

$$|AN| \cdot |NB| = \frac{3}{2} \left| x_1 x_2 - \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} t \right) (x_1 + x_2) + \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} t \right)^2 \right| = \frac{3}{4} t^2. \quad (10 \text{ 分})$$

(根据 $|MN|^2 = |AN| \cdot |NB|$ 与 $\angle ANM = \angle MNB$ 证明三角形相似)

$$\text{所以 } |MN|^2 = |AN| \cdot |NB|, \text{ 则 } \frac{|AN|}{|MN|} = \frac{|NM|}{|NB|}, \text{ 又 } \angle ANM = \angle MNB,$$

所以 $\triangle ANM \sim \triangle MNB$. (12 分)

22. **思路导引** (1) $f(x), g(x) \rightarrow f'(x), g'(x) \xrightarrow[\text{公切线方程}]{\text{导数的几何意义}} a, b,$

$c, d;$

(2) $f(x), g(x) \rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{设 } p(x) = g(x) - (x-a) \xrightarrow{\text{求导}} p'(x) \geq 0 \rightarrow g(x) \geq x-a \\ \text{设 } h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x} \xrightarrow{\text{求导}} h'(x) \geq 0 \rightarrow f(x) \geq g(x) \end{array} \right\} \rightarrow \text{结论成立}$$

【重难点考点】导数的几何意义、利用导数讨论函数的单调性与最值

(1) **【解】** $f'(x) = ae^x + b, g'(x) = d(1 + \ln x)$. (2 分)

$$\text{依题意 } \begin{cases} f(1) = g(1) = 1-a, \\ f'(1) = g'(1) = 1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} ae+b+c=0=1-a, \\ ae+b=d=1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=1, \\ b=1-e, \\ c=-1, \\ d=1. \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

(2) **【证明】** 由 (1) 知 $f(x) = e^x + (1-e)x - 1, g(x) = x \ln x, l: y = x - 1$.
 $g(x) - (x-a) = x \ln x - x + 1$.

(设 $p(x) = g(x) - (x-a)$, 利用导数讨论 $p(x)$ 的单调性与最小值, 从而证明 $p(x) \geq 0$, 即 $g(x) \geq x-a$)

设 $p(x) = x \ln x - x + 1$, 则 $p'(x) = \ln x$. (6 分)

当 $x \in (0, 1)$ 时, $p'(x) < 0, p(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $p'(x) > 0, p(x)$ 单调递增,

因此当 $x=1$ 时, $p(x)$ 取得最小值 $p(1) = 0$,

可得 $p(x) \geq 0$, 所以 $g(x) \geq x-a$. (8 分)

(设 $h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x}$, 利用导数讨论 $h(x)$ 的单调性与最小值, 从而证明 $h(x) \geq 0$, 即 $f(x) \geq g(x)$)

$$f(x) - g(x) = e^x + (1-e)x - 1 - x \ln x = x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - \ln x + 1 - e \right). \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - \ln x + 1 - e, \text{ 则 } h'(x) = \frac{(e^x - 1)(x-1)}{x^2}. \quad (10 \text{ 分})$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增,

因此 $h(x) \geq h(1) = 0$, 即 $f(x) \geq g(x)$.

故 $f(x) \geq g(x) \geq x-a$. (12 分)

5 2023 江苏省 G4 联盟

苏州中学 扬州中学
常州中学 盐城中学

高三联合调研

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	B	D	C	D	C	B	BCD	ABD
题号	11	12	13		14		15		16	
答案	ABD	AC	15		$\frac{5\pi}{6}$		$(n^2-n+1) \cdot 3^{n+1}$		$[-3,1]$	

1. A 【基础考点】集合的交集运算

【深度解析】 因为 $A = \{-1, 0\}, B = \{x | -2 < x < 0\}$, 所以 $A \cap B = \{-1\}$.

故选 A.

2. D 【基础考点】共轭复数的概念及性质

【深度解析】 由题意知 $\bar{z} = \frac{4+3i}{i} = \frac{(4+3i)i}{i^2} = -(4i-3) = 3-4i$, 所以 $z =$

$3+4i$, 则 $z \cdot \bar{z} = (3+4i)(3-4i) = 3^2 + 4^2 = 25$. 故选 D.

3. B 【经典题型】对统计图表——折线图的分析

【深度解析】 对于选项 A, 由折线图可知, 城镇人口与年份呈现正相关, 故 A 正确; 对于 B 选项, 因为乡村人口与年份呈现负相关, 且线性相关性很强, 所以相关系数 r 接近 -1 , 故 B 错误; 对于选项 C, 城镇人口与年份呈现正相关, 且线性相关性很强, 相关系数 r 接近 1 , 所以城镇人口逐年增长率大致相同, 故 C 正确; 对于选项 D, 由折线图可知, 乡村人口与年份呈负线性相关关系, 可预测乡村人口仍呈现下降趋势, 故 D 正确. 故选 B.

4. D 【经典题型】函数图象的识别

【深度解析】 函数 $y = f(x) = 2x^2 - e^{|x|}$ 是偶函数, 其图象关于 y 轴对称, 因为 $f(2) = 8 - e^2$, 且 $0 < 8 - e^2 < 1$, 所以排除选项 A 和 B; 当 $x \in$

$[0, 2]$ 时, $y' = 4x - e^x$ 有一零点, 设为 x_0 , 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (x_0, 2)$ 时, $f(x)$ 单调递增. 故选 D.

一题多解 显然函数 $y = 2x^2 - e^{|x|}$ 是偶函数, 考虑 $x > 0$ 的情况.

$y = 2x^2 - e^x$, 当 $x=2$ 时, $y = 8 - e^2, 0 < 8 - e^2 < 1$, 排除 A, B. 设 $f(x) = 2x^2 - e^x (x > 0)$, $f'(x) = 4x - e^x$, 设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = 4 - e^x = 0 \Rightarrow x = 2 \ln 2 \in (1, 2)$, 所以函数 $f'(x) = 4x - e^x$ 在 $(0, 2 \ln 2)$ 上单调递增, 在 $(2 \ln 2, 2)$ 上单调递减. 而 $f'(0) = -1 < 0, f'(1) = 4 - e > 0, f'(2) = 8 - e^2 > 0$, 所以存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 2)$ 上单调递增, 排除 C. 故选 D.

5. C 【热门考点】椭圆的定义及其几何性质

【深度解析】 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 其焦点为 $F_1(-c,$

$0)$. 由椭圆的几何性质知, 过 F_1 的最短弦 PQ 垂直于 x 轴, 不妨设

$P\left(-c, \frac{b^2}{a}\right), Q\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$, 所以 $2 \times \frac{b^2}{a} = 10$, 即 $b^2 = 5a$. 又 $\triangle PF_2Q$

的周长为 $4a$ (提示: 椭圆的定义), 所以 $4a = 36$, 所以 $a = 9, c = 6$, 离

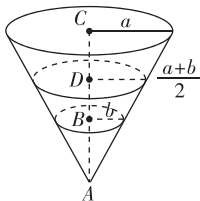
心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. 故选 C.

方法速记 (1) 椭圆过其焦点的最短弦为椭圆的通径, 长度为 $\frac{2b^2}{a}$; (2) 过椭圆焦点 F_1 的直线交椭圆于 P, Q 两点, 则 $\triangle PF_2Q$ 的周长为 $4a$.

6. D 【热点素材】锥体的体积

【深度解析】 将圆台形的天池盆补形为圆锥, 如图, 圆锥顶点为 A , 盆口圆心为 C , 盆底圆心为 B , 盆高一半时的水面圆心为 D .

由图可知 $\frac{a}{b} = \frac{AC}{AB}$, 则以 a 为底面半径的圆锥



体积与以 b 为底面半径的圆锥体积之比为 $\frac{\frac{1}{3}\pi a^2 \cdot AC}{\frac{1}{3}\pi b^2 \cdot AB} = \frac{a^3}{b^3}$, 不妨

设以 a 为底面半径的圆锥体积为 a^3 , 则以 b 为底面半径的圆锥体积为 b^3 , 以 $\frac{a+b}{2}$ 为底面半径 (盆高一半时的水面) 的圆锥体积为 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$. 因为体积一半时的水深大于盆高的一半, 体积一半时的水面面积大于盆高一半时的水面面积, 所以体积一半时的圆锥的体积大于盆高一半时的圆锥的体积, 即 $\frac{a^3+b^3}{2} > \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$, 故选 D.

7. C 【热门考点】两角和与差的余弦公式、二倍角公式、等差数列的定义及通项公式

【深度解析】 由 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$, 两式相减得,

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)].$$

$$\begin{aligned} & \text{所以 } \sin(a_{n+1}-a_n) \cdot \sin(a_{n+1}+a_n) \\ &= \frac{\cos[(a_{n+1}-a_n)-(a_{n+1}+a_n)] - \cos[(a_{n+1}-a_n)+(a_{n+1}+a_n)]}{2} \\ &= \frac{\cos 2a_n - \cos 2a_{n+1}}{2} = \frac{1-2\sin^2 a_n - (1-2\sin^2 a_{n+1})}{2} = \sin^2 a_{n+1} - \sin^2 a_n = \end{aligned}$$

$\frac{1}{10}$, 所以 $\{\sin^2 a_n\}$ 为等差数列, 公差为 $\frac{1}{10}$ (关键: 根据题意得到

$\{\sin^2 a_n\}$ 为等差数列), 所以 $\sin^2 a_n = \sin^2 a_1 + (n-1) \times \frac{1}{10}$. 因为

$\sin^2 a_n \leq 1$, 所以 $\sin^2 a_1 + (n-1) \times \frac{1}{10} \leq 1$, 即 $\frac{n-1}{10} \leq 1 - \sin^2 a_1 \leq 1$, 解得

$n \leq 11$ (提示: 利用 $\sin^2 a_n$ 的有界性得到 $\frac{n-1}{10} \leq 1 - \sin^2 a_1 \leq 1$). 故选 C.

8. B 【重难题型】余弦定理和面积公式在解三角形中的应用、平面向量基本定理

【深度解析】 因为 $\vec{AP} = m\vec{AB} + n\vec{AC} = (m+n) \left(\frac{m}{m+n}\vec{AB} + \frac{n}{m+n}\vec{AC} \right)$, 又 P

在 $\triangle ABC$ 的内切圆上, 所以 $m+n = \frac{|\vec{AP}|}{\left| \frac{m}{m+n}\vec{AB} + \frac{n}{m+n}\vec{AC} \right|}$. 假设

$$\frac{m}{m+n}\vec{AB} + \frac{n}{m+n}\vec{AC} = \vec{AE}, \text{ 则 } \vec{AP} = (m+n)\vec{AE}, m+n = \frac{|\vec{AP}|}{|\vec{AE}|}. \text{ 因为 } \frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1, \text{ 所以 } E \text{ 为 } BC \text{ 上一点, 且 } A, P, E \text{ 三点共线. 由平行线等比关系可得, 要使 } m+n, \text{ 即 } |\vec{AP}| \text{ 与 } |\vec{AE}| \text{ 之间的比值最小, 则 } P \text{ 在内切圆的最高点, 如图所示.}$$

由余弦定理得 $\cos \angle BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{11}{16}$, 因为 $\sin \angle BAC > 0$, 所以 $\sin \angle BAC = \frac{3\sqrt{15}}{16}$. 设内切圆半径为 r , 由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2}r(AB+AC+BC)$, 得 $r =$

$\frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{AB+AC+BC} = \frac{4 \times 2 \times \frac{3\sqrt{15}}{16}}{4+3+2} = \frac{\sqrt{15}}{6}$ (提示: 等面积法). 设

$$BC \text{ 边上高为 } h, \text{ 则 } \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC = \frac{1}{2}BC \cdot h, \text{ 所以 } h = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC}{BC} = \frac{4 \times 2 \times \frac{3\sqrt{15}}{16}}{3} = \frac{\sqrt{15}}{2} \text{ (关键: 利用等面积法得到内切圆半径和高 } h \text{). 由图可知 } m+n \text{ 的最小值为 } \frac{h-2r}{h} = \frac{1}{3}, \text{ 故选 B.}$$

一题多解 以 A 为坐标原点, 建立平面直角坐标系, 如图所示, 则 $A(0,0), C(2,0), \cos \angle ACB = \frac{4+9-16}{2 \times 2 \times 3} = -\frac{1}{4}$. 又 $BC=3$, 所以 $B\left(\frac{11}{4}, \frac{3\sqrt{15}}{4}\right)$.

$$\text{内心 } I \text{ 的横坐标 } x_I = \frac{2 \times \frac{11}{4} + 3 \times 0 + 4 \times 2}{2+3+4} = \frac{3}{2},$$

$$\text{纵坐标 } y_I = \frac{2 \times \frac{3\sqrt{15}}{4} + 3 \times 0 + 4 \times 0}{2+3+4} = \frac{\sqrt{15}}{6}, \text{ 内切圆半径 } r = y_I = \frac{\sqrt{15}}{6},$$

$$\text{所以设点 } P\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{6}\cos\theta, \frac{\sqrt{15}}{6} + \frac{\sqrt{15}}{6}\sin\theta\right), \theta \in [0, 2\pi).$$

$$\text{因为 } \vec{AP} = m\vec{AB} + n\vec{AC}, \text{ 即 } \begin{cases} \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{15}}{6}\cos\theta = \frac{11}{4}m + 2n, \\ \frac{\sqrt{15}}{6} + \frac{\sqrt{15}}{6}\sin\theta = \frac{3\sqrt{15}}{4}m, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} m = \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\sin\theta, \\ n = \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{15}}{12}\cos\theta - \frac{11}{36}\sin\theta, \end{cases} \text{ 所以 } m+n = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{15}}{12}\cos\theta - \frac{1}{12}\sin\theta =$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cos(\theta+\varphi) \in \left[\frac{1}{3}, 1\right], \text{ 即 } m+n \text{ 的最小值为 } \frac{1}{3}.$$

方法速记 (1) 若 $\frac{m}{m+n}\vec{AB} + \frac{n}{m+n}\vec{AC} = \vec{AE}$, 因为 $\frac{m}{m+n} + \frac{n}{m+n} = 1$, 所以 E, B, C 三点共线; (2) 若 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r , 则 $r = \frac{2S_{\triangle ABC}}{AB+AC+BC}$; (3) $\triangle ABC$ 的顶点分别为 $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$, 三内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , $\triangle ABC$ 的内心为 I , 则 $x_I = \frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c}, y_I = \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c}$.

9. BCD 【基础考点】基本不等式的应用、两角和与差的正弦公式

【深度解析】因为 $a>0, b>0, a+b=1$,

对于选项 A: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b}} + 2 = 4$, 当

且仅当 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, 即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 A 不正确;

对于选项 B: $2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^a \cdot 2^b} = 2\sqrt{2^{a+b}} = 2\sqrt{2}$, 当且仅当 $2^a = 2^b$,

即 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 B 正确;

对于选项 C: $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab \leq \log_2 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \log_2 \frac{1}{4} = -2$, 当且

仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取等号, 故 C 正确;

对于选项 D: $\sin a + \sin b = \sin\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right) + \sin\left(\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right) =$

$2\sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$, 因为 $-1 \leq \cos \frac{a-b}{2} \leq 1$, 所以 $\sin a + \sin b \leq$

$2\sin \frac{a+b}{2} = 2\sin \frac{1}{2}$, 故 D 正确.

故选 BCD.

10. ABD 【热门考点】函数的零点、函数图象对称性的判定、利用导数研究函数的单调性

【深度解析】对于选项 A, 令 $g(x) = 0$ 得 $e^{x-a} - e^{a-x} = 0$, 即 $e^{x-a} = \frac{1}{e^{x-a}}$,

即 $(e^{x-a})^2 = 1$. 因为 $e^{x-a} > 0$, 所以 $e^{x-a} = 1$, 即 $x-a=0$, 即 $x=a$, 所以函数 $y=g(x)$ 有且仅有一个零点. 故 A 正确.

对于选项 B, 由 $f(x) = e^{x-a} + e^{a-x}$, $g(x) = e^{x-a} - e^{a-x}$ 得 $f'(x) = e^{x-a} - e^{a-x}$, $g'(x) = e^{x-a} + e^{a-x}$, 所以 $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = f(x)$. 故 B 正确.

对于选项 C, 设 $F(x) = f(x)g(x) = e^{2x-2a} - e^{2a-2x}$, 取 $b \in \mathbf{R}$, 则 $F(x+b) = e^{2x+2b-2a} - e^{-2x+2a-2b}$, $F(-x+b) = e^{-2x+2b-2a} - e^{2x+2a-2b}$, 所以 $F(x+b) \neq F(-x+b)$, 且只有当 $b=a$ 时, $F(x+a) = -F(-x+a)$, 所以 $F(x)$ 的图象关于点 $(a, 0)$ 对称 (提示: 函数 $f(x)$ 若满足 $f(x+a) = -f(-x+a)$, 则 $f(x)$ 的图象关于点 $(a, 0)$ 对称; 若满足 $f(x+a) = f(-x+a)$, 则 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称), 即函数 $y=f(x)g(x)$ 的图象关于点 $(a, 0)$ 对称. 故 C 错误.

对于选项 D, 函数 $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 又 $\left[\frac{g(x)}{f(x)}\right]' =$

$\left(\frac{e^{x-a} - e^{a-x}}{e^{x-a} + e^{a-x}}\right)' = \frac{4}{(e^{x-a} + e^{a-x})^2} > 0$, 所以函数 $y = \frac{g(x)}{f(x)}$ 在 \mathbf{R} 上单调递

增, 故 D 正确.

故选 ABD.

11. ABD 【热门考点】独立重复试验的概率、离散型随机变量的分布列和期望

【深度解析】设实际比赛局数为 x , 则 $P(x=3) = p^3 + (1-p)^3$, 因此三局就结束比赛的概率为 $p^3 + (1-p)^3$, 故 A 正确. $P(x=4) =$

$C_3^1 p^3 (1-p) + C_3^1 p (1-p)^3$, $P(x=5) = C_4^2 p^2 (1-p)^2$, 则 $f(p) = 3[p^3 +$

$(1-p)^3] + 4[C_3^1 p^3 (1-p) + C_3^1 p (1-p)^3] + 5[C_4^2 p^2 (1-p)^2] = 6p^4 -$

$12p^3 + 3p^2 + 3p + 3$, $f(p)$ 的常数项为 3, 故 B 正确. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{33}{8}$, 故 D

正确. $f'(p) = 24p^3 - 36p^2 + 6p + 3 = 3(2p-1)(4p^2 - 4p - 1)$, 因为 $0 \leq$

$p \leq 1$, 所以 $4p^2 - 4p - 1 < 0$, 令 $f'(p) > 0$, 则 $0 \leq p < \frac{1}{2}$; 令 $f'(p) < 0$, 则

$\frac{1}{2} < p \leq 1$, 则函数 $f(p)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单

调递减 (提示: 利用导数得到 $f(p)$ 的单调性), 又因为 $f(1-p) =$

$3[(1-p)^3 + p^3] + 4[C_3^1 p (1-p)^3 + C_3^1 p^3 (1-p)] + 5[C_4^2 (1-p)^2 p^2] =$

$f(p)$, 所以 $f(p)$ 的图象关于直线 $p = \frac{1}{2}$ 对称, 且 $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} < \frac{4}{5} - \frac{1}{2}$,

所以 $f\left(\frac{1}{3}\right) > f\left(\frac{4}{5}\right)$, 故 C 不正确. 故选 ABD.

12. AC 【重难点型】线面角的向量求解、点到面的距离的向量求解、立体几何中的轨迹问题

【深度解析】建立如图所示的空间直角坐标

系, 则 $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 1, 0)$,

$D(0, 1, 0)$, $P(0, 0, 1)$, $G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

对于选项 A: $\vec{BD} = (-1, 1, 0)$, $\vec{BP} = (-1, 0, 1)$, 设平面 PBD 的一个法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$, 则

$\begin{cases} \vec{BD} \cdot \mathbf{m} = -x + y = 0, \\ \vec{BP} \cdot \mathbf{m} = -x + z = 0. \end{cases}$ 令 $x = 1$, 则 $\mathbf{m} = (1, 1, 1)$. 又 $\vec{PG} =$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, 则点 G 到平面 PBD 的距离 $d = \frac{|\vec{PG} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 所

以当 $MG \perp$ 平面 PBD 时, MG 取得最小值 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (关键: 点 G 到平面 PBD 的距离即为 MG 的最小值), 故 A 正确.

对于选项 B: 因为 $\vec{AG} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $|\vec{AG}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $MA + MG = 1 > AG$,

所以点 M 的轨迹是以 A, G 为焦点的椭球面. 又因为 $\vec{AG} = \frac{1}{2}\mathbf{m}$, 所

以 $AG \perp$ 平面 PBD , 即平面 PBD 垂直于椭球的长轴所在直线 AG .

因为点 M 在平面 PBD 上, 所以点 M 的轨迹为平面 PBD 与以 A, G 为焦点的椭球面的交线, 所以点 M 的轨迹是圆, 故 B 错误.

对于选项 C: 连接 AG , 交平面 PBD 于点 H . 由选项 B 知, $AG \perp$ 平面 PBD , 所以 $AH \perp$ 平面 PBD . 设 $AC \cap BD = O$, 因为 O 为 AC 的中点, G 为 PC 的中点, 所以点 H 为 $\triangle PAC$ 的重心, 所以 $AH = 2HG$. 由选

项 A 知点 G 到平面 PBD 的距离 $d = \frac{\sqrt{3}}{6}$, 所以点 A 到平面 PBD 的

距离 $AH = 2d = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $MH^2 = MA^2 - AH^2 = \frac{1}{12}$, 所以点 M 的轨迹围成

图形是以 H 为圆心, MH 为半径的圆, 面积等于 $\pi MH^2 = \frac{\pi}{12}$, 故 C

正确.

对于选项 D: $\vec{DC} = (1, 0, 0)$, 设 CD 与平面 PBD 所成的角为 θ , 则

$\sin \theta = |\cos \langle \vec{DC}, \mathbf{m} \rangle| = \left| \frac{\vec{DC} \cdot \mathbf{m}}{|\vec{DC}| |\mathbf{m}|} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{2}$, 所以 $\theta > 30^\circ$. 因为

$BM \subset$ 平面 PBD , 所以 BM 与 CD 所成角 $\geq \theta > 30^\circ$ (提示: 与平面斜交的直线与该平面所成的角不大于直线与平面内其他直线所成角), 故不存在点 M , 使得直线 BM 与 CD 所成角为 30° , 故 D 错误.

故选 AC.

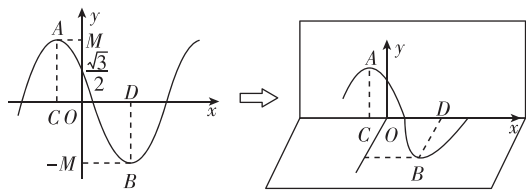
13.15 【基础考点】利用二项展开式的通项求特定项

【深度解析】 $\left(x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(-x^{-\frac{1}{2}}\right)^r = (-1)^r C_6^r x^{6-\frac{3}{2}r}$. 令 $6 - \frac{3}{2}r = 0$, 解得 $r = 4$, 所以 $T_5 = (-1)^4 C_6^4 = 15$.

14. $\frac{5\pi}{6}$ 【经典题型】由图象确定正弦型函数的解析式

【深度解析】如图, 因为 $f(x)$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, 所以 $CD = \frac{T}{2} = 2$,

$AC = BD = M$, $BC = \sqrt{M^2 + 4}$, 所以 $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2M^2 + 4} = \sqrt{10}$, 解得 $M = \sqrt{3}$, 所以 $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{2}x + \varphi\right)$. 所以 $f(0) = \sqrt{3} \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{1}{2}$. 因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$. 当 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时, 令 $\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 解得 $x = \frac{2}{3}$, 即函数图象在 y 轴右侧的第一个最高点在直线 $x = 1$ 左侧, 不符合题意; 当 $\varphi = \frac{5\pi}{6}$ 时, 令 $\frac{\pi}{2}x + \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, 解得 $x = -\frac{2}{3}$, 符合题意, 所以 $\varphi = \frac{5\pi}{6}$.



一题多解 因为 $f(x)$ 的周期 $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, 所以 $CD = \frac{T}{2} = 2$,

$AC = BD = M$, 且 $AC \perp CD$, $BD \perp CD$, $AC \perp BD$. 因为 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$, 所以 $\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DB}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{CD}^2 + \overrightarrow{DB}^2 = 2M^2 + 4$, 则 $2M^2 + 4 = 10$, 解得 $M = \sqrt{3}$. 以下同深度解析.

15. $(n^2 - n + 1) \cdot 3^{n+1}$ 【重点题型】错位相减法求和

【深度解析】由题意, $T_n = 1^2 \times 3^1 + 2^2 \times 3^2 + \dots + n^2 \cdot 3^n$, $3T_n = 1^2 \times 3^2 + 2^2 \times 3^3 + \dots + n^2 \cdot 3^{n+1}$, 两式相减得 $2T_n = -3 + (1^2 - 2^2) \times 3^2 + (2^2 - 3^2) \times 3^3 + \dots + [(n-1)^2 - n^2] \cdot 3^n + n^2 \cdot 3^{n+1}$, 即 $2T_n = -3 - [3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \dots + (2n-1) \cdot 3^n] + n^2 \cdot 3^{n+1}$ (提示: 由已知可得 $3 \times 3^2 + 5 \times 3^3 + \dots + (2n-1) \cdot 3^n = S_n - 3$), 即 $2T_n = -3 - (S_n - 3) + n^2 \cdot 3^{n+1}$, 所以 $2T_n + 3 = -(S_n - 3) + n^2 \cdot 3^{n+1} = -(n-1) \cdot 3^{n+1} + n^2 \cdot 3^{n+1} = (n^2 - n + 1) \cdot 3^{n+1}$.

16. $[-3, 1]$

思路导引 $f(x)$ 为偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = 2^x \rightarrow f(x) = 2^{|x|}$ ($x \in \mathbf{R}$) $\frac{f(x+a) \leq [f(x)]^2}{2^{|x+a|}} \rightarrow 2^{|x+a|} \leq 2^{2|x|} \rightarrow -2x \leq x+a \leq 2x \rightarrow -3x \leq a \leq x$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立 $\rightarrow a$ 的取值范围

【重难点题】由函数的奇偶性求函数的解析式、含参的绝对值不等式的解法

【深度解析】因为 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时,

$f(x) = 2^x$, 设 $x < 0$, 则 $-x > 0$, $f(-x) = 2^{-x} = f(x)$, 所以当 $x < 0$ 时, $f(x) = 2^{-x}$, 所以 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & x < 0, \\ 2^x, & x \geq 0, \end{cases}$ 即 $f(x) = 2^{|x|}$. 所以由 $f(x+a) \leq [f(x)]^2$, $x \in [1, 3]$, 得 $2^{|x+a|} \leq 2^{2|x|}$, 所以 $|x+a| \leq |2x|$, 即 $-2x \leq x+a \leq 2x$, 即 $-3x \leq a \leq x$ 在 $x \in [1, 3]$ 上恒成立, 所以 $-3 \leq a \leq 1$, 即实数 a 的取值范围是 $[-3, 1]$.

关键拨 (1) 利用函数的奇偶性求出 $f(x)$ 的解析式;
(2) 利用函数的奇偶性和单调性将 $f(x+a) \leq [f(x)]^2$, $x \in [1, 3]$ 恒成立问题转化为 $-3x \leq a \leq x$ 恒成立.

17. 【基础考点】 a_n 与 S_n 的关系、累乘法求数列的通项公式、等差数列求和

【解】(1) **解法一**: 因为 $2S_n = (n+1)a_n$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $2a_n = 2S_n - 2S_{n-1} = (n+1)a_n - na_{n-1}$, 所以 $(n-1)a_n = na_{n-1}$, (2分)

又 $a_1 = 1$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}$,
所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_2}{a_1} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n-2} \cdot \dots \cdot \frac{2}{1}$, 即 $\frac{a_n}{a_1} = n$, 所以 $a_n = n, n \geq 2$.

经检验 $a_1 = 1$ 满足上式, 故 $a_n = n$. (4分)

解法二: 因为 $2S_n = (n+1)a_n$, 所以当 $n \geq 2$ 时, $2S_{n-1} = na_{n-1}$. 两式相减, 得 $2a_n = (n+1)a_n - na_{n-1}$, 化简得 $(n-1)a_n = na_{n-1}$, 两边同除以 $n(n-1)$, 得 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n-1}}{n-1}$. (2分)

因为 $a_1 = 1$, 所以 $\frac{a_n}{n} = 1$, 所以 $a_n = n, n \geq 2$.

经检验 $a_1 = 1$ 满足上式, 故 $a_n = n$. (4分)

(2) $\frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n} \leq m$, 即 $\frac{n}{2} + \frac{2}{n} \leq m$, 所以 $\frac{1}{2} \left(n + \frac{4}{n} \right) \leq m$.

因为 $\frac{1}{2} \left(n + \frac{4}{n} \right) \geq \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{n \cdot \frac{4}{n}} = 2$, 当且仅当 $n = 2$ 时等号成立,

所以 $b_1 = 0, b_2 = 1$. (6分)

当 $m \geq 3$ 时, 因为 $\frac{2m-1}{2} + \frac{2}{2m-1} = m - \frac{1}{2} + \frac{2}{2m-1} < m$,

$\frac{2m}{2} + \frac{2}{2m} = m + \frac{1}{m} > m$,

所以能使 $\frac{n}{2} + \frac{2}{n} \leq m$ 成立的 n 的最大值为 $2m-1$,

所以 $b_m = 2m-1 (m \geq 3)$. (9分)

所以 $\{b_m\}$ 的前 20 项和为 $0+1+5+7+\dots+39 = 0+1+\frac{(5+39) \times 18}{2} = 397$. (10分)

18. 【重点题型】矩形的判定、二面角的余弦值

(1) **【证明】** 设轴截面正方形 $ABCD$ 的边长为 $2a$. 如图, 取弧 BC 在平面 $ABCD$ 另一侧的中点 Q , 连接 BQ, CQ, NQ, MQ ,

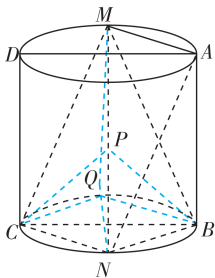
则 BC 与 NQ 互相垂直平分, 且 $BC = NQ = 2a$,

所以四边形 $BNCQ$ 是正方形, $BQ \perp CN = \sqrt{2}a$. (2分)

因为 M 为弧 AD 的中点, 所以 $MQ \perp AB$, 四边形 $ABQM$ 是矩形, 所以 $AM \perp BQ$, 所以 $AM \perp CN$, 所以四边形 $AMCN$ 是平行四边形.

(4分)

因为 $AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{6}a$, $MN = \sqrt{MQ^2 + QN^2} = 2\sqrt{2}a$,
所以 $AM^2 + AN^2 = MN^2 = 8a^2$, 所以 $AM \perp AN$, 所以四边形是 $ANCM$
是矩形. (5分)



(2)【解】解法一: 由(1)知, $MB = MC = \sqrt{MQ^2 + QB^2} = \sqrt{6}a$, $BN = CN = \sqrt{2}a$, $MN = 2\sqrt{2}a$, 所以 $\angle MBN = \angle MCN = \frac{\pi}{2}$. (6分)

所以 $\triangle MNB \cong \triangle MNC$, $\text{Rt} \triangle MBN$ 斜边 MN 上的高 $h = \frac{\sqrt{6}a \cdot \sqrt{2}a}{2\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$. (7分)

作 $BP \perp MN$ 交 MN 于点 P , 连接 CP .

因为 $\angle BNP = \angle CNP$, $BN = CN$, $PN = PN$, 所以 $\triangle BPN \cong \triangle CPN$,
则 $\angle CPN = \angle BPN = 90^\circ$, 所以 $CP \perp MN$,
 $\angle BPC$ 即为二面角 $B-MN-C$ 的平面角. (9分)

在 $\triangle BPC$ 中, $BP = CP = \frac{\sqrt{6}}{2}a$, $BC = 2a$,

由余弦定理得 $\cos \angle BPC = \frac{BP^2 + CP^2 - BC^2}{2BP \cdot CP} = \frac{3a^2 - 4a^2}{3a^2} = -\frac{1}{3}$,

所以二面角 $B-MN-C$ 的余弦值为 $-\frac{1}{3}$. (12分)

解法二: 如图, 建立空间直角坐标系 $N-xyz$.

设 $BC = CD = 2$, 则 $N(0, 0, 0)$, $B(\sqrt{2}, 0, 0)$,

$C(0, \sqrt{2}, 0)$, $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$,

所以 $\vec{NB} = (\sqrt{2}, 0, 0)$, $\vec{BM} = (0, \sqrt{2}, 2)$,

$\vec{NC} = (0, \sqrt{2}, 0)$, $\vec{CM} = (\sqrt{2}, 0, 2)$. (6分)

设平面 BMN 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \vec{NB} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \vec{BM} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \sqrt{2}x = 0, \\ \sqrt{2}y + 2z = 0, \end{cases}$ 设 $y =$

$\sqrt{2}$, 则 $\mathbf{m} = (0, \sqrt{2}, -1)$. (8分)

设平面 CMN 的法向量为 $\mathbf{n} = (a, b, c)$,

则 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{NC} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \vec{CM} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} \sqrt{2}b = 0, \\ \sqrt{2}a + 2c = 0, \end{cases}$ 设 $a = \sqrt{2}$, 则 $\mathbf{n} = (\sqrt{2}, 0, -1)$.

(10分)

$\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$,

因为二面角 $B-MN-C$ 为钝二面角,

所以二面角 $B-MN-C$ 的余弦值为 $-\frac{1}{3}$. (12分)

19. 【经典题型】超几何分布的分布列及期望、对立事件的概率

【解】(1) 随机变量 X 的可能取值为 $0, 1, 2$,

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}, P(X=1) = \frac{C_2^1 C_3^2}{C_5^3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5},$$

$$P(X=2) = \frac{C_2^2 C_3^1}{C_5^3} = \frac{3}{10},$$

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

随机变量 X 的期望 $E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = 1.2$. (4分)

(2) 解法一: 设脱落一个“学”为事件 A , 脱落一个“好”为事件 B ,
脱落一个“数”为事件 C , 事件 M 为脱落两个字, 则 $M = AA + BB + AB + AC + BC$. (5分)

$$P(AA) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, P(BB) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, P(AB) = \frac{C_2^1 C_2^1}{C_5^2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5},$$

$$P(AC) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}, P(BC) = \frac{C_2^1 C_1^1}{C_5^2} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}, \quad (8分)$$

所以某同学捡起后随机贴回, 标语恢复原样的概率

$$P = (P(AA) + P(BB)) \times 1 + (P(AB) + P(AC) + P(BC)) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5}. \quad (12分)$$

解法二: 掉下的两个字不同的概率 $p = \frac{10-2}{10} = 0.8$,

所以标语恢复原样的概率为 $(1-p) + \frac{1}{2}p = 0.6$. (12分)

20. 【经典题型】向量的数量积运算、两角差的正弦公式、三角形面积公式

【解】(1) 因为 $\vec{CD} = 2\vec{DB}$, 所以 $\vec{AD} - \vec{AC} = 2(\vec{AB} - \vec{AD})$,

所以 $3\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$. (2分)

$$\text{所以 } 3\vec{AD} \cdot \vec{CB} = (2\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot \vec{CB} = (2\vec{AB} + \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = 2\vec{AB}^2 - \vec{AC}^2 - \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2c^2 - b^2 - bc \cos A = 7 - 2 \cos A = 6,$$

所以 $\cos A = \frac{1}{2}$. (4分)

又因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$. (5分)

$$(2) \text{ 因为 } \begin{cases} C-B = \frac{2\pi}{3}, \\ C+B = \pi-A, \end{cases} \text{ 所以 } C = \frac{5\pi}{6} - \frac{A}{2}, B = \frac{\pi}{6} - \frac{A}{2}. \quad (6分)$$

因为 $c = 2b$, 所以由正弦定理得 $\sin C = 2\sin B$,

$$\text{即 } \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{A}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{A}{2}\right),$$

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \cos \frac{A}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{A}{2} = \cos \frac{A}{2} - \sqrt{3} \sin \frac{A}{2},$$

化简整理得 $\tan \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{9}$. (8分)

$$\text{所以 } \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{A}{2}} = \frac{2 \tan \frac{A}{2}}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{14},$$

(10分)

所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{3\sqrt{3}}{14}$. (12分)

21. 【重难点型】定点与圆上的点距离的最值、直线和圆相切、抛物线中直线过定点问题

(1)【解】设 $P(t^2, 2t)$, 则 $|PQ| \geq |PC_2| - 1 = \sqrt{(t^2-2)^2 + 4t^2} - 1 = \sqrt{t^4+4}-1 \geq 1$.

当 $P(0,0)$, Q 为线段 PC_2 与圆 C_2 的交点时, $|PQ|_{\min} = 1$. (4分)

(2)【证明】解法一: 由题意知 $P(4,4)$. 因为过点 P 的直线 m, n 与圆 C_2 相切, 所以直线 m, n 的斜率都存在. 设过点 P 的直线 $y-4=k(x-4)$ 与圆 C_2 相切,

则 $\frac{|2k-4|}{\sqrt{1+k^2}} = r$, 即 $(4-r^2)k^2 - 16k + 16 - r^2 = 0$. (6分)

设 $A\left(\frac{y_1^2}{4}, y_1\right), B\left(\frac{y_2^2}{4}, y_2\right)$, 直线 PA, PB 的斜率分别为 k_1, k_2 ,

则 k_1, k_2 为方程 $(4-r^2)k^2 - 16k + 16 - r^2 = 0$ 的两个根, (7分)

即 $k_1 + k_2 = \frac{16}{4-r^2}, k_1 k_2 = \frac{16-r^2}{4-r^2}$, 则有 $4k_1 k_2 - 3(k_1 + k_2) = 4$. ①

(8分)

又 $k_1 = \frac{y_1-4}{\frac{y_1^2}{4}-4} = \frac{4}{y_1+4}, k_2 = \frac{4}{y_2+4}$,

代入①, 得 $7(y_1+y_2) + y_1 y_2 + 24 = 0$. ② (10分)

设直线 AB 的方程为 $x = ty + b$, 由 $\begin{cases} x = ty + b, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 得 $y^2 - 4ty - 4b = 0$,

所以 $y_1 + y_2 = 4t, y_1 y_2 = -4b$. 代入②, 得 $7t - b + 6 = 0$.

所以直线 AB 的方程为 $x = t(y+7) + 6$,

所以直线 AB 恒过定点 $(6, -7)$. (12分)

解法二: 由题意知 $P(4,4)$. 因为直线 m, n 过点 P 且与圆 C_2 相切, 所以直线 m, n 的斜率均存在. 设过点 P 的直线 $y-4=k(x-4)$

与圆 C_2 相切, 则 $\frac{|2k-4|}{\sqrt{1+k^2}} = r$, 即 $(4-r^2)k^2 - 16k + 16 - r^2 = 0$. ① (6分)

设直线 AB 的方程为 $p(x-4) + q(y-4) = 1$ (提示: 不过点 (x_0, y_0) 的直线系方程可设为 $m(x-x_0) + n(y-y_0) = 1$), 则与抛物线 C_1 的交点方程可化为 $(y-4)^2 + 8(y-4)[p(x-4) + q(y-4)] = 4(x-4) \cdot [p(x-4) + q(y-4)]$. (7分)

(因为 $p(x-4) + q(y-4) = 1$, 将抛物线方程 $y^2 = 4x$, 变形为 $(y-4)^2 + 8(y-4)[p(x-4) + q(y-4)] = 4(x-4)[p(x-4) + q(y-4)]$, 设 $z = \frac{y-4}{x-4}$, 得到关于斜率 z 的一元二次方程)

令 $z = \frac{y-4}{x-4}$, 则 $(1+8q)z^2 + (8p-4q)z - 4p = 0$. ② (8分)

由题意方程①②同解, 故有

$[(16-r^2) - (4-r^2)] + \frac{3}{4} \times (-16) = [-4p - (8q+1)] + \frac{3}{4}(8p-4q)$, (9分)

即 $2p - 11q = 1$,

所以直线 AB 的方程为 $\frac{11q+1}{2}(x-4) + q(y-4) = 1$, (10分)

即 $x-6+q(11x+2y-52) = 0$. 由 $\begin{cases} x-6=0, \\ 11x+2y-52=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=6, \\ y=-7, \end{cases}$

所以直线 AB 恒过点 $(6, -7)$. (12分)

22. 【思路导引】(1)(i) 求导, 列出 a, b 的方程求解;

(ii) 转化为方程 $t = F(x) - F'(x)(x-2)$ 有 3 个不同根 \rightarrow 构造函数结合图象求解.

(2) 消参得 $a = \frac{3x \ln x - 3x + 1}{2x^2(2 \ln x - 1)} \rightarrow$ 转化为 $3x \ln x - 3x + 1 \leq 2x^2(2 \ln x - 1)$

1) 是否恒成立 \rightarrow 构造函数判断

【重难点考】函数的新定义, 利用导数的几何意义研究曲线的切线, 利用导数研究函数的单调性、极值和最值

【解】(1)(i) 由 $f(x) = ax^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, g(x) = bx \ln x$,

得 $f'(x) = 3ax^2 - 3x + \frac{1}{2}, g'(x) = b(1 + \ln x)$.

由题意, 1 是平滑函数 $F(x)$ 的“平滑点”,

可知 $a-1=0$, 且 $3a - \frac{5}{2} = b$, 解得 $a=1, b=\frac{1}{2}$. (2分)

(ii) 由题意, $F(x) = \begin{cases} x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, & x < 1, \\ \frac{x \ln x}{2}, & x \geq 1, \end{cases}$ 过点 $P(2, t)$ 作曲线 $y =$

$F(x)$ 的切线, 则切点 $(x, F(x))$ 满足方程 $F(x) - t = F'(x)(x-2)$, 故原题等价于方程 $t = F(x) - F'(x)(x-2)$ 有 3 个不同根. (3分)

(设 $p(x) = F(x) - F'(x)(x-2)$, 利用导数研究 $p(x)$ 的单调性和极值, 画出 $p(x)$ 的图象, 数形结合求解)

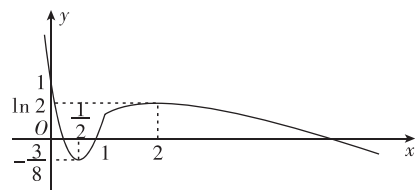
设 $p(x) = F(x) - F'(x)(x-2)$,

则 $p'(x) = \begin{cases} -(6x-3)(x-2), & x < 1, \\ \frac{2-x}{2x}, & x \geq 1. \end{cases}$ (4分)

令 $p'(x) > 0$, 得 $\frac{1}{2} < x < 2$; 令 $p'(x) < 0$, 得 $x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 2$,

所以函数 $p(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 和 $(2, +\infty)$ 上

单调递减, 且 $p(\frac{1}{2}) = F(\frac{1}{2}) - F'(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-2) = -\frac{3}{8}, p(2) = F(2) - F'(2)(2-2) = \ln 2, p(x)$ 的大致图象如图所示.



由图可知 $-\frac{3}{8} < t < \ln 2$, 即实数 t 的取值范围为 $(-\frac{3}{8}, \ln 2)$. (6分)

(2) 原问题等价于对 $\forall b > 0$, 是否 $\exists a \geq 1$, 使得

$\begin{cases} ax^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = bx \ln x, \\ 3ax^2 - 3x + \frac{1}{2} = b(1 + \ln x) \end{cases}$ 有解. (7分)

消去 a , 得 $1 - \frac{3}{2}x = b(2 \ln x - 1)$, 即 $b = \frac{1 - \frac{3}{2}x}{2 \ln x - 1}$,

由 $b > 0$, 可得 $x \in (\frac{2}{3}, \sqrt{e})$.

故原问题进一步化简为 $\forall x \in \left(\frac{2}{3}, \sqrt{e}\right)$, 是否 $\exists a \geq 1$, 使得 $a =$

$$\frac{3x \ln x - 3x + 1}{2x^2(2 \ln x - 1)} \text{ 成立,} \quad (9 \text{ 分})$$

等价于 $\forall x \in \left(\frac{2}{3}, \sqrt{e}\right)$, $3x \ln x - 3x + 1 \leq 2x^2(2 \ln x - 1)$ 是否恒成立.

(构造函数, 利用函数的单调性、最值判断)

设 $q(x) = (4x^2 - 3x) \ln x - 2x^2 + 3x - 1$, 则 $q'(x) = (8x - 3) \ln x$.

(10 分)

当 $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 时, $q'(x) < 0$, $q(x)$ 单调递减; 当 $x \in (1, \sqrt{e})$ 时,

$q'(x) > 0$, $q(x)$ 单调递增,

故 $q(x) \geq q(1) = 0$, 不等式恒成立,

即 $\forall b > 0, \exists a \geq 1$, 使得 $F(x)$ 存在正的“平滑点”.

(12 分)

6 2023 辽宁省大连市高三双基测试

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	B	C	B	C	A	D	ABC	AC
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	BCD	ACD	-1	2	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{21} \quad 9\pi$				

1. C 【基础考点】集合的交集运算

【深度解析】因为 $\frac{x-1}{2} \in \mathbf{Z}$, 设 $\frac{x-1}{2} = k (k \in \mathbf{Z})$, 则 $x = 2k+1, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $B = \{x | x = 2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$. 又 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. 故选 C.

2. A 【基础考点】复数的除法运算、共轭复数的概念

【深度解析】因为 $z = \frac{5}{4+3i} = \frac{5(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{5(4-3i)}{25} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$, 所以 $\bar{z} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$. 故选 A.

3. B 【基础考点】存在量词命题的否定

【深度解析】已知 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 < 0$, 则 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$. 故选 B.

4. C 【新趋考点】分数指数幂与根式的互化

【深度解析】设金星运行轨道的半长轴为 a_1 , 金星和地球的公转周期分别为 t_1, t_2 . 由题意可知 $\frac{a_1^3}{t_1^2} = \frac{a^3}{t_2^2}$, $\frac{t_1}{t_2} = \frac{2}{3}$, 所以 $a_1^3 = \frac{t_1^2}{t_2^2} \cdot a^3 = \frac{4}{9}a^3$, 即 $a_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}a$.

解法一: 因为 $1.26^3 \approx 2.0004$, 所以 $2^{\frac{1}{3}} \approx 1.26$, 又 $3^{\frac{1}{3}} \approx 1.442$, 所以

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}a = \left(\frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}\right)^2 a = \frac{1.26 \times 1.26}{1.442 \times 1.442} a \approx 0.76a. \text{ 故选 C.}$$

解法二: $a_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}a = \frac{\sqrt[3]{12}}{3}a$. 因为 $2.1^3 < 12 < 2.5^3$, 所以 $2.1 < \sqrt[3]{12} < 2.5$, 则 $0.7a < \frac{\sqrt[3]{12}}{3}a < \frac{2.5}{3}a < 0.9a$, 故选 C.

5. B 【经典题型】利用二项展开式的通项求特定项

【深度解析】令 $x = 1$, 则 $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中所有项的系数和为 $(a+1)^6$, 所以 $(a+1)^6 = 64$, 解得 $a = 1$ (负值舍去). 二项式 $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = C_6^r x^{6-3r}$, 令 $6-3r = 0$, 得 $r = 2$, 所

以展开式中的常数项为 $T_3 = C_6^2 = 15$. 故选 B.

快解

令 $x = 1$, 则 $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中所有项的系数和为 $(a+1)^6$, 所以 $(a+1)^6 = 64$, 解得 $a = 1$ (负值舍去). 二项式 $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 $T_3 = C_6^2 x^4 \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = C_6^2 = 15$. 故选 B.

6. C 【热门考点】二倍角公式、诱导公式及同角三角函数基本关系

【深度解析】 $\cos^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha = \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - 2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{1}{2}$, 整理得 $\tan^2 \alpha - 4\tan \alpha + 3 = 0$, 解得 $\tan \alpha = 1$ 或 $\tan \alpha = 3$. 因为 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\tan \alpha > 1$, 所以 $\tan \alpha = 3$. 故选 C.

7. A 【热门题型】利用导数研究函数的单调性、利用单调性比较数值的大小

【深度解析】 $a = \frac{32(4 - \ln 32)}{e^4} = \frac{\ln \frac{e^4}{32}}{\frac{e^4}{32}}$, $b = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$, $c = \frac{\log_{\sqrt{e}} 2}{4} =$

$$\frac{\frac{1}{2} \log_{\sqrt{e}} 2}{2} = \frac{\ln 2}{2}. \text{ 令 } f(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \text{ 当 } x \in (0, e) \text{ 时,}$$

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 因为 $e^2 < 8$, 所以 $\frac{e^4}{32} < \frac{8^2}{32} = 2$, 所以 $\frac{e^4}{32} < 2 < e$, 所以 $f\left(\frac{e^4}{32}\right) < f(2) < f(e)$, 即 $a < c < b$. 故选 A.

8. D

思路导引

$$\left. \begin{aligned} g(x) - f(x-4) &= 7 \longrightarrow g(x+2) - f(x-2) = 7 \\ f(x) + g(2-x) &= 5 \xrightarrow{g(x+2) = g(2-x)} f(x) + \\ g(x+2) &= 5 \end{aligned} \right\} \longrightarrow$$