

($h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增转化为 $h'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 通过分离常数法转化为函数的最值问题)

$$\text{令 } \varphi(x) = e^{2x} - \frac{\ln x + 1}{x} - \left(2 + \frac{1}{e}\right), \text{ 则 } \varphi'(x) = 2e^{2x} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{2x^2 e^{2x} + \ln x}{x^2},$$

$$\text{令 } q(x) = 2x^2 e^{2x} + \ln x, \text{ 则 } q'(x) = 4x(x+1)e^{2x} + \frac{1}{x} > 0,$$

\therefore 函数 $q(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\therefore q\left(\frac{1}{e}\right) = 2e^{\frac{2}{e}-2} - 1 < \frac{2}{e} - 1 < 0, q(1) = 2e^2 > 0,$$

$$\therefore \text{存在 } x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right), \text{ 使得 } q(x_0) = 2x_0^2 e^{2x_0} + \ln x_0 = 0,$$

$$\text{则 } 2x_0 e^{2x_0} = -\frac{1}{x_0} \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0}. \quad (9 \text{ 分})$$

(在处理隐零点问题时, 有时需用到“同构”的方法, 由 $2x_0^2 e^{2x_0} + \ln x_0 = 0$, 即 $2x_0 e^{2x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} = e^{\ln \frac{1}{x_0}} \ln \frac{1}{x_0}$, 从而得到 $2x_0 = \ln \frac{1}{x_0} = -\ln x_0$)

令 $t(x) = xe^x, x > 0$, 则 $t'(x) = (x+1)e^x > 0$, 故函数 $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$$\therefore x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right), \therefore 1 < \frac{1}{x_0} < e, \therefore 0 < \ln \frac{1}{x_0} < 1.$$

$$\text{由 } 2x_0 e^{2x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} \text{ 可得 } t(2x_0) = t\left(\ln \frac{1}{x_0}\right),$$

$$\therefore 2x_0 = -\ln x_0, \therefore e^{2x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

当 $0 < x < x_0$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 函数 $\varphi(x)$ 单调递减;

当 $x > x_0$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 函数 $\varphi(x)$ 单调递增,

$$\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi(x_0) = e^{2x_0} - \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} - \left(2 + \frac{1}{e}\right) = \frac{1 - (1 - 2x_0)}{x_0} -$$

$$\left(2 + \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}, \quad (11 \text{ 分})$$

$$\therefore k \leq -\frac{1}{e}. \text{ 故 } k \text{ 的取值范围是 } \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right]. \quad (12 \text{ 分})$$

7 2023 福建省泉州市高中毕业班质量监测(一)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	A	D	D	B	B	C	D	ACD	AC
题号	11	12	13		14		15		16	
答案	BD	ACD	$\sqrt{3}$		$y = x + 1$		2^n		2	

1. A 【基础考点】集合的交集运算、一元二次不等式的解法

【深度解析】 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \leq 6\} = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid 2x^2 - 7x + 3 < 0\} = \left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 3\right\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2\}$. 故选 A.

2. A 【基础考点】复数的除法运算、几何意义

【深度解析】 $\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, 其在复平面内对应点的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 位于第一象限. 故选 A.

3. D 【经典题型】利用二项展开式的通项求特定项的系数

【深度解析】由二项式定理可得 $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{10-r} \cdot (-\sqrt{x})^r = (-1)^r C_{10}^r x^{\frac{3}{2}r-10}$, 令 $\frac{3}{2}r-10=2$, 解得 $r=8$, 所以 x^2 的系数为 $(-1)^8 C_{10}^8 = 45$. 故选 D.

▶ 快解 由二项展开式的通项可知, $T_9 = C_{10}^8 \left(\frac{1}{x}\right)^2 (-\sqrt{x})^8 = (-1)^8 C_{10}^8 x^2 = 45x^2$, 故选 D.

4. D 【新趋考点】条件概率的计算

【深度解析】设公司男、女员工的人数分别为 $2n$ 和 n , 则男员工中, 肥胖者有 $2n \times \frac{3}{100} = \frac{3n}{50}$ 人, 女员工中, 肥胖者有 $n \times \frac{2}{100} = \frac{n}{50}$ 人, 设任选一名员工为肥胖者为事件 A, 肥胖者为男性为事件 B, 则

$$P(AB) = \frac{3n}{3n} = \frac{1}{50}, P(A) = \frac{3n + \frac{n}{50}}{3n} = \frac{2}{75}, \text{ 则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{2}{75}} =$$

$$\frac{3}{4}. \text{ 故选 D.}$$

▶ 一题多解 设公司男、女员工的人数分别为 $2n$ 和 n , 则男员工中, 肥胖者有 $2n \times \frac{3}{100} = \frac{3n}{50}$ 人, 女员工中, 肥胖者有 $n \times \frac{2}{100} = \frac{n}{50}$ 人, 设任选一名员工为肥胖者为事件 A, 肥胖者为男性为事件 B,

$$\text{则 } P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{\frac{3n}{50}}{\frac{3n + \frac{n}{50}}{2}} = \frac{3}{4}. \text{ 故选 D.}$$

5. B 【重点题型】三角函数的图象和性质

【深度解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T . 由题图可知 $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{T}{4}$, 得 $T=2$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$. 将 $R\left(\frac{5}{6}, 0\right)$ 的坐标代入函数解析式得 $A \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \varphi\right) = 0$, 所以 $\frac{5\pi}{6} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 又因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x) = A \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$. 所以 $f(0) = \frac{A}{2}$, 所以 $P\left(0, \frac{A}{2}\right)$, 所以 $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{3}, \frac{A}{2}\right), \overrightarrow{PR} = \left(\frac{5}{6}, -\frac{A}{2}\right)$. 因为 $PQ \perp PR$, 所以 $\overrightarrow{PQ} \cdot$

$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} - \frac{A^2}{4} = 0$, 解得 $A = \frac{\sqrt{10}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{10}}{3}$ (舍去). 故选 B.

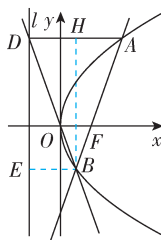
6. B 【重点考点】抛物线的定义及其几何性质

【深度解析】不妨设抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 过点 B 作 $BE \perp l$, 垂足为点 E , 作 $BH \perp AD$, 垂足为点 H , 如图所示. 因为 $AD \perp l$, 所以四边形 $BEDH$ 为矩形, 所以 $|BE| = |DH|$.

因为 $|AB| = |BD|$, 所以 $|DH| = |AH|$,

故 $|AD| = 2|DH| = 2|BE|$. 由抛物线的定义得 $|AF| =$

$|AD|$, $|BF| = |BE|$, 所以 $|AF| = 2|BF|$, 即 $\frac{|AF|}{|BF|} = 2$. 故选 B.



一题多解 不妨设抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 则

$F(\frac{p}{2}, 0)$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 显然直线 m 的斜率存在, 设直线

m 的方程为 $y = k(x - \frac{p}{2})$, 由 $\begin{cases} y = k(x - \frac{p}{2}) \\ y^2 = 2px \end{cases}$, 得 $k^2x^2 - (k^2p + 2p)x + \frac{k^2p^2}{4} = 0$, 则 $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}$. 因为 $|AB| = |BD|$, $D(-\frac{p}{2}, y_1)$, 所以 $x_2 =$

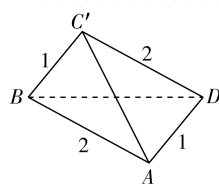
$x_1 + (-\frac{p}{2})$, 即 $x_1 = 2x_2 + \frac{p}{2}$, 代入 $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}$, 得 $8x_2^2 + 2px_2 - p^2 = 0$, 解得 $x_2 = \frac{p}{4}$ 或 $x_2 = -\frac{p}{2}$ (舍去), 则 $x_1 = 2 \times \frac{p}{4} + \frac{p}{2} = p$, 所以 $\frac{|AF|}{|BF|} =$

$\frac{x_1 + \frac{p}{2}}{x_2 + \frac{p}{2}} = \frac{p + \frac{p}{2}}{\frac{p}{4} + \frac{p}{2}} = 2$. 故选 B.

7. C 【经典题型】异面直线所成角、锥体体积的计算

【深度解析】因为异面直线所成角最大为直角, 所以当 $C'B \perp AD$ 时, $C'B$ 与 AD 所成角最大 (关键: 由 $C'B$ 与 AD 所成角最大得到 $C'B \perp AD$). 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AD \perp AB$. 又 $C'B \perp AD$, $AB \cap C'B = B$, $AB, C'B \subset$ 平面 ABC' , 所以 $AD \perp$ 平面 ABC' . 又因为 $AC' \subset$ 平面 ABC' , 所以 $AD \perp AC'$. 在 $Rt\triangle AC'D$ 中, $AD = 1$, $C'D = 2$, 所以 $AC' = \sqrt{C'D^2 - AD^2} = \sqrt{3}$. 又 $BC' = 1$, $AC' = \sqrt{3}$, $AB = 2$, 所以 $AB^2 = BC'^2 + AC'^2$, 即 $BC' \perp AC'$, 所以 $V_{C'-ABD} = V_{D-ABC'} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC'} \cdot AD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times$

$\sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (关键: 由 $AD \perp$ 平面 ABC' , 得 $V_{C'-ABD} = V_{D-ABC'}$). 故选 C.



8. D

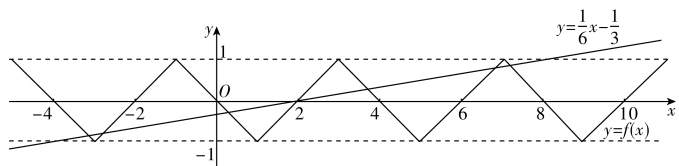
思路导引 $f(x)$ 是奇函数 $\rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ 的图象关于直线 } x=1 \text{ 对称} \\ f(x+2) = -f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ 的周期为 } 4 \end{cases} \rightarrow \text{画出 } f(x) \text{ 的图象}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{函数 } f(x) \text{ 的图象和直线 } y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \text{ 均关于 } (2, 0) \text{ 对称} \\ \text{函数 } f(x) \text{ 的图象和直线 } y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \text{ 有 } 7 \text{ 个交点} \end{array} \right\} \rightarrow$

$\sum_{i=1}^7 x_i$ 和 $\sum_{i=1}^7 y_i \rightarrow \sum_{i=1}^7 (x_i + y_i)$

【重难点型】函数的零点问题、函数的性质的综合应用

【深度解析】因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$, 所以直线 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴. 由 $f(x+2) = -f(x)$, 得 $f(x+4) = -f(x+2) = -[-f(x)] = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数 (关键: 由已知得函数 $f(x)$ 图象的对称轴以及周期, 画出函数 $f(x)$ 的图象). 作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示:



由图象可知, 点 $(2, 0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心, 且直线

$y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$ 也关于点 $(2, 0)$ 对称 (提示: 得到函数 $f(x)$ 的图象和直

线 $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$ 均关于点 $(2, 0)$ 对称), 且当 $x \geq 8$ 时, $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \geq 1$,

当 $x \leq -4$ 时, $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \leq -1$. 由图可知, 直线 $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$ 与函数

$y = f(x)$ 的图象有 7 个公共点, 则由对称性可得, $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 2 +$

$4 \times 3 = 14$, $y_1 + y_2 + \dots + y_7 = 0$, 因此 $\sum_{i=1}^7 (x_i + y_i) = 14$. 故选 D.

方法速记 (1) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 且 $f(x+a) = -f(x)$ (a

为非零常数), 则直线 $x = \frac{a}{2}$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 且

$f(x)$ 的周期为 $2a$; (2) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象均关于点 $(a, 0)$ 对称, 则两函数图象的交点也关于点 $(a, 0)$ 对称.

9. ACD 【基础考点】两点间距离、点到直线的距离、圆上的点到直线的距离的最值

【深度解析】对于选项 A: 由圆 $C: x^2 + y^2 = 4$, 可得 $C(0, 0)$, 半径 $r = 2$, 易知 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, 则 $|AB| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, 故 A 正确;

对于选项 B: 如图, 记点 D 为弦 AB 的中点, 则直线 $CD \perp AB$, 则

$|CD| = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以 $d_{\max} = |CD| + r = 2 + \sqrt{2}$, 故 B 错误;

对于选项 C: 如图, 由选项 B 与题意, 得 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $D(1, 1)$,

因为直线 AB 的斜率 $k_{AB} = -1$, $CD \perp AB$, 所以直线 CD 的斜率 $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = 1$, 由 $D(1, 1)$, 得直线 CD 的方程为 $y - 1 = x - 1$, 即 $y = x$, 则点

$N(-2, -2)$ 在直线 CD 上, 因为直线 CD 为 AB 的垂直平分线, 所以 $\triangle ABN$ 是等腰三角形, 故 C 正确;

(另解: 易知 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $N(-2, -2)$, 则 $|NA| = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [0-(-2)]^2} = 2\sqrt{5}$, $|NB| = \sqrt{[0-(-2)]^2 + [2-(-2)]^2} = 2\sqrt{5}$, 即 $|NA| = |NB|$, 所以 $\triangle ABN$ 是等腰三角形, 故 C 正确)

对于选项 D: 如图, 过点 M 作 $ME \perp l$ 于 E ,

则 $d = |ME|$, 显然 $|MN| + d = |MN| +$

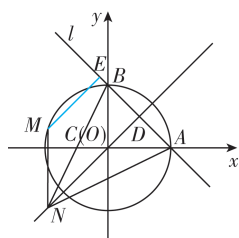
$|ME| \geq |ND|$, 由 $D(1, 1)$ 得, $|ND| =$

$\sqrt{(-2-1)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{2}$, 则 $|MN| + d$

的最小值为 $3\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 ACD.

10. AC 【基础考点】用样本估计总体

【深度解析】由题意可知掷出点数为 3 的倍数的情况为 3, 6, 故掷



出点数为3的倍数的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$,故理论上回答问题“投掷点数是不是奇数?”的人数为 $150 \times \frac{1}{3} = 50$. 掷出点数为奇数的概率

为 $\frac{1}{2}$,理论上回答问题“投掷点数是不是奇数?”的50人中有25人回答“是”,故回答问题“你是不是迷恋电子游戏?”的学生中回答“是”的人数为 $30 - 25 = 5$. 抽样调查的这150名学生中,约有50人回答问题“投掷点数是不是奇数?”,故**A正确**;抽样调查的这150名学生中,约有5人迷恋电子游戏,“必有”过于绝对,故**B错误**;抽样调查的150名学生中,50名学生回答问题“投掷点数是不是奇数?”,故有100名学生回答问题“你是不是迷恋电子游戏?”,有5名学生回答“是”,故该校迷恋电子游戏的学生约占 $\frac{5}{100} = 5\%$,故**C正确,D错误**. 故选**AC**.

11. BD 【重难点】函数的零点、利用导数研究函数的极值

【深度解析】对于选项A: 函数 $f(x) = \ln x - (x-a)^2$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 2x + 2a = \frac{-2x^2 + 2ax + 1}{x}$. 设 $g(x) = -2x^2 + 2ax + 1$, $\Delta = 4a^2 + 8 > 0$, $x_1 x_2 = -\frac{1}{2} < 0$, 所以 $-2x^2 + 2ax + 1 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有一个正根(提示: 分析 $f'(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上根的个数), 设为 x_2 , 在 $(0, x_2)$ 上, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 在 $(x_2, +\infty)$ 上, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)$ 存在一个极大值点, 故**A错误**.

对于选项B: 令 $f(x) = \ln x - (x-a)^2 = 0$, 即 $\ln x = (x-a)^2$, 函数 $f(x)$ 的零点个数即为 $y = \ln x$ 与 $y = (x-a)^2$ 图象的交点个数(关键: 将 $f(x)$ 的零点个数转化为 $y = \ln x$ 与 $y = (x-a)^2$ 图象的交点个数), 作出函数 $y = \ln x$ 与 $y = (x-a)^2$ 的大致图象如图所示.

函数 $y = (x-a)^2$ 的图象与 x 轴的交点

为 $(a, 0)$, 当 $a > \frac{7}{3}$ 时, $y = \ln x$ 与 $y = (x-a)^2$ 的图象有两个交点, 即 $f(x)$ 存在

两个零点, 故**B正确**.

对于选项C: 当 $a = 0$ 时, $y = \ln x$ 与 $y = (x-a)^2$ 的图象没有交点, 即函数 $f(x)$ 没有零点, 故**C错误**.

对于选项D: 若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 , 假设 $x_1 < x_2$, 则有 $f(x_1) = 0, f(x_2) = 0$, 即 $\ln x_1 = (x_1 - a)^2, \ln x_2 = (x_2 - a)^2$, 两式相减得 $\ln \frac{x_1}{x_2} = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2a)$, 因为 $x_1 < x_2$, 所以 $\frac{x_1}{x_2} < 1$, 所以 $\ln \frac{x_1}{x_2} < 0$, 因为 $x_1 - x_2 < 0$, 所以 $x_1 + x_2 - 2a > 0$, 即 $x_1 + x_2 > 2a$, 故**D正确**.

故选**BD**.

12. ACD

思路导引 对A, 利用平行四边形证得 $AA_1 \parallel C_1 O_2 \rightarrow$ 证得 $AA_1 \parallel$ 平面 BDC_1 , 判断A;

对B, 根据题中数据及正四棱台的性质, 可得 $O_2 A = O_2 B = O_2 C = O_2 D = O_2 A_1 = O_2 B_1 = O_2 C_1 = O_2 D_1$, 得到 O 与 O_2 重合, 求得球半径, 从而得到球的表面积, 判断B;

对C, 根据已知证得 $A_1 C \perp$ 平面 BDC_1 , A_1 与 C 关于平面 BDC_1 对称 $\rightarrow EA + EA_1 = EA + CE \geq AC$, 判断C;

对D, 利用面面垂直的性质作出 $AF \perp$ 平面 $BDC_1 \rightarrow$ 得到 $\angle AEF$ 为 AE 与平面 BDC_1 所成角 \rightarrow 利用 $\sin \angle AEF = \frac{AF}{AE}$ 得当 E 与 O_2 重合时, $\angle AEF$ 取得最大值, 判断D.

【重难点】线面平行的判定、多面体与球体的外接问题、线面角的求解、空间距离和的最值

【深度解析】对于选项A: 如图, 连接 $A_1 C_1, AC$, AC 与 BD 交于点 O_2 , 连接 $C_1 O_2$. 由棱台的结构特征易知 AA_1 与

CC_1 的延长线必交于一点, 故 A, A_1, C, C_1 四点共面, 又平面 $A_1 B_1 C_1 D_1 \parallel$ 平面 $ABCD$, 平面 $AA_1 C_1 C \cap$ 平面 $A_1 B_1 C_1 D_1 = A_1 C_1$, 平面 $AA_1 C_1 C \cap$ 平面 $ABCD = AC$, 所以 $A_1 C_1 \parallel AC$, 即 $A_1 C_1 \parallel AO_2$. 由平面几何易得 $A_1 C_1 = \sqrt{2}, AO_2 = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$, 所以 $A_1 C_1 = AO_2$, 所以四边形 $AA_1 C_1 O_2$ 是平行四边形, 故 $AA_1 \parallel C_1 O_2$. 而 $AA_1 \not\subset$ 平面 $BDC_1, C_1 O_2 \subset$ 平面 BDC_1 , 所以 $AA_1 \parallel$ 平面 BDC_1 , 故**A正确**.

对于选项B: 由 $AB = 2$ 可得 $O_2 A = O_2 B = O_2 C = O_2 D = \sqrt{2}$, 又 $AA_1 = O_2 C_1 = \sqrt{2}$, 所以 $O_2 A_1 = O_2 B_1 = O_2 C_1 = O_2 D_1 = \sqrt{2}$, 所以 O_2 为外接球的球心 O , 球半径 $R = \sqrt{2}$, 所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2 = 4\pi \times (\sqrt{2})^2 = 8\pi$, 故**B错误**.

对于选项C: 如图, 设 O_1 为 $A_1 C_1$ 的中点, 连接 $O_1 O_2$, 由正四棱台的性质可知 $O_1 O_2 \perp$ 平面 $ABCD$, 又 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BD \perp O_1 O_2$, 又 $BD \perp AC, O_1 O_2 \cap AC = O_2, O_1 O_2, AC \subset$ 平面 $AA_1 C_1 C$, 所以 $BD \perp$ 平面 $AA_1 C_1 C$. 连接 $A_1 C$ 交 $C_1 O_2$ 于 G , 由选项A可知 $A_1 C_1 \parallel O_2 C$, 则四边形 $A_1 C_1 C O_2$ 为平行四边形, 又 $A_1 C_1 = CC_1 = \sqrt{2}$, 所以四边形 $A_1 C_1 C O_2$ 为菱形, 所以 $A_1 C \perp C_1 O_2$. 因为 $A_1 C \subset$ 平面 $AA_1 C_1 C$, 所以 $BD \perp A_1 C$, 又 $BD \cap C_1 O_2 = O_2$, 所以 $A_1 C \perp$ 平面 BDC_1 , 又 $A_1 G = CG$, 所以 A_1 关于平面 BDC_1 对称的点为 C , 所以 $EA + EA_1 = EA + CE \geq AC = 2\sqrt{2}$, 故**C正确**.

对于选项D: 由选项C可知, $BD \perp$ 平面 $AA_1 C_1 C, BD \subset$ 平面 BDC_1 , 故平面 $AA_1 C_1 C \perp$ 平面 BDC_1 , 在平面 $AA_1 C_1 C$ 内过 A 作 $AF \perp C_1 O_2$ 交 $C_1 O_2$ 于 F , 如图, 则 $AF \subset$ 平面 $AA_1 C_1 C$, 平面 $AA_1 C_1 C \cap$ 平面 $BDC_1 = C_1 O_2$, 所以 $AF \perp$ 平面 BDC_1 , 则 $\angle AEF$ 为 AE 与平面 BDC_1

所成角. 在 $Rt \triangle AEF$ 中, $\sin \angle AEF = \frac{AF}{AE}$, 因为 AF 的长度为定值, 所以当 AE 取得最小值时, $\sin \angle AEF$ 取得最大值, 即 $\angle AEF$ 取得最大值. 显然, 动点 E 与 O_2 重合时, AE 取得最小值, 即 $\angle AEF$ 取得最大值, 且 $\angle AEF = \angle AO_2 F = \angle C_1 O_2 C$ (关键: 利用 $\sin \angle AEF = \frac{AF}{AE}$ 得到当 E 与 O_2 重合时, $\angle AEF$ 取得最大值).

在 $\triangle C_1 O_2 C$ 中, $C_1 O_2 = AA_1 = \sqrt{2}, CC_1 = AA_1 = \sqrt{2}, O_2 C = \frac{1}{2} AC = \sqrt{2}$, 故 $\triangle C_1 O_2 C$ 为正三角形, 即 $\angle C_1 O_2 C = 60^\circ$, 即 AE 与平面 BDC_1 所成角的最大值为 60° , 故**D正确**. 故选**ACD**.

$\overrightarrow{PR} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} - \frac{A^2}{4} = 0$, 解得 $A = \frac{\sqrt{10}}{3}$ 或 $-\frac{\sqrt{10}}{3}$ (舍去). 故选 B.

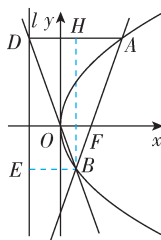
6. B 【重点考点】抛物线的定义及其几何性质

【深度解析】不妨设抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 过点 B 作 $BE \perp l$, 垂足为点 E , 作 $BH \perp AD$, 垂足为点 H , 如图所示. 因为 $AD \perp l$, 所以四边形 $BEDH$ 为矩形, 所以 $|BE| = |DH|$.

因为 $|AB| = |BD|$, 所以 $|DH| = |AH|$,

故 $|AD| = 2|DH| = 2|BE|$. 由抛物线的定义得 $|AF| =$

$|AD|$, $|BF| = |BE|$, 所以 $|AF| = 2|BF|$, 即 $\frac{|AF|}{|BF|} = 2$. 故选 B.



一题多解 不妨设抛物线 C 的方程为 $y^2 = 2px$ ($p > 0$), 则

$F(\frac{p}{2}, 0)$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 显然直线 m 的斜率存在, 设直线

m 的方程为 $y = k(x - \frac{p}{2})$, 由 $\begin{cases} y = k(x - \frac{p}{2}) \\ y^2 = 2px \end{cases}$, 得 $k^2x^2 - (k^2p + 2p)x + \frac{k^2p^2}{4} = 0$, 则 $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}$. 因为 $|AB| = |BD|$, $D(-\frac{p}{2}, y_1)$, 所以 $x_2 =$

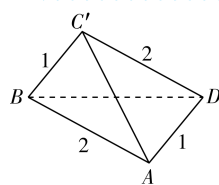
$x_1 + (-\frac{p}{2})$, 即 $x_1 = 2x_2 + \frac{p}{2}$, 代入 $x_1x_2 = \frac{p^2}{4}$, 得 $8x_2^2 + 2px_2 - p^2 = 0$, 解得 $x_2 = \frac{p}{4}$ 或 $x_2 = -\frac{p}{2}$ (舍去), 则 $x_1 = 2 \times \frac{p}{4} + \frac{p}{2} = p$, 所以 $\frac{|AF|}{|BF|} =$

$\frac{x_1 + \frac{p}{2}}{x_2 + \frac{p}{2}} = \frac{p + \frac{p}{2}}{\frac{p}{4} + \frac{p}{2}} = 2$. 故选 B.

7. C 【经典题型】异面直线所成角、锥体体积的计算

【深度解析】因为异面直线所成角最大为直角, 所以当 $C'B \perp AD$ 时, $C'B$ 与 AD 所成角最大 (关键: 由 $C'B$ 与 AD 所成角最大得到 $C'B \perp AD$). 因为四边形 $ABCD$ 是矩形, 所以 $AD \perp AB$. 又 $C'B \perp AD$, $AB \cap C'B = B$, $AB, C'B \subset$ 平面 ABC' , 所以 $AD \perp$ 平面 ABC' . 又因为 $AC' \subset$ 平面 ABC' , 所以 $AD \perp AC'$. 在 $Rt\triangle AC'D$ 中, $AD = 1$, $C'D = 2$, 所以 $AC' = \sqrt{C'D^2 - AD^2} = \sqrt{3}$. 又 $BC' = 1$, $AC' = \sqrt{3}$, $AB = 2$, 所以 $AB^2 = BC'^2 + AC'^2$, 即 $BC' \perp AC'$, 所以 $V_{C'-ABD} = V_{D-ABC'} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC'} \cdot AD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times$

$\sqrt{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{6}$ (关键: 由 $AD \perp$ 平面 ABC' , 得 $V_{C'-ABD} = V_{D-ABC'}$). 故选 C.



8. D

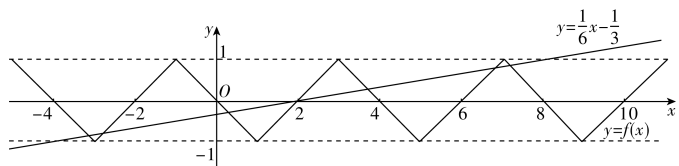
思路导引 $f(x)$ 是奇函数 $\rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ 的图象关于直线 } x=1 \text{ 对称} \\ f(x+2) = -f(x) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ 的周期为 } 4 \end{cases} \rightarrow \text{画出 } f(x) \text{ 的图象}$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{函数 } f(x) \text{ 的图象和直线 } y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \text{ 均关于 } (2, 0) \text{ 对称} \\ \text{函数 } f(x) \text{ 的图象和直线 } y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \text{ 有 } 7 \text{ 个交点} \end{array} \right\} \rightarrow$

$\sum_{i=1}^7 x_i$ 和 $\sum_{i=1}^7 y_i \rightarrow \sum_{i=1}^7 (x_i + y_i)$

【重难点型】函数的零点问题、函数的性质的综合应用

【深度解析】因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(x+2) = -f(x) = f(-x)$, 所以直线 $x=1$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴. 由 $f(x+2) = -f(x)$, 得 $f(x+4) = -f(x+2) = -[-f(x)] = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的周期函数 (关键: 由已知得函数 $f(x)$ 图象的对称轴以及周期, 画出函数 $f(x)$ 的图象). 作出函数 $f(x)$ 的大致图象如图所示:



由图象可知, 点 $(2, 0)$ 是函数 $f(x)$ 图象的一个对称中心, 且直线

$y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$ 也关于点 $(2, 0)$ 对称 (提示: 得到函数 $f(x)$ 的图象和直

线 $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$ 均关于点 $(2, 0)$ 对称), 且当 $x \geq 8$ 时, $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \geq 1$,

当 $x \leq -4$ 时, $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3} \leq -1$. 由图可知, 直线 $y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{3}$ 与函数

$y = f(x)$ 的图象有 7 个公共点, 则由对称性可得, $x_1 + x_2 + \dots + x_7 = 2 +$

$4 \times 3 = 14$, $y_1 + y_2 + \dots + y_7 = 0$, 因此 $\sum_{i=1}^7 (x_i + y_i) = 14$. 故选 D.

方法速记 (1) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 且 $f(x+a) = -f(x)$ (a

为非零常数), 则直线 $x = \frac{a}{2}$ 为函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 且

$f(x)$ 的周期为 $2a$; (2) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象均关于点 $(a, 0)$ 对称, 则两函数图象的交点也关于点 $(a, 0)$ 对称.

9. ACD 【基础考点】两点间距离、点到直线的距离、圆上的点到直线的距离的最值

【深度解析】对于选项 A: 由圆 $C: x^2 + y^2 = 4$, 可得 $C(0, 0)$, 半径 $r = 2$, 易知 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, 则 $|AB| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, 故 A 正确;

对于选项 B: 如图, 记点 D 为弦 AB 的中点, 则直线 $CD \perp AB$, 则

$|CD| = \frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以 $d_{\max} = |CD| + r = 2 + \sqrt{2}$, 故 B 错误;

对于选项 C: 如图, 由选项 B 与题意, 得 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $D(1, 1)$,

因为直线 AB 的斜率 $k_{AB} = -1$, $CD \perp AB$, 所以直线 CD 的斜率 $k_{CD} = -\frac{1}{k_{AB}} = 1$, 由 $D(1, 1)$, 得直线 CD 的方程为 $y - 1 = x - 1$, 即 $y = x$, 则点

$N(-2, -2)$ 在直线 CD 上, 因为直线 CD 为 AB 的垂直平分线, 所以 $\triangle ABN$ 是等腰三角形, 故 C 正确;

(另解: 易知 $A(2, 0)$, $B(0, 2)$, $N(-2, -2)$, 则 $|NA| = \sqrt{[2-(-2)]^2 + [0-(-2)]^2} = 2\sqrt{5}$, $|NB| = \sqrt{[0-(-2)]^2 + [2-(-2)]^2} = 2\sqrt{5}$, 即 $|NA| = |NB|$, 所以 $\triangle ABN$ 是等腰三角形, 故 C 正确)

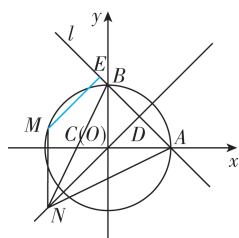
对于选项 D: 如图, 过点 M 作 $ME \perp l$ 于 E ,

则 $d = |ME|$, 显然 $|MN| + d = |MN| +$

$|ME| \geq |ND|$, 由 $D(1, 1)$ 得, $|ND| =$

$\sqrt{(-2-1)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{2}$, 则 $|MN| + d$

的最小值为 $3\sqrt{2}$, 故 D 正确. 故选 ACD.



10. AC 【基础考点】用样本估计总体

【深度解析】由题意可知掷出点数为 3 的倍数的情况为 3, 6, 故掷

出点数为3的倍数的概率为 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,故理论上回答问题“投掷点数是不是奇数?”的人数为 $150\times\frac{1}{3}=50$. 掷出点数为奇数的概率

为 $\frac{1}{2}$,理论上回答问题“投掷点数是不是奇数?”的50人中有25人回答“是”,故回答问题“你是不是迷恋电子游戏?”的学生中回答“是”的人数为 $30-25=5$. 抽样调查的这150名学生中,约有50人回答问题“投掷点数是不是奇数?”,故**A正确**;抽样调查的这150名学生中,约有5人迷恋电子游戏,“必有”过于绝对,故**B错误**;抽样调查的150名学生中,50名学生回答问题“投掷点数是不是奇数?”,故有100名学生回答问题“你是不是迷恋电子游戏?”,有5名学生回答“是”,故该校迷恋电子游戏的学生约占 $\frac{5}{100}=5\%$,故**C正确,D错误**. 故选**AC**.

11. BD 【重难点题】函数的零点、利用导数研究函数的极值

【深度解析】对于选项A:函数 $f(x)=\ln x-(x-a)^2$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, $f'(x)=\frac{1}{x}-2x+2a=\frac{-2x^2+2ax+1}{x}$. 设 $g(x)=-2x^2+2ax+1$, $\Delta=4a^2+8>0$, $x_1x_2=-\frac{1}{2}<0$,所以 $-2x^2+2ax+1=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有一个正根(提示:分析 $f'(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上根的个数),设为 x_2 ,在 $(0,x_2)$ 上, $f'(x)>0$,函数 $f(x)$ 单调递增,在 $(x_2,+\infty)$ 上, $f'(x)<0$,函数 $f(x)$ 单调递减,所以 $f(x)$ 存在一个极大值点,故**A错误**.

对于选项B:令 $f(x)=\ln x-(x-a)^2=0$,即 $\ln x=(x-a)^2$,函数 $f(x)$ 的零点个数即为 $y=\ln x$ 与 $y=(x-a)^2$ 图象的交点个数(关键:将 $f(x)$ 的零点个数转化为 $y=\ln x$ 与 $y=(x-a)^2$ 图象的交点个数),作出函数 $y=\ln x$ 与 $y=(x-a)^2$ 的大致图象如图所示.

函数 $y=(x-a)^2$ 的图象与 x 轴的交点

为 $(a,0)$,当 $a>\frac{7}{3}$ 时, $y=\ln x$ 与 $y=(x-a)^2$ 的图象有两个交点,即 $f(x)$ 存在

两个零点,故**B正确**.

对于选项C:当 $a=0$ 时, $y=\ln x$ 与 $y=(x-a)^2$ 的图象没有交点,即函数 $f(x)$ 没有零点,故**C错误**.

对于选项D:若 $f(x)$ 有两个零点 x_1, x_2 ,假设 $x_1<x_2$,则有 $f(x_1)=0, f(x_2)=0$,即 $\ln x_1=(x_1-a)^2, \ln x_2=(x_2-a)^2$,两式相减得 $\ln \frac{x_1}{x_2}=(x_1-x_2)(x_1+x_2-2a)$,因为 $x_1<x_2$,所以 $\frac{x_1}{x_2}<1$,所以 $\ln \frac{x_1}{x_2}<0$,因为 $x_1-x_2<0$,所以 $x_1+x_2-2a>0$,即 $x_1+x_2>2a$,故**D正确**.

故选**BD**.

12. ACD

思路导引 对A,利用平行四边形证得 $AA_1\parallel C_1O_2\rightarrow$ 证得 $AA_1\parallel$ 平面 BDC_1 ,判断A;

对B,根据题中数据及正四棱台的性质,可得 $O_2A=O_2B=O_2C=O_2D=O_2A_1=O_2B_1=O_2C_1=O_2D_1$,得到 O 与 O_2 重合,求得球半径,从而得到球的表面积,判断B;

对C,根据已知证得 $A_1C\perp$ 平面 BDC_1 , A_1 与 C 关于平面 BDC_1 对称 $\rightarrow EA+EA_1=EA+CE\geq AC$,判断C;

对D,利用面面垂直的性质作出 $AF\perp$ 平面 $BDC_1\rightarrow$ 得到 $\angle AEF$ 为 AE 与平面 BDC_1 所成角 \rightarrow 利用 $\sin \angle AEF=\frac{AF}{AE}$ 得当 E 与 O_2 重合时, $\angle AEF$ 取得最大值,判断D.

【重难点题】线面平行的判定、多面体与球体的外接问题、线面角的求解、空间距离和的最值

【深度解析】对于选项A:如图,连接 A_1C_1, AC, AC 与 BD 交于点 O_2 ,连接 C_1O_2 . 由棱台的结构特征易知 AA_1 与

CC_1 的延长线必交于一点,故 A, A_1, C, C_1 四点共面,又平面 $A_1B_1C_1D_1\parallel$ 平面 $ABCD$,平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1=A_1C_1$,平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $ABCD=AC$,所以 $A_1C_1\parallel AC$,即 $A_1C_1\parallel AO_2$. 由平面几何易得 $A_1C_1=\sqrt{2}, AO_2=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$,所以 $A_1C_1=AO_2$,所以四边形 $AA_1C_1O_2$ 是平行四边形,故 $AA_1\parallel C_1O_2$. 而 $AA_1\not\subset$ 平面 $BDC_1, C_1O_2\subset$ 平面 BDC_1 ,所以 $AA_1\parallel$ 平面 BDC_1 ,故**A正确**.

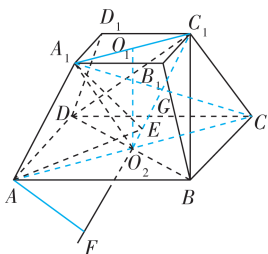
对于选项B:由 $AB=2$ 可得 $O_2A=O_2B=O_2C=O_2D=\sqrt{2}$,又 $AA_1=O_2C_1=\sqrt{2}$,所以 $O_2A_1=O_2B_1=O_2C_1=O_2D_1=\sqrt{2}$,所以 O_2 为外接球的球心 O ,球半径 $R=\sqrt{2}$,所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times(\sqrt{2})^2=8\pi$,故**B错误**.

对于选项C:如图,设 O_1 为 A_1C_1 的中点,连接 O_1O_2 ,由正四棱台的性质可知 $O_1O_2\perp$ 平面 $ABCD$,又 $BD\subset$ 平面 $ABCD$,所以 $BD\perp O_1O_2$,又 $BD\perp AC, O_1O_2\cap AC=O_2, O_1O_2, AC\subset$ 平面 AA_1C_1C ,所以 $BD\perp$ 平面 AA_1C_1C . 连接 A_1C 交 C_1O_2 于 G ,由选项A可知 $A_1C_1\parallel O_2C$,则四边形 $A_1C_1CO_2$ 为平行四边形,又 $A_1C_1=CC_1=\sqrt{2}$,所以四边形 $A_1C_1CO_2$ 为菱形,所以 $A_1C\perp C_1O_2$. 因为 $A_1C\subset$ 平面 AA_1C_1C ,所以 $BD\perp A_1C$,又 $BD\cap C_1O_2=O_2$,所以 $A_1C\perp$ 平面 BDC_1 ,又 $A_1G=CG$,所以 A_1 关于平面 BDC_1 对称的点为 C ,所以 $EA+EA_1=EA+CE\geq AC=2\sqrt{2}$,故**C正确**.

对于选项D:由选项C可知, $BD\perp$ 平面 $AA_1C_1C, BD\subset$ 平面 BDC_1 ,故平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 BDC_1 ,在平面 AA_1C_1C 内过 A 作 $AF\perp C_1O_2$ 交 C_1O_2 于 F ,如图,则 $AF\subset$ 平面 AA_1C_1C ,平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $BDC_1=C_1O_2$,所以 $AF\perp$ 平面 BDC_1 ,则 $\angle AEF$ 为 AE 与平面 BDC_1

所成角. 在 $Rt\triangle AEF$ 中, $\sin \angle AEF=\frac{AF}{AE}$,因为 AF 的长度为定值,所以当 AE 取得最小值时, $\sin \angle AEF$ 取得最大值,即 $\angle AEF$ 取得最大值. 显然,动点 E 与 O_2 重合时, AE 取得最小值,即 $\angle AEF$ 取得最大值,且 $\angle AEF=\angle AO_2F=\angle C_1O_2C$ (关键:利用 $\sin \angle AEF=\frac{AF}{AE}$ 得到当 E 与 O_2 重合时, $\angle AEF$ 取得最大值).

在 $\triangle C_1O_2C$ 中, $C_1O_2=AA_1=\sqrt{2}, CC_1=AA_1=\sqrt{2}, O_2C=\frac{1}{2}AC=\sqrt{2}$,故 $\triangle C_1O_2C$ 为正三角形,即 $\angle C_1O_2C=60^\circ$,即 AE 与平面 BDC_1 所成角的最大值为 60° ,故**D正确**. 故选**ACD**.



13. $\sqrt{3}$ 【基础考点】向量的模与数量积运算

【深度解析】因为 $|a-b|=1$, $|a|=|b|=1$, 所以 $(a-b)^2=1$, 即 $|a|^2-2a \cdot b+|b|^2=1$, 所以 $2a \cdot b=1$, 所以 $a \cdot b=\frac{1}{2}$, 所以 $|a-2b|=\sqrt{(a-2b)^2}=\sqrt{a^2-4a \cdot b+4b^2}=\sqrt{1-4 \times \frac{1}{2}+4}=\sqrt{3}$.

14. $y=x+1$ 【基础考点】利用导数的几何意义求切线方程

【深度解析】因为 $f(x)=e^x \cos x$, 所以 $f'(x)=e^x \cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)$, 因此在 $x=0$ 处的切线斜率 $k=f'(0)=1$. 又 $f(0)=e^0 \cos 0=1$, 所以所求切线方程为 $y-1=x-0$, 即 $y=x+1$.

15. 2^n 【经典题型】等比数列的通项公式和性质

【深度解析】在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 \cdot a_4=a_1 \cdot a_5=8$, 由 $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}=\frac{3}{4}$, 得 $\frac{a_2+a_4}{a_2 \cdot a_4}=\frac{3}{4}$, 即有 $a_2+a_4=6$, 因为 $q>1$, 所以 $a_2=2, a_4=4$, 即有 $q^2=\frac{a_4}{a_2}=2$, 解得 $q=\sqrt{2}$, 所以 $a_1=\frac{a_2}{q}=\sqrt{2}$, 所以 $a_n=a_1 q^{n-1}=(\sqrt{2})^n$, 则 $a_{2n}=(\sqrt{2})^{2n}=2^n$.

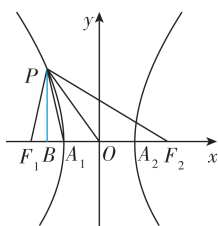
一题多解 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 \cdot a_5=a_3^2=8$, 所以 $a_3=2\sqrt{2}$ 或 $a_3=-2\sqrt{2}$. 因为 $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}=\frac{3}{4}$, 所以 a_2, a_4 均为正数. 又 $q>1$, 所以 $a_3=2\sqrt{2}$. 由 $\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}=\frac{3}{4}$, 得 $\frac{q}{a_3}+\frac{1}{a_3 q}=\frac{3}{4}$, 即 $2q^2-3\sqrt{2}q+2=0$, 解得 $q=\sqrt{2}$ 或 $q=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为 $q>1$, 所以 $q=\sqrt{2}$, 所以 $a_n=a_3 q^{n-3}=2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2})^{n-3}=(\sqrt{2})^n$, 所以 $a_{2n}=(\sqrt{2})^{2n}=2^n$.

16. 2

思路导引 PO 平分 $\angle A_1 P F_2 \rightarrow |PA_1| : |PF_2| = a : c$
 $k_1 = -k_2 \rightarrow |PA_1| = |PF_1| \rightarrow |PF_1| : |PF_2| = a : c$
 $|PF_2| - |PF_1| = 2a \rightarrow |PF_1| = \frac{2a^2}{c-a}$, 设直线 PF_1 的倾斜角为 α
 $|BF_1| = \frac{c-a}{2} \rightarrow \frac{|BF_1|}{|PF_1|} = \frac{1}{4} \rightarrow$ 双曲线的离心率.
 $\tan \alpha = \sqrt{15}$

【重难点】双曲线的定义及其几何性质

【深度解析】如图所示, 由题意 $|OA_1|=a$, $|OF_2|=c$, 易知 $S_{\triangle POA_1} : S_{\triangle POF_2} = a : c$, 而 $S_{\triangle POA_1} = \frac{1}{2} |PA_1| \times |PO| \times \sin \angle OPA_1$, $S_{\triangle POF_2} = \frac{1}{2} |PF_2| \times |PO| \times \sin \angle OPF_2$, 又



$\angle OPA_1 = \angle OPF_2$, 所以 $|PA_1| : |PF_2| = a : c$ (提示: 也可以直接利用内角平分线定理 $\frac{|PA_1|}{|PF_2|} = \frac{|OA_1|}{|OF_2|} = \frac{a}{c}$ 得到). 过点 P 作 $PB \perp x$

轴, 垂足为 B . 因为 $k_1 = -k_2 = \sqrt{15}$, 所以直线 PF_1 与 PA_1 关于直线 PB 对称, 即有 $|PF_1| = |PA_1|$, 所以 $|PF_1| : |PF_2| = a : c$. 由双曲线的定义知, $|PF_2| - |PF_1| = 2a$, 解得 $|PF_1| = \frac{2a^2}{c-a}$. 因为 $|A_1 F_1| =$

$c-a$, 所以 $|BF_1| = \frac{c-a}{2}$. 设直线 PF_1 的倾斜角为 α , 则 $\tan \alpha = \sqrt{15}$, 所以 $\cos \alpha = \frac{1}{4}$, 所以在 $Rt \triangle PBF_1$ 中, $\frac{|BF_1|}{|PF_1|} = \frac{1}{4}$, 即 $\frac{c-a}{2} \times \frac{c-a}{2a^2} = \frac{1}{4}$, 化简得 $\frac{c}{a} = 2$, 即离心率 $e = 2$.

17. 【经典题型】等差数列的定义及通项公式、并项求和法

【解】(1) 由 $a_{n+1}^2 - 2a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$ 得 $(a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n) = 2(a_{n+1} + a_n)$. (2分)

又 $a_n > 0$, 因此 $a_{n+1} - a_n = 2$, 即数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 2$, 公差 $d = 2$ 的等差数列, (4分)

所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n$, 所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 2n$. (5分)

(2) 由(1)知, $b_n = (-1)^n \cdot 2n$, (6分)

则有 $b_{2n-1} + b_{2n} = (-1)^{2n-1} \times 2(2n-1) + (-1)^{2n} \times 2 \times 2n = 2$, (8分)

所以 $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{20} = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \dots + (b_{19} + b_{20}) = 2 \times 10 = 20$. (10分)

18. 【重点题型】正弦定理的应用、正弦型三角函数求最值

【解】(1) 因为 $\frac{2\cos A}{bc} = \frac{\cos B}{ab} + \frac{\cos C}{ac}$,

所以 $2a\cos A = c\cos B + b\cos C$, (2分)

所以由正弦定理得 $2\sin A \cos A = \sin C \cos B + \sin B \cos C = \sin A$. (4分)

又因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A \neq 0$, 所以 $\cos A = \frac{1}{2}$.

所以 $A = \frac{\pi}{3}$. (6分)

(2) 由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2$,

所以 $b+c = 2\sin B + 2\sin C = 2\sin B + 2\sin\left(B + \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin B + \sin B + \sqrt{3}\cos B = 2\sqrt{3}\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)$. (10分)

因为 $B \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$, 所以 $B + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$,

所以 $\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$, 所以 $b+c \in (\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$, 所以 $a+b+c \in (2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$,

所以 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围为 $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$. (12分)

一题多解

(2) 因为 $A = \frac{\pi}{3}, a = \sqrt{3}$,

由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A = (b+c)^2 - 2bc - 2bc\cos A$, 得 $(b+c)^2 = 3bc + 3$. 因为 $bc \leq \left(\frac{b+c}{2}\right)^2$,

所以 $(b+c)^2 \leq 3\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + 3$, 解得 $b+c \leq 2\sqrt{3}$. (9分)

又因为 $b+c > a = \sqrt{3}$, 所以 $\sqrt{3} < b+c \leq 2\sqrt{3}$,

所以 $a+b+c \in (2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$,

所以 $\triangle ABC$ 的周长的取值范围为 $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{3}]$. (12分)

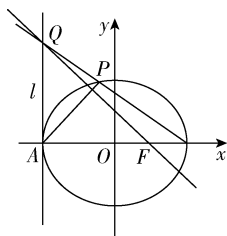
$$y_0 - \frac{3(x_0+2)}{y_0} = \frac{y_0}{x_0+2}(t-x_0), \text{ 得到 } -y_0^2(x_0+2) = [y_0^2-3(x_0+2)](t-x_0), \text{ 即 } -y_0^2(x_0+2) = [y_0^2-3(x_0+2)]t - [y_0^2-3(x_0+2)]x_0, \text{ 即 } -2y_0^2 = [y_0^2-3(x_0+2)]t + 3x_0(x_0+2), \text{ 即 } (t+2)y_0^2 = 3(x_0+2)(t-x_0)$$

又因为 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 所以 $y_0^2 = 3 - \frac{3x_0^2}{4}$. ②

将②代入①可得 $\left(3 - \frac{3x_0^2}{4}\right)(t+2) = 3(x_0+2)(t-x_0)$,

即 $(t-2)(x_0+2)^2 = 0$,

因为 $x_0 \neq -2$, 所以 $t=2$, 所以直线 PQ 过定点 $(2,0)$. (12分)



方法速记 求解直线过定点问题常用方法如下:

(1)“特殊探路,一般证明”:即先通过特殊情况确定定点,再转化为有方向、有目的的一般性证明;

(2)“一般推理,特殊求解”:即设定点坐标,根据题设条件选择参数,建立一个直线系或曲线的方程,再根据参数的任意性得到一个关于定点坐标的方程组,以这个方程组的解为坐标的点即为所求点;

(3)求证直线过定点 (x_0, y_0) , 常利用直线的点斜式方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 或截距式 $y = kx + b$ 来证明.

22. 思路导引

(1) $f'(x) \rightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 4 \leq 0 \rightarrow f(x) \text{ 的单调性,} \\ \Delta = a^2 - 4 > 0 \rightarrow f(x) \text{ 的单调性;} \end{cases}$

(2) 由题意 $\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = 1 \\ a > 2 \end{cases} \rightarrow f(x_1)f(x_2) = e^a(-a^2+8)$

设 $g(a) = e^a(-a^2+8) \rightarrow g(a)$ 在 $(2, +\infty)$ 上的单调性 $\rightarrow g(a) < 4e^2 \rightarrow f(x_1)f(x_2) < 4e^2$.

【重难点题】利用导数研究函数的单调性、证明不等式

(1)【解】由 $f(x) = e^x[x^2 - (a+2)x + a+3]$ ($x \in \mathbf{R}$),

得 $f'(x) = e^x[x^2 - (a+2)x + a+3 + 2x - (a+2)] = e^x(x^2 - ax + 1)$,

易知 $e^x > 0$ 恒成立, 故判断 $x^2 - ax + 1$ 的正负, 即由判别式 $\Delta = a^2 - 4$ 的大小进行判断.

(以下分 $\Delta \leq 0$ 和 $\Delta > 0$ 两种情况讨论 $f'(x)$ 的符号)

①当 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$ 时, 即 $-2 \leq a \leq 2$, $f'(x) \geq 0$, 等号不恒成立, 则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. (2分)

②当 $\Delta = a^2 - 4 > 0$ 时, 即 $a < -2$ 或 $a > 2$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 或 $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$,

当 $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < x < \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 时, $f'(x) < 0$,

则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 上单调递减;

当 $x < \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 或 $x > \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 时, $f'(x) > 0$,

则 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $-2 \leq a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;

当 $a < -2$ 或 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 上单调递减,

在 $\left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增. (4分)

(2)【证明】 $\because f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有两个极值点 x_1, x_2 ,

$\therefore a < -2$ 或 $a > 2$, 且 x_1, x_2 为方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 的两个根, 即 $x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = 1$.

$\because x_1, x_2 \in (0, 2), \therefore x_1 + x_2 = a > 0$, 即 $a > 2$. (5分)

(根据极值点与导数零点的关系, 结合根与系数的关系, 化简不等式以及明确参数的取值范围)

$$f(x_1)f(x_2) = e^{x_1}[x_1^2 - (a+2)x_1 + a+3] \cdot e^{x_2}[x_2^2 - (a+2)x_2 + a+3]$$

$$= e^{x_1+x_2}(x_1^2 - ax_1 + 1 - 2x_1 + a+2)(x_2^2 - ax_2 + 1 - 2x_2 + a+2)$$

$$= e^{x_1+x_2}(-2x_1 + a+2)(-2x_2 + a+2) \quad (\text{提示: } x_1^2 - ax_1 + 1 = 0, x_2^2 - ax_2 + 1 = 0)$$

$$= e^{x_1+x_2}[4x_1x_2 - 2(a+2)(x_1+x_2) + (a+2)^2],$$

将 $x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = 1$ 代入上式, 可得

$$f(x_1)f(x_2) = e^a[4 - 2a(a+2) + (a+2)^2] = e^a(4 - 2a^2 - 4a + a^2 + 4a + 4) = e^a(-a^2 + 8).$$

由题意, 需证 $f(x_1)f(x_2) = e^a(8 - a^2) < 4e^2$. (10分)

(构造函数, 求导研究新函数的单调性和最值)

令 $g(a) = e^a(8 - a^2)$,

求得 $g'(a) = e^a(8 - a^2 - 2a) = -e^a(a-2)(a+4)$,

当 $a > 2$ 时, $g'(a) < 0$, 则 $g(a)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,

即 $g(a) < g(2) = 4e^2$,

故 $f(x_1)f(x_2) < 4e^2$. (12分)

8 2023 安徽省“皖南八校”高三大联考(二)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	C	A	A	D	B	B	ABD	AD
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	ACD	ABD	93	-495	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-e				