

第三章 排列、组合与二项式定理

3.1 排列与组合

3.1.1 基本计数原理

刷基础

1. A 【解析】因为此次高铁列车车票还剩下二等座 4 张,一等座 10 张,商务座 5 张,所以小张的购票方案有 3 类:①小张选择二等座,有 4 种购票方案;②小张选择一等座,有 10 种购票方案;③小张选择商务座,有 5 种购票方案,所以根据分类加法计数原理可得小张的购票方案种数为 $4+10+5=19$. 故选 A.

2. D 【解析】第二象限内的点的横坐标是负数,纵坐标是正数.

若集合 M 提供横坐标,集合 N 提供纵坐标,则符合题意的

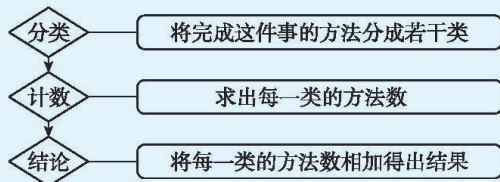
→ 避坑: 注意对横、纵坐标取自哪个集合分类讨论

点有 $(-2,5), (-2,6)$, 共 2 个;

若集合 M 提供纵坐标,集合 N 提供横坐标,则有 $(-3,1), (-3,3), (-4,1), (-4,3)$, 共 4 个.

综上,符合题意的点的个数为 $2+4=6$, 故选 D.

归纳总结 利用分类加法计数原理计数时的解题流程



注意: 确定分类标准时要确保每一类都能独立完成这件事.

3. B 【解析】因为 $A = \{-1, 0, 1\}, B = \{0, 1, 2, 3\}$, 所以 $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3\}, A \cap B = \{0, 1\}$. 又 $A * B = \{(x, y) | x \in A \cap B, y \in A \cup B\}$, 所以 x 有 2 种情况, y 有 5 种情况, 则由分步乘法计数原理可得 $A * B$ 的元素个数为 $2 \times 5 = 10$, 所以 $A * B$ 子集的个数是 2^{10} . 故选 B.

归纳总结 能用分步乘法计数原理解决的问题的特点

- (1) 完成一件事需要经过 n 个步骤, 缺一不可;
- (2) 完成每一步都有若干种方法;
- (3) 把各个步骤的方法数相乘, 就可以得到完成这件事的所有方法数.

4. 63 $\frac{20}{63}$ 【解析】因为正整数 m, n 满足 $m \leq 7, n \leq 9$, 所以 (m, n) 可能的取值有 $7 \times 9 = 63$ (种), 若 m, n 都取到奇数, 则 m 可从 1, 3, 5, 7 中选取, n 可从 1, 3, 5, 7, 9 中选取, 有 $4 \times 5 = 20$ (种) 选取方法, 因此所求概率为 $\frac{20}{63}$.

5. D 【解析】由题意知可以按上、下两条线路分为两类, 上线路中有 2 条, 下线路中有 $2 \times 3 = 6$ (条). 根据分类加法计数原理, 不同的线路可以有 $2+6=8$ (条). 故选 D.

链接教材 此题对应教材第 8 页练习 B 第 1 题, 注意分类加法计数原理和分步乘法计数原理的区别. 如果完成一件事情需要分为 n 类, 每一类都能独立完成这件事情就用分类加法计数原理, 如果完成一件事情需要分为 n 个步骤, 缺一不可都不能完成这件事情, 就用分步乘法计数原理.

6. 30 【解析】第一步: 选一名男生, 有 3 种方法; 第二步: 选一名女生, 有 5 种方法; 第三步: 选出的 2 人分别担任 2 项不同的社区活动服务者, 有 2 种方法, 根据分步乘法计数原理得不同的安排方案种数为 $3 \times 5 \times 2 = 30$.

7. 【解】(1) 若组成的数为数字允许重复的三位数, 则首位数字不为 0, 个位和十位的数字无限制, 所以组成数字允许重复的三位数的个数为 $5 \times 6^2 = 180$.

(2) 分 3 步: 先选个位数字, 由于组成的三位数是奇数, 因此有 3 种选法;

再选百位数字有 4 种选法;

最后选十位数字也有 4 种选法.

由分步乘法计数原理知所求三位数共有 $3 \times 4 \times 4 = 48$ 个.

(3) 若组成的数为数字不重复的小于 1 000 的自然数, 分以下三种情况讨论:

①自然数为一位数, 共有 6 个一位数;

②自然数为两位数, 则首位数字不能为 0, 个位无限制, 共有 $5 \times 5 = 25$ 个两位数;

③自然数为三位数, 共有 $5 \times 5 \times 4 = 100$ 个三位数.

综上所述, 可以组成数字不重复的小于 1 000 的自然数的个数为 $6+25+100=131$.

(4) 分 4 类: ①千位数字为 3 或 4 时, 后面三个数位上可随便选择, 此时共有 $2 \times 5 \times 4 \times 3 = 120$ 个四位数; ②千位数字为 5, 百位数字为 0, 1, 2, 3 之一时, 共有 $4 \times 4 \times 3 = 48$ 个四位数;

③千位数字为 5, 百位数字为 4, 十位数字为 0 或 1 时, 共有 $2 \times 3 = 6$ 个四位数;

④5 420 也满足条件, 故所求数字不重复的四位数共有 $120+48+6+1=175$ 个.

刷易错

★易错点 1 计数时出现“重复”或“遗漏”

8. D 【解析】由直线的倾斜角为锐角, 得直线的斜率 $k = -\frac{A}{B} > 0$, 所以 $AB < 0$, 集合 $M = \{-2, -1, 0, 1, 3\}$ 中任取三个不同元素, 且 A, B 异号,

易知 A 有 4 种选法, B 有 2 种选法, C 有 3 种选法, 共有 $4 \times 2 \times$

→ 易错: 斜率不为 0, 故 A 除了 0 都能选, 若 A 选正数, B 就从两个负数中选一个, 若 A 选负数, B 就从两个正数中选一个, C 从剩下三个数中选一个

$3=24$ 种, 又因为当 $A=1, B=-1, C=0$ 和 $A=-1, B=1, C=0$ 时, 都表示直线 $x-y=0$, 所以符合条件的直线的条数为 $24-1=23$. 故选 D.

易错警示 本题容易忽略 24 种不同 A, B, C 的取值中, 其表示的直线有 2 种是重复的, 需减去 1.

★易错点 2 利用分步乘法计数原理时, 分步标准错误

9. A 【解析】由题知, 每个小球有 3 种放法, 所以 5 个球的放法共有 $3^5 = 243$ 种. 故选 A.

易错警示 本题容易误用“盒子选球”的分步标准得到放法种数为 5^3 , 正确分步标准应为“球选盒子”.

刷提升

1. B 【解析】由分类加法计数原理可得不同的取法有 $(1+2)+(2+1)+4=10$ 种. 故选 B.

2. D 【解析】中途共转向 3 次, 可以分为两类:

第一类, 第一次向右转, 第二次向上转, 第三次向右转, 此时有 $3 \times 4 = 12$ (种) 方法,

【点悟】第一次向右转, 可以先向上走一步再向右转或向上走两步向右转或向上走三步向右转, 有 3 种选择; 向右转后, 可以向右走一步再向上或向右走两步再向上或向右走三步再向上或向右走四步再向上, 有 4 种选择

第二类, 第一次向上转, 第二次向右转, 第三次向上转, 此时共有 $4 \times 3 = 12$ (种) 方法.

故可以选择的不同的最短路径的条数是 24. 故选 D.

3. C 【解析】当使用 4 种颜色时, 不同的涂法有 $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ 种;

当使用 3 种颜色时, 不同的涂法有 $6 \times 5 \times 4 = 120$ 种, 所以不同的涂法共有 $360 + 120 = 480$ 种. 故选 C.

规律方法 涂色问题的解题规律

(1) 对于区域涂色问题, 可根据分步乘法计数原理, 对各个区域分步涂色, 这是处理涂色问题的基本方法.

(2) 可根据提供涂色种类进行分类讨论, 分别计算出各种情形的种数, 再用分类加法计数原理求出不同的涂色种数.

(3) 对几何体顶点涂色问题的解决方法有: ①可根据共用了几种颜色分类讨论; ②根据相对顶点是否同色分类讨论; ③将空间问题平面化, 转化成区域涂色问题.

(4) 对线段涂色问题, 要注意对各条线段依次涂色, 也可以从颜色分类或对线段是否同色分类讨论.

4. C 【解析】如图, 分以下几类:

棱柱侧棱与底面边之间所构成的异面直线有 $3 \times 2 = 6$ (对);

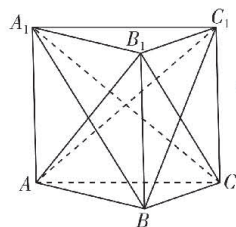
棱柱侧棱与侧面对角线之间所构成的异面直线有 $3 \times 2 = 6$ (对);

底面边与侧面对角线之间所构成的异面直线有 $6 \times 2 = 12$ (对);

底面边与底面边之间所构成的异面直线有 $\frac{6 \times 2}{2} = 6$ (对);

侧面对角线与侧面对角线之间所构成的异面直线有 $\frac{6 \times 2}{2} = 6$ (对),

所以共有 $6 + 6 + 12 + 6 + 6 = 36$ (对) 异面直线. 故选 C.



【点悟】三棱柱的三条侧棱互相平行, 两两构成共面直线, 因此无需讨论侧棱与侧棱构成异面直线的情况

规律方法 分类时标准要明确, 做到不重不漏, 有时要恰当画出示意图或树状图, 使分析更直观、清楚地展现, 便于探索规律

5. BC 【解析】对于选项 A, 安排甲、乙、丙三位同学到 A, B, C, D, E 五个社区进行暑期社会实践活动, 每位同学只能选择一个社区进行活动, 且多个同学可以选择同一个社区进行活动, 故有 $5 \times 5 \times 5 = 5^3$ (种) 安排方法, A 错误;

对于选项 B, 如果社区 A 必须有同学选择, 那么不同的安排方法有 $5^3 - 4^3 = 61$ (种), B 正确;

对于选项 C, 如果同学甲必须选择社区 A, 那么不同的安排方法有 $5 \times 5 = 25$ (种), C 正确;

对于选项 D, 如果甲、乙两名同学必须在同一个社区, 再分为丙与甲、乙两名同学在一个社区和不在一个社区两种情况, 那么不同的安排方法共有 $5 + 5 \times 4 = 25$ (种), D 错误. 故选 BC.

6. 53 【解析】因为 1 只能作真数, 所以从其余 8 个数字中任取一个数字作底数, 对数值均为 0.

从除 1 以外的其余 8 个数字中任取两个, 分别作为对数的底数和真数, 共能组成 $8 \times 7 = 56$ (个) 对数式,

其中 $\log_2 4 = \log_3 9$, $\log_4 2 = \log_9 3$, $\log_2 2 = \log_3 4$, $\log_3 3 = \log_4 9$.

因此, 不同对数值的个数为 $1 + 56 - 4 = 53$.

特别注意 (1) 考虑 1 为真数时, 对数值为 0;

(2) 考虑从除 1 以外的其余 8 个数字中任取两个, 分别作为对数的底数和真数, 特别注意要减去对数值重复的情况.

7. 【解】(1) 若恰在第 2 次测试时, 找到第 1 件次品, 第 5 次测试时, 找到第 2 件次品,

则第 1, 3, 4 次测试的都是正品, 由分步乘法计数原理可知, 不同的测试情况种数为 $4 \times 2 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$.

(2) 分以下两种情况讨论:

(i) 测试 2 次找到所有次品, 不同的测试情况种数为 $2 \times 1 = 2$;

(ii) 测试 3 次找到所有次品, 则第 3 次测试的是次品, 前两次有一次测试的是正品,

则不同的测试情况种数为 $2 \times 2 \times 4 \times 1 = 16$.

综上所述, 不同的测试情况种数为 $2 + 16 = 18$.

刷素养

8. B 【解析】从三个盒子中各随机抽取一张卡片可分为三步完成, 第一步从第一个盒子中取一张卡片, 有 3 种方法, 第二步从第二个盒子中取一张卡片, 有 5 种方法, 第三步从第三个盒子中取一张卡片, 有 7 种方法, 由分步乘法计数原理可得共有 $3 \times 5 \times 7$ 种方法. 事件 $x_1 + x_2 + x_3$ 为奇数等价于 x_1, x_2, x_3 都为奇数或 x_1, x_2, x_3 中有一个为奇数, 两个为偶数. 事件 x_1, x_2, x_3 都为奇数包含 $2 \times 3 \times 4$ 个样本点, 即 24 个样本点; 事件 x_1 为奇数, x_2, x_3 为偶数包含 $2 \times 2 \times 3$ 个样本点, 即 12 个样本点; 事件 x_2 为奇数, x_1, x_3 为偶数包含 $3 \times 1 \times 3$ 个样本点, 即 9 个样本点; 事件 x_3 为奇数, x_1, x_2 为偶数包含 $1 \times 2 \times 4$ 个样本点, 即 8 个样本点. 所以事件 $x_1 + x_2 + x_3$ 为奇数包含的样本点个数为 $24 + 12 + 9 + 8 = 53$, 所以 $P = \frac{53}{3 \times 5 \times 7} = \frac{53}{105}$. 故选 B.

3.1.2 排列与排列数

刷基础

1. A 【解析】①选出的 2 人有不同的劳动内容, 相当于有顺序, ①属于排列问题;

②选出的 2 人劳动内容相同, 无顺序, ②不属于排列问题;

③选出 5 人组成一个篮球队, 无顺序, ③不属于排列问题;

④选出两个数分别作为底数和指数, 其结果不同, 有顺序, ④属于排列问题.

所以属于排列问题的是①④. 故选 A.

规律方法 判断一个具体问题是不是排列问题,就看取出元素后排列是有序的还是无序的,而检验它是否有序的依据就是变换元素的“位置”(这里的“位置”应视具体问题的性质和条件来决定),看其结果是否有变化,有变化就是排列问题,无变化就不是排列问题.

2. A 【解析】小于 3.14 的不同的数有两类:

第一类:3.11 开头的,剩余 5 个数字全排列有 $A_5^5=120$ (种);
 第二类:3.12 开头的,剩余 5 个数字全排列有 $A_5^5=120$ (种).
 根据分类加法计数原理可知,共 $120+120=240$ (种). 故选 A.

3. B 【解析】由排列数公式得 $(n+2 \ 021)(n+2 \ 022) \cdots (n+2 \ 025) = A_{n+2 \ 025}^{n+2 \ 021}$. 故选 B.

→ **点悟**: 5 个因式,所以右上方的数为 5

4. BCD 【解析】对于 A, $A_n^m = m!$, $\frac{A_n^m}{n!} = \frac{1}{(n-m)!}$, 显然 $A_n^m \neq \frac{A_n^m}{n!}$, 故 A 错误;

对于 B, $\frac{n!}{n(n-1)} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots \times 3 \times 2 \times 1}{n(n-1)} = (n-2)(n-3) \cdots \times 3 \times 2 \times 1 = (n-2)!$, 故 B 正确;

对于 C, $(n+1)A_n^m = (n+1) \cdot \frac{n!}{(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{[(n+1)-(m+1)]!} = A_{n+1}^{m+1}$, 故 C 正确;

对于 D, $\frac{1}{n-m}A_n^{m+1} = \frac{1}{n-m} \cdot \frac{n!}{(n-m-1)!} = \frac{n!}{(n-m)!} = A_n^m$, 故 D 正确. 故选 BCD.

链接教材 此题对应教材第 11 页例 2, 排列数公式有连乘和阶乘两种形式, 在计算含有数字的排列数的具体数值时, 常用连乘形式, 在证明或化简与排列数有关的问题时, 常用阶乘形式.

5. C 【解析】 $A_{\sqrt{2}+1}^3 = (\sqrt{2}+1) \times \sqrt{2} \times (\sqrt{2}-1) = \sqrt{2}$, 故选 C.

归纳总结 (1) 排列数的计算主要是利用排列数的乘积公式, 应用时注意, 连续正整数的积可以写成某个排列数, 其中最大的是排列元素的总个数, 而正整数的个数是选取元素的个数, 这是排列数公式的逆用.

(2) 应用排列数公式的阶乘形式时, 一般写出它们的式子后, 再提取公因式, 然后计算, 这样往往会减少运算量.

6. B 【解析】由题意, 要求数学课排在上午, 体育课排在下午, 有 $A_4^1 A_2^1 = 8$ (种) 排法, 再排其余 4 节, 有 $A_4^4 = 24$ (种) 排法, 根

→ **点悟**: 对于特殊元素或特殊位置要优先考虑

据分步乘法计数原理, 共有 $8 \times 24 = 192$ (种) 排法. 故选 B.

7. BCD 【解析】0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这十个数字组成无重复数字的五位数, 且 1 不能在个位, 按从左到右的顺序记万位为第一位,

若有 1,

则若 1 在第一位, 共有 A_9^4 个五位数, 若 1 在第二, 第三, 第四位, 共有 $A_3^1 A_9^1 A_8^3$ 个五位数;

若没有 1,

则第一位有 A_9^1 种选法, 剩下的四位上的数字有 A_9^4 种选法, 共有 $A_9^1 A_9^4$ 个五位数,

故有符合题意的 $A_9^4 + A_3^1 A_9^1 A_8^3 + A_9^1 A_9^4$ 个五位数, 故 D 正确.

又 $A_3^1 A_9^1 A_8^3 + A_9^1 A_9^4 = (A_9^1)^2 A_8^3$, 故 B 正确.

又 $(A_9^1)^2 A_8^3 \neq A_9^4 + (A_9^1)^2 A_8^3$, 故 A 错误.

从十个数字中任选五个进行排列, 有 A_{10}^5 个, 1 在个位或 0 在首位的有 $2A_9^4$ 个, 0 在首位且 1 在个位的有 A_8^3 个, 则符合题意的五位数共有 $A_{10}^5 - 2A_9^4 + A_8^3$ 个, 故 C 正确. 故选 BCD.

→ **间接法**

归纳总结 排列问题常见的解法方法

(1) “两优先排法”: 特殊元素优先排列, 特殊位置优先填充, 如“0”不排“首位”;

(2) “分类讨论法”: 按照某一标准将排列分成几类, 然后按照分类加法计数原理进行, 要注意以下两方面, 一方面是分类标准必须恰当, 另一方面是分类过程要做到不重不漏;

(3) “间接法”: 全排列数减去不符合条件的排列数;

(4) “位置分析法”: 按位置逐步讨论, 把有要求的数字的每个数位依次排好.

8. 【解】(1) (元素分析法): 先排甲有 6 种排法, 再排其余人有 A_8^8 种排法, 故共有 $6A_8^8 = 241 \ 920$ (种) 排法.

多种解法一 (位置分析法): 中间和两端有 A_8^3 种排法, 包括甲在内的其余 6 人有 A_6^6 种排法, 故共有 $A_8^3 A_6^6 = 241 \ 920$ (种) 排法.

多种解法二 (等机会法): 9 个人全排列有 A_9^9 种排法. 因为甲排在每一个位置的机会都是均等的, 所以甲不在中间也不在两端有 $A_9^9 \times \frac{6}{9} = 241 \ 920$ (种) 排法.

多种解法三 (间接法): 9 个人全排列有 A_9^9 种排法. 甲排在中间或两端有 $3A_8^8$ 种排法, 所以甲不在中间也不在两端有 $A_9^9 - 3A_8^8 = 241 \ 920$ (种) 排法.

(2) 先排甲、乙, 再排其余 7 人, 共有 $A_2^2 A_7^7 = 10 \ 080$ (种) 排法.

(3) 先排 4 名男生有 A_4^4 种排法, 再将 5 名女生插空, 有 A_5^5 种排法, 故共有 $A_4^4 A_5^5 = 2 \ 880$ (种) 排法.

9. B 【解析】乙车与货车甲相邻停放, 货车甲占两个车位, 则乙车只能停在货车甲的两边, 有 2 种停法, 将乙车与货车甲看成一个整体与另外两辆车排列, 有 A_3^3 种停法, 则共有 $2 \times A_3^3 = 12$ 种停法. 故选 B.

10. D 【解析】因为三位“80 后”相邻, 可将其看作一个整体, 与“70 后”蔡旭哲先进行排列, 有 $A_3^3 \cdot A_2^2$ 种排法, 三位“80

→ **点悟**: 三位“80 后”内部的排列

后”和“70 后”蔡旭哲站好后会形成 3 个空位, 再将剩下的两位“90 后”插入这 3 个空位中, 有 A_3^2 种插法, 因此不同的站法共有 $A_3^3 A_2^2 A_3^2 = 72$ 种. 故选 D.

归纳总结 对于相邻问题可以采用捆绑法, 将相邻元素“捆绑”看作一个整体进行排列, 但要注意如果这个整体中的元素不同, 那么这个整体内部也要进行排序. 对于不相邻的问题可以采用插空法, 先排其他元素, 最后在其他元素形成的空隙当中插入这些不相邻的元素.

11. 72 【解析】设 8 张门票的编号分别为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

若甲选 123, 则乙可以是 56, 67, 78, 共 3 种,

此时共有 $3A_3^3 = 18$ (种);

若甲选 234, 则乙可以是 67, 78, 共 2 种,

此时共有 $2A_3^3 = 12$ (种);

若甲选 345, 则乙可以是 78, 共 1 种,

此时共有 $A_3^3 = 6$ (种);

若甲选 456, 则乙可以是 12, 共 1 种,

此时共有 $A_3^3 = 6$ (种);

若甲选 567, 则乙可以是 12, 23, 共 2 种,

此时共有 $2A_3^3 = 12$ (种);

若甲选 678, 则乙可以是 12, 23, 34, 共 3 种,

此时共有 $3A_3^3 = 18$ (种).

综上所述, 不同的分配方法有 $18 + 12 + 6 + 6 + 12 + 18 = 72$ (种).

12. 【解】 (1) 先将 3 个舞蹈节目看成一个整体, 内部有 $A_3^3 = 6$ 种排法,

再将剩下 4 个节目全排列, 有 $A_4^4 = 24$ 种排法.

最后将舞蹈节目整体放入剩下 4 个节目排列时产生的不含两端的 3 个空中, 有 3 种排法, 故共有 $6 \times 24 \times 3 = 432$ 种排法.

(2) 先将舞蹈、歌曲分别看成整体并优先安排, 有 $2A_3^3 A_2^2$ 种排法,

再将小品节目分别放入排列舞蹈、歌曲节目时产生的三个空中, 有 A_3^3 种排法,

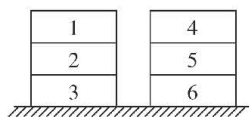
则共有 $2A_3^3 A_2^2 A_3^3 = 144$ 种排法.

13. C 【解析】 如图, 对集装箱进行编号,

可知 1 号箱子一定在 2 号箱子前被取走, 2 号箱子一定在 3 号箱子前被取走, 4 号箱子一定在 5 号箱子前被取走, 5 号箱子一定在 6 号箱子前被取走,

根据定序问题用除法得到不同取法的种数为 $\frac{A_6^6}{A_3^3 A_3^3} = 20$, 故

选 C.



14. B 【解析】 根据已知条件这 7 个字母随机排列共有 $\frac{A_7^7}{A_3^3 A_2^2} =$

点悟: 3 个 f 相同, 2 个 e 相同, 所以要除以 $A_3^3 A_2^2$

420 (种) 排法,

恰好能组成 “enfeoff” 一词占其中的 1 种情况,

所以这 7 个字母组词, 恰好能组成 “enfeoff” 一词的概率为

$\frac{1}{420}$. 故选 B.

15. B 【解析】 因为香菌、新笋、豆腐干一起下锅, 所以把它们捆绑在一起, 看作一个元素, 则此时共有 5 个元素, 其中鸡汤最后下锅, 放在最后一个位置, 茄子净肉在鸡脯肉后下

锅, 则共有 $\frac{A_4^4}{A_2^2} = 12$ (种) 不同的下锅顺序. 故选 B.

规律方法 在有些排列问题中, 某些元素的前后顺序是确定的 (不一定相邻), 解决这类问题的基本方法有两种:

(1) 整体法, 即若有 $m+n$ 个元素排成一列, 其中 m 个元素之间的先后顺序确定不变, 先将这 $m+n$ 个元素排成一列, 有 A_{m+n}^{m+n} 种不同的排法; 然后任取一个排列, 固定其他 n 个

元素的位置不动, 把这 m 个元素交换顺序, 有 A_m^m 种排法,

其中只有一个排列是我们需要的, 因此共有 $\frac{A_{m+n}^{m+n}}{A_m^m}$ 种满足条件的不同排法.

(2) 插空法, 若有 $m+n$ 个元素排成一列, 其中 m 个元素之间的先后顺序确定不变, 因此先排这 m 个元素, 只有一种排法, 然后把剩下的 n 个元素分类或分步插入由以上 m 个元素形成的空隙中.

刷易错

★易错点 1 计数时混淆定序与不定序致误

16. 720 【解析】 10 个节目随意排列, 有 A_{10}^{10} 种排法. 原计划中的 7 个节目随意排列, 有 A_7^7 种排法, 保持原计划中的 7 个

节目的先后顺序不变, 则这 10 个节目的不同排法共有 $\frac{A_{10}^{10}}{A_7^7} =$

$10 \times 9 \times 8 = 720$ 种.

易错警示 本题容易忽略不改变原来节目的相对顺序这一条件, 即原来的 7 个节目是定序的.

★易错点 2 忽视排列数公式的隐含条件致误

17. BC 【解析】 因为 $A_{n-1}^2 = (n-1)(n-2) = n^2 - 3n + 2$, 所以 $A_{n-1}^2 - n = n^2 - 4n + 2 < 7$, 即 $n^2 - 4n - 5 < 0$, 又 $n \geq 3, n \in \mathbb{N}_+$, 所以 $n = 3$ 或 4. 故选 BC.

18. 【解】 (阶乘公式法) 因为 $3A_x^3 \leq 2A_{x+1}^2 + 6A_x^2$, 所以

$$\begin{cases} 3 \times \frac{x!}{(x-3)!} \leq 2 \times \frac{(x+1)!}{(x-1)!} + 6 \times \frac{x!}{(x-2)!}, & \text{化简可得} \\ x \geq 3, x \in \mathbb{N}_+, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-2)(x-5) \leq 0, \\ x \geq 3, x \in \mathbb{N}_+, \end{cases} \text{解得 } x = 3 \text{ 或 } 4 \text{ 或 } 5, \text{ 所以原不等式的解集为 } \{3, 4, 5\}.$$

多种解法 (连乘公式法) 因为 $3A_x^3 \leq 2A_{x+1}^2 + 6A_x^2, x \geq 3,$

$x \in \mathbb{N}_+$, 所以 $3x(x-1)(x-2) \leq 2(x+1)x + 6x(x-1)$, 即

$$3x^2 - 17x + 10 \leq 0, \text{ 化简可得 } \begin{cases} (3x-2)(x-5) \leq 0, \\ x \geq 3, x \in \mathbb{N}_+, \end{cases} \text{ 解得 } x = 3$$

或 4 或 5, 所以原不等式的解集为 $\{3, 4, 5\}$.

易错警示 (1) 不要忽视公式 A_m^n 中的条件 “ $m \leq n$ ”.

(2) 不要忽视公式 A_m^n 中的条件 “ $m, n \in \mathbb{N}_+$ ”, 如本题可能会得到 “ $\frac{2}{3} \leq x \leq 5$ ” 的错误结论.

(3) 在解答排列数的方程或不等式时, 要注意排列数 A_m^n 中 $m, n \in \mathbb{N}_+$ 且 $m \leq n$ 这些限制条件, 要注意含排列数的方程或不等式中未知数的取值范围.

3.1.3 组合与组合数

刷基础

1. BCD 【解析】 对于 A, 从 3 名同学中选出 2 名同学后, 分配到两个乡镇涉及顺序问题, 是排列问题;

对于 B, 从 7 人中选出 4 人观看电影不涉及顺序问题, 是组合问题;

对于 C, 命中的 4 枪均为 2 枪连中, 需将 4 枪命中拆分为两组连续的 2 枪命中, 由于不考虑两组之间的顺序, 因此是组合问题;

对于 D, 乘法满足交换律, 两数相乘的积不涉及顺序, 是组合问题. 故选 BCD.

归纳总结 (1) 根据排列与组合的定义区分排列与组合问题, 先确定完成的是什么事件, 然后看问题是否与顺序有关, 与顺序有关的是排列, 与顺序无关的是组合.

(2) 区分有无顺序的方法: 把问题的一个选择结果写出来, 然后交换这个结果中任意两个元素的位置, 看是否会产生新的变化, 若有新变化, 即说明有顺序, 是排列问题; 若无新变化, 即说明无顺序, 是组合问题.

2. A 【解析】至多含 4 个 5, 有以下 5 种情况:

不含 5, 有 $C_6^0=1$ (种); 含 1 个 5, 有 $C_6^1=6$ (种);

含 2 个 5, 有 $C_6^2=15$ (种); 含 3 个 5, 有 $C_6^3=20$ (种);

含 4 个 5, 有 $C_6^4=15$ (种).

所以所有的可能情况共有 $1+6+15+20+15=57$ (种), 故选 A.

规律方法 解简单的组合应用题的策略

(1) 解简单的组合应用题时, 首先要判断它是组合问题还是排列问题, 组合问题与排列问题的根本区别在于排列问题与取出元素之间的顺序有关, 而组合问题与取出元素的顺序无关.

(2) 要注意两个基本计数原理的运用, 即分类与分步的灵活运用.

提醒: 在分类和分步时, 一定要注意有无重复或遗漏.

3. AC 【解析】 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, $\frac{m+1}{n+1} C_{n+1}^{m+1} = \frac{m+1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = C_n^m$.

$\frac{(n+1)!}{(n-m)!(m+1)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, A 正确;

$3C_8^3 - 2C_5^2 = 3 \times 56 - 20 = 148$, B 错误;

$rC_n^r = r \cdot \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$, $nC_{n-1}^{r-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$, C 正确;

当 $n=2$ 时, 因为 $C_2^1 + C_2^2 = 3 \neq 2^2$, 所以 $C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n \neq 2^n$, D 错误. 故选 AC.

规律方法 关于组合数计算公式的选取

(1) 涉及具体数字的可以直接用公式 $C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$ 计算.

(2) 涉及字母的可以用阶乘形式 $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ 计算.

4. C 【解析】因为 $C_{16}^m = C_{16}^{2m-2}$, 所以 $m=2m-2$ 或 $m+2m-2=16$, 解得 $m=2$ 或 $m=6$, 由题可得 $m>4$, 则 $m=6$, 所以 $C_4^3 + C_5^3 + \cdots + C_m^3 = C_4^3 + C_5^3 + C_6^3 = 4+10+20=34$. 故选 C.

→ 避坑: 根据题干所求 $C_4^3 + C_5^3 + \cdots + C_m^3$ 可得 m 必定比 4 大

5. C 【解析】因为 C_n^{4-n} , C_{n+1}^{8-n} 有意义, 所以 $4-n \leq n$, $8-n \leq n+1$, $4-n \geq 0$, $8-n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}_+$, 所以 $n=4$, 所以 $C_n^{4-n} + C_{n+1}^{8-n} = C_4^0 + C_5^4 =$

→ 避坑: 注意组合数中的隐含条件

$1+5=6$, 故选 C.

6. C 【解析】取出的 3 个球至少有 1 个红球和 1 个白球有以下两种情况:

① 1 红 2 白, 则有 $C_2^1 C_4^2 = 12$ 种取法;

② 2 红 1 白, 则有 $C_2^2 C_4^1 = 4$ 种取法, 由分类加法计数原理可知取法共有 $12+4=16$ 种. 故选 C.

多种解法 (间接法) 从装有大小不同的 2 个红球和 4 个白球的口袋里取 3 个球有 $C_6^3 = 20$ 种取法, 其中全部为白球有 $C_4^3 = 4$ 种取法, 则至少含有 1 个红球和 1 个白球的取法有 $20-4=16$ 种.

链接教材 本题改编自教材第 20 页例 4, 解决含有“至多”“至少”等限制的问题应明确限制语句中所含的情况, 可以以此作为分类依据或采用间接法求解.

7. 1 440 1 120 【解析】由题意, 从 1, 3, 5, 7, 9 中任取两个数, 从 2, 4, 6, 8 中任取两个数, 组成 $C_5^2 C_4^2 A_4^4 = 10 \times 6 \times 24 = 1 440$ 个没有重复数字且不含有数字 0 的四位数.

从 1, 3, 5, 7, 9 中任取两个数, 从 0, 2, 4, 6, 8 中任取两个数, 组成没有重复数字的四位偶数有以下两种情况:

当 0 在末位时, 共有 $C_5^2 C_4^1 A_3^3 = 10 \times 4 \times 6 = 240$ 个四位偶数;

当末位为 2, 4, 6, 8 (若含有 0, 则 0 不在首位) 时, 共有 $4C_5^2 C_4^1 A_3^3 - 4A_3^2 = 880$ 个四位偶数.

则可以组成 $240+880=1 120$ 个没有重复数字的四位偶数.

8. ABD 【解析】A 选项, 不同的分配方法有 $C_{9+3}^3 = 220$ (种), 故
→ 避坑: 甲、乙等 4 人未必每人都能分到玩偶, 所以在 9 个玩偶中添加 3 个位置, 在总的 12 个位置中选出 3 个位置作为挡板

A 正确;

B 选项, 若每人至少分到 1 个玩偶, 则不同的分配方法共有 $C_8^3 = 56$ (种), 故 B 正确;

C 选项, 若每人至少分到 2 个玩偶, 则 4 人中只有 1 人分到 3 个玩偶, 其他 3 人各分到 2 个玩偶, 故不同的分配方法共有 $C_4^3 = 4$ (种), 故 C 不正确;

D 选项, 若甲至少分到 2 个玩偶, 其余 3 人每人至少分到 1 个玩偶, 则不同的分配方法共有 $C_7^3 = 35$ (种), 故 D 正确. 故选 ABD.

9. C 【解析】由题意, 入团名额是相同的元素, 班级是不同的元素,

将 4 个人团名额分给 5 个班, 有以下分组方式: $1+1+1+1+0$, $2+1+1+0+0$, $2+2+0+0+0$,

若按 $1+1+1+1+0$ 分组分配, 共有 $C_5^4 = 5$ 种;

若按 $2+1+1+0+0$ 分组分配, 共有 $C_5^1 C_4^2 = 30$ 种;

若按 $2+2+0+0+0$ 分组分配, 共有 $C_5^2 = 10$ 种.

所以一共有 $5+30+10=45$ 种分法. 故选 C.

10. 36 【解析】由 $x, y, z \in \mathbb{N}$, 且 $x \geq 1, y \geq 2, z \geq 3$, 故 $y-1 \geq 1, z-2 \geq 1$,

则 $x+y+z=13$ 等价于 $x+(y-1)+(z-2)=10$,

即可将 10 分为 10 个 1 之和, 将这些 1 分为三组, 每一组至少一个 1, 即在 10 个 1 中间插入两个隔板, 共有 $C_9^2 = 36$ (种) 放法, 则题中所求方程的解共有 36 组.

规律方法 相同元素分配问题, 常用隔板分配法, 用隔板分成若干份, 不同分法对应着不同的分配数量.

11. B 【解析】将6名志愿者按1:2:3和2:2:2分成3组,

$$\text{不同分组方法种数为 } C_6^3 C_3^2 + \frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3},$$

陷阱: 完全均匀分组要除以组数的阶乘再分配

再将每一种分法的3组安排到三个站点有 A_3^3 种排法, 则不同

$$\text{安排的方法数为 } \left(C_6^3 C_3^2 + \frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} \right) A_3^3 = 450. \text{ 故选 B.}$$

12. D 【解析】因为甲和乙都不能去A公司, 对A公司去的学生人数进行分类讨论:

若去A公司的只有1个人, 则有3种情况, 然后将剩余4人分为两组, 再将这两组分配给B, C两个公司, 此时有

$$3 \left(C_4^1 + \frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \right) A_2^2 = 42 \text{ 种不同的安排方式};$$

点悟: 剩余4人分两组有两种情况: 1和3, 2和2, 后者符合完全均匀分组, 需要去重

若去A公司的有2人, 则有 $C_3^2 = 3$ 种情况, 然后将剩余3人分为两组, 再将这两组分配给B, C两个公司, 此时有 $3C_3^2 A_2^2 = 18$ 种不同的安排方式;

若去A公司的有3人, 则只需将甲、乙2人分配给B, C公司, 每个公司1个人即可, 此时有 $A_2^2 = 2$ 种不同的安排方式. 由分类加法计数原理可知, 不同的安排方式种数为 $42 + 18 + 2 = 62$. 故选 D.

规律方法 在解决分组和分配问题时, 首先要明确要分配的对象是否相同, 其次需要考虑接纳的对象是否相同, 这将决定分配时是不是组合问题, 最后需要考虑每组的个数是否相同. 如果每组对象数目相同, 接纳对象不同, 需要先平均分组, 再分配; 如果需要分配的对象是相同的, 例如指标, 名额等分配, 接纳对象不同, 可用挡板法解决问题. 只有明确解决问题的对象, 才能选择正确的解决办法.

13. C 【解析】分两类(先涂前3个小矩形, 再涂后3个小矩形):

第一类, 前3个小矩形用3种颜色, 后3个小矩形也用3种颜色, 有 $A_3^3 C_2^1 C_1^1 = 24$ 种涂法;

第二类, 前3个矩形用2种颜色, 后3个矩形也用2种颜色, 有 $C_3^1 C_2^2 = 6$ 种涂法.

综上, 不同的涂色方法种数为 $24 + 6 = 30$. 故选 C.

14. 【解】(1) 要求从标有数字1到9的9种型号的零件中任选2种型号, 使得2种型号的数字之差的绝对值不超过3, 设选中的2个型号分别为 a, b , 由于两数 a, b 均为正整数, 所以 $|a - b| \leq 3$. 当 $|a - b| = 1$ 时, 共有8种情况, 当 $|a - b| = 2$ 时, 共有7种情况, 当 $|a - b| = 3$ 时, 共有6种情况, 所以甲有 $8 + 7 + 6 = 21$ 种选择.

(2) 将9种型号的零件全部分给甲、乙、丙三组, 每组至少2种, 设三组分配到的零件型号的种类数分别为 a, b, c , 则需要满足 $a + b + c = 9$, 且 $a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$, 所以可能的情况有:

$$\text{第一类为 } 2 + 2 + 5, \text{ 分配方法数为 } \frac{C_9^2 C_7^2 C_5^5}{A_2^2} A_3^3 = 2\,268,$$

$$\text{第二类为 } 2 + 3 + 4, \text{ 分配方法数为 } C_9^2 C_7^3 C_4^4 A_3^3 = 7\,560,$$

$$\text{第三类为 } 3 + 3 + 3, \text{ 分配方法数为 } \frac{C_9^3 C_6^3 C_3^3}{A_3^3} A_3^3 = 1\,680,$$

根据分类加法计数原理可得共有 $2\,268 + 7\,560 + 1\,680 = 11\,508$ 种分配方法.

刷易错

★易错点1 未关注组合数的互补性质致误

15. D 【解析】因为 $C_{12}^{x-2} = C_{12}^{12-x}$, 所以由组合数的性质得 $x - 2 = 2x - 4$ 或 $x - 2 + 2x - 4 = 12$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 6$. 故选 D.

易错警示 应用 $C_n^m = C_n^n - C_n^m$ 可以得到 $m = p$ 或 $m + p = n$ 两种可能, 切忌只考虑两者相等, 而忽略 $m + p = n$ 的情况, 从而导致错误.

★易错点2 不能正确判断是排列还是组合致误

16. 56 【解析】8个小球排好后对应着8个位置, 题中的排法相当于在8个位置中选出3个位置给红球, 剩下的位置给白球. 因为这3个红球完全相同, 所以没有顺序, 是组合问题, 这样共有 $C_8^3 = 56$ (种) 排法.

易错警示 本题是相同元素的排列问题, 可以看作是一个组合问题, 本题的易错之处是忽视红色小球均相同、白色小球均相同, 误认为是排列问题而出错.

★易错点3 重复、遗漏计算出错

17. B 【解析】按A工厂接收的女生人数分类.

第一类: A工厂仅接收1名女生, 从2名女生中选1人, 有 C_2^1 种选择,

再把剩余的3人分为两组, 分配到B, C两个工厂, 有 $C_3^2 A_2^2$ 种选择,

故有 $C_2^1 C_3^2 A_2^2 = 12$ (种) 分配方法;

第二类: A工厂接收2名女生, 则剩余的2名男生分配到B, C两个工厂, 有 $C_2^2 A_2^2 = 2$ (种) 分配方法.

综上, 不同的分配方法有 $12 + 2 = 14$ (种).

故选 B.

易错警示 在排列组合问题中, 经常会遇到元素分配问题、平均分组问题等, 这些问题要注意避免重复计数; 在排列组合问题中, 还可能由于考虑问题不够全面, 遗漏某些情况而出错.

18. **思路导引** (1) 分个位数字为0和不为0两种情况, 应用排列组合结合分类加法计数原理计算即可;

(2) 分个位数字为0, 5两种情况, 应用排列组合结合分类加法计数原理计算即可;

(3) 分千位数字、百位数字、十位数字、个位数字比1 230相对应数字大分类讨论, 应用排列组合结合分类加法计数原理计算即可.

【解】(1) 符合要求的四位偶数可分为两类:

第一类, 0在个位时有 A_5^3 个四位偶数;

第二类, 2或4在个位时, 首位从1, 3, 4 (或2), 5中选, 有 C_4^1 种情况, 十位和百位从余下的数字中选, 有 A_4^2 种情况, 则有 $2C_4^1 A_4^2$ 个四位偶数,

由分类加法计数原理知符合条件的四位偶数有 $A_5^3 + 2C_4^1 A_4^2 = 156$ (个).

(2) 符合条件的四位数可分为两类:

第一类: 0 在个位时有 A_3^3 个四位数;

第二类: 5 在个位时有 $C_4^1 A_4^2$ 个四位数.

故符合条件的四位数共有 $A_3^3 + C_4^1 A_4^2 = 108$ (个).

(3) 符合条件的四位数可分为四类:

第一类: 形如 $2\square\square\square, 3\square\square\square, 4\square\square\square, 5\square\square\square$, 共有 $C_4^1 A_3^3$ 个四位数;

第二类: 形如 $13\square\square, 14\square\square, 15\square\square$, 共有 $C_3^1 A_4^2$ 个四位数;

第三类: 形如 $124\square, 125\square$, 共有 $C_2^1 A_3^3$ 个四位数;

第四类: 形如 $123\square$, 共有 A_2^1 个四位数.

由分类加法计数原理知, 无重复数字且比 1 230 大的四位数共有 $C_4^1 A_3^3 + C_3^1 A_4^2 + C_2^1 A_3^3 + A_2^1 = 284$ (个).

第 3.1 节综合训练

刷能力

1. D 【解析】 $A_4^2 + C_6^2 = \frac{4!}{2!} + \frac{6!}{2! \times 4!} = 12 + 15 = 27$, $C_7^3 = \frac{7!}{3! \times 4!} = 35$,

$A_7^2 = \frac{7!}{5!} = 42$, $C_7^2 = \frac{7!}{2! \times 5!} = 21$. 故选 D.

2. B 【解析】第一步: 先排 4 名青少年共有 A_4^4 种排法; 第二步: 把甲、乙、丙插在 4 名青少年形成的 5 个空位中, 有 A_5^3 种排法, 所以根据分步乘法计数原理共有 $A_4^4 \cdot A_5^3 = 1\,440$ 种排法. 故选 B.

3. B 【解析】多重限制的排列问题: 甲、乙都不是第 1 名且甲不是最后 1 名, 且丙不是第 2 名, 即甲的限制最多, 故以甲为优先元素进行分类计数.

【点悟】排列组合问题中, 限制条件最多的元素作为优先元素

甲的名次有可能是第 2, 3, 4 名 3 种情况:

①甲是第 2 名, 乙有 3 种可能, 包含丙的余下 3 人有 A_3^3 种可能, 则有 $1 \times 3 \times A_3^3 = 18$ 种名次排列情况;

②甲是第 3 名或第 4 名, 乙是第 2 名, 包含丙的余下 3 人有 A_3^3 种可能, 则有 $2 \times 1 \times A_3^3 = 12$ 种名次排列情况;

③甲是第 3 名或第 4 名, 乙不是第 2 名, 即有 2 种可能, 丙不是第 2 名, 有 2 种可能, 余下 2 人有 A_2^2 种可能, 则有 $2 \times 2 \times A_2^2 = 16$ 种名次排列情况.

综上, 该 5 名同学可能的名次排列情况种数为 $18 + 12 + 16 = 46$. 故选 B.

多种解法 (间接法) 甲不是第 1 名和最后 1 名, 有 3 种情况, 再排乙, 也有 3 种情况, 包含丙的余下 3 人有 A_3^3 种排法, 共有 $3 \times 3 \times A_3^3 = 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 1 = 54$ 种不同的情况,

但如果丙是第 2 名, 则甲有可能是第 3, 4 名, 有 2 种情况, 再排乙, 也有 2 种情况, 余下 2 人有 A_2^2 种排法, 故共有 $2 \times 2 \times A_2^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 1 = 8$ 种不同的情况,

从而该 5 名同学可能的名次排列情况种数为 $54 - 8 = 46$. 故选 B.

4. D

思路导引 可以把问题看作 10 个绳头平均分成 5 组, 按平均分组问题求所有可能的结果, 再求恰好能围成一个圈的结果, 结合古典概型概率计算公式计算求解.

【解析】10 个绳头, 每个绳头只打一次结, 且每个结仅含两个绳头, 所有的打结方式有 $\frac{C_{10}^2 C_8^2 C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_5^5} = 945$ 种, 其中恰好能

围成一个圈的打结方式有 $C_8^1 C_6^1 C_4^1 C_2^1 = 384$ 种.

【点悟】围成一个圈的打结方式是每根绳子的绳头只选择一个

所以 5 根绳子恰好能围成一个圈的概率为 $P = \frac{384}{945} = \frac{128}{315}$. 故选 D.

规律方法 (1) 10 个绳头打结, 按要求, 每次打结都减少 2 个绳头, 所以可以把问题看成平均分组来解决.

(2) 恰好围成一个圈时, 先选 1 根绳子, 不能两端打结, 只能从其余的 8 个绳头选 1 个打结, 完成后, 这段绳子不能两端打结, 再从其余的 6 个绳头选 1 个, ..., 最后这段绳子两端打结.

5. C

思路导引 由三棱锥的几何结构特征, 可分三类情况讨论: 从平面 α 内取 3 个不共线的点, 平面 β 内取 1 个点; 从平面 α 内取 2 个点, 平面 β 内取 2 个点; 从平面 α 内取 1 个点, 平面 β 内取 3 个点, 结合组合数的计算公式和分类加法计数原理即可求解.

【解析】根据题意, 由三棱锥的几何结构特征, 可分三类情况讨论:

①从平面 α 内取不共线的 3 个点, 平面 β 内取 1 个点共有 $(C_2^2 C_3^1 + C_2^2 C_2^1) C_4^1 = 36$ 种情况;

②从平面 α 内取 2 个点, 平面 β 内取 2 个点共有 $C_2^2 C_4^2 = 60$ 种情况;

③从平面 α 内取 1 个点, 平面 β 内取 3 个点共有 $C_2^1 C_4^3 = 20$ 种情况,

所以以这 9 个点为顶点的三棱锥最多有 $36 + 60 + 20 = 116$ 个. 故选 C.

6. D 【解析】根据牟合方盖的表面可以看成四个曲面拼接成的, 将一个牟合方盖的四个曲面编号为 1, 2, 3, 4, 故可转化为有公共边的 4 个区域, 如图所示:

1	2
3	4

1 号小方格可以从 4 种颜色中任取一种涂色, 有 4 种不同的涂法,

①当 2 号, 3 号小方格涂不同颜色时, 有 $3 \times 2 = 6$ 种不同的涂法, 4 号小方格有 2 种不同的涂法, 故由分步乘法计数原理可知有 $4 \times 6 \times 2 = 48$ 种不同的涂法;

②当 2 号, 3 号小方格涂相同颜色时, 有 3 种不同的涂法, 4 号小方格也有 3 种不同的涂法, 故由分步乘法计数原理, 可知有 $4 \times 3 \times 3 = 36$ 种不同的涂法.

综上, 由分类加法计数原理可得共有 $48 + 36 = 84$ 种不同的涂法. 故选 D.

7. C 【解析】先不考虑甲、乙的限制条件,得到站法种数为 $A_5^2 A_3^3 = 120$.

当甲、乙两名同学为正前后相邻时,其中必有 1 人站在老师的左侧或右侧,

另 1 人站在正后面,站法种数为 $2A_2^2 A_3^3 = 24$.

当甲、乙两名同学为左右相邻时,两人必都站在后一排,将甲、乙两名同学看成一个元素,

从其余的 3 人中选 2 人站在老师的左右两侧,余下的 1 人与甲、乙两名同学看成的一个元素进行全排列,所以站法种数为 $A_2^2 A_3^2 A_2^2 = 24$.

综上,满足题意的不同的站法种数为 $120 - (24 + 24) = 72$. 故选 C.

8. BCD 【解析】对于 A, 因为 $nC_{n-1}^{n-1} = n \cdot \frac{(n-1)!}{(m-1)!(n-m)!} =$

$$\frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} = \frac{m \cdot n!}{m \cdot (m-1)!(n-m)!} = m \cdot$$

$$\frac{n!}{m!(n-m)!} = mC_n^m, \text{ 故 A 不正确; 对于 B, 因为 } nA_{n-1}^{n-1} = n \cdot$$

$$\frac{(n-1)!}{(n-m)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-m)!} = \frac{n!}{(n-m)!} = A_n^m, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\text{对于 C, 因为 } \sum_{i=0}^r C_{m+i}^i = C_m^0 + C_{m+1}^1 + C_{m+2}^2 + \cdots + C_{m+r}^r = C_{m+1}^0 + C_{m+1}^1 + C_{m+2}^2 + \cdots + C_{m+r}^r = C_{m+2}^1 + C_{m+2}^2 + \cdots + C_{m+r}^r = \cdots = C_{m+r-1}^{r-1} + C_{m+r}^r = C_{m+r}^r, \text{ 故}$$

$$\text{敲黑板: } C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

C 正确;

对于 D, 考虑从两个各有 n 个元素的集合 A 和 B 中总共选取 n 个元素的方式数, 总的选取方式数是 C_{2n}^n , 我们也可以将选取过程分为不同的情况, 即从集合 A 中选取 i 个元素, 从集合 B 中选取 $n-i$ 个元素, 其中 $i=0, 1, 2, \dots, n$, 对于每个 i , 选取的方式数是 $C_n^i C_n^{n-i}$, 由于 $C_n^{n-i} = C_n^i$, 所以选取方式数是 $(C_n^i)^2$,

因此总的选取方式数可以表示为 $\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2$, 由于这两种方法计算的是同一个选取过程的方式数, 所以 $\sum_{i=0}^n (C_n^i)^2 = C_{2n}^n$,

→ 思: 从组合数的实际意义出发考虑

故 D 正确. 故选 BCD.

9. ACD 【解析】对于 A, 由题意可选取的数字为 0, 1, 2, 3, 4, 5, 且首位不能为 0,

第一步: 首位不能为 0, 有 $C_5^1 = 5$ 种不同排法, 第二步: 再排其他 5 个数字, 有 $A_5^5 = 120$ 种排法,

所以由分步乘法计数原理可知, 可以组成 $C_5^1 A_5^5 = 600$ 个没有重复数字的六位数, 故 A 正确.

对于 B, 由题意知末位只能为 0, 2, 4, 当末位为 0 时, 有 $A_5^5 = 120$ 个六位数;

当末位为 2 时, 有 $C_4^1 A_4^4 = 96$ 个六位数; 当末位为 4 时, 有 $C_4^1 A_4^4 = 96$ 个六位数,

所以由分类加法计数原理可知, 可以组成 $120 + 96 + 96 = 312$ 个没有重复数字的六位偶数, 故 B 错误.

对于 C, 由题意知六位数中可能有 1 个 1, 2 个 1, 3 个 1 三种情况,

当六位数中有 1 个 1 时, 由 A 选项知有 600 个六位数;

当六位数中有 2 个 1 时, 分为有 0 与无 0 两种情况,

有 0 时, 有 $C_5^1 C_5^2 A_4^3 = 1200$ 个六位数, 无 0 时, 有 $C_6^2 A_4^4 = 360$ 个六位数;

当六位数中有 3 个 1 时, 分为有 0 与无 0 两种情况,

有 0 时, 有 $C_5^1 C_5^3 A_4^2 = 600$ 个六位数, 无 0 时, 有 $C_6^3 A_4^3 = 480$ 个六位数,

所以由分类加法计数原理可知, 可以组成 $600 + 1200 + 360 + 600 + 480 = 3240$ 个六位数, 故 C 正确;

对于 D, 因为相邻两个数字不相同, 即 3 个 1 不能相邻, 所以用插空法:

第一步: 先排除 1 以外的 5 个数字, 有 $A_5^5 = 120$ 种排法, 5 个数字形成 6 个空位,

第二步: 再将 3 个 1 插入 6 个空位, 有 $C_6^3 = 20$ 种排法,

所以由分步乘法计数原理可知, 共有 $120 \times 20 = 2400$ 种排法,

又因为 0 不能在首位, 而 0 在首位时, 有 $A_4^4 C_3^3 = 240$ 种排法,

所以可以组成 $2400 - 240 = 2160$ 个相邻两个数字不相同的八位数, 故 D 正确. 故选 ACD.

10. ABD 【解析】对于 A 选项, 从点 A 到点 C_1 , 需要向上走 2 个线段长度, 向前走 1 个线段长度, 从点 C_1 到点 B , 需要向右走 2 个线段长度, 向前走 1 个线段长度, 所以甲从 A 必须经过 C_1 到达 B 的方法共有 $C_2^2 C_2^2 = 9$ (种), A 正确;

对于 B 选项, 从点 A 到点 B , 一共要走 6 个线段长度, 其中向上走 2 个线段长度, 向前走 2 个线段长度, 向右走 2 个线段长度, 所以甲从 A 到 B 的方法共有 $C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 90$ (种), B 正确;

对于 C 选项, 甲从点 A 运动到点 C_2 , 需要向上、向前、向右各走一个线段长度, 再从点 C_2 运动到点 B , 也需要向上、向前、向右各走一个线段长度, 所以甲从点 A 运动到点 B , 且经过点 C_2 , 不同的走法共有 $(A_3^3)^2 = 36$ (种), 同理, 乙从点 B 运动到点 A , 且经过点 C_2 , 不同的走法共有 36 种, 所以甲、乙两人在

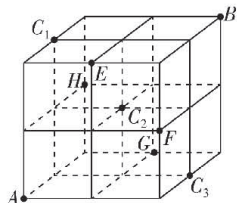
C_2 处相遇的概率为 $\frac{36^2}{90^2} = \frac{4}{25}$, C 错误;

对于 D 选项, 如图所示, 若甲、乙两人相遇, 则甲、乙两人只能在点 C_1 ,

C_2, C_3, E, F, G, H 处相遇, 由 A 选项知甲从点 A 运动到点 B 且经过点 C_1 的走法种数为 $(C_2^2)^2$, 所以甲、乙两人在点 C_1 处相遇的走法种数为

$(C_2^2)^4$, 同理可知, 甲、乙两人在点 C_3, E, F, G, H 处相遇的走法种数都为 $(C_2^2)^4$, 因此, 结合 C 选项, 甲、乙两人相遇的概率为

$$\frac{6 \times (C_2^2)^4 + 36^2}{90 \times 90} = \frac{11}{50}, \text{ D 正确. 故选 ABD.}$$



11. 120 【解析】 A, B, C 三位同学围成一个圆, “ ABC ” “ BCA ” 或 “ CAB ” 是同一排列, 其中每一个圆排列可以拆成任意一位同学为首的直线排列, 则三位同学围成一个圆的排列总数为 $\frac{1}{3} A_3^3$, 由此可得六位同学围成一个圆的排列总数为 $\frac{1}{6} A_6^6 = 120$.

为 $\frac{1}{6} A_6^6 = 120$.

12. 126 【解析】根据题意可分为 2 种情况讨论:

(1) 从 C, D, E 三人中选 1 人去蒙中, 有 C_3^1 种选法, 剩下 4

人安排到其余三所学校, 即 4 人分成 2, 1, 1 三组, 有 $\frac{C_4^2 C_2^1 C_1^1}{A_2^2}$

种分法, 然后将这三组安排到其余三所学校有 A_3^3 种排法,

根据分步乘法计数原理得不同的选派方案有 $C_3^1 \times \frac{C_4^2 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} \times$

$$A_3^3 = 108 \text{ 种};$$

(2)从 C, D, E 三人中选 2 人去蒙中,有 C_3^2 种选法,剩下 3 人安排到其余三所学校,有 A_3^3 种排法,根据分步乘法计数原理得不同的选派方案有 $C_3^2 A_3^3 = 18$ 种.

综上可得,共有 $108+18=126$ 种不同的选派方案.

13.27 【解析】考虑出现子序列 ABA 时,可能出现的位置有 4 个,把依次对应的序列放入集合 $A_1, A_2, A_3, A_4 (ABA \times \times \times, \times ABA \times \times, \times \times ABA \times, \times \times \times ABA)$ 中,记 $|A_i|$ 为集合 A_i 中元素的个数,则 $|A_i| = 2^3 = 8 (i=1, 2, 3, 4)$.

再考虑重复的序列, $|A_i \cap A_{i+1}| = 0 (i=1, 2, 3), |A_i \cap A_{i+2}| = 2 (i=1, 2), |A_1 \cap A_4| = 1$, 任意多于 2 个集合的交集均为空集. 所以含有连续子序列 ABA 的序列有 $4 \times 8 - 2 \times 2 - 1 = 27$ 个.

14. 【解】(1)先选后排,5 人可以是 2 女 3 男,也可以是 1 女 4 男,

所以先选有 $C_5^3 C_3^2 + C_5^4 C_1^1 = 45$ (种)选法,后排有 $A_5^5 = 120$ (种)方法,

所以共有不同的安排方法 $45 \times 120 = 5\,400$ (种).

(2)先在剩余的 7 人中选出 4 人,有 $C_7^4 = 35$ (种)选法,然后排列,有 $A_4^4 = 24$ (种)方法,根据分步乘法计数原理可得共有 $35 \times 24 = 840$ (种)安排方法.

(3)第一步,先安排不担任语文科代表的男生乙,有 $C_4^1 = 4$ (种)方法;

第二步,从剩余的 7 人中选出 4 人,有 $C_7^4 = 35$ (种)选法;

第三步,选出的 4 人排列,有 $A_4^4 = 24$ (种)方法.

根据分步乘法计数原理,共有安排方法 $4 \times 35 \times 24 = 3\,360$ (种).

刷素养

15.41 【解析】设 $f(1) = m$, 则 $f(m) = 1, f(f(m)) = f(1) = m = 1$.

即 $f(1) = 1$ 恒成立,考虑 $f(2), f(3), f(4), f(5)$ 中 1 的

个数.

(1)有 4 个只有 1 种;(2)有 3 个有 $C_4^3 \cdot 3 = 12$ 种;(3)有 2 个有 $C_4^2 \cdot 2 \cdot 2 = 24$ 种;(4)有 1 个有 $C_4^1 = 4$ 种,共 41 种.

16.42 【解析】若所选元素为三个奇数,则共有 $C_5^3 = 10$ (个)三元子集,

同时选 3, 9 的三元子集有 $\{1, 3, 9\}, \{5, 3, 9\}, \{7, 3, 9\}$, 不符合题意,从而符合题意的三元子集有 $10-3=7$ (个);

若所选的元素为两个奇数,一个偶数,则共有 $C_5^2 C_5^1 = 50$ (个)

→ 避坑: 奇数与奇数之间,奇数与偶数之间存在不互质的情况,要分别讨论,去掉不符合要求的情况

三元子集,

若所选的奇数为 3, 9, 此时有 5 个三元子集不符合题意;

若所选的奇数为 3, 偶数为 6, 另一个奇数为 1, 5, 7 时, 此时有 3 个三元子集不符合题意;

若所选的奇数为 9, 偶数为 6, 另一个奇数为 1, 5, 7 时, 此时有 3 个三元子集不符合题意;

若所选的奇数为 5, 偶数为 10, 另一个奇数为 1, 3, 7, 9 时, 此时有 4 个三元子集不符合题意.

综上,共有 $7+(50-5-3-3-4)=42$ (个)三元子集符合题意.

17. 【解】 $X>Y$ 可分为两类: X 中有 9 时 $X>Y$ 和 X 中无 9 时 $X>Y$.

由题意可得 $P(X \text{ 中有 } 9) = \frac{C_8^2}{C_9^3} = \frac{1}{3}, P(X \text{ 中无 } 9) = 1 -$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

若 X 中含 9, 则 $X>Y$; 若 X 中无 9 的情况下: $P(X=Y) =$

$$\frac{C_8^3}{C_8^3 \cdot C_8^3} = \frac{1}{56},$$

此时 $P(X>Y) = P(X<Y) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{56} \right) = \frac{55}{112}$, 所以 $P(X>Y) =$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{55}{112} = \frac{37}{56}.$$

专题 1 排列组合中的重点、难点问题

刷难关

1. ACD 【解析】A 选项,由排列知识可得共有 $A_5^5 = 120$ (种)排列方式, A 正确;

B 选项,两个“将”捆绑,有 $A_2^2 = 2$ (种)情况,再和剩余的 3 个棋子进行全排列,共有 $2A_4^4 = 48$ (种)排列方式, B 错误;

C 选项,两个“将”不相邻,先将剩余 3 个棋子进行全排列,共有 4 个空,再将两个“将”插空,故共有 $A_3^3 A_4^2 = 72$ (种)排列方式, C 正确;

D 选项,将 2 个黑色的棋子进行全排列,共有 3 个空,再将 3 个红色的棋子进行插空,则有 $A_2^2 A_3^3 = 12$ (种)排列方式, D 正确.

故选 ACD.

规律方法 (1)元素相邻的排列问题——“捆绑法”;

(2)元素不相邻的排列问题——“插空法”;

(3)元素有顺序限制的排列问题——“除序法”;

(4)含有“含”“不含”“至多”“至少”等词语的排列组合问题——间接法.

2.120 【解析】根据题意,由于活动“法律援助”必须排在前三位,分 3 种情况讨论:

①“法律援助”排在第一位,活动“便民服务”和“教育服务”必须排在一起,

则活动“便民服务”和“教育服务”相邻的位置有 4 个,考虑两者的顺序,有 2 种情况,

将剩下的 3 个活动全排列,安排在其他三个位置,有 $A_3^3 = 6$ 种安排方法,

则此时有 $4 \times 2 \times 6 = 48$ 种安排方案;

②“法律援助”排在第二位,活动“便民服务”和“教育服务”必须排在一起,

则活动“便民服务”和“教育服务”相邻的位置有 3 个,考虑两者的顺序,有 2 种情况,

将剩下的 3 个活动全排列,安排在其他三个位置,有 $A_3^3 = 6$ 种安排方法,

则此时有 $3 \times 2 \times 6 = 36$ 种安排方案;

③“法律援助”排在第三位,活动“便民服务”和“教育服务”必须排在一起,

则活动“便民服务”和“教育服务”相邻的位置有 3 个,考虑

高中必刷题 数学

两者的顺序,有2种情况,

将剩下的3个活动全排列,安排在其他三个位置,有 $A_3^3=6$ 种安排方法,

则此时有 $3 \times 2 \times 6 = 36$ 种安排方案.

故符合题意的安排方案有 $48 + 36 + 36 = 120$ 种.

- 3. D** 【解析】已知①号杯子至少放一个小球,②号杯子至少放两个小球,③号杯子至少放三个小球.我们先在②号杯子中放一个小球,在③号杯子中放两个小球,

☞悟:这样后续使用隔板法时,就能满足每个杯子的最少放置要求

此时总共放了 $1+2=3$ 个小球,还剩下 $13-3=10$ 个小球.

现在要把这十个相同的小球放入①②③号三个杯子中,且每个杯子至少放一个小球,这就相当于在十个小球形成的9个间隔中插入2个隔板,将其分成3组,每组对应一个杯子放入的小球数,则总共有 $C_9^2=36$ (种)方法.故选D.

- 4. 40** 【解析】先将甲、乙、丙三辆不同的车排列,使得甲车在乙、丙两车之间,有2种排法,再将剩余的7个空车位分为4组,分别排在甲、乙、丙三辆车形成的四个空中,有1,1,1,4; 1,1,2,3; 1,2,2,2三类分组方法,则不同的方法共有 $C_4^1 + C_4^2 A_2^2 + C_4^3 = 20$ (种).由分步乘法计数原理得不同的停放方式

☞悟:求解时只需要考虑不同元素的排列,不需要考虑相同元素的排列

共有 $2 \times 20 = 40$ (种).

规律方法 “分组分配”类型,要讨论“用了几个位置放了几个物品”,每组中是否有限制条件,同一个位置放多个物品时“只选不排”,注意分类时不要遗漏.分组时分清是相同元素还是不同元素,两类题型分组的方式不同.

- 5. 88** 【解析】按照甲、乙是否在“传奇”主会场划分情况:

①甲、乙有且只有一人在主会场,需要在除甲、乙外的四人中选两人去主会场,余下的三人去“传承”“扬辉”两个分会场,有 $C_2^1 C_4^2 C_3^1 A_2^2 = 72$ (种)不同的安排方案;

②甲、乙都不在主会场,从甲、乙外的四人中选三人去主会场,再将甲、乙安排去“传承”“扬辉”两个分会场,且一人去一个分会场,

剩下一人可以去“传承”或“扬辉”两个分会场,有 $C_4^3 A_2^2 C_2^1 = 16$ (种)不同的安排方案.

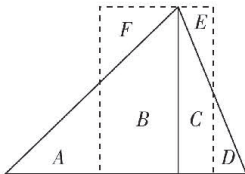
根据分类加法计数原理,共有 $72 + 16 = 88$ (种)不同的安排方案.

- 6. B** 【解析】如图,设图中的六个区域分别为A,B,C,D,E,F,

按照A,E是否同色分两类:

①A,E不同色,先给B,C涂色,有 A_2^2 种,再根据A,E是否用第三种颜色分两种情况,

A,E不用第三种颜色,即A用C的颜色,E用B的颜色,D有 C_2^1 种,F有 C_2^1 种,则有 $C_1^1 \cdot C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1$ 种涂法;A,E用第三种颜色,即A用第三种颜色,E用B的颜色,D有 C_2^1 种,F有 C_2^1 种或E用第三种颜色,A用C的颜色,则有 $2 \times C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1$ 种涂法,



所以A,E不同色的涂法有 $A_2^2(C_1^1 \cdot C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1 + 2 \times C_1^1 \cdot C_2^1 \cdot C_2^1) = 72$ (种).

②A,E同色,先给B,C涂色,有 A_2^2 种,则A,E只能用第三种颜色,D有 C_2^1 种,F有 C_2^1 种,

所以A,E同色的涂法有 $A_2^2(1 \times C_2^1 \times C_2^1) = 24$ (种).

综上,不同的涂色方法有 $72 + 24 = 96$ (种).故选B.

- 7. 72** 【解析】①使用三种形状的风铃,只能EF同,AC同,BD同,此时共有 $C_4^3 \cdot A_3^3 = 24$ (种)挂法;

②使用四种形状的风铃,此时有两种情况:

AC同,BD不同,直接将四种风铃挂到A,B,D,E四个点上,全排列有 $A_4^4 = 24$ (种);

AC不同,BD同,直接将四种风铃挂到A,B,C,E四个点上,全排列有 $A_4^4 = 24$ (种).

综上,共有 $24 + 24 + 24 = 72$ (种)挂法.

- 8. D** 【解析】将被射击的8个气球排成一列,同一串气球按由下往上的顺序放入,

☞黑板:将三串球的击破问题转化为一列球的定序问题是解题关键

相当于8个位置,取4个位置将中间一串气球按由下往上的顺序放入,有 C_8^4 种方法,

再从余下4个位置中取3个将左边一串的3个气球按由下往上的顺序放入,有 C_4^3 种方法,

最后将右边的一个气球放入最后一个位置,有 C_1^1 种方法,由分步乘法计数原理得击破气球的不同顺序的种数为 $C_8^4 C_4^3 C_1^1 = 280$.故选D.

快解 同一串气球必须按从下到上的顺序击破,相当于8个不同的气球进行排列,同一串上的气球按照固定的顺序

排列,所以击破气球的不同顺序的种数为 $\frac{A_8^8}{A_3^3 A_4^4} = 280$.

- 9. 110** 【解析】依题意,5次“变化”中,垒放在左侧的3个、右侧的2个正方体都按由上至下的次序消失,不发生“坍塌”,

因此不发生“坍塌”的“操作”次数为 $\frac{A_5^5}{A_3^3 A_2^2}$,

所以所有的“操作”中,发生过“坍塌”的“操作”次数为 $A_5^5 - \frac{A_5^5}{A_3^3 A_2^2} = 110$.

- 10. BCD** 【解析】由题图可知,从A地出发到B地的最短路径共包含7步,

其中3步向上,4步向右,且前3步中至少有1步向上,

☞黑板:分前3步中有1步向上、2步向上、3步向上三种情况

则不同的路径共有 $C_3^1 C_4^3 + C_3^2 C_4^2 + C_3^3 = 31$ (条),故A错误,B正确;

若甲途经C地,则不同的路径共有 $C_3^1 C_4^2 = 18$ (条),故C正确;

若甲途经C地和D地,则不同的路径共有 $C_3^1 C_3^1 = 9$ (条),故D正确.

故选BCD.

- 11. C** 【解析】A项,甲从M到达N处,需要走6步,其中有3步向上走,3步向右走,则甲从M到达N处的方法有 $C_6^3 = 20$ 种,A项错误.

B项,甲经过A₃到达N处,可分为两步:第一步,甲从M经

过 A_3 需要走 3 步,其中 2 步向右走,1 步向上走,方法数为 C_3^1 种;

第二步,甲从 A_3 到 N 处需要走 3 步,其中 2 步向上走,1 步向右走,方法数为 C_3^1 种,

故甲经过 A_3 到达 N 处的方法数为 $C_3^1 \cdot C_3^1 = 9$ 种, **B 项错误**.

C 项,甲经过 A_2 的方法数为 $C_3^1 \cdot C_3^1 = 9$ 种,乙经过 A_2 的方法数也为 $C_3^1 \cdot C_3^1 = 9$ 种,

所以甲、乙两人在 A_2 处相遇的方法数为 $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 = 81$ 种,

故甲、乙两人在 A_2 处相遇的概率为 $\frac{81}{C_6^3 C_6^3} = \frac{81}{400}$, **C 项正确**.

D 项,甲、乙两人沿最短路径行走,只可能在 A_1, A_2, A_3, A_4 处相遇,

若甲、乙两人在 A_1 处相遇,甲经过 A_1 处,则甲的前 3 步必须向上走,乙经过 A_1 处,

则乙的前 3 步必须向左走,两人在 A_1 处相遇的走法种数为 1 种;

若甲、乙两人在 A_2 处相遇,由 C 项可知走法种数为 81 种;

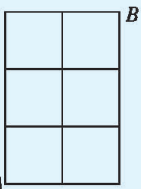
若甲、乙两人在 A_3 处相遇,甲到 A_3 处,前 3 步有 2 步向右走,后 3 步只有 1 步向右走,乙到 A_3 处,前 3 步有 2 步向下走,后 3 步只有 1 步向下走,所以两人在 A_3 处相遇的走法种数为 $C_3^2 C_3^1 C_3^2 C_3^1 = 81$ 种;

若甲、乙两人在 A_4 处相遇,甲经过 A_4 处,则甲的前 3 步必须向右走,乙经过 A_4 处,则乙的前 3 步必须向下走,两人在 A_4 处相遇的走法种数为 1 种,

故甲、乙两人相遇的概率为 $\frac{1+81+81+1}{C_6^3 C_6^3} = \frac{41}{100}$, **D 项错误**. 故选 C.

规律方法 分解与合成策略是复杂的排列组合问题最基本的解题策略之一,把一个复杂问题分解成几个小问题逐一解决,然后依据分解后的结构,用分类加法计数原理和分步乘法计数原理将问题合成,从而得到问题的答案.

“走路线”模型,一般情况下,可以借助“数字化法”,把路线转化为相同数字来进行排列.比如,向右,定为数字 1,向上,定为数字 2,如图,从 A 到 B 的最短路径的走法,只向右和向上,那么向右走 2 步,向上走 3 步,可以理解为数字 1,1,2,2,2 的全排列,那么相当于只选不排,即五个位置中先放三个 2,剩下的两个位置放 1,共有 C_5^3 种放法,即有 C_5^3 种走法.



12. D 【解析】用 6 根火柴表示数字,所有情况如下:

①1 根火柴和 5 根火柴:1 根火柴可表示的数字为 1;5 根火柴可表示的数字为 8,空位表示 0,则能表示的数共有 4 个 (108, 180, 801, 810).

②2 根火柴和 4 根火柴:2 根火柴可表示的数字为 2,5;4 根火柴可表示的数字为 7,空位表示 0,则能表示的数有 $C_2^1 \times 4 = 8$ (个).

③3 根火柴和 3 根火柴:3 根火柴可表示的数字有 3,4,6,9,空位表示 0,则能表示的数分为 2 类:除 0 外的两个数字相同,可表示的数有 $C_2^1 \times C_4^1 = 8$ (个);除 0 外的两个数字不同,则有 $C_4^2 \times 4 = 24$ (个),所以共有 $8+24=32$ (个).

④1 根火柴、1 根火柴和 4 根火柴:即为 1,1,7 组成的数,共有 3 个 (117, 171, 711).

⑤1 根火柴、2 根火柴和 3 根火柴:即由 1,2 或 5 中的一个数字,3,4,6 或 9 中的一个数字组成的三位数,共有 $C_2^1 C_4^1 A_3^3 = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$ (个).

⑥2 根火柴、2 根火柴、2 根火柴:即由 2 或 5 组成的三位数,分为 2 类:三个数字都相同,共有 2 个 (222, 555);三个数字中的两个数字相同,则有 $C_2^1 \times 3 = 6$ (个),共有 $2+6=8$ (个).

综上所述,可组成的三位数共有 $4+8+32+3+48+8=103$ (个). 故选 D.

规律方法 处理复杂的排列组合问题时,可以把问题转化成几个简单的问题,通过解决这几个简单的问题,找到解题方法,进一步解决原来的问题.一些不易理解的排列组合题,如果能转化为非常熟悉的模型,如占位填空模型、排队模型、装盒模型等,可使问题迎刃而解.

13. 1 440 336 【解析】若 B 型钢板均不相邻,先将 A 型钢板任意排列,然后将 B 型钢板插入 A 型钢板形成的 5 个空位中的 3 个空位,

由插空法可知, B 型钢板均不相邻的放法种数为 $A_4^4 A_5^3 = 24 \times 60 = 1\,440$.

若乙号钢板上方的 A 型钢板的编号之和与其下方的 A 型钢板的编号之和相等,

则乙号钢板上方的 A 型钢板为 1,4 号或 2,3 号,此时不同的放法种数为 $A_2^2 A_2^2 A_2^2 = 8$;

然后再放置甲、丙号钢板,分两种情况讨论:

若甲、丙号钢板相邻,则将甲、丙号钢板捆绑,插入其余 5 块钢板形成的 6 个空位中的 1 个空位,此时不同的放法种数为 $A_2^2 C_6^1 = 12$;

若甲、丙号钢板不相邻,则将甲、丙号钢板插入其余 5 块钢板形成的 6 个空位中的 2 个空位中,此时不同的放法种数为 $A_6^2 = 30$.

综上所述,乙号钢板上方的 A 型钢板的编号之和与其下方的 A 型钢板的编号之和相等的放法种数为 $8 \times (12+30) = 336$.

3.3 二项式定理与杨辉三角

课时 1 二项式定理

刷基础

1. C 【解析】因为 $(a+b)^n (n \in \mathbb{N}_+)$ 的展开式共有 $n+1$ 项,而 $(x+2)^n$ 的展开式共有 12 项,所以 $n=11$, 故选 C.

2. A 【解析】 $S = (x-1)^4 + 4(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 4(x-1) + 1 = C_4^0(x-1)^4 + C_4^1(x-1)^3 + C_4^2(x-1)^2 + C_4^3(x-1) + C_4^4 = [(x-1) + 1]^4 = x^4$, 故选 A.

3. C 【解析】由题意得展开式的第四项为 $C_6^3 (2\sqrt{x})^3 \cdot$