

故原问题进一步化简为 $\forall x \in \left(\frac{2}{3}, \sqrt{e}\right)$, 是否 $\exists a \geq 1$, 使得 $a =$

$$\frac{3x \ln x - 3x + 1}{2x^2(2 \ln x - 1)} \text{ 成立,} \quad (9 \text{ 分})$$

等价于 $\forall x \in \left(\frac{2}{3}, \sqrt{e}\right)$, $3x \ln x - 3x + 1 \leq 2x^2(2 \ln x - 1)$ 是否恒成立.

(构造函数, 利用函数的单调性、最值判断)

设 $q(x) = (4x^2 - 3x) \ln x - 2x^2 + 3x - 1$, 则 $q'(x) = (8x - 3) \ln x$.

(10 分)

当 $x \in \left(\frac{2}{3}, 1\right)$ 时, $q'(x) < 0$, $q(x)$ 单调递减; 当 $x \in (1, \sqrt{e})$ 时,

$q'(x) > 0$, $q(x)$ 单调递增,

故 $q(x) \geq q(1) = 0$, 不等式恒成立,

即 $\forall b > 0, \exists a \geq 1$, 使得 $F(x)$ 存在正的“平滑点”.

(12 分)

6 2023 辽宁省大连市高三双基测试

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	B	C	B	C	A	D	ABC	AC
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	BCD	ACD	-1	2	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{21} \quad 9\pi$				

1. C 【基础考点】集合的交集运算

【深度解析】因为 $\frac{x-1}{2} \in \mathbf{Z}$, 设 $\frac{x-1}{2} = k (k \in \mathbf{Z})$, 则 $x = 2k+1, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $B = \{x | x = 2k+1, k \in \mathbf{Z}\}$. 又 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 3, 5\}$. 故选 C.

2. A 【基础考点】复数的除法运算、共轭复数的概念

【深度解析】因为 $z = \frac{5}{4+3i} = \frac{5(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{5(4-3i)}{25} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$, 所以 $\bar{z} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$. 故选 A.

3. B 【基础考点】存在量词命题的否定

【深度解析】已知 $p: \exists x_0 \in \mathbf{R}, x_0^2 - x_0 + 1 < 0$, 则 $\neg p: \forall x \in \mathbf{R}, x^2 - x + 1 \geq 0$. 故选 B.

4. C 【新趋考点】分数指数幂与根式的互化

【深度解析】设金星运行轨道的半长轴为 a_1 , 金星和地球的公转周期分别为 t_1, t_2 . 由题意可知 $\frac{a_1^3}{t_1^2} = \frac{a^3}{t_2^2}$, $\frac{t_1}{t_2} = \frac{2}{3}$, 所以 $a_1^3 = \frac{t_1^2}{t_2^2} \cdot a^3 = \frac{4}{9}a^3$, 即 $a_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}a$.

解法一: 因为 $1.26^3 \approx 2.0004$, 所以 $2^{\frac{1}{3}} \approx 1.26$, 又 $3^{\frac{1}{3}} \approx 1.442$, 所以

$$a_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}a = \left(\frac{2^{\frac{1}{3}}}{3^{\frac{1}{3}}}\right)^2 a = \frac{1.26 \times 1.26}{1.442 \times 1.442} a \approx 0.76a. \text{ 故选 C.}$$

解法二: $a_1 = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}a = \frac{\sqrt[3]{12}}{3}a$. 因为 $2.1^3 < 12 < 2.5^3$, 所以 $2.1 < \sqrt[3]{12} < 2.5$, 则 $0.7a < \frac{\sqrt[3]{12}}{3}a < \frac{2.5}{3}a < 0.9a$, 故选 C.

5. B 【经典题型】利用二项展开式的通项求特定项

【深度解析】令 $x = 1$, 则 $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中所有项的系数和为 $(a+1)^6$, 所以 $(a+1)^6 = 64$, 解得 $a = 1$ (负值舍去). 二项式 $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式的通项 $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} \left(\frac{1}{x^2}\right)^r = C_6^r x^{6-3r}$, 令 $6-3r = 0$, 得 $r = 2$, 所

以展开式中的常数项为 $T_3 = C_6^2 = 15$. 故选 B.

快解

令 $x = 1$, 则 $\left(ax + \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中所有项的系数和为 $(a+1)^6$, 所以 $(a+1)^6 = 64$, 解得 $a = 1$ (负值舍去). 二项式 $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 $T_3 = C_6^2 x^4 \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 = C_6^2 = 15$. 故选 B.

6. C 【热门考点】二倍角公式、诱导公式及同角三角函数基本关系

【深度解析】 $\cos^2 \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha = \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{1 - 2\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = -\frac{1}{2}$, 整理得 $\tan^2 \alpha - 4\tan \alpha + 3 = 0$, 解得 $\tan \alpha = 1$ 或 $\tan \alpha = 3$. 因为 $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\tan \alpha > 1$, 所以 $\tan \alpha = 3$. 故选 C.

7. A 【热门题型】利用导数研究函数的单调性、利用单调性比较数值的大小

【深度解析】 $a = \frac{32(4 - \ln 32)}{e^4} = \frac{\ln \frac{e^4}{32}}{\frac{e^4}{32}}$, $b = \frac{1}{e} = \frac{\ln e}{e}$, $c = \frac{\log_{\sqrt{e}} 2}{4} =$

$$\frac{\frac{1}{2} \log_{\sqrt{e}} 2}{2} = \frac{\ln 2}{2}. \text{ 令 } f(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \text{ 当 } x \in (0, e) \text{ 时,}$$

$f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减. 因为 $e^2 < 8$, 所以 $\frac{e^4}{32} < \frac{8^2}{32} = 2$, 所以 $\frac{e^4}{32} < 2 < e$, 所以 $f\left(\frac{e^4}{32}\right) < f(2) < f(e)$, 即 $a < c < b$. 故选 A.

8. D

思路导引

$$\left. \begin{aligned} g(x) - f(x-4) &= 7 \longrightarrow g(x+2) - f(x-2) = 7 \\ f(x) + g(2-x) &= 5 \xrightarrow{g(x+2) = g(2-x)} f(x) + \\ g(x+2) &= 5 \end{aligned} \right\} \longrightarrow$$

$$\begin{aligned}
 f(x)+f(x-2) &= -2 \rightarrow \begin{cases} f(3)+f(5)+f(7)+\cdots+f(21) = -10, \\ f(4)+f(6)+f(8)+\cdots+f(22) = -10 \end{cases} \\
 f(x)+g(2-x) &= 5 \rightarrow f(0)+g(2) = 5 \xrightarrow{g(2)=4} \sum_{k=1}^{22} f(k) = -24 \\
 f(0) &= 1 \xrightarrow{f(0)+f(2)=-2} f(2) = -3 \\
 g(x)-f(x-4) &= 7 \rightarrow g(x+4)-f(x) = 7 \\
 f(x)+g(2-x) &= 5 \rightarrow g(x+4)+g(2-x) = 12 \rightarrow \\
 g(3) &= 6 \xrightarrow{f(x)+g(x+2)=5} f(1) = -1
 \end{aligned}$$

【重难点】函数性质的综合应用

【深度解析】因为 $g(x)-f(x-4)=7$, 所以 $g(x+2)-f(x-2)=7$ ①. 因为函数 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $g(2-x)=g(2+x)$. 又因为 $f(x)+g(2-x)=5$, 所以 $f(x)+g(x+2)=5$ ②. ①②两式作差, 得 $f(x)+f(x-2)=-2$, 所以 $f(3)+f(5)=-2, f(7)+f(9)=-2, \dots, f(19)+f(21)=-2$, 所以 $f(3)+f(5)+f(7)+f(9)+\cdots+f(21) = (-2) \times 5 = -10$, 同理可得 $f(4)+f(6)+f(8)+f(10)+\cdots+f(22) = (-2) \times 5 = -10$. 因为 $f(x)+g(2-x)=5$, 所以 $f(0)+g(2)=5$. 因为 $g(2)=4$, 所以 $f(0)=1$. 又由 $f(x)+f(x-2)=-2$, 得 $f(0)+f(2)=-2$, 所以 $f(2)=-2-f(0)=-3$. 由 $g(x)-f(x-4)=7$, 得 $g(x+4)-f(x)=7$. 又 $f(x)+g(2-x)=5$, 两式相加, 得 $g(x+4)+g(2-x)=12$, 令 $x=-1$, 得 $g(3)=6$. 又 $f(x)+g(x+2)=5$, 所以 $f(1)+g(3)=5$, 所以 $f(1)=5-g(3)=-1$, 所以 $\sum_{k=1}^{22} f(k) = f(1)+f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(22) = -1-3+(-10) \times 2 = -24$. 故选 D.

9. ABC 【基础考点】余弦型函数的周期、单调性、图象的对称性, 图象变换, 诱导公式

【深度解析】因为 $f(x) = \cos(2x-\pi) = -\cos 2x$,

$$\text{所以 } g(x) = -\cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right).$$

对于选项 A, $g(x)$ 的最小正周期 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 故 A 正确.

对于选项 B, 令 $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 所以 $g(x)$ 图象的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0\right) (k \in \mathbb{Z})$. 令 $k=1$, 得 $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 为 $g(x)$ 图象的一个对称中心, 故 B 正确 (另解: 因为 $2 \times \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$, 所以 $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 为 $g(x)$ 图象的一个对称中心, 故 B 正确).

对于选项 C, 由 $\pi + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得 $\frac{\pi}{3} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{5\pi}{6} + k\pi\right] (k \in \mathbb{Z})$, 故 C 正确.

对于选项 D, 因为 $y = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $y = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象与 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图

象重合, 故 D 错误. 故选 ABC.

10. AC 【经典题型】正态分布, 二项分布的方差(方差的性质), 回归直线方程, 数据的平均数、中位数和众数

【深度解析】对于选项 A, 因为 $\xi \sim N(1, \sigma^2)$, 所以 $P(\xi < -2) = P(\xi > 4) = 1 - P(\xi \leq 4) = 0.23$, 故 A 正确.

对于选项 B, 因为 $X \sim B\left(10, \frac{1}{3}\right)$, 所以 $D(X) = 10 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{20}{9}$, 所以 $D(3X-1) = 9D(X) = 20$, 故 B 错误.

对于选项 C, 回归直线过点 (\bar{x}, \bar{y}) , 将 $\bar{x}=4, \bar{y}=50$ 代入回归直线方程 $y = \hat{b}x + 10.8$, 得 $50 = 4\hat{b} + 10.8$, 解得 $\hat{b} = 9.8$, 故 C 正确.

对于选项 D, 设丢失的数据为 x , 则这组数据的平均数为 $\frac{x+31}{7}$, 众数为 3. 当 $x \leq 3$ 时, 中位数为 3, 此时 $\frac{x+31}{7} + 3 = 6$, 解得 $x = -10$; 当 $3 < x < 5$ 时, 中位数为 x , 此时 $\frac{x+31}{7} + 3 = 2x$, 解得 $x = 4$; 当 $x \geq 5$ 时, 中位数为 5, 此时 $\frac{x+31}{7} + 3 = 10$, 解得 $x = 18$. 所以 x 所有可能值的和为 $-10 + 4 + 18 = 12$, 故 D 错误. 故选 AC.

11. BCD 【热门考点】线线垂直的判定、线面平行的判定、正方体的截面问题、点到平面的距离

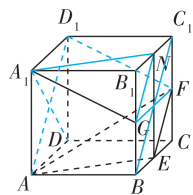
【深度解析】对于选项 A, 因为 F 为 CC_1 的中点, 所以 AF 与 CC_1 不垂直. 因为 $DD_1 \parallel CC_1$, 所以 AF 与 DD_1 也不垂直, 故 A 错误.

对于选项 B, 解法一: 如图, 连接 AD_1, D_1F, FG, BC_1 . 因为 $AD_1 \parallel BC_1, BC_1 \parallel EF$, 所以 $AD_1 \parallel EF$, 所以 A, E, F, D_1 四点共面. 因为 $A_1D_1 \parallel B_1C_1 \parallel GF$, 且 $A_1D_1 = B_1C_1 = GF$, 所以 $A_1D_1 \parallel GF$, 且 $A_1D_1 = GF$, 所以四边形 A_1D_1FG 为平行四边形, 所以 $A_1G \parallel D_1F, A_1G \not\subset$ 平面 $AEF, D_1F \subset$ 平面 AEF , 所以 $A_1G \parallel$ 平面 AEF , 故 B 正确.

解法二: 如图, 取 B_1C_1 的中点 N , 连接 A_1N, GN, EN . 因为 $A_1A \parallel NE$, 且 $A_1A = NE$, 所以四边形 A_1AEN 为平行四边形, 所以 $A_1N \parallel AE$. 因为 $A_1N \not\subset$ 平面 $AEF, AE \subset$ 平面 AEF , 所以 $A_1N \parallel$ 平面 AEF . 易知 $GN \parallel EF$, 因为 $GN \not\subset$ 平面 $AEF, EF \subset$ 平面 AEF , 所以 $GN \parallel$ 平面 AEF . 又 $A_1N \cap GN = N$, 所以平面 $A_1NG \parallel$ 平面 AEF . 因为 $A_1G \subset$ 平面 A_1NG , 所以 $A_1G \parallel$ 平面 AEF , 故 B 正确.

对于选项 C, 由选项 B 可知, 截面为四边形 $AD_1FE, AD_1 = \sqrt{2}, EF = \frac{\sqrt{2}}{2}, D_1F = \sqrt{D_1C_1^2 + C_1F^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}, AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以四边形 AD_1FE 为等腰梯形, 则 $S_{\text{四边形}AD_1FE} = \frac{9}{8}$, 故 C 正确.

对于选项 D, 由选项 B 可知平面 AEF 即平面 AD_1FE . 连接 A_1D , 设 $A_1D \cap AD_1 = O$, 则 $A_1D \cap$ 平面 $AD_1FE = O$. 因为 O 为 A_1D 的中点, 所以点 A_1 到平面 AD_1FE 的距离与点 D 到平面 AD_1FE 的距离相等, 故 D 正确. 故选 BCD.



一题多解 如图,建立空间直角坐标系 $D-xyz$, 连接 AD_1 , D_1F , 则 $D(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $E\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $F\left(0, 1, \frac{1}{2}\right)$, $A_1(1, 0, 1)$, $D_1(0,0,1)$, $G\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$.

对于选项 A, $\overrightarrow{AF} = \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{DD_1} = (0, 0, 1)$, 所以 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DD_1} = \frac{1}{2} \neq 0$, 所以 AF 与 DD_1 不垂直, 故 A 错误.

对于选项 B, $\overrightarrow{AE} = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, $\overrightarrow{AF} = \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right)$, 设平面 AEF 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{AF} = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -\frac{1}{2}x + y = 0, \\ -x + y + \frac{1}{2}z = 0. \end{cases} \text{ 令 } x = 2, \text{ 则 } \mathbf{n} = (2, 1, 2). \text{ 又}$$

$\overrightarrow{A_1G} = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$, 所以 $\overrightarrow{A_1G} \cdot \mathbf{n} = 0 \times 2 + 1 \times 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times 2 = 0$. 又 $A_1G \not\subset$ 平面 AEF , 所以 $A_1G \parallel$ 平面 AEF , 故 B 正确.

对于选项 C, 因为 $\overrightarrow{AD_1} = (-1, 0, 1)$, $\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, 所以 $\overrightarrow{AD_1} = 2\overrightarrow{EF}$, 所以 $AD_1 \parallel EF$, 所以 A, E, F, D_1 四点共面, 所以截面为四边形 AD_1FE . 因为 $\overrightarrow{D_1F} = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{AE} = \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$, 所以 $|\overrightarrow{D_1F}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

所以四边形 AD_1FE 为等腰梯形. 又 $AD_1 = \sqrt{2}$, $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以 $S_{\text{四边形}AD_1FE} = \frac{9}{8}$, 故 C 正确.

对于选项 D, 平面 AEF 的一个法向量 $\mathbf{n} = (2, 1, 2)$, $\overrightarrow{A_1A} = (0, 0, -1)$, 所以点 A_1 到平面 AD_1FE 的距离 $d_1 = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{A_1A}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{3}$. $\overrightarrow{DA} = (1, 0, 0)$, 所以点 D 到平面 AD_1FE 的距离 $d_2 = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{DA}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{3}$, 所以点 A_1 与点 D 到平面 AD_1FE 的距离相等, 故 D 正确. 故选 BCD.

12. ACD 【重难点】抛物线焦点弦的性质

【深度解析】抛物线 $y^2 = 4x$, 焦点 $F(1, 0)$.

对于选项 A, 因为直线 AB 的斜率为 k , 所以直线 CD 的斜率为 $-\frac{1}{k}$, 则直线 CD 的方程为 $y - 0 = -\frac{1}{k}(x - 1)$, 即 $x = -ky + 1$. 由 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = -ky + 1, \end{cases}$ 得 $y^2 + 4ky - 4 = 0$, $\Delta > 0$. 设 $C(x_1, y_1)$, $D(x_2, y_2)$, 所以

$$y_1 + y_2 = -4k, y_1 y_2 = -4. \text{ 则 } \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{y_1^2}{4} \times \frac{y_2^2}{4} + y_1 y_2 = -3,$$

故 A 正确.

对于选项 B, 由选项 A 可知, $x_1 + x_2 = -ky_1 + 1 - ky_2 + 1 = -k(y_1 + y_2) + 2 = 4k^2 + 2$, 所以 $|CD| = x_1 + x_2 + 2 = 4 + 4k^2$, 同理可得 $|AB| = 4 + \frac{4}{k^2}$.

(提示: 将 $|CD| = 4 + 4k^2$ 中的 k 换成 $-\frac{1}{k}$ 即可). 所以 $S_{\text{四边形}ACBD} = \frac{1}{2}|AB||CD| = \frac{1}{2}(4 + 4k^2)\left(4 + \frac{4}{k^2}\right) = 8\left(2 + k^2 + \frac{1}{k^2}\right) \geq 8\left(2 + 2\sqrt{k^2 \cdot \frac{1}{k^2}}\right) = 32$, 当且仅当 $k^2 = \frac{1}{k^2}$ ($k > 0$), 即 $k = 1$ 时等号成立. 所以四边形 $ACBD$ 面积的最小值为 32, 故 B 错误.

对于选项 C, 由选项 B 知, $|CD| = 4 + 4k^2$, $|AB| = 4 + \frac{4}{k^2} = \frac{4k^2 + 4}{k^2}$, 所以 $\frac{1}{|AB|} + \frac{1}{|CD|} = \frac{k^2}{4k^2 + 4} + \frac{1}{4k^2 + 4} = \frac{k^2 + 1}{4k^2 + 4} = \frac{1}{4}$, 故 C 正确.

对于选项 D, 直线 AB 的方程为 $y = k(x - 1)$, 由 $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ y = k(x - 1), \end{cases}$ 得 $k^2 x^2 - (2k^2 + 4)x + k^2 = 0$, $\Delta > 0$. 设 $A(x_3, y_3)$, $B(x_4, y_4)$, 则 $x_3 + x_4 = \frac{2k^2 + 4}{k^2} = 2 + \frac{4}{k^2}$, $x_3 x_4 = 1$, 则 $|AF| \cdot |BF| = (x_3 + 1)(x_4 + 1) = x_3 x_4 + x_3 + x_4 + 1 = 4 + \frac{4}{k^2}$, 所以 $4 + \frac{4}{k^2} = 16$. 因为 $k > 0$, 解得 $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以直线 CD 的斜率为 $-\sqrt{3}$. 故 D 正确.

故选 ACD.

13. -1 【基础考点】向量模的坐标表示

【深度解析】因为 $\mathbf{a} = (m, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$, 所以 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (m + 2, 3)$, 所以 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (m + 2)^2 + 3^2 = m^2 + 4m + 13$, $|\mathbf{a}|^2 = m^2 + 2^2 = m^2 + 4$, $|\mathbf{b}|^2 = 2^2 + 1^2 = 5$. 由 $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$, 得 $m^2 + 4m + 13 = m^2 + 4 + 5$, 整理得 $4m = -4$, 所以 $m = -1$.

14. 2 【基础题型】利用导数的几何意义研究曲线的切线

【深度解析】设切点的横坐标为 x_0 ($x_0 > 0$), $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, 由题意

$$\text{得 } \begin{cases} a = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}, \\ \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = ax_0 - 3, \end{cases} \text{ 即 } \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right)x_0 - 3, \text{ 整理得 } \ln x_0 - \frac{2}{x_0} + 2 = 0. \text{ 令 } g(x) = \ln x - \frac{2}{x} + 2, x > 0, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0, \text{ 所以 } g(x) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增. 又 } g(1) = 0, \text{ 所以方程 } \ln x_0 - \frac{2}{x_0} + 2 = 0 \text{ 有且只有一个根, 即 } x_0 = 1, \text{ 所以 } a = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 2.$$

一题多解

设切点坐标为 $\left(x_0, \ln x_0 - \frac{1}{x_0}\right)$, $f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$, 所以切线的斜率 $k = f'(x_0) = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}$, 切线方程为 $y - \left(\ln x_0 - \frac{1}{x_0}\right) = \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right)(x - x_0)$, 整理得 $y = \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right)x + \ln x_0 - \frac{2}{x_0} - 1$. 因为切线为 $y = ax - 3$, 所以 $a = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}$ 且 $\ln x_0 - \frac{2}{x_0} - 1 = -3$. 所以 $\ln x_0 - \frac{2}{x_0} + 2 = 0$. 令 $g(x) = \ln x - \frac{2}{x} + 2, x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $g(1) = 0$, 所以方程 $\ln x_0 - \frac{2}{x_0} + 2 = 0$ 有且只有一个根, 即 $x_0 = 1$, 所以 $a = \frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_0^2} = 2$.

15. $\frac{1}{2}$ 【热门考点】椭圆的定义及其几何性质

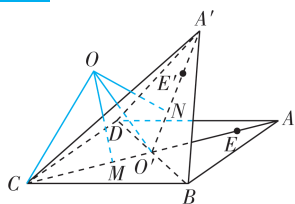
【深度解析】设 $P(x_0, y_0) (x_0 \neq 0)$, 因为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), G$ 为 $\triangle PF_1F_2$ 的重心, 所以 $G\left(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0}{3}\right)$ (提示: 若 $\triangle ABC$ 中, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 则其重心 $G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$). 因为 $GM \parallel F_1F_2$, 所以点 M 的纵坐标为 $\frac{y_0}{3}$, 即 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径 $r = -\frac{|y_0|}{3}$ (提示: 点 M 的纵坐标的绝对值即为 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆半径). 由等面积法得, $\frac{1}{2}|F_1F_2| \cdot |y_0| = \frac{1}{2}(|PF_1| + |PF_2| + |F_1F_2|) \cdot r$, 即 $2c \cdot |y_0| = (2a + 2c) \cdot \frac{|y_0|}{3}$, 即 $3c = a + c$, 即 $a = 2c$, 所以椭圆的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

16. $\sqrt{21} \quad 9\pi$

【思路导引】过 $\triangle CBD$ 的中心 M , $\triangle A'BD$ 的中心 N 分别作平面 CBD 、平面 $A'BD$ 的垂线, 交点为 $O \rightarrow O$ 为三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球球心, 记 $AC \cap BD = O' \xrightarrow{\text{Rt} \triangle OMO'} OM \xrightarrow{\text{Rt} \triangle OMC} R = OC$; 截面面积最小时 $OE' \perp$ 截面 $\xrightarrow{\text{Rt} \triangle ONE'} OE' = 2\sqrt{3} \rightarrow$ 截面圆半径 $r = \sqrt{R^2 - OE'^2} \rightarrow$ 截面面积的最小值

【重难点型】立体几何的翻折问题、多面体的外接球、球的截面面积的最值

【深度解析】因为四边形 $ABCD$ 为菱形且 $\angle ADC = \frac{2\pi}{3}$, 所以 $\triangle CBD, \triangle A'BD$ 均为等边三角形. 设 $\triangle CBD, \triangle A'BD$ 的中心 (即两等边三角形的外接圆圆心) 分别为 M, N , 过 M, N 分别作平面 CBD 和平面 $A'BD$ 的垂线, 且垂线交于点 O , 则点 O 即为三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球球心, 如图所示.



记 $AC \cap BD = O'$, 连接 CO, OO' . 因为二面角 $A'-BD-A$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 所以二面角 $A'-BD-C$ 的大小为 $\frac{2\pi}{3}$. 因为 $A'O' \perp BD, CO' \perp BD$, 所以 $\angle A'O'C$ 即为二面角 $A'-BD-C$ 的平面角, 所以 $\angle A'O'C = \frac{2\pi}{3}$. 因为 $O'M = O'N, OO' = OO', \angle OMO' = \angle ONO'$, 所以 $\triangle OMO' \cong \triangle ONO'$, 所以 $\angle OO'M = \angle OO'N = \frac{\pi}{3}$. 因为 $BC = 6$, 所以 $CO' = A'O' = 6 \times \sin \frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3}$, 所以 $O'M = O'N = \sqrt{3}$, 所以 $OM = O'N \cdot \tan \frac{\pi}{3} = 3$. 又 $CM = \frac{2}{3}CO' = 2\sqrt{3}$, 所以 $OC = \sqrt{CM^2 + OM^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{21}$, 所以三棱锥 $A'-BCD$ 的外接球半径

为 $\sqrt{21}$.

当截面面积取得最小值时, OE' 垂直于截面. 又因为截面是圆, 设截面圆的半径为 r , 外接球半径为 R , 则 $R = \sqrt{21}$. 又因为 $NE' = \frac{1}{3}A'O' = \sqrt{3}$, 且 $ON = OM = 3$, 所以 $OE' = \sqrt{ON^2 + NE'^2} = 2\sqrt{3}$, 所以 $r = \sqrt{R^2 - OE'^2} = \sqrt{(\sqrt{21})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 3$, 所以此时截面面积为 $\pi r^2 = 9\pi$.

17. 【基础考点】等差数列的通项公式及其前 n 项和公式、基本量运算、裂项相消求和

【解】(1) 选择①: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d > 0$.

由题意可得 $S_4^2 = S_2 S_8$, 即 $(4+6d)^2 = (2+d)(8+28d)$. (2分)

解得 $d = 2$, 又 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$.

选择②: 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则 $d > 0$.

由 $a_5 a_{10} - a_7^2 = 2$ 得 $(1+4d)(1+9d) - (1+6d)^2 = 2$, (3分)

解得 $d = 2$, 又 $a_1 = 1$, 所以 $a_n = a_1 + (n-1)d = 2n-1$. (5分)

(2) 由(1)可得 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$, (7分)

所以 $T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}$. (10分)

18. 【基础考点】正弦定理、余弦定理和面积公式在解三角形中的应用

【解】(1) 因为 $(b+c)(\sin B - \sin C) = (\sin A - \sin C)a$,

根据正弦定理, 得 $(b+c)(b-c) = (a-c)a$, (2分)

即 $ac = a^2 + c^2 - b^2$.

由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$. (4分)

因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$. (6分)

(2) 因为 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$,

所以 $\frac{1}{2}ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = \sqrt{3}$, 所以 $ac = 4$. (8分)

因为 $b^2 = a^2 + c^2 - ac = 4$, 所以 $a^2 + c^2 = 8$. (10分)

所以 $a+c = \sqrt{a^2 + c^2 + 2ac} = 4$, 所以 $\triangle ABC$ 的周长为 6. (12分)

19. 【经典题型】线面平行的判定、二面角的求解、应用

(1) 【证明】解法一: 因为 $DE \parallel AF, DE \not\subset$ 平面 $ABF, AF \subset$ 平面 ABF , 所以 $DE \parallel$ 平面 ABF . (2分)

因为底面 $ABCD$ 是正方形, 所以 $CD \parallel AB$.

又因为 $CD \not\subset$ 平面 $ABF, AB \subset$ 平面 ABF ,

所以 $CD \parallel$ 平面 ABF . (4分)

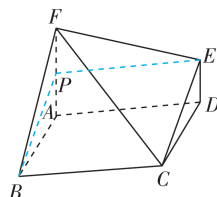
因为 $CD \subset$ 平面 $CDE, DE \subset$ 平面 $CDE, CD \cap DE = D$,

所以平面 $CDE \parallel$ 平面 ABF . 因为 $CE \subset$ 平面 CDE ,

所以 $CE \parallel$ 平面 ABF . (6分)

解法二: 如图, 过点 E 作 $EP \parallel DA$ 交 AF 于点 P , 连接 BP .

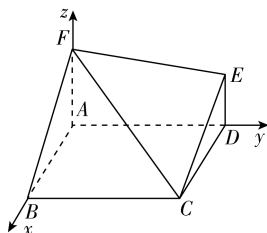
由题意可知, 四边形 $APED$ 为矩形, 所以 $EP \parallel DA$ 且 $EP = DA$.



因为 $BC \parallel DA$ 且 $BC = DA$, 所以 $EP \parallel BC$ 且 $EP = BC$,
所以四边形 $BCEP$ 为平行四边形, 所以 $CE \parallel BP$. (4 分)

因为 $BP \subset$ 平面 ABF , $CE \not\subset$ 平面 ABF ,
所以 $CE \parallel$ 平面 ABF . (6 分)

(2) 【解】由题意知 AB, AD, AF 两两垂直, 所以以 A 为坐标原点, 分别以 AB, AD, AF 所在直线为 x 轴、 y 轴、 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $DE = m (0 < m < 2)$, 由 $AB = AD = 4$, $AF = 2$ 得 $A(0, 0, 0), B(4, 0, 0), C(4, 4, 0), F(0, 0, 2), D(0, 4, 0), E(0, 4, m)$, 则 $\overrightarrow{FB} = (4, 0, -2), \overrightarrow{FC} = (4, 4, -2), \overrightarrow{CE} = (-4, 0, m)$. 设平面 BCF 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, 由

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{FB} = 0, \\ \mathbf{n}_1 \cdot \overrightarrow{FC} = 0 \end{cases} \text{ 得}$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2z_1 = 0, \\ 4x_1 + 4y_1 - 2z_1 = 0, \end{cases} \text{ 不妨取 } x_1 = 1, \text{ 则 } y_1 = 0, z_1 = 2,$$

从而平面 BCF 的一个法向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 2)$. (8 分)

设平面 ECF 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{CE} = 0, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \overrightarrow{FC} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -4x_2 + mz_2 = 0, \\ 4x_2 + 4y_2 - 2z_2 = 0, \end{cases} \text{ 不妨取 } z_2 = 4, \text{ 则 } x_2 = m, y_2 =$$

$2 - m$, 所以平面 ECF 的一个法向量为 $\mathbf{n}_2 = (m, 2 - m, 4)$. (10 分)

$$\text{所以 } |\cos \alpha| = |\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|m + 8|}{\sqrt{5} \times \sqrt{m^2 + (2 - m)^2 + 16}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$\text{化简得 } 4m^2 - 17m + 13 = 0, \text{ 解得 } m = 1 \text{ 或 } m = \frac{13}{4},$$

因为 $0 < m < 2$, 所以 $m = 1$, 即 $DE = 1$. (12 分)

20. 【经典题型】离散型随机变量的分布列和数学期望、利用导数求函数的最值

【解】(1) 由题意可知 X 的可能取值为 $1, k+1$, 则 $P(X=1) = p^k$,

$$P(X=k+1) = 1 - p^k,$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	$k+1$
P	p^k	$1-p^k$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times p^k + (k+1) \times (1 - p^k) = k + 1 - kp^k. \quad (3 \text{ 分})$$

(2) ① 设方案二总费用的数学期望为 $E(Y)$, 方案一总费用的数学期望为 Z , 则 $Y = 16X + 20$,

$$\text{所以方案二总费用的数学期望 } E(Y) = 16E(X) + 20 = 16(k + 1 - kp^k) + 20,$$

$$\text{又 } k = 5, \text{ 所以 } E(Y) = 16(6 - 5p^5) + 20 = -80p^5 + 116,$$

$$\text{又方案一的总费用的数学期望为 } Z = 80,$$

$$\text{所以 } Z - E(Y) = 16\left(5p^5 - \frac{9}{4}\right),$$

$$\text{当 } p > \sqrt[5]{0.45} \text{ 时, } \frac{9}{20} < p^5 < 1, \text{ 则 } 0 < 5p^5 - \frac{9}{4} < \frac{11}{4},$$

所以 $Z > E(Y)$, 所以该单位选择方案二合理. (7 分)

② 由①知方案二总费用的数学期望 $E(Y) = 16E(X) + 20 = 16(k + 1 - kp^k) + 20$.

$$\text{当 } p = \frac{1}{\sqrt[7]{e}} \text{ 时, } E(Y) = 16\left[k + 1 - k\left(\frac{1}{\sqrt[7]{e}}\right)^k\right] + 20 = 16\left(k + \frac{9}{4} - ke^{-\frac{k}{7}}\right),$$

又方案一的总费用为 $Z = 16k$,

$$\text{令 } E(Y) < Z \text{ 得 } 16\left(k + \frac{9}{4} - ke^{-\frac{k}{7}}\right) < 16k,$$

$$\text{所以 } ke^{-\frac{k}{7}} > \frac{9}{4}, \text{ 即 } \ln\left(ke^{-\frac{k}{7}}\right) > \ln \frac{9}{4}, \text{ 所以 } \ln k - \frac{k}{7} - \ln \frac{9}{4} > 0.$$

(9 分)

$$\text{设 } f(x) = \ln x - \frac{x}{7} - \ln \frac{9}{4}, x \in [2, +\infty), \text{ 所以 } f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{7} = \frac{7-x}{7x},$$

令 $f'(x) > 0$ 得 $2 \leq x < 7$, 令 $f'(x) < 0$ 得 $x > 7$,

所以 $f(x)$ 在区间 $[2, 7)$ 上单调递增, 在区间 $(7, +\infty)$ 上单调递减,

(10 分)

$$f(x)_{\max} = f(7) = \ln 7 - 1 - 2(\ln 3 - \ln 2) \approx 0.1 > 0,$$

$$f(8) = 3\ln 2 - \frac{8}{7} - 2(\ln 3 - \ln 2) = 5\ln 2 - 2\ln 3 - \frac{8}{7} \approx 1.3 - \frac{8}{7} > 0,$$

$$f(9) = 2\ln 3 - \frac{9}{7} - 2(\ln 3 - \ln 2) = 2\ln 2 - \frac{9}{7} \approx 1.4 - \frac{9}{7} > 0,$$

$$f(10) = \ln 10 - \frac{10}{7} - 2(\ln 3 - \ln 2) \approx 1.5 - \frac{10}{7} > 0,$$

$$f(11) = \ln 11 - \frac{11}{7} - 2(\ln 3 - \ln 2) \approx 1.6 - \frac{11}{7} > 0,$$

$$f(12) = \ln 12 - \frac{12}{7} - 2(\ln 3 - \ln 2) = 4\ln 2 - \ln 3 - \frac{12}{7} \approx 1.7 - \frac{12}{7} < 0,$$

所以 k 的最大值为 11.

(12 分)

21. 【思路导引】

(2)

$$\left. \begin{aligned} AB \perp AC &\rightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1 \\ \frac{x_1^2}{4} - y_1^2 &= 1 \\ \frac{x_2^2}{4} - y_2^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} y_2 - y_1 = \frac{x_1 + x_2}{4(y_1 + y_2)} \\ k_{BC} = -\frac{y_1}{4x_1}, k_{BD} = -\frac{y_1}{4x_1} \end{cases} \rightarrow k_{BC} =$$

$k_{BD} \rightarrow B, C, D$ 三点共线;

$$(3) \text{ 由 (2) 知直线 } AC \text{ 的方程 } y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1) \xrightarrow{\text{与双曲线方程联立}}$$

$$x_1 + x_2 \rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{10x_1y_1(x_1^2 + y_1^2)}{4x_1^2 - y_1^2} \xrightarrow{\frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1} S_{\triangle ABC} =$$

$$\frac{40\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1}\right)}{4\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 + 4\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - 17} \xrightarrow{\text{设 } k = \frac{y_1}{x_1}} S_{\triangle ABC} = \frac{40\left(k + \frac{1}{k}\right)}{4k^2 + 4\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 17}$$

$$\xrightarrow{S_{\triangle ABC} = \frac{48}{7}} k = \frac{1}{3} \rightarrow \text{直线 } l \text{ 的方程}$$

【重难题型】双曲线的标准方程、三点共线的证明、双曲线中的三角形面积问题

$$(1) \text{ 【解】由题可知 } \frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \text{ 解得 } a = 2,$$

$$\text{所以双曲线 } Q \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

(2 分)

(2)【证明】解法一:由题可知直线 AB, AC 的斜率存在且不为 0. 由双曲线的对称性可知点 A 与点 B 关于原点对称, 所以 $B(-x_1, -y_1)$.

因为 $AB \perp AC$, 所以 $k_{AB} \cdot k_{AC} = -1$, 即 $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$.

又点 A, C 在双曲线 Q 右支上, 所以 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1, \\ \frac{x_2^2}{4} - y_2^2 = 1, \end{cases}$ 两式作差整理得

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 + x_2}{4(y_1 + y_2)},$$

$$\text{则 } k_{BC} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} = \frac{x_2 - x_1}{4(y_2 - y_1)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{y_1}{x_1}, \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{又 } k_{BD} = \frac{-y_1 + \frac{3}{2}y_1}{-2x_1} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{y_1}{x_1},$$

所以 $k_{BC} = k_{BD}$.

又直线 BC, BD 有公共点 B , 所以 B, C, D 三点共线. (6分)

解法二:由题可知, 直线 AB, AC 斜率存在且不为 0. 由双曲线的对称性可知点 A 与点 B 关于原点对称, 所以 $B(-x_1, -y_1)$.

因为 $AB \perp AC$,

所以 $k_{AB} \cdot k_{AC} = -1$, 即 $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -1$. ①

又因为 $k_{BC} \cdot k_{AC} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 + x_1} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{x_2^2 - x_1^2} \cdot \frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1, \frac{x_2^2}{4} - y_2^2 = 1$,

$$\text{所以 } k_{BC} \cdot k_{AC} = \frac{\left(\frac{x_2^2}{4} - 1\right) - \left(\frac{x_1^2}{4} - 1\right)}{x_2^2 - x_1^2} = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

由①②得 $\frac{k_{AB}}{k_{BC}} = -4$, 所以 $k_{BC} = -\frac{1}{4}k_{AB} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{y_1}{x_1}$, (4分)

$$k_{BD} = \frac{-y_1 + \frac{3}{2}y_1}{-2x_1} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{y_1}{x_1}, \text{ 所以 } k_{BC} = k_{BD}.$$

又直线 BC, BD 有公共点 B , 所以 B, C, D 三点共线. (6分)

(3)【解】由(2)知直线 AC 的方程为 $y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1), \\ \frac{x^2}{4} - y^2 = 1, \end{cases} \text{ 化简得 } \left(1 - \frac{4x_1^2}{y_1^2}\right)x^2 + 8 \cdot \frac{x_1(x_1^2 + y_1^2)x}{y_1^2} - 4 \cdot$$

$$\frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{y_1^2} - 4 = 0,$$

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{\frac{8x_1(x_1^2 + y_1^2)}{y_1^2}}{1 - \frac{4x_1^2}{y_1^2}} = \frac{8x_1(x_1^2 + y_1^2)}{4x_1^2 - y_1^2}, \\ \Delta > 0. \end{cases}$$

$$\text{因为 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}y_1 \cdot (x_1 + x_2),$$

$$\left(S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} |AD| \cdot |x_1 - (-x_1)| + \frac{1}{2} |AD| \cdot |x_2 - x_1| = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}y_1 \cdot (x_1 + x_2) \right)$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}y_1 \cdot \frac{8x_1(x_1^2 + y_1^2)}{4x_1^2 - y_1^2} = \frac{10x_1y_1(x_1^2 + y_1^2)}{4x_1^2 - y_1^2}. \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{又 } \frac{x_1^2}{4} - y_1^2 = 1, \text{ 所以 } x_1^2 - 4y_1^2 = 4,$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{10x_1y_1(x_1^2 + y_1^2)}{4x_1^2 - y_1^2} = \frac{10x_1y_1(x_1^2 + y_1^2) \cdot 4}{(4x_1^2 - y_1^2) \cdot (x_1^2 - 4y_1^2)} = \frac{40(x_1^3y_1 + x_1y_1^3)}{4x_1^4 - 17x_1^2y_1^2 + 4y_1^4} = \frac{40\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1}\right)}{4\left(\frac{x_1}{y_1}\right)^2 + 4\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 - 17}.$$

(10分)

$$\text{令 } k = \frac{y_1}{x_1} (k > 0), \text{ 则 } S_{\triangle ABC} = \frac{40\left(k + \frac{1}{k}\right)}{4k^2 + 4\left(\frac{1}{k}\right)^2 - 17} = \frac{48}{7},$$

$$\text{令 } t = k + \frac{1}{k}, \text{ 整理得 } 24t^2 - 35t - 150 = 0. \text{ 因为 } t > 0, \text{ 所以 } t = \frac{10}{3},$$

$$\text{所以 } k + \frac{1}{k} = \frac{10}{3}, \text{ 所以 } 3k^2 - 10k + 3 = 0, \text{ 解得 } k = 3 \text{ 或 } k = \frac{1}{3}.$$

$$\text{又因为双曲线 } C \text{ 的渐近线方程为 } y = \pm \frac{1}{2}x, \text{ 所以 } k = \frac{1}{3}.$$

$$\text{所以直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{1}{3}x. \quad (12 \text{ 分})$$

22. 思路导引

(2) $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$, 设 $x_1 > x_2 \rightarrow g(x_1) - 2x_1 > g(x_2) - 2x_2 \rightarrow$ 设 $h(x) = g(x) - 2x \rightarrow h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数 $\rightarrow h'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 $\rightarrow k \leq e^{2x} - \frac{\ln x + 1}{x} - \left(2 + \frac{1}{e}\right) \xrightarrow{\text{构造函数}} \text{设 } \varphi(x) = e^{2x} - \frac{\ln x + 1}{x} - \left(2 + \frac{1}{e}\right) \rightarrow \text{求导判断 } \varphi(x) \text{ 的单调性} \rightarrow \varphi(x) \text{ 的最小值} \rightarrow k \text{ 的取值范围}$

【重难题型】利用导数研究函数的零点、利用导数解决不等式恒成立问题

$$(1) \text{【证明】} \because f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + \ln x + kx - k, \therefore f'(x) = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + k,$$

$$\text{令 } m(x) = \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + k, \text{ 则 } m'(x) = -\frac{1}{x^2} \ln x,$$

由 $m'(x) > 0$ 得 $0 < x < 1$, 由 $m'(x) < 0$ 得 $x > 1$, $\therefore m(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore m(x)_{\max} = m(1) = 1 + k$.

$$\text{又 } \because k \leq -1, \therefore m(x)_{\max} \leq 0,$$

$$\text{即 } f'(x) \leq 0,$$

(4分)

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore f(1) = 0, \therefore$ 函数 $f(x)$ 只有一个零点.

(5分)

(2)【解】不妨设 $x_1 > x_2$, 由 $\frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2} > 2$ 可得 $g(x_1) - g(x_2) > 2x_1 - 2x_2$, 即 $g(x_1) - 2x_1 > g(x_2) - 2x_2$.

$$\text{令 } h(x) = g(x) - 2x = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\ln^2 x - \ln x - kx - \left(2 + \frac{1}{e}\right)x + k,$$

则 $h(x_1) > h(x_2)$, \therefore 函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$$\text{则 } h'(x) = e^{2x} - \frac{\ln x + 1}{x} - k - \left(2 + \frac{1}{e}\right) \geq 0 \text{ 恒成立, 则 } k \leq e^{2x} - \frac{\ln x + 1}{x} - \left(2 + \frac{1}{e}\right),$$

(7分)

($h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增转化为 $h'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 通过分离常数法转化为函数的最值问题)

$$\text{令 } \varphi(x) = e^{2x} - \frac{\ln x + 1}{x} - \left(2 + \frac{1}{e}\right), \text{ 则 } \varphi'(x) = 2e^{2x} + \frac{\ln x}{x^2} = \frac{2x^2 e^{2x} + \ln x}{x^2},$$

$$\text{令 } q(x) = 2x^2 e^{2x} + \ln x, \text{ 则 } q'(x) = 4x(x+1)e^{2x} + \frac{1}{x} > 0,$$

\therefore 函数 $q(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$$\therefore q\left(\frac{1}{e}\right) = 2e^{\frac{2}{e}-2} - 1 < \frac{2}{e} - 1 < 0, q(1) = 2e^2 > 0,$$

$$\therefore \text{存在 } x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right), \text{ 使得 } q(x_0) = 2x_0^2 e^{2x_0} + \ln x_0 = 0,$$

$$\text{则 } 2x_0 e^{2x_0} = -\frac{1}{x_0} \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0}. \quad (9 \text{ 分})$$

(在处理隐零点问题时, 有时需用到“同构”的方法, 由 $2x_0^2 e^{2x_0} + \ln x_0 = 0$, 即 $2x_0 e^{2x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} = e^{\ln \frac{1}{x_0}} \ln \frac{1}{x_0}$, 从而得到 $2x_0 = \ln \frac{1}{x_0} = -\ln x_0$)

令 $t(x) = xe^x, x > 0$, 则 $t'(x) = (x+1)e^x > 0$, 故函数 $t(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,

$$\therefore x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right), \therefore 1 < \frac{1}{x_0} < e, \therefore 0 < \ln \frac{1}{x_0} < 1.$$

$$\text{由 } 2x_0 e^{2x_0} = \frac{1}{x_0} \ln \frac{1}{x_0} \text{ 可得 } t(2x_0) = t\left(\ln \frac{1}{x_0}\right),$$

$$\therefore 2x_0 = -\ln x_0, \therefore e^{2x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

当 $0 < x < x_0$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 函数 $\varphi(x)$ 单调递减;

当 $x > x_0$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 函数 $\varphi(x)$ 单调递增,

$$\therefore \varphi(x)_{\min} = \varphi(x_0) = e^{2x_0} - \frac{\ln x_0 + 1}{x_0} - \left(2 + \frac{1}{e}\right) = \frac{1 - (1 - 2x_0)}{x_0} -$$

$$\left(2 + \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}, \quad (11 \text{ 分})$$

$$\therefore k \leq -\frac{1}{e}. \text{ 故 } k \text{ 的取值范围是 } \left(-\infty, -\frac{1}{e}\right]. \quad (12 \text{ 分})$$

7 2023 福建省泉州市高中毕业班质量监测(一)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	A	D	D	B	B	C	D	ACD	AC
题号	11	12	13		14		15		16	
答案	BD	ACD	$\sqrt{3}$		$y = x + 1$		2^n		2	

1. A 【基础考点】集合的交集运算、一元二次不等式的解法

【深度解析】 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x + 1 \leq 6\} = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x \mid 2x^2 - 7x + 3 < 0\} = \left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 3\right\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 2\}$. 故选 A.

2. A 【基础考点】复数的除法运算、几何意义

【深度解析】 $\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$, 其在复平面内对应点的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 位于第一象限. 故选 A.

3. D 【经典题型】利用二项展开式的通项求特定项的系数

【深度解析】由二项式定理可得 $\left(\frac{1}{x} - \sqrt{x}\right)^{10}$ 的展开式的通项为 $T_{r+1} = C_{10}^r \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{10-r} \cdot (-\sqrt{x})^r = (-1)^r C_{10}^r x^{\frac{3}{2}r-10}$, 令 $\frac{3}{2}r-10=2$, 解得 $r=8$, 所以 x^2 的系数为 $(-1)^8 C_{10}^8 = 45$. 故选 D.

▶ 快解 由二项展开式的通项可知, $T_9 = C_{10}^8 \left(\frac{1}{x}\right)^2 (-\sqrt{x})^8 = (-1)^8 C_{10}^8 x^2 = 45x^2$, 故选 D.

4. D 【新趋考点】条件概率的计算

【深度解析】设公司男、女员工的人数分别为 $2n$ 和 n , 则男员工中, 肥胖者有 $2n \times \frac{3}{100} = \frac{3n}{50}$ 人, 女员工中, 肥胖者有 $n \times \frac{2}{100} = \frac{n}{50}$ 人, 设任选一名员工为肥胖者为事件 A, 肥胖者为男性为事件 B, 则

$$P(AB) = \frac{3n}{3n} = \frac{1}{50}, P(A) = \frac{\frac{3n}{50} + \frac{n}{50}}{3n} = \frac{2}{75}, \text{ 则 } P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{50}}{\frac{2}{75}} = \frac{3}{4}.$$

故 D.

▶ 一题多解 设公司男、女员工的人数分别为 $2n$ 和 n , 则男员工中, 肥胖者有 $2n \times \frac{3}{100} = \frac{3n}{50}$ 人, 女员工中, 肥胖者有 $n \times \frac{2}{100} = \frac{n}{50}$ 人, 设任选一名员工为肥胖者为事件 A, 肥胖者为男性为事件 B,

$$\text{则 } P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{\frac{3n}{50}}{\frac{3n}{50} + \frac{n}{50}} = \frac{3}{4}. \text{ 故 D.}$$

5. B 【重点题型】三角函数的图象和性质

【深度解析】设 $f(x)$ 的最小正周期为 T . 由题图可知 $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{T}{4}$, 得 $T=2$, 所以 $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$. 将 $R\left(\frac{5}{6}, 0\right)$ 的坐标代入函数解析式得 $A \sin\left(\frac{5\pi}{6} + \varphi\right) = 0$, 所以 $\frac{5\pi}{6} + \varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. 又因为 $0 < \varphi < \pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x) = A \sin\left(\pi x + \frac{\pi}{6}\right)$. 所以 $f(0) = \frac{A}{2}$, 所以 $P\left(0, \frac{A}{2}\right)$, 所以 $\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{3}, \frac{A}{2}\right), \overrightarrow{PR} = \left(\frac{5}{6}, -\frac{A}{2}\right)$. 因为 $PQ \perp PR$, 所以 $\overrightarrow{PQ} \cdot$