

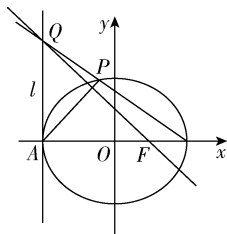
$$y_0 - \frac{3(x_0+2)}{y_0} = \frac{y_0}{x_0+2}(t-x_0), \text{ 得到 } -y_0^2(x_0+2) = [y_0^2-3(x_0+2)](t-x_0), \text{ 即 } -y_0^2(x_0+2) = [y_0^2-3(x_0+2)]t - [y_0^2-3(x_0+2)]x_0, \text{ 即 } -2y_0^2 = [y_0^2-3(x_0+2)]t + 3x_0(x_0+2), \text{ 即 } (t+2)y_0^2 = 3(x_0+2)(t-x_0)$$

又因为 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 所以 $y_0^2 = 3 - \frac{3x_0^2}{4}$. ②

将②代入①可得 $\left(3 - \frac{3x_0^2}{4}\right)(t+2) = 3(x_0+2)(t-x_0)$,

即 $(t-2)(x_0+2)^2 = 0$,

因为 $x_0 \neq -2$, 所以 $t=2$, 所以直线 PQ 过定点 $(2,0)$. (12分)



方法速记 求解直线过定点问题常用方法如下:

(1)“特殊探路,一般证明”:即先通过特殊情况确定定点,再转化为有方向、有目的的一般性证明;

(2)“一般推理,特殊求解”:即设出定点坐标,根据题设条件选择参数,建立一个直线系或曲线的方程,再根据参数的任意性得到一个关于定点坐标的方程组,以这个方程组的解为坐标的点即为所求点;

(3)求证直线过定点 (x_0, y_0) , 常利用直线的点斜式方程 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 或截距式 $y = kx + b$ 来证明.

22. 思路导引

(1) $f'(x) \rightarrow \begin{cases} \Delta = a^2 - 4 \leq 0 \rightarrow f(x) \text{ 的单调性,} \\ \Delta = a^2 - 4 > 0 \rightarrow f(x) \text{ 的单调性;} \end{cases}$

(2) 由题意 $\rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = 1 \\ a > 2 \end{cases} \rightarrow f(x_1)f(x_2) = e^a(-a^2+8)$

设 $g(a) = e^a(-a^2+8) \rightarrow g(a)$ 在 $(2, +\infty)$ 上的单调性 $\rightarrow g(a) < 4e^2 \rightarrow f(x_1)f(x_2) < 4e^2$.

【重难点题】利用导数研究函数的单调性、证明不等式

(1)【解】由 $f(x) = e^x[x^2 - (a+2)x + a + 3]$ ($x \in \mathbf{R}$),

得 $f'(x) = e^x[x^2 - (a+2)x + a + 3 + 2x - (a+2)] = e^x(x^2 - ax + 1)$,

易知 $e^x > 0$ 恒成立, 故判断 $x^2 - ax + 1$ 的正负, 即由判别式 $\Delta = a^2 - 4$ 的大小进行判断.

(以下分 $\Delta \leq 0$ 和 $\Delta > 0$ 两种情况讨论 $f'(x)$ 的符号)

①当 $\Delta = a^2 - 4 \leq 0$ 时, 即 $-2 \leq a \leq 2$, $f'(x) \geq 0$, 等号不恒成立, 则 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增. (2分)

②当 $\Delta = a^2 - 4 > 0$ 时, 即 $a < -2$ 或 $a > 2$,

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 或 $x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$,

当 $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} < x < \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 时, $f'(x) < 0$,

则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 上单调递减;

当 $x < \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 或 $x > \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ 时, $f'(x) > 0$,

则 $f(x)$ 在 $\left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $-2 \leq a \leq 2$ 时, $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递增;

当 $a < -2$ 或 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $\left(\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}, \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 上单调递减,

在 $\left(-\infty, \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增. (4分)

(2)【证明】 $\because f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有两个极值点 x_1, x_2 ,

$\therefore a < -2$ 或 $a > 2$, 且 x_1, x_2 为方程 $x^2 - ax + 1 = 0$ 的两个根, 即 $x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = 1$.

$\because x_1, x_2 \in (0, 2), \therefore x_1 + x_2 = a > 0$, 即 $a > 2$. (5分)

(根据极值点与导数零点的关系, 结合根与系数的关系, 化简不等式以及明确参数的取值范围)

$$f(x_1)f(x_2) = e^{x_1}[x_1^2 - (a+2)x_1 + a + 3] \cdot e^{x_2}[x_2^2 - (a+2)x_2 + a + 3]$$

$$= e^{x_1+x_2}(x_1^2 - ax_1 + 1 - 2x_1 + a + 2)(x_2^2 - ax_2 + 1 - 2x_2 + a + 2)$$

$$= e^{x_1+x_2}(-2x_1 + a + 2)(-2x_2 + a + 2) \quad (\text{提示: } x_1^2 - ax_1 + 1 = 0, x_2^2 - ax_2 + 1 = 0)$$

$$= e^{x_1+x_2}[4x_1x_2 - 2(a+2)(x_1+x_2) + (a+2)^2],$$

将 $x_1 + x_2 = a, x_1 x_2 = 1$ 代入上式, 可得

$$f(x_1)f(x_2) = e^a[4 - 2a(a+2) + (a+2)^2] = e^a(4 - 2a^2 - 4a + a^2 + 4a + 4) = e^a(-a^2 + 8).$$

由题意, 需证 $f(x_1)f(x_2) = e^a(8 - a^2) < 4e^2$. (10分)

(构造函数, 求导研究新函数的单调性和最值)

令 $g(a) = e^a(8 - a^2)$,

求得 $g'(a) = e^a(8 - a^2 - 2a) = -e^a(a - 2)(a + 4)$,

当 $a > 2$ 时, $g'(a) < 0$, 则 $g(a)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,

即 $g(a) < g(2) = 4e^2$,

故 $f(x_1)f(x_2) < 4e^2$. (12分)

8 2023 安徽省“皖南八校”高三大联考(二)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	C	A	A	D	B	B	ABD	AD
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	ACD	ABD	93	-495	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-e				

$m\left(\frac{9}{8}\right) < m(1) = 0$, 所以 $\ln \frac{9}{8} < \frac{1}{8}$. 综上可知 $e^{-\frac{7}{8}} > \frac{1}{8} > \ln \frac{9}{8}$.

当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调递减, 故 $f(e^{-\frac{7}{8}}) < f\left(\frac{1}{8}\right) < f\left(\ln \frac{9}{8}\right)$, 所以 $a < c < b$, 故选 B.

9. ABD 【基础考点】三角函数的诱导公式、函数的基本性质、导数的计算

【深度解析】函数 $f(x) = \sum_{i=1}^4 \frac{\sin[(2i-1)x]}{2i-1} = \sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7}$, 定义域为 \mathbf{R} ,

对于 A, $f(\pi+x) = \sin(\pi+x) + \frac{\sin(3\pi+3x)}{3} + \frac{\sin(5\pi+5x)}{5} + \frac{\sin(7\pi+7x)}{7} = -\sin x - \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 7x}{7} = \sin(-x) + \frac{\sin(-3x)}{3} + \frac{\sin(-5x)}{5} + \frac{\sin(-7x)}{7} = f(-x)$, 所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称, 故 A 正确;

对于 B, $f(-x) = \sin(-x) + \frac{\sin(-3x)}{3} + \frac{\sin(-5x)}{5} + \frac{\sin(-7x)}{7} = -\sin x - \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 5x}{5} - \frac{\sin 7x}{7} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 为奇函数, 图象关于点 $(0,0)$ 对称, 故 B 正确;

对于 C, 由选项 A, B 知 $f(x+\pi) = -f(x) \neq f(x)$, 则 $f(x)$ 的最小正周期不是 π , 故 C 错误;

对于 D, $f'(x) = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x \leq 4$ (提示: 因为 $-1 \leq \cos x \leq 1, -1 \leq \cos 3x \leq 1, -1 \leq \cos 5x \leq 1, -1 \leq \cos 7x \leq 1$, 所以 $-4 \leq \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x \leq 4$), 故 D 正确. 故选 ABD.

10. AD 【基础考点】抛物线的标准方程、简单几何性质

【深度解析】对于 A, 易知 $p=4$, 从而抛物线 C 的准线方程为 $y=-2$, 故 A 正确.

对于 B, 如图, 分别过 A, B 两点作准线 $y=-2$ 的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1 , 过点 A 作 BB_1 的垂线, 垂足为点 H.

由于 $3\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FB}$, 不妨设 $|AF|=t$, 则 $|BF|=3t$,

由抛物线的定义知 $|AA_1|=t, |BB_1|=3t$, 所以 $|BH|=2t$,

在 $\text{Rt}\triangle ABH$ 中, $\sin \angle BAH = \frac{|BH|}{|AB|} = \frac{1}{2}$, 则 $\angle BAH = 30^\circ$, 此时直线 AB 的倾斜角为 30° , 根据抛物线的对称性可知, 直线 AB 的倾斜角为 30° 或 150° , 故 B 错误.

对于 C, 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $M\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$,

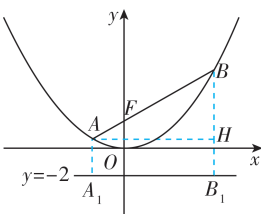
由抛物线的定义知, $|AF|+|BF|=y_1+2+y_2+2=16$, 所以 $y_1+y_2=12$, 所以点 M

到 x 轴的距离为 $\frac{y_1+y_2}{2}=6$, 故 C 错误.

对于 D, 由抛物线的几何性质

$$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} = \frac{2}{p} = \frac{1}{2},$$

所以 $4|AF|+|BF|=2(4|AF|+|BF|) \cdot \left(\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|}\right) =$



$2\left(5 + \frac{|BF|}{|AF|} + \frac{4|AF|}{|BF|}\right) \geq 18$, 当且仅当 $\frac{|BF|}{|AF|} = \frac{4|AF|}{|BF|}$, 即 $|BF|=2|AF|$ 时取等号, 故 D 正确. 故选 AD.

11. ACD

【思路导引】对于 A, 证明 $MN \parallel CQ$ 即可判断其正误;

对于 B, 由等体积法 $V_{A-DMN} = V_{N-ADM}$ 即可计算出相应的结果;

对于 C, 旋转平面 A_1ADD_1 , 使平面 A_1ADD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 共面, 由三角形两边之和大于第三边即可得到 $PQ+QO$ 的最小值;

对于 D, 作出辅助线, 即取 $\overrightarrow{D_1H} = \frac{1}{3}\overrightarrow{D_1C_1}$, 连接 HC, HQ —— 得到截面 $ACHQ$ —— 计算各边的边长即可得结果.

【新趋考点】线线关系、三棱锥的体积的计算、最值问题和截面问题

【深度解析】对于 A, 因为 M 为底面 ABCD 的中心, 所以 M 为 AC 的中点, 在 $\triangle ACQ$ 中, 因为 M, N 分别为 AC, AQ 的中点, 所以 $MN \parallel CQ$, 所以 CN 与 QM 共面, 所以 A 正确;

对于 B, 由题可得 $V_{A-DMN} = V_{N-ADM}$, 又因为 N 到平面 ABCD 的距离为定值 2, 且 $\triangle ADM$ 的面积为 1, 所以三棱锥 A-DMN 的体积为 $\frac{2}{3}$, 所以 B 错误;

对于 C, 如图①, 旋转平面 A_1ADD_1 , 使平面 A_1ADD_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 共面, 过 O 作 $OP \perp B_1D_1$, 交 B_1D_1 于点 P, 交 A_1D_1 于点 Q, 此时 $PQ+QO$ 最小, 在 $\text{Rt}\triangle OB_1P$ 中, $OB_1 = 3$,

$\angle OB_1P = \frac{\pi}{4}$, 则 $OP = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 则 $PQ+QO$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, 所以 C 正确;

对于 D, 如图②, 取 $\overrightarrow{D_1H} = \frac{1}{3}\overrightarrow{D_1C_1}$, 连接 HC, HQ, A_1C_1 , 则 $HQ \parallel A_1C_1$, 又 $AC \parallel A_1C_1$, 所以 $HQ \parallel AC$, 所以 A, M, C, H, Q 共面, 即过 A, Q, M 三点的平面截正四棱柱所得截面为四边形 $ACHQ$, 由 $AQ = CH = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{10}}{3}$, 得四边形 $ACHQ$ 是等腰梯形, 且

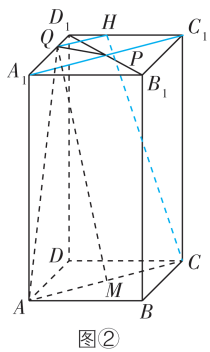
$QH = \frac{1}{3}A_1C_1 = \frac{1}{3}AC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 所以过 A, Q, M 三点的平面截正四棱柱所得截面的周长为 $\frac{8(\sqrt{2} + \sqrt{10})}{3}$, 所以 D 正确. 故选 ACD.

12. ABD

【思路导引】对于 A, 令 $x=y=0$ 可得 $f(0)=0$ —— 令 $x=1, y=0$ 可得 $g(0)$ 的值 —— 判断选项 A 的正误;

对于 B, 令 $x=0$ 可得 $f(-y)=f(0)g(y)-g(0)f(y)$ —— 将 $f(0)=0, g(0)=1$ 代入上式, 得 $f(-y)=-f(y)$ —— 判断选项 B 的正误;

对于 C, 令 $x=1, y=-1$ 可得 $f(2)=f(1)g(-1)-g(1)f(-1)$ —— 由 $f(-1)=-f(1)$ 可得 $f(2)=f(1)[g(-1)+g(1)]$ —— 将 $f(2)=$



$-f(-2) = -f(1)$ 代入可得 $g(1) + g(-1)$ 的值 \rightarrow 判断选项 C 的正误;

对于 D, 分别令 $y = -1$ 和 $y = 1$ 可得 $f(x+1) = f(x)g(-1) - g(x)f(-1)$, $f(x-1) = f(x)g(1) - g(x)f(1) \rightarrow f(x+1) + f(x-1) = -f(x) \rightarrow f(x-1) = f(x+2) \rightarrow f(x)$ 为周期函数, 且 3 是 $f(x)$ 的一个周期 \rightarrow 计算可得出结果 \rightarrow 判断选项 D 的正误.

【重难点考点】抽象函数的基本性质

【深度解析】对于 A, 令 $x = y = 0$, 得 $f(0) = f(0)g(0) - g(0)f(0) = 0$, 即 $f(0) = 0$, 令 $x = 1, y = 0$, 得 $f(1) = f(1)g(0) - g(1)f(0)$, 可得 $f(1)[1 - g(0)] = -g(1)f(0) = 0$, 结合 $f(1) \neq 0$ 得 $1 - g(0) = 0$, 即 $g(0) = 1$, 故 A 正确.

对于 B, 令 $x = 0$, 得 $f(-y) = f(0)g(y) - g(0)f(y)$, 将 $f(0) = 0, g(0) = 1$ 代入上式, 得 $f(-y) = -f(y)$, \therefore 函数 $f(x)$ 为奇函数, \therefore 函

数 $f(2x-1)$ 的图象关于点 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 对称, 故 B 正确.

对于 C, 令 $x = 1, y = -1$, 得 $f(2) = f(1)g(-1) - g(1)f(-1)$, $\therefore f(-1) = -f(1)$, $\therefore f(2) = f(1)[g(-1) + g(1)]$,

又 $\therefore f(2) = -f(-2) = -f(1)$, $\therefore -f(1) = f(1)[g(-1) + g(1)]$, $\therefore f(1) \neq 0, \therefore g(1) + g(-1) = -1$, 故 C 错误.

对于 D, 分别令 $y = -1$ 和 $y = 1$, 得到以下两个等式:

$f(x+1) = f(x)g(-1) - g(x)f(-1), f(x-1) = f(x)g(1) - g(x) \cdot f(1)$, 两式相加整理得 $f(x+1) + f(x-1) = -f(x)$, $\therefore f(x+2) + f(x) = -f(x+1)$, 即 $f(x) = -f(x+1) - f(x+2)$,

$\therefore -f(x) + f(x) = f(x+1) + f(x-1) - f(x+1) - f(x+2) = 0$,

即 $f(x-1) = f(x+2), \therefore f(x) = f(x+3), \therefore f(x)$ 为周期函数, 且 3 是

$f(x)$ 的一个周期. $\therefore f(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore f(-2) = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore f(2) = -f(-2) =$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}, f(3) = f(0) = 0, \therefore f(1) + f(2) + f(3) = 0, \therefore \sum_{n=1}^{2023} f(n) = f(1) +$

$f(2) + f(3) + \dots + f(2023) = 674 \times [f(1) + f(2) + f(3)] + f(2023) =$

$f(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 D 正确. 故选 ABD.

13. 93 【基础考点】百分位数的计算

【深度解析】因为 $10 \times 75\% = 7.5$, 根据第 p 百分位数的含义知, 应该选取第 8 个数作为第 75 百分位数, 所以这 10 人成绩的第 75 百分位数是 93.

【方法速记】计算一组 n 个数据的第 p 百分位数的步骤: 第一步, 把数据按从小到大的顺序排列; 第二步, 计算 $i = n \times p\%$; 第三步, 若 i 为整数, 则第 p 百分位数为第 i 项和第 $(i+1)$ 项数据的平均数, 若 i 不是整数, 而大于 i 的相邻整数为 j , 则第 p 百分位数为第 j 项数据.

14. -495 【基础考点】二项式定理的应用

【深度解析】把 $\left(x - \frac{1}{x} + y\right)^{11}$ 看成由 $x - \frac{1}{x}$ 和 y 两项构成, 展开式中

含 y^8 的项为 $C_{11}^8 \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 y^8$, 再将 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$ 展开可得含 x 的项为

$C_3^1 x^2 \left(-\frac{1}{x}\right) = -C_3^1 x$, 所以 xy^8 的系数为 $C_{11}^8 (-C_3^1) = -495$.

一题多解

由题意可知, 把 $\left(x - \frac{1}{x} + y\right)^{11}$ 看成由 $x + y$ 和 $-\frac{1}{x}$ 两项构成, 即 $\left(x - \frac{1}{x} + y\right)^{11} = \left[\left(x + y\right) - \frac{1}{x}\right]^{11}$, 其展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{11}^r (x+y)^{11-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r$, 而 $(x+y)^{11-r}$ 的展开式的通项为 $T'_{k+1} = C_{11-r}^k x^{11-r-k} y^k$, 令 $k = 8$, 则 $T'_9 = C_{11-r}^8 x^{3-r} y^8$, 令 $r = 1$, 则 $T_2 = C_{11}^1 C_{10}^8 x^2 y^8 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -495xy^8$, 则 xy^8 的系数为 -495.

15. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 【经典题型】两角差的正弦公式、同角三角函数的基本关系、二倍角公式的应用

【深度解析】 $\cos(2\alpha - \beta) = \cos\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{2}\right] =$

$\sin\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\beta + \frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= \sin\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right] \cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right] \sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right),$

$\sin\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$

$\frac{2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{\tan^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + 1} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$

$\cos\left[2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right] = \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) =$

$\frac{\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1 - \tan^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{1 + \tan^2\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{3},$

因为 $\cos\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}, \beta \in (0, \pi)$, 所以 $\beta + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\sin\left(\beta + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3},$

故 $\cos(2\alpha - \beta) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

16. -e

思路导引

将已知不等式转化为 $xe^x \geq -\frac{a \ln x}{x^a} = -a \ln x \cdot e^{-a \ln x}$

\rightarrow 构造函数 $f(x) = xe^x$, 于是将已知不等式问题转化为 $f(x) \geq f(-a \ln x) \rightarrow$ 利用导数研究 $f(x)$ 的单调性 \rightarrow 进而转化为不等式 $x \geq -a \ln x \rightarrow$ 分离变量并利用导数研究函数的最值即可得出 a 的取值范围 \rightarrow 进而得出所求的答案.

【重难点题型】利用导数研究函数的单调性与最值

【深度解析】因为不等式 $x^{a+1}e^x + a \ln x \geq 0$ 可转化为 $xe^x \geq -\frac{a \ln x}{x^a} =$

$-a \ln x \cdot e^{-a \ln x}$, 构造函数 $f(x) = xe^x$, 则 $f'(x) = (x+1)e^x > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x) \geq f(-a \ln x)$ 对任意实数 $x > 1$ 恒成立等价于 $x \geq -a \ln x$ 对任意实数

$x > 1$ 恒成立, 即 $a \geq -\frac{x}{\ln x}$ 对任意的实数 $x > 1$ 恒成立. 令 $g(x) =$

$\frac{x}{\ln x}, x > 1$, 则 $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, 故 $g(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)_{\min} = g(e) = e$, 则 $a \geq \left(-\frac{x}{\ln x}\right)_{\max} = -e$.

17. 【基础考点】等比数列的判定、数列的单调性

(1) 【证明】由 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+3}$, 可得 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n+3}{a_n} = 2 + \frac{3}{a_n}$,
 $\frac{1}{a_{n+1}} + 1 = \frac{3}{a_n} + 3 = 3\left(\frac{1}{a_n} + 1\right)$, 又 $a_1 = \frac{1}{2}$, 则 $\frac{1}{a_1} + 1 = 3 \neq 0$, (3分)
 故数列 $\left\{\frac{1}{a_n} + 1\right\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列. (4分)

一题多解 因为 $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n+3}$,
 所以 $\frac{\frac{1}{a_{n+1}} + 1}{\frac{1}{a_n} + 1} = \frac{\frac{2a_n+3}{a_n} + 1}{\frac{1}{a_n} + 1} = \frac{2a_n+3+a_n}{1+a_n} = \frac{3a_n+3}{1+a_n} = 3$. (2分)
 又 $a_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $\frac{1}{a_1} + 1 = 3 \neq 0$, 所以数列 $\left\{\frac{1}{a_n} + 1\right\}$ 是以 3 为首项, 3 为公比的等比数列. (4分)

(2) 【解】由 (1) 可知 $\frac{1}{a_n} + 1 = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$, 故 $\frac{1}{a_n} = 3^n - 1$, (5分)
 则 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 3 - 1 + 3^2 - 1 + 3^3 - 1 + \cdots + 3^n - 1 = \frac{3(1-3^n)}{1-3} - n$
 $= \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2} - n$. (6分)
 令 $f(n) = \frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2} - n (n \in \mathbf{N}^*)$,
 则 $f(n+1) - f(n) = \frac{3^{n+2}}{2} - \frac{3}{2} - (n+1) - \left(\frac{3^{n+1}}{2} - \frac{3}{2} - n\right) = 3^{n+1} - 1 > 0$, 易知 $f(n)$ 随 n 的增大而增大. (8分)
 又 $f(4) = 116 < 121, f(5) = 358 > 121$, 故满足 $f(n) < 121$ 的最大整数 n 为 4. (10分)

18. 【经典考点】线性回归方程、离散型随机变量的数学期望

【解】(1) 由题意得 $\bar{x} = \frac{3+4+5+6}{4} = 4.5, \bar{y} = \frac{0.1+0.2+0.4+0.5}{4} = 0.3$,
 $\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 6.1, \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 86, \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i y_i - 4\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^4 x_i^2 - 4\bar{x}^2} = \frac{6.1 - 4 \times 4.5 \times 0.3}{86 - 81} = 0.14$, (3分)

所以 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x} = 0.3 - 0.14 \times 4.5 = -0.33$,
 故 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.14x - 0.33$. (4分)

(2) (i) 由 (1) 得 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y} = 0.14x - 0.33$,
 当 $x = 7$ 时, $\hat{y} = 0.14 \times 7 - 0.33 = 0.65$,
 所以估计该市政府要给 E 大学选择自主创业的毕业生创业补贴的总金额为 $0.65 \times 1000 \times 1 = 650$ (万元). (6分)

(ii) 设小明、小红两人中选择自主创业的人数为 X , 则 X 的所有可能值为 0, 1, 2,
 $P(X=0) = (1-p)(2-2p) = 2p^2 - 4p + 2$,

$P(X=1) = (1-p)(2p-1) + p(2-2p) = -4p^2 + 5p - 1$,
 $P(X=2) = p(2p-1) = 2p^2 - p$, (10分)
 所以 $E(X) = (2p^2 - 4p + 2) \times 0 + (-4p^2 + 5p - 1) \times 1 + (2p^2 - p) \times 2 = 3p - 1$,

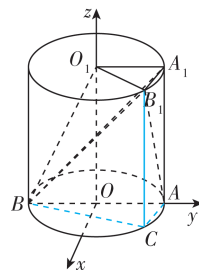
由 $1 \times (3p-1) \leq 1.4$ 可得 $p \leq \frac{4}{5}$,

因为 $\frac{1}{2} < p < 1$, 所以 $\frac{1}{2} < p \leq \frac{4}{5}$,

故 p 的取值范围为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{5}\right]$. (12分)

19. 【经典题型】线线垂直的证明、线面垂直的判定定理、平面与平面的夹角

【解】(1) 存在, 当 B_1C 为圆柱 OO_1 的母线时, $BC \perp AB_1$.
 如图, 连接 BC, AC, B_1C , 因为 B_1C 为圆柱 OO_1 的母线, 所以 $B_1C \perp$ 平面 ABC .
 又因为 $BC \subset$ 平面 ABC , 所以 $B_1C \perp BC$.
 因为 AB 为圆 O 的直径, 所以 $BC \perp AC$.
 因为 $BC \perp AC, B_1C \perp BC, AC \cap B_1C = C$, 所以 $BC \perp$ 平面 AB_1C .
 因为 $AB_1 \subset$ 平面 AB_1C , 所以 $BC \perp AB_1$. (6分)
 (2) 以 O 为原点, OA, OO_1 所在直线分别为 y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示, 则 $O_1(0, 0, 2), B(0, -1, 0)$.



因为劣弧 A_1B_1 的长为 $\frac{\pi}{6}$, 半径 $O_1A_1 = 1$, 所以 $\angle A_1O_1B_1 = \frac{\pi}{6}$, 所以 $B_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$, 所以 $\overrightarrow{O_1B} = (0, -1, -2), \overrightarrow{O_1B_1} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.
 设平面 B_1O_1B 的法向量为 $\mathbf{m} = (x, y, z)$,

$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{O_1B} = -y - 2z = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{O_1B_1} = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0, \end{cases}$ 令 $y = \sqrt{3}$, 得 $x = -3, z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
 所以 $\mathbf{m} = \left(-3, \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. (8分)

易知平面 A_1O_1B 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$. (9分)

所以 $\cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{-3}{\sqrt{9+3+\frac{3}{4}}} = -\frac{2\sqrt{51}}{17}$. (10分)

所以平面 A_1O_1B 与平面 B_1O_1B 夹角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{51}}{17}$. (12分)

20. 【经典考点】正、余弦定理在解三角形中的应用、同角三角函数的基本关系、二次函数的最值

(1) 【证明】解法一: $\because DB$ 平分 $\angle ADC, \therefore \angle ADB = \angle CDB$,
 则 $\cos \angle ADB = \cos \angle CDB$,
 由余弦定理得 $\frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \frac{CD^2 + BD^2 - BC^2}{2CD \cdot BD}$,

$$\text{即 } \frac{12+BD^2-4}{4\sqrt{3}BD} = \frac{4+BD^2-4}{4BD}, \text{ 解得 } BD^2 = 4(\sqrt{3}+1). \quad (2 \text{ 分})$$

$$\therefore \cos A = \frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD \cdot AB} = \frac{12+4-4(\sqrt{3}+1)}{8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2},$$

$$\cos C = \frac{CD^2+BC^2-BD^2}{2CD \cdot BC} = \frac{4+4-4(\sqrt{3}+1)}{8} = \frac{1-\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \cos A = -\cos C. \text{ 又 } A \in (0, \pi), C \in (0, \pi), \therefore A+C = \pi. \quad (6 \text{ 分})$$

解法二: 在 $\triangle ABD$ 中, 由正弦定理得 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin A}$, 在 $\triangle BCD$

$$\text{中, 由正弦定理得 } \frac{BC}{\sin \angle BDC} = \frac{BD}{\sin C},$$

$\therefore DB$ 平分 $\angle ADC$, $\therefore \angle ADB = \angle BDC$. 又 $AB = BC$,

$$\therefore \frac{BD}{\sin A} = \frac{BD}{\sin C}, \therefore \sin A = \sin C, \therefore A = C \text{ 或 } A+C = \pi. \quad (4 \text{ 分})$$

若 $A = C$, 则 $\triangle ABD \cong \triangle CBD$, 则 $AD = CD$, 与已知矛盾,

故 $A+C = \pi$. (6 分)

(2) 【解】在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos C$,

$$\therefore 16 - 8\sqrt{3} \cos A = 8 - 8 \cos C, \text{ 整理可得 } \cos C = \sqrt{3} \cos A - 1, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\therefore S_1^2 + S_2^2 = \left(\frac{1}{2} AD \cdot AB \sin A \right)^2 + \left(\frac{1}{2} BC \cdot CD \sin C \right)^2$$

$$= 12 \sin^2 A + 4 \sin^2 C$$

$$= 12 - 12 \cos^2 A + 4 - 4 \cos^2 C = 16 - 12 \cos^2 A - 4(\sqrt{3} \cos A - 1)^2$$

$$= -24 \cos^2 A + 8\sqrt{3} \cos A + 12 = -24 \left(\cos A - \frac{\sqrt{3}}{6} \right)^2 + 14.$$

$$\therefore A \in (0, \pi), \therefore \text{当 } \cos A = \frac{\sqrt{3}}{6} \text{ 时, } S_1^2 + S_2^2 \text{ 取得最大值, 最大值为 } 14.$$

(12 分)

21. 【重难点题】椭圆的标准方程、直线与椭圆的位置关系、三角形面积的最值问题

$$\text{【解】(1) 依题可得 } \begin{cases} c = \sqrt{3}, \\ \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2, \\ b = 1, \\ c = \sqrt{3}, \end{cases}$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \quad (3 \text{ 分})$$

(2) 易知直线 AP 与 AQ 的斜率同号, 所以直线 PQ 不垂直于 x 轴, 故可设直线 $PQ: y = kx + m, P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = kx + m \end{cases} \text{ 可得 } (1+4k^2)x^2 + 8mkx + 4m^2 - 4 = 0,$$

$$\text{则 } \Delta = 64m^2k^2 - 4(1+4k^2)(4m^2-4) = 16(4k^2+1-m^2) > 0, \text{ 即 } 4k^2+1 > m^2, \text{ 所以 } x_1+x_2 = \frac{-8mk}{1+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4m^2-4}{1+4k^2}, \quad (5 \text{ 分})$$

(联立直线与椭圆的方程是求解圆锥曲线问题的常用方法与技巧)

$$\text{由题知 } A(2, 0), \text{ 又 } k_{AP} \cdot k_{AQ} = \frac{1}{20}, \text{ 即 } \frac{y_1}{x_1-2} \cdot \frac{y_2}{x_2-2} = \frac{1}{20},$$

$$\text{则 } 20(kx_1+m)(kx_2+m) = (x_1-2)(x_2-2),$$

$$\text{则 } 20k^2x_1x_2 + 20km(x_1+x_2) + 20m^2 = x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4,$$

$$\text{则 } 20k^2 \cdot \frac{4m^2-4}{1+4k^2} + 20km \cdot \frac{-8mk}{1+4k^2} + 20m^2 = \frac{4m^2-4}{1+4k^2} - 2 \times \frac{-8mk}{1+4k^2} + 4,$$

化简得 $m^2 - km - 6k^2 = 0$, 所以 $m = -2k$ 或 $m = 3k$,

所以直线 $PQ: y = k(x-2)$ 或 $y = k(x+3)$.

因为直线 PQ 不经过点 A (提示: 当直线 $PQ: y = k(x-2)$ 时, 直线 PQ 经过点 $(2, 0)$, 即点 A), 所以直线 PQ 经过定点 $(-3, 0)$. 直线 PQ 的方程为 $y = k(x+3)$, 易知 $k \neq 0$. (8 分)

$$\text{设定点 } B(-3, 0), \text{ 则 } S_{\triangle APQ} = |S_{\triangle ABP} - S_{\triangle ABQ}| = \frac{1}{2} |AB| |y_1 - y_2|$$

$$= \frac{5}{2} |k| \cdot |x_1 - x_2| = \frac{5}{2} |k| \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2}$$

$$= \frac{5}{2} |k| \sqrt{\left(\frac{-8km}{1+4k^2} \right)^2 - 4 \times \frac{4m^2-4}{1+4k^2}} = \frac{5|k|}{2} \times \frac{\sqrt{16(4k^2+1-m^2)}}{1+4k^2}$$

$$= \frac{10 \sqrt{(1-5k^2)k^2}}{1+4k^2}.$$

(三角形的一条边所在直线过 x 轴上的定点, 其面积 $S = \frac{1}{2} a \cdot |y_1 - y_2|$ (a 为 x 轴上定长, y_1, y_2 分别为三角形另两个顶点的纵坐标), 这是求解三角形面积的常用技巧和方法)

$$\text{因为 } \Delta > 0, \text{ 且 } m = 3k, \text{ 所以 } 1-5k^2 > 0, \text{ 所以 } 0 < k^2 < \frac{1}{5}, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{设 } t = 4k^2 + 1 \in \left(1, \frac{9}{5} \right),$$

(利用换元法求最值, 不仅可以简化运算, 还可以将复杂的式子转化为常见的式子, 也是常用的求最值的方法)

$$\text{所以 } S_{\triangle APQ} = \frac{5}{2} \sqrt{\frac{-5t^2+14t-9}{t^2}} = \frac{5}{2} \sqrt{-9 \left(\frac{1}{t} - \frac{7}{9} \right)^2 + \frac{4}{9}} \leq \frac{5}{3},$$

$$\text{当且仅当 } t = \frac{9}{5}, \text{ 即 } k^2 = \frac{1}{14} \text{ 时取等号, 即 } \triangle APQ \text{ 面积的最大值为}$$

$$\frac{5}{3}. \quad (12 \text{ 分})$$

22. 【思路导引】(1) 利用导数的几何意义求出点 P 处的切线 l :

$$y = (2-3x_0)(x-x_0) \longrightarrow \text{令 } g(x) = (2-3x_0)(x-x_0) - (3x-e^x+1) \longrightarrow \text{讨论 } g(x) \text{ 的单调性和最小值} \longrightarrow \text{从而可证得结论}$$

$$(2) \text{ 讨论 } f(x) \text{ 的单调性和最值} \longrightarrow \text{得出 } 0 < m < 3 \ln 3 - 2 \xrightarrow{\text{零点存在定理}} x_0 \text{ 的取值范围} \longrightarrow \text{曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } (0, 0) \text{ 处的切线方程}$$

$$\longrightarrow \text{设直线 } y = m \text{ 与 } y = 2x, y = (2-3x_0)(x-x_0) \text{ 的交点的横坐标分别为 } x_3, x_4, \text{ 表示出 } x_3, x_4 \longrightarrow x_2 - x_1 < x_4 - x_3 = x_0 +$$

$$\frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2} \longrightarrow \text{证明 } x_0 + \frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2} < 2 - \frac{3m}{4} \text{ 即可}$$

【重难点题】导数的几何意义, 利用导数研究函数的单调性与最值、证明不等式

$$\text{【证明】(1) 由题意可得 } 3x_0 - e^{x_0} + 1 = 0, \text{ 即 } e^{x_0} = 3x_0 + 1,$$

$$\text{对 } f(x) \text{ 求导得 } f'(x) = 3 - e^x, \text{ 则 } f'(x_0) = 3 - e^{x_0} = 3 - 3x_0 - 1 = 2 - 3x_0, \text{ 可得曲线 } y = f(x) \text{ 在点 } P \text{ 处的切线 } l \text{ 的方程为 } y = (2-3x_0)(x-x_0). \quad (3 \text{ 分})$$

(根据导数的几何意义求出切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 其中 $(x_0, f(x_0))$ 为切点)

令 $g(x) = (2-3x_0)(x-x_0) - (3x-e^x+1)$, 且 $g(x_0) = 0$,

(通过构造函数 $g(x) = (2-3x_0)(x-x_0) - (3x-e^x+1)$, 利用导数研究其单调性与最值, 进而判断曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方, 这是常用的证明技巧与方法)

$$g'(x) = 2-3x_0-3+e^x = -1-3x_0+e^x, g'(x_0) = -3x_0+e^{x_0}-1=0,$$

易知 $g'(x) = -1-3x_0+e^x$ 在 \mathbf{R} 上为增函数, \therefore 当 $x < x_0$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > x_0$ 时, $g'(x) > 0$,

\therefore 函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore g(x)_{\min} = g(x_0) = 0$, 即 $(2-3x_0)(x-x_0) \geq f(x)$, 当且仅当 $x = x_0$ 时, 取等号, \therefore 曲线 $y=f(x)$ 上的点都不在直线 l 的上方. (6分)

(2) 由(1)可得 $f'(x) = 3-e^x$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = \ln 3$,

当 $x < \ln 3$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x > \ln 3$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 3)$ 上单调递增, 在 $(\ln 3, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore f(x)$ 的最大值为 $f(\ln 3) = 3\ln 3 - 3 + 1 = 3\ln 3 - 2$,

$\therefore 0 < m < 3\ln 3 - 2$.

(利用导数研究函数的单调性与最值, 结合函数的图象可判断 m 的取值范围)

由 $f(1) = 4-e > 0, f(2) = 7-e^2 < 0, \therefore x_0 \in (1, 2)$.

(利用零点存在定理求出 x_0 的取值范围是证明不等式的关键之一)

易得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线为 $y=2x$,

设直线 $y=m$ 与 $y=2x, y=(2-3x_0)(x-x_0)$ 的交点的横坐标分别为

$$x_3, x_4, \text{ 则 } x_3 = \frac{m}{2}, x_4 = x_0 + \frac{m}{2-3x_0},$$

$$\therefore x_2 - x_1 < x_4 - x_3 = x_0 + \frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{下面证明: } x_0 + \frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2} < 2 - \frac{3m}{4}.$$

(将所证的问题转化为 $x_2 - x_1 < x_4 - x_3 = x_0 + \frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2}$, 再转化为证明 $x_0 + \frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2} < 2 - \frac{3m}{4}$)

$$\therefore 2 - \frac{m}{4} - x_0 - \frac{m}{2-3x_0} = 2 - x_0 - m \cdot \frac{3(2-x_0)}{4(2-3x_0)} = (2-x_0) \cdot \frac{12x_0+3m-8}{4(3x_0-2)},$$

$$\therefore x_0 \in (1, 2), \therefore 2-x_0 > 0, 3x_0-2 > 1, \text{ 且 } 12x_0-8+3m > 4+3m > 0,$$

$$\therefore 2 - \frac{m}{4} - x_0 - \frac{m}{2-3x_0} > 0,$$

$$\therefore x_0 + \frac{m}{2-3x_0} - \frac{m}{2} < 2 - \frac{3m}{4}, \therefore x_2 - x_1 < 2 - \frac{3}{4}m. \quad (12 \text{ 分})$$

9 2023 浙江省绍兴市高三适应性考试

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	D	D	A	C	A	B	ABD	BC
题号	11	12	13		14		15		16	
答案	BCD	BD	84		29π		$(1,-2)$		$\sqrt{14}$	

1. D 【基础考点】不等式的解法、集合的交集运算

【深度解析】因为 $M = \{x | \log_2 x < 1\} = \{x | 0 < x < 2\}$, $N = \{x | 2x-1 < 0\} = \{x | x < \frac{1}{2}\}$, 所以 $M \cap N = \{x | 0 < x < \frac{1}{2}\}$, 故选 D.

2. C 【基础考点】复数的运算、虚部的概念

【深度解析】由题意, 得 $z = 1 - \frac{1}{1-i} = 1 - \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, 其虚部为 $-\frac{1}{2}$, 故选 C.

3. D 【经典题型】向量的数量积及模长

【深度解析】由 $|a-2b| = \sqrt{7}$ 两边平方得 $|a|^2 + 4|b|^2 - 4a \cdot b = |a|^2 + 4|b|^2 - 4|a| \cdot |b| \cos \langle a, b \rangle = 1 + 4|b|^2 - 4|b| \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + 4|b|^2 + 2\sqrt{3}|b| = 7$, 即 $2|b|^2 + \sqrt{3}|b| - 3 = 0$, 解得 $|b| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 故选 D.

4. D 【新趋考点】等差数列的前 n 项和公式、数列的单调性、充分条件与必要条件

【深度解析】若 $2S_{n+1} < S_n + S_{n+2}$, 则 $S_{n+1} - S_n < S_{n+2} - S_{n+1}$, 即 $a_{n+1} < a_{n+2}$, 所以公差 $d > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列. 因为 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, 当

$a_1 = -6, d = 2$ 时, 数列 $\{S_n\}$ 不递增. 若数列 $\{S_n\}$ 为递增数列, 不妨设 $a_1 = 1, d = 0$, 此时 $S_n = n, S_{n+1} = n+1, S_{n+2} = n+2$, 则 $2S_{n+1} = S_n + S_{n+2}$ (易错: 忽略特殊数列——常数列也为等差数列), 所以“ $2S_{n+1} < S_n + S_{n+2}$ ”是“数列 $\{S_n\}$ 为递增数列”的既不充分也不必要条件, 故选 D.

5. A 【重点考点】椭圆的几何性质

【深度解析】由题得, 椭圆的短半轴长 $b = R$. 因为截面与底面的夹角 $\theta = 30^\circ$, 所以长轴长 $2a = \frac{2R}{\cos 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{3}R$, 所以 $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ (结论: 若与底面夹角为 θ 的平面 α 截底面直径为 d 的圆柱, 则得到的截面必为椭圆, 且椭圆的短轴长等于圆柱的底面直径, 长轴长等于 $\frac{d}{\cos \theta}$), 所以 $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则该椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{2}$, 故选 A.

6. C 【重点考点】二次函数的图象与性质

【深度解析】 $\therefore f(m) = m^2 + m + a = m(m+1) + a < 0$, 即 $m(m+1) < -a$, 又 $a > 0$, 则 $-a < 0$, $\therefore m(m+1) < 0$, $\therefore m < 0, m+1 > 0$ (提示: 如果两因式的积为负数, 那么这两个因式异号), $\therefore f(m+1) = (m+1)^2 + (m+1) + a > 0$, 故选 C.