

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	C	C	D	B	A	B	D	AD	ACD
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	ABD	ABC	-12	$\frac{3}{2}n(n+1)$	$3x+3y-13=0$	$\left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right] \cup \left\{\frac{e^3}{9}\right\}$				

1. B 【基础考点】集合的基本运算

【深度解析】根据对数型函数的定义域可得 $P = \{x \in \mathbf{R} | x < 3\} = (-\infty, 3)$, 由指数函数的值域可得 $Q = \{y \in \mathbf{R} | 0 < y < 2^3\} = (0, 8)$, 所以 $P \cap Q = (0, 3)$. 故选 B.

▶ **快解** 因为 Q 中的元素为正数, $(P \cap Q) \subseteq Q$, 所以可排除 A 选项和 D 选项; 又因为 $1 \in P, 1 \in Q$, 所以 $1 \in (P \cap Q)$, 可排除 C 选项, 故选 B.

2. C 【基础考点】复数的模

【深度解析】设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 由题意得 $(a-1)^2 + b^2 = a^2 + (b+1)^2 = (a-5)^2 + b^2$, 解得 $a = 3, b = -3$, 所以 $|z| = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$, 故选 C.

▶ **一题多解** 根据复数的几何意义, 因为 $|z-5| = |z-1|$, 即复数 z 在复平面内对应的点到点 $(5, 0), (1, 0)$ 的距离相等, 所以复数 z 的实部为 3. 又 $|z+i| = |z-1|$, 即复数 z 在复平面内对应的点到点 $(0, -1), (1, 0)$ 的距离相等, 所以复数 z 在复平面内对应的点一定在直线 $y = -x$ 上, 所以 $z = 3-3i$, 所以 $|z| = 3\sqrt{2}$, 故选 C.

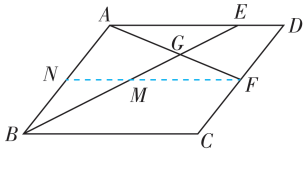
3. C 【新趋势考点】相互独立事件的概率和古典概型

【深度解析】投掷两个质地均匀的正方体骰子, 所有可能的结果有 36 种, 其中满足事件 A 的有 $\{1, 3\}, \{3, 1\}$, 共 2 种; 满足事件 B 的有 $\{3, 6\}, \{6, 3\}$, 共 2 种; 满足事件 C 的有 $\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 3\}, \{4, 3\}, \{5, 3\}, \{6, 3\}, \{3, 1\}, \{3, 2\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{3, 6\}$, 共 11 种. $\therefore P(A) = P(B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}, P(C) = \frac{11}{36}$, C 正确; D 错误.

$\because P(AB) = 0 \neq P(A)P(B), \therefore A, B$ 不是相互独立事件(注意: 两个事件是相互独立事件的条件), A 错误. \because 事件 A 和事件 C 可能同时发生, $\therefore A, C$ 不是互斥事件, B 错误. 故选 C.

4. D 【经典题型】平面向量的线性运算

【深度解析】如图, 过点 F 作 FN 平行于 BC, 交 BE 于点 M, 交 AB 于点 N. 因为 $DF = FC$, 所以 F 为 DC 的中点, 所以 $MN \parallel AE$ 且 $MN = \frac{1}{2}AE =$



$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}AD = \frac{3}{8}AD$. 因为 $NF = AD$, 所以 $FM = NF - MN = AD - \frac{3}{8}AD =$

$\frac{5}{8}AD$. 由 $\triangle AEG \sim \triangle FMG$, 得 $\frac{AG}{FG} = \frac{AE}{FM} = \frac{\frac{1}{2}AE}{\frac{5}{8}AD} = \frac{6}{5}$, 所以 $\vec{AG} =$

$$\frac{6}{11}\vec{AF} = \frac{6}{11}(\vec{AD} + \vec{DF}) = \frac{6}{11}\left(\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right) = \frac{3}{11}\vec{AB} + \frac{6}{11}\vec{AD},$$

即 $\vec{AG} = \frac{3}{11}\vec{a} + \frac{6}{11}\vec{b}$. 故选 D.

5. B 【热门考点】三棱锥的外接球问题

【深度解析】由正弦定理得, $\triangle ABC$ 外接圆直径 $2r = \frac{3}{\sin \frac{\pi}{6}} = 6$, 得

$r = 3$. 设球心到平面 ABC 的距离为 d , 则 $d = \frac{1}{2}PA = 3$, 所以三棱锥 $P-ABC$ 的外接球半径 $R = \sqrt{d^2 + r^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$, 故选 B.

▶ **关键点拨** 在解决多面体与球的切接问题时, 关键是确定好球心的位置. 几何体的内切球的本质是球心到多面体各个面的距离相等且都为球的半径, 几何体的外接球的本质是球心到几何体各个顶点的距离相等且都为球的半径.

6. A 【高频考点】三角函数的最值

【深度解析】因为 $\omega > 0$, 所以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $\omega x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$, 由 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上恰好取到一次最大值与一次最小值可得 $\frac{3\pi}{2} < \frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{2}$, 解得 $4 < \omega \leq 7$. 所以 ω 的取值范围为 $(4, 7]$. 故选 A.

7. B 【热门考点】斐波那契数列和取整函数

【深度解析】依题意, 不妨令 $A = B = 1$, 则 $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, 易得 $a_1 = 1, a_2 = 3$, 故可得 $a_3 = a_1 + a_2 = 4, a_4 = a_2 + a_3 = 7, a_5 = a_3 + a_4 = 11$, 故 $11 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5$. 因为 $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$, 所以 $-1 < \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5 < 0$, 所以 $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 = 11 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5 \in (11, 12)$, 所以 $\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^5\right] = 11$. 故选 B.

8. D

▶ **思路导引** 构造函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x} \rightarrow ae = f(2), be = f(\sqrt{e}), ce = f(e^{\frac{4}{3}}) \rightarrow$ 利用导数判断出 $f(x)$ 的单调性可得答案.

【重难点型】应用导数比较大小

【深度解析】依题意 $ae = \frac{2}{\ln 2}$, $be = 2\sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{\ln \sqrt{e}}$, $ce = \frac{3e^{\frac{4}{3}}}{4} = \frac{e^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}$

$\frac{e^{\frac{4}{3}}}{\ln e^{\frac{4}{3}}}$, 所以构造函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $x > 1$, 则 $f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$, 所以 $f(x)$

在 $(1, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增. 因为 $1 < \sqrt{e} < 2 < e$, 所以 $f(\sqrt{e}) > f(2)$, 即 $be > ae$, 所以 $b > a$. 因为 $ae = \frac{2}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 4} = f(4)$, $4 > e^{\frac{4}{3}} > e$, 所以 $ae > ce$, 所以 $a > c$. 综上可得 $c < a < b$, 故选 D.

一题多解

构造函数 $g(x) = \frac{e^x}{x}$, 易得 $ae = g(\ln 2)$, $be =$

$g\left(\frac{1}{2}\right)$, $ce = g\left(\frac{4}{3}\right)$ 且 $g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$.

因为当 $0 < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > 1$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增. 易知 $1 =$

$\ln e > \ln 2 > \frac{1}{2} = \ln \sqrt{e}$, 所以 $a < b$. 又 $ae = \frac{2}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 4} = g(\ln 4)$, $1 < \frac{4}{3} <$

$\ln 4$, 所以 $a > c$. 综上可得 $c < a < b$, 故选 D.

9. AD 【基础考点】样本的数字特征

【深度解析】依题意可得, 平均数 $\bar{x} = \frac{100 \times 5 + 100 \times 7}{200} = 6$, 所以 A 选项

正确, B 选项不正确; 方差 $s^2 = \frac{100}{200} [9 + (5-6)^2] + \frac{100}{200} [16 + (7-6)^2] = 13.5$, 所以 D 选项正确, C 选项不正确. 故选 AD.

10. ACD 【重难点型】异面直线垂直、直线与平面所成角以及最值问题

【深度解析】对于 A 选项, 如图, 连接 D_1A ,

C_1B , 则 $B_1C \perp$ 平面 C_1BAD_1 , 又 $AP \subset$ 平面 C_1BAD_1 , 所以 $AP \perp B_1C$, 所以 A 选项正确;

对于 B 选项, 若 $PD \perp BC$, 又 $DD_1 \perp BC$, $DD_1 \cap PD = D$, 则 $BC \perp$ 平面 DD_1B , 显然与题

意矛盾, 所以 B 选项不正确; 对于 C 选项, 因为 $C_1D \perp$ 平面 A_1BCD_1 , 在 P 点运动过程中, 当 P 运动到 B 点

时, PC_1 与平面 A_1BCD_1 所成的角 θ 最小, 此时 $\sin \theta = \frac{\frac{1}{2}C_1D}{C_1B} =$

$\frac{1}{2}$, 所以 θ 的最小值是 $\frac{\pi}{6}$, 所以 C 选项正确; 对于 D 选项, $PC +$

$PD = PC + PA_1 \geq A_1C = 2\sqrt{3}$, 所以 D 选项正确. 故选 ACD.

11. ABD 【经典题型】三次函数的性质

【深度解析】对于 A 选项, 当 $b = d = 0$ 时, $f(x) = x^3 + x$ 为奇函数, 所以 A 选项正确.

对于 B 选项, 设函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 (m, n) , 则有 $f(2m - x) = 2n - f(x)$, 又因为 $f(2m - x) = (2m - x)^3 + b(2m - x)^2 + (2m - x) + d = -x^3 + (6m + b)x^2 - (12m^2 + 4mb + 1)x + 8m^3 + 4m^2b + 2m + d$, $2n - f(x) = -x^3 - bx^2 - x + 2n - d$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 6m + b = -b, \\ 12m^2 + 4mb + 1 = 1, \\ 8m^3 + 4m^2b + 2m + d = 2n - d, \end{cases} \quad \text{解得 } \begin{cases} m = -\frac{b}{3}, \\ n = \frac{2b^3 - 9b + 27d}{27}. \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(-\frac{b}{3}, \frac{2b^3 - 9b + 27d}{27}\right)$, 所以 B 选项

正确.

对于 C 选项, 因为 $f'(x) = 3x^2 + 2bx + 1$, x_1, x_2 为 $f(x)$ 的两个极值点, 所以 $x_1x_2 = \frac{1}{3}$, $x_1^2 + x_2^2 > 2x_1x_2 = \frac{2}{3}$ (提示: $x_1^2 + x_2^2$ 的取值范围转化

成通过 x_1, x_2 的值求解的问题), 所以 C 选项不正确;

对于 D 选项, 若 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调, 则有 $f'(x) = 3x^2 + 2bx + 1 \geq 0$ 恒成立, 所以 $\Delta = 4b^2 - 12 \leq 0$, 解得 $-\sqrt{3} \leq b \leq \sqrt{3}$, 所以 D 选项正确.

故选 ABD.

方法速记

任意一个三次多项式函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) 的图象都只有一个对称中心 $(x_0, f(x_0))$, 其中 x_0 是 $f''(x) = 0$ 的根, $f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导数, $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导数.

12. ABC

思路导引

A 选项: 根据双曲线的定义结合内切圆的性质整

理分析;

B 选项: 根据题意结合角平分线的定义分析运算;

C 选项: 联立方程 \rightarrow 利用根与系数关系求 $|y_1 - y_2|$, $|AB| \rightarrow$ 根据内切圆性质可得 $r = \frac{4a|y_1 - y_2|}{L} \rightarrow$ 代入运算分析;

D 选项: 根据题意用 $\tan \alpha$ 表示 $r_1, r_2 \rightarrow$ 结合 $y = x + \frac{1}{x}$ 的单调性 \rightarrow 求 $r_1 + r_2$ 的取值范围.

【热门考点】双曲线的几何性质以及焦点三角形的内切圆的性质

【深度解析】如图, 过点 I_1 分别作 AF_1, AF_2, F_1F_2 的垂线, 垂足分别为 D, E, F , 则 $|AD| = |AE|$, $|F_1D| = |F_1F|$, $|F_2E| = |F_2F|$.

对于 A 选项, $\because |AF_1| - |AF_2| = 2a$, $\therefore (|AD| + |DF_1|) - (|AE| + |EF_2|) = |F_1F| - |F_2F| = 2a$. 又 $\because |F_1F_2| = |F_1F| + |F_2F| = 2c$, $\therefore |F_1F| = a + c$, $\therefore |OF| = |F_1F| - |OF_1| = a$, 即 I_1 在直线 $x = a$ 上.

同理可得 I_2 在直线 $x = a$ 上, 故 A 选项正确.

对于 B 选项, $\because \angle I_1F_2A = \angle I_1F_2F_1$, $\angle I_2F_2B = \angle I_2F_2F_1$,

$\therefore \angle I_1F_2A + \angle I_2F_2B = \angle I_1F_2F_1 + \angle I_2F_2F_1 = \angle I_1F_2I_2$,

$\therefore \angle I_1F_2I_2 = \frac{\pi}{2}$. 又 $\because \frac{|I_1F|}{|F_2F|} = \frac{|F_2F|}{|I_2F|}$, $\therefore |I_1F| \cdot |I_2F| = |F_2F|^2$, 即

$r_1r_2 = (c - a)^2 = a^2$, $\therefore c = 2a$, 离心率 $e = \frac{c}{a} = 2$, 故 B 选项正确.

对于 C 选项, $\because c = 2a, c^2 = a^2 + b^2$, $\therefore b = \sqrt{3}a$, $\therefore F_2(2a, 0)$, 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$, 则直线 AB 的倾斜角 $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$. 设

直线 AB 的方程为 $x = my + 2a$, $m \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2,$

$y_2)$. 由 $\begin{cases} x = my + 2a, \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1, \end{cases}$ 消去 x 得 $(3m^2 - 1)y^2 + 12may + 9a^2 = 0$, $\therefore y_1 +$

$y_2 = -\frac{12ma}{3m^2 - 1}$, $y_1y_2 = \frac{9a^2}{3m^2 - 1}$, 则 $|y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1y_2} =$

$$\sqrt{\left(-\frac{12ma}{3m^2-1}\right)^2 - \frac{36a^2}{3m^2-1}} = \frac{6a\sqrt{m^2+1}}{1-3m^2},$$

$$|AB| = \sqrt{1+m^2} |y_1 - y_2| = \frac{6a(m^2+1)}{1-3m^2}.$$

则 $\triangle ABF_1$ 的周长 $L = |AF_1| + |BF_1| + |AB| = (|AF_2| + 2a) + (|BF_2| + 2a) + |AB| = 4a + 2|AB| = 4a + \frac{12a(m^2+1)}{1-3m^2} = \frac{16a}{1-3m^2}$. 设

$\triangle ABF_1$ 的内切圆半径为 r , 根据 $\triangle ABF_1$ 的面积可得 $\frac{1}{2}Lr = \frac{1}{2} \times$

$$2c \times |y_1 - y_2| = 2a |y_1 - y_2|, \text{ 则 } r = \frac{4a |y_1 - y_2|}{L} = \frac{24a^2 \sqrt{m^2+1}}{1-3m^2} = \frac{16a}{1-3m^2}.$$

$$\frac{3a\sqrt{m^2+1}}{2} \geq \frac{3}{2}a, \text{ 故 C 选项正确.}$$

对于 D 选项, 由题意不

妨设 $\angle I_1 F_2 F = \alpha$,

$$\therefore \theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$2\alpha + \theta = \pi,$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi - \theta}{2} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\text{令 } t = \tan \alpha \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right),$$

$$\text{则 } r_1 = |F_2 F| \tan \alpha = at,$$

$$r_2 = |F_2 F| \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{a}{t}, \therefore r_1 + r_2 = a \left(t + \frac{1}{t}\right).$$

又 $\because y = t + \frac{1}{t}$ 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right)$ 上单调递减, 在 $[1, \sqrt{3}]$ 上单调递增,

$$\therefore r_1 + r_2 = a \left(t + \frac{1}{t}\right) \in \left[2a, \frac{4\sqrt{3}}{3}a\right], \text{ 故 D 选项不正确.}$$

故选 ABC.

13. -12 【基础考点】二项式定理的应用

【深度解析】 $(y-2)(x-3)^4 = y(x-3)^4 - 2(x-3)^4$, 而 $2(x-3)^4$ 展开式无含 $x^3 y$ 的项, 所以含 $x^3 y$ 项就是 $y(x-3)^4$ 展开式中的项, 系数即 $(x-3)^4$ 展开式中含 x^3 的项的系数, 所以系数为 $C_4^1 \times (-3)^1 = -12$.

14. $\frac{3}{2}n(n+1)$ 【基础考点】等差、等比数列的基本运算

【深度解析】由题意设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $3a_n = a_{3n} \Rightarrow 3[a_1 + (n-1)d] = a_1 + (3n-1)d \Rightarrow a_1 = d$, 所以 $a_n = nd$. 因为 $(a_3 - 3)a_8 = a_4^2 \Rightarrow (3d - 3) \times 8d = (4d)^2 \Rightarrow d = 3$, 所以 $S_n = \frac{3}{2}n(n+1)$.

15. $3x+3y-13=0$ 【热门考点】直线与圆的位置关系

【深度解析】依题意可知, P, A, C, B 四点共圆, 且此圆以 PC 为直径, 方程为 $(x-4)(x-1) + (y-5)(y-2) = 0$, 即 $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 14 = 0$. 又圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$, 两式作差可得 $3x + 3y - 13 = 0$, 即直线 AB 的方程为 $3x + 3y - 13 = 0$.

一题多解 切点弦方程公式: $(4-1)(x-1) + (5-2)(y-2) = 4$, 化简得 $3x + 3y - 13 = 0$.

方法速记 (1) 圆的方程的“直径式”即 $A(a, b), B(c, d)$, 则以 AB 为直径的圆的方程为 $(x-a)(x-c) + (y-b)(y-d) = 0$;

(2) 若圆 $O_1: x^2 + y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$ 与圆 $O_2: x^2 + y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$ 相交, 则两圆的公共弦所在的直线方程为 $(D_2 - D_1)x + (E_2 - E_1)y + (F_2 - F_1) = 0$, 其中 $D_i^2 + E_i^2 - 4F_i > 0 (i=1, 2)$;

(3) 若点 $M(x_0, y_0)$ 在圆 $O: (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 外, 过点 M 引圆的两条切线, 切点分别为 M_1, M_2 , 则切点弦 (两切点的连线段) 所在直线的方程为 $(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) = r^2$.

$$16. \left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right] \cup \left\{\frac{e^3}{9}\right\}$$

思路导引 求导 $f'(x) \rightarrow$ 利用导数与函数极值的关系 \rightarrow 分类讨论 3 是否为极值点 \rightarrow 结合 $y = \frac{e^x}{x^2}$ 的图象性质 \rightarrow 求得 a 的取值范围.

【重难点型】函数的极值点及导数应用

【深度解析】因为 $f(x) = \frac{e^x}{x^3} - a \left(\frac{3}{x} + \ln x\right) (x > 0)$,

$$\text{所以 } f'(x) = \frac{(x-3)e^x}{x^4} - a \frac{x-3}{x^2} = \frac{(x-3)}{x^2} \left(\frac{e^x}{x^2} - a\right).$$

因为 $f(x)$ 只有一个极值点, 所以若 3 是极值点, 则 $\frac{e^x}{x^2} - a \geq 0$ 或 $\frac{e^x}{x^2} - a \leq 0$ 恒成立.

令 $g(x) = \frac{e^x}{x^2}, x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$, 所以当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > 2$ 时, $g'(x) > 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, 故 $g(x) \geq g(2) = \frac{e^2}{4}$, 所以 $a \leq \left(\frac{e^x}{x^2}\right)_{\min} = \frac{e^2}{4}$.

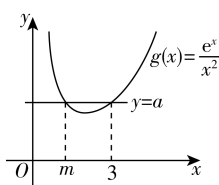
若 3 不是极值点, 则 3 是方程 $\frac{e^x}{x^2} - a = 0$ 的一个根, 且方程存在另一个根 $m (0 < m < 2)$,

此时 $a = \frac{e^3}{9}$, 当 $a = \frac{e^3}{9}$ 时, $f'(x) = \frac{(x-3)}{x^2}$.

$\left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^3}{9}\right)$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $0 < x < m$; 令

$f'(x) > 0$, 解得 $x > m$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, m)$ 上单调递减, 在 $(m, +\infty)$ 上单调递增, 满足题意.

综上所述, a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{e^2}{4}\right] \cup \left\{\frac{e^3}{9}\right\}$.



17. 【基础考点】正弦定理、余弦定理的应用以及等比数列概念

(1) 【证明】解法一: 通分化简可得 $\sin(B-A) \sin C + \sin^2 A = \sin A \sin C$, 则 $\sin(B-A) \sin(B+A) + \sin^2 A = \sin A \sin C$, (2 分)
即 $\sin^2 B \cos^2 A - \cos^2 B \sin^2 A + \sin^2 A = \sin A \sin C$,
即 $\sin^2 B (1 - \sin^2 A) - (1 - \sin^2 B) \sin^2 A + \sin^2 A = \sin A \sin C$,
整理得 $\sin^2 B = \sin A \sin C$, 由正弦定理, 得 $b^2 = ac$,
所以 a, b, c 成等比数列. (5 分)

解法二: 因为 $\frac{\sin B \cos A - \cos B \sin A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\sin C} = 1$, (2 分)

所以根据正弦定理和余弦定理得 $\frac{b \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - a \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}}{a} + \frac{a}{c} =$

1, 化简可得 $\frac{b^2-a^2}{ac} + \frac{a}{c} = 1$,

通分可得 $b^2 = ac$, 所以 a, b, c 成等比数列. (5分)

(2) 【解】由(1)可得 $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{a^2+c^2-ac}{2ac} \geq \frac{2ac-ac}{2ac} = \frac{1}{2}$,

所以 $0 < B \leq \frac{\pi}{3}$, 当且仅当 $a=c$, 即 $\triangle ABC$ 为正三角形时等号成立,

所以角 B 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$. (10分, 不写取等条件扣1分)

18. 【经典题型】数列的通项公式与裂项相消法求和

(1) 【解】当 $n=1$ 时, 可得 $a_1 = S_1 = 1$.

当 $n \geq 2$ 时, 由题意可得 $(S_n - S_{n-1})(S_n + S_{n-1}) = n$, 即 $S_n^2 - S_{n-1}^2 = n$,

所以 $S_n^2 = (S_n^2 - S_{n-1}^2) + \dots + (S_2^2 - S_1^2) + S_1^2 = n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$, 即 $S_n = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$,

经检验, 当 $n=1$ 时符合, 所以 $S_n = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}, n \in \mathbf{N}^*$. (4分)

所以当 $n \geq 2$ 时, $a_n = S_n - S_{n-1} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$,

经检验, 当 $n=1$ 时符合, 所以 $a_n = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} - \sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}, n \in \mathbf{N}^*$.

(6分, 不检验扣1分)

(2) 【证明】由(1)可得 $\frac{1}{S_n^2} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, (8分)

所以 $\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_2^2} + \dots + \frac{1}{S_n^2} = 2\left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 2$, 命题得证. (12分)

易错警示 已知 S_n 求通项 a_n 时, 先计算 $n=1$, 再计算 $n \geq 2$, 一定要验证二者是否统一. 若不能, 则必须写成分段函数形式

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n=1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

19. 【经典题型】直线与平面垂直的判定以及二面角的求解

(1) 【证明】如图, 取 BP 的中点 M , 连接 AM, CM . 易知 $AM \perp BP$ 且 $CM \perp BP$, $AM \cap CM = M$, 因此 $BP \perp$ 平面 ACM .

因为 $BP \subset$ 平面 $ABED$, 所以平面 $ACM \perp$ 平面 $ABED$.

又平面 $ACM \cap$ 平面 $ABED = AM$,

所以直线 AC 在平面 $ABED$ 内的射影即直线 AM ,

所以 $\angle CAM = \frac{\pi}{4}$. (1分)

因为在 $\triangle ACM$ 中, $AM = CM = \sqrt{3}$, 由余弦定理可得 $AC = \sqrt{6}$, 所以 $AC^2 = AM^2 + CM^2$, 所以 $AM \perp CM$. 所以 $CM \perp$ 平面 $ABED$.

因为 $PE \subset$ 平面 $ABED$, 所以 $CM \perp PE$. (3分)

在 $\triangle PDE$ 中, $PD = ED = 2$, $\angle PDE = \frac{2\pi}{3}$, 由余弦定理得 $PE = 2\sqrt{3}$.

又 $BP = 2$, $BE = 4$, 所以 $BP^2 + PE^2 = BE^2$, 即 $PE \perp BP$. (5分)

又 $CM \cap BP = M$, 所以 $PE \perp$ 平面 BCP . (6分)

(2) 【解】由(1)可知 MP, MC, MA 两两垂直, 以 M 为坐标原点, MA, MP, MC 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系, 则 $C(0, 0, \sqrt{3})$, $P(0, 1, 0)$, $D(-\sqrt{3}, 2, 0)$,

$E(-2\sqrt{3}, 1, 0)$. (8分)

设平面 ECP 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{PE} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0, \\ -2\sqrt{3}x_1 = 0, \end{cases}$ 令 $y_1 = \sqrt{3}$, 得 $\mathbf{n}_1 = (0, \sqrt{3}, 1)$.

设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

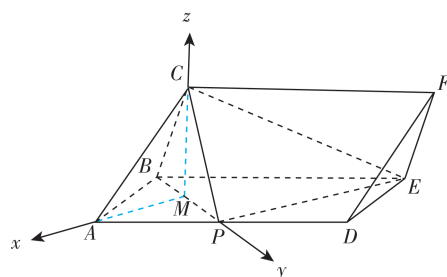
则 $\begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{PC} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{PD} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} -y_2 + \sqrt{3}z_2 = 0, \\ y_2 - \sqrt{3}x_2 = 0, \end{cases}$ 令 $y_2 = \sqrt{3}$, 得 $\mathbf{n}_2 = (1, \sqrt{3}, 1)$.

(10分)

设平面 ECP 与平面 PCD 的夹角为 θ , 易知 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$,

所以 $\cos \theta = |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{4}{2 \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,

即平面 ECP 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. (12分)



20. 【新超考点】互斥事件的概率, 条件概率, 全概率公式, 贝叶斯公式

【解】(1) 设 A_i 表示“第 i 次从乙箱中抽到填空题”, $i=1, 2$,

则 $P(A_1) = \frac{3}{7}$, $P(\overline{A_1}) = \frac{4}{7}$, $P(A_2 | A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $P(A_2 | \overline{A_1}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. (3分)

由全概率公式得, 第2次抽到填空题的概率

$P(A_2) = P(A_1)P(A_2 | A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2 | \overline{A_1}) = \frac{3}{7} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$.

(6分)

(2) 设事件 A 为“第三支部从乙箱中抽1个选择题”, 事件 B_1 为“第二支部从甲箱中取出2个题都是选择题”, 事件 B_2 为“第二支部从甲箱中取出1个选择题1个填空题”, 事件 B_3 为“第二支部从甲箱中取出2个题都是填空题”, 则 B_1, B_2, B_3 彼此互斥, 且 $B_1 \cup B_2 \cup B_3 = \Omega$.

则 $P(B_1) = \frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$, $P(B_2) = \frac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2} = \frac{15}{28}$, $P(B_3) = \frac{C_3^2}{C_8^2} = \frac{3}{28}$,

$P(A | B_1) = \frac{6}{9}$, $P(A | B_2) = \frac{5}{9}$, $P(A | B_3) = \frac{4}{9}$, (9分)

所以 $P(A) = P(B_1)P(A | B_1) + P(B_2)P(A | B_2) + P(B_3)P(A | B_3) = \frac{5}{14} \times \frac{6}{9} + \frac{15}{28} \times \frac{5}{9} + \frac{3}{28} \times \frac{4}{9} = \frac{7}{12}$. (10分)

所求概率即是 A 发生的情况下 B_1 发生的概率, 故

$P(B_1 | A) = \frac{P(B_1 A)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P(A | B_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{14} \times \frac{6}{9}}{\frac{7}{12}} = \frac{20}{49}$. (12分)

21. 思路导引 (1) 解法一: 将 $(4, 4)$ 代入抛物线方程 $x^2 = 2py \rightarrow p = 2 \rightarrow x^2 = 4y \rightarrow$ 设切点坐标为 $(x_0, y_0) \rightarrow$ 导数的几何意义可得切线斜率 \rightarrow 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 AB 的方程为 $y = kx + b \rightarrow$ 联立直线 AB 与抛物线的方程 \rightarrow 根与系数的关系可得 $b = 2 \rightarrow$ 直线 AB 过定点;

解法二: 设 $P(x_0, y_0) \rightarrow$ 过 P 的直线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0) \rightarrow$ 与抛物线方程联立 \rightarrow 根据二次方程判别式为 $0 \rightarrow$ 得 $k^2 - x_0k + y_0 = 0 \rightarrow$ 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 得 $x_1x_2 = 4k_1k_2 = -8 \rightarrow$ 联立直线 AB 和抛物线的方程 \rightarrow 根与系数的关系可得 $b = 2 \rightarrow$ 直线 AB 过定点.

(2) 联立直线 AB 和抛物线方程 \rightarrow 根与系数的关系 $\rightarrow C(x_1, -1), D(x_2, -1) \rightarrow$ 联立直线 PA, PB 方程 \rightarrow 可得 $P(2k, -2) \rightarrow$ 可得 P 在直线 $y = -2$ 上运动 \rightarrow 假设 A, C, P, D 四点共圆可得 $k_{PA} \cdot k_{PD} = -1 \rightarrow$ 代入求解判断是否有解即可.

【重难点题】抛物线的切线方程及定点问题

(1) 【证明】解法一: 将 $(4, 4)$ 代入抛物线方程 $x^2 = 2py$, 解得 $p = 2$, 所以抛物线方程为 $x^2 = 4y$. (1分)

对 $y = \frac{1}{4}x^2$ 求导可得 $y' = \frac{x}{2}$, 设切点坐标为 (x_0, y_0) , 则切线斜率为 $\frac{x_0}{2}$. (3分)

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 AB 的方程为 $y = kx + b$.

由题意得 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_2}{2} = -2$, 所以 $x_1x_2 = -8$.

联立直线 AB 和抛物线方程, 得 $\begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = kx + b, \end{cases}$ 化简, 得 $x^2 - 4kx - 4b = 0$,

所以 $x_1x_2 = -4b = -8$, 解得 $b = 2$.

所以直线 AB 的方程为 $y = kx + 2$, 则直线 AB 过定点 $(0, 2)$. (6分)

解法二: 将 $(4, 4)$ 代入抛物线方程 $x^2 = 2py$, 解得 $p = 2$, 所以抛物线方程为 $x^2 = 4y$. (1分)

设 $P(x_0, y_0)$, 过点 P 的切线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$.

由 $\begin{cases} x^2 = 4y, \\ y - y_0 = k(x - x_0), \end{cases}$ 得 $x^2 - 4kx - 4(y_0 - kx_0) = 0$,

由 $\Delta = 16k^2 + 16(y_0 - kx_0) = 0$ 得 $k^2 - x_0k + y_0 = 0$, 由题意得 $k_1k_2 = y_0 = -2$. (3分)

切点横坐标为 $x = 2k$, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1x_2 = 4k_1k_2 = -8$. (4分)

设直线 AB 的方程为 $y = k'x + b$, 由 $\begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = k'x + b, \end{cases}$ 得 $x^2 - 4k'x - 4b = 0$,

所以 $x_1x_2 = -4b = -8$, 解得 $b = 2$.

所以直线 AB 的方程为 $y = k'x + 2$, 则直线 AB 过定点 $(0, 2)$. (6分)

(2) 【解】联立直线 AB 和抛物线方程, 得 $\begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = kx + 2, \end{cases}$ 化简, 得 $x^2 - 4kx - 8 = 0$, ①

可知 $x_1 + x_2 = 4k, x_1x_2 = -8$. (8分)

又 $C(x_1, -1), D(x_2, -1)$, 直线 PA 的方程为 $y - \frac{x_1^2}{4} = \frac{x_1}{2}(x - x_1)$, 直

线 PB 的方程为 $y - \frac{x_2^2}{4} = \frac{x_2}{2}(x - x_2)$,

由 $\begin{cases} y - \frac{x_1^2}{4} = \frac{x_1}{2}(x - x_1), \\ y - \frac{x_2^2}{4} = \frac{x_2}{2}(x - x_2), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 2k, \\ y = -2, \end{cases}$ 所以 $P(2k, -2)$,

所以点 P 在直线 $y = -2$ 上运动. (10分)

假设存在点 P 使得 A, C, P, D 四点共圆, 则 $\angle ACD = \angle APD = 90^\circ$, 所以 $k_{PA} \cdot k_{PD} = -1$,

又 $k_{PA} = \frac{x_1}{2}, k_{PD} = \frac{1}{x_2 - 2k}$, 可得 $\frac{x_1}{2(x_2 - 2k)} = -1$, 解得 $x_1 = 4k, x_2 = 0$,

不合题意, 所以不存在点 P 使得 A, C, P, D 四点共圆. (12分)

22. 思路导引

(1) 由题意可得 $f'(x) = x + a \sin x \geq 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上

恒成立 \rightarrow 令 $g(x) = x + a \sin x \rightarrow$ 求导 \rightarrow 分类讨论 $a \geq -1, a < -1 \rightarrow g(x) > 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立即可;

(2) $f'(x_1) = f'(x_2) \rightarrow (x_2 - x_1) + a(\sin x_2 - \sin x_1) = -b(\ln x_2 - \ln x_1) \rightarrow$ 由 (1) 知 $\sin x_2 - \sin x_1 < x_2 - x_1 \rightarrow$ 得 $-b \ln \frac{x_2}{x_1} < (a+1) \cdot (x_2 - x_1)$ ①

① \rightarrow 令 $h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \rightarrow$ 求导得当 $x > 1$ 时, $h(x) >$

$h(1) = 0 \rightarrow$ 得 $\ln x > \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1} \rightarrow$ 得 $\ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{4(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}} \rightarrow$ 代入①

式中化简即可得证.

【重难点题】函数的单调性、恒成立问题

(1) 【解】当 $b = 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - a \cos x, f'(x) = x + a \sin x$.

因为 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上是单调递增函数,

所以 $f'(x) \geq 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立.

令 $g(x) = x + a \sin x$, 则 $g'(x) = 1 + a \cos x$.

当 $a \geq -1$ 时, $g(x) \geq x - \sin x, x \in (0, \frac{\pi}{2})$. 令 $p(x) = x - \sin x$, 则

$p'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 所以 $p(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 所以 $p(x) >$

$p(0) = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 所以 $g(x) > 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立,

符合题意. (3分)

当 $a < -1$ 时, $g'(0) = 1 + a < 0, g'(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$, 且 $g'(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上

单调递增, 所以存在唯一 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得 $g'(x_0) = 0$, 所以当 $x \in$

$(0, x_0)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减,

即 $\forall x \in (0, x_0), g(x) < g(0) = 0$, 不符合题意.

综上所述, $a \geq -1$, 即 a 的取值范围是 $[-1, +\infty)$. (6分)

(2) 【证明】 $f'(x) = x + a \sin x + b \ln x, x \in (0, +\infty)$.

(由 $f'(x_1) = f'(x_2)$ 可知 $f'(x)$ 不是单调函数)

当 $a \in (0, 1)$ 时, $g(x) = x + a \sin x, g'(x) = 1 + a \cos x > 0$, 所以 $g(x)$

是增函数,所以 $b < 0$. (7分)

不妨设 $x_1 < x_2$, 由 $x_1 + a \sin x_1 + b \ln x_1 = x_2 + a \sin x_2 + b \ln x_2$,
移项得 $(x_2 - x_1) + a(\sin x_2 - \sin x_1) = -b(\ln x_2 - \ln x_1)$.

由(1)可知 $x_2 - \sin x_2 > x_1 - \sin x_1$, 即 $\sin x_2 - \sin x_1 < x_2 - x_1$,
所以 $-b(\ln x_2 - \ln x_1) < (a+1)(x_2 - x_1)$,

$$\text{即 } -b \ln \frac{x_2}{x_1} < (a+1)(x_2 - x_1). \quad \textcircled{1} \quad (9 \text{分})$$

$$\text{设 } h(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} \geq 0,$$

$h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以当 $x > 1$ 时, $h(x) > h(1) = 0$, 即 $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$,

$$\text{所以 } \ln \sqrt{x} > \frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}, \text{ 即 } \ln x > \frac{4(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1},$$

$$\text{所以 } \ln \frac{x_2}{x_1} > \frac{4\left(\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - 1\right)}{\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} + 1} = \frac{4(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}.$$

$$\text{代入} \textcircled{1} \text{ 式中得到 } (-4b) \frac{\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} < (a+1)(x_2 - x_1) = (a+1) \cdot$$

$$(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1})(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}),$$

$$\text{即 } \frac{-4b}{a+1} < (\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1})^2, \text{ 所以 } \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} > 2\sqrt{\frac{-b}{a+1}}, \text{ 命题得证.}$$

(12分)

广东实验中学 东北育才中学 石家庄二中

3 2023

华中师大一附中 西南大学附中 南京师大附中
湖南师大附中 福州一中

八校高三学业质量评价(T8联考一)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	A	C	B	D	C	D	ABD	AC
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	ABD	ACD	5	$\frac{5\pi}{6}$	$\left[\frac{\ln 2}{2}, \frac{\ln 3}{3}\right)$	$\frac{\sqrt{21}}{3} \cdot \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} = 1$				

1. C 【基础考点】复数的除法运算、复数模的计算公式

【深度解析】由题意, 得 $z = \frac{11 - \sqrt{3}i - 1}{-1 + i} = \frac{1}{-1 + i} = \frac{-1 - i}{(-1 + i)(-1 - i)} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, 故选 C.

2. B 【基础考点】指数与对数不等式的解法、集合的并集的定义

【深度解析】由题意, 得 $M = \{x | 12^x > 2^2\} = \{x | x > 2\}$, $N = \{x | \log_3 x \leq \log_3 3\} = \{x | 0 < x \leq 3\}$, 所以 $M \cup N = \{x | x > 0\}$, 故选 B.

▶ 快解 因为 $2 \in N$, 所以 $2 \in (M \cup N)$, 故排除 AC, 又 $0 \notin M$, 且 $0 \notin N$, 所以 $0 \notin (M \cup N)$, 故排除 D, 故选 B.

3. A 【热点考点】充分条件与必要条件、数列的单调性

【深度解析】若 $a_n > 0$, 则当 $n \geq 2$ 时 (易错: 在利用关系式 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 求解相关问题时, 一定要注意前提 $n \geq 2$), $S_n - S_{n-1} = a_n > 0$, 则 $S_n > S_{n-1}$, 则 $\{S_n\}$ 是递增数列; 若 $\{S_n\}$ 是递增数列, 则 $S_n > S_{n-1}$ ($n \geq 2$), 即 $S_n - S_{n-1} = a_n > 0$, 但 a_1 的符号不确定, 所以“ $a_n > 0$ ”是“ $\{S_n\}$ 是递增数列”的充分不必要条件, 故选 A.

4. C 【基础考点】平均数、众数、中位数、方差

【深度解析】对于 A, 当掷骰子出现的结果为 2, 2, 3, 5, 6 时, 满足中位数是 3 (提示: 判断中位数时, 要先将数据从小排到大, 奇数则取中间的数, 偶数则取中间两个除以 2), 众数是 2, 可以出现点数 6, 故 A 不正确; 对于 B, 当掷骰子出现结果为 1, 1, 2, 5, 6 时, 满足平均数是 3, 中位数是 2, 可以出现点数 6, 故 B 不正确; 对于 C, 若平均数是 2, 且出现点数 6, 则方差 $s^2 > \frac{1}{5}(6-2)^2 = 3.2 > 2.4$, 所以当平均数是 2, 方差是 2.4 时, 一定不会出现点数 6, 故 C 正确; 对于 D, 当掷骰子出现结果为 2, 2, 2, 3, 6 时, 满足平均数是 3, 众数是 2,

可以出现点数 6, 故 D 不正确. 故选 C.

5. B 【经典题型】两角和与差的正弦公式、诱导公式、二倍角公式

【深度解析】因为 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) - \cos \alpha = \sin \alpha \cos \frac{\pi}{6} + \cos \alpha \sin \frac{\pi}{6} - \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 所以 $\sin\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2\alpha\right) = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = 1 - 2\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 故选 B.

6. D 【经典题型】圆台的轴截面与表面积、球的表面积公式

【深度解析】设梯形 ABCD 为圆台的轴截面, 则内切圆 O 为圆台内切球的大圆 (关键: 圆台的轴截面中有底面的半径、母线长和高等几何量, 且对于与球有关的问题, 通常可以在轴截面中建立关系, 而画出轴截面是正确解题的关键), 如图, 设圆台上、下底面圆心分别为 O_1, O_2 , 半径分别为 r_1, r_2 , 母线长为 l , 内切球的半径为 R , 则 O_1, O, O_2 共线, 且 $O_1O_2 \perp AB, O_1O_2 \perp CD$, 连接 OD, OE, OA, 则 OD, OA 分别平分 $\angle ADC, \angle DAB$, 则 $\angle OAD + \angle ODA = \frac{\pi}{2}$, $\angle DOA = \frac{\pi}{2}$, $OE \perp AD$. 由圆的切线的性质可知 $O_1D = DE = r_1 = 1, O_2A = AE = r_2 = 3$, 因为 $OE \perp AD$, 所以易得 $\text{Rt} \triangle ODE \sim \text{Rt} \triangle AOE$, 所以 $\frac{OE}{AE} = \frac{DE}{OE}$, 所以 $R^2 = r_1 r_2 = 3$, 解得 $R = \sqrt{3}$, 故圆台的高为 $2R = 2\sqrt{3}$, 母线长 $l = r_1 + r_2 = 4$, 则圆台的侧面积 $S_{\text{侧}} = \pi(r_1 + r_2)l = 16\pi$, 球的表面积 $S_{\text{球}} = 4\pi R^2 = 12\pi$,

