

## 刷素养

11.  $\frac{17}{81}$  【解析】比赛3局甲赢得胜利的概率  $p_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ ;

👉黑板: 谁先胜3局谁赢得胜利, 则最少要比赛3局, 最多比赛5局才能分出胜负, 故只需讨论甲比赛3局、4局、5局赢得胜利的情况

$$\text{比赛4局甲赢得胜利的概率 } p_2 = C_3^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27};$$

$$\text{比赛5局甲赢得胜利的概率 } p_3 = C_4^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{81},$$

$$\text{所以甲赢得胜利的概率为 } p_1 + p_2 + p_3 = \frac{3+6+8}{81} = \frac{17}{81}.$$

## 4.2 随机变量

## 4.2.1 随机变量及其与事件的联系

## 刷基础

1. C 【解析】选项A, B是随机事件; 选项D中球的个数是定值2; 选项C中白球的个数可能的取值为0, 1, 2, 可以用随机变量表示. 故选C.

**规律方法** 如果一个随机试验的结果对应的变量具有以下两点特征, 则该变量为随机变量.

(1) 随机试验的结果具有可变性, 即每次试验对应的结果不尽相同.

(2) 随机试验的结果具有确定性, 即每次试验总是恰好出现这些结果中的一个, 但在一次试验之前却不能确定这次试验会出现哪一个结果.

2. BC 【解析】对于A, 水位在(0, 18]内变化, 不能一一列举, 所以不是离散型随机变量, 故A错误;

对于B, 需要的抛掷次数可以一一列举, 所以是离散型随机变量, 故B正确;

对于C, 做对数学第11题的人数可以一一列举, 所以是离散型随机变量, 故C正确;

对于D, 方程  $x^2 - 2x - 3 = 0$  的实根有2个, 是确定的值, 不是随机变量, 故D错误. 故选BC.

**特别注意** 由离散型随机变量的概念可知, 它是可以一一列举出来的, 而连续型随机变量可以在某个实数范围内连续取值.

3. D 【解析】A表示的是随机试验中  $\xi = 8$  的其中一个结果, B, C中表示的是随机试验中  $\xi = 4$  的部分结果, 而D是表示随机试验中  $\xi = 4$  的所有试验结果. 故选D.

4. D 【解析】由试验次数X的含义可知, 至少试验一次才能找到能开锁的钥匙, 如果第五次依然没有开锁, 那么能确定剩下的一把为能开锁的钥匙, 所以X的所有可能取值为1, 2, 3, 4, 5. 故选D.

5. 3, 2, 1, 0 300, 100, -100, -300 【解析】甲回答问题的结果可能为回答全对, 两对一错, 两错一对, 全错, 共四种结果, 故X的所有可能取值是3, 2, 1, 0, 相应得分为300分, 100分, -100分, -300分, 因此甲回答这三个问题的总得分Y的所有可能取值为300, 100, -100, -300.

6. 【解】(1)  $X = i$ , 表示接到*i*次急救电话,  $i = 0, 1, 2, \dots$ .

(2) 随机变量X所有可能的取值为0, 1, 2, 3.

$X = 0$  表示“取出的3个球中有0个白球”;  $X = 1$  表示“取出的3个球中有1个白球”;  $X = 2$  表示“取出的3个球中有2个白球”;  $X = 3$  表示“取出的3个球全是白球”.

7.  $\frac{14}{15}$  【解析】由已知, Y的所有可能取值为0, 2, 4, 6, 8,

$$\text{且 } P(Y=0) = \frac{1}{15}, P(Y=2) = \frac{2}{15}, P(Y=4) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5},$$

$$P(Y=6) = \frac{4}{15}, P(Y=8) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{则 } P(Y>0) = P(Y=2) + P(Y=4) + P(Y=6) + P(Y=8) = \frac{14}{15}.$$

👉巧思: 也可根据  $P(Y>0) = 1 - P(Y \leq 0)$  求解

8. 【解】(1) 当  $X = 120$  时, 即快递员送件120次, 结合题意有  $Y = 190$ .

(2) 由题意可得  $Y = 70 + X$ .

(3) 由(2)可知  $P(Y \geq 220) = P(X \geq 150) = 0.8$ ,

所以  $P(X < 150) = 1 - P(X \geq 150) = 1 - 0.8 = 0.2$ .

**名师点拨** (1) 求解此类问题的关键是明确随机变量的取值所表示的含义. 对于变量间的关系问题, 可类比函数关系求解.

(2) 对立事件的概率和为1, 常借助此关系求对立事件的概率.

## 4.2.2 离散型随机变量的分布列

## 刷基础

1. A 【解析】 $\because$  从盒子中任取3个球来用, 用完后装回盒中, 此时盒中旧球个数  $X = 4$ , 即旧球的个数增加了2个(用完后新球成为旧球),  $\therefore$  取出的3个球中必有2个新球, 即取出的3个球必为1个旧球2个新球,  $\therefore P(X=4) = \frac{C_2^1 C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$ . 故选A.

**规律方法** 求解与随机变量有关的概率问题, 应准确理解随机变量的含义, 本题中  $X = 4$  的含义是取出的3个球必为1个旧球, 2个新球.

2. A 【解析】令  $X = k$ , 则  $X = k$  表示前*k*个球为白球, 第*k*+1个球为红球. 则  $P(X=0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ,  $P(X=1) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$ ,  $P(X=2) = \frac{4}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{5}$ , 则  $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{3} + \frac{4}{15} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ . 故选A.

3. 【解】(1) 若胜一场, 则其余三场为平, 共有  $C_4^1 = 4$  种情况; 若胜两场, 则其余两场为一负一平或两平, 共有  $C_4^2 C_2^1 + C_4^2 = 18$  种情况; 若胜三场, 则其余一场为负或平, 共有  $C_4^3 \times 2 = 8$  种情况; 若胜四场, 则只有1种情况. 综上, 共有  $4+18+8+1=31$  种情况.

(2)  $X$  的所有可能取值为 1, 2, 3, 4,

由(1)得,  $P(X=1)=\frac{4}{31}, P(X=2)=\frac{18}{31}, P(X=3)=\frac{8}{31}, P(X=4)=\frac{1}{31},$

所以  $X$  的分布列为

$X$	1	2	3	4
$P$	$\frac{4}{31}$	$\frac{18}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{1}{31}$

#### 规律方法 求离散型随机变量的分布列的步骤

(1) 找出随机变量  $X$  的所有可能的取值  $x_i (i=1, 2, 3, 4, \dots, n)$ .

(2) 求出  $X$  取每一个值的概率  $P(X=x_i)=p_i$ .

(3) 写出  $X$  的分布列.

4. 【解】(1) 1 班进入决赛的概率为  $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ ,

2 班进入决赛的概率为  $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ ,

3 班进入决赛的概率为  $\frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$ .

因为  $\frac{3}{5} > \frac{1}{2} > \frac{4}{9}$ ,

所以 3 班进入决赛的可能性最大.

(2) 由(1)可知, 1 班、2 班、3 班进入决赛的概率分别为  $\frac{4}{9}$ ,

$\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{5}$ .

$\xi$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 则  $P(\xi=0) = \left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{9}$ ,  $P(\xi=2) = \left(1-\frac{4}{9}\right) \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{9} \times \left(1-\frac{1}{2}\right) \times \frac{3}{5} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} \times \left(1-\frac{3}{5}\right) = \frac{7}{18}$ ,  $P(\xi=3) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{15}$ ,

所以  $P(\xi=1) = 1 - P(\xi=0) - P(\xi=2) - P(\xi=3) = 1 - \frac{1}{9} -$

$\frac{7}{18} - \frac{2}{15} = \frac{11}{30}$ ,

所以  $\xi$  的分布列为

$\xi$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{15}$

5. B 【解析】由离散型随机变量分布列的性质可得  $\frac{1}{3} + 1 - 2q +$

$3q^2 - q + \frac{1}{3} = 1$ , 即  $(3q-1)(3q-2) = 0$ , 解得  $q = \frac{1}{3}$  或  $q = \frac{2}{3}$ .

当  $q = \frac{2}{3}$  时  $1-2q < 0$ , 不合题意,  $\therefore q = \frac{1}{3}$ . 故选 B.

→ 避坑: 概率值非负, 求得的参数需要验证, 防止出现多解

链接教材 此题由教材第 70 页例 1 改编而来, 分布列具有

两个性质:

(1)  $p_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$ ;

(2)  $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ .

这两条性质中, 一方面可以利用概率之和为 1 列方程求出分布列中某些参数, 另一方面可以检验分布列是否正确, 但要注意概率之和为 1 是分布列正确的必要不充分条件.

6. B 【解析】由题意得  $0.21 + 0.20 + 0.05 + \frac{x}{10} + 0.10 + 0.10 +$

$\frac{y}{100} + 0.10 = 1$ , 化简得  $10x + y = 24$ ,

又  $x, y \in \mathbf{N}$  且  $x, y \in [0, 9]$ , 所以  $x=2, y=4$ .

所以  $P\left(\frac{3}{2} < X < \frac{11}{3}\right) = P(X=2) + P(X=3) = 0.20 + 0.25 = 0.45$ . 故选 B.

7. BC 【解析】对于 A 选项,  $X$  取每一个可能值的概率是非负数, 故 A 选项错误;

对于 B 选项,  $X$  取所有可能值的概率和为 1, 故 B 选项正确;

对于 C 选项,  $X$  取某两个可能值的概率等于取其中每个值的概率之和, 故 C 选项正确;

对于 D 选项,  $X$  在某一范围内取值的概率等于它取这个范围内各个值的概率之和, 故 D 选项错误. 故选 BC.

8. A 【解析】由题意得  $a + \frac{1}{3} + 5a + \frac{1}{6} = 1$ , 解得  $a = \frac{1}{12}$ , 而  $P(Y \geq$

$5) = P(2X+1 \geq 5) = P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{5}{12} + \frac{1}{6} =$

$\frac{7}{12}$ . 故选 A.

规律方法 已知离散型随机变量  $\xi$  的分布列, 求离散型随机变量  $\eta=f(\xi)$  的分布列的关键是弄清楚  $\xi$  取每一个值时对应的  $\eta$  的值, 再把  $\eta$  取相同的值时所对应的事件的概率相加, 列出  $\eta$  的分布列即可.

9. 【解】(1) 由题表可得  $n$  的分布列如表所示.

$n$	140	150	160	170	180	190	200
$P$	0.1	0.2	0.16	0.16	0.14	0.14	0.1

(2) 若 A 水果日需求量为 140 千克,

则  $X = 140 \times (15-10) - (150-140) \times (10-8) = 680$  (元), 所以  $P(X=680) = 0.1$ .

若 A 水果日需求量不小于 150 千克, 则  $X = 150 \times (15-10) = 750$  (元), 所以  $P(X=750) = 1-0.1=0.9$ .

则  $X$  的所有可能取值为 680, 750.

故  $X$  的分布列如表所示.

$X$	680	750
$P$	0.1	0.9

10. BCD 【解析】由题意可知 B, C, D 中的随机事件只有两种结果 0 或 1, 所以随机变量均服从两点分布, 而抛掷一枚骰子, 所得点数  $X$  的所有取值为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 所以 A 中的随机变量不服从两点分布. 故选 BCD.



11. D 【解析】由题意可知,当  $Y=-1$  时,  $2X-1=-1$ , 解得  $X=0$ . 又因为随机变量  $X$  服从两点分布, 且  $P(X=1)=0.4$ , 所以  $P(Y=-1)=P(X=0)=0.6$ , 故选 D.

12. A 【解析】离散型随机变量  $X$  服从两点分布, 则  $P(X=0)+P(X=1)=1$ , 又  $P(X=0)=3P(X=1)$ , 所以  $P(X=0)=\frac{3}{4}$ . 故选 A.

13.  $\frac{19}{20}$   $\frac{1}{20}$  【解析】 $X=0$  表示抽取的一个产品为合格品, 概率为 95%, 即  $a=\frac{19}{20}$ ;  
 $X=1$  表示抽取的一个产品为次品, 概率为 5%, 即  $b=\frac{1}{20}$ .

#### 4.2.3 二项分布与超几何分布

##### 刷基础

1. D 【解析】由题意知第 12 次取到红球, 前 11 次中恰有 9 次取到红球, 2 次取到白球, 由于每次取到红球的概率均为  $\frac{3}{8}$ ,

→ 避坑: 注意只符合  $n$  次独立重复试验

则  $P(X=12)=C_{11}^9 \left(\frac{5}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{8}\right)^9 \times \frac{3}{8}=C_{11}^2 \left(\frac{5}{8}\right)^2 \left(\frac{3}{8}\right)^9$ , 故选 D.

2. D 【解析】运动员每次投篮命中篮筐的概率为  $p$ , 且每次投篮的结果相互独立, 运动员连续 8 次投篮可以看成 8 次独立重复试验.

由题可得  $C_8^3 p^3 (1-p)^5 = \frac{1}{25} C_8^5 p^5 (1-p)^3$ , 即  $(1-p)^2 = \frac{1}{25} p^2$ , 解得  $p = \frac{5}{6}$  或  $p = \frac{5}{4}$  (舍), 故选 D.

##### 名师点拨 区分独立重复试验与相互独立事件

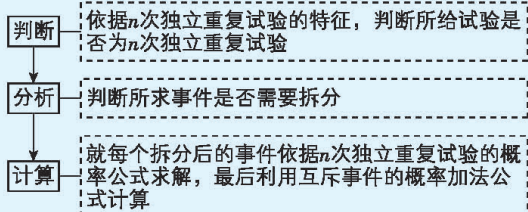
(1) 两事件相互独立是指一个事件的发生与否对另一个事件发生的概率没有影响.

(2) 独立重复试验是指在同样条件下可重复进行的, 各次之间相互独立的一种试验, 每次试验都只有两种结果 (即事件要么发生, 要么不发生), 并且在任何一次试验中, 事件发生的概率均相等.

(3) 一般来说, 有“恰好”字样的题用独立重复试验的概率公式计算更简单, 就像有“至少”“至多”字样的题用对立事件的概率公式计算更简单一样.

3. C 【解析】记“红灯等待时间不少于两分钟”为事件  $A$ , 由题意可知, 事件  $A$ : 小明遇到 2 个或 3 个红灯, 所以  $P(A) = C_3^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{7}{27}$ . 故选 C.

##### 规律方法 $n$ 次独立重复试验概率的求解步骤



4.  $\frac{64}{81}$  【解析】进行五轮射击后, 甲的总得分不小于 3 分的概率

$$P = C_5^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_5^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right) + C_5^5 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{64}{81}.$$

5. D 【解析】设  $X$  表示试验未成功的次数, 由题意知  $X \sim B(9, 1-p)$ , 则恰好有 2 次试验未成功的概率  $P(X=2) = C_9^2 p^7 (1-p)^2$ , 故选 D.

**链接教材** 此题改编自教材第 76 页例 1, 判断一个随机变量是否服从二项分布, 根据以下两点: ①对立性, 即一次试验中只有两种结果——“成功”和“不成功”, 而且有且仅有一个发生; ②重复性, 即试验在相同条件下可以独立重复地进行  $n$  次, 每次试验中“成功”和“不成功”的概率都保持不变.

6. D 【解析】依题意知质点的移动可看作 8 次独立重复试验, 设质点向左移动的次数为  $X$ , 则  $X \sim B\left(8, \frac{3}{5}\right)$ , 质点从原点  $O$  出发, 共移动 8 次, 最后质点位于 -2 的位置, 则需向右移动 3 次, 向左移动 5 次, 所以质点位于 -2 的位置的概率为  $P(X=5) = C_8^5 \left(\frac{2}{5}\right)^3 \left(\frac{3}{5}\right)^5$ . 故选 D.

7. A 【解析】依题意  $X \sim B(3, 0.9)$ . 因为 3 个投保人中, 活过 65 岁的人数为  $X$ , 所以没活过 65 岁的人数为  $3-X$ , 因此  $Y = 100(3-X) + 5X$ , 即  $Y = 300 - 95X$  ( $X=0, 1, 2, 3$ ), 所以  $P(Y < 200) = P(X=2) + P(X=3) = C_3^2 \times 0.9^2 \times (1-0.9) + C_3^3 \times 0.9^3 = 0.972$ . 故选 A.

8. BC 【解析】记  $n$  次中硬币正面朝上的次数为  $X$ , 则  $P(X=k) = C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k} = C_n^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, n$ .  
当  $n=2$  时,  $P(A) = P(X=1) = C_2^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = P(X=0) + P(X=1) = C_2^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + C_2^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ ,  $P(AB) = P(X=1) = \frac{1}{2}$ , 此时  $P(AB) \neq P(A)P(B)$ , 故 A 错误;

当  $n=3$  时,  $P(A) = P(X=1) + P(X=2) = C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4}$ ,  $P(B) = P(X=0) + P(X=1) = C_3^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$ ,  $P(AB) = P(X=1) = \frac{3}{8}$ , 此时  $P(AB) = P(A)P(B)$ , 故 B 正确;

当  $n \geq 2$  时,  $P(A) = 1 - P(X=0) - P(X=n) = 1 - C_n^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - C_n^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{2^n - 2}{2^n}$ ,  $P(B) = P(X=0) + P(X=1) = C_n^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + C_n^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{n+1}{2^n}$ , 故 C 正确, D 错误. 故选 BC.

9. D 【解析】对于 A 选项, 由概率的基本性质可知,  $a+b=1$ , 故 A 正确;

对于 B 选项, 当  $p = \frac{1}{2}$  时, 离散型随机变量  $X$  服从二项分布

$B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ , 则  $P(X=k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-k}$  ( $k=0, 1, 2, 3, \dots, n$ ), 所以  $a = \left(\frac{1}{2}\right)^n (C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2^{n-1} = \frac{1}{2}$ ,  
 $b = \left(\frac{1}{2}\right)^n (C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2^{n-1} = \frac{1}{2}$ ,

所以  $a=b$ , 故 **B 正确**;

对于 C, D 选项,  $a = C_n^1 p (1-p)^{n-1} + C_n^3 p^3 (1-p)^{n-3} + C_n^5 p^5 (1-p)^{n-5} + \dots$ , 则  $a = \frac{[(1-p)+p]^n - [(1-p)-p]^n}{2} = \frac{1-(1-2p)^n}{2}$ ,

**点悟:** 与二项式定理联系起来进行化简整理

当  $0 < p < \frac{1}{2}$  时,  $a = \frac{1-(1-2p)^n}{2}$  为正数且随着  $n$  的增大而增大,

故 **C 正确**;

当  $\frac{1}{2} < p < 1$  时,  $1-2p < 0$ ,  $(1-2p)^n$  有正有负, 不随  $n$  的增大而增大, 也不随  $n$  的增大而减小, 所以  $a$  不随  $n$  的增大而减小, 故 **D 不正确**. 故选 D.

**10.  $\frac{8}{81}$  【解析】** 因为小球碰到钉子时向左下落的概率为向右下落的概率的 2 倍, 所以小球每次碰到钉子时向左下落的概率为  $\frac{2}{3}$ , 向右下落的概率为  $\frac{1}{3}$ . 要想最终落到 4 号位置, 则小球 4 次碰到钉子的过程中, 有 1 次向左下落, 有 3 次向右下落, 所以所求概率为  $C_4^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$ .

**11. 【解】** (1)  $X$  的所有可能取值为 6, 14, 22, 30.

$$P(X=6) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}, P(X=14) = C_3^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{27}{64},$$

$$P(X=22) = C_3^1 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}, P(X=30) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	6	14	22	30
$P$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

(2) 记  $B_i$  = “甲抽取 4 次抽出题目分值之和为  $i$ ”,  $i=24, 32, 40$ ,

$$\text{则 } P(B_{24}) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, P(B_{32}) = C_2^1 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

当甲抽取 4 次抽出题目分值之和为 24 时, 乙抽取 4 次抽出题目分值之和需为 32 或 40,

$$\text{所以 } P(A|B_{24}) = C_4^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{13}{256};$$

当甲抽取 4 次抽出题目分值之和为 32 时, 乙抽取 4 次抽出题目分值之和需为 40,

$$\text{所以 } P(A|B_{32}) = \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256}.$$

$$\text{故 } P(A) = P(AB_{24}) + P(AB_{32}) = P(B_{24})P(A|B_{24}) + P(B_{32}) \cdot$$

$$P(A|B_{32}) = \frac{9}{16} \times \frac{13}{256} + \frac{3}{8} \times \frac{1}{256} = \frac{123}{4096}.$$

**名师点拨** 第(1)小问考查二项分布的分布列, 抽象出二项分布的模型是解题关键, 抽到 2 分题目小球的个数  $Y$  服从  $B\left(3, \frac{3}{4}\right)$ , 相对而言比较基础; 第(2)小问考查全概率公式, 注意正确地进行分类讨论, 确定好分类标准是关键, 同时还要做到不重不漏.

**12. B 【解析】** 对于 A, 抛硬币是独立重复试验, 正面向上的次数服从二项分布, **A 选项错误**;

对于 B, 15 件产品中有 2 件次品, 不放回地从中取 3 件, 取得的次品数服从超几何分布, **B 选项正确**;

对于 C, 射击一次只有命中和不命中两种结果, 所以命中目标的次数服从两点分布, **C 选项错误**;

对于 D, 盒中有 4 个白球和 3 个黑球, 每次从中摸出一个球且不放回,  $X$  是首次摸出黑球时的摸球次数, 摸球所需次数未知, 不是超几何分布, **D 选项错误**. 故选 B.

**13. A 【解析】** 由题意知, 10 个数中, 1, 3, 5, 7, 9 为阳数, 2, 4, 6, 8, 10 为阴数,

若任取的 3 个数中有 0 个阴数, 则概率为  $\frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}$ ;

若任取的 3 个数中有 1 个阴数, 则概率为  $\frac{C_5^2 \cdot C_5^1}{C_{10}^3} = \frac{5}{12}$ .

故这 3 个数中至多有 1 个阴数的概率  $P = \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{2}$ .

故选 A.

**规律方法** 解决超几何分布问题的两个关键点

(1) 超几何分布是概率分布的一种形式, 一定要注意公式中字母的范围及其意义, 解决问题时可以直接利用公式求解, 但不能机械地记忆.

(2) 超几何分布中, 只要知道  $M, N, n$ , 就可以利用公式求出  $X$  取不同值的概率  $P(X=k)$ , 从而求出  $X$  的分布列.

**14. BD 【解析】** 根据超几何分布的定义可得, **A 错误, B 正确**;

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{3}{7}, \text{ 故 C 错误};$$

$$P(Y \geq 3) = P(Y=3) + P(Y=4) = \frac{C_6^3 C_4^1}{C_{10}^4} + \frac{C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4} = \frac{C_6^3 C_4^1 + C_6^2 C_4^2}{C_{10}^4}, \text{ 故 D 正确. 故选 BD.}$$

**15. 【解】** (1) 设事件  $A$  为“从这 18 名队员中随机选出两人, 这两人来自同一个班级”, 则  $P(A) = \frac{C_4^2 + C_6^2 + C_2^2 + C_5^2}{C_{18}^2} = \frac{6+15+3+10}{153} = \frac{2}{9}$ .

(2) 由题意可知,  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 依题意得,  $X \sim H(18, 2, 4)$ ,

$$\text{故 } P(X=0) = \frac{C_{14}^2}{C_{18}^2} = \frac{91}{153}, P(X=1) = \frac{C_{14}^1 C_4^1}{C_{18}^2} = \frac{56}{153}, P(X=2) =$$

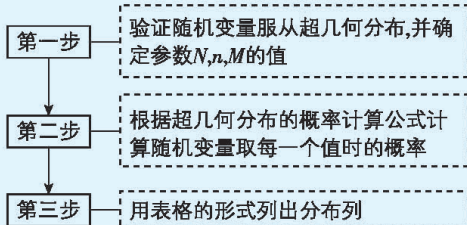
$$\frac{C_4^2}{C_{18}^2} = \frac{2}{51}.$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2
$P$	$\frac{91}{153}$	$\frac{56}{153}$	$\frac{2}{51}$



**链接教材** 本题由教材第80页例4改编而来,求服从超几何分布的随机变量分布列的步骤为



### 刷易错

#### ★易错点1 对二项分布理解不透彻致误

- 16.B** 【解析】①满足独立重复试验的条件, $\xi$ 服从二项分布;  
② $\xi$ 的取值是1,2,3,...,则有 $P(\xi=k)=0.9 \times 0.1^{k-1} (k=1, 2, 3, \dots)$ ,显然不符合二项分布的定义,因此 $\xi$ 不服从二项分布;  
③虽然是有放回地摸球,但随机变量 $\xi$ 的定义是直到摸出白球为止的次数,也就是说前面摸出的一定是红球,最后一次是白球,不符合二项分布的定义;  
④采取不放回抽取,所以 $n$ 次试验是不独立的,因此 $\xi$ 不服从二项分布. 故选B.

**易错警示** 判断一个随机变量是否服从二项分布的关键是看涉及的试验是不是 $n$ 次独立重复试验,以及随机变量是否为这 $n$ 次独立重复试验中某事件发生的次数,满足这两点的随机变量才服从二项分布,否则就不服从二项分布.

#### ★易错点2 对超几何分布概念理解不清致误

- 17.【解】**(1)(2)中总体没有分类,不是超几何分布问题,是重复试验问题.  
(3)(4)符合超几何分布的特征,总体都分为两类,随机变量 $X$ 表示抽取的 $n$ 个个体中某类个体被抽取的个数,是超几何分布.  
(5)中没有给出不合格的数量,无法计算 $X$ 的概率分布,所以不属于超几何分布问题.

**易错警示** 判断一个随机变量是否服从超几何分布,应看三点:(1)总体是否可分为两类明确的对象;  
(2)是否为不放回抽取;  
(3)随机变量是否为样本中其中一类个体的个数.

### 刷提升

- 1.C** 【解析】 $\because$  随机变量 $X$ 服从二项分布 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ ,且 $P(X=3)=P(X=4)>0, \therefore C_n^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = C_n^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n, \therefore C_n^3 = C_n^4, \therefore n=3+4=7, \therefore C_n^2 + A_n^2 = C_7^2 + A_7^2 = \frac{7 \times 6}{2} + 7 \times 6 = 63$ . 故选C.

- 2.C** 【解析】设10名学生中有 $n$ 名不合格,从中抽取3人,其中不合格人数为 $\xi$ ,由 $P(\xi=1)=\frac{21}{40}$ ,得 $\frac{C_n^1 C_{10-n}^2}{C_{10}^3} = \frac{21}{40}$ ,化简得 $n(10-n)(9-n)=6 \times 3 \times 7$ ,解得 $n=3$ ,即本次测试的不合格率为 $\frac{3}{10} \times 100\% = 30\%$ . 故选C.

- 3.C** 【解析】依题意,这4人中,每人去参加甲游戏的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ,去参加乙游戏的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ . 设“这4人中恰有 $i$ 人去参加甲游戏”为事件 $A_i (i=0, 1, 2, 3, 4)$ ,

**点悟:** 可能有0,1,2,3,4人去参加甲游戏,相应的就有4,3,2,1,0人参加乙游戏,对应的 $\xi$ 取4,2,0,2,4

$$P(A_0) = C_4^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}, P(A_1) = C_4^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}, P(A_2) = C_4^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}, P(A_3) = C_4^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}, P(A_4) = C_4^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81},$$

又 $\xi$ 的所有可能取值为0, 2, 4, 而 $P(\xi=0) = P(A_2) = \frac{8}{27}$ , 所以 $P(\xi=2 \text{ 或 } 4) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$ . 故选C.

- 4.D** 【解析】设事件 $A$ 为“ $\xi+\eta=4$ ”,事件 $B$ 为“ $\xi>\eta$ ”,所以 $P(A)=P(\xi=1)P(\eta=3)+P(\xi=2)P(\eta=2)+P(\xi=3)P(\eta=1)$ .

$$\text{又 } P(\xi=1) = \frac{5}{6} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{5}{6}\right) \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{5}{6}\right) \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{14}{45},$$

$$P(\xi=2) = \frac{5}{6} \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{6} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times \frac{1}{3} + \left(1 - \frac{5}{6}\right) \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{43}{90},$$

$$P(\xi=3) = \frac{5}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$P(\eta=1) = C_3^1 \times \frac{3}{5} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{36}{125},$$

$$P(\eta=2) = C_3^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{54}{125},$$

$$P(\eta=3) = C_3^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125},$$

$$\text{所以 } P(A) = \frac{14}{45} \times \frac{27}{125} + \frac{43}{90} \times \frac{54}{125} + \frac{1}{6} \times \frac{36}{125} = \frac{201}{625},$$

$$P(AB) = P(\xi=3)P(\eta=1) = \frac{1}{6} \times \frac{36}{125} = \frac{6}{125},$$

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{10}{67}. \text{ 故选D.}$$


- 5.BC** 【解析】对于A,记 $A$ 为“从甲盒中一次取出3个球,至少取出一个红球”,则 $P(A) = 1 - \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{16}{21}$ ,故A错误;

**点悟:** 取到红球个数 $\xi$ 服从超几何分布 $H(9, 3, 3)$ ,由正难则反的思想,我们可以用对立事件求解

对于B,记 $B$ 为“从乙盒中有放回地取3次球,每次取一个,取到2个白球和1个红球”,则 $P(B) = C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}$ ,故B正确;

对于C,记 $A_i$ 为“从甲盒中不放回地取球,每次取一个,第 $i$ 次取到红球”,则 $P(A_2) = P(A_1 A_2 + \overline{A_1} A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2 | \overline{A_1}) = \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ ,故C正确;

$$\text{对于 D, } P(\overline{A_3} | \overline{A_1} \overline{A_2}) = \frac{P(\overline{A_3} \overline{A_1} \overline{A_2})}{P(\overline{A_1} \overline{A_2})} = \frac{\frac{6}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{7}}{\frac{6}{9} \times \frac{5}{8}} = \frac{4}{7}, \text{ 故}$$

 **思:** 缩小样本空间, 当第一、二次都取到白球时, 样本中还有 7 个球, 其中 4 个白球, 3 个红球, 因此取到白球的概率为  $\frac{4}{7}$ .

D 错误. 故选 BC.

**归纳总结** 在  $n$  次试验中, 某事件  $A$  发生的次数  $X$  可能服从超几何分布或二项分布.

区别	<p>①当 <math>n</math> 次试验是独立重复试验时 (如有放回摸球), <math>X</math> 服从二项分布;</p> <p>②当 <math>n</math> 次试验不是独立重复试验时 (如不放回摸球), <math>X</math> 服从超几何分布</p>
联系	<p>在不放回 <math>n</math> 次试验中, 如果总体数量 <math>N</math> 很大, 而试验次数 <math>n</math> 很小, 此时超几何分布可近似转化成二项分布</p>

6.  $\frac{32}{81}$  【解析】一次掷两枚骰子, 两枚骰子点数之和为 4 的情况有 3 种, 两枚骰子点数之和为 5 的情况有 4 种, 两枚骰子点数之和为 6 的情况有 5 种,

在一次试验中, 出现成功试验的概率为  $\frac{3+4+5}{36} = \frac{1}{3}$ .

设出现成功试验的次数为  $X$ , 则  $X \sim B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ ,

所以恰出现一次成功试验的概率为  $P(X=1) = C_4^1 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$ .

7. 【解】(1) 依题意, 得  $(0.002\ 5 + 0.005\ 0 + 0.010\ 0 + 0.015\ 0 + a + 0.005\ 0) \times 20 = 1$ , 解得  $a = 0.012\ 5$ ,

则不低于 90 分的人数为  $200 \times (0.015\ 0 + 0.012\ 5 + 0.005\ 0) \times 20 = 130$ ,

成绩在  $[130, 150]$  内的, 即优秀的人数为  $200 \times 0.005\ 0 \times 20 = 20$ ,

故这名学生成绩为优秀的概率为  $\frac{20}{130} = \frac{2}{13}$ .

(2) 成绩在  $[90, 110]$  内的有  $200 \times 0.015\ 0 \times 20 = 60$  人,

成绩在  $[110, 130]$  内的有  $200 \times 0.012\ 5 \times 20 = 50$  人,

成绩在  $[130, 150]$  内的有 20 人,

故采用按比例分层随机抽样的方法抽取的 13 名学生中, 成绩在  $[90, 110]$  内的有 6 人, 在  $[110, 130]$  内的有 5 人, 在  $[130, 150]$  内的有 2 人,

所以由题意可知,  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2,  $X$  服从超几何分布  $H(13, 3, 2)$ ,

则  $P(X=0) = \frac{C_{11}^3}{C_{13}^3} = \frac{15}{26}$ ,  $P(X=1) = \frac{C_{11}^2 C_2^1}{C_{13}^3} = \frac{5}{13}$ ,  $P(X=2) =$

$$\frac{C_{11}^1 C_2^2}{C_{13}^3} = \frac{1}{26},$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2
$P$	$\frac{15}{26}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{1}{26}$

8. 【解】(1) 设甲获得“智慧星”称号为事件  $A$ ,

根据相互独立事件的乘法公式,  $P(A) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ , 于

是  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$ ,

即甲没有获得“智慧星”称号的概率是  $\frac{3}{4}$ .

(2) 设乙答对的问题个数为  $X$ , 则  $X \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right)$ ,

由题意, 乙获得“智慧星”称号的概率为  $P(X=4) + P(X=5) = C_5^4 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{11}{243}$ .

(3) 由于乙最多正确回答 5 个题, 甲最多正确回答 3 个题, 所以当乙比甲多答对 3 个题时, 甲可能答对 0, 1, 2 个题,

当甲答对 0 个题, 乙答对 3 个题时,  $P_1 = \frac{1}{4} \times C_3^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10}{243}$ ;

当甲答对 1 个题, 乙答对 4 个题时,  $P_2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} \times C_3^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{5}{486}$ ;

当甲答对 2 个题, 乙答对 5 个题时,  $P_3 = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{972}$ ,

故  $P(M) = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{17}{324}$ .

9. 【解】(1)  $\bar{x} = \frac{40+48+42+46+50+46+52+43+48+45}{10} = 46$ , 10 个

数据中有 4 个数据大于平均数,

所以从这 10 个数据中随机选取 3 个, 记这 3 个数据中大于  $\bar{x}$  的个数为  $X$ ,  $X=0, 1, 2, 3$ , 且  $X$  服从超几何分布  $H(10, 3, 4)$ ,

$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{6}$ ,  $P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^2}{C_{10}^3} = \frac{1}{2}$ ,

$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^1}{C_{10}^3} = \frac{3}{10}$ ,  $P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$ ,

则  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

(2) 由题意知, 每个样本千粒重大于  $\bar{x}$  g 的概率为  $\frac{2}{5}$ .

从 A 品种小麦种子中随机抽取 20 个样本, 千粒重大于  $\bar{x}$  g 的

样本个数记为  $Y$ , 则  $Y \sim B\left(20, \frac{2}{5}\right)$ ,

$P(Y=k) = C_{20}^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{20-k}$  ( $k=0, 1, 2, \dots, 20$ ),

令  $\begin{cases} P(Y=k) \geq P(Y=k+1), \\ P(Y=k) \geq P(Y=k-1), \end{cases}$



$$\text{即} \begin{cases} C_{20}^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{20-k} \geq C_{20}^{k+1} \left(\frac{2}{5}\right)^{k+1} \left(\frac{3}{5}\right)^{19-k}, \\ C_{20}^k \left(\frac{2}{5}\right)^k \left(\frac{3}{5}\right)^{20-k} \geq C_{20}^{k-1} \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \left(\frac{3}{5}\right)^{21-k}, \end{cases}$$

解得  $\frac{37}{5} \leq k \leq \frac{42}{5}$ , 又  $k \in \mathbb{N}$ , 所以  $k=8$ ,

所以从 A 品种小麦种子中随机抽取 20 个样本, 千粒重大于  $\bar{x}$  g 的样本最有可能是 8 个.

#### 4.2.4 随机变量的数字特征

##### 课时 1 离散型随机变量的均值

##### 刷基础

1. C 【解析】由分布列的性质可得  $a+b+2b-a=1$ , 解得  $b=\frac{1}{3}$ ,

则有  $E(X)=2a+3 \times \frac{1}{3}+5\left(\frac{2}{3}-a\right)=\frac{13}{3}-3a=4$ , 解得  $a=\frac{1}{9}$ , 此时满足  $2b-a>0$ , 符合题意. 故选 C.

2. D 【解析】记事件 A, B, C 分别为甲、乙、丙能按时正确解答该题,

由题意得  $P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(C)=0.4$ ,

则  $P(\bar{A})=0.5, P(\bar{B})=0.4, P(\bar{C})=0.6$ .

由题意可知 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$P(X=0)=P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})=0.5 \times 0.4 \times 0.6=0.12$ ,

$P(X=1)=P(\bar{A}\bar{B}C)+P(\bar{A}B\bar{C})+P(A\bar{B}\bar{C})=0.5 \times 0.4 \times 0.6+0.5 \times 0.6 \times 0.6+0.5 \times 0.4 \times 0.4=0.38$ ,

$P(X=2)=P(AB\bar{C})+P(\bar{A}BC)+P(A\bar{B}C)=0.5 \times 0.6 \times 0.6+0.5 \times 0.4 \times 0.4+0.5 \times 0.6 \times 0.4=0.38$ ,

$P(X=3)=P(ABC)=0.5 \times 0.6 \times 0.4=0.12$ ,

所以  $E(X)=0 \times 0.12+1 \times 0.38+2 \times 0.38+3 \times 0.12=1.5$ . 故选 D.

3. 【解】(1) 设丁某参加科目二考试合格和补考合格为事件  $A_1, A_2$ , 参加科目三考试合格和补考合格为事件  $B_1, B_2$ , 事件  $A_1, A_2, B_1, B_2$  相互独立,

设事件  $M$  = “丁某不需要补考就可获得驾驶证”,

则  $P(M)=P(A_1B_1)=P(A_1)P(B_1)=\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}=\frac{3}{10}$ ,

所以丁某不需要补考就可获得驾驶证的概率为  $\frac{3}{10}$ .

(2)  $\xi$  的取值可能为 2, 3, 4, 则

$P(\xi=2)=P(A_1B_1)+P(\bar{A}_1\bar{A}_2)=\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}+\frac{2}{5} \times \frac{2}{5}=\frac{23}{50}$ ;

$P(\xi=3)=P(A_1\bar{B}_1B_2)+P(\bar{A}_1A_2B_1)+P(A_1\bar{B}_1\bar{B}_2)=\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}+\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}+\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}=\frac{21}{50}$ ;

$P(\xi=4)=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{B}_1)=\frac{2}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}=\frac{6}{50}=\frac{3}{25}$ .

所以随机变量  $\xi$  的分布列为

$\xi$	2	3	4
$P$	$\frac{23}{50}$	$\frac{21}{50}$	$\frac{3}{25}$

所以  $E(\xi)=2 \times \frac{23}{50}+3 \times \frac{21}{50}+4 \times \frac{3}{25}=\frac{133}{50}$ .

**链接教材** 此题对应教材第 89 页练习 A 中的第 4 题, 求离散型随机变量  $\xi$  的数学期望的步骤:

- (1) 根据  $\xi$  的实际意义, 写出  $\xi$  的所有可能取值;
- (2) 求出  $\xi$  取每个值的概率;
- (3) 写出  $\xi$  的分布列;
- (4) 利用定义求出数学期望.

其中第 (1) (2) 两条是解答此类题目的关键, 在求解过程中应注重分析概率的相关知识.

4. 0 【解析】因为随机变量  $X$  服从两点分布,  $P(X=1)=0.6$ , 所以  $P(X=0)=1-P(X=1)=0.4$ , 所以  $E(X)=0 \times 0.4+1 \times 0.6=0.6$ . 因为  $\xi=5X-3$ , 所以  $E(\xi)=5E(X)-3=0$ .

**归纳总结** 若给出的随机变量  $\xi$  与  $X$  的关系为  $\xi=aX+b$ ,  $a, b$  为常数, 一般思路是先求出  $E(X)$ , 再利用公式  $E(aX+b)=aE(X)+b$  求  $E(\xi)$ . 也可以利用  $X$  的分布列得到  $\xi$  的分布列, 关键是由  $X$  的取值计算  $\xi$  的取值时对应的概率相等, 再由定义法求得  $E(\xi)$ .

5.  $\frac{5}{6}$  1 【解析】由题意可得  $P(X \geq 1)=1-P(X=0)=1-\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{5}{6}$ . 由题意知, 随机变量  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2,

则  $P(X=0)=\frac{C_2^0}{C_4^2}=\frac{1}{6}, P(X=1)=\frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2}=\frac{2}{3}, P(X=2)=\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$ , 所以  $E(X)=0 \times \frac{1}{6}+1 \times \frac{2}{3}+2 \times \frac{1}{6}=1$ .

因为  $Y=2-X$ , 所以  $E(Y)=2-E(X)=2-1=1$ .

6. ACD 【解析】若是有放回地抽取, 则  $X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$ , 则  $P(X=2)=C_3^2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(1-\frac{2}{5}\right)=\frac{36}{125}, E(X)=3 \times \frac{2}{5}=\frac{6}{5}$ , 故选项 A, C 正确;

若是无放回地抽取, 则  $X$  服从超几何分布  $H(10, 3, 4), P(X=2)=\frac{C_6^1 C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}, E(X)=\frac{3 \times 4}{10}=\frac{6}{5}$ , 故选项 B 错误, D 正确. 故选 ACD.

##### 规律方法 三种常见分布的均值

1. 设  $p$  为一次试验中成功的概率, 则

- (1) 一次试验中  $X$  服从两点分布,  $E(X)=p$ ;
- (2)  $n$  次试验中  $X$  服从二项分布,  $E(X)=np$ .

2.  $X$  服从超几何分布, 即  $X \sim H(N, n, M), E(X)=\frac{n \cdot M}{N}$ .

熟练应用上述公式可大大减少运算量, 提高解题速度.

**7. ACD** 【解析】由题意可知  $X \sim B\left(5, \frac{1}{3}\right)$ , 所以  $P(X=3) = C_5^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$ ,  $E(X) = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$ , 故 **A 正确, B 错误**;

一次实验中,  $A, B$  两处至少遇到一次红灯的概率为  $1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)(1-p) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}p$ , 故 **C 正确**;

当  $p = \frac{2}{5}$  时, 一次实验中没有遇到红灯的概率为  $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$ , 遇到一次红灯的概率为  $\frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{7}{15}$ , 遇到两次红灯的概率为  $\frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15}$ ,

故一次实验中遇到红灯次数的数学期望为  $0 \times \frac{2}{5} + 1 \times \frac{7}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{11}{15}$ , 所以  $E(Y) = 5 \times \frac{11}{15} = \frac{11}{3}$ , 故 **D 正确**. 故选 ACD.

**8. 【解】**(1) 由题意, 得  $(0.010 + 0.020 + a + 0.020 + 0.005) \times 10 = 1$ , 解得  $a = 0.045$ .

(2) 由题意, 抽取的 13 人中成绩在  $[70, 80)$ ,  $[80, 90)$  内的学生人数分别为  $13 \times \frac{0.045}{0.045 + 0.020} = 9$ ,  $13 \times \frac{0.020}{0.045 + 0.020} = 4$ ,

则  $X$  服从超几何分布  $H(13, 3, 4)$ ,  $X$  的可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$P(X=0) = \frac{C_4^0 C_9^3}{C_{13}^3} = \frac{42}{143}, P(X=1) = \frac{C_4^1 C_9^2}{C_{13}^3} = \frac{72}{143},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_9^1}{C_{13}^3} = \frac{27}{143}, P(X=3) = \frac{C_4^3 C_9^0}{C_{13}^3} = \frac{2}{143},$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{42}{143}$	$\frac{72}{143}$	$\frac{27}{143}$	$\frac{2}{143}$

所以  $X$  的数学期望  $E(X) = 0 \times \frac{42}{143} + 1 \times \frac{72}{143} + 2 \times \frac{27}{143} + 3 \times \frac{2}{143} = \frac{12}{13}$ .

**💡** 思: 可根据超几何分布  $X \sim H(N, n, M)$  的期望公式  $E(X) = \frac{nM}{N}$  进行计算, 或者用定义求期望后用超几何分布的期望公式进行检验

**9. 【解】**(1) 由题意可知, 每个坑需要补种的概率  $P = C_3^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_3^1 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ , 则  $n (n \in \mathbb{N}_+)$  个坑中有 4 个坑需要补种的概率为  $C_n^4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ . 欲使  $C_n^4 \left(\frac{1}{2}\right)^n$  最大,

$$\begin{cases} C_n^4 \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq C_{n-1}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \\ C_n^4 \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq C_{n+1}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \end{cases} \text{ 解得 } 7 \leq n \leq 8.$$

因为  $n \in \mathbb{N}_+$ , 所以  $n=7$  或  $n=8$ .

$$\text{当 } n=7 \text{ 时, } C_7^4 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{35}{128}, \text{ 当 } n=8 \text{ 时, } C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{35}{128},$$

所以当  $n=7$  或  $n=8$  时, 有 4 个坑需要补种的概率最大, 最大概率为  $\frac{35}{128}$ .

(2) 易知  $X$  的取值集合为  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , 且  $X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$ ,

$$\text{则 } P(X=0) = C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32},$$

$$P(X=1) = C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32},$$

$$P(X=2) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16},$$

$$P(X=3) = C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16},$$

$$P(X=4) = C_5^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32},$$

$$P(X=5) = C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32},$$

所以  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3	4	5
$P$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$E(X) = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

**10. 【解】**(1) 从  $A$  地区选出的 20 天中随机选出一天, 这一天空气质量等级为“优良”的频率为  $1 - \frac{5}{20} = \frac{3}{4}$ , 因此任取此年 (365 天) 中的一天, 估计  $A$  地区在这一天空气质量等级为“优良”的概率为  $\frac{3}{4}$ .

(2) 由题意及 (1) 知,  $X \sim B\left(3, \frac{3}{4}\right)$ ,

$$\therefore P(X=0) = C_3^0 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}, P(X=1) = C_3^1 \cdot \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \cdot \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{27}{64}, P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64},$$

$\therefore X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

$$\therefore E(X) = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

**💡** 思: 此处直接利用了二项分布  $X \sim B(n, p)$  的数学期望公式  $E(X) = np$ , 也可以利用定义求出期望后用二项分布的数学期望公式检验求出的值是否正确

(3) 由题图知, 在抽取的 20 天中, 两地空气质量等级均为“优良”的有 13 天,

抽取的 3 天中至少有一天两地空气质量等级均为“优良”的对立事件是 3 天中没有任何一天两地的空气质量等级均为“优良”,

所以从抽取的 20 天中随机抽取 3 天, 至少有一天两地空气质量等级均为“优良”的概率  $P = 1 - \frac{C_7^3}{C_{20}^3} = 1 - \frac{7}{228} = \frac{221}{228}$ , 所

**💡** 黑板: 用正难则反的思想, 先求对立事件: 没有任何一天两地空气质量等级为“优良”的概率, 再求所求事件的概率

以至少有一天两地空气质量等级均为“优良”的概率为  $\frac{221}{228}$ .

**11. B** 【解析】设采用方案①②③的损失分别为  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ ,



## 高中必刷题 数学

若采用方案①,则  $E(\xi_1) = 2\,000$ ;

若采用方案②,则  $P(\xi_2 = 11\,800) = 0.01, P(\xi_2 = 1\,800) = 0.99$ ,

$E(\xi_2) = 11\,800 \times 0.01 + 1\,800 \times 0.99 = 1\,900$ ;

若采用方案③,则  $P(\xi_3 = 5\,000) = 0.4, P(\xi_3 = 10\,000) = 0.01, P(\xi_3 = 0) = 0.59$ ,

$E(\xi_3) = 5\,000 \times 0.4 + 10\,000 \times 0.01 + 0 \times 0.59 = 2\,100$ , 而  $1\,900 < 2\,000 < 2\,100$ ,

所以从农场主损失期望的角度出发,农场主采用方案②可以让损失降到最小. 故选 B.

**12. 【解】**(1) 记甲能进入有奖答题为事件 A, 即 3 道无奖题至少答对 2 道题,

所以  $P(A) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}$ .

(2) ① X 的所有可能取值为 0, 100, 200, 400,

因为  $P(X=0) = (1-p) + p(1-p) = 1-p^2, P(X=100) = \frac{1}{2}p^3$ ,

$P(X=200) = \frac{1}{2}p^2, P(X=400) = \frac{1}{2}p^2(1-p)$ ,

所以 X 的分布列为

X	0	100	200	400
P	$1-p^2$	$\frac{1}{2}p^3$	$\frac{1}{2}p^2$	$\frac{1}{2}p^2(1-p)$

所以  $E(X) = 50p^3 + 100p^2 + 200p^2(1-p) = -150p^3 + 300p^2$ .

② 设确定不挑战第 3 道题获得的奖金为  $X_1$ , 则  $X_1$  的分布列为

$X_1$	0	200
P	$1-p^2$	$p^2$

所以  $E(X_1) = 200p^2$ .

设确定挑战第 3 道题获得的奖金为  $X_2$ , 则  $X_2$  的分布列为

$X_2$	0	100	400
P	$1-p^2$	$p^3$	$p^2(1-p)$

$E(X_2) = -300p^3 + 400p^2$ .

令  $E(X_2) - E(X_1) = -300p^3 + 200p^2 > 0$ , 则  $0 < p < \frac{2}{3}$ .

故当  $0 < p < \frac{2}{3}$  时,  $E(X_2) > E(X_1)$ , 建议挑战第 3 道题;

当  $p = \frac{2}{3}$  时,  $E(X_2) = E(X_1)$ , 挑战和不挑战第 3 道题都可以;

当  $\frac{2}{3} < p < 1$  时,  $E(X_2) < E(X_1)$ , 建议不挑战第 3 道题.

### 刷易错

★ 易错点 求随机变量的均值时因分布列不准确致误

**13. 【解】** 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3.

$X=0$  表示第一次取到正品, 则  $P(X=0) = \frac{A_9^1}{A_{12}^1} = \frac{3}{4}$ ,

$X=1$  表示第一次取到次品, 第二次取到正品, 则  $P(X=1) =$

$\frac{A_3^1 A_9^1}{A_{12}^2} = \frac{9}{44}$ , 同理, 可求得  $P(X=2) = \frac{A_3^2 A_9^1}{A_{12}^3} = \frac{9}{220}, P(X=3) =$

$$\frac{A_3^3 A_9^1}{A_{12}^4} = \frac{1}{220}.$$

因此随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

所以随机变量 X 的均值  $E(X) = 0 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{9}{44} + 2 \times \frac{9}{220} + 3 \times$

$$\frac{1}{220} = \frac{66}{220} = \frac{3}{10}.$$

**易错警示** 求随机变量的均值首先应明确随机变量的取值并求出其概率, 然后列出相应的分布列, 根据公式求均值. 在求解此类问题时, 要注意随机变量取值的准确性以及计算的正确性, 本题中的易错之处是试验结果的所有可能情况列举不全, 漏掉了  $X=0$  的情况, 即第一次取到正品的情况.

## 课时 2 离散型随机变量的方差

### 刷基础

**1. C 【解析】** 设  $P(X=1)=p$ , 则可得分布列如下表:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{5}$	$p$	$\frac{4}{5}-p$

根据期望公式得  $E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times p + 2 \times \left(\frac{4}{5} - p\right) = \frac{8}{5} - p = 1$ ,

解得  $p = \frac{3}{5}$ , 所以根据方差公式得  $D(X) = (0-1)^2 \times \frac{1}{5} +$

$(1-1)^2 \times \frac{3}{5} + (2-1)^2 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$ , 所以 X 的标准差为  $\sqrt{\frac{2}{5}} =$

$\frac{\sqrt{10}}{5}$ , 故选 C.

☞ 点悟: 标准差为  $\sqrt{D(X)}$

**2. B 【解析】** 依题意, 有  $\begin{cases} a=b+c, \\ a+b+c=1, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=\frac{1}{2}-c, \end{cases}$  可得  $0 < c <$

$\frac{1}{2}$ , 则  $E(X) = 1 \times b - 1 \times c = \frac{1}{2} - 2c$ ,

而  $D(X) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2c\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - c\right) \left(1 - \frac{1}{2} + 2c\right)^2 +$

$c \left(-1 - \frac{1}{2} + 2c\right)^2$

$= \frac{1}{8} - c + 2c^2 + \left(\frac{1}{2} - c\right) \left(\frac{1}{4} + 2c + 4c^2\right) + c \left(\frac{9}{4} - 6c + 4c^2\right)$

$= -4c^2 + 2c + \frac{1}{4} = -4 \left(c - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}$ ,

则当  $c = \frac{1}{4}$  时,  $D(X)_{\max} = \frac{1}{2}$ . 故选 B.

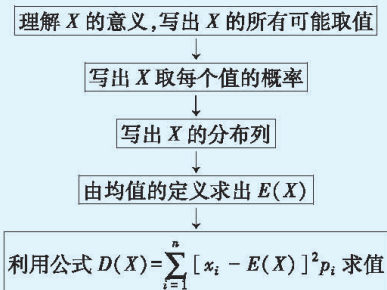
**3. B 【解析】** 由题意得, X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$P(X=0) = \frac{1}{4}, P(X=1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ ,

$P(X=2) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$ ,

所以  $X$  的期望为  $E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ ,  
 所以  $D(X) = \frac{1}{4} \times \left[ \left(0 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{3}{2}\right)^2 \right] = \frac{5}{4}$ . 故选 B.

**规律方法** 求离散型随机变量  $X$  的方差的基本步骤



4. ABD 【解析】对于 A, 因为  $\frac{1}{9} + m + n + \frac{2}{9} = 1$ , 所以  $m + n = \frac{2}{3}$ ,  
 故 A 正确;

对于 B,  $P(X < 2) = 1 - P(X \geq 2) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$ , 故 B 正确;

对于 C, 因为  $m = \frac{1}{9}$ , 所以  $n = \frac{5}{9}$ , 所以  $E(X) = -2 \times \frac{1}{9} + (-1) \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{5}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$ , 故 C 错误;

对于 D,  $P(X^2 = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = m + n = \frac{2}{3}$ ,

$P(X^2 = 4) = P(X = -2) + P(X = 2) = \frac{1}{3}$ ,

则  $X^2$  的分布列如下:

$X^2$	1	4
$P$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

所以  $E(X^2) = 1 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{3} = 2$ ,

则  $D(X^2) = \frac{2}{3} \times (1-2)^2 + \frac{1}{3} \times (4-2)^2 = 2$ . 故 D 正确.

避坑: 注意  $D(X^2)$  与  $[D(X)]^2$  的区别

故选 ABD.

5. BCD 【解析】由题意知,  $X$  可取的值为 0, 1, 2.

$P(X=0) = \frac{C_2^0 C_3^3}{C_7^3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$ ,  $P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$ ,  $P(X=2) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}$ , 则  $P(X \neq 1) = \frac{10+5}{35} = \frac{3}{7}$ ,  $E(X) = \frac{20+10}{35} = \frac{6}{7}$ , 故 A 错误, B 正确;

由题意知,  $Y = -1, 1, 3$ .  $P(Y = -1) = P(X = 2) = \frac{1}{7}$ ,  $P(Y = 1) =$

$P(X = 1) = \frac{4}{7}$ ,  $P(Y = 3) = P(X = 0) = \frac{2}{7}$ ,

$E(Y) = \frac{-1+4+6}{7} = \frac{9}{7}$ ,  $D(Y) = \frac{1}{7} \times \left(-1 - \frac{9}{7}\right)^2 + \frac{4}{7} \times \left(1 - \frac{9}{7}\right)^2 + \frac{2}{7} \times \left(3 - \frac{9}{7}\right)^2 = \frac{80}{49}$ , 故 C, D 正确. 故选 BCD.

6. C 【解析】由题得  $D(X) = 0.01$ , 所以  $D(10X+1) = 10^2 \times 0.01 = 1$ . 故选 C.

7. 【解】(1) 设  $P(\xi=x) = p$ , 则  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + p = 1$ , 得  $p = \frac{1}{6}$ .

又  $E(\xi) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + x \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ , 解得  $x = 2$ .

所以  $D(\xi) = \left(0 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{9}$ .

(2) 因为  $\eta = 3\xi - 1$ , 所以  $E(\eta) = E(3\xi - 1) = 3E(\xi) - 1 = 1$ ,  
 $D(\eta) = D(3\xi - 1) = 9D(\xi) = 9 \times \frac{5}{9} = 5$ .

8. D 【解析】因为  $X \sim B(10, 0.6)$ , 所以  $D(X) = 10 \times 0.6 \times 0.4 = 2.4$ , 所以  $D(2X-1) = 4D(X) = 9.6$ . 故选 D.

9.  $2-2\sqrt{3}$  【解析】由  $X$  服从两点分布, 可得  $E(X) = p, 0 < p < 1$ ,  
 $D(X) = (1-p)p$ , 则  $\frac{4D(X)-3}{2E(X)} = \frac{4p(1-p)-3}{2p} = 2-2p-\frac{3}{2p}$

$\left(2p + \frac{3}{2p}\right) \leq 2-2\sqrt{2p \cdot \frac{3}{2p}} = 2-2\sqrt{3}$ ,

避坑:  $-2p < 0, -\frac{3}{2p} < 0$ , 要先化为  $-\left(2p + \frac{3}{2p}\right)$  的形式才能应用均值不等式, 注意不等号的方向要改变

当且仅当  $2p = \frac{3}{2p}$ , 即  $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$  时, 等号成立,

故  $\frac{4D(X)-3}{2E(X)}$  的最大值为  $2-2\sqrt{3}$ .

**规律方法** (1) 如果随机变量  $X$  服从两点分布, 那么其方差  $D(X) = p(1-p)$  ( $p$  为成功概率).

(2) 如果随机变量  $X$  服从二项分布, 即  $X \sim B(n, p)$ , 那么方差  $D(X) = np(1-p)$ , 计算时直接代入求解, 从而避免了烦琐的计算过程.

10. 【解】(1) 记甲、乙、丙经第一次烧制后合格的事件分别为  $A_1, A_2, A_3$ ,

设  $E$  表示第一次烧制后恰有一件产品合格的事件, 则  
 $P(E) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 0.5 \times (1-0.6) \times (1-0.4) + (1-0.5) \times 0.6 \times (1-0.4) + (1-0.5) \times (1-0.6) \times 0.4 = 0.38$ .

(2) 记甲、乙、丙三件产品经过两次烧制后合格的事件分别为  $A, B, C$ ,

则  $P(A) = 0.5 \times 0.6 = 0.3$ ,  $P(B) = 0.6 \times 0.5 = 0.3$ ,  $P(C) = 0.4 \times 0.75 = 0.3$ .

(3) 由 (2) 知  $P(A) = P(B) = P(C) = 0.3$ ,  
 随机变量  $X$  的可能取值为 0, 1, 2, 3, 且  $X \sim B(3, 0.3)$ ,

故  $P(X=0) = (1-0.3)^3 = \frac{343}{1000}$ ,

$P(X=1) = C_3^1 \times 0.3 \times (1-0.3)^2 = \frac{441}{1000}$ ,

$P(X=2) = C_3^2 \times 0.3^2 \times (1-0.3) = \frac{189}{1000}$ ,



$$P(X=3)=0.3^3=\frac{27}{1\,000}.$$

所以随机变量  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{343}{1\,000}$	$\frac{441}{1\,000}$	$\frac{189}{1\,000}$	$\frac{27}{1\,000}$

故随机变量  $X$  的数学期望  $E(X)=np=3\times 0.3=0.9$ ,

方差  $D(X)=np(1-p)=3\times 0.3\times (1-0.3)=0.63$ .

11. B 【解析】 $\because D(X_{\text{甲}})>D(X_{\text{乙}})$ ,  $\therefore$  乙种水稻比甲种水稻分蘖整齐.

**规律方法** 离散型随机变量的方差反映了一组数据的集中与分散程度, 方差越大, 数据越分散; 方差越小, 数据越集中.

12. 【解】(1) 依题意可得,  $0.5+3a+a+0.1=1$ , 解得  $a=0.1$ ,  
 $\therefore$  乙射中 10, 9, 8 环的概率分别为 0.3, 0.3, 0.2,  
 $\therefore$  乙射中 7 环的概率为  $1-(0.3+0.3+0.2)=0.2$ ,  
 $\therefore X$  的概率分布为

$X$	10	9	8	7
$P$	0.5	0.3	0.1	0.1

$Y$  的概率分布为

$Y$	10	9	8	7
$P$	0.3	0.3	0.2	0.2

(2) 由 (1) 可得

$$E(X)=10\times 0.5+9\times 0.3+8\times 0.1+7\times 0.1=9.2(\text{环}),$$

$$E(Y)=10\times 0.3+9\times 0.3+8\times 0.2+7\times 0.2=8.7(\text{环}),$$

$$D(X)=(10-9.2)^2\times 0.5+(9-9.2)^2\times 0.3+(8-9.2)^2\times 0.1+(7-9.2)^2\times 0.1=0.96,$$

$$D(Y)=(10-8.7)^2\times 0.3+(9-8.7)^2\times 0.3+(8-8.7)^2\times 0.2+(7-8.7)^2\times 0.2=1.21.$$

由于  $E(X)>E(Y)$ , 说明甲平均射中的环数比乙高;

又因为  $D(X)<D(Y)$ , 说明甲射中的环数比乙集中, 比较稳定.

所以甲比乙的技术好, 故应选拔甲射手参加奥运会.

**链接教材** 此题对应教材第 86 页情境与问题, 利用均值和方差的意义解决实际问题时, 需要注意以下两点:

- ①当希望结果比较理想时, 先比较均值, 若均值相等, 则需要再比较方差, 方差越小的越稳定;
- ②当希望结果比较稳定时, 先比较方差, 再考虑均值是否相等或接近.

**归纳总结** 利用均值和方差的意义分析解决实际问题的  
一般步骤

(1) 比较均值. 离散型随机变量的均值反映了离散型随机变量取值的平均水平, 因此, 在实际决策问题中, 需计算均值, 看一下谁的平均水平高.

(2) 在均值相等的情况下计算方差. 方差反映了离散型随机变量取值的稳定与波动、集中与离散的程度. 通过计算方差, 分析一下谁的水平发挥相对稳定.

(3) 下结论. 依据方差的几何意义得出结论.

## 刷易错

### ★易错点 错用公式致误

13. D 【解析】由题意可知  $\begin{cases} a+b+0.4=1, \\ a\times 1+2\times b=E(X)=1, \end{cases}$  解得

$$\begin{cases} a=0.2, \\ b=0.4, \end{cases} \text{故 A, B 错误;}$$

因为  $Y=2X-1$ , 所以  $E(Y)=2E(X)-1=1$ , 故 C 错误;

由条件可知  $D(X)=0.4\times (0-1)^2+0.2\times (1-1)^2+0.4\times (2-1)^2=0.8$ ,

所以  $D(Y)=2^2\times D(X)=3.2$ , 故 D 正确. 故选 D.

**易错警示** (1) 求解  $D(Y)$  时容易错误地类比均值的计算公式, 把  $D(Y)$  错误地求解为  $D(Y)=D(2X-1)=2D(X)-1=0.6$ .

(2) 求解此类问题时, 学会利用公式  $E(aX+b)=aE(X)+b$ ,  $D(aX+b)=a^2D(X)$ , 将求  $E(aX+b)$ ,  $D(aX+b)$  的问题转化为求  $E(X)$ ,  $D(X)$  的问题, 从而可以避免求随机变量  $Y=aX+b$  的分布列的烦琐计算.

## 刷提升

1. A 【解析】由  $\xi\sim B(n, p)$ , 且  $E(\xi)=3$ ,  $D(\xi)=\frac{9}{4}$ ,

$$\text{得} \begin{cases} np=3, \\ np(1-p)=\frac{9}{4}, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} n=12, \\ p=\frac{1}{4}, \end{cases} \text{故选 A.}$$

2. C 【解析】易得  $P(X=2)=C_4^2p^2(1-p)^2$ ,  $P(X=1)=C_4^1p(1-p)^3$ , 由  $2P(X=2)=3P(X=1)$ , 得  $12p^2(1-p)^2=12p(1-p)^3$ , 即  $p(1-p)^2(2p-1)=0$ , 由  $p\in(0, 1)$  知  $p=\frac{1}{2}$ , 故  $X\sim B\left(4, \frac{1}{2}\right)$ , 则  $E(X)=4\times \frac{1}{2}=2$ ,  $D(X)=4\times \frac{1}{2}\times \left(1-\frac{1}{2}\right)=1$ ,

$$\text{而 } E(1)=E(0\cdot X+1)=1, D(2)=D(0\cdot X+2)=0,$$

点悟: 利用期望、方差的性质:  $E(aX+b)=aE(X)+b$ ,  $D(aX+b)=a^2D(X)$

故  $D[E(X)]+E[D(X)]=D(2)+E(1)=1$ . 故选 C.

3. A 【解析】由题意知  $X$  的可能值为 1, 2, 3. 又从 5 个数中随机取 3 个数的取法有  $C_5^3$  种,

$$\text{当 } X=1 \text{ 时, 取法有 } C_4^2 \text{ 种, 则 } P(X=1)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5};$$

$$\text{当 } X=2 \text{ 时, 取法有 } C_3^2 \text{ 种, 则 } P(X=2)=\frac{C_3^2}{C_5^3}=\frac{3}{10};$$

$$\text{当 } X=3 \text{ 时, 取法有 } C_2^2 \text{ 种, 则 } P(X=3)=\frac{C_2^2}{C_5^3}=\frac{1}{10}.$$

$$\therefore E(X)=1\times \frac{3}{5}+2\times \frac{3}{10}+3\times \frac{1}{10}=\frac{3}{2}. \text{ 故选 A.}$$

4. A 【解析】设  $A_k$  表示“第  $k$  局甲获胜”,  $B_k$  表示“第  $k$  局乙获胜”, 则  $P(A_k)=\frac{2}{3}$ ,  $P(B_k)=\frac{1}{3}$ ,  $k=1, 2, 3, 4, 5$ . 由题意知,  $X$  的所有可能取值为 2, 3, 4, 5,

$$\text{则 } P(X=2)=P(A_1A_2)+P(B_1B_2)=P(A_1)P(A_2)+P(B_1)\cdot$$

$$P(B_2)=\frac{5}{9},$$

$$P(X=3) = P(B_1 A_2 A_3) + P(A_1 B_2 B_3) = P(B_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(B_2)P(B_3) = \frac{2}{9},$$

$$P(X=4) = P(A_1 B_2 A_3 A_4) + P(B_1 A_2 B_3 B_4) = P(A_1)P(B_2)P(A_3) \cdot P(A_4) + P(B_1)P(A_2)P(B_3)P(B_4) = \frac{10}{81},$$

$$P(X=5) = 1 - P(X=2) - P(X=3) - P(X=4) = \frac{8}{81}.$$

故  $X$  的分布列为

$X$	2	3	4	5
$P$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{8}{81}$

则  $E(X) = 2 \times \frac{5}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{10}{81} + 5 \times \frac{8}{81} = \frac{224}{81}$ . 故选 A.

**5. D** 【解析】由题意得切比雪夫不等式的形式为  $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq f(D(X), \varepsilon)$ , 而由题得到  $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = P(|X - E(X)|^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{E(|X - E(X)|^2)}{\varepsilon^2}$ , 又由方差的定义得

$$D(X) = E(|X - E(X)|^2), \text{ 则 } P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \text{ 得到 } f(D(X), \varepsilon) \text{ 的具体形式为 } \frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \text{ 故 D 正确. 故选 D.}$$

**6. ACD** 【解析】对于 A 选项, 由题意知, 随机变量  $X$  为取出白球的个数, 从 10 个球 (6 黑 4 白) 中不放回地抽取 4 个,  $X$  服从超几何分布的概念, 故 A 正确.

对于 B, C 选项,  $X$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4,

$$\text{所以 } P(X=0) = \frac{C_4^0 C_6^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{14}, \text{ 又 } P(X=1) = \frac{C_4^1 C_6^3}{C_{10}^4} = \frac{80}{210} = \frac{8}{21},$$

$$P(X=2) = \frac{C_4^2 C_6^2}{C_{10}^4} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}, P(X=3) = \frac{C_4^3 C_6^1}{C_{10}^4} = \frac{24}{210} = \frac{4}{35},$$

$$P(X=4) = \frac{C_4^4 C_6^0}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}, \text{ 所以 } E(X) = 0 \times \frac{1}{14} + 1 \times \frac{8}{21} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{4}{35} + 4 \times \frac{1}{210} = \frac{8}{5}.$$

$$\frac{4}{35} + 4 \times \frac{1}{210} = \frac{8}{5}.$$

$Y$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 4, 由题意得  $X+Y=4$ , 所以  $Y=4-X$ ,

$$\text{所以 } P(Y=0) = P(X=4) = \frac{1}{210}, P(Y=1) = P(X=3) = \frac{4}{35},$$

$$P(Y=2) = P(X=2) = \frac{3}{7}, P(Y=3) = P(X=1) = \frac{8}{21},$$

$$P(Y=4) = P(X=0) = \frac{1}{14},$$

$$\text{所以 } E(Y) = 0 \times \frac{1}{210} + 1 \times \frac{4}{35} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{8}{21} + 4 \times \frac{1}{14} = \frac{12}{5},$$

**巧思:** 因为  $Y=4-X$ , 所以  $E(Y) = E(4-X) = 4 - E(X) = 4 - \frac{8}{5} = \frac{12}{5}$ .

所以  $E(X) < E(Y)$ , 故 B 错误, C 正确.

对于 D 选项, 由题意  $Z=2X+Y$ , 且  $X+Y=4$ , 故  $Z=2X+4-X=X+4$ , 则  $E(Z) = E(X+4) = E(X) + 4 = \frac{8}{5} + 4 = \frac{28}{5}$ , D 正确. 故选 ACD.

**7. AC** 【解析】对于 A, 由题意得事件 A: “甲射击一次, 命中目标”,  $P(A)=p$ , 事件 B: “乙射击一次, 命中目标”,  $P(B)=1-$

$p$ , 则  $X \sim B(n, p)$ ,  $Y \sim B(n, 1-p)$ .

由二项分布的期望公式得  $E(X)=np$ ,  $E(Y)=n(1-p)$ ,

则  $(1-p)E(X)=np(1-p)$ ,  $pE(Y)=np(1-p)$ ,

即  $(1-p)E(X)=pE(Y)$ , 故 A 正确.

对于 B, 由二项分布的方差公式得  $D(X)=np(1-p)$ ,  $D(Y)=np(1-p)$ , 则  $(1-p)D(X)=np(1-p)^2$ ,  $pD(Y)=np^2(1-p)$ ,

则  $(1-p)D(X)$ ,  $pD(Y)$  不一定相等, 故 B 错误.

对于 C, 由题意知, A, B 相互独立, 由独立事件概率公式得  $P(AB)=P(A) \cdot P(B)=p(1-p)$ , 则  $Z \sim B(n, p(1-p))$ , 由二项分布的期望公式得  $E(Z)=np(1-p)$ , 由已知得  $D(Y)=np(1-p)$ , 得到  $E(Z)=D(Y)$ , 故 C 正确.

对于 D, 由二项分布的方差公式得  $D(Z)=np(1-p)[1-p(1-p)]$ , 由已知得  $D(X) \cdot D(Y)=np(1-p) \times np(1-p)=n^2 p^2 (1-p)^2$ ,  $[D(Z)]^2 = n^2 p^2 (1-p)^2 [1-p(1-p)]^2$ , 则  $[D(Z)]^2 \neq D(X)D(Y)$ , 故 D 错误. 故选 AC.

对于 D, 由二项分布的方差公式得  $D(Z)=np(1-p)[1-p(1-p)]$ , 由已知得  $D(X) \cdot D(Y)=np(1-p) \times np(1-p)=n^2 p^2 (1-p)^2$ ,  $[D(Z)]^2 = n^2 p^2 (1-p)^2 [1-p(1-p)]^2$ , 则  $[D(Z)]^2 \neq D(X)D(Y)$ , 故 D 错误. 故选 AC.

**8.  $\frac{2}{3}, \frac{7}{4}$**  【解析】由题意知  $P(X=0) = \frac{(1-p)^2}{4} = \frac{1}{36}$ , 且  $0 \leq$

$$p \leq 1, \text{ 解得 } p = \frac{2}{3}.$$

$$\text{若 } p = \frac{1}{2}, \text{ 则 } P(X=0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16},$$

$$P(X=1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{5}{16},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{7}{16},$$

$$P(X=3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16},$$

则随机变量  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	$\frac{3}{16}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{5}{16} + 2 \times \frac{7}{16} + 3 \times \frac{3}{16} = \frac{7}{4}.$$

**9.  $\frac{27}{8}$**  【解析】蚂蚱跳动 4 次后染上颜色的点的个数  $X$  的可能取值为 2, 3, 4, 5,

**陷阱:** 本题的易错点是开始在 0 处也是一个点, 因为不能原地跳动, 因此  $X$  的最小值为 2

$X=2$  表示蚂蚱在 0, 1 或者 0, -1 之间来回跳动, 则  $P(X=2) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$ ;

$X=3$  表示当蚂蚱由 0 向右最远跳到 2 时, 可以为“右右左左”“右左右右”“左右左右”共 3 种情况, 由对称性知当由 0 向左最远跳到 -2 时, 也有 3 种情况,

当由 0 向左最远跳到 -1, 最右跳到 1 时, 可以为“左右右左”“右左左右”共 2 种情况,

故一共有 8 种情况, 则  $P(X=3) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 8 = \frac{1}{2}$ ;

$X=4$  表示蚂蚱跳动为“右右右左”“左左左右”“左右右右”“右左左左”, 共 4 种情况, 则  $P(X=4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 4 = \frac{1}{4}$ ;

$X=5$  表示蚂蚱跳动为“右右右右”“左左左左”, 共 2 种情况,



则  $P(X=5) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$ , 则  $E(X) = 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 5 \times \frac{1}{8} = \frac{27}{8}$ .

10. 【解】(1) 质量超过 505 克的产品的频率为  $5 \times 0.05 + 5 \times 0.01 = 0.3$ ,

所以质量超过 505 克的产品有  $20 \times 0.3 = 6$  (件).

(2) 质量超过 505 克的产品数量为 6, 则质量未超过 505 克的产品数量为 14,

$X$  的取值可能为 0, 1, 2, 3,  $X$  服从超几何分布,

$$P(X=0) = \frac{C_{14}^3}{C_{20}^3} = \frac{364}{1140} = \frac{91}{285}, P(X=1) = \frac{C_6^1 C_{14}^2}{C_{20}^3} = \frac{6 \times 91}{1140} = \frac{91}{190},$$

$$P(X=2) = \frac{C_6^2 C_{14}^1}{C_{20}^3} = \frac{15 \times 14}{1140} = \frac{7}{38}, P(X=3) = \frac{C_6^3}{C_{20}^3} = \frac{20}{1140} = \frac{1}{57},$$

故  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{91}{285}$	$\frac{91}{190}$	$\frac{7}{38}$	$\frac{1}{57}$

(3) 质量超过 505 克的产品的频率为 0.3, 故可估计从该流水线上任取 1 件产品质量超过 505 克的概率为 0.3,

从流水线上任取 5 件产品互不影响, 该问题可看成 5 次独立重复试验, 即  $Y \sim B(5, 0.3)$ , 则  $E(Y) = 5 \times 0.3 = 1.5$ ,  $D(Y) = 5 \times 0.3 \times (1-0.3) = 1.05$ .

11. 【解】(1) (i) 记  $X$  为顾客所获得的奖励额, 依题意, 得  $X$  的所有可能取值为 20, 30, 60, 70,

$$P(X=20) = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}, P(X=30) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_4^2} = \frac{1}{3},$$

$$P(X=60) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_4^2} = \frac{1}{3}, P(X=70) = \frac{C_1^1 \times C_2^1}{C_4^2} = \frac{1}{6},$$

$X$  的分布列为

$X$	20	30	60	70
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

所以顾客所获得的奖励额的期望  $E(X) = 20 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{1}{3} +$

$$60 \times \frac{1}{3} + 70 \times \frac{1}{6} = 45 \text{ (元)}.$$

(ii) 根据(i)中的分布列,

$$\text{两人所获得的奖励额之和为 100 的概率为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{9};$$

$$\text{两人所获得的奖励额之和为 120 的概率为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9};$$

$$\text{两人所获得的奖励额之和为 130 的概率为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} \times 2 = \frac{1}{9};$$

$$\text{两人所获得的奖励额之和为 140 的概率为 } \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36},$$

$$\text{则 } P(A) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}.$$

(2) 根据商场的预算, 每个顾客获得的平均奖励额为 60 元, 所以先寻找期望为 60 元的可能方案.

①对于面值由 10 元和 50 元组成的情况,

如果选择 (10, 10, 10, 50) 的方案, 因为 60 元是面值之和的

最大值, 所以期望不可能为 60 元;

如果选择 (50, 50, 50, 10) 的方案, 因为 60 元是面值之和的最小值, 所以期望也不可能为 60 元, 因此可能的方案是 (10, 10, 50, 50), 记为方案 1.

②对于面值由 20 元和 40 元组成的情况, 同理可排除 (20, 20, 20, 40) 和 (40, 40, 40, 20) 的方案, 所以可能的方案是 (20, 20, 40, 40), 记为方案 2.

以下是对两个方案的分析:

对于方案 1, 即方案 (10, 10, 50, 50), 设顾客所获得的奖励额为  $X_1$ , 则  $X_1$  的所有可能取值为 20, 60, 100,

$$\text{则 } P(X_1=20) = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}, P(X_1=60) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{3}, P(X_1=$$

$$100) = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6},$$

则  $X_1$  的分布列为

$X_1$	20	60	100
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$X_1 \text{ 的期望为 } E(X_1) = 20 \times \frac{1}{6} + 60 \times \frac{2}{3} + 100 \times \frac{1}{6} = 60,$$

$$X_1 \text{ 的方差为 } D(X_1) = (20-60)^2 \times \frac{1}{6} + (60-60)^2 \times \frac{2}{3} + (100-60)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1600}{3}.$$

对于方案 2, 即方案 (20, 20, 40, 40), 设顾客所获得的奖励额为  $X_2$ , 则  $X_2$  的所有可能取值为 40, 60, 80,

$$\text{则 } P(X_2=40) = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6}, P(X_2=60) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_4^2} = \frac{2}{3}, P(X_2=$$

$$80) = \frac{C_2^2}{C_4^2} = \frac{1}{6},$$

则  $X_2$  的分布列为

$X_2$	40	60	80
$P$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$X_2 \text{ 的期望为 } E(X_2) = 40 \times \frac{1}{6} + 60 \times \frac{2}{3} + 80 \times \frac{1}{6} = 60,$$

$$X_2 \text{ 的方差为 } D(X_2) = (40-60)^2 \times \frac{1}{6} + (60-60)^2 \times \frac{2}{3} + (80-60)^2 \times \frac{1}{6} = \frac{400}{3},$$

由于两种方案的奖励额的期望都符合要求, 但方案 2 奖励额的方差比方案 1 小,

所以应该选择方案 2, 即面值为 2 个 20 元和 2 个 40 元.

### 素养

12.  $m \left[ 1 - \left( \frac{m-1}{m} \right)^n \right]$  【解析】设事件  $A$ : 对于单个盒子, 它至少

装有一个球, 则  $P(A) = 1 - \left( \frac{m-1}{m} \right)^n$ ,

点悟:  $\frac{m-1}{m}$  表示 1 个球放进除这个盒子之外其他盒子的概率

$$\therefore E(X) = m \cdot P(A) = m \left[ 1 - \left( \frac{m-1}{m} \right)^n \right].$$

## 4.2.5 正态分布

## 刷基础

1. A 【解析】∵ 随机变量  $X$  服从正态分布  $N(a, 4)$ , ∴  $P(X > a) = 0.5$ . 由  $P(X > 1) = 0.5$ , 可知  $a = 1$ .

2. B 【解析】由  $X \sim N(3, 9)$  可知  $E(X) = 3, D(X) = 9$ ,  
因此可知  $E(Y) = E\left(\frac{X-3}{3}\right) = E\left(\frac{1}{3}X - 1\right) = \frac{1}{3}E(X) - 1 = 0$ ,  
 $D(Y) = D\left(\frac{X-3}{3}\right) = D\left(\frac{1}{3}X - 1\right) = \frac{1}{3^2}D(X) = 1$ ,  
所以可得  $Y \sim N(0, 1)$ . 故选 B.

3. D 【解析】因为正态曲线  $\varphi_2(x)$  和  $\varphi_3(x)$  关于同一条直线对称, 所以  $\mu_2 = \mu_3$ . 又  $\varphi_2(x)$  的对称轴在  $\varphi_1(x)$  的对称轴的右边, 所以  $\mu_1 < \mu_2 = \mu_3$ .  
因为  $\sigma$  越大, 曲线越“矮胖”,  $\sigma$  越小, 曲线越“瘦高”,  
由题图可知, 正态曲线  $\varphi_1(x)$  和  $\varphi_2(x)$  一样“瘦高”,  $\varphi_3(x)$  明显“矮胖”, 所以  $\sigma_1 = \sigma_2 < \sigma_3$ . 故选 D.

**规律方法** 正态曲线中的均值  $\mu$  表示曲线的对称轴, 标准差  $\sigma$  表示曲线形状的“胖”与“瘦”. 当  $\mu$  一定时, 曲线的形状由  $\sigma$  确定,  $\sigma$  越小, 曲线越“瘦高”, 表示总体的分布越集中;  $\sigma$  越大, 曲线越“矮胖”, 表示总体的分布越分散.

4. C 【解析】对于 A, 随机变量  $X \sim N(\mu_1, 6^2)$ , 可得随机变量  $X$  的方差为  $6^2$ , 即  $D(X) = 36$ , 所以 A 错误;

对于 B, 根据给定的正态曲线, 可得  $\mu_1 = 30, \mu_2 = 34$ , 所以  $\mu_1 < \mu_2$ , 所以 B 错误;

对于 C, 根据正态曲线, 可得当  $X \leq 38$  时, 随机变量  $X$  对应的曲线与  $x$  轴所围成的面积小于  $Y \leq 38$  时随机变量  $Y$  对应的曲线与  $x$  轴所围成的面积, 所以  $P(X \leq 38) < P(Y \leq 38)$ , 所以 C 正确;

对于 D, 根据正态曲线, 可得  $P(X \leq 34) > \frac{1}{2}, P(Y \leq 34) = \frac{1}{2}$ ,  
即  $P(X \leq 34) > P(Y \leq 34)$ , 所以 D 错误. 故选 C.

5. D 【解析】 $P(90 < X < 110) = P(X < 110) - P(X < 90) = 0.8 - 0.5 = 0.3$ , 则  $P(70 < X < 90) = P(90 < X < 110) = 0.3$ . 故选 D.

**规律方法** 充分利用正态曲线的对称性及正态曲线与  $x$  轴所围成的面积为 1 的性质求解.

(1) 熟记正态曲线关于直线  $x = \mu$  对称, 从而可知在关于直线  $x = \mu$  对称的区间上概率相等.

(2)  $P(X < a) = 1 - P(X \geq a); P(X < \mu - a) = P(X > \mu + a)$ .

6. B 【解析】因为随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(6, \sigma^2)$ , 且  $P(\xi < 3a - 4) = P(\xi > -a + 2)$ , 所以  $3a - 4 + (-a + 2) = 6 \times 2 = 12$ , 解

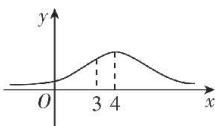
**点悟:** 根据随机变量在关于直线  $x = \mu$  对称的区间上的概率相等求解

得  $a = 7$ . 故选 B.

7. BCD 【解析】对于 A, 因为随机变量  $X$  服从正态分布  $N(4, \sigma^2)$ , 所以  $E(X) = 4$ , 则  $E(3X + 1) = 3E(X) + 1 = 13$ , 故 A 错误;  
对于 B, 由  $P(X < m) = P(X > n)$ , 根据正态曲线关于直线  $x = 4$  对称, 可知  $m + n = 8$ , 故 B 正确;

对于 C, 根据正态曲线, 可知  $P(X \geq 3 + \sigma) > P(X \leq 3 - \sigma)$  显然成立, 故 C 正确;

对于 D, 由  $P(X \geq 3) = 0.68$ , 则  $P(3 \leq X \leq 4) = 0.18$ , 所以  $P(3 \leq X \leq 5) = 0.18 \times 2 = 0.36$ , 故 D 正确. 故选 BCD.



8. ACD 【解析】因为  $\Phi(-a) = P(X \leq -a)$ ,

所以题图中阴影部分的面积为  $\frac{1}{2} - P(X \leq -a) = \frac{1}{2} - \Phi(-a)$ .

再根据图象的对称性可知题图中阴影部分的面积为  $P(X \leq a) - \frac{1}{2} = \Phi(a) - \frac{1}{2}$ .

又  $P(-a \leq X \leq a) = \Phi(a) - \Phi(-a)$ , 所以阴影部分的面积为  $\frac{1}{2} [\Phi(a) - \Phi(-a)]$ . 故选 ACD.

9. AC 【解析】对于正态分布  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 其正态曲线关于直线  $x = \mu$  对称.

已知  $X \sim N(4, \sigma^2)$ , 则该正态曲线关于直线  $x = 4$  对称, 所以

$P(X < 4) = \frac{1}{2}$ , A 选项正确.

$|3.92 - 4| = 0.08, |3.98 - 4| = 0.02, |4.02 - 4| = 0.02, |4.06 - 4| = 0.06$ , 由正态曲线的对称性可知,  $P(3.92 < X < 3.98) = P(4.02 < X < 4.08)$ , 所以  $P(3.92 < X < 3.98) > P(4.02 < X < 4.06)$ , B 选项错误.

因为正态曲线关于直线  $x = 4$  对称,  $|3.95 - 4| = |4.05 - 4|$ , 所以  $P(X < 3.95) = P(X > 4.05)$ , C 选项正确.

$\sigma$  越小, 说明数据越集中在均值  $\mu = 4$  附近, 正态曲线越“瘦高”, 那么  $P(X < 3.98)$  越小, D 选项错误. 故选 AC.

10. A 【解析】由题意可知,  $\mu = 171, \sigma = 4$ , 所以  $P(171 \leq X < 179) =$   
**陷阱:** 注意  $N(171, 16)$  中 16 是  $\sigma^2$ , 不是  $\sigma$

$P(\mu \leq X < \mu + 2\sigma) \approx 0.954 \div 2 = 0.477$ . 故选 A.

**规律方法** 求正态分布中特殊区间的概率问题时, 一定要掌握服从  $N(\mu, \sigma^2)$  的随机变量  $X$  在三个特殊区间上的取值概率, 充分利用正态曲线的对称性和曲线与  $x$  轴之间的面积为 1 的这些特殊性质将所求问题向  $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma), P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma), P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$  转化, 然后利用特定值求出相应概率.

11. C 【解析】由题意知,  $2\sigma \leq 0.4$ , 即  $\sigma^2 \leq 0.04$ , 则  $\frac{2}{n} \leq 0.04$ ,  
解得  $n \geq \frac{2}{0.04} = 50$ . 故选 C.

12. AD 【解析】对于 A, 因为  $X \sim N(70, 25)$ , 所以  $\sigma = \sqrt{25} = 5$ , 故 A 正确;

对于 B, 因为  $\mu = 70$ , 所以这次考试等级分超过 70 分的学生约占一半, 即有 50 人, 故 B 错误;

对于 C,  $P(70 < X < 85) = \frac{1}{2} P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx \frac{1}{2} \times 0.9973 = 0.49865$ , 故 C 错误;

对于 D, 因为  $P(70 \leq X \leq 80) = P(\mu \leq X \leq \mu + 2\sigma) = \frac{1}{2} P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx \frac{1}{2} \times 0.9545 = 0.47725$ ,

所以这次考试等级分在  $[70, 80]$  内的人数约为  $0.47725 \times 100 \approx 48$  人, 故 D 正确. 故选 AD.

13. 【解】(1) 由平均数与方差的计算公式得

$$\mu = \frac{1}{100} \times (10 \times 1.1 + 25 \times 1.3 + 30 \times 1.5 + 25 \times 1.7 + 10 \times 1.9)$$



$$= \frac{1}{100} \times [10 \times (1.1 + 1.9) + 25 \times (1.3 + 1.7) + 30 \times 1.5] = \frac{1}{100} \times 150 = 1.5,$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{100} \times [10 \times (1.1 - 1.5)^2 + 25 \times (1.3 - 1.5)^2 + 30 \times (1.5 - 1.5)^2 + 25 \times (1.7 - 1.5)^2 + 10 \times (1.9 - 1.5)^2]$$

$$= \frac{1}{100} \times (10 \times 0.16 + 25 \times 0.04 + 30 \times 0 + 25 \times 0.04 + 10 \times 0.16) = \frac{1}{100} \times 5.2 = 0.052.$$

故  $\mu = 1.5, \sigma^2 = 0.052$ .

设  $\xi$  表示零件直径, 则  $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 即  $\xi \sim N(1.5, 0.052)$ .

则  $P(\mu - 2\sigma \leq \xi \leq \mu + 2\sigma) = P(1.5 - 2 \times 0.228 \leq \xi \leq 1.5 + 2 \times 0.228) \approx 0.9545$ , 即  $2P(1.044 \leq \xi \leq 1.5) \approx 0.9545$ ,

则  $P(1.044 \leq \xi \leq 1.5) \approx 0.47725$ .

(2) 以频率估计概率, 这批零件直径在  $[1.2, 1.4]$  内的概率为  $\frac{1}{4}$ .

$Z$  的所有可能取值为  $0, 1, 2, 3, 4$ ,

$$P(Z=0) = C_4^0 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{81}{256},$$

$$P(Z=1) = C_4^1 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64},$$

$$P(Z=2) = C_4^2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{27}{128},$$

$$P(Z=3) = C_4^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{64},$$

$$P(Z=4) = C_4^4 \left(\frac{3}{4}\right)^0 \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{256},$$

因此可得  $Z$  的分布列为

$Z$	0	1	2	3	4
$P$	$\frac{81}{256}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{128}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{256}$

因为  $Z$  服从二项分布, 所以  $Z$  的数学期望  $E(Z) = 4 \times \frac{1}{4} = 1$ .

(3) “抽取的零件为甲机器生产”记为事件  $A_1$ , “抽取的零件为乙机器生产”记为事件  $A_2$ , “抽取的零件为次品”记为事件  $B$ ,

$$\text{则 } P(A_1) = \frac{3}{4}, P(A_2) = \frac{1}{4}, P(B|A_1) = 0.3, P(B|A_2) = 0.2,$$

$$\text{则 } P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) = \frac{3}{4} \times 0.3 + \frac{1}{4} \times 0.2 = \frac{11}{40},$$

$$P(A_1|B) = \frac{P(A_1B)}{P(B)} = \frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{4} \times 0.3}{\frac{11}{40}} = \frac{9}{11},$$

$$\frac{\frac{3}{4} \times 0.3}{\frac{11}{40}} = \frac{9}{11},$$

所以这个零件是甲机器生产的概率为  $\frac{9}{11}$ .

### 刷易错

★易错点 错用正态曲线的对称性

14. 【解】因为  $P(X \leq 1) = 0.8413$ ,

所以  $P(X > 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$ ,

所以  $P(X \leq -1) = 0.1587$ ,

所以  $P(-1 < X \leq 0) = 0.5 - 0.1587 = 0.3413$ .

巧思:  $P(-1 < X \leq 0) = P(0 \leq X < 1) = P(X \leq 1) - 0.5 = 0.8413 - 0.5 = 0.3413$

**易错警示** (1) 求解时, 易错解为  $P(-1 < X \leq 0) = 1 - P(X \leq 1) = 0.1587$ .

(2) 针对  $\mu = 0$  的正态分布, 求某区间上的取值概率时常利用如下两个公式:

$$\text{① } P(X < -x_0) = 1 - P(X \leq x_0);$$

$$\text{② } P(a < X < b) = P(X < b) - P(X \leq a).$$

### 刷提升

1. C 【解析】当  $X \sim N(15, \sigma^2)$  时,  $a = P(X \geq 15 - \sigma) = 0.5 + 0.5 \times P(15 - \sigma \leq X \leq 15 + \sigma) \approx 0.8415$ ,

$b = P(15 - \sigma \leq X \leq 15 + 3\sigma) = 0.5 \times P(15 - \sigma \leq X \leq 15 + \sigma) + 0.5 \times P(15 - 3\sigma \leq X \leq 15 + 3\sigma) = 0.5 \times 0.683 + 0.5 \times 0.997 = 0.84$ , 当  $\sigma$  变小时,  $a$  与  $b$  的值不变, 则  $a+b, a-b$  都不变. 故选 C.

2. A 【解析】由题知, 事件  $AB$  为“该同学的数学成绩  $X$  满足  $80 < X \leq 90$ ”.

因为  $\mu - 2\sigma = 100 - 20 = 80, \mu - \sigma = 100 - 10 = 90$ ,

所以  $P(AB) = P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu - \sigma) =$

$$\frac{P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) - (P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma))}{2} \approx \frac{0.95 - 0.68}{2} = \frac{27}{200}.$$

又  $P(A) = P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu) \approx \frac{0.95}{2} = \frac{19}{40}$ , 所以  $P(B|A) =$

$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{27}{200} \times \frac{40}{19}}{\frac{19}{40}} = \frac{27}{95}, \text{ 故选 A.}$$

3. C 【解析】设车床每天加工的零件数超过 35 的台数为  $\xi$ , 由题意知每台车床加工的零件数超过 35 的概率  $P = \frac{1-0.5}{2} = \frac{1}{4}$ ,

所以  $\xi \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right)$ , 则这 3 台车床中至少有一台每天加工的

零件数超过 35 的概率  $P = 1 - P(\xi = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{4}\right)^3 = \frac{37}{64}$ . 故选 C.

4. BD 【解析】由题意易知坐公交的方差比骑自行车的方差大, 即  $X$  的正态曲线较矮胖,  $Y$  的正态曲线更瘦高,

则  $X$  的正态曲线在 38 分钟后在  $Y$  的正态曲线的上方, 可在同一坐标系中作出  $X$  与  $Y$  的大致的正态曲线, 如图, 易知  $P(X > 38) > P(Y > 38)$ , 故 A 错误;

由  $3\sigma$  原则可知  $P(30 - 6 \leq X \leq 30 + 6) = P(34 - 2 \leq Y \leq 34 + 2)$ , 即  $P(24 \leq X \leq 36) = P(32 \leq Y \leq 36)$ , 故 B 正确;

根据条件可知两种方式相对应的概率密度函数分别为

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{72}}, g(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-34)^2}{8}}, \text{ 建立方程得}$$

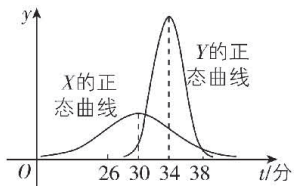
$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-34)^2}{8}} = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-30)^2}{72}} \Rightarrow e^{\frac{(x-34)^2}{8} - \frac{(x-30)^2}{72}} = 3,$$

整理可得  $8x^2 - 552x + 9 \times 34^2 - 30^2 = 72 \ln 3$ , 则  $t_1 + 38 = \frac{552}{8} =$

$69 \Rightarrow t_1 = 31 > 30$ , 故 C 错误;

第 4.2 节综合训练

易知  $P(X \leq 34) > 0.5 = P(Y \leq 34)$ , 故 D 正确. 故选 BD.



5.1 587 【解析】已知本次考试成绩近似服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 由题意可得  $\mu = 65$ .

$$\therefore \frac{228}{10\,000} = 0.022\,8, \text{ 而 } \frac{1-P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma)}{2} \approx 0.022\,8,$$

即  $P(X > \mu+2\sigma) \approx 0.022\,8$ ,  $\therefore \mu+2\sigma = 87$ , 解得  $\sigma = 11$ .

$\therefore$  学生甲在该次考试中成绩为 76 分, 且  $76 = \mu + \sigma$ ,

$$\text{又 } \frac{1-P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma)}{2} \approx 0.158\,7, \text{ 即 } P(X > \mu+\sigma) \approx 0.158\,7.$$

$\therefore$  学生甲在本次考试中的名次大致为  $0.158\,7 \times 10\,000 = 1\,587$  (名).

6. 思路导引 (1) 由  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 且  $\mu = 171$ , 351 分以上共有 57 人, 计算  $\sigma$ , 求出前 400 名参赛者的最低得分, 与甲的得分比较即可;

(2) 假设乙所说为真, 由  $\mu = 201$ , 351 分以上共有 57 人, 计算  $\sigma$ , 求出  $P(X \geq \mu+3\sigma) \approx 0.001\,4$ , 利用小概率事件即可得出结论.

【解】(1) 甲能够获得奖励, 理由如下:

设此次闯关活动的分数记为  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ .

由题意可知  $\mu = 171$ , 因为  $\frac{57}{2\,500} = 0.0228$ ,

$$\text{且 } P(X > \mu+2\sigma) = \frac{1-P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma)}{2} \approx \frac{1-0.954\,5}{2} \approx 0.022\,8,$$

所以  $\mu+2\sigma = 351$ , 则  $\sigma = \frac{351-171}{2} = 90$ , 而  $\frac{400}{2\,500} = 0.16$ ,

$$\text{且 } P(X > \mu+\sigma) = \frac{1-P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma)}{2} \approx \frac{1-0.682\,7}{2} \approx 0.158\,7 < 0.16,$$

可知前 400 名参赛者的最低得分略低于  $\mu+\sigma = 261$ , 而甲的得分为 270 分,

所以甲能够获得奖励.

(2) 假设乙所说为真, 则  $\mu = 201$ ,

$$P(X \geq \mu+2\sigma) = \frac{1-P(\mu-2\sigma \leq X \leq \mu+2\sigma)}{2} \approx \frac{1-0.954\,5}{2} \approx 0.022\,8,$$

而  $\frac{57}{2\,500} = 0.022\,8$ , 所以  $\sigma = \frac{351-201}{2} = 75$ , 从而  $\mu+3\sigma = 201 + 3 \times 75 = 426 < 430$ ,

$$\text{而 } P(X \geq \mu+3\sigma) = \frac{1-P(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma)}{2} \approx \frac{1-0.997\,3}{2} \approx 0.001\,4,$$

所以  $X \geq \mu+3\sigma$  为小概率事件, 即丙的分数为 430 分是小概率事件, 可认为其一般不可能发生, 但却又发生了, 所以可认为乙所说为假.

刷能力

1. C 【解析】对于①, 半小时经过的车辆数可以一一列举出来, ①是离散型随机变量;

对于②, 沿直线  $y = 2x$  进行随机运动的质点, 质点在直线上的位置不能一一列举出来, ②不是离散型随机变量;

对于③, 5 分钟内接到的雷达电话次数可以一一列举出来, ③是离散型随机变量;

对于④, 某同学离开学校的距离可为某一区间内的任意值, 不能一一列举出来, ④不是离散型随机变量.

所以给定的随机变量是离散型随机变量的有①③. 故选 C.

2. D 【解析】对于选项 A, 8 个数据从小到大排列, 由于  $8 \times 0.25 = 2$ ,

所以 25% 分位数应该是第二个数与第三个数的平均数, 即为

$$\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, \text{ 故 A 错误;}$$

对于选项 B,  $D(3-X) = D(X) = 2$ , 故 B 错误;

对于选项 C, 因为  $X \sim B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ , 所以  $E(2X+1) = 2E(X) + 1 =$

$$2n \times \frac{1}{2} + 1 = 9, \text{ 解得 } n = 8, \text{ 故 C 错误;}$$

对于选项 D, 因为随机变量  $X \sim N(3, \sigma^2)$ , 由正态曲线的对称性可得,  $P(X > 4) = P(X < 2) = 1 - 0.62 = 0.38$ , 则  $P(2 < X < 4) = 1 - 2 \times 0.38 = 0.24$ , 所以  $P(3 < X < 4) = 0.12$ , 故 D 正确. 故选 D.

【巧思】还可根据  $P(3 < X < 4) = P(2 < X < 3) = P(X > 2) - 0.5$  求解

3. B 【解析】由题意得  $a+c+\frac{1}{4} = 1$ , 即  $a+c = \frac{3}{4}$  ①,

$$E(\xi) = (-1) \times a + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times c = c - a, E(\xi^2) = (-1)^2 \times a + 0 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times c = c + a,$$

又因为  $D(\xi+2) = D(\xi) = \frac{1}{2}$ , 所以  $D(\xi) = E(\xi^2) - [E(\xi)]^2 =$

$$(c+a) - (c-a)^2 = \frac{1}{2} \text{ ②,}$$

联立①②, 解得  $(c-a)^2 = \frac{1}{4}$ , 所以  $c-a = \pm \frac{1}{2}$ .

当  $c-a = \frac{1}{2}$  时,  $a = \frac{1}{8}, c = \frac{5}{8}$ ; 当  $c-a = -\frac{1}{2}$  时,  $a = \frac{5}{8}, c = \frac{1}{8}$ ,

由  $E(\xi+1) = E(\xi) + 1 = c - a + 1$ , 可得  $E(\xi+1) = \frac{1}{2}$  或  $\frac{3}{2}$ . 故选 B.

4. C 【解析】 $\therefore$  盒中有 10 个螺丝钉,  $\therefore$  从盒中随机地抽取 4 个的取法总数为  $C_{10}^4 = 210$ .  $\therefore$  其中有 3 个是坏的,  $\therefore$  恰有 1 个是坏的, 4 个全是好的, 恰有 2 个是好的, 至多有 2 个是坏的取法种数分别为  $C_3^1 C_7^3 = 105, C_7^4 = 35, C_3^2 C_7^2 = 63, C_7^4 + C_3^1 C_7^3 + C_3^2 C_7^2 = 203$ ,  $\therefore$  恰有 1 个是坏的的概率为  $\frac{105}{210} = \frac{1}{2}$ , 4 个全是好的概率为

$$\frac{35}{210} = \frac{1}{6}, \text{ 恰有 2 个是好的概率为 } \frac{63}{210} = \frac{3}{10}, \text{ 至多有 2 个是坏的}$$

概率为  $\frac{203}{210} = \frac{29}{30}$ . 故选 C.



## 高中必刷题 数学

5. A 【解析】设每一轮训练过关的概率为  $p$ ,

$$\begin{aligned} \text{则 } p &= p_1^2 p_2^2 + p_1^2 \times C_2^1 \times p_2 \times (1-p_2) + p_2^2 \times C_2^1 \times p_1 \times (1-p_1) = -3p_1^2 p_2^2 + \\ &2p_1 p_2 (p_1 + p_2) = -3p_1^2 p_2^2 + 2p_1 p_2 \times \frac{4}{3} = -3p_1^2 p_2^2 + \frac{8}{3} p_1 p_2. \end{aligned}$$

$$0 < p_1 p_2 \leq \left( \frac{p_1 + p_2}{2} \right)^2 = \frac{4}{9}, \text{ 当且仅当 } p_1 = p_2 = \frac{2}{3} \text{ 时等号成立.}$$

☞ 点悟: 利用基本不等式的“和定积最大”确定  $p_1 p_2$  的范围是关键

$$\text{函数 } y = -3x^2 + \frac{8}{3}x \text{ 的图象开口向下, 对称轴方程为 } x = \frac{4}{9},$$

$$\text{所以 } 0 < -3p_1^2 p_2^2 + \frac{8}{3} p_1 p_2 \leq -3 \times \left( \frac{4}{9} \right)^2 + \frac{8}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{27}.$$

$$\text{依题意, } X \sim B(n, p), \text{ 则 } E(X) = n \left( -3p_1^2 p_2^2 + \frac{8}{3} p_1 p_2 \right) = 16,$$

$$n = \frac{16}{-3p_1^2 p_2^2 + \frac{8}{3} p_1 p_2} \geq \frac{16}{\frac{16}{27}} = 27, \text{ 所以至少需要 27 轮. 故选 A.}$$

6. B 【解析】由题意得球的总数为  $5+n$ , 取 3 个球的情况种数为  $C_{5+n}^3$ , 取出的球是 2 黑 1 白的情况种数为  $C_2^2 C_n^1$ ,

因为一次从中任意取出 3 个球, 取出的球是 2 个黑球, 1 个白球的概率为  $\frac{15}{28}$ , 所以  $\frac{C_2^2 C_n^1}{C_{5+n}^3} = \frac{15}{28}$ , 所以  $280n = 15 \times$

$$\frac{(5+n)(4+n)(3+n)}{6}, \text{ 化简得 } 112n = (5+n)(4+n)(3+n),$$

$$112n = (n^2 + 9n + 20)(3+n), n^3 + 12n^2 - 65n + 60 = 0, (n-3)(n^2 + 15n - 20) = 0,$$

$$\text{得 } n = 3 \text{ 或 } n^2 + 15n - 20 = 0, \text{ 由 } n^2 + 15n - 20 = 0, \text{ 得 } n = \frac{-15 \pm \sqrt{305}}{2} \notin \mathbb{N}_+, \text{ 所以 } n = 3.$$

一次性从中任取 4 个球时, 设从袋子中取出  $k$  个黑球, 则取出白球为  $4-k$  个, 所以  $X = k + 2(4-k) = 8-k$ ,

由  $|X-7| \leq 1$ , 得  $6 \leq X \leq 8$ , 则  $6 \leq 8-k \leq 8$ , 得  $0 \leq k \leq 2$ , 即  $k$  的取值为 0, 1, 2.

当  $k=0$  时,  $4-k=4$  不合题意; 当  $k=1$  时, 即取出 1 个黑球 3

☞ 点悟: 因为白球总个数  $n=3$

个白球, 则有  $C_1^1 C_3^3 = 5$  种方法; 当  $k=2$  时, 即取出 2 个黑球 2

个白球, 则有  $C_2^2 C_3^2 = 30$  种方法, 所以  $P(|X-7| \leq 1) = \frac{5+30}{C_8^4} =$

$$\frac{35}{70} = \frac{1}{2}. \text{ 故选 B.}$$

7. AC 【解析】对于 A, 因为  $n = 10\,000 > 2\,000$ ,  $p = 0.000\,5 < 0.05$ , 所以此时泊松分布满足二项分布的近似的条件,  $\lambda = 10\,000 \times 0.000\,5 = 5$ , A 正确.

$$\text{对于 B, } P(Y \geq 2) = 1 - P(Y=0) - P(Y=1) = 1 - \frac{5^0}{0!} e^{-5} - \frac{5^1}{1!} e^{-5} = 1 - 6e^{-5}, \text{ B 错误.}$$

$$\text{对于 C, } P(Y=0) = \frac{5^0}{0!} e^{-5} = e^{-5}, \text{ C 正确.}$$

☞ 点悟: 当  $Y \geq 1$  时, 大肠杆菌会死亡, 故只有  $Y=0$  时能存活

$$\text{对于 D, } P(Y=k+1) - P(Y=k) = \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} e^{-5} - \frac{5^k}{k!} e^{-5} =$$

$$\left[ \frac{5^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{5^k}{k!} \right] e^{-5} = \left( \frac{5}{k+1} - 1 \right) \frac{5^k}{k!} e^{-5}, \text{ 当 } k=4 \text{ 时, } P(Y=k+1) -$$

$P(Y=k) = 0$ ; 当  $k < 4$  时,  $P(Y=k+1) - P(Y=k) > 0$ ; 当  $k > 4$  时,  $P(Y=k+1) - P(Y=k) < 0$ , 故当  $k=4$  或 5 时,  $P(Y=k)$  取最大值, D 错误. 故选 AC.

8. ACD 【解析】由题意知,  $\mu = 100, \sigma^2 = 100$ , 故 A 正确;

$$P(100-10 \leq X \leq 100+10) = P(90 \leq X \leq 110) = 0.682\,7,$$

$$P(X < 90) = \frac{1}{2} [1 - P(90 \leq X \leq 110)] = 0.158\,65,$$

$$P(X \geq 90) = 1 - P(X < 90) = 0.841\,35 < 0.86 = 86\%, \text{ 故 B 错误;}$$

$$P(70 < X \leq 130) = P(100-30 < X \leq 100+30) = 0.997\,3,$$

$$\therefore 1\,000 \times 0.997\,3 \approx 997 \text{ (人)}, \text{ 故 C 正确;}$$

$$P(100-20 \leq X \leq 100+20) = P(80 \leq X \leq 120) = 0.954\,5,$$

$$\therefore P(X < 80) = P(X \geq 120) = \frac{1}{2} [1 - P(80 \leq X \leq 120)] = 0.022\,75, \text{ 故 D 正确. 故选 ACD.}$$

9. AD 【解析】扔出骰子, 奇数点向上的概率为  $\frac{1}{2}$ , 偶数点向上的概率也是  $\frac{1}{2}$ .

对于 A, 若两次运动后, 小球位于原点, 小球在两次运动之中

一定 1 次向左 1 次向右, 故其概率为  $C_2^1 \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$ , 故 A 正确;

对于 B, 设这个随机变量为  $X$ , 则  $X$  的可能取值为  $-3, -1, 1, 3$ ,

$$\text{其中 } P(X=-3) = P(X=3), P(X=-1) = P(X=1),$$

$$\text{故其期望 } E(X) = -3 \times P(X=-3) + 3 \times P(X=3) + (-1) \times P(X=-1) + 1 \times P(X=1) = 3[P(X=3) - P(X=-3)] + [P(X=1) - P(X=-1)] = 0, \text{ 故 B 错误;}$$

对于 C, 第一次扔完骰子小球位于  $-1$ , 即第一次向左移动, 且第五次扔完骰子小球位于  $1$ , 则后续 4 次移动中小球向右 3

次, 向左 1 次, 故其概率为  $\frac{1}{2} \times C_4^3 \times \left( \frac{1}{2} \right)^4 = \frac{1}{8}$ , 故 C 错误;

☞ 点悟: 将位置点数分解成向左、向右的次数, 即可结合二项分布的概率进行求解

对于 D, 第五次扔完骰子, 小球位于  $1$ , 即 2 次向左, 3 次向右,

$$\text{故其概率 } p_1 = C_5^3 \left( \frac{1}{2} \right)^5 = \frac{5}{16},$$

$$\text{小球位于 } 3, \text{ 即 4 次向右, 1 次向左, 故其概率 } p_2 = C_5^4 \left( \frac{1}{2} \right)^5 =$$

$$\frac{5}{32}, \text{ 则有 } p_1 > p_2, \text{ 故 D 正确.}$$

故选 AD.

10.  $\frac{8}{81}$  【解析】(1) 甲胜乙、丙, 且甲平或负丁:

$$\text{① 乙胜丙, 且乙平或负丁, 概率为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3^5};$$

$$\text{② 乙胜丁, 且乙平或负丙, 同①, 概率为 } \frac{4}{3^5},$$

$$\text{因此, (1) 的概率为 } \frac{8}{3^5}.$$

$$\text{(2) 甲胜乙、丁, 且甲平或负丙, 同(1), 概率为 } \frac{8}{3^5}.$$

(3) 甲胜丙、丁, 甲平或负乙:

$$\text{① 甲平乙, 乙胜丙, 且乙平或负丁, 此时概率为 } \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3^5};$$

②甲平乙,乙胜丁,且乙平或负丙,同①,概率为 $\frac{2}{3^5}$ ;

③甲负乙,乙平或负丙、丁,此时概率为 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3^5}$ ,

因此,(3)的概率为 $\frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^5} + \frac{4}{3^5} = \frac{8}{3^5}$ .

综上,甲胜两场且乙胜一场的概率为 $\frac{8}{3^5} + \frac{8}{3^5} + \frac{8}{3^5} = \frac{8}{81}$ .

**11. 7. 68 10** 【解析】由二项分布的定义可知, $X \sim B(12, 0.8)$ ,

$$\text{故 } D(2X) = 2^2 D(X) = 4 \times 12 \times 0.8 \times (1-0.8) = 7.68.$$

设该同学投篮最有可能命中 $m$ 次,

$$\text{则有 } \begin{cases} P(X=m) \geq P(X=m+1), \\ P(X=m) \geq P(X=m-1), \end{cases}$$

$$\text{即 } \begin{cases} C_{12}^m 0.8^m 0.2^{12-m} \geq C_{12}^{m+1} 0.8^{m+1} 0.2^{11-m}, \\ C_{12}^m 0.8^m 0.2^{12-m} \geq C_{12}^{m-1} 0.8^{m-1} 0.2^{13-m}, \end{cases}$$

解得 $\frac{47}{5} \leq m \leq \frac{52}{5}$ ,因为 $m$ 为正整数,所以 $m=10$ .

**12. 思路导引** (1)甲、乙两名学生共答对2个问题分为:甲答对2个乙答对0个,甲答对1个乙答对1个,分别计算概率相加得答案.

(2)设学生甲答对的题数为 $X$ ,则 $X$ 的所有可能取值为1,2,3,分别求出相应的概率,从而求出 $E(X), D(X)$ ;

(3)设学生乙答对题数为 $Y$ ,由题意知 $Y \sim B(3, \frac{2}{3})$ ,从而求出 $E(Y), D(Y)$ ,比较 $E(X)$ 与 $E(Y), D(X)$ 与 $D(Y)$ ,得到应选拔哪个学生代表学校参加竞赛.

【解】(1)由题意得甲、乙两名学生共答对2个问题的概率

$$P = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} \times C_3^0 \times \left(\frac{2}{3}\right)^0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} \times C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{15}.$$

点悟: 甲答题情况符合超几何分布,乙答题情况符合二项分布

(2)设学生甲答对的题数为 $X$ ,则 $X$ 的所有可能取值为1,2,3.

$$P(X=1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{1}{5}, P(X=2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{3}{5}, P(X=3) =$$

$$\frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{1}{5}.$$

则 $X$ 的分布列为

$X$	1	2	3
$P$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{5} = 2, D(X) = \frac{1}{5} \times (1-2)^2 +$$

$$\frac{3}{5} \times (2-2)^2 + \frac{1}{5} \times (3-2)^2 = \frac{2}{5}.$$

(3)设学生乙答对的题数为 $Y$ ,则 $Y$ 的所有可能取值为0,1,2,3,则 $Y \sim B(3, \frac{2}{3})$ ,

$$\text{所以 } E(Y) = 3 \times \frac{2}{3} = 2, D(Y) = 3 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

因为 $E(X) = E(Y), D(X) < D(Y)$ ,

所以应选拔甲学生代表学校参加竞赛.

**13. 【解】**(1)由题意得样本中仅参加某一类课后服务的学生共有 $10+5+3+11+12+12+4+1+1=59$ (人),

又样本中未参加任何课后服务的有14人,

故样本中上个月至少参加了两类课后服务活动的学生共有 $100-59-14=27$ (人),

则从样本中随机抽取1人,该学生上个月至少参加了两类课后服务活动的概率为 $\frac{27}{100}=0.27$ ,

由此,可估计从全校学生中随机抽取1人,该学生上个月至少参加了两类课后服务活动的概率 $P=0.27$ .

(2)样本中,上个月仅参加学业辅导的有 $10+11+4=25$ (人),对应频率为0.25,

以频率估计概率,从全校学生中随机抽取1人,上个月仅参加学业辅导的概率为0.25.

$X$ 的可能取值为0,1,2,3,

$$P(X=0) = C_3^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64},$$

$$P(X=1) = C_3^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64},$$

$$P(X=3) = C_3^3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

则 $X$ 的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

$$X \text{ 的数学期望 } E(X) = 0 \times \frac{27}{64} + 1 \times \frac{27}{64} + 2 \times \frac{9}{64} + 3 \times \frac{1}{64} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{巧思: } X \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right), \text{ 则 } E(X) = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(3)由题意可知随机变量 $X \sim B\left(3, \frac{1}{4}\right)$ ,

$$\text{故 } D(X) = 3 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

又上个月未参加任何课后服务活动的学生有 $n(0 < n \leq 14, n \in \mathbf{N}_+)$ 人在本月选择仅参加学业辅导(样本中其他学生参加课后服务活动的情况在本月没有变化),

则本月从全校学生中随机抽取1人,此学生仅参加学业辅导的概率估计为 $p$ ,且 $\frac{1}{4} < p \leq \frac{39}{100}$ .

又 $Y$ 表示这3人中本月仅参加学业辅导的人数,由题意可知随机变量 $Y \sim B(3, p)$ ,

$$\text{故 } D(Y) = 3p(1-p) \left(\frac{1}{4} < p \leq \frac{39}{100}\right). \text{ 故 } D(Y) > D(X).$$

$$\text{设黑板: 令 } f(x) = 3x(1-x) = -3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}, \text{ 其在}$$

$$\left[\frac{1}{4}, \frac{39}{100}\right] \text{ 上单调递增, 由 } D(X) = f\left(\frac{1}{4}\right), \text{ 得 } D(Y) > D(X)$$



14. 【解】(1) 由题意得  $P(A) = \frac{81+9}{100} = \frac{9}{10}$ ,  $P(B) = \frac{9}{100}$ ,  $P(AB) = \frac{9}{100}$ ,  $P(\overline{AB}) = \frac{81}{100}$ ,

$$\text{所以 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{9}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{10}, P(\overline{B}|A) = \frac{P(\overline{AB})}{P(A)} = \frac{\frac{81}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{10},$$

$$\frac{\frac{81}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{9}{10},$$

$$\text{所以 } \frac{P(B|A)}{P(\overline{B}|A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}, \text{ 所以事件 } A \text{ 发生的条件下事件 } B$$

发生的似然比为  $\frac{1}{9}$ .

(2) ①已知  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 且  $X$  落在  $(0, 40)$  和落在  $(60, 100)$  内的概率相等, 根据正态曲线的对称性, 可得  $\mu = \frac{40+60}{2} = 50$ .

②因为  $P(X \leq 10) = P(X \geq 90) = \frac{1}{10}$ , 所以从一线工作者中

抽 1 人为轻压力工作者的概率为  $P(10 < X < 90) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ , 所以从该区域该行业一线工作人员中随机地抽取 3 名, 设这 3 名工作人员中轻压力工作者人数为  $Y$ , 则  $Y \sim B\left(3, \frac{4}{5}\right)$ , 即  $Y$  的所有可能取值为 0, 1, 2, 3,

$$\text{则 } P(Y=0) = C_3^0 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}, P(Y=1) = C_3^1 \times \frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{12}{125},$$

$$P(Y=2) = C_3^2 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 \times \frac{1}{5} = \frac{48}{125}, P(Y=3) = C_3^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{64}{125}.$$

所以  $Y$  的分布列为

$Y$	0	1	2	3
$P$	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

$$E(Y) = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}.$$

## 4.3 统计模型

### 4.3.1 一元线性回归模型

#### 刷基础

1. C 【解析】考试号只是确定考生的位置, 与成绩无关, 则①错误; 勤能补拙具有相关关系, 水稻产量与气候具有相关关系,

②悟: 两个事物的关系可以是确定的函数关系, 也可以是不确定的相关关系. 相关关系描述的是因果关系或者是伴随关系

则②③正确; 正方形的边长与正方形的面积是函数关系, 则④错误. 故选 C.

#### 规律方法 两个变量是否相关的两种判断方法

(1) 根据实际经验: 借助积累的经验进行分析判断.

(2) 利用散点图: 通过散点图, 观察它们的分布是否存在一定的规律, 直观地进行判断. 如果发现点的分布从整体上看大致在一条直线或曲线附近, 那么这两个变量就是相关的, 注意不要受个别点的位置的影响.

2. B 【解析】相关关系是一种非确定性关系.

对于 A, C, 两个变量具有函数关系, 是一种确定性关系, 故 A, C 错误;

对于 D, 图中的散点分布没有规律, 故两个变量之间不具有相关关系, 故 D 错误;

对于 B, 图中的散点分布在从左下到右上的一条直线附近, 两个变量具有相关关系, 故 B 正确. 故选 B.

#### 名师点拨 散点图中的点从整体上看大致在一条直线附近

(并不是严格在一条直线上), 则称两变量之间具有线性相关关系. 若两变量之间具有线性相关关系且散点图在从左下角到右上角的区域内, 则两变量之间是正相关关系; 若两变量之间具有线性相关关系且散点图在从左上角到右下角的区域内, 则两变量之间是负相关关系.

3. A 【解析】由题意知  $\bar{x} = \frac{3+4+5+6+7}{5} = 5$ ,  $\bar{y} =$

$$\frac{2.5+3+4+4.5+6}{5} = 4,$$

则将点  $(5, 4)$  的坐标代入  $\hat{y} = \hat{b}x - 0.25$ , 解得  $\hat{b} = 0.85$ .

所以当  $x = 10$  时,  $\hat{y} = 0.85 \times 10 - 0.25 = 8.25$ ,

故选 A.

4. C 【解析】因为  $x$  与  $y$  正相关, 所以 A, D 不正确;

对于 B, 因为回归直线过点  $(\bar{x}, \bar{y})$ , 当  $x = 3$  时,  $\hat{y} = 2 \times 3 - 2.4 = 3.6$ , 故 B 不正确;

对于 C, 当  $x = 3$  时,  $\hat{y} = 0.4 \times 3 + 2.3 = 3.5$ , 故 C 正确. 故选 C.

5. B 【解析】由题意可知,  $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ ,

因为回归直线  $\hat{y} = -0.12x + 2.2$  过样本点中心  $(\bar{x}, \bar{y})$ ,

所以  $\bar{y} = -0.12\bar{x} + 2.2 = -0.12 \times 3 + 2.2 = 1.84$ ,

所以  $\frac{1.7+2.4+2.0+1.6+t}{5} = 1.84$ , 解得  $t = 1.5$ . 故选 B.

②悟: 根据回归直线过样本点中心  $(\bar{x}, \bar{y})$  求缺失数据

6. 【解】(1) 由题知  $\bar{x} = \frac{1}{5} \times (2+3+4+5+6) = 4$ ,  $\bar{y} = \frac{1}{5} \times (1+1.1+1.5+1.8+2.1) = 1.5$ ,

$$\text{则 } \hat{b} = \frac{(-2) \times (-0.5) + (-1) \times (-0.4) + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.6}{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2} = 0.29,$$

$$\text{则 } \hat{a} = 1.5 - 0.29 \times 4 = 0.34,$$

故  $y$  关于  $x$  的回归直线方程为  $\hat{y} = 0.29x + 0.34$ .

(2) 由 (1) 知  $y$  关于  $x$  的回归直线方程为  $\hat{y} = 0.29x + 0.34$ , 将  $x = 10$  代入  $\hat{y} = 0.29x + 0.34$ , 得  $\hat{y} = 0.29 \times 10 + 0.34 = 3.24$ , 故当年的日营销费用为 1 000 元时, 日销售量约为 3.24 百件.