

过 A_3 需要走 3 步,其中 2 步向右走,1 步向上走,方法数为 C_3^1 种;

第二步,甲从 A_3 到 N 处需要走 3 步,其中 2 步向上走,1 步向右走,方法数为 C_3^1 种,

故甲经过 A_3 到达 N 处的方法数为 $C_3^1 \cdot C_3^1 = 9$ 种, **B 项错误**.

C 项,甲经过 A_2 的方法数为 $C_3^1 \cdot C_3^1 = 9$ 种,乙经过 A_2 的方法数也为 $C_3^1 \cdot C_3^1 = 9$ 种,

所以甲、乙两人在 A_2 处相遇的方法数为 $C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 = 81$ 种,

故甲、乙两人在 A_2 处相遇的概率为 $\frac{81}{C_6^3 C_6^3} = \frac{81}{400}$, **C 项正确**.

D 项,甲、乙两人沿最短路径行走,只可能在 A_1, A_2, A_3, A_4 处相遇,

若甲、乙两人在 A_1 处相遇,甲经过 A_1 处,则甲的前 3 步必须向上走,乙经过 A_1 处,

则乙的前 3 步必须向左走,两人在 A_1 处相遇的走法种数为 1 种;

若甲、乙两人在 A_2 处相遇,由 C 项可知走法种数为 81 种;

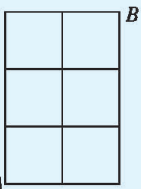
若甲、乙两人在 A_3 处相遇,甲到 A_3 处,前 3 步有 2 步向右走,后 3 步只有 1 步向右走,乙到 A_3 处,前 3 步有 2 步向下走,后 3 步只有 1 步向下走,所以两人在 A_3 处相遇的走法种数为 $C_3^2 C_3^1 C_3^2 C_3^1 = 81$ 种;

若甲、乙两人在 A_4 处相遇,甲经过 A_4 处,则甲的前 3 步必须向右走,乙经过 A_4 处,则乙的前 3 步必须向下走,两人在 A_4 处相遇的走法种数为 1 种,

故甲、乙两人相遇的概率为 $\frac{1+81+81+1}{C_6^3 C_6^3} = \frac{41}{100}$, **D 项错误**. 故选 C.

规律方法 分解与合成策略是复杂的排列组合问题最基本的解题策略之一,把一个复杂问题分解成几个小问题逐一解决,然后依据分解后的结构,用分类加法计数原理和分步乘法计数原理将问题合成,从而得到问题的答案.

“走路线”模型,一般情况下,可以借助“数字化法”,把路线转化为相同数字来进行排列. 比如,向右,定为数字 1,向上,定为数字 2,如图,从 A 到 B 的最短路径的走法,只向右和向上,那么向右走 2 步,向上走 3 步,可以理解为数字 1,1,2,2,2 的全排列,那么相当于只选不排,即五个位置中先放三个 2,剩下的两个位置放 1,共有 C_5^3 种放法,即有 C_5^3 种走法.



12. D 【解析】用 6 根火柴表示数字,所有情况如下:

①1 根火柴和 5 根火柴:1 根火柴可表示的数字为 1;5 根火柴可表示的数字为 8,空位表示 0,则能表示的数共有 4 个 (108, 180, 801, 810).

②2 根火柴和 4 根火柴:2 根火柴可表示的数字为 2,5;4 根火柴可表示的数字为 7,空位表示 0,则能表示的数有 $C_2^1 \times 4 = 8$ (个).

③3 根火柴和 3 根火柴:3 根火柴可表示的数字有 3,4,6,9,空位表示 0,则能表示的数分为 2 类:除 0 外的两个数字相同,可表示的数有 $C_2^1 \times C_4^1 = 8$ (个);除 0 外的两个数字不同,则有 $C_4^2 \times 4 = 24$ (个),所以共有 $8+24=32$ (个).

④1 根火柴、1 根火柴和 4 根火柴:即为 1,1,7 组成的数,共有 3 个 (117, 171, 711).

⑤1 根火柴、2 根火柴和 3 根火柴:即由 1,2 或 5 中的一个数字,3,4,6 或 9 中的一个数字组成的三位数,共有 $C_2^1 C_4^1 A_3^3 = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$ (个).

⑥2 根火柴、2 根火柴、2 根火柴:即由 2 或 5 组成的三位数,分为 2 类:三个数字都相同,共有 2 个 (222, 555);三个数字中的两个数字相同,则有 $C_2^1 \times 3 = 6$ (个),共有 $2+6=8$ (个).

综上所述,可组成的三位数共有 $4+8+32+3+48+8=103$ (个). 故选 D.

规律方法 处理复杂的排列组合问题时,可以把问题转化成几个简单的问题,通过解决这几个简单的问题,找到解题方法,进一步解决原来的问题. 一些不易理解的排列组合题,如果能转化为非常熟悉的模型,如占位填空模型、排队模型、装盒模型等,可使问题迎刃而解.

13. 1 440 336 【解析】若 B 型钢板均不相邻,先将 A 型钢板任意排列,然后将 B 型钢板插入 A 型钢板形成的 5 个空位中的 3 个空位,

由插空法可知, B 型钢板均不相邻的放法种数为 $A_4^4 A_5^3 = 24 \times 60 = 1 440$.

若乙号钢板上方的 A 型钢板的编号之和与其下方的 A 型钢板的编号之和相等,

则乙号钢板上方的 A 型钢板为 1,4 号或 2,3 号,此时不同的放法种数为 $A_2^2 A_2^2 A_2^2 = 8$;

然后再放置甲、丙号钢板,分两种情况讨论:

若甲、丙号钢板相邻,则将甲、丙号钢板捆绑,插入其余 5 块钢板形成的 6 个空位中的 1 个空位,此时不同的放法种数为 $A_2^2 C_6^1 = 12$;

若甲、丙号钢板不相邻,则将甲、丙号钢板插入其余 5 块钢板形成的 6 个空位中的 2 个空位中,此时不同的放法种数为 $A_6^2 = 30$.

综上所述,乙号钢板上方的 A 型钢板的编号之和与其下方的 A 型钢板的编号之和相等的放法种数为 $8 \times (12+30) = 336$.

3.3 二项式定理与杨辉三角

课时 1 二项式定理

刷基础

1. C 【解析】因为 $(a+b)^n (n \in \mathbb{N}_+)$ 的展开式共有 $n+1$ 项,而 $(x+2)^n$ 的展开式共有 12 项,所以 $n=11$, 故选 C.

2. A 【解析】 $S = (x-1)^4 + 4(x-1)^3 + 6(x-1)^2 + 4(x-1) + 1 = C_4^0(x-1)^4 + C_4^1(x-1)^3 + C_4^2(x-1)^2 + C_4^3(x-1) + C_4^4 = [(x-1) + 1]^4 = x^4$, 故选 A.

3. C 【解析】由题意得展开式的第四项为 $C_6^3 (2\sqrt{x})^3 \cdot$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = -160.$$

→ 避坑: 二项展开式的通项表达的是第 $r+1$ 项, 故求第 4 项时 r 取 3

故选 C.

归纳总结 求二项展开式的特定项的常用方法

(1) 求常数项, 令通项公式中“变元”的指数为 0 (即 0 次项);

(2) 求有理项, 一般是先写出通项公式, 在各项系数为有理数的前提下, 令通项中“变元”的指数恰好是整数, 解决这类问题必须合并通项公式中“变元”的指数;

(3) 求第 m 项, 先写出通项公式 T_{k+1} , 令 $k+1=m$, 解出 k , 再代入通项公式求解.

4. D 【解析】二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r \cdot (x^2)^{6-r} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^r = C_6^r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot x^{12-3r}$.
令 $12-3r=0$, 解得 $r=4$, 所以二项展开式中的常数项为 $C_6^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 15 \times \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$. 故选 D.

链接教材 本题对应教材第 32 页例 2, 求二项展开式中的特定项时, 需要先写出二项式的通项再求解, 遇到 x 在分母上的分式时需要先化为 x 的负指数幂的形式.

5. D 【解析】展开式的通项为 $T_{r+1} = C_4^r (xy^{\frac{1}{2}})^{4-r} (x^{\frac{1}{2}}y)^r = C_4^r x^{4-\frac{r}{2}} y^{2+\frac{r}{2}}$, 令 $4-\frac{r}{2}=2+\frac{r}{2}=3 \Rightarrow r=2$, 所以 x^3y^3 的系数是 $C_4^2=6$. 故选 D.

6. D 【解析】二项式 $(1-2x)^8$ 的展开式共有 9 项, 所以中间一项为第 5 项, 所以中间一项的二项式系数为 C_8^4 . 故选 D.

→ 避坑: 注意第几项与二项式系数的对应

7. A 【解析】 $\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_n^r x^{2n-2r} \cdot (-1)^r x^{-\frac{r}{2}} = (-1)^r C_n^r x^{2n-\frac{5r}{2}}$.

由于第 3 项与第 5 项的系数的比值为 $\frac{3}{14}$, 则 $\frac{C_n^2}{C_n^4} = \frac{3}{14}$, 故

$$\frac{\frac{n(n-1)}{1 \times 2}}{\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}} = \frac{3}{14}, \text{ 得 } n^2 - 5n - 50 = 0,$$

即 $(n+5)(n-10)=0$, 解得 $n=10$ (舍负), 故 A 错误;

$$T_{r+1} = (-1)^r C_{10}^r x^{20-\frac{5r}{2}}, \text{ 令 } 20-\frac{5r}{2}=0, \text{ 解得 } r=8,$$

则展开式中的常数项为 $C_{10}^8=45$, 故 B 正确;

令 $20-\frac{5r}{2}=5$, 解得 $r=6$, 则含 x^5 的项的系数为 $(-1)^6 C_{10}^6=210$, 故 C 正确;

令 $20-\frac{5r}{2} \in \mathbb{Z}$, 则 r 为偶数, 此时 $r=0, 2, 4, 6, 8, 10$, 共 6 项为有理项, 故 D 正确. 故选 A.

8. 4 3 【解析】 $\left(\frac{2}{x} - x\right)^n$ 的展开式中第二项和第四项的二项式系数分别为 C_n^1 和 C_n^3 , 所以 $C_n^1 = C_n^3$, 根据组合数的性质可得

$$n=1+3=4.$$

→ 敲黑板: 与首、尾项距离相等的两项的二项式系数相等

对于 $\left(\frac{2}{x} - x\right)^4$, 易得其展开式的通项为 $T_{k+1} = C_4^k (-1)^k 2^{4-k} x^{2k-4}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4$), 令 $2k-4=0$, 得 $k=2$, 所以常数项为 $T_3 = C_4^2 (-1)^2 2^{4-2} = 6 \times 4 = 24$.

在 $\left(x - \frac{1}{x^2} + a\right)^3$ 中, 取得常数的项情况有两种: 选 2 个 x , 1 个 $-\frac{1}{x^2}$, 0 个 a 或者选 0 个 x , 0 个 $-\frac{1}{x^2}$, 3 个 a ,

→ 点悟: 运用排列组合的思想

所以其展开式中的常数项为 $C_3^2 C_1^1 (-1) + C_3^3 a^3 = -3 + a^3 = 24$, 解得 $a=3$.

9. C 【解析】因为 $\left(x - \frac{y}{2}\right) (x+2y)^5 = x(x+2y)^5 - \frac{y}{2}(x+2y)^5$, 其中 $(x+2y)^5$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} (2y)^r$ ($r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$),

所以 $\left(x - \frac{y}{2}\right) (x+2y)^5$ 的展开式中含 x^3y^3 的项为 $x C_5^3 x^2 \cdot$

$$(2y)^3 - \frac{y}{2} C_5^2 x^3 \cdot (2y)^2 = 80x^3y^3 - 20x^3y^3 = 60x^3y^3,$$

所以展开式中 x^3y^3 的系数为 60. 故选 C.

10. B 【解析】由题意可知 $C_5^3 \times 2^3 \times C_m^1 = 800$, 即 $160m = 800$, 解得 $m=5$, 所以含 xy^4 项的系数为 $C_5^1 \times 2^5 \times C_5^4 = 960$. 故选 B.

11. A 【解析】依题意, $(2x+1)^6$ 展开式中含 x^2 的项为 $C_6^4 (2x)^2 = 4C_6^4 x^2$, 其系数为 $4C_6^4 = 60$, $a(x+1)^3$ 展开式中含 x^2 的项为 $a \cdot C_3^2 x^2$, 其系数为 $a \cdot C_3^2 = 3a$. 因为 $(2x+1)^6 + a(x+1)^3$ 的展开式中 x^2 的系数为 0, 所以 $3a+60=0$, 所以 $a=-20$. 故选 A.

刷易错

★易错点 1 未能正确理解二项展开式的项与项数致误

12. D 【解析】由 $n=6$, 可知展开式共有 7 项, 故 A 错误;
 $(\sqrt{2}+x)^6$ 展开式中的第四项为 $C_6^3 (\sqrt{2})^3 x^3$, $(x+\sqrt{2})^6$ 的展开式中的第四项为 $C_6^3 x^3 (\sqrt{2})^3$, 相同, 故 B 错误;
因为展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k (\sqrt{2})^{6-k} x^k$, 所以第一项的系数为 8, 第二项的系数为 $24\sqrt{2}$, 不相等, 故 C 错误;
展开式的通项为 $T_{k+1} = C_6^k (\sqrt{2})^{6-k} x^k$, 当系数为有理数时, $k=0, 2, 4, 6$, 共有四项, 故 D 正确. 故选 D.

易错警示 二项式定理问题中, 使用 $(a+b)^n$ 展开式的通项 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ 解题时要注意通项表示的是第 $k+1$ 项,

而不是第 k 项, 通项中 a 和 b 的位置不能颠倒.

★易错点 2 未能正确转化三项式问题而致误

13. 175 【解析】依题意得含 x^3 项的系数为 $C_6^4 \times (-1)^4 + C_6^3 \times$

点悟: 取 2 次 $x^{\frac{3}{2}}$, 4 次 (-1) , 0 次 $(-2x)$

$$(-2)^3 \times (-1)^3 = 15 + 20 \times 8 = 175.$$

点悟: 取 3 次 $(-2x)$, 3 次 (-1) , 0 次 $x^{\frac{3}{2}}$

14. $\frac{63\sqrt{2}}{2}$ 【解析】由二项式定理得 $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^5 = \left[\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) + \sqrt{2}\right]^5 = C_5^0 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^5 + C_5^1 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^4 \cdot$

$$\sqrt{2} + C_5^2 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^3 \cdot (\sqrt{2})^2 + C_5^3 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot (\sqrt{2})^3 + C_5^4 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right) \cdot (\sqrt{2})^4 + C_5^5 \cdot (\sqrt{2})^5.$$

其中为常数项的有

$$C_5^1 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^4 \cdot \sqrt{2} \text{ 中的第 3 项: } C_5^1 C_4^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \sqrt{2};$$

$$C_5^3 \cdot \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{x}\right)^2 \cdot (\sqrt{2})^3 \text{ 中的第 2 项: } C_5^3 C_2^1 \times \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^3;$$

展开式的最后 1 项: $C_5^5 \times (\sqrt{2})^5$.

$$\text{综上可知, 常数项为 } C_5^1 C_4^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \sqrt{2} + C_5^3 C_2^1 \times \frac{1}{2} \times (\sqrt{2})^3 +$$

$$C_5^5 \times (\sqrt{2})^5 = \frac{63\sqrt{2}}{2}.$$

多种解法

$$\text{原式} = \left(\frac{x^2 + 2\sqrt{2}x + 2}{2x}\right)^5 = \frac{1}{32x^5} \cdot (x^2 + 2\sqrt{2}x + 2)^5 = \frac{1}{32x^5} \cdot (x + \sqrt{2})^{10}, (x + \sqrt{2})^{10} \text{ 的展开式中含 } x^5 \text{ 的项的系数为 } C_{10}^5 \times (\sqrt{2})^5, \text{ 所以所求的常数项为 } \frac{C_{10}^5 \times (\sqrt{2})^5}{32} = \frac{63\sqrt{2}}{2}.$$

易错警示

解决三项式问题有两种方法: 方法一, 反复利用二项式定理, 先把三项式中的某两项视为一项, 用二项式定理展开, 然后再利用二项展开式求解. 方法二, 转化为二项式, 二项式常见的两种转化形式: 三项式恰好是二项式的平方, 则可转化为二项式求解; 三项式可分解因式, 则可转化为两个二项式的积的形式. 利用二项式定理求特定项, 注意二项式定理的灵活应用.

课时 2 二项式系数的性质与杨辉三角

刷基础

1. A 【解析】由题知 $2^n = 32$, 解得 $n = 5$, 则二项式为 $(2-x)^5$, 其

点悟: 二项式 $(a+b)^n$ 的二项式系数和为 2^n

通项为 $T_{r+1} = C_5^r \cdot 2^{5-r} \cdot (-x)^r$, 所以 $(2-x)^5$ 的二项展开式中含 x^2 项的系数为 $C_5^2 \times 2^3 \times (-1)^2 = 80$. 故选 A.

2. 63 【解析】由二项式定理得 $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + 2^3 C_n^3 + \cdots + 2^n C_n^n = (1+2)^n = 3^n$, $\therefore 3^n = 729$, 解得 $n = 6$,

$$\therefore C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = (C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n) - C_n^0 = 2^6 -$$

避坑: 注意首项 C_n^0 的缺失

$$C_n^0 = 64 - 1 = 63.$$

3. 【解】(1) $\because (1+m\sqrt{x})^n$ (m 是正实数) 的展开式的二项式系数之和为 256,

$$\therefore 2^n = 256, \text{ 解得 } n = 8.$$

$$\therefore \text{二项展开式的通项为 } T_{k+1} = C_8^k m^k x^{\frac{k}{2}}, \text{ 令 } \frac{k}{2} = 2, \text{ 得 } k = 4,$$

$$\text{则 } x^2 \text{ 项的系数为 } C_8^4 m^4 = 1\,120,$$

解得 $m = 2$ 或 $m = -2$ (舍去).

$$\therefore \text{展开式中偶数项的二项式系数之和为 } C_8^0 + C_8^2 + C_8^4 + C_8^6 = 8 + 56 + 56 + 8 = 128.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } (1+m\sqrt{x})^n \cdot (1+x) = (1+2\sqrt{x})^8 (1+x) =$$

$$(1+2\sqrt{x})^8 + x(1+2\sqrt{x})^8,$$

$$\therefore \text{含 } x^2 \text{ 项的系数为 } C_8^4 2^4 + C_8^2 2^2 = 1\,120 + 28 \times 4 = 1\,232.$$

4. A 【解析】令 $x = 1$, 有 $(1+m)^4 = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 81$, 解得 $m = 2$ 或 $m = -4$. 故选 A.

链接教材

本题对应教材第 35 页习题 3-3C 第 2 题, “赋值法”普遍适用于恒等式, 是一种重要的方法, 对形如 $(ax+b)^n$, $(ax^2+bx+c)^n$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) 的式子求其展开式的各项系数之和, 常用赋值法, 只需令 $x = 1$ 即可; 对形如 $(ax+by)^n$ ($a, b \in \mathbb{R}$) 的式子求其展开式的各项系数之和, 只需令 $x = y = 1$ 即可.

5. B 【解析】因为 $(2x+1)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$,

$$\text{令 } x = 1 \text{ 可得 } a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (2+1)^n = 243, \text{ 解得 } n = 5,$$

$$\text{令 } x = 0 \text{ 可得 } a_0 = 1,$$

$$\text{令 } x = \frac{1}{2} \text{ 可得 } a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} = \left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right)^5 = 32,$$

$$\text{所以 } \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} = 31. \text{ 故选 B.}$$

6. ACD 【解析】对任意实数 x 有 $(2x-3)^9 = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)^3 + \cdots + a_9(x-1)^9 = [-1+2(x-1)]^9$,

$$\text{所以 } a_2 = -C_9^2 \times 2^2 = -144, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 可得 } a_0 = -1, \text{ 故 B 不正确;}$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 可得 } a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_9 = 1, \text{ 故 C 正确;}$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 可得 } a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots - a_9 = -3^9, \text{ 故 D 正确. 故选 ACD.}$$

7. 【解】(1) 在 $(\sqrt{2}x-1)^5$ 的展开式中, 当 $x = 0$ 时, $a_0 = -1$, 通项为 $T_{r+1} = C_5^r (\sqrt{2}x)^{5-r} (-1)^r$, $r = 0, 1, \cdots, 5$,

$$\text{可知 } a_0, a_2, a_4 \in (-\infty, 0), a_1, a_3, a_5 \in (0, +\infty),$$

$$\text{所以 } |a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| = -a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5,$$

$$\text{当 } x = -1 \text{ 时, } a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 = (-\sqrt{2}-1)^5,$$

$$\text{所以 } |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| + |a_5| = (\sqrt{2}+1)^5 - 1 = 29\sqrt{2} + 40.$$

$$(2) \text{ 根据题意, 令 } x = \sqrt{2}, \text{ 得 } (2-1)^5 = a_0 + \sqrt{2}a_1 + 2a_2 + 2\sqrt{2}a_3 + 4a_4 + 4\sqrt{2}a_5,$$

$$\text{由 (1) 知, } a_0 = -1, \text{ 所以 } \sqrt{2}a_1 + 2a_2 + 2\sqrt{2}a_3 + 4a_4 + 4\sqrt{2}a_5 = 1 - (-1) = 2.$$

8. D 【解析】由题图易知, 第 n 行的第 i 个数为 C_n^{i-1} .

$$\text{对于 A, 由 } C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m, \text{ 得 } C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_9^2 = (C_3^2 + C_4^2) + C_4^2 + C_5^2 + \cdots + C_9^2 - 1 = (C_4^2 + C_4^2) + C_5^2 + \cdots + C_9^2 - 1 = C_{10}^2 - 1 = 119, \text{ 故 A 错误;}$$

$$\text{对于 B, 第 2 023 行有 2 024 项, 从左往右第 1 013 个数与第 1 014 个数分别为 } C_{2\,023}^{1\,012}, C_{2\,023}^{1\,013}, \text{ 而 } C_{2\,023}^{1\,012} > C_{2\,023}^{1\,013}, \text{ 故 B 错误;}$$

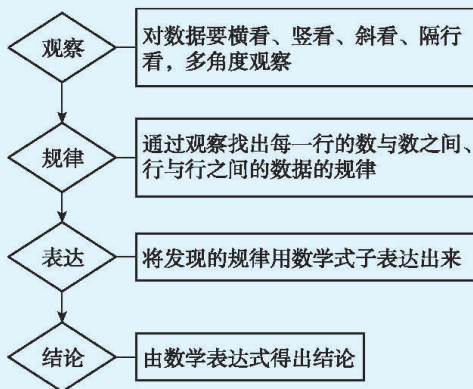
$$\text{对于 C, 第 } n \text{ 行的第 } i \text{ 个数为 } a_i, \text{ 则 } \sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} a_i = 2^0 a_1 + 2^1 a_2 + 2^2 a_3 + \cdots + 2^n a_{n+1},$$

$$\text{故 } \sum_{i=1}^{n+1} 2^{i-1} a_i = C_n^0 2^0 + C_n^1 2^1 + C_n^2 2^2 + \cdots + C_n^n 2^n = (1+2)^n = 3^n, \text{ 故 C 错误;}$$

$$\text{对于 D, 第 20 行中, 第 8 个数与第 9 个数的比为 } C_{20}^7 : C_{20}^8 =$$

$$\frac{20!}{7!13!} : \frac{20!}{8!12!} = 8 : 13, \text{故 D 正确. 故选 D.}$$

规律方法 解决“杨辉三角”问题的一般方法



9. $\frac{2}{11}$ 1 013 【解析】第 12 行中从左到右第 2 个数与第 3 个数之比为 $\frac{C_{12}^1}{C_{12}^2} = \frac{12}{66} = \frac{2}{11}$. 第 2 024 行有 2 025 个数, 中间的一个数最大, 是第 $\frac{2\,024}{2} + 1 = 1\,013$ 个数.

10. BCD 【解析】A 项, 在 $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的二项展开式中第 3 项和第 4 项的二项式系数最大, 则 $C_n^2 = C_n^3$, 所以 $n = 2 + 3 = 5$, 故 A 错误;

B 项, 在 $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ 中, 令 $x = 1$, 得 $\left(1 + \frac{2}{\sqrt{1}}\right)^5 = 3^5 = 243$, 故展开式的各项系数和为 243, 故 B 正确;

C 项, 在 $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式中的二项式系数的和为 $2^5 = 32$, 其中奇数项和偶数项的二项式系数的和相等, 所以展开式中奇数项的二项式系数的和为 16, 故 C 正确;

D 项, $\left(x + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} \cdot 2^r x^{-\frac{r}{2}} = C_5^r \cdot 2^r x^{5-\frac{3r}{2}}$, $0 \leq r \leq 5$, 且 r 为整数, 令 $5 - \frac{3r}{2} = 0$, 解得 $r = \frac{10}{3}$, 不满足要求, 所以展开式中不含常数项, 故 D 正确. 故选 BCD.

11. D 【解析】由 $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^n$ 的展开式中, 仅第 5 项的二项式系数最大, 得展开式共 9 项, 则 $n = 8$,

$$\text{故 } \left(x + \frac{1}{2x}\right)^8 \text{ 的展开式的通项为 } T_{r+1} = C_8^r x^{8-r} \cdot \left(\frac{1}{2x}\right)^r = \frac{1}{2^r} C_8^r x^{8-2r}, r \in \mathbb{N}, r \leq 8.$$

设展开式中系数最大项是 T_{r+1} , 则

$$\begin{cases} \frac{1}{2^r} C_8^r \geq \frac{1}{2^{r+1}} C_8^{r+1}, \\ \frac{1}{2^r} C_8^r \geq \frac{1}{2^{r-1}} C_8^{r-1}, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 2 \cdot \frac{8!}{r!(8-r)!} \geq \frac{8!}{(r+1)!(7-r)!}, \\ \frac{8!}{r!(8-r)!} \geq 2 \cdot \frac{8!}{(r-1)!(9-r)!}, \end{cases}$$

解得 $2 \leq r \leq 3$, 而 $r \in \mathbb{N}$, 因此 $r = 2$ 或 $r = 3$,

$$\text{所以 } T_3 = \frac{1}{2^2} C_8^2 x^4 = 7x^4, T_4 = \frac{1}{2^3} C_8^3 x^2 = 7x^2,$$

所以展开式中系数最大的项是第 3 项或第 4 项. 故选 D.

12. A 【解析】因为 $0.99^{10} = (1 - 0.01)^{10} = 1 - C_{10}^1 \cdot 0.01 + C_{10}^2 \cdot 0.01^2 - C_{10}^3 \cdot 0.01^3 + \cdots - C_{10}^9 \cdot 0.01^9 + 0.01^{10} = 1 - 0.1 + 0.0045 - 0.00012 + \cdots - 10 \times 0.01^9 + 0.01^{10} = 0.9043 \cdots$, 因此 0.99^{10} 的小数点后第三位数字为 4. 故选 A.

13. D 【解析】因为 $8^{2\,025} = (7+1)^{2\,025} = C_{2\,025}^0 7^{2\,025} + C_{2\,025}^1 7^{2\,024} + \cdots + C_{2\,025}^{2\,024} 7 + 1$, 所以 $8^{2\,025}$ 除以 7 的余数为 1, 故今天是星期五, $8^{2\,025}$ 天以后是星期六. 故选 D.

14. A 【解析】 $\because 6^{11} = (7-1)^{11} = C_{11}^0 7^{11} + C_{11}^1 7^{10}(-1) + \cdots + C_{11}^9 7^2(-1)^9 + C_{11}^{10} 7^1(-1)^{10} + C_{11}^{11}(-1)^{11}$, 且 $C_{11}^0 7^{11} + C_{11}^1 7^{10}(-1) + \cdots + C_{11}^9 7^2(-1)^9$ 能被 7 整除, 而 $C_{11}^{10} 7^1(-1)^{10} + C_{11}^{11}(-1)^{11} = 77 - 1 = 76, 76 \div 7 = 10 \cdots 6$, $\therefore 6^{11}$ 被 7 除的余数为 6. \therefore 用七进制表示十进制的 6^{11} , 其

巧思: $C_{11}^0 7^{11} + C_{11}^1 7^{10}(-1) + \cdots + C_{11}^9 7^2(-1)^9$ 能被 7 整除, $C_{11}^{11}(-1)^{11} = -1$, 故 6^{11} 被 7 除的余数为 $7-1=6$

个位数是 6. 故选 A.

15. 【证明】由二项式定理可得 $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = C_n^0 \left(\frac{2}{n}\right)^0 + C_n^1 \left(\frac{2}{n}\right)^1 + C_n^2 \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + C_n^n \left(\frac{2}{n}\right)^n$, 若 $n \geq 2$, 则有 $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = 1 + n \times \frac{2}{n} + \frac{n \times (n-1)}{2} \times \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{n}\right)^n = 3 + \frac{2(n-1)}{n} + \cdots + \left(\frac{2}{n}\right)^n \geq 3 + \frac{2(n-1)}{n} = 3 + 2 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \geq 3 + 2 \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 4$, 当且仅当 $n=2$ 时等号成立, 所以 $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n \geq 4 (n \geq 2, n \in \mathbb{N}_+)$ 成立.

刷易错

★易错点 1 混淆展开式中的奇偶次项与奇偶数项致误

16. 255 【解析】设 $(2x-1)^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, 且奇次项的系数和为 A , 偶次项的系数和为 B , 则 $A = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots, B = a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots$, 由已知得 $B - A = 3^8$. 令 $x = -1$, 得 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_n(-1)^n = (-3)^n$, 即 $(a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots) = (-3)^n$, 即 $B - A = (-3)^n$, 所以 $(-3)^n = 3^8 = (-3)^8$, 所以 $n = 8$. 所以 $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = 2^n - C_n^0 = 2^8 - 1 = 255$.

易错警示 (1) 求解这类题易犯下列错误:

- ① 误把奇次项、偶次项看成是奇数项、偶数项;
- ② 错误地认为 $-3^8 = (-3)^8$;
- ③ 把 $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n$ 看成二项展开式中各项的二项式系数和, 忽略了 C_n^0 .

(2) 解决此类问题应掌握 $(a+b)^n$ 的展开式中各项的二项式系数的和为 2^n , 且奇数项二项式系数和与偶数项二项式系数和都等于 2^{n-1} .

★易错点 2 不能正确理解二项式系数与项的系数而致误

17. C 【解析】在 $\left(x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^n$ 中, 令 $x = 1$ 得 $(1+3)^n = 4^n$, 即展开式中各项系数和为 4^n . 又展开式的二项式系数和为 2^n , 由题

意得 $\frac{4^n}{2^n} = 2^n = 32$, 解得 $n=5$.

故 $\left(x + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^5$ 的展开式的通项为 $T_{k+1} = C_5^k x^{5-k} \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^k = 3^k C_5^k x^{5-\frac{3k}{2}}$ ($k=0, 1, 2, 3, 4, 5$). 令 $5 - \frac{3k}{2} = 2$, 得 $k=2$, 则 $T_3 = 3^2 \cdot C_5^2 \cdot x^2 = 90x^2$, 所以 x^2 的系数为 90. 故选 C.

易错警示 混淆二项式系数与项的系数而致误

$(a+bx)^n$ 的展开式中, 二项式系数是指 $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$, 它们是组合数, 只与各项的项数有关, 而与 a, b 的值无关; 而项的系数是指该项中除变量外的常数部分, 它不仅与各项的项数有关, 而且也与 a, b 的值有关. 如第 $k+1$ 项的二项式系数是 C_n^k , 而该项的系数是 $C_n^k a^{n-k} b^k$. 当然, 在某些特殊的二项展开式, 如 $(1+x)^n$ 中, 各项的系数与二项式系数是相等的.

第 3.3 节综合训练

刷能力

1. A 【解析】因为 $T_9 = C_n^8 \left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-8} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8 = 2^{8-n} C_n^8 x^{2n-20}$, 所以 $2n-20=0$, 则 $n=10$. 令 $x=1$, 可得 $\left(\frac{1^2}{2} - \frac{1}{\sqrt{1}}\right)^{10} = \frac{1}{2^{10}}$, 所以展开式中的各项系数之和为 $\frac{1}{2^{10}}$. 故选 A.

2. A 【解析】由二项式定理得 $C_{2025}^0 - 2C_{2025}^1 + 2^2 C_{2025}^2 - 2^3 C_{2025}^3 + \dots + 2^{2024} C_{2025}^{2024} - 2^{2025} C_{2025}^{2025} = C_{2025}^0 - 1^{2025} + C_{2025}^1 \cdot 1^{2024} \cdot (-2) + C_{2025}^2 \cdot 1^{2023} \cdot (-2)^2 + \dots + C_{2025}^{2024} \cdot 1^1 \cdot (-2)^{2024} + C_{2025}^{2025} \cdot (-2)^{2025} = (1-2)^{2025} = (-1)^{2025} = -1$. 故选 A.

3. D 【解析】因为 $(1-ax^2)(1+x)^4 = (1+x)^4 - ax^2(1+x)^4$, $(1+x)^4$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_4^r x^r$, 所以 $(1-ax^2)(1+x)^4$ 的展开式中含 x^3 的项为 $(C_4^3 - aC_4^1)x^3$, 所以 $C_4^3 - aC_4^1 = 4 - 4a = 12$, 可得 $a = -2$. 故选 D.

4. C 【解析】因为 $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^n$ 的二项式系数之和为 32, 所以 $2^n = 32$, 解得 $n=5$, 即二项式为 $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^5$. 因为 $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^5$ 的展开式各项系数之和为 243, 所以令 $x=1$, 代入可得 $(a+1)^5 = 243 = 3^5$, 解得 $a=2$, 即二项式为 $\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^5$, 则该二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r (2x)^{5-r} \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = 2^{5-r} \cdot C_5^r x^{5-3r}$, $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, 令 $5-3r=-1$, 解得 $r=2$, 则展开式中 $\frac{1}{x}$ 的系数为 $2^3 \cdot C_5^2 = 8 \times 10 = 80$. 故选 C.

5. D 【解析】 $(x+y+2z)^5$ 展开式中的 xy^2z^2 项可以看成在 5 个因式 $(x+y+2z)$ 中, 有 1 个因式中取 x , 剩下的 4 个因式中 2 个取 y , 2 个取 $2z$ 相乘而得,

悟: 将展开式问题转化为排列组合问题

即 $C_5^1 x C_4^2 y^2 C_2^2 (2z)^2 = 120xy^2z^2$, 所以展开式中 xy^2z^2 项的系数为 120. 故选 D.

归纳总结 三项展开式的求解方法

解决三项展开式问题, 主要有两种处理方法, 一种是将三项式转化为二项式, 另一种就是利用分类加法、分步乘法计数原理, 结合三项式的每一项的构成形式分类讨论求解.

6. D 【解析】由二项式定理, 得 $a = C_{16}^0 \times 5^{16} \times (-1)^0 + C_{16}^1 \times 5^{15} \times (-1)^1 + \dots + C_{16}^{15} \times 5 \times (-1)^{15} + C_{16}^{16} \times 5^0 \times (-1)^{16} - 1 = (5-1)^{16} - 1 = 4^{16} - 1 = (14+2)^8 - 1 = C_8^0 \times 14^8 \times 2^0 + C_8^1 \times 14^7 \times 2^1 + \dots + C_8^7 \times 14^1 \times 2^7 + C_8^8 \times 14^0 \times 2^8 - 1$, 因为 $C_8^0 \times 14^8 \times 2^0 + C_8^1 \times 14^7 \times 2^1 + \dots + C_8^7 \times 14^1 \times 2^7$ 能被 7 整除, $C_8^8 \times 14^0 \times 2^8 - 1 = 255$ 被 7 除余 3, 所以 $a \equiv 3 \pmod{7}$. 又 2 030 除以 7 余 0, 2 031 除以 7 余 1, 2 032 除以 7 余 2, 2 033 除以 7 余 3, 所以 $a \equiv 2\,033 \pmod{7}$. 故选 D.

7. ACD 【解析】由题意可得, $C_n^4 = C_n^6$, 所以 $n=10$.

对于 A 选项, 令 $x=1$, 得 $(a+1)^{10} = 1\,024$, 又 $a>0$, 所以 $a=1$, 因此该二项式为 $\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$, 故 A 正确;

对于 B 选项, 根据二项式定理可知, 展开式中奇数项的二项式系数和为 $2^{10-1} = 512$, 故 B 错误;

对于 C 选项, 根据二项式定理可知, 展开式的通项为 $T_{k+1} = C_{10}^k \cdot (x^2)^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = C_{10}^k x^{20-\frac{5}{2}k}$, $k=0, 1, 2, \dots, 10$, 显然, 系数最大为 C_{10}^5 , 即展开式中第 6 项的系数最大, 故 C 正确;

对于 D 选项, 当 $20 - \frac{5}{2}k = 0$, 即 $k=8$ 时, 也即展开式的第 9 项为常数项, 且 $T_9 = C_{10}^8 = 45$, 故 D 正确. 故选 ACD.

8. ACD 【解析】对于 A, 令 $x=0$, 可得 $a_0 = (2+0)(1-2 \times 0)^5 = 2$, 故 A 正确;

对于 B, 含 x^5 的项为 $2C_5^5 (-2x)^5 + xC_5^4 (-2x)^4 = 16x^5$, 所以 $a_5 = 16$, 故 B 错误;

对于 C, 令 $x=1$, 得 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = (2+1) \times (1-2)^5 = -3$,

令 $x=-1$, 得 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 = 3^5$,

所以 $(a_0 + a_2 + a_4 + a_6) + (a_1 + a_3 + a_5) = -3$, $(a_0 + a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5) = 3^5$,

所以 $(a_0 + a_2 + a_4 + a_6)^2 - (a_1 + a_3 + a_5)^2 = -3^6$, 故 C 正确;

对于 D, 令 $x = \frac{1}{2}$, 可得 $a_0 + a_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + a_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + a_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + a_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + a_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + a_6 \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \left(1 - 2 \times \frac{1}{2}\right)^5 = 0$, 两边同乘 2^6 , 可得 $\sum_{i=0}^6 (2^{6-i} \cdot a_i) = 0$, 故 D 正确. 故选 ACD.

9. 702 【解析】依题意, $\left(2x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_n^r (2x)^{n-r} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^r = 2^{n-r} C_n^r x^{n-\frac{4r}{3}}$ ($0 \leq r \leq n, r \in \mathbb{N}$),

因此 $\frac{2^{n-2} C_n^2}{2^{n-3} C_n^3} = \frac{2 \times \frac{n(n-1)}{2 \times 1}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \times 2 \times 1}} = \frac{6}{n-2} = \frac{6}{5}$,

解得 $n=7$.

易知 $r=0, 3, 6$ 时, 对应的项是有理项,

当 $r=0$ 时, $T_1 = 2^7 C_7^0 x^7 = 128x^7$;

高中必刷题 数学

当 $r=3$ 时, $T_4=2^4 C_7^3 x^3=560x^3$;

当 $r=6$ 时, $T_7=2^1 C_7^6 x^{-1}=14x^{-1}$,

所以展开式中有理项的系数之和为 $128+560+14=702$.

10. 【解】(1) 依题意可得, 展开式第 2 项的二项式系数为 C_n^1 , 第 3 项的二项式系数为 C_n^2 ,

所以 $\frac{C_n^1}{C_n^2} = \frac{2}{5}$, 即 $\frac{n}{n(n-1)} = \frac{2}{5}$, 则 $n-1=5$, 所以 $n=6$,

所以 $\left(2x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r (2x)^{6-r} \left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^r =$

$(-1)^r 2^{6-r} C_6^r x^{6-\frac{3}{2}r} (0 \leq r \leq 6, r \in \mathbb{N})$,

令 $6 - \frac{3}{2}r = 0$, 解得 $r=4$,

所以 $T_5 = 2^2 C_6^4 x^0 = 60$ 为常数项, 所以常数项为 60, 为第 5 项.

(2) 由(1)知 $T_{r+1} = (-1)^r 2^{6-r} C_6^r x^{6-\frac{3}{2}r} (0 \leq r \leq 6, r \in \mathbb{N})$,

令 $6 - \frac{3}{2}r \in \mathbb{Z}$, 则 $r=0, 2, 4, 6$,

当 $r=0$ 时, $T_1 = 2^6 C_6^0 x^6 = 64x^6$,

当 $r=2$ 时, $T_3 = 2^4 \times C_6^2 x^3 = 240x^3$,

当 $r=4$ 时, $T_5 = 2^2 \times C_6^4 x^0 = 60$,

当 $r=6$ 时, $T_7 = 2^0 \times C_6^6 x^{-3} = x^{-3}$,

故有理项为 $64x^6, 240x^3, 60, x^{-3}$.

(3) 令 $\begin{cases} 2^{6-r} C_6^r \geq 2^{7-r} C_6^{r-1}, \\ 2^{6-r} C_6^r \geq 2^{5-r} C_6^{r+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_6^r \geq 2C_6^{r-1}, \\ 2C_6^r \geq C_6^{r+1} \end{cases} \Rightarrow$

→ **黑板**: 系数绝对值最大, 即不用考虑 $(-1)^r$

$$\begin{cases} \frac{6!}{(6-r)! r!} \geq \frac{2 \times 6!}{(7-r)! (r-1)!}, \\ \frac{2 \times 6!}{(6-r)! r!} \geq \frac{6!}{(5-r)! (r+1)!} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{7-r}{r} \geq 2, \\ 2 \geq \frac{6-r}{r+1}, \end{cases}$$

解得 $\frac{4}{3} \leq r \leq \frac{7}{3}$, 又 $r \in \mathbb{N}$, 所以 $r=2$,

所以 $T_3 = 240x^3$, 即展开式中系数绝对值最大的项为 $240x^3$.

素养

11. $\frac{1\ 959}{980}$ 【解析】根据二项式定理, 可得 $(1-x)^{1\ 958}$ 的展开式

为 $\sum_{k=0}^{1\ 958} (-1)^k C_n^k x^k, n=1\ 958$, 所以 $a_k = (-1)^k C_n^k, n=1\ 958$.

$$\frac{1}{C_n^k} + \frac{1}{C_n^{k+1}} = \frac{k! (n-k)! + (k+1)! (n-k-1)!}{n!} = \frac{k! (n-k-1)! (n-k+k+1)}{n!} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{k! (n-k-1)!}{(n-1)!} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{C_{n-1}^k},$$

令上式中的 n 取 $n+1$, 可得 $\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} = \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{C_n^k}$,

$$\text{即 } \frac{1}{C_n^k} = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right).$$

$$\text{所以 } \sum_{k=0}^{1\ 958} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=0}^{1\ 958} \frac{1}{(-1)^k C_n^k} = \frac{1\ 959}{1\ 960} \times \left[\left(\frac{1}{C_{1\ 959}^0} + \frac{1}{C_{1\ 959}^1} \right) - \left(\frac{1}{C_{1\ 959}^1} + \frac{1}{C_{1\ 959}^2} \right) + \left(\frac{1}{C_{1\ 959}^2} + \frac{1}{C_{1\ 959}^3} \right) - \cdots - \left(\frac{1}{C_{1\ 959}^{1\ 957}} + \frac{1}{C_{1\ 959}^{1\ 958}} \right) + \left(\frac{1}{C_{1\ 959}^{1\ 958}} + \frac{1}{C_{1\ 959}^{1\ 959}} \right) \right] = \frac{1\ 959}{1\ 960} \times \left(1 + \frac{1}{C_{1\ 959}^{1\ 959}} \right) = \frac{1\ 959}{1\ 960} \times 2 = \frac{1\ 959}{980}.$$

第三章素养检测

刷速度

1. C 【解析】因为 $(1+x)^{2n}$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{2n}^r x^r, r=0, 1, 2, \dots, 2n$, 可知第 $r+1$ 项的系数为 C_{2n}^r , 即为第 $r+1$ 项的二项式系数, 根据二项式系数的性质可知, C_{2n}^r 的最大值为 C_{2n}^n , 所以系数最大的项为第 $n+1$ 项. 故选 C.

2. A 【解析】根据第一场安排的比赛是否为跳绳, 分为如下两种情况:

第一种, 若第一场安排跳绳, 则最后一场安排不受限制, 共有 $1 \times A_5^5 = 120$ (种) 安排方案;

第二种, 若第一场不安排跳绳, 则也不能安排长跑, 则第一场有 4 种安排方案,

再安排最后一场, 最后一场不能为跳绳, 故有 4 种安排方案, 则共有 $4 \times 4 \times A_4^4 = 384$ (种) 安排方案,

故不同的安排方案共有 $120+384=504$ (种).

故选 A.

3. B 【解析】求 20 名同学不同的站法需分步考虑:

先考虑甲、乙、丙, 从 4 行中任取 1 行, 5 列中任取 1 列, 其对应的位置让甲站, 有 4×5 种站法;

从余下 3 行中任取 1 行, 4 列中任取 1 列, 其对应的位置让乙站, 有 3×4 种站法;

从余下 2 行中任取 1 行, 3 列中任取 1 列, 其对应的位置让丙

站, 有 2×3 种站法,

因此符合要求的甲、乙、丙的站法有 $4 \times 5 \times 3 \times 4 \times 2 \times 3 = 1\ 440$ 种, 再考虑除甲、乙、丙外的 17 名同学的站法, 有 A_{17}^{17} 种,

所以这 20 名同学不同的站法种数为 $1\ 440 A_{17}^{17}$. 故选 B.

4. A 【解析】令 $x=1$, 则 $\left(\frac{3}{\sqrt{1}}+1\right)^n = M$, 即 $4^n = M$,

→ **陷阱**: 注意区分二项式系数和与所有项的系数和

而 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n = N$,

由 $M-N=992$, 则 $4^n - 2^n = 992$, 令 $2^n = t > 0$, 则 $t^2 - t - 992 = 0$, 解得 $t=32$ (负值舍去), 即 $2^n = 32$, 故 $n=5$, 则二项式 $\left(\frac{3}{\sqrt{x}} + x\right)^5$

的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r \left(\frac{3}{\sqrt{x}}\right)^{5-r} x^r = C_5^r 3^{5-r} x^{\frac{3r-5}{2}}$,

令 $\frac{3r-5}{2} = 2$, 解得 $r=3$, 则展开式中含 x^2 项的系数为 $C_5^3 3^{5-3} =$

$10 \times 9 = 90$. 故选 A.

5. C 【解析】因为多项式 $(x^2+x-2y)^5$ 可看成 5 个三项式 (x^2+x-2y) 的乘积, 根据组合数的定义和计算公式, 可得 $x^5 y^2$ 项为从 5 个 x^2 , 1 个 x , 2 个 $(-2y)$, 所以 $x^5 y^2$ 项为 $C_5^2 (x^2)^2 \cdot C_3^1 x \cdot C_2^2 (-2y)^2 = 120 x^5 y^2$, 所以 $x^5 y^2$ 的系数为 120. 故选 C.