

令  $g(x) = (2-3x_0)(x-x_0) - (3x-e^x+1)$ , 且  $g(x_0) = 0$ ,

(通过构造函数  $g(x) = (2-3x_0)(x-x_0) - (3x-e^x+1)$ , 利用导数研究其单调性与最值, 进而判断曲线  $y=f(x)$  上的点都不在直线  $l$  的上方, 这是常用的证明技巧与方法)

$$g'(x) = 2-3x_0-3+e^x = -1-3x_0+e^x, g'(x_0) = -3x_0+e^{x_0}-1=0,$$

易知  $g'(x) = -1-3x_0+e^x$  在  $\mathbf{R}$  上为增函数,  $\therefore$  当  $x < x_0$  时,  $g'(x) < 0$ , 当  $x > x_0$  时,  $g'(x) > 0$ ,

$\therefore$  函数  $g(x)$  在  $(-\infty, x_0)$  上单调递减, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递增,

$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = 0$ , 即  $(2-3x_0)(x-x_0) \geq f(x)$ , 当且仅当  $x = x_0$  时, 取等号,  $\therefore$  曲线  $y=f(x)$  上的点都不在直线  $l$  的上方. (6分)

(2) 由(1)可得  $f'(x) = 3-e^x$ , 令  $f'(x) = 0$ , 解得  $x = \ln 3$ ,

当  $x < \ln 3$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $x > \ln 3$  时,  $f'(x) < 0$ ,

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, \ln 3)$  上单调递增, 在  $(\ln 3, +\infty)$  上单调递减,

$\therefore f(x)$  的最大值为  $f(\ln 3) = 3\ln 3 - 3 + 1 = 3\ln 3 - 2$ ,

$\therefore 0 < m < 3\ln 3 - 2$ .

(利用导数研究函数的单调性与最值, 结合函数的图象可判断  $m$  的取值范围)

由  $f(1) = 4-e > 0, f(2) = 7-e^2 < 0, \therefore x_0 \in (1, 2)$ .

(利用零点存在定理求出  $x_0$  的取值范围是证明不等式的关键之一)

易得曲线  $y=f(x)$  在点  $(0,0)$  处的切线为  $y=2x$ ,

设直线  $y=m$  与  $y=2x, y=(2-3x_0)(x-x_0)$  的交点的横坐标分别为

$$x_3, x_4, \text{ 则 } x_3 = \frac{m}{2}, x_4 = x_0 + \frac{m}{2-3x_0},$$

$$\therefore x_2 - x_1 < x_4 - x_3 = x_0 + \frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{下面证明: } x_0 + \frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2} < 2 - \frac{3m}{4}.$$

(将所证的问题转化为  $x_2 - x_1 < x_4 - x_3 = x_0 + \frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2}$ , 再转化为证明  $x_0 + \frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2} < 2 - \frac{3m}{4}$ )

$$\therefore 2 - \frac{m}{4} - x_0 - \frac{m}{2-3x_0} = 2 - x_0 - m \cdot \frac{3(2-x_0)}{4(2-3x_0)} = (2-x_0) \cdot \frac{12x_0+3m-8}{4(3x_0-2)},$$

$$\therefore x_0 \in (1, 2), \therefore 2-x_0 > 0, 3x_0-2 > 1, \text{ 且 } 12x_0-8+3m > 4+3m > 0,$$

$$\therefore 2 - \frac{m}{4} - x_0 - \frac{m}{2-3x_0} > 0,$$

$$\therefore x_0 + \frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2} < 2 - \frac{3m}{4}, \therefore x_2 - x_1 < 2 - \frac{3}{4}m. \quad (12 \text{ 分})$$

## 9 2023 浙江省绍兴市高三适应性考试

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	D	D	A	C	A	B	ABD	BC
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	BCD	BD	84	$29\pi$	$(1, -2)$	$\sqrt{14}$				

### 1. D 【基础考点】不等式的解法、集合的交集运算

【深度解析】因为  $M = \{x | \log_2 x < 1\} = \{x | 0 < x < 2\}$ ,  $N = \{x | 2x-1 < 0\} = \{x | x < \frac{1}{2}\}$ , 所以  $M \cap N = \{x | 0 < x < \frac{1}{2}\}$ , 故选 D.

### 2. C 【基础考点】复数的运算、虚部的概念

【深度解析】由题意, 得  $z = 1 - \frac{1}{1-i} = 1 - \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ , 其虚部为  $-\frac{1}{2}$ , 故选 C.

### 3. D 【经典题型】向量的数量积及模长

【深度解析】由  $|a-2b| = \sqrt{7}$  两边平方得  $|a|^2 + 4|b|^2 - 4a \cdot b = |a|^2 + 4|b|^2 - 4|a| \cdot |b| \cos \langle a, b \rangle = 1 + 4|b|^2 - 4|b| \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + 4|b|^2 + 2\sqrt{3}|b| = 7$ , 即  $2|b|^2 + \sqrt{3}|b| - 3 = 0$ , 解得  $|b| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 故选 D.

### 4. D 【新趋考点】等差数列的前 $n$ 项和公式、数列的单调性、充分条件与必要条件

【深度解析】若  $2S_{n+1} < S_n + S_{n+2}$ , 则  $S_{n+1} - S_n < S_{n+2} - S_{n+1}$ , 即  $a_{n+1} < a_{n+2}$ , 所以公差  $d > 0$ , 数列  $\{a_n\}$  为递增数列. 因为  $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ , 当

$a_1 = -6, d = 2$  时, 数列  $\{S_n\}$  不递增. 若数列  $\{S_n\}$  为递增数列, 不妨设  $a_1 = 1, d = 0$ , 此时  $S_n = n, S_{n+1} = n+1, S_{n+2} = n+2$ , 则  $2S_{n+1} = S_n + S_{n+2}$  (易错: 忽略特殊数列——常数列也为等差数列), 所以“ $2S_{n+1} < S_n + S_{n+2}$ ”是“数列  $\{S_n\}$  为递增数列”的既不充分也不必要条件, 故选 D.

### 5. A 【重点考点】椭圆的几何性质

【深度解析】由题得, 椭圆的短半轴长  $b = R$ . 因为截面与底面的夹角  $\theta = 30^\circ$ , 所以长轴长  $2a = \frac{2R}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$ , 所以  $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$  (结论: 若与底面夹角为  $\theta$  的平面  $\alpha$  截底面直径为  $d$  的圆柱, 则得到的截面必为椭圆, 且椭圆的短轴长等于圆柱的底面直径, 长轴长等于  $\frac{d}{\cos \theta}$ ), 所以  $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则该椭圆的离心率  $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{2}$ , 故选 A.

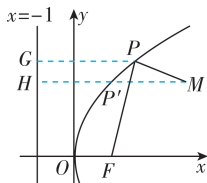
### 6. C 【重点考点】二次函数的图象与性质

【深度解析】 $\therefore f(m) = m^2 + m + a = m(m+1) + a < 0$ , 即  $m(m+1) < -a$ , 又  $a > 0$ , 则  $-a < 0$ ,  $\therefore m(m+1) < 0$ ,  $\therefore m < 0, m+1 > 0$  (提示: 如果两因式的积为负数, 那么这两个因式异号),  $\therefore f(m+1) = (m+1)^2 + (m+1) + a > 0$ , 故选 C.

**方法速记** 函数  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  的单调区间的求法: ①若  $A > 0, \omega > 0$ , 把  $\omega x + \varphi$  看作是一个整体, 由  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 求得函数的单调递减区间, 由  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \omega x + \varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 求得函数的单调递增区间; ②若  $A > 0, \omega < 0$ , 则利用诱导公式先将  $\omega$  的符号化为正, 再利用①的方法, 或根据复合函数的单调性进行求解.

**11. BCD 【重点题型】直线与抛物线的位置关系、抛物线的定义、向量数量积的坐标运算**

**【深度解析】** 因为抛物线  $C$  的焦点  $F$  为  $(1, 0)$ , 所以  $p = 2$ , 所以抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ , 准线方程为  $x = -\frac{p}{2} = -1$ , 故 **B 正确**. 对于  $A$ , 过点  $P, M$  分别作准线的垂线, 垂足分别为  $G, H$ , 如图所示, 则由抛物线的定义, 得  $|PG| = |PF|$ , 所以  $|PM| + |PF| = |PM| + |PG| \geq |MH| = 4$ , 当且仅当点  $M, P, H$  三点共线时等号成立, 故 **A 不正确**.



对于  $C$ , 由题意设直线  $l$  的方程为  $x = m(y - 2) + 3$ , 代入  $y^2 = 4x$ , 得  $y^2 - 4my + 8m - 12 = 0$ , 设  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 则  $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = 8m - 12$ , 所以  $x_1 x_2 = [m(y_1 - 2) + 3][m(y_2 - 2) + 3] = m^2 y_1 y_2 + m(3 - 2m)(y_1 + y_2) + 4m^2 - 12m + 9 = m^2(8m - 12) + m(3 - 2m) \cdot 4m + 4m^2 - 12m + 9 = 4m^2 - 12m + 9$ , 所以  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 4m^2 - 12m + 9 + 8m - 12 = 4m^2 - 4m - 3 = 4\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \geq -4$ , 故 **C 正确**.

对于  $D$ , 当  $PF \parallel l$  时, 结合  $C$  选项可设直线  $PF$  的方程为  $x = my + 1$  ( $m \neq 1$ ), 此时点  $P$  到直线  $l$  的距离等于两平行线  $l$  与  $PF$  的距离  $d = \frac{|2m - 3 + 1|}{\sqrt{1 + m^2}} = 2\sqrt{1 - \frac{2m}{1 + m^2}}$ . 令  $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$ , 则  $f'(x) = \frac{2(1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2}$ , 当  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$  时,  $f'(x) < 0$ , 函数  $f(x)$  单调递减, 当  $x \in (-1, 1)$  时,  $f'(x) > 0$ , 函数  $f(x)$  单调递增, 且当  $x \rightarrow -\infty$  时,  $f(x) \rightarrow 0^-$ , 当  $x \rightarrow +\infty$  时,  $f(x) \rightarrow 0^+$ , 所以  $f(x)_{\min} = f(-1) = -1$ , 所以  $d_{\max} = 2\sqrt{2}$ , 故 **D 正确**.

故选 **BCD**.

**一题多解** 对于  $D$ , 由  $C$  选项可知直线  $l$  的方程为  $x - my + 2m - 3 = 0$ , 设直线  $PF$  的方程为  $x - my - 1 = 0$  ( $m \neq 1$ ), 则点  $P$  到直线  $l$  的距离等于两平行线  $l$  与  $PF$  的距离  $d = \frac{|2m - 3 + 1|}{\sqrt{1 + m^2}} = 2\sqrt{1 - \frac{2m}{1 + m^2}}$ , 当  $m = 0$  时,  $d = 2$ ; 当  $m > 0$  且  $m \neq 1$  时,  $d = 2\sqrt{1 - \frac{2}{\frac{1}{m} + m}} \in (0, 2)$ ;

当  $m < 0$  时,  $d = 2\sqrt{1 - \frac{2}{\frac{1}{m} + m}} = 2\sqrt{1 + \frac{2}{-\frac{1}{m} - m}} \in (2, 2\sqrt{2}]$ . 可得  $0 < d \leq 2\sqrt{2}$ , 故 **D 正确**.

**12. BD**

**思路导引** 计算前几个连续奇数、偶数的结果的最小值  $\rightarrow$  总结规律, 根据规律逐一判断.

**【新趋考点】整数与整除问题**

**【深度解析】** 对于连续四个奇数:  $2n + 1, 2n + 3, 2n + 5, 2n + 7, n \in \mathbb{N}$ , 由题意运算, 其结果最小值为 0; 同理可得, 对于连续四个偶数:  $2n, 2n + 2, 2n + 4, 2n + 6, n \in \mathbb{N}^*$ , 其结果最小值为 0 (**关键: 根据计算, 找出规律**). 对于  $AB$ , 在 1 到 2 022 的 2 022 个整数中有 1 011 个奇数和 1 011 个偶数,  $1\ 011 \div 4 = 252 \cdots 3$ , 由 1, 3, 5, 经过计算最小值为 1, 且 2, 4, 6, 经过计算最小值为 0, 则  $p$  的最小值为 1, 故 **A 不正确, B 正确**; 对于  $CD$ , 除 2 022 之外, 前 2 021 个数中有 1 011 个奇数和 1 010 个偶数,  $1\ 011 \div 4 = 252 \cdots 3, 1\ 010 \div 4 = 252 \cdots 2$ , 由 1, 3, 5, 经过计算最小值为 1, 且 2, 4, 经过计算最小值为 2, 则前 2 021 个数经过计算最小值为 1, 故  $p$  的最大值为 2 021, 故 **C 不正确, D 正确**. 故选 **BD**.

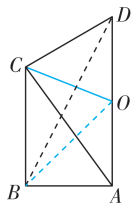
**13. 84 【基础考点】二项式定理**

**【深度解析】**  $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^9$  的展开式的通项为  $T_{r+1} = C_9^r \left(\frac{1}{x}\right)^{9-r} (-\sqrt{x})^r = (-1)^r C_9^r x^{\frac{3r-18}{2}}$ , 由  $\frac{3r-18}{2} = 0$ , 得  $r = 6$ , 所以该展开式中常数项为  $T_7 = (-1)^6 C_9^6 = 84$ .

**一题多解**  $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^9$  的展开式中常数项是  $\underbrace{\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)}_{9\text{个}} \cdots \underbrace{\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)}_{9\text{个}}$  中任取 3 个因式内的  $\frac{1}{x}$  与另外 6 个因式内的  $(-\sqrt{x})$  相乘而得到的, 所以  $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^9$  的展开式中常数项是  $C_9^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3 \cdot C_6^6 (-\sqrt{x})^6 = 84$ .

**14. 29π 【经典题型】数学文化、四面体外接球的表面积**

**【深度解析】** 如图所示, 取  $AD$  的中点  $O$ , 连接  $OC, OB$ , 由题意知  $\text{Rt} \triangle ACD$  与  $\text{Rt} \triangle ABD$  共斜边, 所以  $OB = OD = OC = OA = \frac{1}{2}AD$ , 所以  $O$  为四面体  $ABCD$  的外接球的球心, 且半径  $R = \frac{1}{2}AD$  (**提示: 若三棱**



**锥的顶点可构成共斜边的直角三角形, 则公共斜边的中点就是其外接球的球心, 且这条公共斜边就是外接球的一条直径**). 在  $\text{Rt} \triangle BCD$  中,  $\angle BCD = 90^\circ, BC = 3, CD = 4$ , 所以  $BD = 5$ . 在  $\text{Rt} \triangle ABD$  中,  $BD = 5, AB = 2, \angle ABD = 90^\circ$ , 所以  $AD = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$ , 所以  $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$ , 所以四面体  $ABCD$  外接球的表面积为  $4\pi R^2 = 4\pi \times \left(\frac{\sqrt{29}}{2}\right)^2 = 29\pi$ .

## 15. (1, -2)

**思路导引** 求出  $f(x+1)+2$  的解析式——利用定义法判断出  $f(x+1)+2$  为奇函数——求得  $f(x)$  图象的对称中心.

**【重点考点】函数的奇偶性、图象的对称中心**

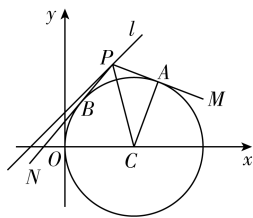
**【深度解析】** 因为  $f(x+1)+2=(x+1)^3-3(x+1)^2+2=x^3-3x$  (提示:  $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ), 定义域为  $\mathbf{R}$ , 又  $f(-x+1)+2=(-x+1)^3-3(-x+1)^2+2=-x^3+3x$  (提示:  $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ), 所以  $y=f(x+1)+2$  为奇函数, 所以  $f(x)=x^3-3x^2$  图象的对称中心为  $(1, -2)$ .

16.  $\sqrt{14}$ 

**思路导引** 判断直线  $l$  与圆  $C$  的位置关系——设圆的切线为  $PM, PN$   $\xrightarrow{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \leq 0}$   $45^\circ \leq \angle MPC < 90^\circ$ ——求出  $|PC|$  的取值范围  $\xrightarrow{\text{勾股定理}}$  求出  $|EF|$  的最大值

**【重难点考点】直线与圆的位置关系、向量的夹角**

**【深度解析】** 由圆  $C$  的方程知, 圆心为  $C(2, 0)$ , 半径为 2. 因为圆心  $C$  到直线  $l$  的距离  $d = \frac{|2-0+11|}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 2$ , 所以直线  $l$  与圆  $C$  相离. 从直线上的点向圆上的点连线成角, 当且仅当两条线为切线时,  $\angle APB$  最大. 如图, 不妨设两切线为  $PM, PN$ , 由  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \leq 0$  知  $\angle APB \geq 90^\circ$ , 即  $45^\circ \leq \angle MPC < 90^\circ$ , 所以  $\sin \angle MPC = \frac{|AC|}{|PC|} = \frac{2}{|PC|} \geq \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 解得  $|PC| \leq 2\sqrt{2}$ , 所以在直线  $l$  上, 当  $|EF|$  最大时, 点  $E, F$  到圆心的距离为  $2\sqrt{2}$ , 所以线段  $EF$  长度的最大值为  $2\sqrt{(2\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{14}$ .



**方法速记** 圆中与角度有关的最值问题: (1) 圆上两点  $A, B$  与圆外一点  $P$ , 当  $PA, PB$  均为切线时,  $\angle APB$  最大; (2) 圆上一点  $A$ 、圆心  $C$  与圆外一点  $P$ , 当  $PA$  为切线时,  $\angle APC$  最大; (3) 圆外两点  $P, Q$ , 圆上一点  $A$ , 当  $PA$  为切线时,  $\angle APQ$  最大 (或最小).

## 17. 【基础考点】构造法求数列的通项公式、等比数列与等差数列的通项公式、累乘法与错位相减法的应用

**【解】** 选①, 由  $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$  得  $a_{n+1} - 2a_n = 2(a_n - 2a_{n-1})$ ,

故  $\{a_{n+1} - 2a_n\}$  是公比为 2 的等比数列,

则  $a_{n+1} - 2a_n = (a_2 - 2a_1) \cdot 2^{n-1} = 2^n$ , (2 分)

即  $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2}$ , 故  $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$  是公差为  $\frac{1}{2}$  的等差数列,

则  $\frac{a_n}{2^n} = \frac{1}{2} + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n$ , 即  $a_n = n \cdot 2^{n-1}$ . (4 分)

选②, 由  $a_1 = 1$  及  $na_{n+1} = 2(n+1)a_n$  得  $a_n \neq 0$ , 则  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2(n+1)}{n}$ ,

当  $n \geq 2$  时,  $\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} = \frac{2 \cdot n}{n-1} \cdot \frac{2 \cdot (n-1)}{n-2} \cdots \frac{2 \cdot 2}{1}$ , (2 分)

化简得  $\frac{a_n}{a_1} = n \cdot 2^{n-1}$ , 即  $a_n = n \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$ ,

当  $n=1$  时,  $a_1=1$  也满足上式, 故  $a_n = n \cdot 2^{n-1}$ . (4 分)

选③, 由  $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4} + \cdots + \frac{a_n}{2^{n-1}} = \frac{n^2+n}{2}$  (1), 得

当  $n \geq 2$  时,  $a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{4} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2^{n-2}} = \frac{(n-1)^2+n-1}{2}$  (2), (2 分)

由 (1)-(2) 得  $\frac{a_n}{2^{n-1}} = n$ , 即  $a_n = n \cdot 2^{n-1} (n \geq 2)$ ,

当  $n=1$  时,  $a_1=1$  也满足上式, 故  $a_n = n \cdot 2^{n-1}$ . (4 分)

因此,  $S_n = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + n \cdot 2^{n-1}$ ,

$2S_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n$ , (6 分)

两式相减得  $-S_n = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n$ , (8 分)

化简得  $S_n = -\frac{1-2^n}{1-2} + n \cdot 2^n = (n-1) \cdot 2^n + 1$ . (10 分)

## 18. 【经典考点】诱导公式、二倍角公式、三角形的周长范围

**【解】** (1)  $f(x) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(2x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ . (3 分)

(在应用诱导公式时, “符号看象限”的含义是: 把角  $\alpha$  看作锐角, 不考虑角  $\alpha$  所在象限, 看  $\frac{n\pi}{2} \pm \alpha (n \in \mathbf{Z})$  是第几象限角, 从而得到等式右边是正号还是负号)

因为  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ ,

所以  $f(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2} = -1$ . (4 分)

## 一题多解

(1) 因为  $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ , 所以  $x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  或  $x + \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , 即  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  或  $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . (2 分)

当  $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  时,

$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -\sin\left(\pi + 4k\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6} = -1$ ;

当  $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  时, 同理  $f(x) = -1$ . 综上,  $f(x) = -1$ . (4 分)

(2) 由 (1) 得  $f(A) = -\sin\left(2A - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(A + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos^2\left(A + \frac{\pi}{6}\right) -$

$$1+\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{而 } f(A) = -1, \text{ 即 } 2\cos^2\left(A+\frac{\pi}{6}\right) - 1 + \cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right) = -1,$$

$$\text{故 } \cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right) = 0 \text{ 或 } \cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\text{由 } 0 < A < \frac{\pi}{2}, \text{ 得 } \frac{\pi}{6} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}, \text{ 则 } A = \frac{\pi}{3}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{由正弦定理得 } \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} = 2, \text{ 故 } b = 2\sin B, c = 2\sin C,$$

$$\text{则 } \triangle ABC \text{ 的周长 } l = a + b + c = \sqrt{3} + 2(\sin B + \sin C) = \sqrt{3} + 2[\sin B + \sin(B+A)] = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right). \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } \triangle ABC \text{ 为锐角三角形, 所以 } B \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right), \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right) \in \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right], \text{ 故 } \triangle ABC \text{ 的周长的取值范围为 } (\sqrt{3}+3, 3\sqrt{3}]. \quad (12 \text{ 分})$$

### 19. 【经典题型】线面垂直的判定定理与性质定理、面面垂直的性质、直线与平面所成角、空间向量的应用

(1) 【证明】如图所示, 取  $AB$  的中点  $O$ , 连接  $OP, OC$ .

依题意可知,  $AB=BC, AD \parallel BC, \angle BAD=120^\circ$ ,

故  $\angle ABC=60^\circ, \triangle ABC$  为正三角形,  $\therefore AB \perp OC$ . (2 分)

又  $AB \perp PC, OC \cap PC=C, PC \subset \text{平面 } POC, OC \subset \text{平面 } POC$ ,

$\therefore AB \perp \text{平面 } POC$ . 又  $PO \subset \text{平面 } POC$ ,

$\therefore AB \perp PO, \therefore PA=PB$ . (4 分)

(2) 【解】由 (1) 可知  $PO \perp AB, \therefore \text{平面 } PAB \perp \text{平面 } ABCD$ , 平面  $PAB \cap \text{平面 } ABCD=AB, PO \subset \text{平面 } PAB, \therefore PO \perp \text{平面 } ABCD$ ,

故以  $\vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OP}$  的方向为  $x, y, z$  轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系.

设  $OP=\lambda, \lambda>0$ , 则  $B(1, 0, 0), A(-1, 0, 0), C(0, \sqrt{3}, 0), P(0, 0, \lambda), D(-3, 2\sqrt{3}, 0), \therefore \vec{BC}=(-1, \sqrt{3}, 0), \vec{BP}=(-1, 0, \lambda), \vec{AC}=(1, \sqrt{3}, 0), \vec{AP}=(1, 0, \lambda)$ . (6 分)

设平面  $PBC$  的法向量为  $m=(x, y, z)$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{BC} \cdot m = 0, \\ \vec{BP} \cdot m = 0, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} -x + \sqrt{3}y = 0, \\ -x + \lambda z = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } x=3, \text{ 则 } y=\sqrt{3}, z=\frac{3}{\lambda}, \therefore m=\left(3, \sqrt{3}, \frac{3}{\lambda}\right).$$

设平面  $PAC$  的法向量为  $n=(a, b, c)$ ,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{AC} \cdot n = 0, \\ \vec{AP} \cdot n = 0, \end{cases} \text{ 可得 } \begin{cases} a + \sqrt{3}b = 0, \\ a + \lambda c = 0, \end{cases}$$

$$\text{令 } a=3, \text{ 则 } b=-\sqrt{3}, c=-\frac{3}{\lambda}, \text{ 则 } n=\left(3, -\sqrt{3}, -\frac{3}{\lambda}\right).$$

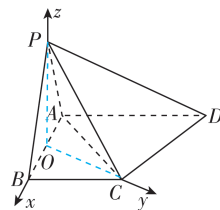
$$\text{依题意可得 } \cos \langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m||n|} = \frac{6 - \frac{9}{\lambda^2}}{\sqrt{12 + \frac{9}{\lambda^2}} \times \sqrt{12 + \frac{9}{\lambda^2}}} = \frac{1}{5},$$

$$\text{解得 } \lambda = \sqrt{3}, \text{ 即 } OP = \sqrt{3}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{即平面 } PBC \text{ 的法向量为 } m=(3, \sqrt{3}, \sqrt{3}), \vec{PD}=(-3, 2\sqrt{3}, -\sqrt{3}),$$

设直线  $DP$  与平面  $PBC$  所成角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{PD}, m \rangle| = \frac{|\vec{PD} \cdot m|}{|\vec{PD}||m|} = \frac{|-9+6-3|}{2\sqrt{6} \times \sqrt{15}} = \frac{\sqrt{10}}{10}. \quad (12 \text{ 分})$$



### 20. 【经典考点】频率分布直方图、平均数、分层抽样、离散型随机变量的分布列及数学期望、独立性检验思想

【解】(1) 由题意知  $100 \times (0.0015 + a + 0.0025 + 0.0015 + 0.0010) = 1$ ,

(在频率分布直方图中所有矩形的面积之和等于1)

解得  $a=0.0035$ , (2 分)

估计该校学生分数的平均数为  $500 \times 0.15 + 600 \times 0.35 + 700 \times 0.25 + 800 \times 0.15 + 900 \times 0.10 = 670$ . (4 分)

(2) 由题意, 从  $[550, 650)$  中抽取 7 人, 从  $[750, 850)$  中抽取 3 人, 随机变量  $X$  的所有可能取值有 0, 1, 2, 3.

$$P(X=k) = \frac{C_3^k C_7^{3-k}}{C_{10}^3} \quad (k=0, 1, 2, 3),$$

所以随机变量  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3
$P$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$

则随机变量  $X$  的数学期望  $E(X) = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{21}{40} + 2 \times \frac{7}{40} + 3 \times \frac{1}{120} =$

$$\frac{9}{10}. \quad (8 \text{ 分})$$

(3) 由题可知, 样本中男生 40 人, 女生 60 人, 属于“高分选手”的有 25 人, 其中女生 10 人, 得出以下  $2 \times 2$  列联表:

	属于“高分选手”	不属于“高分选手”	合计
男生	15	25	40
女生	10	50	60
合计	25	75	100

$$\text{所以 } K^2 = \frac{100 \times (15 \times 50 - 10 \times 25)^2}{40 \times 60 \times 25 \times 75} = \frac{50}{9} \approx 5.556 > 5.024,$$

所以有 97.5% 的把握认为该校学生属于“高分选手”与性别有关. (12 分)

### 21. 【思路导引】

(1) 由焦点坐标求出  $c$   $\xrightarrow{\text{双曲线的定义}}$  两点间的距离公式  $\rightarrow$  求出  $a$

$$\xrightarrow{b^2=c^2-a^2} \text{ 求出 } b \rightarrow \text{ 写出双曲线的方程;}$$

(2) 根据对称性设出点  $A, B$  的坐标  $\rightarrow$  设出直线  $FA, FB$  的方程  $\rightarrow$  联立双曲线的方程  $\xrightarrow{\text{根与系数的关系}}$  求点  $C, D$  的坐标  $\xrightarrow{C, N, D \text{ 三点共线}}$  建立方程, 化简求出直线  $l$  的斜率

【重难点考】双曲线的定义及方程、直线与双曲线的位置关系

【解】(1) 易知  $c = 2$ ,  $2a = \sqrt{(3+2)^2 + (\sqrt{2}-0)^2} - \sqrt{(3-2)^2 + (\sqrt{2}-0)^2} = 2\sqrt{3}$ ,

(在应用双曲线的定义时,一定要先判断点位于双曲线的哪一支,从而去掉绝对值符号)

故  $a = \sqrt{3}$ ,  $b = 1$ .

故双曲线  $E$  的标准方程为  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ . (4分)

(2) 设  $A(x_1, y_1)$ , 则  $B(-x_1, -y_1)$ ,

设直线  $FA$  的方程为  $x = my - 2$  ( $m = \frac{x_1+2}{y_1}$ ), 直线  $FB$  的方程为  $x = ny - 2$  ( $n = \frac{-x_1+2}{-y_1}$ ).

(下面联立直线与双曲线的方程,利用根与系数的关系求点  $C, D$  的坐标)

$$\text{由} \begin{cases} x = my - 2, \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (m^2 - 3)y^2 - 4my + 1 = 0, \quad (6 \text{分})$$

$$\text{设 } C(x_c, y_c), D(x_d, y_d), \text{ 得 } y_1 y_c = \frac{1}{m^2 - 3} = \frac{1}{\left(\frac{x_1+2}{y_1}\right)^2 - 3},$$

$$\text{即 } y_c = \frac{y_1}{x_1^2 + 4x_1 + 4 - 3y_1^2},$$

$$\because x_1^2 - 3y_1^2 = 3, \therefore y_c = \frac{y_1}{7 + 4x_1}, x_c = \frac{y_1}{7 + 4x_1} \cdot \frac{x_1 + 2}{y_1} - 2 = \frac{-12 - 7x_1}{7 + 4x_1}, \quad (8 \text{分})$$

$$\text{同理可得, } y_d = \frac{-y_1}{7 - 4x_1}, x_d = \frac{-12 + 7x_1}{7 - 4x_1}.$$

(下面利用三点共线知识建立方程求斜率)

$\because$  直线  $CD$  经过点  $N(0, -1)$ ,  $\therefore C, D, N$  三点共线,

$$\text{即 } \overrightarrow{CN} \parallel \overrightarrow{DN}, \text{ 则有 } x_d(y_c + 1) = x_c(y_d + 1), \quad (10 \text{分})$$

(已知两向量共线,求某些参数的取值时,则利用“若  $\mathbf{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\mathbf{b} = (x_2, y_2)$ , 则  $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$  的充要条件是  $x_1 y_2 = x_2 y_1$ ”)

$$\therefore \frac{-12 + 7x_1}{7 - 4x_1} \left( \frac{y_1}{7 + 4x_1} + 1 \right) = \frac{-12 - 7x_1}{7 + 4x_1} \left( \frac{-y_1}{7 - 4x_1} + 1 \right),$$

$$\text{化简得 } (-12 + 7x_1)(y_1 + 7 + 4x_1) = (-12 - 7x_1)(-y_1 + 7 - 4x_1),$$

$$\text{即 } 12y_1 = x_1, \text{ 故 } k = \frac{y_1}{x_1} = \frac{1}{12}. \quad (12 \text{分})$$

一题多解 (2) 设  $A(x_1, y_1)$ , 则  $B(-x_1, -y_1)$ , 设直线  $FA$  的方程为  $x = my - 2$  ( $m = \frac{x_1+2}{y_1}$ ), 直线  $FB$  的方程为  $x = ny - 2$  ( $n = \frac{-x_1+2}{-y_1}$ ).

$$\text{由} \begin{cases} x = my - 2, \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (m^2 - 3)y^2 - 4my + 1 = 0, \quad (6 \text{分})$$

$$\text{设 } C(x_c, y_c), D(x_d, y_d), \text{ 得 } y_1 y_c = \frac{1}{m^2 - 3} = \frac{1}{\left(\frac{x_1+2}{y_1}\right)^2 - 3},$$

$$\text{即 } y_c = \frac{y_1}{x_1^2 + 4x_1 + 4 - 3y_1^2}.$$

$$\because x_1^2 - 3y_1^2 = 3, \therefore y_c = \frac{y_1}{7 + 4x_1}, \text{ 同理可得, } y_d = \frac{-y_1}{7 - 4x_1}. \quad (8 \text{分})$$

设直线  $CD$  的方程为  $x = t(y + 1)$ ,

$$\text{由} \begin{cases} x = t(y + 1), \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (t^2 - 3)y^2 + 2t^2 y + t^2 - 3 = 0, \text{ 则 } y_c y_d = 1, \quad (10 \text{分})$$

$$\text{即 } \frac{y_1}{7 + 4x_1} \cdot \frac{-y_1}{7 - 4x_1} = 1, \text{ 化简得 } y_1^2 = 16x_1^2 - 49.$$

$$\because x_1^2 - 3y_1^2 = 3, \text{ 解得 } x_1^2 = \frac{144}{47}, y_1^2 = \frac{1}{47}, \text{ 故 } k = \sqrt{\frac{y_1^2}{x_1^2}} = \frac{1}{12}. \quad (12 \text{分})$$

方法速记 直线与圆锥曲线的位置关系问题常用思路:联立直线与圆锥曲线方程,写出根与系数的关系,解得题目中其他条件,整理方程,可求得参数的值或者参数之间的等量关系,也可整理函数关系,求解范围.

22. 思路导引 (1) 求函数的导函数  $\rightarrow$  讨论导函数的正负区间  $\rightarrow$  判断函数的单调性  $\rightarrow$  求出函数的极值;

(2) 不等式变形为  $\frac{\ln x}{x} - ax \leq b \rightarrow$  设函数  $F(x) = \frac{\ln x}{x} - ax \rightarrow$  求导研究函数  $F(x)$  的单调性  $\rightarrow$  求  $F(x)_{\max} \rightarrow$  根据  $b \geq F(x)_{\max}$  得到  $a + 2b$  的表达式  $\rightarrow$  令  $H(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{4 \ln x - 2}{x} \rightarrow$  利用导数求出  $H(x)_{\min} \rightarrow$  求得结果

【重难点型】函数极值、最值与导数的关系,根据不等式恒成立求参数

$$\text{【解】(1) 因为 } y = \frac{\ln x - \frac{x^2}{2e}}{x}, \text{ 所以 } y' = \frac{1 - \frac{x^2}{2e} - \ln x}{x^2}, x > 0, \quad (1 \text{分})$$

(由于导函数的零点不易求出,可考虑构造函数,根据新函数的单调性,求出其零点)

$$\text{设 } g(x) = 1 - \frac{x^2}{2e} - \ln x, x > 0, \text{ 因为 } g(x) \text{ 单调递减,且 } g(\sqrt{e}) = 0,$$

所以  $g(x)$  在  $(0, \sqrt{e})$  上大于 0, 在  $(\sqrt{e}, +\infty)$  上小于 0,

所以原函数在  $(0, \sqrt{e})$  上单调递增, 在  $(\sqrt{e}, +\infty)$  上单调递减, 且  $\frac{f(\sqrt{e})}{\sqrt{e}} = 0, \quad (3 \text{分})$

所以  $y = \frac{f(x)}{x}$  的极大值为 0, 无极小值. (4分)

$$(2) \text{ 原不等式 } \ln x - ax^2 \leq bx \text{ 等价于 } \frac{\ln x}{x} - ax \leq b,$$

( $g(x) \leq a$  恒成立  $\Leftrightarrow g(x)_{\max} \leq a$ , 下面构造函数,利用导数求新函数的最大值)

$$\text{令 } F(x) = \frac{\ln x}{x} - ax, F'(x) = \frac{-ax^2 - \ln x + 1}{x^2}, x > 0,$$

因为  $a > 0$ , 所以一定存在  $x_0 \in (0, +\infty)$ , 使得  $F'(x_0) = 0$ , 即  $a = \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2}, \quad (5 \text{分})$

(注意虚拟零点法的应用)

所以  $F(x) = \frac{\ln x}{x} - ax$  在  $(0, x_0)$  上单调递增, 在  $(x_0, +\infty)$  上单调递



减,所以  $F(x)_{\max} = F(x_0) = \frac{\ln x_0}{x_0} - ax_0 = \frac{2\ln x_0 - 1}{x_0}$ ,

所以  $2b \geq \frac{4\ln x_0 - 2}{x_0}$ , 所以  $a + 2b \geq \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} + \frac{4\ln x_0 - 2}{x_0}$ . (8分)

(下面构造函数,利用导函数求新函数的最小值)

令  $H(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{4\ln x - 2}{x} = \frac{1 - \ln x + 4x\ln x - 2x}{x^2}$ , 则  $H'(x) = \frac{-4x\ln x + 2\ln x + 6x - 3}{x^3} = \frac{(1 - 2x)(2\ln x - 3)}{x^3}$ ,

所以  $H(x)$  在  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$  上单调递减, 在  $(\frac{1}{2}, e^{\frac{3}{2}})$  上单调递增,

当  $x > e^{\frac{3}{2}}$  时,  $1 - \ln x + 4x\ln x - 2x = (2\ln x - 1)(2x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} > 0$ , (10分)

因此当  $x > e^{\frac{3}{2}}$  时,  $H(x) > 0$ , 则  $H(x)_{\min} = H(\frac{1}{2}) = -4\ln 2$ ,

所以  $a + 2b$  的最小值为  $-4\ln 2$ . (12分)

## 10 2023 江苏省南通市高三联考调研测试

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	A	C	B	C	A	D	BC	BCD
题号	11	12	13		14		15		16	
答案	AC	ACD	-1		$(-\infty, \frac{1}{2}]$		$\frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$		2	

### 1. C 【基础考点】集合的补集的定义

【深度解析】因为  $\complement_U M = \{1, 3, 5\}$ , 所以  $M = \{2, 4, 6\}$ , 故选 C.

### 2. D 【基础考点】复数的运算、虚部的概念

【深度解析】由题意, 得  $z = \frac{1+i}{i} = \frac{i(1+i)}{i^2} = 1-i$ , 其虚部为  $-1$ , 故选 D.

### 3. A 【经典考点】平面向量的线性运算

【深度解析】由  $\vec{AD} = 2\vec{DB}$ , 得  $\vec{CD} - \vec{CA} = 2(\vec{CB} - \vec{CD})$ , 整理得  $\vec{CB} = \frac{3}{2}\vec{CD} - \frac{1}{2}\vec{CA}$ , 故选 A.

### 4. C 【新趋考点】扇形的面积公式、圆锥的性质

【深度解析】设圆锥母线长为  $l$ , 侧面积较小的圆锥半径为  $r$ , 侧面积较大的圆锥半径为  $R$ , 它们的高分别为  $h, H$ , 则  $\pi rl : (\pi Rl) = 1 : 2$  (提示:  $S = \frac{1}{2}lR = \frac{1}{2}\alpha R^2$ , 其中  $R$  是扇形的半径,  $l$  是弧长,  $\alpha (0 < \alpha < 2\pi)$  为圆心角,  $S$  是扇形面积), 得  $R = 2r$ . 因为两圆锥的侧面展开图恰好拼成一个圆, 所以  $2\pi = \frac{r+R}{l} \cdot 2\pi$ , 得  $l = 3r$ , 则由勾股定理, 得  $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r$ , 同理可得  $H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{5}r$ , 所以  $\frac{h}{H} = \frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{5}r} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$ , 故选 C.

### 5. B 【常考考点】任意角的三角函数值、二倍角公式

【深度解析】由  $A, B$  两点均在角  $\alpha$  的终边上可得  $a, b$  同号 (关键: 根据条件判断出  $a, b$  同号是求解问题的关键), 且  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} =$

$\frac{2}{\sqrt{b^2 + 4}}$ , 化简得  $b = 2a$  ①. 又  $|a - b| = \frac{\sqrt{5}}{5}$  ②, 联立 ① ② 解得  $\begin{cases} a = \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ b = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$  或  $\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \\ b = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ , 所以  $\cos^2 \alpha = \frac{1}{a^2 + 1} = \frac{5}{6}$ , 所以  $\cos 2\alpha =$

$2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{3}$ , 故选 B.

### 6. C 【经典考点】双曲线的方程

【深度解析】根据焦点坐标可判断双曲线的焦点在  $y$  轴上, 则双曲线方程  $7kx^2 - ky^2 = 7$  可化为  $\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{k} = 1$ . 因为双曲线的一个焦点为  $(0, -5)$ , 所以  $-\frac{7}{k} + \left(-\frac{1}{k}\right) = (-5)^2$ , 解得  $k = -\frac{8}{25}$ , 故选 C.

### 7. A 【热门考点】等差数列的应用及通项公式

【深度解析】第  $i$  行第  $j$  列的数记为  $A_{ij}$ , 那么每一组  $i$  与  $j$  的组合就是表中一个数. 因为第一行数组成的数列  $A_{1j} (j = 1, 2, \dots)$  是以 2 为首项, 公差为 1 的等差数列, 所以  $A_{1j} = 2 + (j-1) \times 1 = j+1$ , 所以第  $j$  列数组成的数列  $A_{ij} (i = 1, 2, \dots)$  是以  $j+1$  为首项, 公差为  $j$  的等差数列, 所以  $A_{ij} = (j+1) + (i-1) \times j = ij + 1$ . 令  $A_{ij} = ij + 1 = 41$ , 则  $i = 1, j = 40; i = 2, j = 20; i = 4, j = 10; i = 5, j = 8; i = 8, j = 5; i = 10, j = 4; i = 20, j = 2; i = 40, j = 1$ , 所以 41 出现的次数为 8, 故选 A.

### 8. D

思路导引 由已知条件得  $f'(x) = 0$  有两个不相等的正实根  $\rightarrow$  通过求导研究  $f'(x)$  的单调性  $\rightarrow$  利用隐零点得  $f'(x)_{\min} = f'(x_0) < 0 \rightarrow$  构造函数, 根据  $x_0$  的范围求  $m$  的范围

### 【重难点型】根据极值点个数求参数的范围

【深度解析】由题意, 得函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = xe^x + m(\ln x + 1 + x - 1) = xe^x + m(\ln x + x) = 0$  有两个不相等的正实根. 当  $m \geq 0$  时,  $f'(x) = xe^x + m(\ln x + x)$  单调递增,  $f'(x) = 0$  至多有一个正实根, 不合题意, 所以  $m < 0$ . 令  $g(x) = f'(x)$ , 则  $g'(x) = (x+1)e^x + m\left(\frac{1}{x} + 1\right) = (x+1)\left(e^x + \frac{m}{x}\right)$ , 当  $x > 0, m < 0$  时,  $x+1 > 0$ , 函数  $t(x) = e^x + \frac{m}{x}$  单调递增 (提示: 函数  $y = e^x$  与  $y = \frac{m}{x} (m < 0)$  均为增函数, 增