

## 高中必刷题 数学

以上两式相加可得  $82 = 2(a_4 + a_2 + a_0)$ ,

所以  $a_0 + a_2 + a_4 = 41$ , 故选 B.

**7. -20** 【解析】 $(x-1)^6$  的展开式的通项为  $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \cdot (-1)^r$  (其中  $0 \leq r \leq 6, r \in \mathbb{N}$ ),

令  $6-r=3$ , 得  $r=3$ , 故  $x^3$  的系数为  $C_6^3 \cdot (-1)^3 = -20$ .

**特别注意** 此题容易漏掉负号, 不要忘记  $(-1)^3 = -1$ .

**8. 5** 【解析】二项式  $\left(\frac{1}{3} + x\right)^{10}$  的展开式的通项为  $T_{k+1} =$

$$C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} x^k. \text{ 由 } \begin{cases} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} > C_{10}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k}, \\ C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} > C_{10}^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-k}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{29}{4} < k < \frac{33}{4}.$$

又  $k \in \mathbb{N}_+$ , 所以  $k=8$ .

所以所求系数的最大值为  $C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5$ .

**多种解法** 展开式中系数最大的项一定在下面的 5 项中:

$$C_{10}^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 x^5, C_{10}^6 \left(\frac{1}{3}\right)^4 x^6, C_{10}^7 \left(\frac{1}{3}\right)^3 x^7, C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 x^8, C_{10}^9 \left(\frac{1}{3}\right)^1 x^9, \text{ 计算可得, 所求系数的最大值为 } C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5.$$

**9. 20** 【解析】 $\left(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2}\right)^6$  的展开式的通项为  $T_{r+1} =$

$$C_6^r \left(\frac{x^2}{3}\right)^{6-r} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^r = C_6^r 3^{2r-6} x^{12-4r}, \text{ 令 } 12-4r=0, \text{ 得 } r=3, \text{ 故常数项为 } C_6^3 \times 3^0 = 20.$$

**10. 15** 【解析】 $(1-2x)^4 = a_0 + a_1(-2x) + a_2(-2x)^2 + a_3(-2x)^3 + a_4(-2x)^4$ , 结合  $(1-2x)^4$  的展开式可知  $a_0 = C_4^0 = 1$ ,  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$ .

**巧思:**  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2^4 - 1 = 15$

**多种解法** (赋值法) 令  $x=0$ , 可得  $a_0=1$ ;

$$\text{令 } x=-\frac{1}{2}, \text{ 可得 } a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \left[1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^4 = 16, \\ \text{故 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16 - a_0 = 15.$$

## 刷原创

**1. D** 【解析】根据题意, 含  $xy^3$  的项为  $C_5^1 x C_4^3 (2y)^3 (-3) = -480xy^3$ , 所以  $xy^3$  的系数是  $-480$ . 故选 D.

**2. A** 【解析】由题意可得,  $\left(1 + \frac{3x}{y}\right)(x-2y)^8 = (x-2y)^8 +$

$$\frac{3x}{y}(x-2y)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{8-k} (-2y)^k + \frac{3x}{y} \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{8-k} (-2y)^k, \text{ 故含 } x^3 y^5 \text{ 的项为 } [(-2)^5 C_8^5 + 3 \times (-2)^6 C_8^6] x^3 y^5, \text{ 即 } 3584x^3 y^5, \text{ 所以 } x^3 y^5 \text{ 的系数为 } 3584. \text{ 故选 A.}$$

**3. B** 【解析】由题意得, 这 7 人中有 2 人既会韩语也会日语, 3

**巧思:** 可归类于会韩语, 也可归类于会日语, 故可从此信息入手进行分类讨论

人只会韩语, 2 人只会日语.

(1) 当不派既会韩语也会日语的学生时, 有  $C_3^2 \times C_2^1 = 6$  (种) 安排方法;

(2) 当派 1 名既会韩语也会日语的学生时, 有  $C_2^1 (C_3^2 C_2^1 + C_3^1) = 18$  (种) 安排方法;

(3) 当派 2 名既会韩语也会日语的学生时, 有  $C_2^2 + C_3^1 \times C_2^1 = 2 + 6 = 8$  (种) 安排方法.

综上, 共有  $6 + 18 + 8 = 32$  (种) 不同的安排方法. 故选 B.

**4. C** 【解析】先将“福”字灯、“寿”字灯排好, 排列数为  $\frac{A_5^5}{A_2^2 A_3^3} =$

10, 形成 6 个空隙, 选 2 个空隙各放 1 个“禄”字灯, 有  $C_6^2 = 15$  种方法, 则所有“禄”字灯不相邻的方法数为  $10 \times 15 = 150$ .

当三个“福”字灯相邻时, 先排“福”字灯、“寿”字灯, 一共有

$\frac{A_3^3}{A_2^2} = 3$  种方案, 形成了 4 个空隙, 选 2 个插入“禄”字灯, 有

$C_4^2 = 6$  种方法, 此时所有“禄”字灯不相邻的方法数为  $3 \times 6 = 18$ . 所以不同的悬挂顺序的种数为  $150 - 18 = 132$ . 故选 C.

## 第四章 概率与统计

### 4.1 条件概率与事件的独立性

#### 4.1.1 条件概率

#### 刷基础

**1. B** 【解析】对于 A, 由  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$  及  $0 < P(A) \leq 1$ , 可得

$$P(B|A) \geq P(AB), \text{ A 错误};$$

对于 B,  $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$ , 即  $P(AB) = P(B)$ , 当事件 B 包含于事件 A 时成立, B 正确;

对于 C, 当 B 为不可能事件时,  $P(B|A) = 0$ , C 错误;

对于 D,  $P(A|A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ , 故 D 错误. 故选 B.

**2. D** 【解析】因为  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3}{4}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$ , 所以

$$P(AB) = \frac{3}{16}, \text{ 又 } P(A) = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{9}{16}. \text{ 故}$$

**敲黑板:** 注意  $P(A|B)$  与  $P(B|A)$  的区别, 从公式上记忆, 谁在竖线的后边谁做分母

选 D.

**3.  $\frac{5}{6}$**  【解析】因为  $P(A) = P(B)$ ,  $P(AB) = \frac{5}{8}$ ,  $P(A+B) =$

$$P(A) + P(B) - P(AB) = 2P(B) - \frac{5}{8} = \frac{7}{8}, \text{ 所以 } P(B) = \frac{3}{4}, \text{ 由}$$

$$\text{条件概率公式可得 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{6}.$$

**4. D** 【解析】设“某一天的空气质量为优良”为事件 A, “随后一天的空气质量为优良”为事件 B, 则  $P(A) = 0.75$ ,  $P(AB) = 0.6$ , 则已知某天的空气质量为优良, 随后一天的空气质量为

优良的概率是  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0.6}{0.75} = 0.8$ . 故选 D.

**规律方法** 用定义法求条件概率  $P(B|A)$  的步骤

- (1) 分析题意, 弄清概率模型;
- (2) 计算  $P(A), P(AB)$ ;
- (3) 代入公式  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$  求  $P(B|A)$ .

**5. A** 【解析】事件  $AB$  为“4 名同学中恰有 2 名同学所报项目相同且只有甲同学一人报关怀老人项目”.

$$P(A) = \frac{C_4^2 A_3^3}{3^4} = \frac{4}{9}, P(AB) = \frac{C_3^2 A_2^2}{3^4} = \frac{2}{27},$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{27}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{6}. \text{ 故选 A.}$$

**多种解法** 事件  $A$  “恰有 2 名同学所报项目相同” 包含的样

本点个数为  $n(A) = C_4^2 A_3^3 = 36$ , 事件  $AB$  “4 名同学中恰有 2 名同学所报项目相同且只有甲同学一人报关怀老人项目” 包含的样本点个数为  $n(AB) = C_3^2 A_2^2 = 6$ , 所以  $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .

**规律方法** 求解条件概率的两种方法

- (1) 直接利用条件概率公式  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$  计算;
- (2) 缩小样本空间法, 利用公式  $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)}$  计算.

**6. 【解】**(1) 记“男生甲被选中”为事件  $M$ ,  $P(M) = \frac{C_5^1}{C_6^2} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ .

(2) 记“男生甲被选中”为事件  $M$ , “女生乙被选中”为事件  $N$ , 则  $P(MN) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$ ,

由(1)知  $P(M) = \frac{1}{3}$ , 故  $P(N|M) = \frac{P(MN)}{P(M)} = \frac{1}{5}$ .

(3) 记“被选中的两人为一男一女”为事件  $S$ , “女生乙被选中”为事件  $N$ , 则  $P(S) = \frac{C_4^1 C_1^1}{C_6^2} = \frac{8}{15}$ ,  $P(SN) = \frac{C_4^1 C_1^1}{C_6^2} = \frac{4}{15}$ , 故

$$P(N|S) = \frac{P(SN)}{P(S)} = \frac{1}{2}.$$

→ **巧思:** (2)(3) 问也可以利用缩小样本空间法求条件概率

**刷易错**

★ **易错点** 对条件概率概念理解不透致错

**7. C** 【解析】设事件  $A$  为第 1 次抽到螺口灯泡, 事件  $B$  为第 2 次抽到卡口灯泡, 则在第 1 次抽到螺口灯泡的条件下, 第 2

$$\text{次抽到卡口灯泡的概率 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{3 \times 9}{12 \times 11}}{\frac{3}{12}} = \frac{9}{11}. \text{ 故}$$

选 C.

**易错警示** 若对条件概率理解不透彻, 本题容易误当成古典概型概率去求解.

**刷提升**

**1. B** 【解析】因为  $A \subseteq B$ ,  $P(A) = 0.3$ , 所以  $P(AB) = 0.3$ , 所以

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.6} = \frac{1}{2}. \text{ 故选 B.}$$

**2. C** 【解析】设事件  $A =$  “甲命中目标”,  $B =$  “至少命中一次”, 则  $P(B) = 1 - (1 - 0.6) \times (1 - 0.5) = 0.8$ ,  $P(AB) = P(A) = 0.6$ , 则已知目标至少被命中 1 次, 甲命中目标的概率为  $P(A|$

$$B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0.6}{0.8} = 0.75. \text{ 故选 C.}$$

**3. B** 【解析】事件  $A$  发生时,  $n$  的值可能为 1, 2, 3, 8, 9; 事件  $AB$  发生时,  $n$  的值可能为 1, 2, 3, 则  $P(A) = \frac{5}{6}$ ,  $P(AB) = \frac{3}{6} =$

$$\frac{1}{2}, \text{ 所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{3}{5}. \text{ 故选 B.}$$

**4. D** 【解析】设该家族某位成员出现  $A$  性状为  $A$  事件, 出现  $B$  性状为  $B$  事件,

$$\text{则有 } P(A) = \frac{2}{15}, P(B) = \frac{4}{15}, P(\overline{A}\overline{B}) = \frac{7}{10}, \text{ 所以 } P(A \cup B) = 1 -$$

$$P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10},$$

$$\text{又 } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$

$$\text{所以 } P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{2}{15} + \frac{4}{15} - \frac{3}{10} = \frac{1}{10},$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{15}} = \frac{3}{4}. \text{ 故选 D.}$$

**5. A** 【解析】第一步, 确定 4 名裁判中既有男生也有女生, 且女生担任主裁判的选法数:

先从 4 名女生中选出一名担任主裁判, 有 4 种选法; 再从剩下 12 人中选出 3 人分别担任不同的助理裁判以及第四裁判, 注意到 4 名裁判中既有男生也有女生, 所以有  $(A_{12}^3 - A_3^3)$

**点悟:** 已确定主裁判是女生, 故只需排除裁判中只有女生的情况

种选法, 故 4 名裁判中既有男生也有女生, 且女生担任主裁判的选法数为  $4(A_{12}^3 - A_3^3)$ .

第二步, 确定 4 名裁判中既有男生也有女生, 且女生担任主裁判, 第四裁判是男生的选法数:

先从 4 名女生中选出一名担任主裁判, 有 4 种选法; 再从 9 名男生中选出一名担任第四裁判, 有 9 种选法; 最后从剩下 11 人中选出 2 人分别担任不同的助理裁判, 有  $A_{11}^2$  种选法,

故 4 名裁判中既有男生也有女生, 且女生担任主裁判, 第四裁判是男生的选法数为  $4 \times 9 A_{11}^2$ ,

因此, 4 名裁判中既要有男生, 也要有女生, 且在女生担任主裁判的条件下, 第四裁判是男生的概率为  $\frac{4 \times 9 A_{11}^2}{4(A_{12}^3 - A_3^3)} =$

$$\frac{9 \times 11 \times 10}{12 \times 11 \times 10 - 6} = \frac{990}{1314} = \frac{55}{73}. \text{ 故选 A.}$$

**6. BC** 【解析】将一枚质地均匀的骰子抛掷两次得到的点数共有  $6 \times 6 = 36$  种情况.

由函数  $f(x) = x^2 + ax + b$  的值域为  $[1, +\infty)$ ,



$$\text{得 } f(x)_{\min} = f\left(-\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 1, \text{ 即 } b - \frac{a^2}{4} = 1,$$

满足  $b - \frac{a^2}{4} = 1$  的  $(a, b)$  有  $(2, 2), (4, 5)$ , 共 2 种情况,

$$\text{则 } P(A) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{17}{18}.$$

由函数  $g(x) = (x-a)(x+b) = x^2 + (b-a)x - ab$  为偶函数, 得  $a=b$ , 满足  $a=b$  的  $(a, b)$  有  $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ , 共 6 种情况, 则  $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ .

对于 A, 满足事件  $A, B$  同时发生的  $(a, b)$  有  $(2, 2)$ , 共 1 种情况, 则  $P(AB) = \frac{1}{36}$ , 故 A 错误;

对于 B, 事件  $A+B$  包含的  $(a, b)$  有  $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (4, 5)$ , 共 7 种情况, 因此  $P(A+B) = \frac{7}{36}$ , 故 B 正确;

$$\text{对于 C, } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{18}} = \frac{1}{2}, \text{ 故 C 正确;}$$

对于 D, 满足事件  $\bar{A}, B$  同时发生的  $(a, b)$  有  $(1, 1), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ , 共 5 种情况, 因此  $P(\bar{A}B) = \frac{5}{36}$ , 则

$$P(B|\bar{A}) = \frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{17}{18}} = \frac{5}{34}, \text{ 故 D 错误. 故选 BC.}$$

7. 【解】(1) 由题中频率分布直方图可估计该地区这种疾病患者的平均年龄  $\bar{x} = (5 \times 0.001 + 15 \times 0.002 + 25 \times 0.012 + 35 \times 0.017 + 45 \times 0.023 + 55 \times 0.020 + 65 \times 0.017 + 75 \times 0.006 + 85 \times 0.002) \times 10 = 47.9$  (岁).

(2) 由题中频率分布直方图可得该地区一位这种疾病患者的年龄位于区间  $[30, 60]$  的概率为  $(0.017 + 0.023 + 0.02) \times 10 = 0.6$ .

(3) 设  $B =$  “任选一人年龄位于区间  $[40, 50]$ ”,  $C =$  “从该地区中任选一人患这种疾病”,

则由已知得  $P(B) = 16\% = 0.16, P(C) = 1\% = 0.01, P(B|C) = 0.023 \times 10 = 0.23$ .

因为  $P(B|C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{P(BC)}{0.01} = 0.23$ , 所以  $P(BC) = 0.23 \times 0.01 = 0.0023$ ,

则由条件概率公式可得从该地区中任选一人, 若此人的年龄位于区间  $[40, 50]$ , 则此人患这种疾病的概率为  $P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{0.0023}{0.16} = 0.014375 \approx 0.0144$ .

#### 4.1.2 乘法公式与全概率公式

##### 刷基础

1.0.4 0.8 【解析】根据条件概率的公式可得,  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ , 所以  $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0.5 \times 0.8 = 0.4$ .

又  $A = (AB) \cup (A\bar{B})$ , 所以  $P(\bar{A}) = P(A) - P(AB) = 0.5 -$

$$0.4 = 0.1.$$

$$\text{又 } P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.4,$$

$$\text{所以 } P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B}) = 0.5 + 0.4 - 0.1 = 0.8.$$

2. 【解】设  $A_1 =$  “第一次患病心肌受损害”,  $A_2 =$  “第二次患病心肌受损害”, 则所求概率为  $P(\bar{A}_1 \bar{A}_2)$ .

$$\text{由题意可知 } P(A_1) = 0.3, P(A_2 | \bar{A}_1) = 0.6.$$

$$\text{又 } P(\bar{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0.7, P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) = 1 - P(A_2 | \bar{A}_1) = 0.4,$$

$$\text{所以 } P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1) = 0.7 \times 0.4 = 0.28.$$

3. C 【解析】依题意得, 这位教授迟到的概率为  $0.2 \times 0.5 + 0.4 \times 0.2 + 0.4 \times 0.1 = 0.22$ . 故选 C.

**链接教材** 本题是教材第 63 页习题 4-1A 组第 6 题的变式, 考查全概率公式的应用. 全概率公式的适用范围及步骤: 所研究的事件试验前提或前一步骤试验有多种可能, 在这多种可能中均有所研究的事件发生, 这时要求所研究事件的概率就可用全概率公式. 运用全概率公式的一般步骤如下: (1) 求出样本空间  $\Omega$  的一个划分  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ; (2) 求  $P(A_i) (i=1, 2, \dots, n)$ ; (3) 求  $P(B|A_i) (i=1, 2, \dots, n)$ ; (4) 求目标事件的概率  $P(B)$ . 可以形象地把全概率公式看成“由原因推结果”.

4. A 【解析】设“小胡从这 8 道题中任抽 1 道题作答时能答对”为事件 A, “抽到能答对的题”为事件 B, “抽到有思路的题”为事件 C, “抽到完全不会的题”为事件 D,

$$\text{则 } P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, P(D) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, P(A|B) = 1, P(A|C) = \frac{1}{2}, P(A|D) = \frac{1}{4},$$

$$\text{由全概率公式可得 } P(A) = P(B)P(A|B) + P(C)P(A|C) + P(D)P(A|D) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{11}{16}, \text{ 故选 A.}$$

5. D 【解析】由题图可知医用普通口罩、医用外科口罩、医用防护口罩的占比分别为 70%, 20%, 10%.

记事件  $A_1, A_2, A_3$  分别表示选到医用普通口罩、医用外科口罩、医用防护口罩, 则  $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , 且  $A_1, A_2, A_3$  两两互斥, 所以  $P(A_1) = 0.7, P(A_2) = 0.2, P(A_3) = 0.1$ .

又三种产品中绑带式口罩的比例分别为 90%, 50%, 40%, 记事件 B 为“选到绑带式口罩”, 则  $P(B|A_1) = 0.9, P(B|A_2) = 0.5, P(B|A_3) = 0.4$ ,

所以由全概率公式可得, 选到绑带式口罩的概率为  $P(B) =$

**敲黑板:** 由因导果, 用全概率公式求解

$$0.7 \times 0.9 + 0.2 \times 0.5 + 0.1 \times 0.4 = 0.77. \text{ 故选 D.}$$

6. D 【解析】记事件  $B$ : 子三代中基因型为 DD, 记事件  $A_1$ : 子二代中选择的 2 株豌豆的基因型是 Dd, Dd, 记事件  $A_2$ : 子二代中选择的 2 株豌豆的基因型是 DD, DD, 记事件  $A_3$ : 子二代中选择的 2 株豌豆的基因型是 DD, Dd,

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, P(A_2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}, P(A_3) = 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

在子二代中任取 2 株豌豆作为父本母本杂交, 分以下三种情况讨论:

①若选择的是 Dd, Dd, 则子三代中基因型为 DD 的概率为

$$P(B|A_1) = \frac{1}{4};$$

②若选择的是 DD, DD, 则子三代中基因型为 DD 的概率为  $P(B|A_2) = 1$ ;

③若选择的是 DD, Dd, 则子三代中基因型为 DD 的概率为  $P(B|A_3) = \frac{1}{2}$ .

综上所述,  $P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times 1 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ . 因此, 子三代中基因型为 DD 的概率是  $\frac{1}{4}$ . 故选 D.

**7. AC** 【解析】设 E, F, G 分别表示事件“使用 A 支付方式支付”“使用 B 支付方式支付”“使用 C 支付方式支付”, D 表示事件“出现支付问题”,

则  $P(E) = 0.2, P(F) = P(G) = 0.4, P(D) = 0.06$ ,

$$\text{所以 } P(D|E) = \frac{P(D)P(E|D)}{P(E)} = \frac{0.06 \times \frac{1}{3}}{0.2} = 0.1,$$

即使用 A 支付方式支付的用户中有 10% 的人遇到支付问题, **A 正确**;

$$\text{因为 } P(D|F) = \frac{P(D)P(F|D)}{P(F)} = \frac{0.06 \times \frac{1}{3}}{0.4} = 0.05, P(D|G) =$$

$$\frac{P(D)P(G|D)}{P(G)} = \frac{0.06 \times \frac{1}{3}}{0.4} = 0.05,$$

所以使用 B 支付方式支付遇到支付问题与使用 C 支付方式支付遇到支付问题的概率相同, **B 错误**;

因为使用 A 支付方式支付的用户中有 10% 的人遇到支付问题,

而使用 B, C 支付方式支付的用户中均只有 5% 的人遇到支付问题,

故减少 A 支付方式支付的人数有可能降低出现支付问题的概率, **D 错误**;

→ **悟**: A 支付方式中遇到支付问题的用户占比较大, 若考虑降低出现支付问题的概率, 先考虑降低 A 支付方式中遇到支付问题的用户占比

结合前面分析可知, 要将出现支付问题的概率降到 0.05, 可以将 A 支付通道关闭, **C 正确**.

故选 AC.

**8.  $\frac{9}{13}$**  【解析】设事件 H 表示“乘地铁回家”, 则事件  $\bar{H}$  表示“乘汽车回家”. 到家时间为 5:47, 属于区间 5:45~5:49, 设事件 T 表示“到家时间在 5:45~5:49”, 则所求概率为  $P(H|T)$ .

易知  $P(T|H) = 0.45, P(T|\bar{H}) = 0.20$ , 因为他是由抛硬币决定乘地铁回家还是乘汽车回家, 所以  $P(H) = P(\bar{H}) = 0.5$ .

$$\text{由贝叶斯公式得 } P(H|T) = \frac{P(HT)}{P(T)} = \frac{P(T|H)P(H)}{P(T|H)P(H) + P(T|\bar{H})P(\bar{H})} = \frac{0.45 \times 0.5}{0.45 \times 0.5 + 0.20 \times 0.5} = \frac{9}{13}.$$

**9. 【解】**(1) 记事件  $A_i$  表示第一次取到 i 号球,  $i=1, 2, 3, B_1$  表示第二次取到 1 号球,

依题意知  $A_1, A_2, A_3$  两两互斥, 且  $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ , 则  $P(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{4}, P(B_1|A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(B_1|A_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(B_1|A_3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ,

$$\text{由全概率公式, 得 } P(B_1) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B_1|A_i) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(2) 依题设知, 第二次的球取自与第一次取到的球上号码相同的口袋,

$$\text{则 } P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1)P(B_1|A_1)}{P(B_1)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

**归纳总结** 利用贝叶斯公式求概率的步骤

第一步: 利用全概率公式计算  $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i)$ ;

第二步: 计算  $P(A_iB) = P(A_i)P(B|A_i)$ ;

第三步: 代入  $P(A_i|B) = \frac{P(A_iB)}{P(B)}$  求解.

**10. ACD** 【解析】记事件 A 表示“水稻种子是变异种”, 事件 B 表示“水稻种子是长不大的”.

$P(B) = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A}) = 5\% \times 90\% + (1 - 5\%) \times (1 - 90\%) = 14\% > 10\%$ , 故 **A 正确**;

$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 5\% \times 90\% = 4.5\% > 1\%$ , 故 **B 错误**;

$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{4.5\%}{14\%} \approx 32\% > 30\%$ , 故 **C 正确**;

种子能长大的概率  $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 14\% = 86\%$ , 则

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}|\bar{A})}{P(\bar{B})} = \frac{5\% \times (1 - 90\%)}{86\%} \approx$$

0.6% > 0.3%, 故 **D 正确**. 故选 ACD.

$$11. \frac{1}{3} \quad \frac{3}{8}$$

**思路导引** 用  $A_i (i=1, 2, 3, 4)$  表示 i 号箱子有奖品, 用  $B_i (i=1, 2, 3, 4)$  表示主持人打开 i 号箱子, 根据条件求出  $P(B_2|A_1), P(B_2|A_2), P(B_2|A_3), P(B_2|A_4), P(A_i) (i=1, 2, 3, 4)$ , 利用全概率公式, 即可求解  $P(B_2)$ ; 再利用贝叶斯公式, 即可求解  $P(A_4|B_2)$ .

**【解析】**用  $A_i (i=1, 2, 3, 4)$  表示 i 号箱子有奖品, 用  $B_i (i=1, 2, 3, 4)$  表示主持人打开 i 号箱子.

由题知  $P(B_2|A_1) = \frac{1}{3}, P(B_2|A_2) = 0, P(B_2|A_3) = \frac{1}{2}$ ,

$$P(B_2|A_4) = \frac{1}{2},$$

→ **悟**: 甲选了 1 号箱子, 若奖品在 1 号箱子, 则主持人开其余 3 个箱子的可能性相等; 若奖品在 2 号箱子, 则主持人开 2 号箱子的可能性为 0; 若奖品在 3 号或 4 号箱子, 则主持人会在其余两个箱子中随机选 1 个打开



又因为  $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=P(A_4)=\frac{1}{4}$ ,

$$\text{所以 } P(B_2)=\sum_{i=1}^4 P(A_i)P(B_2|A_i)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3},$$

$$\text{故 } P(A_4|B_2)=\frac{P(A_4B_2)}{P(B_2)}=\frac{P(A_4)P(B_2|A_4)}{P(B_2)}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}.$$

### 刷易错

★易错点 不能正确选择全概率公式与贝叶斯公式而致错

12. C 【解析】记事件  $M$  表示“这人患了流感”，事件  $N_1, N_2, N_3$  分别表示“这人来自  $A, B, C$  地区”，

$$\text{由题意可知 } P(N_1)=\frac{5}{22}, P(N_2)=\frac{4}{11}, P(N_3)=\frac{9}{22},$$

$$P(M|N_1)=\frac{1}{20}, P(M|N_2)=\frac{3}{50}, P(M|N_3)=\frac{3}{100},$$

$$\text{则 } P(M)=P(N_1)P(M|N_1)+P(N_2)P(M|N_2)+P(N_3)P(M|N_3)=\frac{5}{22}\times\frac{1}{20}+\frac{4}{11}\times\frac{3}{50}+\frac{9}{22}\times\frac{3}{100}=\frac{1}{22},$$

$$\text{故 } P(N_2|M)=\frac{P(N_2)P(M|N_2)}{P(M)}=\frac{\frac{4}{11}\times\frac{3}{50}}{\frac{1}{22}}=\frac{4}{11}\times\frac{3}{50}\times 22=\frac{12}{25}=0.48. \text{ 故选 C.}$$

**易错警示** 若随机试验可以看成分两个阶段进行，且第一阶段的具体结果未知，则：(1) 如果要求的是第二阶段某一个结果发生的概率，那么用全概率公式；(2) 如果第二个阶段的某一个结果是已知的，要求的是此结果为第一阶段某一个结果所引起的概率，一般用贝叶斯公式。

### 4.1.3 独立性与条件概率的关系

#### 刷基础

1. C 【解析】由题得  $P(A)=1-P(\bar{A})=0.7=P(A|B)$ ，所以  $P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$ ，所以  $A, B$  相互独立。由  $P(A|B)=0.7$  可知事件  $A$  与  $B$  能同时发生，因此事件  $A$  与  $B$  不互斥，而  $P(B)$  未知，所以无法确定  $P(AB), P(B|A)$  的值。故选 C。

**链接教材** 此题对应教材第 61 页练习 A 第 3 题，因为  $P(A)=P(A|B)$ ，所以  $P(AB)=P(A)P(B)$ ，因此可判定事件  $A$  与  $B$  相互独立。

2. A 【解析】 $\because P(A|B)=0.6, P(B|A)=0.3$  且  $A, B$  相互独立， $\therefore P(A)=0.6, P(B)=0.3$ ， $\therefore P(AB)=P(A)P(B)=0.6\times 0.3=0.18$ 。故选 A。

3. ACD 【解析】对于 A，因为  $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$ ，所以  $P(AB)=P(A)P(B)$ ，故事件  $A$  与  $B$  相互独立，即充分性成立；若事件  $A$  与  $B$  相互独立，则  $P(AB)=P(A)P(B)$ ，于是  $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=P(B)$ ，即必要性成立，故 A 正确。

对于 B， $P(A)=P(AB)+P(\overline{AB})$ ， $P(\overline{AB})$  表示事件  $A$  发生而  $B$  不发生的概率，而  $P(\overline{A}\overline{B})$  表示事件  $A, B$  都不发生的概率，故 B 错误。

对于 C，因为  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)$ ，所以  $P(AB)=0$ ，又  $P(A)>0, P(B)>0$ ，故事件  $A$  与  $B$

互斥，即充分性成立；若事件  $A$  与  $B$  互斥，则  $P(AB)=0$ ，所以  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ，即必要性成立，故 C 正确。

对于 D，因为  $P(ABC)=P(AB)P(C|AB)=P(A)P(B|A)P(C|AB)$ ，故 D 正确。故选 ACD。

#### 名师点拨 判断事件是否相互独立的方法

- (1) 定义法：事件  $A, B$  相互独立  $\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$ 。
- (2) 由事件本身的性质直接判断两个事件发生是否相互影响。
- (3) 条件概率法：当  $P(A)>0$  时，可用  $P(B|A)=P(B)$  是否成立判断。

4. ABD 【解析】对于 A，因为  $P(A|B)+P(\bar{A}|B)=1$ ，且  $P(A|B)=2P(\bar{A}|B)$ ，所以  $P(A|B)=\frac{2}{3}$ ，故 A 正确；

对于 B，因为  $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{2}{3}$ ，所以  $P(AB)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}=P(A)\cdot P(B)$ ，所以事件  $A, B$  相互独立，故 B 正确；

对于 C，因为  $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{3}{4}$ ，故 C 错误；

对于 D，因为事件  $A, B$  相互独立，所以  $\frac{P(\bar{A}|\bar{B})}{P(\bar{A}|B)}\cdot\frac{P(\bar{B}|A)}{P(B|A)}=$

$$\frac{P(\bar{A})}{P(A)}\cdot\frac{P(\bar{B})}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}\times\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}>1, \text{ 故 D 正确。 故选 ABD.}$$

5. 0.7 【解析】因为事件  $A, B$  相互独立，所以事件  $B, \bar{A}$  相互独立，所以  $P(B|\bar{A})=P(B)=0.7$ 。

6. 【解】(1)  $P(A)=\frac{C_3^1}{C_{10}^1}=\frac{3}{10}$ ，

$$P(B)=\frac{3}{10}\times\frac{C_2^1}{C_9^1}+\frac{7}{10}\times\frac{C_3^1}{C_9^1}=\frac{27}{90}=\frac{3}{10},$$

$$P(AB)=\frac{3\times 2}{10\times 9}=\frac{1}{15},$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{15}\times\frac{10}{3}=\frac{2}{9}.$$

$$(2) \because P(A|B)=\frac{2}{9}\neq P(A),$$

$\therefore$  事件  $A$  与  $B$  不相互独立。

**多种解法** (2)  $\because P(AB)=\frac{1}{15}\neq P(A)P(B)$ ,

$\therefore$  事件  $A$  与  $B$  不相互独立。

7. D 【解析】当开关闭合时,电路畅通即表示左至中间畅通且中间至右畅通,

$$\text{左至中间畅通的概率 } P_1 = 1 - \frac{1}{4} \times \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \times \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{5}{6},$$

点悟: 直接求左至中间电路畅通的概率不易求, 可从反面考虑, 先求电路不畅通的概率, 即可得到电路畅通的概率

$$\text{中间至右畅通的概率 } P_2 = 1 - \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{29}{30},$$

$$\text{所以电路畅通的概率 } P = P_1 P_2 = \frac{5}{6} \times \frac{29}{30} = \frac{29}{36}.$$

故选 D.

8. C 【解析】设两个不同的数分别为  $a, b$ , 一个数被某人选中的概率为  $\frac{1}{2}$ , 且两个数是否被选中相互独立.

$$\text{所以同一个数被甲、乙、丙三人都选中的概率为 } \left( \frac{1}{2} \right)^3 = \frac{1}{8},$$

由  $A \cap B \cap C$  中元素的个数  $m \geq 1$ , 表示至少有一个数被三人都选中,

$$\text{而两个数均未被三人都选中的概率为 } \left( 1 - \frac{1}{8} \right)^2 = \frac{49}{64}, \text{ 所以}$$

$$m \geq 1 \text{ 的概率为 } 1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}, \text{ 故选 C.}$$

9.  $\frac{5}{12}$  【解析】设  $A_1, A_2$  分别表示甲两轮猜对 1 个、2 个成语,  $B_1, B_2$  分别表示乙两轮猜对 1 个、2 个成语. 根据相互独立事件的性质, 可得  $P(A_1) = 2 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}, P(A_2) = \left( \frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}, P(B_1) = 2 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}, P(B_2) = \left( \frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}.$

设  $A$  = “两轮活动‘星队’猜对 3 个成语”, 则  $A = A_1 B_2 \cup A_2 B_1$ , 且  $A_1 B_2$  与  $A_2 B_1$  互斥,  $A_1$  与  $B_2, A_2$  与  $B_1$  分别相互独立, 所以  $P(A) = P(A_1 B_2) + P(A_2 B_1) = P(A_1) P(B_2) + P(A_2) \cdot$

$$P(B_1) = \frac{3}{8} \times \frac{4}{9} + \frac{9}{16} \times \frac{4}{9} = \frac{5}{12},$$

因此, “星队”在两轮活动中猜对 3 个成语的概率为  $\frac{5}{12}$ .

#### 规律方法 求相互独立事件同时发生的概率的步骤

- (1) 首先确定各事件之间是相互独立的;
- (2) 确定这些事件可以同时发生;
- (3) 求出每个事件的概率, 再求积.

10. 【解】(1) 设“该同学第 10 题只选一个选项”为事件  $A_1$ , 则  $P(A_1) = \frac{1}{3}$ , 设“该同学第 10 题选的一个选项是正确的”为

事件  $A_2$ , 则  $P(A_2 | A_1) = \frac{1}{2}$ , 易知“该同学第 10 题得 3 分”等价于“该同学第 10 题只选一个选项且该选项是正确的”, 即为  $A_1 A_2$ , 所以  $P(A_1 A_2) = P(A_1) P(A_2 | A_1) = \frac{1}{6}.$

(2) 由 (1) 可得“该同学第 10 题得 3 分”的概率为  $\frac{1}{6}$ , 由题可知该同学一道题得 3 分的概率为  $\frac{1}{6}$ . 该同学在 A, B, C, D 四个选项中选两个选项的情况有 AB, AC, AD, BC, BD, CD

六种, 正确的只有一种, 则事件“该同学选的两个选项是正确的”的概率为  $\frac{1}{6}$ , 所以事件“该同学一道题得 6 分”的概率为  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$ .

事件“该同学第 10 题和第 11 题两题总共得 9 分”等价于事件“该同学一个题得 3 分, 另一个题得 6 分”, 则概率为  $\frac{1}{6} \times \frac{1}{18} \times 2 = \frac{1}{54}.$

点悟: 不要忘记乘 2, 第 10 题得 3 分, 第 11 题得 6 分与第 10 题得 6 分, 第 11 题得 3 分的概率是相同的

11. 【解】(1) 甲在一局比赛中得 0 分包含以下情况:

①三人出现三种手势: 有  $A_3^3 = 6$  种情况;

②三人出现两种手势且甲为输者: 有  $3C_2^2 = 9$  种情况,

$$\text{故所求概率为 } P = (6+9) \times \left( \frac{1}{3} \right)^3 = \frac{5}{9}.$$

(2) 在一局比赛中, 设三人出现三种手势, 即每人各得 0 分为事件  $A$ , 可知  $P(A) = 6 \times \left( \frac{1}{3} \right)^3 = \frac{2}{9}.$

设三人出现同一种手势, 即每人各得 1 分为事件  $B$ , 可知

$$P(B) = 3 \times \left( \frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{9}.$$

设三人出现两种手势, 即有人得 4 分为事件  $C$ , 可知  $P(C) =$

$$1 - P(A) - P(B) = \frac{2}{3}.$$

设游戏结束时有人得分为 3 分以上 (包含 3 分) 为事件  $M$ , 第一局比赛中三人均得 0 分为事件  $N$ . 事件  $M$  包含以下情况:

①第一局为  $C$  时, 概率  $P_1 = \frac{2}{3};$

②第一局为  $A$  或  $B$ , 第二局为  $C$  时, 概率  $P_2 = \left( \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) \times$

点悟:  $A, B$  为互斥事件

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{9};$$

③第一局为  $A$  或  $B$ , 第二局为  $A$  或  $B$ , 第三局为  $C$  时, 概率

$$P_3 = \left( \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) \times \left( \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27};$$

④第一局为  $B$ , 第二局为  $B$ , 第三局为  $B$  时, 概率  $P_4 = \frac{1}{9} \times$

$$\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{729},$$

$$\text{则 } P(M) = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \frac{1}{729} = \frac{703}{729}.$$

又事件  $MN$  包含以下情况:

①第一局为  $A$ , 第二局为  $C$  时, 概率  $P_5 = \frac{2}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27};$

②第一局为  $A$ , 第二局为  $A$  或  $B$ , 第三局为  $C$  时, 概率  $P_6 = \frac{2}{9} \times \left( \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) \times \frac{2}{3} = \frac{4}{81},$

$$\text{则 } P(MN) = P_5 + P_6 = \frac{4}{27} + \frac{4}{81} = \frac{16}{81}, \text{ 故 } P(N|M) = \frac{P(MN)}{P(M)} =$$

$$\frac{16}{81} \times \frac{729}{703} = \frac{144}{703}.$$



**名师点拨** 本题关键在于需要分类讨论游戏结束时有人得分为3分以上(包含3分)事件的各种情况,利用互斥事件、相互独立事件同时发生的概率公式求出概率,再求出第一局比赛中三人均得0分且游戏结束时有人得分为3分以上(包含3分)事件的概率,再利用条件概率公式求解.

**规律方法** 计算相互独立事件同时发生的概率时,先用字母表示出事件,再分析题中涉及的事件.

(1)简单计算问题:将题中所求事件转化为若干个独立事件的交事件,利用独立事件的性质求解.

(2)复杂计算问题:一般将所求事件划分为若干个彼此互斥的事件,然后运用互斥事件的概率加法公式和相互独立事件的概率计算公式求解.

### 刷易错

★易错点 体育比赛问题中,不能正确理解比赛规则而致误

**12.  $\frac{8}{81}$**  【解析】根据题意可知,恰好进行了4局比赛且甲赢得比赛是指第一局甲胜,第二局乙胜,第三局、第四局甲连胜,所以恰好进行了4局比赛且甲赢得比赛的概率为  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{81}$ .

**易错警示** 涉及体育比赛中的问题时,要根据体育比赛的约定综合应用相互独立事件的概率公式及互斥事件的概率公式求解. 本题求解的易错之处:不能正确理解恰好进行了4局比赛且甲赢得比赛是指第一局甲胜,第二局乙胜,第三局、第四局甲连胜而出现错误.

## 第4.1节综合训练

### 刷能力

**1. C** 【解析】因为  $P(\bar{B}|A) = 0.8$ , 所以  $P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A) = 1 - 0.8 = 0.2$ , 又  $P(\bar{A}) = 0.6$ , 所以  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0.6 = 0.4$ , 则  $P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0.4 \times 0.2 = 0.08$ . 故选 C.

**2. D** 【解析】甲中学的女排要获胜,必须赢得其中两局,故甲中学的女排获胜的概率  $P = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{3}{5} + \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{81}{125}$ , 故选 D.

**3. C** 【解析】记  $A =$  “第一次抽到的卡片所标数字为奇数”,  $B =$  “第二次抽到的卡片所标数字为奇数”, 由题意得  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(AB) = \frac{3 \times 2}{6 \times 5} = \frac{1}{5}$ , 所以  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$ . 故选 C.

**多种解法** 在第一次抽到的卡片所标数字为奇数的条件下, 卡片只剩下2张奇数卡片和3张偶数卡片, 所以第二次抽到奇数卡片的概率为  $\frac{2}{5}$ .

**名师点拨** 解决条件概率问题, 若样本点总数较少, 可以用缩小样本空间的方法求概率. 当样本点满足有限性和等可能性时, 可借助古典概型概率公式, 先求事件  $A$  包含的样本点数  $n(A)$ , 再在事件  $A$  发生的条件下求事件  $B$  包含的样本点数, 即  $n(AB)$ , 得  $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)}$ .

**4. B** 【解析】设事件  $A =$  “小明爬到第4级台阶”,  $B =$  “小明走了3步”.

事件  $A$  包含三种情况: ①小明走了4步到第4级台阶, 其概率  $P_1 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$ ;

②小明走了3步到第4级台阶, 其概率  $P_2 = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$ , 即  $P(AB) = \frac{27}{64}$ ;

③小明走了2步到第4级台阶, 其概率  $P_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$ ,

所以  $P(A) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{205}{256}$ ,

所以  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{27}{64}}{\frac{205}{256}} = \frac{108}{205}$ .

故选 B.

**5. BCD** 【解析】由题意可得,  $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = \frac{1}{3}$ ,

$P(A|C_1) = \frac{1}{4}$ ,  $P(A|C_2) = \frac{1}{2}$ ,  $P(A|C_3) = 1$ ,

对于 A: 由全概率公式可得  $P(A) = P(C_1)P(A|C_1) + P(C_2) \cdot P(A|C_2) + P(C_3)P(A|C_3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{7}{12}$ , 故 A 错误;

对于 B:  $P(B) = 1 - P(A) = \frac{5}{12}$ , 故 B 正确;

对于 C:  $P(C_1|A) = \frac{P(C_1A)}{P(A)} = \frac{P(C_1)P(A|C_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}$ ,

故 C 正确;

对于 D: 由题知  $P(B|C_2) = \frac{1}{2}$ , 则  $P(C_2|B) = \frac{P(C_2B)}{P(B)} =$

$\frac{P(C_2)P(B|C_2)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{5}{12}} = \frac{2}{5}$ , 故 D 正确. 故选 BCD.

**6. AD** 【解析】A 选项, 由互斥事件的定义知, A 正确;

B 选项, 设甲同学今天早上步行上学为事件  $M$ , 骑自行车上学为事件  $N$ , 则  $P(M) = 0.2$ ,  $P(N) = 0.5$ , 但  $P(MN) = 0$ , 故  $P(MN) \neq P(M) \cdot P(N)$ , 由事件相互独立的定义知, B 错误;

①思: 也可以定性考虑, 今天早上步行上学与骑自行车上学是互斥事件, 是不可能同时发生的, 即二者的发生与否相互影响, 显然不独立.

C 选项, 设  $A =$  “甲同学迟到”,  $B_1 =$  “步行”,  $B_2 =$  “骑自行车”,

$B_3$  = “乘出租车”, 则  $P(B_1) = \frac{1}{5}, P(A|B_1) = \frac{1}{3}, P(B_2) = \frac{1}{2},$   
 $P(A|B_2) = \frac{1}{4}, P(B_3) = \frac{3}{10}, P(A|B_3) = \frac{1}{12}$ , 由全概率公式得,  
 $P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + P(B_3)P(A|B_3) =$   
 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{10} \times \frac{1}{12} = \frac{13}{60}$ , **C 错误**;

D 选项, 由题意可知所求概率为  $P(B_1|A)$ , 由贝叶斯公式得,

$$P(B_1|A) = \frac{P(AB_1)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}}{\frac{13}{60}} = \frac{4}{13}, \text{D 正确.}$$

故选 AD.

**7.3 【解析】** 因为  $P(A|B) = \frac{1}{2}$ , 所以  $\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{2}$ , 即  $P(B) =$   
 $2P(AB)$ , 同理, 由  $P(B|A) = \frac{1}{3}$  得  $P(A) = 3P(AB)$ .

因为  $P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB) = 2P(AB)$ ,

所以  $P(\bar{A}B) = P(AB)$ .

因为  $P(A) = P(\bar{A}B) + P(AB) = 3P(AB)$ ,

所以  $P(\bar{A}B) = 2P(AB)$ .

所以  $\frac{P(\bar{A}B) + P(\bar{A}B)}{P(AB)} = \frac{3P(AB)}{P(AB)} = 3$ .

**8.  $\frac{9}{70}$  【解析】** 设“小唐同学周一去味园”为事件  $A$ , “小唐同学  
 周二去味园”为事件  $B$ , 则“小唐同学周一、周二都去味园”为  
 事件  $AB$ .

由题意可知  $P(A) = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{3}{10}$ , 且  $P(B|\bar{A}) = 2P(B|A)$ .

由全概率公式可知,  $P(B) = P(B|\bar{A})P(\bar{A}) + P(B|A)P(A)$ ,

即  $\frac{3}{10} = \frac{4}{5}P(B|A) + \frac{3}{5}P(B|A)$ , 解得  $P(B|A) = \frac{3}{14}$ .

所以  $P(AB) = P(A)P(B|A) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{14} = \frac{9}{70}$ .

**9. 【解】** (1) 设事件  $A_i$  表示“甲第  $i$  次从  $B$  箱中抽到论述题”,  $i =$   
 $1, 2$ , 则  $P(A_1) = \frac{2}{5}, P(\bar{A}_1) = \frac{3}{5}$ ,

第一题抽到选择题的概率为  $\frac{3}{5}$ , 此时剩下 2 道选择题和 2 道

论述题, 第二题抽到论述题的概率为  $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ; 第一题抽到论

述题的概率为  $\frac{2}{5}$ , 此时剩下 3 道选择题和 1 道论述题, 第二

题抽到论述题的概率为  $\frac{1}{4}$ , 所以  $P(A_2|A_1) = \frac{1}{4}, P(A_2|\bar{A}_1) =$

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

由全概率公式得第二题抽到论述题的概率

$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{5}$ .

(2) 由 (1) 知,  $P(A_2|A_1) = \frac{1}{4}$ ,

$$\text{巧思: } P(A_2|A_1) = \frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)} = \frac{\frac{A_2^2}{A_1^2}}{\frac{2}{5}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{1}{4}$$

即第一题抽到论述题的条件下, 第二题抽到论述题的概率  
 为  $\frac{1}{4}$ .

(3) 设事件  $C$  为“丙从  $B$  箱中取出的第一道题是选择题”, 事  
 件  $B_1$  为“乙从  $A$  箱中取出 2 道选择题”, 事件  $B_2$  为“乙从  $A$   
 箱中取出 1 道选择题和 1 道论述题”, 事件  $B_3$  为“乙从  $A$  箱  
 中取出 2 道论述题”, 则  $B_1, B_2, B_3$  两两互斥且  $B_1 \cup B_2 \cup B_3 =$

$\Omega$ , 则  $P(B_1) = \frac{C_6^2}{C_9^2} = \frac{5}{12}, P(B_2) = \frac{C_6^1 C_3^1}{C_9^2} = \frac{1}{2}, P(B_3) = \frac{C_3^2}{C_9^2} = \frac{1}{12},$

$P(C|B_1) = \frac{5}{7}, P(C|B_2) = \frac{4}{7}, P(C|B_3) = \frac{3}{7}$ , 所以丙取出的

第一道题是选择题的概率  $P(C) = P(B_1)P(C|B_1) + P(B_2) \cdot$

$P(C|B_2) + P(B_3)P(C|B_3) = \frac{5}{12} \times \frac{5}{7} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{12} \times \frac{3}{7} = \frac{13}{21}$ .

**10. 【解】** (1)  $A$  夺冠即为三轮比赛都获胜, 所以  $A$  夺冠的概率为

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

由题意知,  $B, C, D, E, F, G, H$  七名运动员水平相同, 且八名  
 运动员各自夺冠的概率之和为 1,

所以  $B, C, D, E, F, G, H$  七名运动员各自夺冠的概率均为

$$\frac{1}{7} \times \left(1 - \frac{8}{27}\right) = \frac{19}{189}.$$

(2) 记事件  $B = “B 获得冠军”$ , 事件  $A = “B 与 A 对决过”$ , 事  
 件  $A_i = “B 与 A 在第  $i$  轮对决”$ ,  $i = 1, 2, 3$ , 则  $A_1, A_2, A_3$  两两  
 互斥且  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$ .

不妨设  $A$  在①号位, 则  $B$  在第 1, 2, 3 轮能与  $A$  对决时其位  
 置编号分别为②, ③④, ⑤⑥⑦⑧.

$P(A_1B) = \frac{1}{7} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{84}, P(A_2B) = \frac{2}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times$

$\left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{63},$

$P(A_3B) = \frac{4}{7} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{189},$

所以  $P(AB) = P(A_1B) + P(A_2B) + P(A_3B) = \frac{1}{84} + \frac{1}{63} +$

$\frac{4}{189} = \frac{37}{756}$ .

(3) 记事件  $C = “B 与 C 对决过”$ .

由 (1) 知,  $P(B) = \frac{19}{189}$ .

所以  $B$  没有与  $A$  对决过且最后获得冠军的概率  $P(\bar{A}B) =$

$P(B) - P(AB) = \frac{19}{189} - \frac{37}{756} = \frac{39}{756} = \frac{13}{252}$ .

由题意知,  $C, D, E, F, G, H$  六名运动员与  $B$  对决过的概率相  
 同,  $B$  夺冠时共与三名运动员对决过.

所以  $P(C|AB) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, P(C|\bar{A}B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ . 所以  $P(BC) =$

$P(ABC) + P(\bar{A}BC) = P(AB)P(C|AB) + P(\bar{A}B)P(C|\bar{A}B) =$

$\frac{37}{756} \times \frac{1}{3} + \frac{13}{252} \times \frac{1}{2} = \frac{191}{4536}$ .



## 刷素养

11.  $\frac{17}{81}$  【解析】比赛3局甲赢得胜利的概率  $p_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ ;

👉黑板: 谁先胜3局谁赢得胜利, 则最少要比赛3局, 最多比赛5局才能分出胜负, 故只需讨论甲比赛3局、4局、5局赢得胜利的情况

$$\text{比赛4局甲赢得胜利的概率 } p_2 = C_3^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27};$$

$$\text{比赛5局甲赢得胜利的概率 } p_3 = C_4^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{81},$$

$$\text{所以甲赢得胜利的概率为 } p_1 + p_2 + p_3 = \frac{3+6+8}{81} = \frac{17}{81}.$$

## 4.2 随机变量

## 4.2.1 随机变量及其与事件的联系

## 刷基础

1. C 【解析】选项A, B是随机事件; 选项D中球的个数是定值2; 选项C中白球的个数可能的取值为0, 1, 2, 可以用随机变量表示. 故选C.

**规律方法** 如果一个随机试验的结果对应的变量具有以下两点特征, 则该变量为随机变量.

(1) 随机试验的结果具有可变性, 即每次试验对应的结果不尽相同.

(2) 随机试验的结果具有确定性, 即每次试验总是恰好出现这些结果中的一个, 但在一次试验之前却不能确定这次试验会出现哪一个结果.

2. BC 【解析】对于A, 水位在(0, 18]内变化, 不能一一列举, 所以不是离散型随机变量, 故A错误;

对于B, 需要的抛掷次数可以一一列举, 所以是离散型随机变量, 故B正确;

对于C, 做对数学第11题的人数可以一一列举, 所以是离散型随机变量, 故C正确;

对于D, 方程  $x^2 - 2x - 3 = 0$  的实根有2个, 是确定的值, 不是随机变量, 故D错误. 故选BC.

**特别注意** 由离散型随机变量的概念可知, 它是可以一一列举出来的, 而连续型随机变量可以在某个实数范围内连续取值.

3. D 【解析】A表示的是随机试验中  $\xi = 8$  的其中一个结果, B, C中表示的是随机试验中  $\xi = 4$  的部分结果, 而D是表示随机试验中  $\xi = 4$  的所有试验结果. 故选D.

4. D 【解析】由试验次数X的含义可知, 至少试验一次才能找到能开锁的钥匙, 如果第五次依然没有开锁, 那么能确定剩下的一把为能开锁的钥匙, 所以X的所有可能取值为1, 2, 3, 4, 5. 故选D.

5. 3, 2, 1, 0 300, 100, -100, -300 【解析】甲回答问题的结果可能为回答全对, 两对一错, 两错一对, 全错, 共四种结果, 故X的所有可能取值是3, 2, 1, 0, 相应得分为300分, 100分, -100分, -300分, 因此甲回答这三个问题的总得分Y的所有可能取值为300, 100, -100, -300.

6. 【解】(1)  $X = i$ , 表示接到*i*次急救电话,  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

(2) 随机变量X所有可能的取值为0, 1, 2, 3.

$X = 0$  表示“取出的3个球中有0个白球”;  $X = 1$  表示“取出的3个球中有1个白球”;  $X = 2$  表示“取出的3个球中有2个白球”;  $X = 3$  表示“取出的3个球全是白球”.

7.  $\frac{14}{15}$  【解析】由已知, Y的所有可能取值为0, 2, 4, 6, 8,

$$\text{且 } P(Y=0) = \frac{1}{15}, P(Y=2) = \frac{2}{15}, P(Y=4) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$

$$P(Y=6) = \frac{4}{15}, P(Y=8) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{则 } P(Y>0) = P(Y=2) + P(Y=4) + P(Y=6) + P(Y=8) = \frac{14}{15}.$$

👉巧思: 也可根据  $P(Y>0) = 1 - P(Y \leq 0)$  求解

8. 【解】(1) 当  $X = 120$  时, 即快递员送件120次, 结合题意有  $Y = 190$ .

(2) 由题意可得  $Y = 70 + X$ .

(3) 由(2)可知  $P(Y \geq 220) = P(X \geq 150) = 0.8$ ,

所以  $P(X < 150) = 1 - P(X \geq 150) = 1 - 0.8 = 0.2$ .

**名师点拨** (1) 求解此类问题的关键是明确随机变量的取值所表示的含义. 对于变量间的关系问题, 可类比函数关系求解.

(2) 对立事件的概率和为1, 常借助此关系求对立事件的概率.

## 4.2.2 离散型随机变量的分布列

## 刷基础

1. A 【解析】 $\because$  从盒子中任取3个球来用, 用完后装回盒中, 此时盒中旧球个数  $X = 4$ , 即旧球的个数增加了2个(用完后新球成为旧球),  $\therefore$  取出的3个球中必有2个新球, 即取出的3个球必为1个旧球2个新球,  $\therefore P(X=4) = \frac{C_2^1 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$ . 故选A.

**规律方法** 求解与随机变量有关的概率问题, 应准确理解随机变量的含义, 本题中  $X = 4$  的含义是取出的3个球必为1个旧球, 2个新球.

2. A 【解析】令  $X = k$ , 则  $X = k$  表示前*k*个球为白球, 第*k*+1个球为红球. 则  $P(X=0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ,  $P(X=1) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ ,  $P(X=2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$ , 则  $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ . 故选A.

3. 【解】(1) 若胜一场, 则其余三场为平, 共有  $C_4^1 = 4$  种情况; 若胜两场, 则其余两场为一负一平或两平, 共有  $C_4^2 C_2^1 + C_4^2 = 18$  种情况; 若胜三场, 则其余一场为负或平, 共有  $C_4^3 \times 2 = 8$  种情况; 若胜四场, 则只有1种情况. 综上, 共有  $4+18+8+1=31$  种情况.