

是增函数,所以  $b < 0$ . (7分)

不妨设  $x_1 < x_2$ , 由  $x_1 + a \sin x_1 + b \ln x_1 = x_2 + a \sin x_2 + b \ln x_2$ ,  
移项得  $(x_2 - x_1) + a(\sin x_2 - \sin x_1) = -b(\ln x_2 - \ln x_1)$ .

由(1)可知  $x_2 - \sin x_2 > x_1 - \sin x_1$ , 即  $\sin x_2 - \sin x_1 < x_2 - x_1$ ,  
所以  $-b(\ln x_2 - \ln x_1) < (a+1)(x_2 - x_1)$ ,

即  $-b \ln \frac{x_2}{x_1} < (a+1)(x_2 - x_1)$ . ① (9分)

设  $h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ , 则  $h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0$ ,

$h(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

所以当  $x > 1$  时,  $h(x) > h(1) = 0$ , 即  $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ ,

所以  $\ln \sqrt{x} > \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$ , 即  $\ln x > \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}$ ,

所以  $\ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{4\left(\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - 1\right)}{\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + 1} = \frac{4(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}$ .

代入①式中得到  $(-4b) \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} < (a+1)(x_2 - x_1) = (a+1) \cdot$

$(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})$ ,

即  $\frac{-4b}{a+1} < (\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})^2$ , 所以  $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 2\sqrt{\frac{-b}{a+1}}$ , 命题得证.

(12分)

3 2023

广东实验中学 东北育才中学 石家庄二中

华中师大一附中 西南大学附中 南京师大附中

湖南师大附中 福州一中

八校高三学业质量评价(T8联考一)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	A	C	B	D	C	D	ABD	AC
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	ABD	ACD	5	$\frac{5\pi}{6}$	$\left[\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{21}}{3}, \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$				

### 1. C 【基础考点】复数的除法运算、复数模的计算公式

【深度解析】由题意, 得  $z = \frac{11 - \sqrt{3}i - 1}{-1 + i} = \frac{1}{-1 + i} = \frac{-1 - i}{(-1 + i)(-1 - i)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ , 故选 C.

### 2. B 【基础考点】指数与对数不等式的解法、集合的并集的定义

【深度解析】由题意, 得  $M = \{x | 12^x > 2^2\} = \{x | x > 2\}$ ,  $N = \{x | \log_3 x \leq \log_3 3\} = \{x | 0 < x \leq 3\}$ , 所以  $M \cup N = \{x | x > 0\}$ , 故选 B.

▶ 快解 因为  $2 \in N$ , 所以  $2 \in (M \cup N)$ , 故排除 AC, 又  $0 \notin M$ , 且  $0 \notin N$ , 所以  $0 \notin (M \cup N)$ , 故排除 D, 故选 B.

### 3. A 【热门考点】充分条件与必要条件、数列的单调性

【深度解析】若  $a_n > 0$ , 则当  $n \geq 2$  时 (易错: 在利用关系式  $a_n = S_n - S_{n-1}$  求解相关问题时, 一定要注意前提  $n \geq 2$ ),  $S_n - S_{n-1} = a_n > 0$ , 则  $S_n > S_{n-1}$ , 则  $\{S_n\}$  是递增数列; 若  $\{S_n\}$  是递增数列, 则  $S_n > S_{n-1}$  ( $n \geq 2$ ), 即  $S_n - S_{n-1} = a_n > 0$ , 但  $a_1$  的符号不确定, 所以“ $a_n > 0$ ”是“ $\{S_n\}$  是递增数列”的充分不必要条件, 故选 A.

### 4. C 【基础考点】平均数、众数、中位数、方差

【深度解析】对于 A, 当掷骰子出现的结果为 2, 2, 3, 5, 6 时, 满足中位数是 3 (提示: 判断中位数时, 要先将数据从小排到大, 奇数则取中间的数, 偶数则取中间两个除以 2), 众数是 2, 可以出现点数 6, 故 A 不正确; 对于 B, 当掷骰子出现结果为 1, 1, 2, 5, 6 时, 满足平均数是 3, 中位数是 2, 可以出现点数 6, 故 B 不正确; 对于 C, 若平均数是 2, 且出现点数 6, 则方差  $s^2 > \frac{1}{5}(6-2)^2 = 3.2 > 2.4$ , 所以当平均数是 2, 方差是 2.4 时, 一定不会出现点数 6, 故 C 正确; 对于 D, 当掷骰子出现结果为 2, 2, 2, 3, 6 时, 满足平均数是 3, 众数是 2,

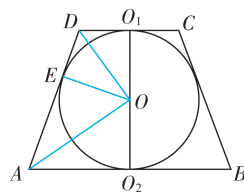
可以出现点数 6, 故 D 不正确. 故选 C.

### 5. B 【经典题型】两角和与差的正弦公式、诱导公式、二倍角公式

【深度解析】因为  $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos \alpha = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{6} - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ , 所以  $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ , 故选 B.

### 6. D 【经典题型】圆台的轴截面与表面积、球的表面积公式

【深度解析】设梯形 ABCD 为圆台的轴截面, 则内切圆 O 为圆台内切球的大圆 (关键: 圆台的轴截面中有底面的半径、母线长和高等几何量, 且对于与球有关的问题, 通常可以在轴截面中建立关系, 而画出轴截面是正确解题的关键), 如图, 设圆台上、下底面圆心分别为  $O_1, O_2$ , 半径分别为  $r_1, r_2$ , 母线长为  $l$ , 内切球的半径为  $R$ , 则  $O_1, O, O_2$  共线, 且  $O_1O_2 \perp AB, O_1O_2 \perp CD$ , 连接 OD, OE, OA, 则 OD, OA 分别平分  $\angle ADC, \angle DAB$ , 则  $\angle OAD + \angle ODA = \frac{\pi}{2}$ ,  $\angle DOA = \frac{\pi}{2}$ ,  $OE \perp AD$ . 由圆的切线的性质可知  $O_1D = DE = r_1 = 1, O_2A = AE = r_2 = 3$ , 因为



$OE \perp AD$ , 所以易得  $Rt \triangle ODE \sim Rt \triangle AOE$ , 所以  $\frac{OE}{AE} = \frac{DE}{OE}$ , 所以  $R^2 = r_1 r_2 = 3$ , 解得  $R = \sqrt{3}$ , 故圆台的高为  $2R = 2\sqrt{3}$ , 母线长  $l = r_1 + r_2 = 4$ , 则圆台的侧面积  $S_{侧} = \pi(r_1 + r_2)l = 16\pi$ , 球的表面积  $S_{球} = 4\pi R^2 = 12\pi$ ,

所以  $\frac{S_{\text{侧}}}{S_{\text{球}}} = \frac{16\pi}{12\pi} = \frac{4}{3}$ , 故选 D.

## 7. C 【经典题型】函数的奇偶性、导数的运算

【深度解析】 $\because$  函数  $g(x)$  为偶函数,  $\therefore g'(x)$  为奇函数 (结论: 偶函数的导数是奇函数, 奇函数的导数是偶函数), 即  $g'(x) = f'(1+x) - 1$  为奇函数,  $\therefore f'(1+x) - 1 = -f'(1-x) + 1$ , 即  $f'(1+x) + f'(1-x) = 2$ . 令  $x=0$ , 可得  $f'(1) = 1$ . 又  $f'(x)$  为奇函数,  $\therefore f'(x) = -f'(-x)$ . 在  $f'(1+x) + f'(1-x) = 2$  中令  $x = x-1$ , 得  $f'(x) = 2 - f'(2-x)$ ,  $\therefore -f'(-x) = 2 - f'(2-x)$ , 即  $f'(x+2) = 2 + f'(x)$ ,  $\therefore f'(2 \times 023) = f'(2 \times 1011 + 1) = 2 \times 1011 + f'(1) = 2 \times 023$ , 故选 C.

【一题多解】(取特殊函数) 令  $f(x) = \frac{1}{2}x^2, x \in \mathbf{R}$ , 则  $f'(x) = x$ , 其定义域为  $\mathbf{R}$ , 关于原点对称, 又  $f'(-x) = -x = -f'(x)$ ,  $\therefore f'(x)$  为奇函数,  $g(x) = f(1+x) - x = \frac{1}{2}(1+x)^2 - x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ , 其定义域为  $\mathbf{R}$ , 关于原点对称,  $g(-x) = \frac{1}{2}(-x)^2 + \frac{1}{2} = g(x)$ ,  $\therefore g(x)$  为偶函数.  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  满足题中所给全部条件. 又  $f'(x) = x$ ,  $\therefore f'(2 \times 023) = 2 \times 023$ , 故选 C.

## 8. D

【思路导引】设  $P(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \rightarrow$  用点  $P, B$  的坐标表示出直线  $PQ, AQ (BQ), BP$  的斜率  $\xrightarrow{\text{直线与圆相切}} k_{AQ} \cdot k_{BP} = -\frac{1}{3}$   
 $\xrightarrow{\text{点差法}} \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3} \rightarrow$  由离心率公式求结果

【重难点】椭圆的几何性质、直线与圆的位置关系、点差法的应用

【深度解析】设  $P(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $Q(-x_1, -y_1), A(2x_1, 0)$ , 所以  $k_{PQ} = \frac{y_1}{x_1}, k_{AQ} = \frac{-y_1-0}{-x_1-2x_1} = \frac{y_1}{3x_1}$ , 所以  $k_{AQ} = \frac{1}{3}k_{PQ}$ . 又由题意, 知  $PQ \perp BP$ , 所以  $k_{PQ} \cdot k_{BP} = -1$ , 所以  $k_{AQ} \cdot k_{BP} = -\frac{1}{3}$ . 因为点  $B, P$  在椭圆上, 所以

$$\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \text{两式相减得} \quad \frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2} + \frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2} = 0, \text{即} \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2} \cdot \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

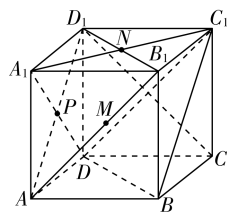
又  $k_{AQ} = k_{BQ} = \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}, k_{BP} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ , 所以  $-\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{3}$ , 即  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{3}$ , 所以率心  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ , 故选 D.

【方法速记】“点差法”的常见题型: 求中点弦方程、求(过定点、平行弦)弦中点轨迹、垂直平分线问题. 必须注意的是“点差法”在双曲线中具有不等价性, 即要考虑判别式  $\Delta$  是否为正数.

## 9. ABD 【基础考点】空间直线与平面间的平行与垂直关系的判定、异面直线所成角

【深度解析】对于 A, 连接  $A_1C_1, A_1D$  (关键: 证明平行时注意题目中的中点, 构造中位线, 这是作辅助线的重要线), 由题意知点  $N, P$  分别为  $A_1C_1, A_1D$  的中点, 所以  $NP \parallel DC_1$ , 故 A 正确. 对于 B, 连接

$B_1D_1, AB_1$ , 由题意知点  $M, N$  分别为  $AB_1, B_1D_1$  的中点, 所以  $MN \parallel AD_1$ , 又  $MN \not\subset$  平面  $ACP, AD_1 \subset$  平面  $ACP$ , 所以  $MN \parallel$  平面  $ACP$ , 故 B 正确. 对于 C, 因为点  $M, N, P$  分别在面对角线  $AB_1, B_1D_1, AD_1$  上, 所以平面  $MNP$  即为平面  $AB_1D_1$ , 显然  $\triangle CB_1D_1$  为等边三角形 (提示: 正方体的面对角线相等), 所以  $D_1C$  与  $B_1D_1$  不垂直, 所以  $D_1C$  不垂直于平面  $AB_1D_1$ , 故 C 不正确. 对于 D, 由题意知点  $M, P$  分别为  $AB_1, AD_1$  的中点, 所以  $PM \parallel B_1D_1$ . 又由正方体的性质知  $BD \parallel B_1D_1$ , 所以  $PM \parallel BD$ , 所以  $\angle DBC_1$  为  $PM$  与  $BC_1$  所成的角 (或其补角). 易知  $\triangle DBC_1$  为等边三角形, 所以  $\angle DBC_1 = 60^\circ$ , 故 D 正确. 故选 ABD.



## 10. AC 【基础考点】正弦函数的图象与性质、三角函数图象的平移变换

【深度解析】对于 A, B, 由题意, 得  $g(x) = \sin \left[ 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \varphi \right] = \sin \left( 2x + \varphi + \frac{\pi}{2} \right)$ . 因为函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象关于  $y$  轴对称, 所以  $f(-x) = g(x)$ , 即  $\sin(\varphi - 2x) = \sin \left( 2x + \frac{\pi}{2} + \varphi \right)$ , 则  $\varphi - 2x - \left( 2x + \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = 2k\pi$  或  $\varphi - 2x - \left( 2x + \frac{\pi}{2} + \varphi \right) = (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 解得  $-4x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi$  或  $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ .  $-4x - \frac{\pi}{2} = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$  不恒成立, 舍去, 则  $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ . 又因为  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 所以  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , 故 A 正确, B 不正确. 对于 C, 由以上分析, 知  $f(x) = \sin \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right), g(x) = \sin \left( 2x + \frac{3\pi}{4} \right)$ , 由  $2x + \frac{\pi}{4} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$  得  $f(x)$  图象的对称中心为  $\left( \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, 0 \right), k \in \mathbf{Z}$ ; 由  $2x + \frac{3\pi}{4} = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$  得  $g(x)$  图象的对称轴为直线  $x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{8}, k \in \mathbf{Z}$ , 所以  $g(x)$  图象的对称轴过  $f(x)$  图象的对称中心, 故 C 正确. 对于 D, 当  $m \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8} \right]$  时,  $2m + \frac{\pi}{4} \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ , 则  $f(m) \in \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right]$ ; 当  $n \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{8} \right]$  时,  $2n + \frac{3\pi}{4} \in \left[ \frac{\pi}{4}, \pi \right]$ , 则  $g(n) \in [0, 1]$ . 因为  $\left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right] \not\subseteq [0, 1]$ , 故 D 不正确. 故选 AC.

【一题多解】对于 A, B, 由题意, 得  $g(x) = \sin \left[ 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \varphi \right] = \sin \left( 2x + \varphi + \frac{\pi}{2} \right) = \cos(2x + \varphi)$ . 因为函数  $f(x)$  与  $g(x)$  的图象关于  $y$  轴对称, 所以  $f(0) = g(0)$ , 即  $\sin \varphi = \cos \varphi$ , 结合  $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ , 得  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , 经检验, 满足题意, 故 A 正确, B 不正确. 对于 C, 因为函数  $f(x)$  的周期  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ , 则  $g(x)$  的图象是由  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{1}{4}$  个周期得到的, 所以  $g(x)$  图象的对称轴过  $f(x)$  图象的对称中心, 故 C 正确. 对于 D, 同上. 故选 AC.

## 11. ABD

**思路导引** 对于 A, 对条件等式变形利用累加法求出  $S_n$

$$\frac{n \geq 2, a_n = S_n - S_{n-1}}{n=1, a_1 = S_1} \rightarrow \text{求出 } a_n \rightarrow \text{求出 } a_5 \text{ 作出判断};$$

对于 B, 判断  $\{a_n\}$  的单调性  $\rightarrow$  根据  $a_n$  的正负情况得出  $S_n$  的单调性  $\rightarrow$  求出  $S_n$  的最小值作出判断;

对于 C, 通过计算  $S_7, S_8$  作出判断;

对于 D, 讨论  $\frac{S_n}{a_n}$  的正负  $\rightarrow$  得到  $\frac{S_n}{a_n}$  取最小值时  $n$  的范围  $\rightarrow$  讨

论  $\frac{S_n}{a_n}$  的单调性求得最小值作出判断

**【特色题型】**  $a_n$  与  $S_n$  间关系的应用、累加法、数列的单调性

**【深度解析】** 由  $nS_n = (n+1)S_{n+1} + (n-1)n(n+1) (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$ ,

$$\text{得 } \frac{S_n}{n+1} - \frac{S_{n-1}}{n} = n-1, \text{ 所以 } n \geq 2 \text{ 时}, \frac{S_2}{3} - \frac{S_1}{2} = 1, \frac{S_3}{4} - \frac{S_2}{3} = 2, \dots, \frac{S_n}{n+1} -$$

$$\frac{S_{n-1}}{n} = n-1, \text{ 将以上各式相加, 得 } n \geq 2 \text{ 时}, \frac{S_n}{n+1} - \frac{S_1}{2} = 1+2+\dots+n-1 =$$

$$\frac{(n-1)(1+n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ 将 } S_1 = -50 \text{ 代入, 解得 } S_n =$$

$$\frac{n^3 - 51n - 50}{2}, \text{ 当 } n=1 \text{ 时也满足上式 (提醒: 不要忽略对首项的$$

验证).

$$\text{对于 A, 当 } n \geq 2 \text{ 时}, a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{3n^2 - 3n - 50}{2}, \text{ 所以 } a_5 =$$

$$\frac{3 \times 25 - 3 \times 5 - 50}{2} = 5 > 0, \text{ 故 A 正确.}$$

$$\text{对于 B, 当 } n \geq 2 \text{ 时}, a_n = \frac{3}{2}(n^2 - n) - 25 = \frac{3}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{203}{8}, \text{ 单调递}$$

$$\text{增, 又 } a_1 = S_1 = -50, a_2 = \frac{3 \times 2^2 - 3 \times 2 - 50}{2} = -22 \text{ (易错: 由于 } a_1 \text{ 不满}$$

$$\text{足 } a_n = \frac{3}{2}(n^2 - n) - 25, \text{ 判断单调性时, 易忽略 } a_1, a_2 \text{ 间的大小比}$$

$$\text{较)}, \text{ 所以数列 } \{a_n\} \text{ 为单调递增数列, 又 } a_4 = \frac{3 \times 4^2 - 3 \times 4 - 50}{2} = -7 <$$

$$0, \text{ 所以 } a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < 0 < a_5 < a_6 < \dots, \text{ 所以当 } n \leq 4 \text{ 时}, \{S_n\} \text{ 单调递}$$

$$\text{减, 当 } n \geq 5 \text{ 时}, \{S_n\} \text{ 单调递增, 且 } S_4 < S_5, \text{ 所以当 } n=4 \text{ 时}, S_n \text{ 取得}$$

$$\text{最小值, 故 B 正确.}$$

$$\text{对于 C, 因为 } S_7 = \frac{7^3 - 51 \times 7 - 50}{2} = -32 < 0, S_8 = \frac{8^3 - 51 \times 8 - 50}{2} = 27 > 0,$$

$$\text{所以当 } S_n > 0 \text{ 时, } n \text{ 的最小值为 } 8, \text{ 故 C 不正确.}$$

$$\text{对于 D, 由以上分析知, 当 } n \leq 4 \text{ 时}, a_n < 0, S_n < 0, \text{ 则 } \frac{S_n}{a_n} > 0; \text{ 当 } 5 \leq$$

$$n \leq 7 \text{ 时}, a_n > 0, S_n < 0, \text{ 则 } \frac{S_n}{a_n} < 0; \text{ 当 } n \geq 8 \text{ 时}, a_n > 0, S_n > 0, \text{ 则 } \frac{S_n}{a_n} > 0, \text{ 所}$$

$$\text{以 } \frac{S_n}{a_n} \text{ 的最小值在 } n=5, 6, 7 \text{ 中取得. 又当 } n=5, 6, 7 \text{ 时}, \frac{1}{a_n} \text{ 恒为正}$$

$$\text{且单调递减, } S_n \text{ 恒为负且单调递增, 所以 } \frac{S_n}{a_n} \text{ 单调递增, 所以当 } n=$$

$$5 \text{ 时}, \frac{S_n}{a_n} \text{ 取得最小值, 故 D 正确. 故选 ABD.}$$

## 12. ACD

**思路导引**

设  $F(x) = \frac{f(x)}{e^x} \rightarrow$  求导研究函数  $F(x)$  的单

调性.

对于 A, 根据单调性得到  $F(0) < F(1) \rightarrow$  求出  $f(1)$  作出判断;

对于 B, 利用作差法判断;

对于 C, 转化为方程  $\frac{x - \sin x}{e^x} = \frac{1}{2e^2}$  有两个不同的解  $\rightarrow$  设  $h(x) =$

$\frac{x - \sin x}{e^x} \rightarrow$  求出  $h(x)$  的单调区间  $\rightarrow$  讨论函数  $h(x)$  的值域

作出判断;

对于 D, 由所构造函数得  $f(x) = e^x \cdot F(x) \rightarrow$  求出导函数

$f'(x) \rightarrow$  令  $u(x) = F(x) + F'(x) \rightarrow$  求导研究  $u(x)$  的单

调性  $\rightarrow$  求出  $u(x)$  的最小值即可作出判断

**【热门考点】** 利用导数研究函数的单调性、函数与方程的综合应用

**【深度解析】** 令  $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$ , 则  $F'(x) = \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} = \frac{x - \sin x}{e^{2x}}$ . 令

$g(x) = x - \sin x$ , 则  $g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ , 等号不恒成立, 所以函数

$g(x)$  单调递增, 且  $g(0) = 0$ , 所以当  $x < 0$  时,  $F'(x) < 0$ , 函数  $F(x)$

单调递减, 当  $x > 0$  时,  $F'(x) > 0$ , 函数  $F(x)$  单调递增.

对于 A,  $F(0) < F(1)$ , 即  $\frac{f(0)}{e^0} < \frac{f(1)}{e^1}$ , 即  $1 < \frac{f(1)}{e}$ , 所以  $f(1) > e$ , 故

A 正确.

对于 B, 因为  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi}{2}}} = \frac{\frac{\pi}{2} - 1}{e^{\frac{\pi}{2}}} > 0$ , 所以

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , 故 B 不正确.

对于 C, 问题等价于方程  $f'(x) - f(x) = \frac{1}{2e^2}$ , 即方程  $\frac{x - \sin x}{e^x} = \frac{1}{2e^2}$  有

两个不同的解. 设  $h(x) = \frac{x - \sin x}{e^x}$ , 则  $h'(x) = \frac{1 - \cos x - x + \sin x}{e^x}$ . 设

$r(x) = 1 - x + \sin x - \cos x$ , 当  $x \geq \pi$  时,  $r(x) = 1 - x + \sin x - \cos x < 1 - \pi +$

$2 < 0$ ; 当  $x \leq 0$  时,  $g(x) \leq 0$ , 则  $\sin x \geq x$ , 又  $1 - \cos x \geq 0$ , 所以

$r(x) \geq 0$ ; 当  $0 < x < \pi$  时,  $r'(x) = -1 + \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) -$

$1$ , 当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  时,  $r'(x) > 0$ , 函数  $r(x)$  单调递增, 当  $x \in$

$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  时,  $r'(x) < 0$ , 函数  $r(x)$  单调递减, 又  $r(0) = 0, r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 -$

$\frac{\pi}{2} > 0, r(\pi) = 2 - \pi < 0$ , 所以存在  $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  使得  $r(x_0) = 0$ , 则当

$x \in (0, x_0)$  时,  $r(x) > 0$ , 当  $x \in (x_0, \pi)$  时,  $r(x) < 0$ . 综上, 当  $x \in$

$(-\infty, x_0)$  时,  $r(x) \geq 0$ , 即  $h'(x) \geq 0$ , 函数  $h(x)$  单调递增, 当  $x \in$

$(x_0, +\infty)$  时,  $r(x) < 0$ , 即  $h'(x) < 0$ , 函数  $h(x)$  单调递减. 因为

$h(0) = 0$ , 所以当  $x < 0$  时,  $h(x) < h(0) = 0$ , 当  $x > 0$  时,  $x > \sin x$ , 所以

$h(x) > 0$ , 且当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $h(x) \rightarrow 0$ . 又  $x_0 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), h\left(\frac{\pi}{2}\right) =$

$\frac{\frac{\pi}{2} - 1}{e^{\frac{\pi}{2}}} > \frac{\frac{3}{2} - 1}{e^2} = \frac{1}{2e^2}$ , 所以方程  $h(x) = \frac{1}{2e^2}$  有两个不同的解, 即方程

$f'(x)=f(x)+\frac{1}{2e^2}$ 有两个不同的解,故 C 正确.

对于 D,由  $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ ,得  $f(x)=e^x \cdot F(x)$ ,则  $f'(x)=e^x[F(x)+F'(x)]$ . 令  $u(x)=F(x)+F'(x)$ ,则  $u'(x)=F'(x)+[F'(x)]'= \frac{x-\sin x}{e^{2x}}+\left(\frac{x-\sin x}{e^{2x}}\right)'= \frac{x-\sin x}{e^{2x}}+\frac{1-\cos x-2(x-\sin x)}{e^{2x}}= \frac{r(x)}{e^{2x}}$ ,由以上分析可知,当  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  时,  $r(x)>0$ ,即  $u'(x)>0$ ,函数  $u(x)$  单调递增,所以  $u(x)>u(0)=F(0)+F'(0)=1$ ,所以  $f'(x)>0$ ,所以  $f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增,故 D 正确. 故选 ACD.

**方法速记** 在同一个等式(或不等式)中给出了原函数  $f(x)$  与导函数  $f'(x)$  的四则运算关系,通常考虑构造函数,然后确定出函数的单调性,最后利用此单调性可解决所要求解的问题. 如  $f'(x)-f(x)$  构造  $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ ;如  $f'(x)+f(x)$  构造  $g(x)=e^x f(x)$ ;如  $xf'(x)-f(x)$  构造  $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ ;如  $xf'(x)+f(x)$  构造  $g(x)=xf(x)$  等.

### 13.5 【基础考点】二项式定理

**深度解析** 因为  $(1+x)^6$  的展开式的通项为  $T_{r+1}=C_6^r x^r$ ,所以  $\left(1-\frac{1}{x}\right)(1+x)^6$  的展开式中含  $x^3$  的项为  $1 \cdot C_6^3 x^3 - \frac{1}{x} C_6^4 x^4$ ,所以该展开式中  $x^3$  的系数为  $C_6^3 - C_6^4 = 20 - 15 = 5$ .

### 14. $\frac{5}{6}\pi$ 【经典题型】向量垂直条件的应用、向量夹角公式

**深度解析** 因为  $(a+b) \perp a$ ,所以  $(a+b) \cdot a = a^2 + a \cdot b = 0$ ,所以  $a \cdot b = -|a|^2$ . 由  $|b|=2|a+b|$  两边平方得  $|b|^2 = 4(|a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2) = 4(|a|^2 - 2|a|^2 + |b|^2)$ ,所以  $3|b|^2 = 4|a|^2$ ,即  $|b| = \frac{2\sqrt{3}}{3}|a|$ ,所以  $\cos \langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a||b|} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 又  $\langle a, b \rangle \in [0, \pi]$ ,所以  $a, b$  的夹角为  $\frac{5}{6}\pi$ .

**一题多解** 如图,作  $\vec{OA}=a, \vec{AB}=b$ ,则  $\vec{OB}=\vec{OA}+\vec{AB}=a+b$ . 在  $\triangle OAB$  中,由  $(a+b) \perp a, |b|=2|a+b|$ ,知  $OA \perp OB$ ,且  $AB=2OB$ ,所以  $\angle OAB = \frac{\pi}{6}$ ,所以向量  $a, b$  的夹角为  $\frac{5}{6}\pi$ .

### 15. $\left[\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}\right]$

**思路导引** 思路一:令  $f(x)=\frac{\ln x}{x} \rightarrow$  求导研究  $f(x)$  的单调性  $\rightarrow$  求出  $f(x)$  的正负区间  $\rightarrow$  将问题转化为  $\begin{cases} x>1, \\ \frac{\ln x}{x}>a \end{cases}$  有且只有一个整数解  $\rightarrow$  计算  $f(2), f(3), f(4)$ ,求得  $a$  的取值范围

思路二:令  $f(x)=\frac{\ln x}{x} \rightarrow$  将不等式转化为  $\frac{\ln x}{x} \left(\frac{\ln x}{x}-a\right) > 0 \rightarrow$  分  $a>0, a<0, a=0$  求出不等式的解集  $\rightarrow$  只需满足  $\frac{\ln x}{x}>a(a>0)$  有且只有一个整数解  $\rightarrow$  计算  $f(2), f(3), f(4)$ ,求得  $a$  的取值范围

**【新趋考点】利用导数研究能成立问题、函数的零点**

**深度解析** 令  $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$ ,则  $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$ ,当  $x \in (0, e)$  时,  $f'(x)>0$ ,  $f(x)$  单调递增;当  $x \in (e, +\infty)$  时,  $f'(x)<0$ ,  $f(x)$  单调递减. 又  $f(1)=0$ ,当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x)<0$ ,当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f(x)>0$ ,则原不等式等价于  $\begin{cases} x>1, \\ \frac{\ln x}{x}>a \end{cases}$  或  $\begin{cases} 0<x<1, \\ \frac{\ln x}{x}<a \end{cases}$  (舍去),所以  $\begin{cases} x>1, \\ \frac{\ln x}{x}>a \end{cases}$  有且只有一个整数解,又  $f(3)=\frac{\ln 3}{3}>f(4)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}=f(2)$ ,所以  $f(2) \leq a < f(3)$ ,即实数  $a$  的取值范围为  $\left[\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}\right)$ .

**一题多解** 令  $f(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$ ,单调性同上. 原不等式等价于  $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 - a \cdot \frac{\ln x}{x} > 0$ ,即  $\frac{\ln x}{x} \left(\frac{\ln x}{x}-a\right) > 0$  有且只有一个整数解,若  $a>0$ ,则  $\frac{\ln x}{x}>a$  或  $\frac{\ln x}{x}<0$ ,而  $\frac{\ln x}{x}<0$  (提示:要使  $\frac{\ln x}{x}<0$  成立,则  $0<x<1$ ) 显然没有整数解,需满足  $\frac{\ln x}{x}>a$  有且只有一个整数解,因为  $f(3)=\frac{\ln 3}{3}>f(4)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}=f(2)$ ,所以  $f(2) \leq a < f(3)$ ,所以  $a \in \left[\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}\right)$ ;若  $a<0$ ,则  $\frac{\ln x}{x}<a$  或  $\frac{\ln x}{x}>0$ ,而  $\frac{\ln x}{x}>0$  有无数个整数解,  $\frac{\ln x}{x}<a$  无整数解,不符合题意;若  $a=0$ ,则不等式显然有无数个整数解,不符合题意. 综上所述,实数  $a$  的取值范围为  $\left[\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}\right)$ .

### 16. $\frac{\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$

**思路导引** (1) 思路一:由点到直线的距离公式求得  $|PF_2|$   $\xrightarrow{\text{勾股定理}}$  求出  $|OP|$   $\xrightarrow{\text{两角差的正弦公式}}$  求出  $\sin \angle PF_1O$   $\rightarrow$  在  $\triangle OF_1P$  中利用正弦定理求得  $a, b$  间的等量关系  $\rightarrow$  离心率;思路二:联立直线  $PF_2$  与渐近线  $y = \frac{b}{a}x$  求出点  $P$  坐标  $\xrightarrow{\text{两点间距离公式}}$  求出  $|PF_1|, |PO|$   $\rightarrow$  在  $\triangle OPF_1$  中利用余弦定理求得  $a, c$  间的等量关系  $\rightarrow$  离心率. (2) 设切点为  $M(x_0, y_0), P\left(x_1, \frac{b}{a}x_1\right), Q\left(x_2, -\frac{b}{a}x_2\right) \rightarrow$  由二倍角公式求出  $\sin \angle POQ \xrightarrow{\text{三角形面积公式}} \frac{b}{a}|x_1x_2| = 2\sqrt{3} \rightarrow$  联立双曲线的切线方程与渐近线方程求得  $x_1x_2 = a^2 \rightarrow$  求得  $a, b \rightarrow$  写出双曲线的方程.

**【重难点考点】双曲线的几何性质、直线与双曲线的位置关系**

**【深度解析】**(1)如图,由题意知  $F_1(-c,0), F_2(c,0), PF_2 \perp OP$ , 则

$$|PF_2| = \frac{|bc|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{bc}{c} = b \text{ (结论:双曲线的焦点到渐近线的距离是半虚轴长 } b \text{)}, \text{ 所以 } |OP| = \sqrt{|OF_2|^2 - |PF_2|^2} = a, \text{ 所以 } \sin \angle POF_2 =$$

$$\frac{|PF_2|}{|OF_2|} = \frac{b}{c}, \cos \angle POF_2 = \frac{a}{c}, \text{ 所以 } \sin \angle PF_1O = \sin(\angle POF_2 - \angle F_1PO) = \sin\left(\angle POF_2 - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{b}{c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{2}.$$

$$\text{在 } \triangle OF_1P \text{ 中, } \angle F_1PO = \frac{\pi}{6}, \text{ 由正弦定理得 } \frac{|OF_1|}{\sin \angle F_1PO} = \frac{|PO|}{\sin \angle PF_1O}, \text{ 即 } 2c =$$

$$\frac{a}{\frac{b}{c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a}{c} \cdot \frac{1}{2}}, \text{ 整理得 } 2a = \sqrt{3}b, \text{ 所以 } \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 所以双曲线的}$$

$$\text{离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

$$\text{离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

**一题多解** (1)由题意知  $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ , 则直线  $PF_2$  的

$$\text{方程为 } y = -\frac{a}{b}(x-c), \text{ 联立 } \begin{cases} y = \frac{b}{a}x, \\ y = -\frac{a}{b}(x-c), \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = \frac{a^2}{c}, \\ y = \frac{ab}{c}, \end{cases} \text{ 则}$$

$$P\left(\frac{a^2}{c}, \frac{ab}{c}\right), \text{ 所以 } |PF_1| = \sqrt{\left(\frac{a^2}{c} + c\right)^2 + \left(\frac{ab}{c}\right)^2} = \sqrt{3a^2 + c^2}.$$

$$\text{又 } |PO| = \sqrt{\left(\frac{a^2}{c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{c}\right)^2} = a, |OF_1| = c. \text{ 在 } \triangle OPF_1 \text{ 中, 由余弦定理得 } |OF_1|^2 = |PO|^2 + |PF_1|^2 - 2|PO| \cdot |PF_1| \cdot \cos \angle F_1PO, \text{ 即}$$

$$c^2 = a^2 + 3a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot \sqrt{3a^2 + c^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 化简得 } 3c^2 = 7a^2, \text{ 所以双}$$

$$\text{曲线的离心率 } e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

(2)如图,设过点  $P$  的切线  $PQ$  与双曲线切于点  $M(x_0, y_0)$ , 因为

$P, Q$  均在双曲线的渐近线上, 故可设  $P\left(x_1, \frac{b}{a}x_1\right), Q\left(x_2, -\frac{b}{a}x_2\right)$ .

由双曲线的对称性知  $\angle POQ = 2\angle POF_2$ , 所以

$$\sin \angle POQ = \sin 2\angle POF_2 = 2\sin \angle POF_2 \cos \angle POF_2 = \frac{2ab}{c^2}, \text{ 所以}$$

$$S_{\triangle POQ} = \frac{1}{2} |OP| |OQ| \sin \angle POQ = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{x_1^2 + \left(\frac{b}{a}x_1\right)^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + \left(-\frac{b}{a}x_2\right)^2} \cdot \frac{2ab}{c^2} = \frac{b}{a} |x_1 x_2|.$$

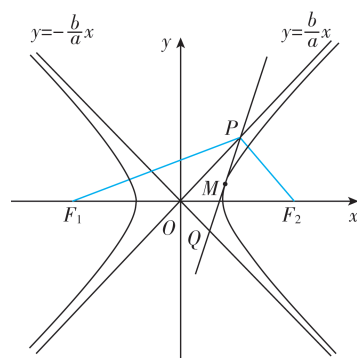
$$\text{过点 } M \text{ 的切线 } PQ \text{ 的方程为 } \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1, \text{ 即 } y = \frac{b^2 x_0 x}{y_0 a^2} - \frac{b^2}{y_0}, \text{ 代入 } b^2 x^2 - a^2 y^2 = 0, \text{ 化简得 } (a^2 y_0^2 -$$

$$b^2 x_0^2) x^2 + 2a^2 b^2 x_0 x - a^4 b^2 = 0. \text{ 又 } b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2, \text{ 所以 } -a^2 b^2 x^2 +$$

$$2a^2 b^2 x_0 x - a^4 b^2 = 0, \text{ 即 } x^2 - 2x_0 x + a^2 = 0, \text{ 所以 } x_1 x_2 = a^2, \text{ 所以 } S_{\triangle POQ} =$$

$$\frac{b}{a} |x_1 x_2| = ab = \frac{\sqrt{3}}{2} b \cdot b = 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } b^2 = 4, \text{ 所以 } b = 2, a = \sqrt{3}, \text{ 故双}$$

$$\text{曲线的方程为 } \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1.$$



**17. 【经典题型】等差中项与等比中项的应用、等比数列的定义、并项求和法的应用**

**【解】**(1)由题意得  $2\ln a_2 = \ln a_1 + \ln a_3$ ,

$$\therefore a_2^2 = a_1 \cdot a_3. \quad (1 \text{ 分})$$

又  $\{S_n + a_1\}$  是等比数列,  $\therefore (S_2 + a_1)^2 = (S_1 + a_1) \cdot (S_3 + a_1)$ ,

$$\because a_1 = 1, \therefore \begin{cases} a_2^2 = a_3, \\ (a_2 + 2)^2 = 2(2 + a_2 + a_3), \end{cases}$$

$$\therefore a_2^2 - 2a_2 = 0. \text{ 又 } a_n > 0, \therefore a_2 = 2. \quad (3 \text{ 分})$$

又  $\{\ln a_n\}$  是等差数列,

$$\therefore \{a_n\} \text{ 为等比数列, 首项 } a_1 = 1, \text{ 公比 } q = \frac{a_2}{a_1} = 2,$$

$$\therefore \{a_n\} \text{ 的通项公式为 } a_n = 2^{n-1}. \quad (5 \text{ 分})$$

(2)由(1)知  $a_n = 2^{n-1}$ ,

$$\therefore b_n = \log_2 a_{2n-1} + \log_2 a_{2n} = \log_2 2^{2n-1-1} + \log_2 2^{2n-1} = 2n-2+2n-1 = 4n-3.$$

$$\text{令 } c_n = (-1)^n \cdot b_n^2, \text{ 则 } c_{2n-1} + c_{2n} = -b_{2n-1}^2 + b_{2n}^2 = (b_{2n} + b_{2n-1})(b_{2n} - b_{2n-1}) = 4(b_{2n-1} + b_{2n})(n \in \mathbb{N}^*).$$

记  $\{c_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ ,

$$\therefore T_{10} = (c_1 + c_2) + \cdots + (c_9 + c_{10}) = 4(b_1 + b_2 + \cdots + b_9 + b_{10}) = 4 \times \frac{(1+37) \times 10}{2} = 760,$$

$$\therefore \text{数列 } \{(-1)^n \cdot b_n^2\} \text{ 的前 10 项和为 } 760. \quad (10 \text{ 分})$$

**18. 【基础考点】正弦定理、三角形面积公式、基本不等式、等比数列的性质**

**【解】**(1)由  $A+B+C=\pi$ , 得  $A+C=\pi-B$ ,  $\therefore \cos B = -\cos(A+C)$ ,

$$\therefore \cos(A-C) - \cos(A+C) = \frac{3}{2}, \therefore \sin A \sin C = \frac{3}{4}. \quad (2 \text{ 分})$$

又  $a, b, c$  成等比数列,  $\therefore b^2 = ac$ ,

$$\therefore \text{由正弦定理得 } \sin^2 B = \sin A \sin C = \frac{3}{4}.$$

$$\because B \in (0, \pi), \therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore |\cos B| = \frac{1}{2}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{解法一: 又 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \geq \frac{2ac - ac}{2ac} = \frac{1}{2}, \text{ 当且仅当 } a = c \text{ 时, 等}$$

$$\text{号成立, } \therefore \cos B = \frac{1}{2}, a = c.$$

$$\text{又 } 0 < B < \pi, \therefore A = B = C = \frac{\pi}{3}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{解法二: 若 } B = \frac{\pi}{3}, \text{ 则 } \cos B = \frac{1}{2}, \text{ 代入 } \cos(A-C) + \cos B = \frac{3}{2}, \text{ 则}$$

$$\cos(A-C) = 1.$$



$$\therefore 0 < A < \pi, 0 < C < \pi, \therefore A = C = \frac{\pi}{3}.$$

若  $B = \frac{2\pi}{3}$ , 则  $\cos B = -\frac{1}{2}$ , 代入  $\cos(A-C) + \cos B = \frac{3}{2}$ , 则  $\cos(A-C) = 2$  (舍去).

$$\text{综上, } A = B = C = \frac{\pi}{3}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \because b = 2, \therefore AB = 2,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin 60^\circ,$$

$$\text{即 } \frac{1}{2} \times 2 \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore BD = 3, \therefore CD = 1. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中, 由余弦定理得 } AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cos \angle DCA = 2^2 + 1^2 - 2 \times 2 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7, \therefore AD = \sqrt{7}. \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 中, 由正弦定理得 } \frac{AD}{\sin \angle DCA} = \frac{CD}{\sin \angle CAD},$$

$$\therefore \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sin \angle CAD},$$

$$\therefore \sin \angle CAD = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}. \quad (12 \text{ 分})$$

### 19. 【热点考点】独立事件的乘法公式、离散型随机变量的分布列和数学期望

【解】记  $A_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$  表示“第  $i$  局甲获胜”.

(1) 设  $A$  表示“比赛一共进行了四局并且甲班最终赢得比赛”, 则事件  $A$  包括三种情况:  $\overline{A_1}A_2A_3A_4, A_1\overline{A_2}A_3A_4, A_1A_2\overline{A_3}A_4$ , 这三种情况互斥, 且  $A_1, A_2, A_3, A_4$  相互独立,

$$\begin{aligned} \therefore P(A) &= P(\overline{A_1}A_2A_3A_4 + A_1\overline{A_2}A_3A_4 + A_1A_2\overline{A_3}A_4) = P(\overline{A_1}A_2A_3A_4) + \\ &P(A_1\overline{A_2}A_3A_4) + P(A_1A_2\overline{A_3}A_4) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \\ &\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 由题意,  $X$  的所有可能取值有 0, 2, 4, 6,

$$P(X=0) = P(\overline{A_1}\overline{A_2}\overline{A_3}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18},$$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= P(\overline{A_1}\overline{A_2}A_3\overline{A_4} + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3A_4 + \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \\ &\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{36}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X=4) &= P(A_1\overline{A_2}\overline{A_3}A_4\overline{A_5} + A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}A_5 + A_1\overline{A_2}\overline{A_3}A_4A_5 + \\ &\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4\overline{A_5} + \overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}A_5 + \overline{A_1}\overline{A_2}A_3A_4\overline{A_5}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \\ &\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \\ &\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{72}, \end{aligned}$$

$$P(X=6) = 1 - P(X=0) - P(X=2) - P(X=4) = 1 - \frac{1}{18} - \frac{5}{36} - \frac{13}{72} = \frac{5}{8}, \quad (10 \text{ 分})$$

$\therefore X$  的分布列为

$X$	0	2	4	6
$P$	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{13}{72}$	$\frac{5}{8}$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{18} + 2 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{13}{72} + 6 \times \frac{5}{8} = \frac{19}{4}. \quad (12 \text{ 分})$$

### 20. 【经典题型】空间直线与平面间的垂直关系、直线与平面所成角、二面角、空间向量的应用

【解】(1)  $\because$  菱形  $ABCD$  中,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,

$\therefore \angle A = 60^\circ, AB = AD, \therefore \triangle ABD$  是等边三角形. (2 分)

$$\text{又 } \overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{DB},$$

$\therefore EF \parallel BD, \therefore \triangle PEF$  也是等边三角形.

取  $EF$  的中点  $O$ , 连接  $PO, DO$ ,

则  $PO \perp EF, \therefore$  平面  $PEF \perp$  平面  $BCDEF$ , 且平面  $PEF \cap$  平面  $BCDEF = EF, PO \subset$  平面  $PEF, \therefore PO \perp$  平面  $BCDEF$ .

$\therefore BF \subset$  平面  $BCDEF, \therefore PO \perp BF$ . (4 分)

若  $BF \perp PD, PD \cap PO = P$ ,

则  $BF \perp$  平面  $POD, \therefore BF \perp OD$ .

又  $\because AO \perp BD, \therefore O$  为  $\triangle ABD$  的重心.

$$\text{又点 } O \text{ 在 } EF \text{ 上, } EF \parallel BD, \therefore \overrightarrow{EF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DB}, \text{ 即 } \lambda = \frac{2}{3}. \quad (6 \text{ 分})$$

(2) **解法一:** 连接  $CO$ , 设  $\triangle ABD$  的边长为  $a$ , 则  $PO = \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda a, CO =$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (2 - \lambda) a.$$

$\therefore PO \perp$  平面  $BCDEF$ ,

$\therefore$  直线  $PC$  与平面  $BCDEF$  所成角为  $\angle PCO$ ,

$$\therefore \tan \angle PCO = \frac{PO}{CO} = \frac{\lambda}{2 - \lambda} = \frac{1}{3}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{2},$$

$\therefore EF$  是  $\triangle ABD$  的中位线. (8 分)

在五棱锥  $P-BCDEF$  中, 设  $OC$  与  $BD$  相交于点  $M$ , 连接  $PM$ , 平面  $PEF \cap$  平面  $PBD = l$ , 则  $l$  过点  $P$ .

$\because EF \parallel BD, EF \not\subset$  平面  $PBD, BD \subset$  平面  $PBD$ ,

$\therefore EF \parallel$  平面  $PBD$ .

又平面  $PEF \cap$  平面  $PBD = l, \therefore EF \parallel l, \therefore l \parallel BD$ . (10 分)

由(1)可知  $PO \perp EF, CO \perp EF, PO \cap CO = O$ ,

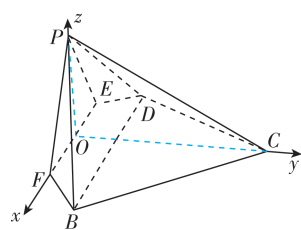
$\therefore EF \perp$  平面  $POM, \therefore l \perp$  平面  $POM$ ,

$\therefore \angle OPM$  就是平面  $PEF$  和平面  $PBD$  所成二面角的平面角.

又  $PO = OM$ , 且  $PO \perp OM, \therefore \angle OPM = 45^\circ$ , 即平面  $PEF$  和平面  $PBD$  的夹角为  $45^\circ$ . (12 分)

**解法二:** 连接  $CO$ , 以  $O$  为坐标原点,  $OF, OC, OP$  所在直线分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴建立空间直角坐标系 (如图所示). 设菱形  $ABCD$  的边长为 2,  $\therefore PO \perp$  平面  $BCDEF$ ,

$\therefore \angle PCO$  即为直线  $PC$  与平面  $BCDEF$  所成角,



$$\therefore \tan \angle PCO = \frac{PO}{OC} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda} = \frac{1}{3}, \text{解得 } \lambda = \frac{1}{2},$$

$$\therefore P\left(0, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), B\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), D\left(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), C\left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$\therefore \vec{OC} = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right), \vec{BD} = (-2, 0, 0), \vec{PB} = \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$\therefore OC \perp$  平面  $PEF$ ,

$$\therefore \vec{OC} = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right) \text{ 即为平面 } PEF \text{ 的一个法向量.} \quad (9 \text{ 分})$$

设平面  $PBD$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x, y, z)$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{BD} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{PB} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -2x = 0, \\ x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0, \end{cases}$$

$$\text{取 } \mathbf{n} = (0, 1, 1), \text{ 则 } \cos \langle \vec{OC}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\vec{OC} \cdot \mathbf{n}}{|\vec{OC}| |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \langle \vec{OC}, \mathbf{n} \rangle = 45^\circ,$$

$$\therefore \text{平面 } PEF \text{ 和平面 } PBD \text{ 的夹角为 } 45^\circ. \quad (12 \text{ 分})$$

## 21. 思路导引

(1) 设直线  $AB: x = \lambda y + \frac{p}{2}$  代入抛物线方程,

写出根与系数的关系  $\rightarrow$  求出  $S_{\triangle HAB} \xrightarrow{\text{二次函数的性质}} p$  的值  $\rightarrow$  写出抛物线方程;

(2) 假设存在  $E(x_0, y_0) \rightarrow$  设直线  $MN: x = t(y-1) + \frac{17}{4}$  代入抛物线方程得到根与系数的关系  $\rightarrow$  根据垂直关系得到  $4t(y_0+1) + y_0^2 - 1 = 0 \rightarrow$  求出定点

**【重难点型】** 抛物线的方程、直线与抛物线的位置关系及抛物线中的定点问题

**【解】** (1) 由题意得直线  $AB$  的斜率不为零, 设直线  $AB: x = \lambda y + \frac{p}{2}$ ,

(在求解直线与抛物线位置关系的相关问题时, 常设直线方程为  $x = my + n$  的形式, 这样可避免讨论斜率是否存在)

代入  $y^2 = 2px$ , 得  $y^2 - 2p\lambda y - p^2 = 0$ , 则  $\Delta = 4p^2\lambda^2 + 4p^2 > 0$ . (2分)

设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $y_1 + y_2 = 2p\lambda, y_1 y_2 = -p^2$ ,

$$\therefore S_{\triangle HAB} = \frac{1}{2} p \cdot |y_1 - y_2|$$

$$= \frac{1}{2} p \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$$

$$= \frac{1}{2} p \cdot \sqrt{4p^2\lambda^2 + 4p^2} = p^2 \sqrt{\lambda^2 + 1},$$

$\therefore$  当  $\lambda = 0$  时,  $S_{\triangle HAB}$  取最小值  $p^2$ ,  $\therefore p^2 = 4, \therefore p = 2$ ,

$\therefore$  抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ . (5分)

(2) 假设存在满足题意的点  $E$ , 设  $E(x_0, y_0), M(x_3, y_3), N(x_4, y_4)$ , 由题意得直线  $MN$  的斜率不为零.

(设直线方程时, 一定要先根据条件判断直线的斜率是否存在、是否为零等特殊情形)

设直线  $MN$  的方程为  $x = t(y-1) + \frac{17}{4}$ , 代入  $y^2 = 4x$ ,

可得  $y^2 - 4ty + 4t - 17 = 0$ , 则  $16t^2 - 16t + 68 > 0$ , 则  $\begin{cases} y_3 + y_4 = 4t, \\ y_3 y_4 = 4t - 17, \end{cases}$

$$\therefore \frac{y_0 - y_3}{x_0 - x_3} \cdot \frac{y_0 - y_4}{x_0 - x_4} = -1, \therefore \frac{4}{y_0 + y_3} \cdot \frac{4}{y_0 + y_4} = -1,$$

$$\therefore y_0^2 + (y_3 + y_4)y_0 + y_3 y_4 + 16 = 0, \therefore y_0^2 + 4ty_0 + 4t - 17 = 0,$$

$$\text{即 } 4t(y_0 + 1) + y_0^2 - 17 = 0, \therefore \begin{cases} y_0 + 1 = 0, \\ y_0^2 - 17 = 0, \end{cases}$$

解得  $y_0 = -1$ , 则  $x_0 = \frac{1}{4}$ , 故存在定点  $E\left(\frac{1}{4}, -1\right)$  满足题意.

(12分)

## 方法速记

定点问题的常见解法: (1) 设定点坐标, 根据题意选择参数, 建立一个直线系或曲线系方程, 而该方程与参数无关, 故得到一个关于定点坐标的方程组, 以这个方程组的解为坐标的点即所求定点; (2) 从特殊位置入手, 找出定点, 再证明该点满足题意.

## 22. 思路导引

(1) ① 求出导函数  $f'(x)$   $\rightarrow$  根据导函数的正负区间求得函数  $f(x)$  的单调区间  $\rightarrow$  结合函数零点存在定理证结论;

② 分  $0 \leq x \leq x_0$  和  $x > x_0$  两种情况求导研究函数  $g(x)$  的单调性  $\rightarrow$  结合函数零点存在定理证结论.

(2) 由 (1) 得  $g(x_1) = g(x_2) = 0 \rightarrow x_2, e^{x_1}$  是  $\ln x - a(x+1) - x \ln x = 0$  的两根  $\rightarrow h(x) = \ln x - a(x+1) - x \ln x \rightarrow$  求导研究

$h(x)$  的单调性  $\rightarrow x_2 = e^{x_1} \rightarrow$  转化为证  $e^{\frac{x_2 - x_1}{2}} - e^{\frac{x_1 - x_2}{2}} > x_2 - x_1 \rightarrow$

令  $\frac{x_2 - x_1}{2} = t (t > 0) \rightarrow$  转化为证  $e^t - e^{-t} > 2t \rightarrow$  令  $p(t) = e^t - e^{-t} - 2t \rightarrow$  利用导数判断其单调性证明结论

**【重难点型】** 函数零点存在定理的应用, 利用导数证明不等式、研究函数的零点

**【证明】** (1) ① 对  $f(x)$  求导得  $f'(x) = e^x - 1$ , 当  $x > 0$  时,  $e^x > 1$ ,

$\therefore f'(x) > 0, \therefore f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

(利用函数零点存在定理判断函数的零点区间时, 需先判断函数的单调性)

$$\therefore -\frac{6}{5} \leq a < \frac{3}{e^3} - 1, \therefore f(3) = e^3 - 3 + e^3 a < e^3 - 3 + e^3 \left(\frac{3}{e^3} - 1\right) = 0,$$

$$f(4) = e^4 - 4 + e^3 a \geq e^4 - 4 - \frac{6}{5} e^3 \approx 7.39^2 - 4 - \frac{6}{5} \times 20.09 > 0,$$

(若判断连续函数在某个区间上是否存在零点, 只需判断区间端点的函数值是否异号)

$\therefore f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上存在唯一的零点  $x_0$ , 且  $3 < x_0 < 4$ . (3分)

② 当  $0 \leq x \leq x_0$  时,  $g(x) = x + a - \frac{x-a}{e^x}$ ,

(若判断函数零点的个数, 需要将函数零点转化为方程的解再由方程的解转化为两个新函数的图象的交点; 若利用导数, 则可以解决一些较复杂函数的零点问题)

$$g'(x) = 1 - \frac{1-x+a}{e^x} = \frac{e^x - 1 + x - a}{e^x}, \therefore x \geq 0, a < 0,$$

$$\therefore e^x - 1 \geq 0, x - a > 0, \therefore g'(x) > 0,$$

$\therefore g(x)$  在  $(0, x_0)$  上单调递增.  $\therefore 3 < x_0 < 4$ ,

$$\therefore g(x_0) > g(3) = 3 + a - \frac{3-a}{e^3} \geq 3 - \frac{6}{5} - \frac{3+\frac{6}{5}}{e^3} = \frac{9e^3 - 21}{5e^3} \approx$$

$$\frac{9 \times 20.09 - 21}{5 \times 20.09} > 0.$$

$$\text{又} \because g(1) = 1 + a - \frac{1-a}{e} = 1 - \frac{1}{e} + a \left(1 + \frac{1}{e}\right) < 1 - \frac{1}{e} + \left(\frac{3}{e^3} - 1\right) \cdot$$

$$\left(1 + \frac{1}{e}\right) = \frac{3+3e-2e^3}{e^4} \approx \frac{3+3 \times 2.72-2 \times 20.09}{e^4} < 0,$$

$\therefore g(x)$  在  $[1, x_0]$  上有唯一的零点(注:取  $g(0) < 0$  也可以).

$$\text{当 } x > x_0 \text{ 时, } g'(x) = -\ln x + \frac{1}{x} - 1 - a < -\ln x_0 + \frac{1}{x_0} - 1 - a < -\ln 3 + \frac{1}{3} - 1 +$$

$$\frac{6}{5} = \frac{8}{15} - \ln 3 \approx \frac{8}{15} - 1.1 < 0,$$

$\therefore g(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  上单调递减,

$$\therefore g(4) = -3\ln 4 - 5a > -3\ln 4 - 5\left(\frac{3}{e^3} - 1\right) = 5 - 3\ln 4 - \frac{15}{e^3} \approx 0.11 > 0,$$

$$g(e^2) = 2(1 - e^2) - a(e^2 + 1) \leq 2(1 - e^2) + \frac{6}{5}(e^2 + 1) = \frac{16 - 4e^2}{5} \approx$$

$$\frac{16 - 4 \times 7.39}{5} < 0,$$

$\therefore g(x)$  在  $(x_0, +\infty)$  上有唯一的零点.

综上,函数  $g(x)$  有两个零点. (6分)

(求分段函数的零点,先求各分段函数的零点,最后再合并,从而得到整个分段函数的零点)

(2)由(1)可知  $g(x_1) = g(x_2) = 0$ ,其中  $1 < x_1 < x_0 < x_2$ ,由  $g(x_1) = 0$

得  $x_1 + a - \frac{x_1 - a}{e^{x_1}} = 0$ ,即  $x_1 - a(e^{x_1} + 1) - x_1 e^{x_1} = 0$ ,由  $g(x_2) = 0$  得  $\ln x_2 -$

$$a(x_2 + 1) - x_2 \ln x_2 = 0. \quad (7 \text{分})$$

设  $h(x) = \ln x - a(x + 1) - x \ln x$ ,则  $h(x_2) = h(e^{x_1}) = 0$ ,

$$\therefore 1 < x_1 < x_0 < x_2, \therefore e^{x_1} > e, x_2 > x_0 > e,$$

$$\text{当 } x > e \text{ 时, } h'(x) = \frac{1}{x} - a - \ln x - 1 < \frac{1}{e} - a - 2 \leq \frac{1}{e} + \frac{6}{5} - 2 = \frac{1}{e} -$$

$$\frac{4}{5} < 0,$$

$\therefore h(x)$  在  $(e, +\infty)$  上单调递减,  $\therefore x_2 = e^{x_1}$ . (9分)

$$\text{要证 } \frac{e^{x_2} - x_2}{e^{x_1} - x_1} > e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}, \text{即证: } \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} > e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}, \text{即证: } \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}} > x_2 - x_1,$$

$$\text{即证 } e^{\frac{x_2 - x_1}{2}} - e^{\frac{x_1 - x_2}{2}} > x_2 - x_1, \text{设 } \frac{x_2 - x_1}{2} = t (t > 0), \text{即证 } e^t - e^{-t} > 2t.$$

(10分)

设  $p(t) = e^t - e^{-t} - 2t$ ,则  $p'(t) = e^t + e^{-t} - 2 > 2 - 2 = 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立,

$\therefore$  当  $t > 0$  时,  $p(t)$  单调递增,

$\therefore p(t) > p(0) = 0$ ,即证. (12分)

**方法速记** 破解含双参不等式证明题的3个关键点:(1)转化,即由已知条件入手,寻找双参所满足的关系式,并把含双参的不等式转化为含单参的不等式;(2)巧构造函数,再借用导数,判断函数的单调性,从而求其最值;(3)回归双参的不等式的证明,把所求的最值应用到双参不等式,即可证得结果.

## 4 2023 河北省唐山市高三模拟考试

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	A	B	D	C	A	C	CD	AB
题号	11	12	13		14		15		16	
答案	BD	ACD	-3		$\frac{8}{15}$		$(0, 1]$		$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 (x \geq 1)$	

### 1. B 【基础考点】集合的交集运算

【深度解析】由题知,集合  $M = (-2, 5)$ ,  $N = (0, +\infty)$ ,所以  $M \cap N = (0, 5)$ ,故选 B.

### 2. A 【基础考点】复数的模长公式与虚部的概念

【深度解析】由题意,设  $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$ ,则  $z - 2i = a + (b - 2)i$ .因为  $|z - 2i| = |z|$ ,所以  $\sqrt{a^2 + (b - 2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,解得  $b = 1$ ,所以  $z = a + i$ ,所以复数  $z$  的虚部为 1,故选 A.

**快解** 取复数  $z = i$ ,满足  $|z - 2i| = |z|$ ,所以复数  $z$  的虚部为 1,故选 A.

### 3. A 【经典题型】投影向量的概念

【深度解析】因为向量  $a = (2\sqrt{2}, 1)$ ,  $b = (3, 0)$ ,所以  $a \cdot b = (2\sqrt{2}, 1) \cdot (3, 0) = 6\sqrt{2}$ ,所以  $a$  在  $b$  上的投影向量为  $\frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|} = (2\sqrt{2}, 0)$ ,故选 A.

**快解** 由题知,向量  $a = (2\sqrt{2}, 1)$  在  $b = (3, 0)$  上的投影向量即  $a$  在  $x$  轴上的投影向量,即  $(2\sqrt{2}, 0)$ ,故选 A.

### 4. B 【经典题型】异面直线所成角的求法

【深度解析】由题意,设等边三角形  $PAB$  的边长为  $2a$ ,取  $AB$  的中点  $O$ ,连接  $OC$ ,  $OD$ ,  $OP$ ,则  $OP \perp$  平面  $ABC$ .因为  $D$  是  $PA$  的中点,所以  $OD \parallel PB$ ,  $OD = \frac{1}{2}PB = a$ ,所以异面直线  $CD$  与  $PB$  所成角为  $\angle ODC$  或其补角.因为  $OP \perp$  平面  $ABC$ ,  $OC \subset$  平面  $ABC$ ,所以  $OP \perp OC$ .又  $\triangle ABC$  为等腰三角形,且  $O$  为  $AB$  的中点,所以  $OC \perp AB$ ,  $OC = \frac{1}{2}AB = a$ .又  $OP \cap AB = O$ ,所以  $OC \perp$  平面  $PAB$ .又  $OD \subset$  平面  $PAB$ ,所以  $OC \perp OD$ .在  $\text{Rt} \triangle OCD$  中,  $OD = OC = a$ ,所以  $\angle ODC = 45^\circ$ ,故选 B.

