X=0) = \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{20},$$

$$P(X=1) = \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{4}{5}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{7}{20},$$

$$P(X=2) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5},$$

$$\text{所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{20} + 1 \times \frac{7}{20} + 2 \times \frac{3}{5} = \frac{31}{20},$$

$$\text{即 } X=1 \text{ 的概率为 } \frac{7}{20}, X \text{ 的数学期望为 } \frac{31}{20}.$$

(3) 该题做对分两种情况, 一种是掌握知识点并做对, 另一种

是没有掌握但随机选一个对了, 所以  $p_1 \times 100\% + (1-p_1) \times$

$$\frac{1}{4} = \frac{4}{5},$$

$$p_2 \times 85\% + (1-p_2) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\text{解得 } p_1 = \frac{11}{15}, p_2 = \frac{5}{6}, \text{ 所以 } p_2 > p_1.$$

9. 【解】(1) 设一份保单索赔次数为  $Y$ , 则

$$P(Y \geq 2) = P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) = \frac{60}{1\,000} + \frac{30}{1\,000} +$$

$$\frac{10}{1\,000} = \frac{1}{10},$$

$\therefore$  一份保单索赔次数不少于 2 的概率为  $\frac{1}{10}$ .

(2) (i)  $X$  的可能取值为 0.4, -0.4, -1.2, -2, -2.6, 则

$$P(X=0.4) = \frac{800}{1\,000} = \frac{4}{5},$$

$$P(X=-0.4) = \frac{100}{1\,000} = \frac{1}{10},$$

$$P(X=-1.2) = \frac{60}{1\,000} = \frac{3}{50},$$

$$P(X=-2) = \frac{30}{1\,000} = \frac{3}{100},$$

$$P(X=-2.6) = \frac{10}{1\,000} = \frac{1}{100},$$

$$\begin{aligned} \therefore E(X) &= 0.4 \times \frac{4}{5} - 0.4 \times \frac{1}{10} - 1.2 \times \frac{3}{50} - 2 \times \frac{3}{100} - 2.6 \times \frac{1}{100} \\ &= 0.32 - 0.04 - 0.072 - 0.06 - 0.026 \\ &= 0.122. \end{aligned}$$

(ii) 保单的保费调整后, 无索赔保单的保费为 0.384 万元,

有索赔保单的保费为 0.48 万元.

毛利润  $X$  的可能取值为 0.384, -0.32, -1.12, -1.92, -2.52,

$$\begin{aligned} \therefore \text{此时 } E(X) &= 0.384 \times \frac{4}{5} - 0.32 \times \frac{1}{10} - 1.12 \times \frac{3}{50} - 1.92 \times \frac{3}{100} - 2.52 \times \frac{1}{100} \\ &= 0.3072 - 0.032 - 0.0672 - 0.0576 - 0.0252 = \\ &= 0.1252, \end{aligned}$$

$\therefore$  调整后的保单毛利润的数学期望的估计值大于调整前的保单毛利润数学期望的估计值.

10. BC 【解析】由题可得  $X \sim N(1.8, 0.1^2)$ ,  $Y \sim N(2.1, 0.1^2)$ , 所以  $P(X > 2) = P(X > \mu + 2\sigma) < P(X > \mu + \sigma) \approx 1 - 0.8413 = 0.1587 < 0.2$ , 故 A 错误, B 正确;  $P(Y > 2) = P(Y > \mu_1 - \sigma_1) \approx 0.8413 > 0.5$ , 故 C 正确, D 错误. 故选 BC.

11. B 【解析】A 选项, 由  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 可知正态曲线关于直线  $x = \mu$  对称, 故有  $P(X \leq \mu - \sigma) = P(X \geq \mu + \sigma)$ , A 正确; B 选项, 由  $X \sim N(1, 2^2)$ , 可知  $P(X < 1) = 0.5$ , 由  $Y \sim N(2, 2^2)$ , 可知  $P(Y < 2) = 0.5$ , 故  $P(X < 1) = P(Y < 2)$ , B 错误; C 选项, 样本相关系数  $r$  的范围是  $[-1, 1]$ ,  $|r|$  越接近于 1, 则两个变量之间线性相关程度越强, C 正确; D 选项, 样本相关系数  $r$  接近于 0 时, 两个变量之间几乎没有线性相关性, D 正确. 故选 B.



## 高中必刷题 数学

**12. A** 【解析】观察散点图可知, A 图中的散点更集中落在一条直线附近, 故选 A.

**13. 【解】**(1) 由题中的数据是按从小到大的顺序排列的, 可知该组数据的极差为  $216.93 - 206.78 = 10.15$ ,

$$\text{中位数为 } \frac{209.35 + 210.68}{2} = 210.015.$$

(2) 10 个数据中有 4 个数据是大于 211 的, 故从中任意抽取

$$3 \text{ 个数据, 恰有 2 个大于 211 的概率 } P = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}.$$

(3) 由题意可得  $\bar{y} = \frac{1}{10} \times (206.78 + 207.46 + 207.95 + 209.34 + 209.35 + 210.68 + 213.73 + 214.84 + 216.93 + 216.93) = 211.399$ , 由回归直线过样本点的中心  $(\bar{x}, \bar{y})$ ,

可得  $211.399 = -0.311 \times 2006 + \hat{a}$ , 解得  $\hat{a} = 835.265$ ,

则回归直线的方程为  $y = -0.311x + 835.265$ .

当  $x = 2028$  时,  $y = -0.311 \times 2028 + 835.265 = 204.557 \approx 204.56$ ,

故预测 2028 年冠军队的成绩为 204.56.

**14. 【解】**(1) 根据题表数据可知, 超声波检查结果不正常的有 200 人, 其中患该疾病的有 180 人, 因此估计超声波检查结果

不正常者患该疾病的概率  $p = \frac{180}{200} = \frac{9}{10}$ .

**陷阱:** 注意该问所求概率中用到的数据, 数据找错, 计算也就出错

(2) 零假设为  $H_0$ : 超声波检查结果与患该疾病无关.

$$\chi^2 = \frac{1000 \times (20 \times 20 - 180 \times 780)^2}{200 \times 800 \times 800 \times 200} = 765.625 > 10.828.$$

根据小概率值  $\alpha = 0.001$  的独立性检验, 超声波检查结果与患该疾病有关, 此推断犯错误的概率不大于 0.001.

### 刷原创

**1. 【解】**(1) 由题意得  $\bar{x} = \frac{1}{100} \times (18 \times 1000 + 36 \times 3000 + 24 \times 5000 + 12 \times 7000 + 10 \times 9000) = 4200$ .

(2) 由题意可得  $\mu = 4200, \sigma = 250$ ,

$$P(4200 < X < 4700) = \frac{1}{2} P(3700 < X < 4700) \approx \frac{1}{2} \times 0.954 =$$

0.477,

结合样本估计整体,  $\xi$  服从二项分布  $B(3, 0.477)$ , 所以

**敲黑板:** 若随机变量  $X$  服从二项分布  $B(n, p)$ , 则  $E(X) = np$

$$E(\xi) = 3 \times 0.477 = 1.431.$$

**2. 【解】**(1) 依题意,  $P(A) = \frac{3}{4}, P(B) = \frac{2}{3}$ ,

$X$  的所有可能取值为  $-1, 0, 1$ ,

$$\text{则 } P(X = -1) = P(\bar{A}B) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X = 0) = P(AB + \bar{A}\bar{B}) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{12},$$

$$P(X = 1) = P(\bar{A}B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	-1	0	1
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$

$$\text{所以 } E(X) = -\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

(2) 若乙队得 0 分, 则甲队得 2 分, 且第 4 轮甲队得分, 其概

$$\text{率为 } \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times C_3^1 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{1}{768};$$

若乙队得 1 分, 则甲队得 3 分, 且第 4 轮甲队得分, 乙队不得分,

前 3 轮中不出现甲在前 2 轮得 2 分, 乙在第 3 轮得分的这种情况, 其概率为  $(C_3^2 C_3^1 - 1) \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{48}$ ;

若乙队得 2 分, 则甲队得 4 分, 且第 4 轮甲队得分, 乙队不得分,

$$\text{其概率为 } C_3^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{3}{64},$$

所以恰好在第 4 轮对抗后比赛结束且甲队获胜的概率为

$$\frac{1}{768} + \frac{1}{48} + \frac{3}{64} = \frac{53}{768}.$$

## 专练 1 新定义、新情境专练

### 刷素养

**1. C** 【解析】满足  $36 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  的自然数  $a, b, c, d$  有四组, 分别是:  $6, 0, 0, 0; 5, 3, 1, 1; 4, 4, 2, 0; 3, 3, 3, 3$ ,

那么有序数组  $(a, b, c, d)$  有  $A_4^1 + A_4^2 + A_4^3 + 1 = 29$  个. 故选 C.

**2. C** 【解析】用算筹随机摆出一个不含数字 0 的两位数, 个位用纵式, 十位用横式, 共可以摆出  $9 \times 9 = 81$  个两位数, 其中个位和十位上的算筹都为 1 根的有  $1 \times 1 = 1$  个,

个位和十位上的算筹都为 2 根的有  $2 \times 2 = 4$  个, 个位和十位上的算筹都为 3 根的有  $2 \times 2 = 4$  个, 个位和十位上的算筹都为 4 根的有  $2 \times 2 = 4$  个, 个位和十位上的算筹都为 5 根的有  $2 \times 2 = 4$  个, 共有  $4 \times 4 + 1 = 17$  个, 所以个位和十位上的算筹一

样多的概率为  $\frac{17}{81}$ . 故选 C.

**3. A** 【解析】 $(-1+2x)^{2025}$  的展开式的通项为  $T_{k+1} = C_{2025}^k \cdot$

$$(-1)^{2025-k} \cdot (2x)^k = C_{2025}^k \cdot (-1)^{2025-k} 2^k x^k (0 \leq k \leq 2025, k \in \mathbf{N}),$$

$$\text{又因为 } (2x-1)^{2025} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_{2025} x^{2025} (x \in \mathbf{R}),$$

$$\text{所以 } a_k = C_{2025}^k \cdot (-1)^{2025-k} 2^k (0 \leq k \leq 2025, k \in \mathbf{N}),$$

当  $k$  为奇数时,  $a_k > 0$ ; 当  $k$  为偶数时,  $a_k < 0$ .

$$\text{令 } f(x) = (2x-1)^{2025}, \text{ 则 } f(-1) = (-3)^{2025} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2024} - a_{2025},$$

$$\text{所以 } a = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{2025}| = -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - \cdots - a_{2024} + a_{2025} = -f(-1) = 3^{2025},$$

$$\text{又 } 3^{2025} = (4-1)^{2025} = C_{2025}^0 4^{2025} - C_{2025}^1 4^{2024} + C_{2025}^2 4^{2023} - C_{2025}^3 4^{2022} + \cdots + C_{2025}^{2024} 4 - 1,$$

故  $a$  被 4 除的余数为 3,

而  $2023$  被 4 除的余数为 3,  $2024$  被 4 整除,  $2025$  被 4 除的余数为 1,  $2026$  被 4 除的余数为 2, 故选 A.