

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	B	A	A	D	B	D	C	ABC	ABD
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	BC	ACD	$\pm 2$	$\frac{8\pi}{3}$	$-2\sqrt{3}$	(1)1 (2)88				

## 1. C 【基础考点】集合的基本运算和分式不等式解法

【深度解析】由  $\frac{1}{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{1+x}{x} \geq 0 \Rightarrow x(x+1) \geq 0$  且  $x \neq 0 \Rightarrow x > 0$  或  $x \leq -1$ , 所以  $\complement_{\mathbb{R}} B = \{x \mid -1 < x \leq 0\}$ , 故选 C.

## 2. B 【基础考点】复数的运算、模及共轭复数的概念

【深度解析】 $z \cdot (1-i) = 2i \Rightarrow z = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = -1+i \Rightarrow \bar{z} = -1-i$   
 $i \Rightarrow |\bar{z}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$ , 故选 B.

快解 因为  $|z| = |\bar{z}|$ , 所以  $|z| = \left| \frac{2i}{1-i} \right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ , 故选 B.

## 3. A 【经典题型】样本的数字特征：“众数”和“百分位数”

【深度解析】根据题意, 众数为 40 (提示: 众数为一组数据中重复出现次数最多的数据). 由  $i = 40 \times 40\% = 16$ , 故该校学生一天内体育锻炼时长的第 16 项为 40, 第 17 项为 50, 故第 40 百分位数为  $\frac{40+50}{2} = 45$  (提示: 第  $p$  百分位数的定义: 一般地, 一组数据的第  $p$  百分位数是这样一个值, 它使得这组数据中至少有  $p\%$  的数据小于或等于这个值, 且至少有  $(100-p)\%$  的数据大于或等于这个值). 故选 A.

## 4. A 【热门题型】对数函数的性质和数(式)比较大小

【深度解析】因为  $\log_2 3 > \log_2 2 = 1 = \log_3 3 > \log_3 2$ , 所以  $a > 1 > c$ . 又因为  $1 > b = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{4}{8}} > \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ , 而  $c = \log_3 2 = \log_{\sqrt{9}} 2 < \log_{\sqrt{9}} 2 = \frac{2}{3}$ , 所以  $1 > b > c$ , 所以  $a > b > c$ , 故选 A.

## 5. D 【重要考点】平面向量的线性运算

【深度解析】解法一: 因为  $\vec{AC} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD}$ , ①  
 ①式两边同乘  $\vec{AB}$ , 得  $\vec{AC} \cdot \vec{AB} = \lambda \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \mu \vec{AD} \cdot \vec{AB}$ ,  
 即  $4 \times \sqrt{3} \times \cos \frac{\pi}{6} = 3\lambda + 2\mu \times \sqrt{3} \times \cos \frac{5\pi}{6}$ , 即  $\lambda - \mu = 2$ . ②  
 ①式两边同乘  $\vec{AD}$ , 得  $\vec{AC} \cdot \vec{AD} = \lambda \vec{AB} \cdot \vec{AD} + \mu \vec{AD} \cdot \vec{AD}$ ,  
 即  $4 \times 2 \times \cos \left( \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = 2\sqrt{3}\lambda \times \cos \frac{5\pi}{6} + 4\mu$ , 即  $-3\lambda + 4\mu = -4$ . ③  
 联立②③解得  $\lambda = 4, \mu = 2$ , 所以  $\lambda + \mu = 6$ . 故选 D.

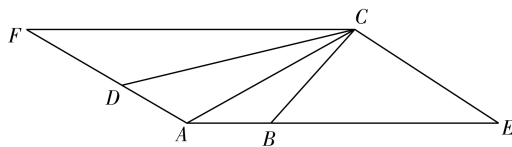
解法二: 作  $AE \perp AB$ , 交  $CD$  于  $E$ , 以  $A$  为坐标原点,  $AB, AE$  所在直线分别为  $x, y$  轴建立平面直角坐标系, 如图所示.

依题意可得  $A(0, 0), B(\sqrt{3}, 0), C(2\sqrt{3}, 2), D(-\sqrt{3}, 1)$ . 又因为

$\vec{AC} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AD}$ , 所以  $(2\sqrt{3}, 2) = \lambda(\sqrt{3}, 0) + \mu(-\sqrt{3}, 1)$ , 则有  
 $\sqrt{3}(\lambda - \mu) = 2\sqrt{3}, \mu = 2$ , 所以  $\lambda = 4, \mu = 2$ , 所以  $\lambda + \mu = 6$ , 故选 D.

解法三: 如图, 过  $C$  分别作  $AD, AB$  的平行线  $CE, CF$ , 分别交  $AB$  的延长线于  $E, AD$  的延长线于  $F$ .

因为  $\angle BAD = \frac{5\pi}{6}, \angle BAC = \frac{\pi}{6}$ , 所以  $AC = CE = AF = 4$ . 在  $\triangle ACE$  中, 由余弦定理可得  $AE = 4\sqrt{3}$ , 所以  $\vec{AE} = 4\vec{AB}, \vec{AF} = 2\vec{AD}$ , 而  $\vec{AC} = \vec{AE} + \vec{AF}$ , 所以  $\lambda = 4, \mu = 2, \lambda + \mu = 6$ , 故选 D.



方法速记 解决平面向量线性运算中的“系数和”问题的解题策略:

- (1) 根据“平行四边形法则或三角形法则”, 以已知向量为基底表示, 再观察对应系数即可得出答案;
- (2) 坐标法, 建立平面直角坐标系, 将已知向量关系式均用坐标表示出来, 转化为关于“系数”的一个方程组, 通过解方程组得出答案;
- (3) 借助向量数量积公式, 将“向量”运算转化为“数量”运算, 得到关于“系数”的一个方程组, 通过解方程组得出答案;
- (4) 当两个向量模相等时, 也可通过两边平方, 整体代入求得.

## 6. B 【特色题型】等比数列的模型的求和问题

【深度解析】设从最底层开始的第  $n$  层的正方体棱长为  $a_n, a_1 = 2$ ,  
 $a_2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2}, a_3 = \frac{1}{2} \times \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 1$ , 则  $\{a_n\}$  是以 2 为首项, 以  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  为公比的等比数列 (提示: 通过类比观察出  $\{a_n\}$  为等比数列),

$\therefore \{a_n^2\}$  是以 4 为首项, 以  $\frac{1}{2}$  为公比的等比数列.

$\therefore$  塔形的表面积  $S_n = 4a_1^2 + 4a_2^2 + 4a_3^2 + \cdots + 4a_n^2 + a_1^2 = 4 \times \frac{4 \left( 1 - \frac{1}{2^n} \right)}{1 - \frac{1}{2}} + 4 =$

$$36 - \frac{32}{2^n}, \text{ 令 } 36 - \frac{32}{2^n} > 34, \text{ 解得 } n > 4,$$

∴ 该塔形中正方体的个数至少为 5. 故选 B.

**关键拨** 设从最底层开始的第  $n$  层的正方体棱长为  $a_n$ , 则  $\{a_n\}$  为等比数列, 由此求出塔形表面积  $S_n$  的表达式, 令  $S_n > 34$  即可得出  $n$  的范围.

## 7. D 【经典题型】直线与圆的位置关系

**【深度解析】** 设  $P(a, b)$ , 因为  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$ , 可得  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -a(m-a) - b(m-b) = 0$ , 即  $a^2 + b^2 = m(a+b)$  ①, 若  $m=6$ , 则  $a^2 + b^2 = 6(a+b)$ , 即  $(a-3)^2 + (b-3)^2 = 18$ , 而  $(a-3)^2 + (b-3)^2 = 2$  ②, 不合题意, 所以  $m \neq 6$ , 由 ①② 可得  $a+b = \frac{16}{6-m}$ , 令  $a+b=z$ , 所以圆  $C$  和直线  $a+b=z$  总有公共点, 可得  $\frac{|3+3-z|}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{2}$ , 解得  $4 \leq z \leq 8$ , 即  $4 \leq \frac{16}{6-m} \leq 8$ , 解得  $2 \leq m \leq 4$ . 故选 D.

**一题多解** 依题意, 以  $AB$  为直径的圆的方程为  $x(x-m) + y(y-m) = 0$ , 记为圆  $M$ , 即圆  $M$  的方程为  $x^2 + y^2 - mx - my = 0$ , 化为标准方程为  $\left(x - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m^2}{2}$ . 于是原问题可转化为圆  $M$  与圆  $C$  有公共点问题, 又  $|MC| = \sqrt{\left(3 - \frac{m}{2}\right)^2 + \left(3 - \frac{m}{2}\right)^2}$ , 所以  $\left|\sqrt{2} - \frac{|m|}{\sqrt{2}}\right| \leq |MC| \leq \sqrt{2} + \frac{|m|}{\sqrt{2}}$ , 解得  $2 \leq m \leq 4$ , 故选 D.

## 8. C 【重难点】函数的零点

**【深度解析】解法一:** 易知  $x_1 < 0 < x_2 < x_3$ ,  $x_1, x_2, x_3$  为函数  $f(x) = a^x - x^2$  的零点, ∴

$$\begin{cases} a^{x_1} = x_1^2, \\ a^{x_2} = x_2^2, \therefore a^{x_1+x_3} = (x_1 x_3)^2, a^{2x_2} = x_2^4, \therefore x_2^4 = (x_1 x_3)^2, \\ a^{x_3} = x_3^2, \end{cases}$$

$$\therefore x_2^4 + x_1 x_3 = 0. \text{ 又 } x_1 + x_3 = 2x_2, \therefore x_2^4 + (2x_2 - x_3)x_3 = 0,$$

$$\therefore \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2 - 2\left(\frac{x_3}{x_2}\right) - 1 = 0, \text{ 解得 } \frac{x_3}{x_2} = \sqrt{2} + 1, \text{ 负根舍去.}$$

$$\text{又 } f(x) = a^x - x^2 = 0, \therefore a^x = x^2, \therefore x \ln a = \ln x^2,$$

即函数  $y = x \ln a$  与  $y = \ln x^2$  的图象

有三个交点, 交点横坐标分别为  $x_1, x_2, x_3$ , 如图, 先计算  $y = 2 \ln x$  的过原点的切线方程, 不妨设切点为  $(t,$

$$2 \ln t), y' = \frac{2}{x}, \therefore \text{ 切线斜率 } k = \frac{2}{t},$$

$$\therefore \text{ 切线方程为 } y - 2 \ln t = \frac{2}{t}(x - t). \text{ 又切线过原点,}$$

$$\therefore t = e, \text{ 此时 } k = \frac{2}{t} = \frac{2}{e}, \therefore y = x \ln a \text{ 的斜率比切线斜率小, 结合图象}$$

$$\text{容易分析出 } \ln a < \frac{2}{e}, \therefore 2 \ln a < \frac{4}{e} < \sqrt{2} + 1. \text{ 故选 C.}$$

**解法二:** 显然  $f(x)$  在  $(-\infty, 0]$  上单调递增, 且  $f(-1) = \frac{1}{a} - 1 < 0$ ,  $f(0) = 1 > 0$ , 则在  $(-\infty, 0]$  上函数  $f(x)$  有且仅有一个零点, 则  $x_1 \in$

$(-1, 0)$ , 从而知  $0 < x_2 < x_3$ . 假设  $a \geq e$ , 则当  $x > 0$  时, 令  $g(x) = e^x - x^2$ ,

则  $g'(x) = e^x - 2x \geq ex - 2x > 0$ , 故  $g(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增. 又  $g(0) = 1$ , 所以当  $x > 0$  时,  $f(x) \geq g(x) > g(0) = 1 > 0$ , 此时函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上没有零点, 所以假设不能成立, 所以  $a < e$ , 所以  $2 \ln a <$

$$2. \text{ 由 } \begin{cases} a^{x_1} = x_1^2, \\ a^{x_2} = x_2^2, \text{ 得 } \begin{cases} a^{x_2-x_1} = \frac{x_2^2}{x_1^2}, \\ a^{x_3-x_2} = \frac{x_3^2}{x_2^2}, \end{cases} \text{ 因为 } x_1 + x_3 = 2x_2, \text{ 所以 } x_3 - x_2 = x_2 - x_1, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2, \text{ 所以 } -\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2}, \text{ 即 } x_2^2 = -x_1 x_3. \text{ ①}$$

由  $x_1 + x_3 = 2x_2$  得  $x_1 = 2x_2 - x_3$ , 将其代入 ① 式, 得  $x_3^2 - 2x_2 x_3 - x_2^2 = 0$ , 所

$$\text{以 } \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2 - 2\left(\frac{x_3}{x_2}\right) - 1 = 0. \text{ 又 } 0 < x_2 < x_3, \text{ 所以 } \frac{x_3}{x_2} > 1, \text{ 所以 } \frac{x_3}{x_2} = \sqrt{2} + 1 >$$

$$2. \text{ 所以 } \frac{x_3}{x_2} > 2 \ln a. \text{ 故选 C.}$$

**解法三:** 画出函数  $y = a^x (a > 1)$  与函数  $y = x^2$  的大致图象知  $x_1 < 0 < x_2 < x_3$ .

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) = 0 \Leftrightarrow a^x = x^2 \Leftrightarrow \ln a = \frac{2 \ln x}{x}, \text{ 令 } h(x) =$$

$$\frac{2 \ln x}{x}, \text{ 则 } h'(x) = \frac{2 - 2 \ln x}{x^2}, \text{ 易得函数 } h(x) \text{ 在 } (0, e)$$

上单调递增, 在  $(e, +\infty)$  上单调递减, 所以要使  $h(x) = \ln a$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不同的解  $x_2, x_3$ ,

$$\text{则 } \ln a < h(e) = \frac{2}{e}.$$

$$\text{由 } \begin{cases} a^{x_1} = x_1^2, \\ a^{x_2} = x_2^2, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 = 2 \log_a(-x_1), \\ x_2 = 2 \log_a x_2, \\ x_3 = 2 \log_a x_3, \end{cases} \text{ 所以 } 2 \log_a x_2 = \log_a(-x_1) + \log_a x_3 =$$

$$\log_a(-x_1 x_3), \text{ 所以 } x_2^2 = -x_1 x_3. \text{ (下同解法二)}$$

## 9. ABC 【新趋势】相互独立事件的概率和条件概率

**【深度解析】** 对于 A 选项, 因为  $P(AB) = 0.18 = P(A)P(B) = 0.3 \times 0.6$ ,

所以  $A, B$  相互独立, 所以 A 选项正确; 对于 B 选项, 若  $A, B$  相互独立,

则  $P(B|A) = P(B) = 0.6$ , 所以 B 选项正确; 对于 C 选项,  $P(B|A) =$

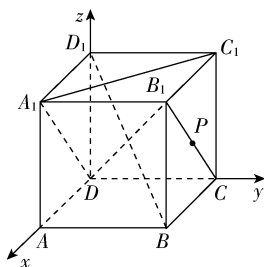
$$\frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(AB)}{0.3} = 0.4 \left( \text{提示: 条件概率公式 } P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \right), \text{ 则}$$

$P(AB) = 0.12$ , 所以 C 选项正确; 对于 D 选项, 若  $A \subseteq B$ , 则

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.6} = 0.5, \text{ 所以 D 选项不正确. 故选 ABC.}$$

## 10. ABD 【经典题型】直线与平面垂直、平行关系的判定和异面直线所成角以及棱锥的体积

**【深度解析】** 分别以  $DA, DC, DD_1$  所在直线为  $x, y, z$  轴, 建立空间直角坐标系, 如图所示.



设正方体的棱长为 1, 则  $A(1, 0, 0), B(1, 1, 0), C(0, 1, 0), D(0, 0, 0), A_1(1, 0, 1), B_1(1, 1, 1), C_1(0, 1, 1), D_1(0, 0, 1)$ ,

对于 A 选项,  $\overrightarrow{BD_1} = (-1, -1, 1), \overrightarrow{DA_1} = (1, 0, 1), \overrightarrow{DC_1} = (0, 1, 1)$ .

$$\text{因为} \begin{cases} \overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{DA_1} = -1 + 1 = 0, \\ \overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{DC_1} = -1 + 1 = 0, \end{cases}$$

所以  $\overrightarrow{BD_1} \perp \overrightarrow{DA_1}, \overrightarrow{BD_1} \perp \overrightarrow{DC_1}$ , 即  $BD_1 \perp DA_1, BD_1 \perp DC_1$ .

又  $DA_1 \cap DC_1 = D, DA_1, DC_1 \subset \text{平面 } A_1C_1D$ ,

所以直线  $BD_1 \perp \text{平面 } A_1C_1D$ , 所以 **A 选项正确**.

对于 B 选项, 因为点  $P$  在线段  $B_1C$  上运动, 所以设点  $P(m, 1, m)$ ,  $m \in [0, 1]$  (易错: 点  $P$  在线段  $B_1C$  上运动, 需要注意  $m$  的取值范围), 则  $\overrightarrow{AP} = (m-1, 1, m)$ .

由 A 选项可知, 平面  $A_1C_1D$  的法向量为  $\overrightarrow{BD_1} = (-1, -1, 1)$ , 且  $\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{AP} = -(m-1) - 1 + m = 0, AP \not\subset \text{平面 } A_1C_1D$ ,

所以直线  $AP \parallel \text{平面 } A_1C_1D$ , 所以 **B 选项正确**.

对于 C 选项,  $\overrightarrow{AP} = (m-1, 1, m), \overrightarrow{A_1D} = (-1, 0, -1)$ , 设异面直线  $AP$  与  $A_1D$  所成角为  $\alpha, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,

$$\text{所以 } \cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{A_1D}|}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{A_1D}|} = \frac{|2m-1|}{\sqrt{(m-1)^2 + 1 + m^2} \cdot \sqrt{2}} =$$

$$\frac{\left|m - \frac{1}{2}\right|}{\sqrt{m^2 - m + 1}} = \frac{\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt{m^2 - m + 1}}.$$

因为  $m \in [0, 1]$ , 所以当  $m = \frac{1}{2}$  时,  $\cos \alpha = 0$ ;

$$\text{当 } m \neq \frac{1}{2} \text{ 时, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}}{\sqrt{m^2 - m + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m^2 - m + 1}{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\left(m - \frac{1}{2}\right)^2}}},$$

因为  $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$ , 所以  $\cos \alpha \in \left(0, \frac{1}{2}\right]$ .

综上,  $\cos \alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , 所以  $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ , 所以 **C 选项不正确**.

对于 D 选项, 因为  $B_1C \parallel A_1D$ , 点  $P$  在线段  $B_1C$  上运动, 所以点  $P$  到直线  $A_1D$  的距离不变, 即  $\triangle A_1DP$  的面积不变.

又因为点  $C_1$  到平面  $A_1DCB_1$  的距离恒为  $\frac{1}{2}BC_1$ ,

所以点  $C_1$  到平面  $A_1DP$  的距离不变, 即三棱锥的高不变,

所以三棱锥  $C_1-A_1PD$  的体积为定值, 而  $V_{A_1-PC_1D} = V_{C_1-A_1PD}$ , 所以 **D 选项正确**.

故选 **ABD**.

**一题多解** 对于 A 选项, 在正方体中, 易得  $BD_1 \perp A_1C_1$ ,  $BD_1 \perp DC_1$ , 又  $DC_1 \cap A_1C_1 = C_1$ , 所以  $BD_1 \perp \text{平面 } A_1C_1D$ , 所以 A 选项正确; 对于 B 选项, 连接  $AB_1, AC$ , 图略, 则  $A_1D \parallel B_1C, A_1C_1 \parallel AC$ , 则可以得出平面  $AB_1C \parallel \text{平面 } A_1C_1D$ , 又  $AP \subset \text{平面 } AB_1C$ , 所以  $AP \parallel \text{平面 } A_1C_1D$ , 所以 B 选项正确; 对于 C 选项, 因为  $A_1D \parallel B_1C$ , 所以异面直线  $AP$  与  $A_1D$  所成的角, 即为直线  $AP$  与  $B_1C$  所成的角, 在  $\triangle AB_1C$  中,  $P$  在线段  $B_1C$  上运动, 当  $P$  运动到  $B_1C$  的中点时,  $AP \perp B_1C$ , 当  $P$  运动到与  $B_1, C$  重合时,  $\angle AB_1C$  和  $\angle ACB_1$  均为  $\frac{\pi}{3}$ , 所以异面直线  $AP$  与  $A_1D$  所成的角的取值范围为  $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ , 所以 C 选项不正确; 对于 D 选项, 三棱锥  $A_1-PC_1D$  即为三棱锥  $P-A_1C_1D$ , 又  $A_1D \parallel B_1C, A_1D \subset \text{平面 } A_1C_1D, B_1C \not\subset \text{平面 } A_1C_1D$ , 所以  $B_1C \parallel \text{平面 } A_1C_1D$ , 所以  $B_1C$  上任一点到平面  $A_1C_1D$  的距离均相等, 所以三棱锥  $P-A_1C_1D$  的体积为定值, 即三棱锥  $A_1-PC_1D$  的体积为定值, 所以 D 选项正确. 故选 **ABD**.

**方法速记** 涉及三棱锥的体积的求解问题, 常采用“等体积转化”的方法, 转化为“底和高”均易求得的三棱锥求解.

## 11. BC 【基础考点】三角函数性质的综合应用

**【深度解析】** 函数  $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$  ( $\omega > 0$ ),

$$\text{令 } \omega x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 则 } x = \frac{(1+4k)\pi}{4\omega}, k \in \mathbf{Z},$$

$\therefore$  函数  $f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上的图象有且仅有 4 条对称轴,  $\therefore 0 \leq \frac{(1+4k)\pi}{4\omega} \leq \pi$  有 4 个整数  $k$  符合 (注意: 三角函数图象的对称轴

所在的位置), 由  $0 \leq \frac{(1+4k)\pi}{4\omega} \leq \pi$ , 得  $0 \leq \frac{(1+4k)}{4\omega} \leq 1$ , 即  $0 \leq 1 + 4k \leq 4\omega$ , 则  $k = 0, 1, 2, 3$ , 即  $1 + 4 \times 3 \leq 4\omega < 1 + 4 \times 4$ ,  $\therefore \frac{13}{4} \leq \omega < \frac{17}{4}$ , **C**

选项正确.

对于 A 选项,  $\because x \in (0, \pi), \therefore \omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \omega\pi + \frac{\pi}{4}\right), \therefore \omega\pi + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$ , 当  $\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{2}\right]$  时,  $f(x)$  在区间  $(0, \pi)$  上有

且仅有 3 个不同的零点, 当  $\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{2}\right]$  时,  $f(x)$  在区间  $(0, \pi)$  上有且仅有 4 个不同的零点, **A 选项不正确**.

对于 B 选项, 周期  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , 由  $\frac{13}{4} \leq \omega < \frac{17}{4}$ , 得  $\frac{4}{17} < \frac{1}{\omega} \leq \frac{4}{13}$ ,

$\frac{8\pi}{17} < T \leq \frac{8\pi}{13}$ , 又  $\frac{\pi}{2} \in \left(\frac{8\pi}{17}, \frac{8\pi}{13}\right]$ ,  $\therefore f(x)$  的最小正周期可能是  $\frac{\pi}{2}$ , **B 选项正确**.

对于 D 选项,  $\because x \in \left(0, \frac{\pi}{15}\right), \therefore \omega x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\omega\pi}{15} + \frac{\pi}{4}\right)$ ,

又  $\omega \in \left[\frac{13}{4}, \frac{17}{4}\right), \therefore \frac{\omega\pi}{15} + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{7\pi}{15}, \frac{8\pi}{15}\right)$ , 又  $\frac{8\pi}{15} > \frac{\pi}{2}$ ,  $\therefore f(x)$  在区间  $\left(0, \frac{\pi}{15}\right)$  上不一定单调递增, **D 选项不正确**.

故选 **BC**.

### 一题多解

因为  $x \in [0, \pi]$ , 所以  $\omega x + \frac{\pi}{4} \in \left[ \frac{\pi}{4}, \omega\pi + \frac{\pi}{4} \right]$ , 令

$X = \omega x + \frac{\pi}{4}$ , 又因为函数  $f(x)$  在区间  $[0, \pi]$  上的图象有且仅有 4

条对称轴, 所以四条对称轴方程分别为  $X = \frac{\pi}{2}, X = \frac{3\pi}{2}, X = \frac{5\pi}{2},$

$X = \frac{7\pi}{2}$ , 则  $\frac{7\pi}{2} \leq \omega\pi + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{2}$ , 解得  $\frac{13}{4} \leq \omega < \frac{17}{4}$  (以下同深度解析).

### 12. ACD 【重难点考点】函数的极值点问题

【深度解析】对于 A 选项,  $f(x) = \ln x + a(x^2 - 2x + 1) = \ln x + a(x-1)^2$ ,  $f(1) = \ln 1 + a(1-1)^2 = 0$ ,  $\therefore x=1$  是  $f(x)$  的一个零点, A 选项正确.

对于 B 选项,  $f'(x) = \frac{1}{x} + a(2x-2) = \frac{2ax^2 - 2ax + 1}{x}$ ,

$\therefore f(x)$  存在两个极值点  $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ ,

$\therefore 2ax^2 - 2ax + 1 = 0$  在  $(0, +\infty)$  上有两个不相等的实数根,

$\therefore \Delta > 0$ , 即  $(-2a)^2 - 4 \times 2a \times 1 = 4a^2 - 8a = 4a(a-2) > 0$ ,  $\therefore a > 2$  或  $a < 0$ .

又  $x_1 > 0, x_2 > 0$ ,  $\therefore \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 > 0, \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2a} > 0, \end{cases}$  解得  $a > 0$  (提示: 通过方程根的

判别式、根与系数的关系确定  $a$  的取值范围). 综上,  $a > 2$ , B 选项不正确.

对于 C 选项, 由 B 选项可得  $x_1 + x_2 = 1$ ,  $\therefore x_2 = 1 - x_1$ ,  $\therefore 1 - x_1 > x_1$ ,

$\therefore 0 < x_1 < \frac{1}{2}$ , C 选项正确.

对于 D 选项,  $f(x_1) + f(x_2) = \ln x_1 + a(x_1^2 - 2x_1 + 1) + \ln x_2 + a(x_2^2 - 2x_2 + 1) = \ln x_1 x_2 + a[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2]$ ,

将  $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = \frac{1}{2a}$  代入上式, 得  $f(x_1) + f(x_2) = \ln \frac{1}{2a} +$

$a\left(1^2 - 2 \times \frac{1}{2a} - 2 \times 1 + 2\right) = -\ln 2a + a\left(1 - \frac{1}{a}\right) = -\ln 2 - \ln a + a - 1 = a - \ln a - \ln 2 - 1$ ,

令  $h(a) = a - \ln a - \ln 2 - 1$ ,  $h'(a) = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a} > 0$  在  $(2, +\infty)$  上恒

成立, 则  $h(a)$  在  $(2, +\infty)$  上单调递增,  $\therefore h(a) > h(2) = 2 - \ln 2 - \ln 2 - 1 = 1 - 2\ln 2$ , D 选项正确. 故选 ACD.

### 13. ±2 【基础考点】二项式定理的应用

【深度解析】 $\left(x - \frac{a}{x}\right)^6$  展开式的通项为  $T_{r+1} = C_6^r x^{6-r} (-a)^r x^{-r} =$

$C_6^r (-a)^r x^{6-2r}$ . 当  $6-2r=2$  时, 解得  $r=2$ ,

所以由展开式中含  $x^2$  项的系数为 60, 可得  $C_6^2 (-a)^2 = 60$ , 得  $a^2 = 4$ , 解得  $a = \pm 2$ .

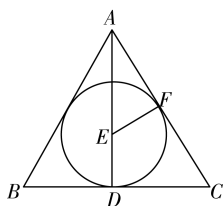
### 14. $\frac{8\pi}{3}$ 【热门考点】圆锥的内切球以及体积的最值问题

【深度解析】当小球与圆锥内切时, 轴截面如图所示. 设圆锥的高  $AD = h$ , 半径

$CD = r$ , 则圆锥的母线  $AC = \sqrt{h^2 + r^2}$ ,

显然有  $DE = EF = 1, EF \perp AC$ ,

所以有  $\sin \angle DAC = \frac{EF}{AE} = \frac{CD}{AC} \Rightarrow \frac{1}{h-1} =$



$$\frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}} \Rightarrow r^2 = \frac{h}{h-2} > 0 \Rightarrow h > 2.$$

设该圆锥的体积为  $V$ , 则  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{h^2}{h-2} =$

$$\frac{1}{3} \pi \left[ (h-2) + \frac{4}{h-2} + 4 \right] \geq \frac{1}{3} \pi \left[ 2\sqrt{(h-2) \cdot \frac{4}{h-2}} + 4 \right] = \frac{8\pi}{3},$$

当且仅当  $h-2 = \frac{4}{h-2}$ , 即  $h=4$  时取等号.

### 一题多解

如图, 设  $OA = x$ , 圆锥底面

半径为  $r$ , 则根据相似三角形可知  $\frac{r}{1+x} =$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

所以  $r = \frac{1+x}{\sqrt{x^2-1}} > 0 \Rightarrow x > 1$ ,

所以圆锥的体积  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 (x+1) = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{(1+x)^2}{x^2-1} \cdot (1+x) = \frac{1}{3} \pi \cdot$

$$\frac{(x+1)^2}{x-1} = \frac{1}{3} \pi \cdot \left( x-1 + \frac{4}{x-1} + 4 \right) \geq \frac{1}{3} \pi \cdot \left[ 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{4}{x-1}} + 4 \right] =$$

$\frac{8\pi}{3}$ , 当且仅当  $x-1 = \frac{4}{x-1}$ , 即  $x=3$  时取等号.

### 15. $-2\sqrt{3}$ 【重点考点】三角函数的单调性以及最值

【深度解析】 $\because f(2+x) + f(2-x) = 0, \therefore f(4-x) = -f(x)$ ,

$$\therefore f(4-\sqrt{3}\cos A) = -f(\sqrt{3}\cos A), f(m+3\sin A) + f(4-\sqrt{3}\cos A) \geq 0$$

可化为  $f(m+3\sin A) \geq f(\sqrt{3}\cos A)$ , 又  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减,

$\therefore m+3\sin A \leq \sqrt{3}\cos A$  在  $A \in [0, \pi]$  上恒成立,  $\therefore m \leq$

$$(\sqrt{3}\cos A - 3\sin A)_{\min} \text{ (提示: 恒成立转化成最值问题)}.$$

$$\text{令 } y = \sqrt{3}\cos A - 3\sin A = 2\sqrt{3}\sin\left(A + \frac{5\pi}{6}\right),$$

$$\because A \in [0, \pi], \therefore A + \frac{5\pi}{6} \in \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right], \therefore \left[\sin\left(A + \frac{5\pi}{6}\right)\right]_{\min} = -1, \text{ 此}$$

$$\text{时 } A = \frac{2\pi}{3}, \therefore y_{\min} = -2\sqrt{3}, \therefore m \leq -2\sqrt{3}, \therefore m_{\max} = -2\sqrt{3}.$$

### 16. (1) 1 (2) 88

#### 思路导引

(1) 利用  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} -$

$\frac{1}{n}$  进行放缩计算可得答案;

(2) 利用  $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$  进

行放缩计算可得答案.

#### 【新趋考点】数列求和问题

【深度解析】(1)  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{10^2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \cdots + \frac{1}{10 \times 9} =$

$$1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = 1 + 1 - \frac{1}{10} = \frac{19}{10},$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{10^2} > 1 + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{10 \times 11} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} -$$

$$\frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11} = \frac{31}{22},$$

$$\text{所以 } \frac{31}{22} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{10^2} < \frac{19}{10},$$

$$\text{所以 } \left[ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{10^2} \right] = 1.$$

(2) 当  $n=1$  时,  $a_1 = S_1 = \frac{1}{2} \left( a_1 + \frac{1}{a_1} \right)$ , 则  $a_1^2 = 1$ , 因为  $a_n > 0$ , 所以  $a_1 = S_1 = 1$ ;

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , 所以  $2S_n = S_n - S_{n-1} + \frac{1}{S_n - S_{n-1}}$ , 即  $S_n^2 - S_{n-1}^2 =$

1, 所以  $\{S_n^2\}$  是以 1 为首项, 1 为公差的等差数列,

所以  $S_n^2 = n (n \in \mathbf{N}^*)$ . 因为  $a_n > 0$ , 所以  $S_n > 0$ , 所以  $S_n = \sqrt{n}$ .

当  $n \geq 2$  时,  $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ , 即  $\frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} <$

$\frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ , 所以  $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ .

$$\text{令 } S = \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \cdots + \frac{1}{S_{2023}},$$

$$\text{则 } S > 1 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{2024} - \sqrt{2023}) = 1 + 2(\sqrt{2024} - \sqrt{2}),$$

$$S < 1 + 2(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{2023} - \sqrt{2022}) = 1 + 2(\sqrt{2023} - 1),$$

$$\text{又 } 1 + 2(\sqrt{2024} - \sqrt{2}) \approx 88.15,$$

$$1 + 2(\sqrt{2023} - 1) \approx 88.96,$$

所以  $[S] = 88$ .

**方法速记** 数列中常见的“放缩”技巧:  $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} <$

$$\frac{1}{n(n-1)}; \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} (n \geq 2).$$

#### 17. 【基础考点】离散型随机变量的分布列与数学期望以及回归分析

【解】(1) 由题可知  $\xi$  的可能取值为 0, 1, 2,

$$\text{则 } P(\xi=0) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}, P(\xi=1) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, P(\xi=2) = \frac{C_3^2}{C_5^2} =$$

$$\frac{3}{10}.$$

所以  $\xi$  的分布列为

$\xi$	0	1	2
$P$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$$\text{所以数学期望 } E(\xi) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}. \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由已知得 } \bar{x} = \frac{18+19+20+21+22}{5} = 20,$$

$$\bar{y} = \frac{0.62+0.69+0.71+0.72+0.76}{5} = 0.7, \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } \hat{b} = \frac{(-2) \times (-0.08) + (-1) \times (-0.01) + 0 \times 0.01 + 1 \times 0.02 + 2 \times 0.06}{4+1+0+1+4} =$$

$$0.031,$$

$$\hat{a} = 0.7 - 0.031 \times 20 = 0.08,$$

$$\text{即 } \hat{y} = 0.031x + 0.08. \quad (9 \text{ 分})$$

当第 6 次实验, 即  $x=21$  时,  $\hat{y} = 0.031 \times 21 + 0.08 = 0.731$ ,

所以根据回归方程估计这次实验中该植物种子的发芽率为 73.1%. (10 分)

#### 18. 【热门考点】解三角形的实际应用以及三角函数的最值

【解】(1) 连接  $OB$ , 设  $OB=m$ ,  $\angle BOC=\beta$ .

$$\text{在 } \triangle OAB \text{ 中, 由正弦定理可知 } \frac{m}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right)} = \frac{3}{\cos \beta}, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{在 } \triangle OBC \text{ 中, 由正弦定理可知 } \frac{m}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{9}{\sin \beta},$$

$$\text{于是有 } \frac{9}{\sin \beta} = \frac{3}{\cos \beta} \Rightarrow \sin \beta = 3 \cos \beta, \text{ 而 } \sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1,$$

$$\text{解得 } \cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{10}, \text{ 负值舍去.}$$

$$\text{因此由 } \frac{m}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{3}{\cos \beta} \Rightarrow m = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = \frac{3\sqrt{30}}{2},$$

$$\text{即 } OB \text{ 的长为 } \frac{3\sqrt{30}}{2} \text{ 米.} \quad (5 \text{ 分})$$

(2) 连接  $AC$ ,  $AB=BC=6$ , 所以  $\angle BCA = \angle BAC$ , 而  $OA \perp OC$ ,  $\angle BAO = \angle BCO$ , 因此  $\angle OCA = \angle OAC = \frac{\pi}{4}$ , 所以  $OA=OC$ , 而  $AB=$

$BC$ , 所以  $OB$  垂直且平分  $AC$ , 因此  $\angle BOC = \frac{\pi}{4}$ .

$$\angle ABO = \angle CBO = \pi - \frac{\pi}{4} - \alpha = \frac{3\pi}{4} - \alpha,$$

$$\text{在 } \triangle OBC \text{ 中, 由正弦定理可知 } \frac{OB}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin \angle BOC},$$

$$\text{得 } OB = 6\sqrt{2} \sin \alpha. \quad (9 \text{ 分})$$

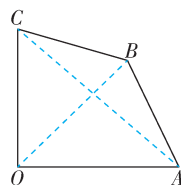
$$\text{于是 } S = 2 \times \frac{1}{2} OB \times AB \times \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \alpha \right) = 36\sqrt{2} \sin \alpha \sin \left( \frac{3\pi}{4} - \alpha \right) =$$

$$36\sqrt{2} \sin \alpha \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha \right) = 36 \sin \alpha \cos \alpha + 36 \sin^2 \alpha = 18 \sin 2\alpha +$$

$$18(1 - \cos 2\alpha) = 18\sqrt{2} \sin \left( 2\alpha - \frac{\pi}{4} \right) + 18, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

当  $2\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ , 即  $\alpha = \frac{3\pi}{8}$  时,  $S$  取得最大值, 最大值为  $18\sqrt{2} + 18$ . 因

此, 当  $\alpha = \frac{3\pi}{8}$  时, 四边形  $OABC$  面积最大, 最大的面积为  $(18\sqrt{2} + 18)$  平方米. (12 分)



#### 19. 【经典题型】数列的通项与利用错位相减法求和

(1) 【解】当  $n=1$  时,  $a_1 = S_1 = 1$ ;

当  $n \geq 2$  时,  $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n + 2 - [(n-1)^2 - 2(n-1) + 2] =$

$$2n-3,$$

当  $n=1$  时,  $a_1=1$  不满足上式,

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, & n=1, \\ 2n-3, & n \geq 2. \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } b_1 = T_1 = 1 - b_1, \therefore b_1 = \frac{1}{2};$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } b_n = T_n - T_{n-1} = 1 - b_n - 1 + b_{n-1}, \therefore \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$  数列  $\{b_n\}$  是以  $\frac{1}{2}$  为首项,  $\frac{1}{2}$  为公比的等比数列,

$$\therefore b_n = \frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}^*. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \text{【证明】由 (1) 知 } a_n \cdot b_n = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n=1, \\ (2n-3) \times \frac{1}{2^n}, & n \geq 2, \end{cases}$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } R_1 = a_1 b_1 = \frac{1}{2}, \text{ 满足 } \frac{1}{2} \leq R_n < 2.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } R_n = \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2^2} + 3 \times \frac{1}{2^3} + 5 \times \frac{1}{2^4} + \cdots + (2n-3) \times \frac{1}{2^n}, \quad (8 \text{ 分})$$

故只需证  $0 \leq 1 \times \frac{1}{2^2} + 3 \times \frac{1}{2^3} + 5 \times \frac{1}{2^4} + \cdots + (2n-3) \times \frac{1}{2^n} < \frac{3}{2}$ , 左边显然成立.

$$\text{令 } A = 1 \times \frac{1}{2^2} + 3 \times \frac{1}{2^3} + 5 \times \frac{1}{2^4} + \cdots + (2n-3) \times \frac{1}{2^n}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}A = 1 \times \frac{1}{2^3} + 3 \times \frac{1}{2^4} + 5 \times \frac{1}{2^5} + \cdots + (2n-3) \times \frac{1}{2^{n+1}}, \quad (2)$$

$$(1)-(2) \text{ 整理得 } A = \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2^2} + 2 \times \frac{1}{2^3} + \cdots + 2 \times \frac{1}{2^{n-1}} - (2n-3) \times \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2} -$$

$$\frac{2n+1}{2^n} < \frac{3}{2}, \therefore 0 \leq A < \frac{3}{2} \text{ 成立.}$$

故原式得证.

(12 分)

## 20. 【热门考点】平面垂直的判定和二面角以及三棱锥的体积

(1) 【证明】因为  $PD \perp$  底面  $ABCD$ ,  $BC \subset$  底面  $ABCD$ ,

所以  $PD \perp BC$ .

由  $\angle BAD = 90^\circ$ ,  $AD = AB = 1$ , 得  $BD = \sqrt{2}$ ,

又  $\angle BAD = \angle CDA = 90^\circ$ , 则  $AB \parallel CD$ .

(2 分)

如图, 取  $CD$  的中点  $F$ , 连接  $BF$ , 易知四边形  $ABFD$  为正方形, 则

$BF = 1$ , 又  $CD = 2$ , 即  $FC = 1$ , 所以  $BC = \sqrt{2}$ ,

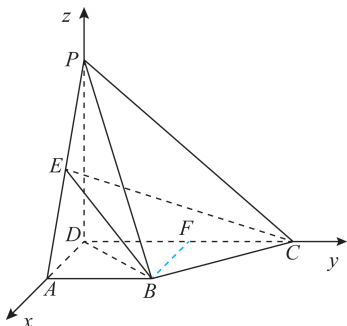
综上,  $BC^2 + BD^2 = CD^2$ , 即  $BD \perp BC$ ,

又  $BD \cap PD = D$ , 则  $BC \perp$  平面  $PBD$ .

又  $BC \subset$  平面  $BCE$ ,

所以平面  $PBD \perp$  平面  $BCE$ .

(4 分)



(2) 【解】由题设, 可构建如图所示的空间直角坐标系, 若  $PD = m$ ,

$$\text{则 } D(0,0,0), B(1,1,0), C(0,2,0), E\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{m}{2}\right), P(0,0,m),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PB} = (1, 1, -m), \overrightarrow{EB} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{m}{2}\right), \overrightarrow{BC} = (-1, 1, 0).$$

若  $\mathbf{n} = (x, y, z)$  为平面  $PBC$  的一个法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{BC} = -x + y = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PB} = x + y - zm = 0, \end{cases} \quad \text{令 } x = 1, \text{ 则 } \mathbf{n} = \left(1, 1, \frac{2}{m}\right). \quad (7 \text{ 分})$$

若  $\mathbf{a} = (a, b, c)$  为平面  $EBC$  的一个法向量,

$$\text{则 } \begin{cases} \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{BC} = -a + b = 0, \\ \mathbf{a} \cdot \overrightarrow{EB} = \frac{a}{2} + b - \frac{cm}{2} = 0, \end{cases} \quad \text{令 } a = 1, \text{ 则 } \mathbf{a} = \left(1, 1, \frac{3}{m}\right).$$

$$\text{所以 } |\cos \langle \mathbf{n}, \mathbf{a} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{a}|}{|\mathbf{n}| |\mathbf{a}|} = \frac{\left|2 + \frac{6}{m^2}\right|}{\sqrt{2 + \frac{4}{m^2}} \cdot \sqrt{2 + \frac{9}{m^2}}} = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

$$\text{整理得 } \frac{9}{m^4} - \frac{6}{m^2} + 1 = 0, \text{ 所以 } m = \sqrt{3}, \text{ 即 } PD = \sqrt{3}. \quad (8 \text{ 分})$$

在  $\triangle PBC$  中,  $PB = \sqrt{5}$ ,  $PC = \sqrt{7}$ ,  $BC = \sqrt{2}$ , 即  $PB^2 + BC^2 = PC^2$ , 则

$$PB \perp BC, \text{ 所以 } S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

$$\text{又 } \overrightarrow{EB} = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 且平面 } PBC \text{ 的一个法向量为 } \mathbf{n} = \left(1, 1, \frac{2}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\text{故 } E \text{ 到平面 } PBC \text{ 的距离 } d = \frac{|\overrightarrow{EB} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{\frac{10}{3}}} = \frac{\sqrt{30}}{20},$$

$$\text{所以 } V_{P-BCE} = \frac{1}{3} \cdot d \cdot S_{\triangle PBC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{30}}{20} \times \frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}. \quad (12 \text{ 分})$$

## 21. 思路导引

(1) 根据题意得到  $c=1 \rightarrow$  再将点  $\left(1, \frac{3}{2}\right)$  的坐标

代入椭圆方程  $\rightarrow$  求得方程;

(2) 设  $M(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), N(x_3, y_3), P(x_4, y_4) \rightarrow$  由  $\overrightarrow{MT} = 3\overrightarrow{TQ}$

$$\text{得到 } \begin{cases} x_2 = \frac{4-x_1}{3}, \\ y_2 = \frac{4-y_1}{3} \end{cases} \rightarrow \text{根据 } M(x_1, y_1), Q(x_2, y_2) \text{ 都在椭圆上} \rightarrow \text{得到}$$

$$\frac{1}{4}(2-x_1) + \frac{1}{3}(2-y_1) = 1 \rightarrow \text{同理得 } \frac{1}{4}(2-x_3) + \frac{1}{3}(2-y_3) = 1 \rightarrow \text{两式相减求解.}$$

【重难点】椭圆的标准方程以及直线与椭圆的位置关系

【解】(1) 由题意可知,  $c=1$ ,

设椭圆方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-1} = 1 (a^2 > 1)$ , 将点  $\left(1, \frac{3}{2}\right)$  的坐标代入椭圆

方程, 整理得  $(a^2-4)(4a^2-1) = 0$ ,

$$\text{解得 } a^2 = \frac{1}{4} \text{ (舍) 或 } a^2 = 4,$$



所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ . (3分)

(2) **解法一:** 设  $M(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), N(x_3, y_3), P(x_4, y_4)$ .

$$\text{因为 } \overrightarrow{MT} = 3\overrightarrow{TQ}, \text{ 所以 } \begin{cases} 1-x_1 = 3(x_2-1), \\ 1-y_1 = 3(y_2-1), \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} x_2 = \frac{4-x_1}{3}, \\ y_2 = \frac{4-y_1}{3}, \end{cases} \quad (5 \text{ 分})$$

又  $M(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$  都在椭圆  $C$  上,

$$\text{所以 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1, \text{ ①} \\ \frac{1}{4}(4-x_1)^2 + \frac{1}{3}(4-y_1)^2 = 9, \text{ ②} \end{cases} \quad (7 \text{ 分})$$

$$\text{②}-\text{①} \text{ 得 } \frac{1}{4}(16-8x_1) + \frac{1}{3}(16-8y_1) = 8,$$

$$\text{即 } \frac{1}{4}(2-x_1) + \frac{1}{3}(2-y_1) = 1. \text{ ③}$$

$$\text{又 } \overrightarrow{NT} = 3\overrightarrow{TP}, \text{ 同理得 } \frac{1}{4}(2-x_3) + \frac{1}{3}(2-y_3) = 1, \text{ ④} \quad (10 \text{ 分})$$

$$\text{④}-\text{③} \text{ 得 } \frac{1}{4}(x_1-x_3) + \frac{1}{3}(y_1-y_3) = 0,$$

$$\text{所以 } k_{MN} = \frac{y_1-y_3}{x_1-x_3} = -\frac{3}{4}, \text{ 即直线 } MN \text{ 的斜率为 } -\frac{3}{4}. \quad (12 \text{ 分})$$

**解法二:** 若直线  $MQ \perp x$  轴, 联立  $\begin{cases} x=1, \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$  解得  $y = \pm \frac{3}{2}$ ,

得  $\overrightarrow{MT} = 5\overrightarrow{TQ}$ , 不符合题意.

故直线  $MQ, NP$  的斜率存在, 设  $M(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), N(x_3, y_3), P(x_4, y_4), l_{MQ}: y-1=k(x-1)$ .

$$\text{由 } \begin{cases} y=kx+1-k, \\ 3x^2+4y^2=12 \end{cases} \Rightarrow (3+4k^2)x^2 + (8k-8k^2)x + (4k^2-8k-8) = 0,$$

$$\text{所以 } x_1+x_2 = \frac{8k^2-8k}{3+4k^2}, \text{ ① } x_1x_2 = \frac{4k^2-8k-8}{3+4k^2}, \text{ ②} \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{由 } \overrightarrow{MT} = 3\overrightarrow{TQ}, \text{ 得 } 1-x_1 = 3(x_2-1), \text{ 即 } x_1+3x_2=4, \text{ ③}$$

$$\text{由 ①③ 得 } x_2 = \frac{4k^2+4k+6}{3+4k^2}, x_1 = \frac{4k^2-12k-6}{3+4k^2}, \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{代入 ② 得 } (4k^2-12k-6)(4k^2+4k+6) = (4k^2-8k-8)(3+4k^2),$$

$$\text{即 } 7k^2+18k+3=0,$$

$$\text{所以 } k_1+k_2 = -\frac{18}{7}, k_1k_2 = \frac{3}{7}. \quad (10 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} k_{MN} &= \frac{y_3-y_1}{x_3-x_1} = \frac{(k_2x_3+1-k_2)-(k_1x_1+1-k_1)}{x_3-x_1} \\ &= \frac{k_2 \cdot \frac{-12k_2-9}{3+4k_2^2} - k_1 \cdot \frac{-12k_1-9}{3+4k_1^2}}{\frac{4k_2^2-12k_2-6}{3+4k_2^2} - \frac{4k_1^2-12k_1-6}{3+4k_1^2}} \\ &= -\frac{3}{2} \times \frac{(4k_2^2+3k_2)(3+4k_1^2) - (4k_1^2+3k_1)(3+4k_2^2)}{(2k_2^2-6k_2-3)(3+4k_1^2) - (2k_1^2-6k_1-3)(3+4k_2^2)} \\ &= \frac{12(k_1+k_2)+9-12k_1k_2}{12-16k_1k_2-12(k_1+k_2)} = -\frac{3}{4}, \text{ 即直线 } MN \text{ 的斜率为 } -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

(12分)

**22. 思路导引** (1) 根据极值点的定义  $\rightarrow$  求导  $\rightarrow$  确定导函数的“变号”零点  $\rightarrow$  求得参数范围;

(2) 由 (1) 明确函数的单调区间  $\rightarrow$  分别在两个单调区间上  $\rightarrow$  利用函数零点存在定理  $\rightarrow$  证明零点唯一存在  $\rightarrow$  根据单调性证明不等式成立.

**【重难点】函数的极值以及零点问题**

$$(1) \text{【解】} f'(x) = e^x - a \cos x, \quad (1 \text{ 分})$$

① 当  $0 < a \leq 1$  时, 因为  $x \in (0, \pi)$ , 所以  $a \cos x \leq 1, 1 < e^x < e^\pi, f'(x) > 0, f(x)$  在  $(0, \pi)$  上单调递增, 没有极值点, 不合题意. (2分)

$$\text{② 当 } a > 1 \text{ 时, 令 } g(x) = f'(x), \text{ 则 } g'(x) = e^x + a \sin x, \text{ 因为 } x \in (0, \pi), \text{ 所以 } g'(x) > 0, \text{ 所以 } f'(x) \text{ 在 } (0, \pi) \text{ 上单调递增, 又因为}$$

$$f'(0) = 1-a < 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} > 0, \quad (3 \text{ 分})$$

所以  $f'(x)$  在  $(0, \pi)$  上有唯一零点  $x_1$ , 且  $x_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 所以  $x \in (0, x_1)$  时,  $f'(x) < 0$ ;  $x \in (x_1, \pi)$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上有唯一极值点, 符合题意.

综上, 实数  $a$  的取值范围为  $(1, +\infty)$ . (4分)

(2) **【证明】** 探究  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上的零点情况

由 (1) 知  $a > 1$ , 当  $x \in (0, x_1)$  时,  $f'(x) < 0, f(x)$  单调递减; 当  $x \in (x_1, \pi)$  时,  $f'(x) > 0, f(x)$  单调递增, (6分)

所以当  $x \in (0, x_1)$  时,  $f(x) < f(0) = 0$ , 则  $f(x_1) < 0$ .

又因为  $f(\pi) = e^\pi - 1 > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $(x_1, \pi)$  上有唯一零点  $x_2$ , 即  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  上有唯一零点  $x_2$ . (8分)

$$\text{因为 } f(2x_1) = e^{2x_1} - a \sin 2x_1 - 1 = e^{2x_1} - 2a \sin x_1 \cos x_1 - 1, \text{ 由 (1) 知}$$

$$f'(x_1) = 0, \text{ 所以 } e^{x_1} = a \cos x_1,$$

$$\text{则 } f(2x_1) = e^{2x_1} - 2e^{x_1} \sin x_1 - 1,$$

(通过换元设函数  $p(t)$ , 求导分析单调性)

$$\text{构造 } p(t) = e^{2t} - 2e^t \sin t - 1, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{所以 } p'(t) = 2e^{2t} - 2e^t(\sin t + \cos t) = 2e^t(e^t - \sin t - \cos t),$$

$$\text{记 } \varphi(t) = e^t - \sin t - \cos t, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\text{则 } \varphi'(t) = e^t - \cos t + \sin t, \quad (10 \text{ 分})$$

显然  $\varphi'(t)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增, 所以  $\varphi'(t) > \varphi'(0) = 0$ ,

所以  $\varphi(t)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增, 所以  $\varphi(t) > \varphi(0) = 0$ ,

所以  $p'(t) > 0$ , 所以  $p(t)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增, 所以  $p(t) >$

$$p(0) = 0,$$

所以  $f(2x_1) > 0 = f(x_2)$ , 由前面讨论可知  $x_1 < 2x_1 < \pi, x_1 < x_2 < \pi$ ,

且  $f(x)$  在  $(x_1, \pi)$  上单调递增, 所以  $x_2 < 2x_1$ . (12分)