

减,所以 $F(x)_{\max} = F(x_0) = \frac{\ln x_0}{x_0} - ax_0 = \frac{2\ln x_0 - 1}{x_0}$,

所以 $2b \geq \frac{4\ln x_0 - 2}{x_0}$, 所以 $a + 2b \geq \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} + \frac{4\ln x_0 - 2}{x_0}$. (8分)

(下面构造函数,利用导函数求新函数的最小值)

令 $H(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} + \frac{4\ln x - 2}{x} = \frac{1 - \ln x + 4x\ln x - 2x}{x^2}$, 则 $H'(x) = \frac{-4x\ln x + 2\ln x + 6x - 3}{x^3} = \frac{(1 - 2x)(2\ln x - 3)}{x^3}$,

所以 $H(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$, $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, e^{\frac{3}{2}})$ 上单调递增,

当 $x > e^{\frac{3}{2}}$ 时, $1 - \ln x + 4x\ln x - 2x = (2\ln x - 1)(2x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} > 0$, (10分)

因此当 $x > e^{\frac{3}{2}}$ 时, $H(x) > 0$, 则 $H(x)_{\min} = H(\frac{1}{2}) = -4\ln 2$,

所以 $a + 2b$ 的最小值为 $-4\ln 2$. (12分)

10 2023 江苏省南通市高三联考调研测试

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	D	A	C	B	C	A	D	BC	BCD
题号	11	12	13		14		15		16	
答案	AC	ACD	-1		$(-\infty, \frac{1}{2}]$		$\frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$		2	

1. C 【基础考点】集合的补集的定义

【深度解析】因为 $\complement_U M = \{1, 3, 5\}$, 所以 $M = \{2, 4, 6\}$, 故选 C.

2. D 【基础考点】复数的运算、虚部的概念

【深度解析】由题意, 得 $z = \frac{1+i}{i} = \frac{i(1+i)}{i^2} = 1-i$, 其虚部为 -1 , 故选 D.

3. A 【经典考点】平面向量的线性运算

【深度解析】由 $\vec{AD} = 2\vec{DB}$, 得 $\vec{CD} - \vec{CA} = 2(\vec{CB} - \vec{CD})$, 整理得 $\vec{CB} = \frac{3}{2}\vec{CD} - \frac{1}{2}\vec{CA}$, 故选 A.

4. C 【新趋考点】扇形的面积公式、圆锥的性质

【深度解析】设圆锥母线长为 l , 侧面积较小的圆锥半径为 r , 侧面积较大的圆锥半径为 R , 它们的高分别为 h, H , 则 $\pi rl : (\pi Rl) = 1 : 2$ (提示: $S = \frac{1}{2}lR = \frac{1}{2}\alpha R^2$, 其中 R 是扇形的半径, l 是弧长, $\alpha (0 < \alpha < 2\pi)$ 为圆心角, S 是扇形面积), 得 $R = 2r$. 因为两圆锥的侧面展开图恰好拼成一个圆, 所以 $2\pi = \frac{r+R}{l} \cdot 2\pi$, 得 $l = 3r$, 则由勾股定理, 得 $h = \sqrt{l^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r$, 同理可得 $H = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{5}r$, 所以 $\frac{h}{H} = \frac{2\sqrt{2}r}{\sqrt{5}r} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$, 故选 C.

5. B 【常考考点】任意角的三角函数值、二倍角公式

【深度解析】由 A, B 两点均在角 α 的终边上可得 a, b 同号 (关键; 根据条件判断出 a, b 同号是求解问题的关键), 且 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} =$

$\frac{2}{\sqrt{b^2 + 4}}$, 化简得 $b = 2a$ ①. 又 $|a - b| = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ②, 联立 ① ② 解得

$\begin{cases} a = \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ b = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \\ b = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$, 所以 $\cos^2 \alpha = \frac{1}{a^2 + 1} = \frac{5}{6}$, 所以 $\cos 2\alpha =$

$2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{3}$, 故选 B.

6. C 【经典考点】双曲线的方程

【深度解析】根据焦点坐标可判断双曲线的焦点在 y 轴上, 则双曲线方程 $7kx^2 - ky^2 = 7$ 可化为 $\frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{k} = 1$. 因为双曲线的一个焦点为 $(0, -5)$, 所以 $-\frac{7}{k} + (-\frac{1}{k}) = (-5)^2$, 解得 $k = -\frac{8}{25}$, 故选 C.

7. A 【热门考点】等差数列的应用及通项公式

【深度解析】第 i 行第 j 列的数记为 A_{ij} , 那么每一组 i 与 j 的组合就是表中一个数. 因为第一行数组成的数列 $A_{1j} (j = 1, 2, \dots)$ 是以 2 为首项, 公差为 1 的等差数列, 所以 $A_{1j} = 2 + (j-1) \times 1 = j+1$, 所以第 j 列数组成的数列 $A_{ij} (i = 1, 2, \dots)$ 是以 $j+1$ 为首项, 公差为 j 的等差数列, 所以 $A_{ij} = (j+1) + (i-1) \times j = ij + 1$. 令 $A_{ij} = ij + 1 = 41$, 则 $i = 1, j = 40; i = 2, j = 20; i = 4, j = 10; i = 5, j = 8; i = 8, j = 5; i = 10, j = 4; i = 20, j = 2; i = 40, j = 1$, 所以 41 出现的次数为 8, 故选 A.

8. D

思路导引 由已知条件得 $f'(x) = 0$ 有两个不相等的正实根 \rightarrow 通过求导研究 $f'(x)$ 的单调性 \rightarrow 利用隐零点得 $f'(x)_{\min} = f'(x_0) < 0 \rightarrow$ 构造函数, 根据 x_0 的范围求 m 的范围

【重难点型】根据极值点个数求参数的范围

【深度解析】由题意, 得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = xe^x + m(\ln x + 1 + x - 1) = xe^x + m(\ln x + x) = 0$ 有两个不相等的正实根. 当 $m \geq 0$ 时, $f'(x) = xe^x + m(\ln x + x)$ 单调递增, $f'(x) = 0$ 至多有一个正实根, 不合题意, 所以 $m < 0$. 令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x + m(\frac{1}{x} + 1) = (x+1)(e^x + \frac{m}{x})$, 当 $x > 0, m < 0$ 时, $x+1 > 0$, 函数 $t(x) = e^x + \frac{m}{x}$ 单调递增 (提示: 函数 $y = e^x$ 与 $y = \frac{m}{x} (m < 0)$ 均为增函数, 增

函数+增函数=增函数). 因为 $f'(x)=0$ 有两个不相等的正实根,

所以存在 x_0 , 使得 $t(x_0) = e^{\frac{x_0}{x_0}} = 0$, 则当 $0 < x < x_0$ 时, $g'(x) < 0$,

$f'(x)$ 单调递减, 当 $x > x_0$ 时, $g'(x) > 0$, $f'(x)$ 单调递增, 又因为 $x \rightarrow 0, f'(x) \rightarrow +\infty; x \rightarrow +\infty, f'(x) \rightarrow +\infty$, 则要使 $f'(x)=0$ 有两个不相

等的正实根, 则 $f'(x_0) < 0$. 因为 $e^{\frac{x_0}{x_0}} = 0, -m = x_0 e^{\frac{x_0}{x_0}}$, 所以 $f'(x_0) =$

$x_0 e^{\frac{x_0}{x_0}} + m(\ln x_0 + x_0) = x_0 e^{\frac{x_0}{x_0}}(1 - \ln x_0 - x_0) < 0$, 所以 $\ln x_0 + x_0 - 1 > 0$. 因为

$m(x) = \ln x + x - 1$ 单调递增, 且 $m(1) = 0$, 所以 $x_0 > 1$. 令 $h(x) = xe^x$,

则 $h'(x) = (x+1)e^x > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, $h(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x) > h(1) = e$, 所以 $-m > e$, 所以 $m < -e$, 观察各选项

知 D 满足要求, 故选 D.

方法速记 根据函数 $f(x)$ 的极值点个数求解参数范围问题

的一般思路: 先求解出 $f'(x)$, 然后分析 $f'(x)=0$ 的根的个数.

①分类讨论法分析 $f'(x)=0$ 的根的个数并求解参数范围; ②参变分离法分析 $f'(x)=0$ 的根的个数并求解参数范围; ③转化为两个函数的图象交点个数并求解参数范围.

9. BC 【基础考点】 a_n 与 S_n 间的关系、等差数列中的最值问题、数列的单调性

【深度解析】当 $n \geq 2$ 时, 由 $S_n = -n^2 + 13n + 1$, 得 $S_{n-1} = -(n-1)^2 + 13(n-1) + 1 = -n^2 + 15n - 13$, 以上两式相减, 得 $a_n = S_n - S_{n-1} = -2n + 14$, 又 $a_1 = S_1 = -1^2 + 13 \times 1 + 1 = 13$, 不满足上式(易错: 忽略对首项的

验证, 从而判断 A 对, B 错), 所以 $a_n = \begin{cases} 13, n=1, \\ -2n+14, n \geq 2, \end{cases}$ 所以数列

$\{a_n\}$ 从第二项起是等差数列, 且为递减数列, 故 AD 不正确, B 正确; 对于 C, 由 $-2n + 14 \geq 0$, 得 $n \leq 7$, 且 $a_7 = 0$, 所以 S_n 中, S_6, S_7 最大, 故 C 正确. 故选 BC.

一题多解 对于 C, 因为 $S_n = -n^2 + 13n + 1 = -\left(n - \frac{13}{2}\right)^2 + \frac{173}{4}$,

图象对称轴为直线 $n = \frac{13}{2}$, 而 $n \in \mathbb{N}^*$, 所以在 S_n 中, S_6, S_7 最大,

故 C 正确.

10. BCD 【基础考点】正弦函数的图象与性质、辅助角公式、导数的运算

【深度解析】对于 A, 因为 $f(x) = \sqrt{1+a^2} \sin(x-\varphi)$ (其中 $\tan \varphi = a$) 的最大值为 2, 所以 $\sqrt{1+a^2} = 2$, 解得 $a = \pm\sqrt{3}$. 又 $f'(x) = \cos x +$

$a \sin x$, 所以 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = a < 0$, 所以 $a = -\sqrt{3}$, 故 A 不正确; 对于 B, 由

A 选项分析知, $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 由 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq$

$x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得 $\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 当 $k =$

0 时, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$, 所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ 上单调递减, 故 B 正确;

对于 C, 由 $x + \frac{\pi}{3} = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 得 $x = k\pi + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbb{Z})$, 当 $k = 0$

时, $x = \frac{\pi}{6}$, 所以直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴, 故 C 正确;

对于 D, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得 $y =$

$2 \sin\left(x + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$ 的图象, 由 $x + \frac{5\pi}{12} = k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 得

$x = k\pi - \frac{5\pi}{12} (k \in \mathbb{Z})$, 当 $k = 1$ 时, $x = \frac{7\pi}{12}$, 所以平移后所得函数的图

象关于点 $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 对称, 故 D 正确. 故选 BCD.

一题多解

对于 B, 当 $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ 时, $x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, 所

以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right]$ 上单调递减, 故 B 正确; 对于 C, 因为

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2$, 所以直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 图象的一条对称轴,

故 C 正确; 对于 D, 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度,

得 $g(x) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right)$ 的图象, 又 $g\left(\frac{7\pi}{12}\right) =$

$2 \sin \pi = 0$, 所以函数 $g(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 对称, 故 D 正确.

11. AC

思路导引 对于 A, 利用弦长公式求出 $|AB|$, 判断 A;

对于 B, 由三角形的面积公式求出 $\sin \angle AOB$ 的值——结合角的范围求出 $\angle AOB$ 的大小, 判断 B;

对于 C, 利用数量积的计算公式求出 $\cos \angle AOB$ 的值——结合角的范围求出 $\angle AOB$ 的大小——判定 $\triangle AOB$ 的形状——求出点 O 到直线 AB 的距离, 判断 C;

对于 D, 设 $A(\cos \theta, \sin \theta)$ ——利用两角和的正弦公式化简——利用三角函数的有界性求出最值, 判断 D

【热门考点】直线与圆的位置关系、三角形面积公式、向量的数量积的运算

【深度解析】对于 A, 由题意知圆 O 为单位圆, 因为点 O 到直线 AB

的距离 $d = \frac{1}{2}$, 所以 $|AB| = 2 \sqrt{r^2 - d^2} = 2 \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{3}$, 故 A 正确;

对于 B, 因为 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |OA| |OB| \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \sin \angle AOB = \frac{\sqrt{3}}{4}$,

所以 $\sin \angle AOB = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 又 $0 < \angle AOB < \pi$, 所以 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ (易

错: 根据三角函数的正弦值求角的大小时, 若对角的范围考虑不周, 易漏解), 故 B 不正确;

对于 C, 因为 $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{1}{2}$, 即 $|\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos \angle AOB =$

$\cos \angle AOB = \frac{1}{2}$. 又 $0 < \angle AOB < \pi$, 所以 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, 所以 $\triangle AOB$ 是

边长为 1 的等边三角形, 所以点 O 到直线 AB 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2} |OA| =$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 故 C 正确;

对于 D, 由题意设 $A(\cos \theta, \sin \theta)$ (提示: 角 α 的终边与单位圆的交点为 $P(\cos \alpha, \sin \alpha)$), 则 $|x_1 + y_1 - 1| = |\cos \theta + \sin \theta - 1| =$

$\left| \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right|$. 因为 $0 \leq \theta < 2\pi$, 所以 $\frac{\pi}{4} \leq \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4}$, 所以

$-1 \leq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$, 所以 $-\sqrt{2}-1 \leq \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq \sqrt{2}-1$, 所以 $0 \leq \left|\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - 1\right| \leq \sqrt{2}+1$, 即 $0 \leq |x_1 + y_1 - 1| \leq \sqrt{2}+1$, 故 D 不正确. 故选 AC.

12. ACD

思路导引 对于 A, 将 $x = -\frac{1}{2}$ 代入已知等式中即可求得 $f(4)$ → 判断 A;
对于 BCD, 令 $t = 2x - 1$, 建立等式 → 求导, 得到 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称 → $g(1-x) = g(1+x)$ → 用 $-x$ 换 x 判断 $g(x)$ 的奇偶性 → 求出 $g(x)$ 的周期 $\xrightarrow{\text{奇偶性}} \xrightarrow{\text{周期性}}$ 求函数值 → 判断 BCD

【重难点型】利用函数的奇偶性与周期性求值、导数的运算

【深度解析】 对于 A, 在 $f(2x-1) + f(3-2x) = f(-2)$ 中令 $x = -\frac{1}{2}$, 得 $f(-2) + f(4) = f(-2)$, 所以 $f(4) = 0$, 故 A 正确.

对于 BC, 在 $f(2x-1) + f(3-2x) = f(-2)$ 中令 $t = 2x - 1$, 得 $f(t) + f(2-t) = f(-2)$, 等式两边求导得 $f'(t) - f'(2-t) = 0$, 即 $g(t) = g(2-t)$, 所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x = 1$ 对称, 所以 $g(1-x) =$

$$g(1+x). \text{ 又因为 } \begin{cases} g(1-x) + g(-3x) = g\left(-\frac{1}{2}\right), \\ g(1+x) + g(3x) = g\left(-\frac{1}{2}\right), \end{cases} \text{ 所以 } g(-3x) =$$

$g(3x)$, 所以 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x) = g(-x) = g(2-x)$, 所以 $g(x)$ 是周期为 2 的偶函数, 所以 $g(2) = g(0)$, $g(-1) = g(1)$, 令 $x = 0$, 得 $g(1) + g(0) = g\left(-\frac{1}{2}\right)$; 令 $x = -\frac{1}{2}$, 得 $g\left(\frac{3}{2}\right) + g\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right)$. 因为 $g\left(\frac{3}{2}\right) = g\left(-\frac{1}{2}\right)$, 所以 $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, 故 $g(2) = -g(-1)$, 故 B 不正确, C 正确.

对于 D, $g(2 \cdot 022) = g(2 \times 1011) = g(0)$, 故 D 正确. 故选 ACD.

方法速记 赋值法是解答抽象函数问题的一种非常有效的方法. 在赋值时, 往往要注意考虑以下几个方面: ① 令 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 等特殊值, 将其代入题设中求出抽象函数的值; ② 令 $x = -x$, 可由此判定抽象函数的奇偶性; ③ 将 x 替换为 $x+T$, 可由此确定抽象函数的周期性.

13. -1 【基础题型】由奇偶性求参数

【深度解析】 由 $f(-x) + f(x) = 0$, 得 $2^{-x} + a \cdot 2^x + 2^x + a \cdot 2^{-x} = (2^x + 2^{-x})(1+a) = 0$. 因为 $2^x > 0, 2^{-x} > 0$, 所以 $1+a = 0$, 所以 $a = -1$.

一题多解 由题意知, 函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数, 所以 $f(0) = 0$, 即 $2^0 + a \cdot 2^0 = 0$, 解得 $a = -1$, 经检验符合题意. 所以 $a = -1$.

14. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 【基础题型】根据不等式有解求参数的取值范围、基本不等式的应用

【深度解析】 因为关于 x 的不等式 $ax^2 - x + a \leq 0$ 在区间 $[0, 2]$ 上有解, 所以只需 $a \leq \left(\frac{x}{x^2+1}\right)_{\max}$. 当 $x = 0$ 时, $\frac{x}{x^2+1} = 0$; 当 $x \neq 0$ 时,

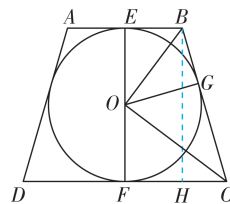
$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \leq \frac{1}{2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}$, 当且仅当 $x = \frac{1}{x}$, 即 $x = 1$ 时等号成立, 所以 $a \leq \frac{1}{2}$, 即实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$.

15. $\frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$

思路导引 作出圆台的轴截面 → 利用切线的性质与勾股定理求出圆台的高 $\xrightarrow{\text{圆台的体积公式}}$ 求得结果

【热门考点】圆台的轴截面、体积公式

【深度解析】 画出圆台的轴截面, 如图所示, 由题意知, $BE = BG = 1$, $CF = CG = 2$, 所以 $BC = BG + CG = 1 + 2 = 3$. 过点 B 作 $BH \perp FC$, 垂足为 H , 在 $\text{Rt}\triangle BHC$ 中, 易知 $HC = FC - FH = FC - EB = 1$, 所以 $BH = \sqrt{BC^2 - HC^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$, 所以该圆台的体积 $V = \frac{1}{3}(\pi \cdot 1^2 + \sqrt{\pi \cdot 1^2 \cdot \pi \cdot 2^2 + \pi \cdot 2^2}) \cdot 2\sqrt{2} = \frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$.



16. 2

思路导引 设直线 AB 的方程为 $x = my + n$ → 与抛物线方程联立 $\xrightarrow{k_{OA} \cdot k_{OB} = -1}$ 求得 n 的值 → 求出直线 AB 过定点 → 同理求出直线 MN 过定点 → 利用圆的性质求得结果

【重点考点】直线与抛物线的位置关系

【深度解析】 设直线 AB 的方程为 $x = my + n$, $A\left(\frac{y_1^2}{2}, y_1\right)$, $B\left(\frac{y_2^2}{2}, y_2\right)$, 由 $\begin{cases} x = my + n, \\ y^2 = 2x \end{cases}$ 得 $y^2 - 2my - 2n = 0$, 则 $y_1 y_2 = -2n$, 所以 $k_{OA} \cdot k_{OB} = \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2}} \cdot \frac{y_2}{\frac{y_2^2}{2}} = \frac{4}{y_1 y_2} = \frac{4}{-2n} = -1$, 解得 $n = 2$, 所以直线 AB 的方程为 $x = my + 2$, 恒过定点 $H(2, 0)$. 同理可求得直线 MN 恒过定点 $H(2, 0)$. 因为 $PE \perp AB, PF \perp MN$, 所以 E, F 在以 PH 为直径的圆上, 所以 $|EF|$ 的最大值为直径 $|PH| = \sqrt{(2-2)^2 + (2-0)^2} = 2$.

17. 【基础考点】等比数列的定义及通项公式

(1) **【证明】** 由已知条件知 $T_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$, ①

于是 $T_{n-1} = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_{n-1} (n \geq 2)$. ②

由①②得当 $n \geq 2$ 时, $\frac{T_n}{T_{n-1}} = a_n$. (3分)

又 $\frac{2}{a_n} + \frac{1}{T_n} = 1$,

所以当 $n \geq 2$ 时, $T_n = 2T_{n-1} + 1$, 所以 $T_n + 1 = 2(T_{n-1} + 1)$. (4分)

在 $\frac{2}{a_n} + \frac{1}{T_n} = 1$ 中, 令 $n = 1$, 由 $T_1 = a_1$, 得 $T_1 = 3$, 所以 $T_1 + 1 = 4 \neq 0$,

所以数列 $\{T_n + 1\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列. (6分)

(2)【解】由(1)可得 $T_n+1=4 \times 2^{n-1}$, 所以 $T_n=2^{n+1}-1$. (8分)

解法一: 当 $n \geq 2$ 时, $a_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$,

又 $a_1 = T_1 = 3$ 符合上式, 所以 $a_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$. (10分)

解法二: 将 $T_n = 2^{n+1}-1$ 代入 $\frac{2}{a_n} + \frac{1}{T_n} = 1$, 得 $a_n = \frac{2^{n+1}-1}{2^n-1}$. (10分)

18. 【经典题型】利用正弦定理、余弦定理解三角形, 三角形面积公式

(1)【解】在 $\triangle CAM$ 中, $\because \cos \angle CMA = \frac{\sqrt{33}}{6}$, $\therefore \sin \angle CMA = \frac{\sqrt{3}}{6}$. (1分)

由正弦定理得 $\frac{CM}{\sin \angle CAM} = \frac{AC}{\sin \angle CMA}$,

则 $CM = \frac{AC \cdot \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \angle CMA} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = 6$. (5分)

(2)【证明】在 $\triangle BMN$ 中, $MN = \sqrt{7}$, $BM + BN = 4 + \sqrt{3}$,
由余弦定理得 $MN^2 = BM^2 + BN^2 - 2BM \cdot BN \cos \angle ABC = (BM + BN)^2 - 2BM \cdot BN \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
即 $(\sqrt{7})^2 = (4 + \sqrt{3})^2 - 2BM \cdot BN \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\therefore BM \cdot BN = 4\sqrt{3}$. (9分)

又 $S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} BM \cdot BN \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$,

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$. (12分)

19. 【基础题型】利用二项分布求分布列与期望、独立重复试验的概率公式

【解】(1)由题意知 $X \sim B\left(3, \frac{2}{3}\right)$, X 的可能取值为 0, 1, 2, 3.

所以 $P(X=0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, $P(X=1) = C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$,

$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$, $P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$. (4分)

随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

期望 $E(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$. (5分)

(2)记“第一次摸出红球”为事件 A_1 , “第一次摸出白球”为事件 A_2 , “第二次摸出白球”为事件 B , 则 $P(A_1) = \frac{2}{3}$, $P(A_2) = \frac{1}{3}$,

$P(A_1 B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$, $P(A_2 B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$,

故第二次摸出白球的概率 $P(B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) = \frac{4}{15} +$

$\frac{1}{15} = \frac{1}{3}$.

(用古典概型概率计算公式同样给分) (9分)

(3)依题意, 每次取到红球的概率为 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, 取到白球的概率为

$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. (10分)

$Y=4$ 即是“前 3 次只有 1 次取到红球, 其余 2 次均取到白球, 且第 4 次取到红球”,

所以 $P(Y=4) = C_3^1 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{27}$. (12分)

20. 【经典题型】线面平行的判定定理与性质定理、三棱台的性质、直线与平面所成角、空间向量的应用

(1)【证明】**解法一:** 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \parallel A_1C_1$,

又 $AC \not\subset$ 平面 A_1C_1E , $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1E , 则 $AC \parallel$ 平面 A_1C_1E . (2分)

又 $AC \subset$ 平面 ABC , 平面 $ABC \cap$ 平面 $A_1C_1E = l$, 所以 $AC \parallel l$. (5分)

解法二: 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \parallel A_1C_1$,

又 $A_1C_1 \not\subset$ 平面 ABC , $AC \subset$ 平面 ABC , 则 $A_1C_1 \parallel$ 平面 ABC . (2分)

又 $A_1C_1 \subset$ 平面 A_1C_1E , 平面 $ABC \cap$ 平面 $A_1C_1E = l$, 所以 $A_1C_1 \parallel l$.

又 $AC \parallel A_1C_1$, 所以 $AC \parallel l$. (5分)

解法三: 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \parallel A_1C_1$, 平面 $ABC \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1$, 又平面 $A_1B_1C_1 \cap$ 平面 $A_1C_1E = A_1C_1$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $A_1C_1E = l$, 所以 $A_1C_1 \parallel l$. 又 $AC \parallel A_1C_1$, 所以 $AC \parallel l$. (5分)

(2)【解】因为 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 在平面

ABC 内作 $Ax \perp AC$, 以 A 为原点, AC, AA_1

所在直线分别为 y 轴, z 轴建立如图所示

的空间直角坐标系, 则 $B(2\sqrt{3}, 2, 0)$,

$E(\sqrt{3}, 1, 0)$, $C(0, 4, 0)$, $A_1(0, 0, \sqrt{3})$,

$B_1(\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$, $C_1(0, 2, \sqrt{3})$,

则 $\overrightarrow{A_1E} = (\sqrt{3}, 1, -\sqrt{3})$, $\overrightarrow{A_1C_1} = (0, 2, 0)$,

$\overrightarrow{B_1C_1} = (-\sqrt{3}, 3, -\sqrt{3})$. (8分)

设平面 A_1C_1E 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

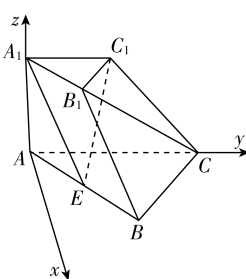
则 $\begin{cases} \overrightarrow{A_1E} \cdot \mathbf{n} = \sqrt{3}x + y - \sqrt{3}z = 0, \\ \overrightarrow{A_1C_1} \cdot \mathbf{n} = 2y = 0, \end{cases}$

令 $x=1$, 则 $\mathbf{n} = (1, 0, 1)$. (10分)

设直线 B_1C 与平面 A_1C_1E 所成角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{B_1C}, \mathbf{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{B_1C} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{B_1C}| |\mathbf{n}|} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{15} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$,

所以直线 B_1C 与平面 A_1C_1E 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{5}$. (12分)



21. 思路导引 (1)由焦点坐标求出 c —— 代入点 G 坐标 (或利用椭圆的定义) —— 结合 a, b, c 间的基本关系求出 a, b —— 写出椭圆 E 的方程;

(2)设直线 AB 方程 —— 与椭圆 E 的方程联立 $\xrightarrow{\text{弦长公式}}$ 根与系数的关系

求出 $|TA| \cdot |TB|$ —— 同理求出 $|TP| \cdot |TQ|$ $\xrightarrow{|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|}$ 代入化简后可得出结果

【**重难点题**】椭圆的定义及标准方程、直线与椭圆的位置关系、椭圆中的定值问题

【解】(1)由椭圆 E 的左、右焦点分别为 $F_1(-1,0)$, $F_2(1,0)$, 得 $c=1$. (1分)

(注意焦点坐标与 c 之间关系的转化)

解法一:由题意得 $\begin{cases} a^2 - b^2 = c^2 = 1, \\ \frac{1}{a^2} + \frac{9}{4b^2} = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a^2 = 4, \\ b^2 = 3. \end{cases}$

(注意椭圆与双曲线中 a, b, c 间基本关系的区别)

\therefore 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. (4分)

解法二:由 $2a = |GF_1| + |GF_2| = \sqrt{(1+1)^2 + \left(-\frac{3}{2}-0\right)^2} + \sqrt{(1-1)^2 + \left(-\frac{3}{2}-0\right)^2} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$,

(已知焦点坐标与椭圆上一点求 a 时,可利用椭圆的定义)

则 $a=2$, 又 $c=1$, 则 $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$,

\therefore 椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. (4分)

(2)设 $T(3,t)$, 直线 $AB: y-t=k_1(x-3)$, 直线 $PQ: y-t=k_2(x-3)$.

(下面联立直线 AB 与椭圆的方程,利用弦长公式求 $|TA|, |TB|$)

联立 $\begin{cases} y-t=k_1(x-3), \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$ 消去 y 得 $(3+4k_1^2)x^2+8k_1(t-3k_1)x+4(t-3k_1)^2-12=0$,

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), x_1 < 3, x_2 < 3$,

则 $x_1+x_2 = -\frac{8k_1(t-3k_1)}{3+4k_1^2}, x_1x_2 = \frac{4(t-3k_1)^2-12}{3+4k_1^2}$. (6分)

从而 $|TA| \cdot |TB| = \sqrt{1+k_1^2} |3-x_1| \cdot \sqrt{1+k_1^2} |3-x_2|$
 $= (1+k_1^2) (3-x_1)(3-x_2)$
 $= (1+k_1^2) [9+x_1x_2-3(x_1+x_2)]$
 $= (1+k_1^2) \left[9 + \frac{4(t-3k_1)^2-12}{3+4k_1^2} + 3 \cdot \frac{8k_1(t-3k_1)}{3+4k_1^2} \right]$
 $= \frac{(1+k_1^2)(4t^2+15)}{3+4k_1^2}$, (8分)

(涉及弦长的问题,应熟练地应用根与系数的关系“设而不求”地去计算弦长(即运用弦长公式))

同理 $|TP| \cdot |TQ| = \frac{(1+k_2^2)(4t^2+15)}{3+4k_2^2}$.

(下面利用相等条件化简求出定值)

又 $|TA| \cdot |TB| = |TP| \cdot |TQ|$,

$\therefore \frac{1+k_1^2}{3+4k_1^2} = \frac{1+k_2^2}{3+4k_2^2}$, 解得 $k_1^2 = k_2^2$, 又 $k_1 \neq k_2$, 故 $k_1+k_2=0$,

故直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和为 0. (12分)

22. 【思路导引】(1)求出函数 $f(x)$ 的定义域与导函数 $f'(x)$ ——由导数几何意义得 $f'(x)=0$ 有实根 ——转化为二次函数的值域问题求解;

(2)利用导数求出函数 $f(x)$ 的单调区间 ——结合零点存在定理即可得到函数 $f(x)$ 的零点个数.

【**重难点题**】导数的几何意义、函数零点个数的判断

【解】(1) $f'(x) = \frac{2x^2+x-1+a}{x+1}, x > -1$,

(注意定义域先行原则)

由题意,存在 $x \in (-1, +\infty)$, 使得 $f'(x)=0$. (2分)

(与 y 轴垂直的直线的斜率为 0)

即关于 x 的方程 $2x^2+x-1+a=0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上有实根,

该方程等价于 $a = -2x^2 - x + 1$,

则实数 a 的取值范围是函数 $y = -2x^2 - x + 1, x \in (-1, +\infty)$ 的值域,

值域为 $\left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$ (提示: $y = -2x^2 - x + 1 = -2\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}$, 求二次函数的最值时,一定要注意对称轴是否在定义域内),

所以实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{9}{8}\right]$. (4分)

(2) (下面通过研究一元二次方程根的分布情况,判断 $f(x)$ 的单调性)

设 $g(x) = 2x^2+x-1+a$, 图象的对称轴为直线 $x = -\frac{1}{4}, 0 < a < 1$,

则 $\Delta = 9-8a > 0, g(-1) = a > 0, g(0) = -1+a < 0$,

则 $g(x)$ 存在两个零点 $x_1, x_2, -1 < x_1 < 0 < x_2$,

当 $x \in (-1, x_1)$ 时, $g(x) > 0, f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $g(x) < 0, f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $g(x) > 0, f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增. (7分)

(判断零点个数问题,一定要先讨论函数的单调性)

(下面利用函数零点存在定理讨论函数的零点个数)

又 $f(0) = 0, f(x_1) > f(0) = 0 > f(x_2)$,

当 $x \in (-1, 0)$ 时, $x^2 - x \in (0, 2), f(x) < a \ln(x+1) + 2$,

则 $e^{-\frac{2}{a}} - 1 \in (-1, 0), f(e^{-\frac{2}{a}} - 1) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上零点个数为 1. (10分)

(对于一般函数的零点个数的判断问题,可以利用函数零点存在定理,然后借助于函数的单调性判断零点的个数)

解法一:又 $f(1) = a \ln 2 > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上零点个数为 1.

解法二:由 $\ln x \leq x-1$, 知 $\ln \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x} - 1, -\ln x \leq \frac{1}{x} - 1, \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$,

$\frac{1}{x}, \ln(x+1) \geq 1 - \frac{1}{x+1}$.

又 $0 < a < 1$, 所以 $f(x) = a \ln(x+1) + x^2 - x \geq a \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + x^2 - x = \frac{ax}{x+1} +$

$x(x-1) = \frac{x}{x+1}(a+x^2-1)$,

当且仅当 $x=0$ 时上述等号成立,

又 $\sqrt{1-a} \in (0, 1)$, 所以 $f(\sqrt{1-a}) > 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上零点个数为 1.

又 $f(0) = 0$, 故当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的零点个数为 3. (12分)