



1 2023 广东省广州市高三调研测试

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	B	C	A	B	C	A	ABD	AC
题号	11	12	13		14		15		16	
答案	AD	BCD	2		2 (-1, -1)		$\left(\frac{4}{e^2}, +\infty\right)$		$\frac{1}{3}$	

1. C 【基础考点】函数的定义域与值域、集合的交集运算

【深度解析】由题意, 得 $A = \{y | y \geq 0\}$, $B = \{x | 2-x > 0\} = \{x | x < 2\}$, 所以 $A \cap B = [0, 2)$, 故选 C.

2. D 【基础考点】复数的运算及几何意义

【深度解析】因为 $z = \frac{i}{1+2i} = \frac{i(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$, 所以 $\bar{z} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}i$, 其在复平面内对应的点为 $\left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, 位于第四象限, 故选 D.

3. B 【重点题型】不等式的解法、充分条件与必要条件

【深度解析】由 $(x+2)(x-3) < 0$, 解得 $-2 < x < 3$. 由 $|x-1| < 2$, 解得 $-1 < x < 3$. 因为 $(-1, 3) \subsetneq (-2, 3)$, 所以 p 是 q 的必要不充分条件, 故选 B.

4. C 【经典题型】球的表面积

【深度解析】由题意得 $R^2 - \left(\frac{58-10}{2}\right)^2 = 7^2$, 解得 $R = 25$, $h = 25 - 24 = 1$, 所以两个球冠的面积之和为 $2S = 4\pi Rh = 100\pi$, 所以灯笼中间球面的面积为 $4\pi R^2 - 100\pi = 2400\pi$, 故选 C.

5. A 【热门考点】二倍角公式、诱导公式、两角和的余弦公式、余弦函数的图象与性质

【深度解析】因为 $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\sin \alpha \neq 0$. 由 $(1 - \cos 2\alpha)(1 + \sin \beta) = \sin 2\alpha \cos \beta$, 可得 $2\sin^2 \alpha (1 + \sin \beta) = 2\sin \alpha \cos \alpha \cos \beta$, 即 $\sin \alpha (1 + \sin \beta) = \cos \alpha \cos \beta$, 所以 $\sin \alpha = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$, 所以 $\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$. 因为 $\alpha, \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$, 且 $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \alpha < 0$, $\frac{3\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi < 2\pi$ (关键: 利用诱导公式将函数值转化为余弦函数的同一单调区间的函数值是求解问题的关键). 由于函数 $y = \cos x$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 上单调递增, 所以 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha + 2\pi$, 即 $2\alpha + \beta = \frac{5\pi}{2}$, 故选 A.

6. B 【基础考点】用样本估计总体、平均数与方差

【深度解析】根据分层抽样的性质及样本估计总体, 得总体的均值约为 $\frac{800}{2000} \times 9 + \frac{1200}{2000} \times 8 = 8.4$, 总体的方差约为 $\frac{800}{2000} \times [1 + (8.4 - 9)^2] + \frac{1200}{2000} \times [0.5 + (8.4 - 8)^2] = 0.544 + 0.396 = 0.94$, 故

选 B.

7. C 【重难点考点】利用函数的周期性求函数值

【深度解析】由 $f(x+1) + f(x-1) = 2$, 得 $f(x+2) + f(x) = 2$, 即 $f(x+2) = 2 - f(x)$, 所以 $f(x+4) = 2 - f(x+2) = 2 - [2 - f(x)] = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 的周期为 4. 在 $f(x+1) + f(x-1) = 2$ 中, x 分别取 2, 3, 得 $f(1) + f(3) = 2$, $f(2) + f(4) = 2$, 所以 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 4$; x 取 1 得 $f(0) + f(2) = 2$, 又 $f(0) = 2$, 所以 $f(2) = 0$. 所以 $\sum_{k=1}^{115} f(k) = [f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] \times 28 + f(1) + f(2) + f(3) = 4 \times 28 + 2 + 0 = 114$, 故选 C.

【方法速记】关于抽象函数对称性、奇偶性、周期性的主要解法有两种, 一种是函数图象变换, 另一种是赋值法. 求解函数值求和问题时, 首先是找到题目中蕴含的规律, 再由此进行求值.

8. A

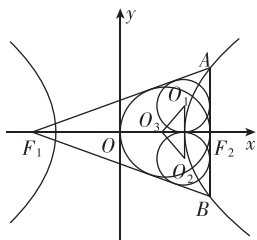
【思路导引】由题意得 $O_1 O_2 \perp F_1 F_2$ —— 由双曲线方程求出 a, b, c —— 通径公式 —— 求出 $|F_1 F_2|, |AF_2|, |BF_2|, |AF_1|, |BF_1|$ —— 双曲线的定义 —— 利用等面积法求出三个内切圆的半径 —— 结合双曲线的对称性 —— 求出 $\triangle O_1 O_2 O_3$ 的面积

【重难点考点】圆与圆的位置关系、双曲线定义的应用

【深度解析】如图, 因为圆 O_1, O_2 分别为 $\triangle AF_1 F_2$ 与 $\triangle BF_1 F_2$ 的内切圆, $AB \perp x$ 轴, 所以 $O_1 O_2 \perp F_1 F_2$ (关键: 根据圆的切线的性质及双曲线的定义, 推导出圆 O_1 与圆 O_2 相切于 x 轴上同一点). 因为双曲线的标准方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$, 所以 $a = b = 2, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{2}$, 所以 $|F_1 F_2| = 2c = 4\sqrt{2}$. 由通径可得 $|AF_2| = |BF_2| = \frac{b^2}{a} = 2$, 又由双曲线的定义可知 $|AF_1| = |BF_1| = 2a + |AF_2| = 6$. 设圆 O_1, O_2, O_3 的半径分别为 r_1, r_2, r_3 , 则由双曲线的对称性知 $r_1 = r_2$, 且 O_3 在 x 轴上. 在 $\triangle AF_1 F_2$ 中, 由等面积法可得 $\frac{1}{2} \cdot (|AF_1| + |AF_2| + |F_1 F_2|) \cdot r_1 = \frac{1}{2} \cdot |AF_2| \cdot |F_1 F_2|$ (方法: 关于三角形内切圆的半径的计算通常采用等面积法, 计算出三角形的周长, 底边长与高, 再利用面积相等列式计算), 即 $\frac{1}{2} \times (6 + 2 + 4\sqrt{2}) \cdot r_1 = \frac{1}{2} \times 2 \times 4\sqrt{2}$, 得 $r_1 =$

$2\sqrt{2}-2$, 所以 $|O_1O_2| = 2r_1 = 4\sqrt{2}-4$. 同理可得 $r_3 = \sqrt{2}$, 所以 O_3 到 O_1O_2 的距离 $d = 2\sqrt{2} - (2\sqrt{2}-2) - \sqrt{2} = 2-\sqrt{2}$, 所以 $S_{\triangle O_1O_2O_3} = \frac{1}{2} \cdot$

$|O_1O_2| \cdot d = \frac{1}{2} \times (4\sqrt{2}-4) \times (2-\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}-8$, 故选 A.



9. ABD 【新趋考点】互斥事件、对立事件及相互独立事件的概率公式

【深度解析】对于 A, 由对立事件的性质得 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, 故 A 正确; 对于 B, $P(A|B) + P(\bar{A}|B) = \frac{P(AB) + P(\bar{A}B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$, 故 B 正确; 对于 C, 若 A, B 是互斥事件, 则 $P(A+B) = P(A) + P(B)$, $P(AB) = 0$, 故 C 不正确; 对于 D, 若 A, B 独立, 则 $P(AB) = P(A)P(B)$, 则 $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = P(A)$, 故 D 正确. 故选 ABD.

10. AC 【热门考点】导数的运算、辅助角公式、三角函数的单调性、三角函数图象的平移变换、诱导公式

【深度解析】对于 A, 由题意, 得 $f'(x) = a\cos x + b\sin x$, 其图象上所有的点向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度, 得到 $y = a\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + b\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = a\sin x - b\cos x$ 的图象, 即与函数 $f(x)$ 的图象重合, 故 A 正确.

对于 B, 已知 $f(x)$ 的图象与 $f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ 的图象关于直线 $x = \frac{3\pi}{4}$ 对称, $f\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = a\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) - b\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right) = -a\cos x + b\sin x \neq f'(x)$, 故 B 错误.

对于 C, $f(x) + f'(x) = a(\sin x + \cos x) - b(\cos x - \sin x) = \sqrt{2}a\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}b\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2a^2+2b^2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4} - \theta\right)$, 其中 $\tan \theta = \frac{b}{a}$, $f(x) - f'(x) = a(\sin x - \cos x) - b(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}a\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}b\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2a^2+2b^2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4} - \varphi\right)$, 其中 $\tan \varphi = \frac{b}{a}$, 所以两函数的最大值均为 $\sqrt{2a^2+2b^2}$, 故 C 正确.

对于 D, 当 $a > 0$ 时, $f(x) + f'(x) = 2a\sin x$, 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, $f(x) - f'(x) = -2a\cos x$, 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增;

当 $a < 0$ 时, $f(x) + f'(x) = 2a\sin x$, 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减, $f(x) - f'(x) = -2a\cos x$, 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减.

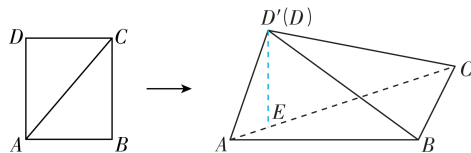
综上可知 $f(x) + f'(x)$ 和 $f(x) - f'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调性相同, 但可能单调递增也可能单调递减, 故 D 错误. 故选 AC.

11. AD

思路导引 对于 A, 根据外接球特点可知外接球球心为 AC 中点 → 求出球半径 R → 外接球表面积为定值 → 判断 A; 对于 B, D, 当平面 $D'AC \perp$ 平面 ABC 时, 点 D' 到平面 ABC 的距离最大 → 此时三棱锥体积最大, AD' 与平面 ABC 所成角最大 → 作 $D'E \perp AC$, 利用等面积法求得 $D'E$ → 判断 B, D; 对于 C, 假设 C 正确 $\xrightarrow{\text{线面垂直的判定定理}}$ 证 $BC \perp$ 平面 ABD' $\xrightarrow{\text{线面垂直的性质定理}}$ $BC \perp BD'$ → $CD' > BC$ → 与已知矛盾, 判断 C.

【重难点型】翻折问题、棱锥外接球的表面积、三棱锥的体积、异面直线所成角、直线与平面所成角

【深度解析】如图, 对于 A, $\triangle AD'C$ 和 $\triangle ABC$ 均为以 AC 为斜边的直角三角形, 所以 AC 中点到 A, B, C, D' 四点的距离相等, 即 AC 中点为三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球球心 (结论: 若棱锥的顶点可构成共斜边的直角三角形, 则公共斜边的中点就是其外接球的球心), 所以三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球半径 $R = \frac{1}{2}AC = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以三棱锥 $D'-ABC$ 的外接球表面积 $S = 4\pi R^2 = 5\pi$, 为定值, 故 A 正确.



对于 B, 当平面 $D'AC \perp$ 平面 ABC 时, 点 D' 到平面 ABC 的距离最大, 此时三棱锥 $D'-ABC$ 的体积最大. 过点 D' 作 $D'E \perp AC$, 垂足为 E. 因为平面 $D'AC \perp$ 平面 ABC, 平面 $D'AC \cap$ 平面 ABC = AC, $D'E \subset$ 平面 $D'AC$, 所以 $D'E \perp$ 平面 ABC. 因为 $AC \cdot D'E = AD' \cdot CD'$, 所以 $D'E = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{30}}{5}$. 又 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以 $V_{D'-ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot D'E = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{\sqrt{30}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 即三棱锥 $D'-ABC$ 体积的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, 故 B 不正确.

对于 C, 假设异面直线 AD' 与 BC 所成角的最大值为 90° , 则此时 $AD' \perp BC$, 又 $AB \perp BC$, $AD' \cap AB = A$, $AB, AD' \subset$ 平面 ABD' , 所以 $BC \perp$ 平面 ABD' . 因为 $BD' \subset$ 平面 ABD' , 所以 $BC \perp BD'$, 所以 $\triangle BCD'$ 是以 CD' 为斜边的直角三角形, 所以 $CD' > BC$, 与已知矛盾, 所以假设错误, 故 C 不正确.

对于 D, 设 AD' 与平面 ABC 所成角为 θ , 点 D' 到平面 ABC 距离为 d , 则 $\sin \theta = \frac{d}{AD'} = \frac{d}{\sqrt{3}}$, 所以当点 D' 到平面 ABC 距离最大时, AD' 与平面 ABC 所成角最大. 当平面 $D'AC \perp$ 平面 ABC 时, 点 D' 到平面 ABC 距离最大, 此时 $d_{\max} = D'E = \frac{\sqrt{30}}{5}$, 即 $(\sin \theta)_{\max} = \frac{\sqrt{10}}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 θ 不可能为 60° , 故 D 正确. 故选 AD.

12. BCD

思路导引 对于 A, 思路一: 假设 $\ln b > \frac{1}{a}$ 成立 $\xrightarrow[\text{已知条件}]{\text{放缩法}}$ $1 >$

$$ae^{\frac{1}{a} + \frac{1}{a}} \xrightarrow{\text{基本不等式}} 1 > ae^2 + \frac{1}{a} \rightarrow \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} > e^2 \rightarrow \text{利用二次函}$$

数的性质导出矛盾 \rightarrow 作出判断;

思路二: 令 $a=1 \rightarrow$ 构造 $f(x) = ex + \ln x - 1$ 并求导 \rightarrow 通过函数零点存在定理得出存在 $a=1, b \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使 $abe^a + \ln b - 1 = 0 \rightarrow$ 作出判断;

对于 B, 由条件与放缩法推出 $ae^a > \frac{1}{b} \ln \frac{1}{b} \rightarrow$ 根据条件求 $\ln \frac{1}{b}$ 的范围 \rightarrow 设 $m(x) = xe^x \rightarrow$ 求导研究函数 $m(x)$ 的单调性 $\rightarrow a > \ln \frac{1}{b} \rightarrow$ 作出判断;

对于 C, 结合 B 选项的判定得 $be^a > 1 \rightarrow 1 = abe^a + \ln b > a + \ln b \rightarrow$ 结合已知条件作出判断;

对于 D, 思路一: 令 $b = e^m \rightarrow ae^{a+m} + m - 1 = 0 \rightarrow$ 构造函数 $h(x) = xe^{x+m} + m - 1 \rightarrow$ 求导, 对 m 进行分类讨论 \rightarrow 作出判断;

思路二: 结合 C 选项得 $ab < b - b \ln b \rightarrow$ 由 B 选项求出 b 的范围 \rightarrow 令 $g(x) = x - x \ln x \rightarrow$ 求导研究 $g(x)$ 的单调性 $\rightarrow g(x)_{\max} \rightarrow$ 作出判断

【重难点题】利用导数研究函数的单调性、基本不等式

【深度解析】 对于 A, 假设 $\ln b > \frac{1}{a}$ 成立 (提示: 注意反证法的应用), 则 $b > e^{\frac{1}{a}}$, 则由 $abe^a + \ln b - 1 = 0$, 得 $1 = abe^a + \ln b > ae^{\frac{1}{a}} e^a + \frac{1}{a} =$

$ae^{\frac{1}{a} + \frac{1}{a}} \geq ae^2 + \frac{1}{a}$ (关键: 利用放缩法与基本不等式对不等式进行传递是求解问题的关键), 当且仅当 $a=1$ 时等号成立, 所以

$\frac{1}{a} > e^2 + \frac{1}{a^2}$, 即 $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} > e^2$. 而 $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} = -\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$, 所以

$\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} > e^2$ 不成立, 所以假设不成立, 故 A 错误 (另解: 当 $a=1$

时, $abe^a + \ln b - 1 = 0 \Leftrightarrow eb + \ln b - 1 = 0$. 设 $f(x) = ex + \ln x - 1$, 则 $f'(x) = e + \frac{1}{x} > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $f(1) = e - 1 > 0$,

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 < 0$, 则 $\exists x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使 $f(x) = 0$, 即存在 $a=1, b \in$

$\left(\frac{1}{e}, 1\right)$, 使 $abe^a + \ln b - 1 = 0$, 此时, $\ln b < \ln 1 = 0 < 1 = \frac{1}{a}$, 故 A 错误).

对于 B, 由 $abe^a + \ln b - 1 = 0$, 得 $abe^a = 1 - \ln b$. 因为 $b > 0$, 所以 $ae^a = \frac{1}{b} + \frac{1}{b} \ln \frac{1}{b} > \frac{1}{b} \ln \frac{1}{b}$, 即 $ae^a > \left(\ln \frac{1}{b}\right) e^{\ln \frac{1}{b}}$. 因为 $a > 0, b > 0$, 所以

$abe^a = 1 - \ln b = 1 + \ln \frac{1}{b} > 0$, 所以 $\ln \frac{1}{b} > -1$. 设 $m(x) = xe^x (x > -1)$

(方法: 构造函数时往往从两方面着手: ①根据导函数的“形状”变换不等式“形状”; ②若是选择题, 可根据选项的共性归纳构造恰当的函数), 则 $m'(x) = (x+1)e^x > 0$, 所以 $m(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调

递增, 又 $m(a) > m\left(\ln \frac{1}{b}\right)$, 所以 $a > \ln \frac{1}{b}$, 所以 $e^a > \frac{1}{b}$, 故 B 正确.

对于 C, 由 B 选项知 $e^a > \frac{1}{b}$, 所以 $be^a > 1$, 所以 $abe^a > a$, 所以 $1 = abe^a + \ln b > a + \ln b$, 即 $a + \ln b < 1$, 故 C 正确.

对于 D, 因为 $a > 0, b > 0, abe^a + \ln b - 1 = 0$, 所以 $abe^a = 1 - \ln b > 0 \Rightarrow \ln b < 1 \Rightarrow b < e$. 设 $b = e^m$, 其中 $m < 1$, 则 $abe^a + \ln b - 1 = 0 \Leftrightarrow ae^{a+m} + m - 1 = 0$. 设 $h(x) = xe^{x+m} + m - 1$, 则 $h'(x) = (x+1)e^{x+m} > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 得 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(1) 当 $0 < m < 1$ 时, 注意到 $h(1-m) = (1-m)(e-1) > 0, h(0) = m - 1 < 0$, 则 $\exists x \in (0, 1-m)$, 使 $h(x) = 0$, 所以 $a \in (0, 1-m)$, 则 $ab < (1-m)e^m$. 设 $p(x) = (1-x)e^x$, 则 $p'(x) = -xe^x$, 则 $p(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 则 $ab < (1-m)e^m = p(m) < p(0) = 1$.

(2) 当 $m=0$ 时, $h(x) = xe^x - 1, h(0) = -1 < 0, h(1) = e - 1 > 0$, 则 $\exists x \in (0, 1)$, 使 $h(x) = 0$, 则 $a \in (0, 1)$, 此时 $ab = a < 1$.

(3) 当 $m < 0$ 时, $h(-m) = -1 < 0, h(1-m) = (1-m)(e-1) > 0$, 则 $\exists x \in (-m, 1-m)$, 使 $h(x) = 0$, 则 $a \in (-m, 1-m)$, 又由 (1) 分析可知 $p(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 则 $ab < e^m(1-m) = p(m) < p(0) = 1$.

综上, 有 $ab < 1$. 故 D 正确. 故选 BCD.

快解 对于 D 选项, 由 C 选项知 $a + \ln b < 1$, 所以 $a < 1 - \ln b$, $ab < b - b \ln b$. 由 B 选项知 $0 < b < e$, 令 $g(x) = x - x \ln x (0 < x < e)$, 则 $g'(x) = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x$, 当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 单调递增, 当 $1 < x < e$ 时, $g'(x) < 0$, 函数 $g(x)$ 单调递减, 所以 $g(x)_{\max} = g(1) = 1$, 即有 $g(x) \leq 1$, 则 $b - b \ln b \leq 1$, 则 $ab < 1$, 故 D 正确.

13.2 【基础考点】二项式定理

【深度解析】 $(1+x)^5$ 展开式中 x^4 的系数是 C_5^4 , x^3 的系数是 C_5^3 , 则由题意, 得 $aC_5^4 + C_5^3 = 20$, 解得 $a=2$.

14.2 $(-1, -1)$ 【热门考点】根据向量垂直条件求参数、求投影向量

【深度解析】 由 $a \perp b$, 得 $a \cdot b = -2 + \lambda = 0$, 所以 $\lambda = 2$, 所以 $a = (-2, 2)$, 所以 $a - b = (-3, 1)$, 所以 $a - b$ 在 b 方向上的投影向量的坐标

$$\text{为} \frac{(a-b) \cdot b}{|b| \cdot |b|} = \frac{-3+1}{\sqrt{2}} = \frac{(1,1) \cdot (-1,1)}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = \frac{(1,1)}{\sqrt{2}} = (-1, -1).$$

15. $\left(\frac{4}{e^2}, +\infty\right)$

思路导引 设切点为 $\left(x_0, \frac{x_0}{e^{x_0}}\right)$ $\xrightarrow[\text{求切线方程}]{\text{导数的几何意义}}$

\rightarrow 将 $(0, b)$ 代入切线方程 \rightarrow 设 $g(x) = \frac{x^2}{e^x} \rightarrow$ 切线的条数即为直线 $y=b$ 与 $g(x)$ 图象交点的个数 \rightarrow 求导研究 $g(x)$ 的单调性 \rightarrow 作出函数 $g(x)$ 的图象, 利用图象求解

【重难点题】根据函数零点的个数求参数范围、导数几何意义、利用导数研究方程的根

【深度解析】 设切点为 $\left(x_0, \frac{x_0}{e^{x_0}}\right)$, $f(x) = \frac{x}{e^x}$, 则 $f'(x) = \frac{e^x - e^x \cdot x}{e^{2x}} =$

$\frac{1-x}{e^x}$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0, \frac{x_0}{e^{x_0}}\right)$ 处的切线斜率 $k=f'(x_0)=$

$\frac{1-x_0}{e^{x_0}}$, 所以切线方程为 $y-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(x-x_0)$. 因为切线过点 $(0, b)$,

所以 $b-\frac{x_0}{e^{x_0}}=\frac{1-x_0}{e^{x_0}}(0-x_0)$, 即 $b=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}$. 设 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$, 则 $g'(x)=$

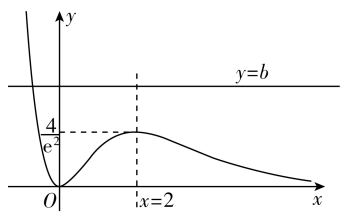
$\frac{-x(x-2)}{e^x}$, 由 $g'(x)>0$ 可得 $0<x<2$, 由 $g'(x)<0$ 可得 $x<0$ 或 $x>2$,

所以 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(2, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(0, 2)$ 上单

调递增, 且 $g(0)=0, g(2)=\frac{4}{e^2}$, 作出函数 $g(x)$ 的大致图象, 如图

所示. 由图知, 当 $b>\frac{4}{e^2}$ 时, 直线 $y=b$ 与 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}$ 的图象有一个交

点, 此时只能作一条切线, 所以 b 的取值范围为 $\left(\frac{4}{e^2}, +\infty\right)$.



方法速记 对于函数的零点问题, 它和方程的根问题、两个函数图象的交点问题是同一个问题, 可以互相转化. 在转化为两个函数图象交点时, 如果是一个常函数和一个含自变量的函数, 注意让含自变量的函数解析式尽量简单.

16. $\frac{1}{3}$

思路导引 设 O_1O_2 交 EF 于点 C , 由已知条件 $\rightarrow |O_1C|, |O_2C| \rightarrow 2c = |CE| + |CF| \rightarrow$ 设直线 EF 与圆锥的母线 SP 相交于点 H , 圆锥的母线 SP 与两球相切于 $A, B \rightarrow |AH| = |HE|, |HB| = |HF| \rightarrow 2a = |AH| + |HB| \rightarrow$ 离心率.

【热门考点】椭圆的几何性质

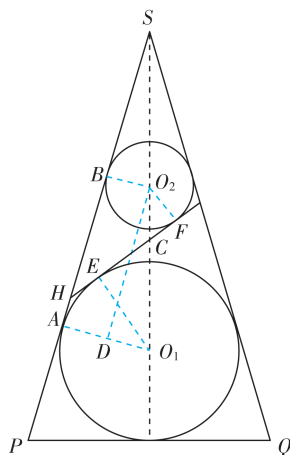
【深度解析】 如图, 作出圆锥的轴截面 SPQ , 设 O_1O_2 交 EF 于点 C .

$$\text{由} \begin{cases} \frac{|O_2C|}{|O_1C|} = \frac{|O_2F|}{|O_1E|} = \frac{1}{2}, \\ |O_2C| + |O_1C| = 2\sqrt{10}, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} |O_2C| = \frac{2\sqrt{10}}{3}, \\ |O_1C| = \frac{4\sqrt{10}}{3}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } |CE| = \sqrt{|O_1C|^2 - |O_1E|^2} = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{10}}{3}\right)^2 - 4^2} = \frac{4}{3},$$

$$|CF| = \sqrt{|O_2C|^2 - |O_2F|^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)^2 - 2^2} = \frac{2}{3},$$



所以 $2c = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$, 即 $c = 1$.

设直线 EF 与圆锥的母线 SP 相交于点 H , 圆锥的母线 SP 与两球分别相切于 A, B 两点, 则 $|AH| = |HE|, |HB| = |HF|$,

两式相加得 $|AH| + |HB| = |HE| + |HF| = a - c + a + c = 2a$,

即 $|AB| = 2a$.

过点 O_2 作 $O_2D \perp O_1A$ 于点 D , 易知四边形 ABO_2D 为矩形, 所以

$|AB| = |O_2D| = \sqrt{|O_1O_2|^2 - |O_1D|^2} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = 6$, 所以

$a = 3$, 所以椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$.

一题多解 如图, 作出圆锥的轴截面 SPQ , 设圆锥的母线 SP

与其内切球 O_1, O_2 分别相切于 A, B 两点, 连接 O_1A, O_2B , 则 $O_1A \perp AB, O_2B \perp AB$, 过 O_2 作 $O_2D \perp O_1A$ 于点 D , 连接 O_1E, O_2F .

设 EF 交 O_1O_2 于点 C , 设圆锥母线与轴的夹角为 α , 轴与截面所成角为 β . 在 $Rt\triangle O_2DO_1$ 中, $|O_1D| = 4 - 2 = 2, |O_2D| =$

$\sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = 6$, 所以 $\cos \alpha = \frac{|O_2D|}{|O_1O_2|} = \frac{6}{2\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$. 因为

$|O_1O_2| = 2\sqrt{10}$, 所以 $|O_1C| = 2\sqrt{10} - |O_2C|$. 因为 $\triangle EO_1C \sim \triangle FO_2C$,

所以 $\frac{|O_1C|}{|O_1E|} = \frac{|O_2C|}{|O_2F|}$, 即 $\frac{2\sqrt{10} - |O_2C|}{4} = \frac{|O_2C|}{2}$, 解得 $|O_2C| =$

$\frac{2\sqrt{10}}{3}$, 所以 $|CF| = \sqrt{|O_2C|^2 - |O_2F|^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{10}}{3}\right)^2 - 2^2} = \frac{2}{3}$, 即

$\cos \beta = \frac{|CF|}{|O_2C|} = \frac{\sqrt{10}}{10}$, 则椭圆的离心率 $e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{10}}{\frac{3\sqrt{10}}{10}} = \frac{1}{3}$ (提示: “双球模型”椭圆离心率等于轴与截面所成角的余弦 $\cos \beta$ 与圆锥母线与轴的夹角的余弦 $\cos \alpha$ 之比, 即 $e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$).

17. 【基础考点】等差数列的通项公式与前 n 项和公式、错位相减法的应用

【解】 (1) **解法一:** 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $S_6 = 4S_3, a_{2n} =$

$$2a_n + 1 \text{ 得} \begin{cases} 6a_1 + 15d = 12a_1 + 12d, \\ a_1 + (2n-1)d = 2a_1 + 2(n-1)d + 1, \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2. \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

所以 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$. (5 分)

解法二: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由 $S_6 = 4S_3, a_{2n} = 2a_n + 1$ 得

$$\begin{cases} 6a_1 + 15d = 12a_1 + 12d, \\ a_2 = 2a_1 + 1, \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{解得} \begin{cases} a_1 = 1, \\ d = 2. \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

所以 $a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1$. 经验证满足题意. (5 分)

(2) **解法一:** 由 (1) 得 $b_n = (2n-1) \times 2^{n-1}$,

$$\text{则 } T_n = 1 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^2 + \cdots + (2n-3) \times 2^{n-2} + (2n-1) \times 2^{n-1}, \quad (6 \text{ 分})$$

$$2T_n = 1 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + 5 \times 2^3 + \cdots + (2n-3) \times 2^{n-1} + (2n-1) \times 2^n, \quad (7 \text{ 分})$$

两式相减得 $-T_n = 1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n - (2n-1) \times 2^n$

$$= 1 + \frac{2^2 - 2^n \times 2}{1-2} - (2n-1) \times 2^n$$

$$= (3-2n) \times 2^n - 3, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } T_n = (2n-3) \times 2^n + 3. \quad (10 \text{ 分})$$

解法二: 由(1)得 $b_n = (2n-1) \times 2^{n-1}$,

$$\text{因为 } b_n = (2n-3) \times 2^n - (2n-5) \times 2^{n-1}, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } T_n = [(-1) \times 2^1 - (-3) \times 2^0] + [1 \times 2^2 - (-1) \times 2^1] + \cdots + [(2n-3) \times 2^n - (2n-5) \times 2^{n-1}] = -(-3) \times 2^0 + (2n-3) \times 2^n, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } T_n = (2n-3) \times 2^n + 3. \quad (10 \text{ 分})$$

18. 【基础考点】正弦定理与余弦定理、三角形面积公式、二倍角公式

【解】(1) 由 $2\sin A = 3\sin 2C$ 得 $2\sin A = 3 \times 2\sin C \cos C$,

$$\text{即 } \sin A = 3\sin C \cos C. \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由正弦定理和余弦定理得 } a = 3c \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{又 } c = 2b, \text{ 解得 } a = \frac{3\sqrt{2}}{2}b. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \cos C = \frac{\sin A}{3\sin C} = \frac{a}{3c} = \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}b}{6b} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (5 \text{ 分})$$

$$\left(\text{另解: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{\frac{9}{2}b^2 - b^2}{3\sqrt{2}b^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

$$\text{又 } C \in (0, \pi), \text{ 所以 } \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{\sqrt{14}}{4}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 因为 } \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{3\sqrt{7}}{2}, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } ab = 6\sqrt{2}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{又 } a = \frac{3\sqrt{2}}{2}b, c = 2b, \text{ 所以 } b = 2, c = 4, a = 3\sqrt{2}. \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{解法一: 在 } \triangle ABC \text{ 中, 由余弦定理得 } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{8}, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{又 } AD = \frac{1}{2}AB = 2,$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中, 由余弦定理得 } CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos A = 7, \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } CD = \sqrt{7}. \quad (12 \text{ 分})$$

解法二: 延长 CD 至 E , 使得 $DE = CD$, 连接 AE, BE (图略), 则四边形 $ACBE$ 是平行四边形.

$$\cos \angle EAC = \cos(\pi - \angle ACB) = -\cos \angle ACB = -\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{在 } \triangle ACE \text{ 中, 由余弦定理得 } CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AE \cdot \cos \angle EAC = 28, \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } CE = 2\sqrt{7}, \text{ 所以 } CD = \sqrt{7}. \quad (12 \text{ 分})$$

$$\text{解法三: 因为 } \vec{CD} = \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{CB}), \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } |\vec{CD}|^2 = \vec{CD}^2 = \frac{1}{4}(\vec{CA} + \vec{CB})^2 = \frac{1}{4}(\vec{CA}^2 + 2\vec{CA} \cdot \vec{CB} + \vec{CB}^2)$$

$$= \frac{1}{4} \left[2^2 + 2 \times 2 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4} + (3\sqrt{2})^2 \right] = 7, \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } CD = \sqrt{7}. \quad (12 \text{ 分})$$

19. 【热门考点】线面平行的判定定理、直线与平面所成角、二面角、空间法向量的应用

(1) **【证明】** 设 AC 交 BE 于 G , 连接 FG .

$$\text{因为 } AE \parallel BC, \text{ 且 } AE = \frac{1}{2}BC,$$

$$\text{所以 } \triangle AEG \sim \triangle CBG, \text{ 所以 } \frac{AG}{GC} = \frac{1}{2}. \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{又 } AP = 3AF, \text{ 所以 } \frac{AF}{FP} = \frac{1}{2} = \frac{AG}{GC}.$$

$$\text{所以 } GF \parallel PC. \quad (3 \text{ 分})$$

(平行线分线段成比例的应用)

又 $GF \subset$ 平面 BEF , $PC \not\subset$ 平面 BEF ,

$$\text{所以 } PC \parallel \text{平面 } BEF. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) **【解】** 由 $\angle ACD = 30^\circ$, 得 $\angle BCD = 60^\circ$.

又 $BC = CD$, 所以 $\triangle BCD$ 为正三角形.

又 $\angle PDB = \angle PDC$, $DB = DC$,

所以 $\triangle PDB \cong \triangle PDC$, 所以 $PB = PC$.

$$\text{取 } BC \text{ 中点 } H, \text{ 连接 } PH, DH, \text{ 则 } PH \perp BC. \quad (6 \text{ 分})$$

(当出现等腰三角形时, 取其底边的中点, 利用等腰三角形三线合一的性质推出线线垂直关系)

又平面 $PBC \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PBC \cap$ 平面 $ABCD = BC$,

$$\text{所以 } PH \perp \text{平面 } ABCD. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } PD \text{ 与平面 } ABCD \text{ 所成的角为 } \angle PDH = 45^\circ, \quad (8 \text{ 分})$$

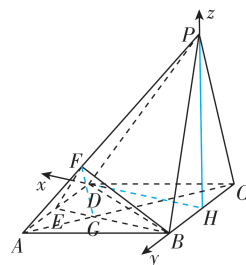
$$\text{设 } BC = 2, \text{ 则 } DH = PH = \sqrt{3}.$$

以 H 为坐标原点, HD, HB, HP 所在直线分别为 x 轴、 y 轴、 z 轴建立空间直角坐标系 $H-xyz$, 如图所示,

$$\text{则 } D(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), P(0, 0, \sqrt{3}), E(\sqrt{3}, 1, 0), A(\sqrt{3}, 2, 0),$$

$$\text{从而由 } \vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{AP} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \text{ 得 } F\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \vec{AE} = (0, -1, 0), \vec{BE} = (\sqrt{3}, 0, 0), \vec{BF} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$



设平面 AEF 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \vec{AE} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \\ \vec{AF} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -y_1 = 0, \\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x_1 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}z_1 = 0, \end{cases}$$

$$\text{取 } x_1 = 1, \text{ 则 } y_1 = 0, z_1 = 1, \text{ 故 } \mathbf{n}_1 = (1, 0, 1). \quad (10 \text{ 分})$$

设平面 BEF 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{BE} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \\ \overrightarrow{BF} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} \sqrt{3}x_2 = 0, \\ \frac{2\sqrt{3}}{3}x_2 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}z_2 = 0, \end{cases}$$

取 $z_2 = 1$, 则 $x_2 = 0, y_2 = -\sqrt{3}$, 故 $\mathbf{n}_2 = (0, -\sqrt{3}, 1)$. (11 分)

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \times 2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

所以平面 AEF 与平面 BEF 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$. (12 分)

20. 【经典题型】古典概型、条件概率、二项分布的概率、正态分布

【解】(1) **解法一**: 设“从这三个社区中随机抽取 1 名居民, 该居民每周运动总时间超过 5 小时”为事件 M , N_1, N_2, N_3 分别表示所抽取的 1 名居民来自 A, B, C 社区.

$$\text{依题意得 } P(N_1) = \frac{5}{5+6+9} = \frac{1}{4}, P(N_2) = \frac{6}{5+6+9} = \frac{3}{10}, P(N_3) = \frac{9}{5+6+9} = \frac{3}{10}.$$

$$\text{故 } P(M) = P(N_1)P(M|N_1) + P(N_2)P(M|N_2) + P(N_3)P(M|N_3) \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{4} \times 56\% + \frac{3}{10} \times 65\% + \frac{9}{20} \times 70\% = \frac{13}{20}. \quad (6 \text{ 分})$$

解法二: 设“从这三个社区中随机抽取 1 名居民, 该居民每周运动总时间超过 5 小时”为事件 M , 这三个社区的总居民人数为 n .

$$\text{三个社区每周运动总时间超过 5 小时的人数为 } \frac{5}{20}n \times 0.56 + \frac{6}{20}n \times 0.65 + \frac{9}{20}n \times 0.7. \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{故 } P(M) = \frac{\frac{5}{20}n \times 0.56 + \frac{6}{20}n \times 0.65 + \frac{9}{20}n \times 0.7}{n} \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \frac{1}{4} \times 0.56 + \frac{3}{10} \times 0.65 + \frac{9}{20} \times 0.7 = \frac{13}{20}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } P(X > 5) = \frac{13}{20}, \quad (7 \text{ 分})$$

因为 $X \sim N(5.5, \sigma^2)$,

$$\text{所以 } P(5 \leq X \leq 6) = \left(\frac{13}{20} - \frac{1}{2} \right) \times 2 = \frac{3}{10}, \quad (8 \text{ 分})$$

设抽取的 3 名居民中, 每周运动总时间为 5 至 6 小时的人数为 η .

$$\text{依题意得 } \eta \sim B\left(3, \frac{3}{10}\right). \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{故 } P(\eta = 2) + P(\eta = 3) = C_3^2 \left(\frac{3}{10}\right)^2 \times \frac{7}{10} + \left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{27}{125}. \quad (11 \text{ 分})$$

所以至少有两名居民每周运动总时间为 5 至 6 小时的概率为 $\frac{27}{125}$. (12 分)

思路导引 (1) 由焦点到准线距离求出 p → 抛物线 C 的方程 → 根据焦点坐标求出圆心 → 由圆 M 与 y 轴相切求出半径 → 圆 M 的方程;

(2) 设出过点 P 的切线方程 $\xrightarrow{\text{点到直线的距离公式}}$ 得到关于切线斜率 k 的一元二次方程 → 直线 PA, PQ 的斜率关系式 → 联立切线与抛物线方程 → 利用根与系数关系求出 y_1y_2, y_3y_4 → 结合题设条件求出定曲线方程.

【重难点】 直线与圆的位置关系、抛物线与圆的方程、直线与抛物线的位置关系

(1) **【解】** 由题设得 $p = 2$,

所以抛物线 C 的方程为 $y^2 = 4x$. (2 分)

因此, 抛物线的焦点为 $F(1, 0)$, 即圆 M 的圆心为 $M(1, 0)$.

(3 分)

因为圆 M 与 y 轴相切, 所以圆 M 的半径为 1.

(.点到 y 轴的距离等于该点横坐标的绝对值)

所以圆 M 的方程为 $(x-1)^2 + y^2 = 1$. (4 分)

(2) **【证明】解法一**: 由于 $P(x_0, y_0) (x_0 \neq 2)$, 两条切线都与抛物线有两个不同的交点, 则 $x_0 \neq 0$, 则切线的斜率存在.

设过点 P 与圆 M 相切的切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 即 $kx - y + y_0 - kx_0 = 0$,

$$\text{则圆心到切线的距离 } d = \frac{|k + y_0 - kx_0|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{整理得 } x_0(x_0 - 2)k^2 - 2y_0(x_0 - 1)k + y_0^2 - 1 = 0. \quad (6 \text{ 分})$$

设直线 PA, PQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 k_1, k_2 是方程①的两个不

$$\text{等实根, 则 } k_1 + k_2 = \frac{2y_0(x_0 - 1)}{x_0(x_0 - 2)}, k_1k_2 = \frac{y_0^2 - 1}{x_0(x_0 - 2)}. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \begin{cases} kx - y + y_0 - kx_0 = 0, \\ y^2 = 4x \end{cases} \text{ 得 } ky^2 - 4y + 4(y_0 - kx_0) = 0. \quad (8 \text{ 分})$$

因为点 A, B, Q, R 的纵坐标分别为 y_1, y_2, y_3, y_4 ,

$$\text{所以 } y_1y_2 = \frac{4(y_0 - k_1x_0)}{k_1}, \quad (4) \quad y_3y_4 = \frac{4(y_0 - k_2x_0)}{k_2}, \quad (5) \quad (8 \text{ 分})$$

由②④⑤三式得

$$\begin{aligned} y_1y_2y_3y_4 &= \frac{16(y_0 - k_1x_0)(y_0 - k_2x_0)}{k_1k_2} = \frac{16[y_0^2 - (k_1 + k_2)x_0y_0 + k_1k_2x_0^2]}{k_1k_2} \\ &= \frac{16[y_0^2 - (k_1 + k_2)x_0y_0]}{k_1k_2} + 16x_0^2 \\ &= \frac{16\left[y_0^2 - \frac{2y_0(x_0 - 1)}{x_0(x_0 - 2)}x_0y_0\right]}{\frac{y_0^2 - 1}{x_0(x_0 - 2)}} + 16x_0^2 = 16. \end{aligned} \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{即 } y_0^2x_0(x_0 - 2) - 2y_0(x_0 - 1)x_0y_0 = (1 - x_0^2)(y_0^2 - 1),$$

$$\text{即 } y_0^2x_0^2 - 2y_0^2x_0 - 2y_0^2x_0 + 2x_0y_0^2 = y_0^2 - x_0^2y_0^2 - 1 + x_0^2, \text{ 即 } x_0^2 + y_0^2 = 1. \quad (11 \text{ 分})$$

所以点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上. (12 分)

解法二: 设切线方程为 $x - x_0 = m(y - y_0)$, 因为两条切线与抛物线均有两个交点, 则 $y_0 \neq \pm 1$.

$$\text{由题意得 } \frac{|1 - x_0 + my_0|}{\sqrt{m^2 + 1}} = 1, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\text{整理得 } (y_0^2 - 1)m^2 + 2y_0(1 - x_0)m + x_0^2 - 2x_0 = 0,$$

$$\text{则 } m_1 + m_2 = \frac{2y_0(x_0 - 1)}{y_0^2 - 1}, m_1m_2 = \frac{x_0^2 - 2x_0}{y_0^2 - 1}. \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \begin{cases} y^2 = 4x, \\ x - x_0 = m(y - y_0) \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 4my + 4my_0 - 4x_0 = 0,$$

$$\text{则 } y_1y_2 = 4m_1y_0 - 4x_0, y_3y_4 = 4m_2y_0 - 4x_0, \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{故 } 16 = y_1y_2y_3y_4 = (4m_1y_0 - 4x_0)(4m_2y_0 - 4x_0),$$

$$\text{整理得 } m_1 m_2 y_0^2 - x_0 y_0 (m_1 + m_2) + x_0^2 = 1, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{故 } \frac{x_0^2 - 2x_0}{y_0^2 - 1} \cdot y_0^2 - \frac{2x_0 y_0^2 (x_0 - 1)}{y_0^2 - 1} + x_0^2 = 1, \text{ 化简得 } x_0^2 + y_0^2 = 1, \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{故点 } P \text{ 在定圆 } x^2 + y^2 = 1 \text{ 上}. \quad (12 \text{ 分})$$

22. 思路导引 (1) 求出函数 $g(x)$ 的解析式与导函数 $g'(x)$ →

分 $0 < a < 1, a > 1$ 讨论 $g'(x)$ 的正负区间 → 函数 $g(x)$ 的单调区间;

(2) (i) 将问题转化为方程 $\ln a = \frac{1 + \ln x^2}{x}$ 有三个根 → 令

$$p(x) = \frac{1 + \ln x^2}{x} \rightarrow \text{求导研究函数 } p(x) \text{ 的单调性} \rightarrow \text{求出函数}$$

$p(x)$ 的极值 → a 的范围;

(ii) 求出 $p(x) = 0$ 的根 → 求出 x_1, x_2, x_3 的范围 → 根据 x_2, x_3 为函数零点建立等量关系式 → 利用对数平均不等式求得 $x_2 + x_3$ 的范围 → 问题得证.

【重难点】利用导数研究函数的单调性、根据函数零点个数求参数的取值范围、导数在不等式证明中的应用

$$(1) \text{【解】} g(x) = \frac{f(x)}{x} + ex = \frac{a^x}{x} (x \neq 0), \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{得 } g'(x) = \frac{a^x (x \ln a - 1)}{x^2} (x \neq 0). \quad (2 \text{ 分})$$

(由于导函数中含有参数,需分 $0 < a < 1, a > 1$ 讨论函数的单调性)

$$\text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时, } \ln a < 0, \text{ 令 } g'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{\ln a}.$$

$$\text{当 } x > \frac{1}{\ln a} \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 时, } g'(x) < 0; \text{ 当 } x < \frac{1}{\ln a} \text{ 时, } g'(x) > 0.$$

故函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{\ln a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{\ln a}, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减. (3 分)

$$\text{当 } a > 1 \text{ 时, } \ln a > 0, \text{ 令 } g'(x) = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{\ln a}.$$

$$\text{当 } x > \frac{1}{\ln a} \text{ 时, } g'(x) > 0; \text{ 当 } x < \frac{1}{\ln a} \text{ 且 } x \neq 0 \text{ 时, } g'(x) < 0.$$

故函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, \frac{1}{\ln a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{\ln a}, +\infty)$ 上单调递增. (4 分)

综上所述, 当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{\ln a})$ 上单调递增, 在

$(\frac{1}{\ln a}, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $a > 1$ 时, 函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,$

$0)$ 和 $(0, \frac{1}{\ln a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{\ln a}, +\infty)$ 上单调递增.

$$(2) (i) \text{【解】由 } f(0) = 1 \neq 0, \text{ 所以 } f(x) = 0 \text{ 等价于 } x \ln a = 1 + \ln x^2, \text{ 即 } \ln a = \frac{1 + \ln x^2}{x}. \quad (5 \text{ 分})$$

(函数的零点个数问题,一般转化为两个函数图象的交点个数问题,或者利用参变量分离转化为参数直线 $y = a$ 与定函数 $y = g(x)$ 图象的交点个数问题,若转化为直线(不恒与 y 轴垂直)与定函数图象的交点个数问题,则需抓住直线与曲线相切这些临界位置,利用数形结合思想来进行分析)

$$\text{令 } p(x) = \frac{1 + \ln x^2}{x}, x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$$

因为 $p(-x) = -p(x)$, 所以 $p(x)$ 为奇函数. (6 分)

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } p(x) = \frac{1 + 2 \ln x}{x}, \text{ 于是 } p'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^2},$$

从而当 $x \in (0, \sqrt{e})$ 时, $p'(x) > 0$, $p(x)$ 单调递增;

当 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ 时, $p'(x) < 0$, $p(x)$ 单调递减,

$$\text{所以 } p(\sqrt{e}) = \frac{2}{\sqrt{e}} \text{ 为极大值}. \quad (7 \text{ 分})$$

又当 $x \rightarrow 0$ 时, $p(x) \rightarrow -\infty$; 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $p(x) \rightarrow 0$.

当 $x < 0$ 时, 由于函数 $p(x)$ 是奇函数, 则 $p(x)$ 的图象关于原点对称.

则当 $0 < \ln a < \frac{2}{\sqrt{e}}$ 时, 直线 $y = \ln a$ 与函数 $y = p(x)$ 的图象有三个交点,

$$\text{所以 } 1 < a < e^{\frac{2\sqrt{e}}{e}}. \text{ 故实数 } a \text{ 的取值范围为 } (1, e^{\frac{2\sqrt{e}}{e}}). \quad (8 \text{ 分})$$

(ii) 【证明】由 (i) 知当 $0 < \ln a < \frac{2}{\sqrt{e}}$ 时, $f(x)$ 存在三个零点 $x_1, x_2,$

x_3 ,

$$\text{由 } p(x) = \frac{1 + \ln x^2}{x} = 0, \text{ 得 } x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}},$$

$$\text{所以 } -\frac{1}{\sqrt{e}} < x_1 < 0, \frac{1}{\sqrt{e}} < x_2 < \sqrt{e} < x_3. \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{由于 } x_2 \ln a = 1 + 2 \ln x_2, x_3 \ln a = 1 + 2 \ln x_3,$$

$$\text{相减得 } (x_2 - x_3) \ln a = 2 \ln x_2 - 2 \ln x_3, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{由对数平均不等式得 } \frac{2}{\ln a} = \frac{x_2 - x_3}{\ln x_2 - \ln x_3} < \frac{x_2 + x_3}{2},$$

$$\text{所以 } x_2 + x_3 > \frac{4}{\ln a}. \quad (11 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } x_1 + 3x_2 + x_3 = x_1 + 2x_2 + (x_2 + x_3) > -\frac{1}{\sqrt{e}} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{e}} + \frac{4}{\ln a} = \frac{4}{\ln a} + \frac{1}{\sqrt{e}} >$$

$$2\sqrt{e} + \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{2e+1}{\sqrt{e}}. \quad (12 \text{ 分})$$

另附: 对数平均不等式的证明如下 (1 分)

$$\text{构造 } \varphi(t) = \ln t - 2 \left(\frac{t-1}{t+1} \right), \text{ 则 } \varphi'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} \geq 0,$$

所以 $\varphi(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $t \in (0, 1)$ 时, $\varphi(t) < \varphi(1) = 0$, 当 $t \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi(t) > \varphi(1) = 0$.

$$\text{所以当 } 0 < x_2 < x_3 \text{ 时, } 0 < \frac{x_2}{x_3} < 1, \text{ 所以 } \varphi\left(\frac{x_2}{x_3}\right) = \ln \frac{x_2}{x_3} - 2 \frac{\frac{x_2}{x_3} - 1}{\frac{x_2}{x_3} + 1} < 0.$$

$$\text{即 } \ln x_2 - \ln x_3 < 2 \frac{x_2 - x_3}{x_2 + x_3}. \text{ 又 } x_2 - x_3 < 0, \ln x_2 - \ln x_3 < 0,$$

$$\text{所以 } \frac{x_2 - x_3}{\ln x_2 - \ln x_3} < \frac{x_2 + x_3}{2}.$$