

## 高中必刷题 数学

当  $r=3$  时,  $T_4=2^4 C_7^3 x^3=560x^3$ ;

当  $r=6$  时,  $T_7=2^1 C_7^6 x^{-1}=14x^{-1}$ ,

所以展开式中有理项的系数之和为  $128+560+14=702$ .

**10. 【解】**(1) 依题意可得, 展开式第 2 项的二项式系数为  $C_n^1$ , 第 3 项的二项式系数为  $C_n^2$ ,

所以  $\frac{C_n^1}{C_n^2} = \frac{2}{5}$ , 即  $\frac{n}{n(n-1)} = \frac{2}{5}$ , 则  $n-1=5$ , 所以  $n=6$ ,

所以  $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$  展开式的通项为  $T_{r+1} = C_6^r (2x)^{6-r} \left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^r =$

$(-1)^r 2^{6-r} C_6^r x^{6-\frac{3}{2}r} (0 \leq r \leq 6, r \in \mathbb{N})$ ,

令  $6 - \frac{3}{2}r = 0$ , 解得  $r=4$ ,

所以  $T_5 = 2^2 C_6^4 x^0 = 60$  为常数项, 所以常数项为 60, 为第 5 项.

(2) 由(1)知  $T_{r+1} = (-1)^r 2^{6-r} C_6^r x^{6-\frac{3}{2}r} (0 \leq r \leq 6, r \in \mathbb{N})$ ,

令  $6 - \frac{3}{2}r \in \mathbb{Z}$ , 则  $r=0, 2, 4, 6$ ,

当  $r=0$  时,  $T_1 = 2^6 C_6^0 x^6 = 64x^6$ ,

当  $r=2$  时,  $T_3 = 2^4 \times C_6^2 x^3 = 240x^3$ ,

当  $r=4$  时,  $T_5 = 2^2 \times C_6^4 x^0 = 60$ ,

当  $r=6$  时,  $T_7 = 2^0 \times C_6^6 x^{-3} = x^{-3}$ ,

故有理项为  $64x^6, 240x^3, 60, x^{-3}$ .

(3) 令  $\begin{cases} 2^{6-r} C_6^r \geq 2^{7-r} C_6^{r-1}, \\ 2^{6-r} C_6^r \geq 2^{5-r} C_6^{r+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_6^r \geq 2C_6^{r-1}, \\ 2C_6^r \geq C_6^{r+1} \end{cases} \Rightarrow$

→ **黑板**: 系数绝对值最大, 即不用考虑  $(-1)^r$

$$\begin{cases} \frac{6!}{(6-r)! r!} \geq \frac{2 \times 6!}{(7-r)! (r-1)!}, \\ \frac{2 \times 6!}{(6-r)! r!} \geq \frac{6!}{(5-r)! (r+1)!} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7-r}{r} \geq 2, \\ 2 \geq \frac{6-r}{r+1}, \end{cases}$$

解得  $\frac{4}{3} \leq r \leq \frac{7}{3}$ , 又  $r \in \mathbb{N}$ , 所以  $r=2$ ,

所以  $T_3 = 240x^3$ , 即展开式中系数绝对值最大的项为  $240x^3$ .

### 素养

**11.  $\frac{1\ 959}{980}$**  【解析】根据二项式定理, 可得  $(1-x)^{1\ 958}$  的展开式

为  $\sum_{k=0}^{1\ 958} (-1)^k C_n^k x^k, n=1\ 958$ , 所以  $a_k = (-1)^k C_n^k, n=1\ 958$ .

$$\frac{1}{C_n^k} + \frac{1}{C_n^{k+1}} = \frac{k! (n-k)! + (k+1)! (n-k-1)!}{n!} = \frac{k! (n-k-1)! (n-k+k+1)}{n!} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{k! (n-k-1)!}{(n-1)!} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{C_{n-1}^k},$$

令上式中的  $n$  取  $n+1$ , 可得  $\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{C_n^k}$ ,

$$\text{即 } \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{n+2} \left( \frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right).$$

$$\text{所以 } \sum_{k=0}^{1\ 958} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=0}^{1\ 958} \frac{1}{(-1)^k C_n^k} = \frac{1\ 959}{1\ 960} \times \left[ \left( \frac{1}{C_{1\ 959}^0} + \frac{1}{C_{1\ 959}^1} \right) - \left( \frac{1}{C_{1\ 959}^1} + \frac{1}{C_{1\ 959}^2} \right) + \left( \frac{1}{C_{1\ 959}^2} + \frac{1}{C_{1\ 959}^3} \right) - \cdots - \left( \frac{1}{C_{1\ 959}^{1\ 957}} + \frac{1}{C_{1\ 959}^{1\ 958}} \right) + \left( \frac{1}{C_{1\ 959}^{1\ 958}} + \frac{1}{C_{1\ 959}^{1\ 959}} \right) \right] = \frac{1\ 959}{1\ 960} \times \left( 1 + \frac{1}{C_{1\ 959}^{1\ 959}} \right) = \frac{1\ 959}{1\ 960} \times 2 = \frac{1\ 959}{980}.$$

## 第三章素养检测

### 刷速度

**1. C** 【解析】因为  $(1+x)^{2n}$  的展开式的通项为  $T_{r+1} = C_{2n}^r x^r, r=0, 1, 2, \dots, 2n$ , 可知第  $r+1$  项的系数为  $C_{2n}^r$ , 即为第  $r+1$  项的二项式系数, 根据二项式系数的性质可知,  $C_{2n}^r$  的最大值为  $C_{2n}^n$ , 所以系数最大的项为第  $n+1$  项. 故选 C.

**2. A** 【解析】根据第一场安排的比赛是否为跳绳, 分为如下两种情况:

第一种, 若第一场安排跳绳, 则最后一场安排不受限制, 共有  $1 \times A_5^5 = 120$  (种) 安排方案;

第二种, 若第一场不安排跳绳, 则也不能安排长跑, 则第一场有 4 种安排方案,

再安排最后一场, 最后一场不能为跳绳, 故有 4 种安排方案, 则共有  $4 \times 4 \times A_4^4 = 384$  (种) 安排方案,

故不同的安排方案共有  $120+384=504$  (种).

故选 A.

**3. B** 【解析】求 20 名同学不同的站法需分步考虑:

先考虑甲、乙、丙, 从 4 行中任取 1 行, 5 列中任取 1 列, 其对应的位置让甲站, 有  $4 \times 5$  种站法;

从余下 3 行中任取 1 行, 4 列中任取 1 列, 其对应的位置让乙站, 有  $3 \times 4$  种站法;

从余下 2 行中任取 1 行, 3 列中任取 1 列, 其对应的位置让丙

站, 有  $2 \times 3$  种站法,

因此符合要求的甲、乙、丙的站法有  $4 \times 5 \times 3 \times 4 \times 2 \times 3 = 1\ 440$  种, 再考虑除甲、乙、丙外的 17 名同学的站法, 有  $A_{17}^{17}$  种,

所以这 20 名同学不同的站法种数为  $1\ 440 A_{17}^{17}$ . 故选 B.

**4. A** 【解析】令  $x=1$ , 则  $\left(\frac{3}{\sqrt{1}}+1\right)^n = M$ , 即  $4^n = M$ ,

→ **陷阱**: 注意区分二项式系数和与所有项的系数和

而  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n = N$ ,

由  $M-N=992$ , 则  $4^n - 2^n = 992$ , 令  $2^n = t > 0$ , 则  $t^2 - t - 992 = 0$ , 解

得  $t=32$  (负值舍去), 即  $2^n = 32$ , 故  $n=5$ , 则二项式  $\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+x\right)^5$

的展开式的通项为  $T_{r+1} = C_5^r \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{5-r} x^r = C_5^r 3^{\frac{5-r}{2}} x^{\frac{3r-5}{2}}$ ,

令  $\frac{3r-5}{2} = 2$ , 解得  $r=3$ , 则展开式中含  $x^2$  项的系数为  $C_5^3 3^{5-3} =$

$10 \times 9 = 90$ . 故选 A.

**5. C** 【解析】因为多项式  $(x^2+x-2y)^5$  可看成 5 个三项式  $(x^2+x-2y)$  的乘积, 根据组合数的定义和计算公式, 可得  $x^5 y^2$  项为从 5 个  $x^2$ , 1 个  $x$ , 2 个  $(-2y)$ , 所以  $x^5 y^2$  项为  $C_5^2 (x^2)^2 \cdot C_3^1 x \cdot C_2^2 (-2y)^2 = 120 x^5 y^2$ , 所以  $x^5 y^2$  的系数为 120. 故选 C.

6. D 【解析】先进行单循环赛,有  $5C_4^2=30$ (场),胜出的 5 个班

→ 悟: 每组内,两两进行比赛,直到每班都与组内其他班进行了比赛

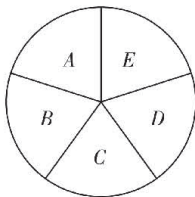
级和从余下队伍中选出的数据最优秀的 1 个班级共 6 支球队按抽签的方式进行淘汰赛,6 支球队打 3 场,决出最后胜出的 3 个班级,最后 3 个班级再进行单循环赛,有  $C_3^2=3$ (场),所以共举办了  $30+3+3=36$ (场)比赛. 故选 D.

7. A 【解析】若  $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|+|x_6|=1$ , 则  $x_i$  ( $i=1,2,3,4,5,6$ ) 中有 5 个为 0, 1 个为 1 或 -1, 此时共有  $C_6^1 \times C_6^1=12$  个元素; 若  $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|+|x_6|=2$ , 则  $x_i$  ( $i=1,2,3,4,5,6$ ) 中有 4 个为 0, 2 个为 1 或 -1, 此时共有  $C_6^2 C_2^1 C_2^1=60$  个元素; 若  $|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|+|x_6|=3$ , 则  $x_i$  ( $i=1,2,3,4,5,6$ ) 中有 3 个为 0, 3 个为 1 或 -1, 此时共有  $C_6^3 C_3^1 C_3^1 C_3^1=160$  个元素.

由上可知,集合  $B$  中满足  $1 \leq |x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|+|x_6| \leq 3$  的元素的个数为  $12+60+160=232$ . 故选 A.

8. D 【解析】五行相克可以用同一种颜色,也可以不用同一种颜色,即无限制条件,五行相生不能用同一种颜色,即相邻位置不能用同一种颜色,

故问题转化为如图所示的  $A, B, C, D, E$  五个区域,有 5 种不同的颜色可用,要求相邻区域不能涂同一种颜色.



分为以下两类情况:

第一类: $A, C, D$  三个区域涂三种不同的颜色,第一步涂  $A, C, D$  区域,从 5 种不同的颜色中选 3 种涂在这 3 个区域上,则有  $A_5^3$  种方法,

第二步涂  $B$  区域,由于  $A, C$  颜色不同,有 3 种方法,

第三步涂  $E$  区域,由于  $A, D$  颜色不同,则有 3 种方法,

故由分步乘法计数原理,共有  $3 \times 3 \times A_5^3=540$  种方法.

第二类: $A, C, D$  三个区域涂两种不同的颜色,

由于  $C, D$  不能涂同一种颜色,则  $A, C$  涂同一种颜色或  $A, D$  涂同一种颜色,两种情况方法数相同.

若  $A, C$  涂同一种颜色,第一步涂  $A, C, D$  区域,  $A, C$  可看成同一区域,且  $A, D$  区域不同色,即涂 2 个区域不同色,从 5 种不同的颜色中选 2 种涂在不同的 2 个区域上,则有  $A_5^2$  种方法,

第二步涂  $B$  区域,由于  $A, C$  颜色相同,则有 4 种方法,

第三步涂  $E$  区域,由于  $A, D$  颜色不同,则有 3 种方法,

故由分步乘法计数原理,共有  $4 \times 3 \times A_5^2=240$  种方法;

若  $A, D$  涂同一种颜色,与  $A, C$  涂同一种颜色的方法数相同,则共有  $2 \times 240=480$  种方法.

由分类加法计数原理可知,不同的涂色方法共有  $540+480=1\,020$  种. 故选 D.

9. BCD 【解析】对于 A,  $A_n^m + A_n^{m-1} = \frac{n!}{(n-m)!} + \frac{n!}{(n-m+1)!} =$

$$n! \cdot \frac{n-m+1}{(n-m+1)!} + n! \cdot \frac{1}{(n-m+1)!} = n! \cdot \frac{n-m+2}{(n-m+1)!},$$

而  $A_{n+1}^m = \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!} = \frac{(n+1) \times n!}{(n+1-m)!} = n! \cdot \frac{n+1}{(n+1-m)!}$ , 所以

$A_{n+1}^m = A_n^m + A_n^{m-1}$  不一定成立,故 A 不正确;

对于 B, 因为  $C_n^2 + C_n^3 = C_{n+1}^3$ , 所以  $\sum_{k=2}^8 C_k^2 = C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_8^2 = C_3^3 + C_3^3 + C_4^2 + \cdots + C_8^2 = C_4^3 + C_4^2 + \cdots + C_8^2 = \cdots = C_8^3 + C_8^2 = C_9^3$ , 故 B 正确;

对于 C, 因为  $\frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{k!} = \frac{k! - (k-1)!}{k! \cdot (k-1)!} = \frac{(k-1)(k-1)!}{k! \cdot (k-1)!} = \frac{k-1}{k!}$ ,

所以  $\sum_{k=2}^8 \frac{k-1}{k!} = \sum_{k=2}^8 \left[ \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} \right] = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} = 1 - \frac{1}{8!}$ , 故 C 正确;

对于 D, 因为  $k \cdot k! = (k+1)! - k!$ , 所以  $\sum_{k=1}^n (k \cdot k!) = \sum_{k=1}^n [(k+1)! - k!] = (2! - 1!) + (3! - 2!) + \cdots + (n+1)! - n! = (n+1)! - 1$ , 故 D 正确. 故选 BCD.

10. ABD 【解析】在  $(1-2x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_5x^5$  中,  $a_0 = C_5^0 = 1$ ,  $a_1 = C_5^1 \times (-2) = -10$ ,  $a_2 = C_5^2 \times (-2)^2 = 40$ ,  $a_3 = C_5^3 \times (-2)^3 = -80$ ,  $a_4 = C_5^4 \times (-2)^4 = 80$ ,  $a_5 = C_5^5 \times (-2)^5 = -32$ .

对于 A,  $a_3 = -80$ , A 正确;

对于 B, 当  $i=0, 1, \dots, 5$  时,  $|a_i|_{\max} = 80 = a_4$ , 则  $|a_i| \leq a_4$ , B 正确;

对于 C,  $|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| = 10 + 40 + 80 + 80 + 32 = 242$ , C 错误;

对于 D,  $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \frac{a_4}{2^4} = \frac{-10}{2} + \frac{40}{4} + \frac{-80}{8} + \frac{80}{16} = 0$ , D 正确.

故选 ABD.

11. ABC 【解析】对于 A, 由题图分析知, 杨辉三角的第  $n$  行是  $(a+b)^n$  的展开式中二项式系数  $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$ , 所以第 10 行所有数字的和为  $2^{10} = 1\,024$ , A 正确;

对于 B, 由  $(1+x)^{20} = (1+x)^{10} (1+x)^{10}$ , 则  $C_{20}^0 x^0 + C_{20}^1 x^1 + C_{20}^2 x^2 + \cdots + C_{20}^{20} x^{20} = (C_{10}^0 x^0 + C_{10}^1 x^1 + \cdots + C_{10}^{10} x^{10}) (C_{10}^0 x^0 + C_{10}^1 x^1 + \cdots + C_{10}^{10} x^{10})$ ,

所以对于含  $x^k$  项, 左侧的系数为  $C_{20}^k$ , 右侧的系数为  $C_{10}^0 C_{10}^k + C_{10}^1 C_{10}^{k-1} + \cdots + C_{10}^k C_{10}^0$ ,

所以第 10 行所有数字的平方和为  $(C_{10}^0)^2 + (C_{10}^1)^2 + \cdots + (C_{10}^{10})^2 = C_{10}^0 C_{10}^{10} + C_{10}^1 C_{10}^9 + C_{10}^2 C_{10}^8 + \cdots + C_{10}^9 C_{10}^1 + C_{10}^{10} C_{10}^0 = C_{20}^{10}$ , B 正确;

对于 C, 第  $n$  行的第  $i$  个数为  $a_i$ , 则  $a_i = C_n^{i-1}$ , 故  $\sum_{i=1}^{n+1} (2^{i-1} \cdot a_i) = \sum_{i=1}^{n+1} (2^{i-1} \cdot C_n^{i-1}) = C_n^0 2^0 + C_n^1 2^1 + \cdots + C_n^n 2^n = (1+2)^n = 3^n$ , C 正确;

对于 D, 由  $C_n^r + C_n^{r+1} = \frac{n!}{r! (n-r)!} + \frac{n!}{(r+1)! (n-r-1)!} = \frac{n!}{r! (n-r-1)!} \left( \frac{1}{n-r} + \frac{1}{r+1} \right) = \frac{n!}{r! (n-r-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-r)(r+1)} = \frac{(n+1)!}{(r+1)! (n-r)!} = C_{n+1}^{r+1}$ ,

所以当  $k \geq 2$  且  $k \in \mathbb{N}_+$  时, 三角形数阵前 2 024 行中第  $k$  斜列各项之和为  $C_{k-1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + \cdots + C_{2\,023}^{k-1} = C_k^k + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + \cdots + C_{2\,023}^{k-1} = C_{2\,024}^k$ ,

当  $k=1$  时, 三角形数阵前 2 024 行中第 1 斜列各项之和为



## 高中必刷题 数学

$$2\ 024 = C_{2\ 024}^1,$$

所以该三角形数阵前 2 024 行中第  $k$  斜列各项之和为  $C_{2\ 024}^k$ , D 错误. 故选 ABC.

**12. 120** 【解析】要使组成的四位数能被 3 整除, 则该四位数各位数字之和为 3 的倍数,

取出的 4 个数字之和为 3 的倍数的情况有  $\{1, 2, 3, 6\}, \{1, 2, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 6\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}$ , 共 5 种, 所以组成的四位数能被 3 整除的个数为  $5A_4^4 = 120$ .

**13.  $-\frac{1}{2}$**  【解析】 $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^5$  展开式的通项为  $T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-r} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^r$

$$= 2^{5-r} C_5^r x^{5-2r} \quad (r=0, 1, \dots, 5),$$

令  $5-2r=0$ , 无整数解;

$$\text{令 } 5-2r=-1, \text{ 解得 } r=3, T_4 = \frac{40}{x};$$

$$\text{令 } 5-2r=1, \text{ 解得 } r=2, T_3 = 80x,$$

$$\therefore \left(1+x - \frac{a}{x}\right) \left(2x + \frac{1}{x}\right)^5 \text{ 展开式中的常数项为 } 40 - 80a = 80,$$

**避坑:** 注意结合前面多项式每项的系数

$$\text{解得 } a = -\frac{1}{2}.$$

**14.  $n+1$  16** 【解析】 $2^n$  的正因数为  $1, 2^1, 2^2, \dots, 2^n$ , 共  $n+1$  个, 故  $d(2^n) = n+1$ .

$$2\ 024 = 2 \times 2 \times 2 \times 11 \times 23,$$

①从 2, 2, 2, 11, 23 中选 0 个数, 即因数为 1, 有 1 种情况;

②从 2, 2, 2, 11, 23 中选 1 个数, 有 2, 11, 23 共 3 种情况;

③从 2, 2, 2, 11, 23 中选 2 个数相乘, 有  $2 \times 2, 2 \times 11, 2 \times 23, 11 \times 23$  共 4 种情况;

④从 2, 2, 2, 11, 23 中选 3 个数相乘, 即有 2 个不选, 同③为 4 种情况, 分别为  $2 \times 2 \times 2, 2 \times 2 \times 11, 2 \times 11 \times 23, 2 \times 2 \times 23$ ;

⑤从 2, 2, 2, 11, 23 中选 4 个数相乘, 即有 1 个不选, 同②为 3 种情况, 分别为  $2 \times 2 \times 2 \times 11, 2 \times 2 \times 2 \times 23, 2 \times 2 \times 11 \times 23$ ;

⑥从 2, 2, 2, 11, 23 中选 5 个数相乘, 即因数为 2 024, 有 1 种情况,

$$\text{故 } d(2\ 024) = 1 + 3 + 4 + 4 + 3 + 1 = 16.$$

**15. 【解】**(1) 由已知得  $7 \times \frac{6!}{(6-x)!} = 20 \times \frac{7!}{(8-x)!}$ ,

$$\text{化简得 } x^2 - 15x + 36 = 0, \text{ 解得 } x = 3 \text{ 或 } x = 12.$$

$$\text{又因为 } \begin{cases} x \leq 6, \\ x-1 \leq 7, \end{cases} \text{ 所以 } x = 3.$$

$$(2) \text{ 将 } x = 3 \text{ 代入得 } C_{20}^{17} + C_{20}^{16} = C_{20}^{30} + C_{20}^{29} = C_{21}^{31} = 1\ 330.$$

**16. 【解】**(1) 6 名教师中选 1 名到甲学校有  $C_6^1$  种方法,

从剩余的 5 名教师中选 2 名到乙学校有  $C_5^2$  种方法,

剩余 3 名教师都分配到丙学校有  $C_3^3$  种方法,

则分配到甲学校 1 人、乙学校 2 人、丙学校 3 人, 共有  $C_6^1 C_5^2 C_3^3 = 60$  种分配方法.

(2) 先将 6 名教师分为人数分别为 1, 1, 4 的三个组, 有  $C_6^4$  种方法, 再分配到三所学校有  $A_3^3$  种方法,

则分配到一所学校 4 人, 另外两所学校各 1 人, 共有  $C_6^4 A_3^3 = 90$  种分配方法.

(3) 由题可得教师的分配方案可以分以下情况:

①6 名教师分为人数分别为 1, 2, 3 的三个组, 有  $C_6^1 C_5^2 C_3^3$  种方法,

则 6 人分配到三所学校共有  $C_6^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3 = 360$  种分配方法;

②6 名教师分为人数分别为 1, 1, 4 的三个组, 有  $C_6^4$  种方法, 则 6 人分配到三所学校共有  $C_6^4 A_3^3 = 90$  种分配方法;

③6 名教师平均分配到三所学校有  $C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 90$  种分配方法,

则 6 人分配到三所学校, 每所学校至少被分配到一人, 共有  $360 + 90 + 90 = 540$  种分配方法.

**17. 【解】**(1) 依题得, 所有排法种数为  $A_6^6 - 2A_5^5 + A_4^4 = 504$ .

(2) 第一步, 先将甲和乙的不同课程选好, 有  $A_6^2$  种情况;

第二步, 将甲和乙的相同课程选好, 有  $C_4^1$  种情况;

第三步, 因为丙和甲、乙的课程都不同, 所以丙的选法有  $C_2^3$  种情况,

因此所有选课的方法种数为  $A_6^2 \times C_4^1 \times C_2^3 = 360$ .

(3) ①当 A 只任教 1 门课程时, 先排 A 的任教课程, 有  $C_5^1$  种;

再从剩下 5 门中排 B 的任教课程, 有  $C_5^1$  种;

接下来剩余 4 门中必有 2 门为同一名教师任教, 分三组全排列, 共有  $C_4^2 A_3^3$  种,

$$\text{所以当 A 只任教 1 门课程时, 有 } C_5^1 C_5^1 C_4^2 A_3^3 = 5 \times 5 \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times 3 \times 2 \times 1 = 900 \text{ 种.}$$

②当 A 任教 2 门课程时, 先选 A 任教的 2 门课程有  $C_5^2$  种,

$$\text{这样有 } C_5^2 A_4^4 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 240 \text{ 种安排方法.}$$

所以共有  $900 + 240 = 1\ 140$  种.

综上, 课程安排的方法种数为 1 140.

**18. 【解】**(1) 当  $a = 1$  时,  $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$ ,

$$\text{又 } (1+x)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n, a_3 = a_4,$$

所以  $C_n^3 = C_n^4$ , 所以  $n = 7$ .

$$(2) \text{ 当 } a = \sqrt{2}, n = 8 \text{ 时, } f(x) = (\sqrt{2} + x)^8,$$

$$\text{又 } (\sqrt{2} + x)^8 = C_8^0 (\sqrt{2})^8 + C_8^1 (\sqrt{2})^7 x + C_8^2 (\sqrt{2})^6 x^2 + \dots + C_8^8 x^8,$$

$$\text{所以 } a_0 = C_8^0 (\sqrt{2})^8, a_1 = C_8^1 (\sqrt{2})^7, a_2 = C_8^2 (\sqrt{2})^6, a_3 = C_8^3 (\sqrt{2})^5, a_4 = C_8^4 (\sqrt{2})^4, a_5 = C_8^5 (\sqrt{2})^3, a_6 = C_8^6 (\sqrt{2})^2, a_7 = C_8^7 (\sqrt{2})^1, a_8 = C_8^8 = 1,$$

所以  $a_0, a_2, a_4, a_6, a_8$  为有理数,

所以从  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_8$  中任取一个数, 取到有理数的概率为  $\frac{5}{9}$ .

$$(3) \text{ 当 } a = 2, \text{ 且 } n = 2\ 024 \text{ 时, } f(x) = (2+x)^{2\ 024} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{2\ 024} x^{2\ 024},$$

$$\text{又二项式 } (2+x)^{2\ 024} \text{ 的展开式的通项为 } T_{r+1} = C_{2\ 024}^r 2^{2\ 024-r} x^r, r = 0, 1, 2, 3, \dots, 2\ 024,$$

$$\text{所以 } a_k = C_{2\ 024}^k 2^{2\ 024-k}, k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2\ 024,$$

**点悟:** 若对任意的  $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ , 都有  $a_k \leq a_1$ , 说明  $a_1$  是最大的系数

$$\text{当 } 0 \leq k \leq 2\ 023 \text{ 时, } \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{C_{2\ 024}^{k+1} 2^{2\ 024-k-1}}{C_{2\ 024}^k 2^{2\ 024-k}} = \frac{2\ 024!}{(k+1)! (2\ 023-k)!}.$$

$$\frac{k! (2024-k)!}{2024!} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2024-k}{2k+2},$$

$$\text{令 } \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1, \text{ 可得 } \frac{2024-k}{2k+2} = 1, \text{ 即 } 2022 = 3k, \text{ 所以 } k = 674,$$

$$\text{令 } \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1, \text{ 可得 } \frac{2024-k}{2k+2} > 1, \text{ 即 } 2022 > 3k, \text{ 所以 } k < 674,$$

$$\text{令 } \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1, \text{ 可得 } \frac{2024-k}{2k+2} < 1, \text{ 即 } 2022 < 3k, \text{ 所以 } k > 674,$$

$$\text{所以 } a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{674}, a_{675} > a_{676} > \cdots > a_{2023} > a_{2024},$$

$$a_{674} = a_{675},$$

因为对任意的  $k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$ , 都有  $a_k \leq a_t$ , 所以  $t = 674$  或  $t = 675$ .

19. **思路导引** (1) 根据广义组合数公式代入即可求解;

(2) 根据  $1.1^{1.8} = (1+0.1)^{1.8}$ , 代入广义二项式定理的展开式即可求解;

(3) 分析式子特征, 考虑  $(1+x)^2 = (1+x)^{0.7} \cdot (1+x)^{1.3}$ , 再根据展开式中  $x^{20}$  的系数即可求解.

$$\text{【解】} (1) C_4^6 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 0 \times (-1)}{6!} = 0, C_{0.5}^2 =$$

$$\frac{0.5 \times (-0.5)}{2!} = -\frac{1}{8}.$$

$$(2) 1.1^{1.8} = (1+0.1)^{1.8}$$

$$= C_{1.8}^0 + C_{1.8}^1 \cdot 0.1 + C_{1.8}^2 \cdot 0.1^2 + C_{1.8}^3 \cdot 0.1^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1.8}{1} \times 0.1 + \frac{1.8 \times 0.8}{2!} \times 0.1^2 + \frac{1.8 \times 0.8 \times (-0.2)}{3!} \times 0.1^3 + \cdots$$

$$= 1 + 0.18 + 0.0072 - 0.000048 + \cdots$$

$$\approx 1.19.$$

(3) 根据已知条件所给式子, 考虑  $(1+x)^2 = (1+x)^{0.7} \cdot (1+x)^{1.3}$  的展开式中  $x^{20}$  的系数.

左式为  $1+2x+x^2$ , 即  $x^{20}$  的系数为 0,

右式中  $x^{20}$  的系数为  $C_{0.7}^{20} \cdot C_{1.3}^0 + C_{0.7}^{19} \cdot C_{1.3}^1 + C_{0.7}^{18} \cdot C_{1.3}^2 + \cdots + C_{0.7}^1 \cdot C_{1.3}^{19} + C_{0.7}^0 \cdot C_{1.3}^{20}$ ,

所以  $C_{0.7}^{20} \cdot C_{1.3}^0 + C_{0.7}^{19} \cdot C_{1.3}^1 + C_{0.7}^{18} \cdot C_{1.3}^2 + \cdots + C_{0.7}^1 \cdot C_{1.3}^{19} + C_{0.7}^0 \cdot C_{1.3}^{20} = 0$ .

### 第三章高考强化

#### 刷真题

1. **C** 【解析】甲、乙两人选读的课外读物中恰有 1 种相同的选法共有  $C_6^1 C_5^1 C_4^1 = 120$  (种), 故选 C.

2. **B** 【解析】先从 5 名志愿者中选出 1 名志愿者参加星期六、星期日两天的公益活动, 再从剩下的 4 名志愿者中选出 2 名志愿者分别参加星期六、星期日的公益活动, 共有  $C_5^1 A_4^2 = 60$  (种) 不同的安排方式, 故选 B.

3. **B** 【解析】先将丙和丁捆在一起有  $A_2^2$  种排列方式, 然后将

点悟: 相邻多用捆绑法, 不排首尾多用插空法

其与乙、戊排列有  $A_3^3$  种排列方式, 最后将甲插入中间两空中的一个, 有  $C_2^1$  种排列方式, 则由分步乘法计数原理得不同的排列方式共有  $A_2^2 A_3^3 C_2^1 = 24$  (种), 故选 B.

4.  $\frac{1}{2}$  【解析】列举法: 假设乙固定按照 2, 4, 6, 8 的顺序, 则甲所有的可能如表所示.

1 3 5 7√	5 1 3 7√
1 3 7 5√	5 1 7 3
1 5 3 7√	5 3 1 7√
1 5 7 3	5 3 7 1
1 7 3 5√	5 7 1 3
1 7 5 3√	5 7 3 1
3 1 5 7√	7 1 3 5√
3 1 7 5	7 1 5 3√
3 5 1 7	7 3 1 5√
3 5 7 1	7 3 5 1√
3 7 1 5	7 5 1 3
3 7 5 1	7 5 3 1

从中找均小于 2, 4, 6, 8 与有 3 个数字分别小于 2, 4, 6, 8 的情况, 此时甲得 0 分或 1 分, 符合上述情况的有表中打√的 12 种情况.

那么甲的总得分不小于 2 分也有 12 种情况, 由古典概型概

点悟: 固定乙的顺序, 将甲的情况排列出来, 去挑选, 也可以从中判断甲有 2 个及以下的数字超过乙的. 如果改变乙的顺序, 其情况是类似的

率公式得所求概率为  $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ .

**多种解法** 不妨设甲四轮比赛中所选卡片顺序固定, 即四轮比赛所选卡片依次为 1, 3, 5, 7, 此时乙有  $A_4^4 = 24$  (种) 选法. 甲可能得 0, 1, 2, 3 分, 但不可能得 4 分.

当甲得 2 分时,

若甲第二、三轮的数字大, 则有 1 种选法;

若甲第二、四轮的数字大, 则有  $A_2^2 + 1 = 3$  (种) 选法;

若甲第三、四轮的数字大, 则有  $A_2^2 A_2^2 + 1 + A_2^2 = 7$  (种) 选法, 共有  $1+3+7=11$  (种) 选法.

当甲得 3 分时, 甲第一轮的数字小, 其他三轮的数字大, 有 1 种选法.

故甲的总得分不小于 2 的概率  $P = \frac{11+1}{24} = \frac{1}{2}$ .

5.  $\frac{7}{15}$  【解析】记取出的三个球上的数字按先后顺序分别为  $a$ ,

$b, c$ , 则共有  $A_6^3 = 120$  (种) 可能. 由题知,  $|m-n| =$

$$\left| \frac{a+b}{2} - \frac{a+b+c}{3} \right| = \left| \frac{a+b-2c}{6} \right| \leq 0.5, \text{ 即 } |a+b-2c| \leq 3. \text{ 根据对称}$$

性知,  $c=1$  或 6 时, 均有 2 种可能;

点悟:  $c=1$  时,  $a=2, b=3$  或  $a=3, b=2$ ;  $c=6$  时,  $a=4, b=5$  或  $a=5, b=4$

$c=2$  或 5 时, 均有 10 种可能;

点悟:  $c=2$  时,  $a, b$  的值可为  $(1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1), (3, 4), (4, 3)$ , 共 10 种情况, 同理可分析  $c=5$  的情况

$c=3$  或 4 时, 均有 16 种可能, 故满足条件的共有  $2 \times 2 + 2 \times 10 +$

点悟:  $c=3$  时,  $a, b$  的值可为  $(1, 2), (2, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (1, 6), (6, 1), (2, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 2), (2, 6), (6, 2), (4, 5), (5, 4)$ , 共 16 种情况, 同理可分析  $c=4$  时的情况

$2 \times 16 = 56$  (种) 可能, 故所求概率  $P = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$ .

6. **B** 【解析】依题意, 令  $x=1$ , 可得  $1=a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$ ,

令  $x=-1$ , 可得  $81=a_4-a_3+a_2-a_1+a_0$ ,



## 高中必刷题 数学

以上两式相加可得  $82 = 2(a_4 + a_2 + a_0)$ ,

所以  $a_0 + a_2 + a_4 = 41$ , 故选 B.

**7. -20** 【解析】 $(x-1)^6$  的展开式的通项为  $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \cdot (-1)^r$  (其中  $0 \leq r \leq 6, r \in \mathbb{N}$ ),

令  $6-r=3$ , 得  $r=3$ , 故  $x^3$  的系数为  $C_6^3 \cdot (-1)^3 = -20$ .

**特别注意** 此题容易漏掉负号, 不要忘记  $(-1)^3 = -1$ .

**8. 5** 【解析】二项式  $\left(\frac{1}{3} + x\right)^{10}$  的展开式的通项为  $T_{k+1} =$

$$C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} x^k. \text{ 由 } \begin{cases} C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} > C_{10}^{k-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{11-k}, \\ C_{10}^k \left(\frac{1}{3}\right)^{10-k} > C_{10}^{k+1} \left(\frac{1}{3}\right)^{9-k}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{29}{4} < k < \frac{33}{4}.$$

又  $k \in \mathbb{N}_+$ , 所以  $k=8$ .

所以所求系数的最大值为  $C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5$ .

**多种解法** 展开式中系数最大的项一定在下面的 5 项中:

$$C_{10}^5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 x^5, C_{10}^6 \left(\frac{1}{3}\right)^4 x^6, C_{10}^7 \left(\frac{1}{3}\right)^3 x^7, C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 x^8, C_{10}^9 \left(\frac{1}{3}\right)^1 x^9, \text{ 计算可得, 所求系数的最大值为 } C_{10}^8 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 5.$$

**9. 20** 【解析】 $\left(\frac{x^2}{3} + \frac{3}{x^2}\right)^6$  的展开式的通项为  $T_{r+1} =$

$$C_6^r \left(\frac{x^2}{3}\right)^{6-r} \cdot \left(\frac{3}{x^2}\right)^r = C_6^r 3^{2r-6} x^{12-4r}, \text{ 令 } 12-4r=0, \text{ 得 } r=3, \text{ 故常数项为 } C_6^3 \times 3^0 = 20.$$

**10. 15** 【解析】 $(1-2x)^4 = a_0 + a_1(-2x) + a_2(-2x)^2 + a_3(-2x)^3 + a_4(-2x)^4$ , 结合  $(1-2x)^4$  的展开式可知  $a_0 = C_4^0 = 1$ ,  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$ .

**巧思:**  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2^4 - 1 = 15$

**多种解法** (赋值法) 令  $x=0$ , 可得  $a_0=1$ ;

$$\text{令 } x=-\frac{1}{2}, \text{ 可得 } a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \left[1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right]^4 = 16, \\ \text{故 } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 16 - a_0 = 15.$$

## 刷原创

**1. D** 【解析】根据题意, 含  $xy^3$  的项为  $C_5^1 x C_4^3 (2y)^3 (-3) = -480xy^3$ , 所以  $xy^3$  的系数是  $-480$ . 故选 D.

**2. A** 【解析】由题意可得,  $\left(1 + \frac{3x}{y}\right)(x-2y)^8 = (x-2y)^8 +$

$$\frac{3x}{y}(x-2y)^8 = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{8-k} (-2y)^k + \frac{3x}{y} \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{8-k} (-2y)^k, \text{ 故含 } x^3 y^5 \text{ 的项为 } [(-2)^5 C_8^5 + 3 \times (-2)^6 C_8^6] x^3 y^5, \text{ 即 } 3584x^3 y^5, \text{ 所以 } x^3 y^5 \text{ 的系数为 } 3584. \text{ 故选 A.}$$

**3. B** 【解析】由题意得, 这 7 人中有 2 人既会韩语也会日语, 3

**巧思:** 可归类于会韩语, 也可归类于会日语, 故可从此信息入手进行分类讨论

人只会韩语, 2 人只会日语.

(1) 当不派既会韩语也会日语的学生时, 有  $C_3^2 \times C_2^1 = 6$  (种) 安排方法;

(2) 当派 1 名既会韩语也会日语的学生时, 有  $C_2^1 (C_3^2 C_2^1 + C_3^1) = 18$  (种) 安排方法;

(3) 当派 2 名既会韩语也会日语的学生时, 有  $C_2^2 + C_3^1 \times C_2^1 = 2 + 6 = 8$  (种) 安排方法.

综上, 共有  $6 + 18 + 8 = 32$  (种) 不同的安排方法. 故选 B.

**4. C** 【解析】先将“福”字灯、“寿”字灯排好, 排列数为  $\frac{A_5^5}{A_2^2 A_3^3} =$

10, 形成 6 个空隙, 选 2 个空隙各放 1 个“禄”字灯, 有  $C_6^2 = 15$  种方法, 则所有“禄”字灯不相邻的方法数为  $10 \times 15 = 150$ .

当三个“福”字灯相邻时, 先排“福”字灯、“寿”字灯, 一共有

$\frac{A_3^3}{A_2^2} = 3$  种方案, 形成了 4 个空隙, 选 2 个插入“禄”字灯, 有

$C_4^2 = 6$  种方法, 此时所有“禄”字灯不相邻的方法数为  $3 \times 6 = 18$ . 所以不同的悬挂顺序的种数为  $150 - 18 = 132$ . 故选 C.

## 第四章 概率与统计

### 4.1 条件概率与事件的独立性

#### 4.1.1 条件概率

#### 刷基础

**1. B** 【解析】对于 A, 由  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$  及  $0 < P(A) \leq 1$ , 可得

$P(B|A) \geq P(AB)$ , A 错误;

对于 B,  $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)}$ , 即  $P(AB) = P(B)$ , 当事件 B 包含于事件 A 时成立, B 正确;

对于 C, 当 B 为不可能事件时,  $P(B|A) = 0$ , C 错误;

对于 D,  $P(A|A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$ , 故 D 错误. 故选 B.

**2. D** 【解析】因为  $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{3}{4}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$ , 所以

$P(AB) = \frac{3}{16}$ , 又  $P(A) = \frac{1}{3}$ , 所以  $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{9}{16}$ . 故

**敲黑板:** 注意  $P(A|B)$  与  $P(B|A)$  的区别, 从公式上记忆, 谁在竖线的后边谁做分母

选 D.

**3.  $\frac{5}{6}$**  【解析】因为  $P(A) = P(B)$ ,  $P(AB) = \frac{5}{8}$ ,  $P(A+B) =$

$$P(A) + P(B) - P(AB) = 2P(B) - \frac{5}{8} = \frac{7}{8}, \text{ 所以 } P(B) = \frac{3}{4}, \text{ 由}$$

$$\text{条件概率公式可得 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{5}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{5}{6}.$$

**4. D** 【解析】设“某一天的空气质量为优良”为事件 A, “随后一天的空气质量为优良”为事件 B, 则  $P(A) = 0.75$ ,  $P(AB) = 0.6$ , 则已知某天的空气质量为优良, 随后一天的空气质量为