

12 2023 重庆市高三质量检测(五)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	C	C	D	A	D	B	B	AC	BD
题号	11	12	13		14		15		16	
答案	BCD	ACD	π		$y=2x-2$		720		$(1)5 \quad (2)\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$	

1. D 【基础考点】复数的虚部

【深度解析】因为 $\frac{2-i}{i} = \frac{(2-i)i}{i^2} = -1-2i$, 所以该复数的虚部为 -2. 故选 D.

2. C 【基础考点】充分必要条件、指数不等式

【深度解析】依题意, $p: 2^{x+y} \geq 2^3$, 则 $x+y \geq 3$; 由 $x+y \geq 3$ 不一定能得到 $x \geq 1$ 且 $y \geq 2$, 而由 $x \geq 1$ 且 $y \geq 2$ 一定可以得出 $x+y \geq 3$, 所以 p 是 q 的必要不充分条件. 故选 C.

3. C 【基础考点】等比数列的性质和基本运算

【深度解析】依题意, 等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q \neq 1$, 则 $S_6 = \frac{a_1(1-q^6)}{1-q}$, $S_3 = \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}$, 则有 $\frac{a_1(1-q^6)}{1-q} = 3 \times \frac{a_1(1-q^3)}{1-q}$, 整理得 $1+q^3 = 3$, 即 $q^3 = 2$. 所以 $\frac{a_7+a_9}{a_1+a_3} = \frac{(a_1+a_3)q^6}{a_1+a_3} = q^6 = 4$. 故选 C.

4. D 【基础考点】平面向量的线性运算

【深度解析】依题意, $\vec{EO} = \vec{EA} + \vec{AO} = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD}$. 故选 D.

5. A 【经典题型】二项式定理的应用

【深度解析】 $(2x^2+y+1)^5$ 可以看作是 5 个因式 $2x^2+y+1$ 相乘, 因此含 x^4y^2 项可以看成是 2 个因式中的 $2x^2$ 和 2 个因式中的 y 以及 1 个因式中的 1 相乘得到, 即 $C_5^2(2x^2)^2 \cdot C_3^2y^2 \cdot C_1^11 = 120x^4y^2$, 故选 A.

【一题多解】因为 $(2x^2+y+1)^5 = [1+(2x^2+y)]^5$, 所以 $T_{r+1} = C_5^r(2x^2+y)^r \cdot 1^{5-r}$. 在二项式 $(2x^2+y)^r$ 中, 有 $T_{k+1} = C_r^k(2x^2)^{r-k}y^k$, 依题意, 则 $r-k=2, k=2$, 所以 $r=4$, 所以 x^4y^2 的系数为 $C_5^4C_4^2 \times 4 = 120$, 故选 A.

6. D 【基础考点】函数的奇偶性、对称性

【深度解析】因为 $f(x+3)$ 是偶函数, 所以 $f(-x+3) = f(x+3)$, 则 $f(-x) = f(x+6)$. 令 $x=-1$, 得 $f(1) = f(5)$. 又 $f(x) + f(2-x) = 2$, 令 $x=1$, 得 $f(1) + f(2-1) = 2$, 则 $f(1) = 1$, 所以 $f(5) = f(1) = 1$, A 选项错误.

在 $f(x) + f(2-x) = 2$ 中, 令 $x=-3$, 得 $f(-3) + f(2-(-3)) = 2$. 又因为 $f(5) = 1$, 所以 $f(-3) = 1$, D 选项正确.

而 $f(3), f(0)$ 的值未知, 所以 B 选项和 C 选项不一定正确. 故选 D.

【一题多解】因为 $f(x+3)$ 是偶函数, 所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称.

又因为 $f(x) + f(2-x) = 2$, 所以函数 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(1, 1)$ 对称. 所以 8 为函数 $y=f(x)$ 的一个周期, $f(-3) = f(5)$. 令 $x=1$, 则 $f(1) = 1$, 所以 $f(-3) = f(5) = f(1) = 1$, 所以 A 选项错误, D 选项正确. 而 $f(3), f(0)$ 的值未知, 所以 B 选项和 C 选项不一定正确. 故选 D.

【关键点拨】一般地, 函数若具有双重对称性, 则一定可以得到函数具有周期性, 且相邻的两条对称轴之间的距离为半个周期; 相邻的两个对称中心之间的距离也是半个周期; 相邻的一条对称轴和一个对称中心之间的距离为四分之一周期.

7. B 【热门考点】双曲线的离心率

【深度解析】不妨设点 P 在第一象限, 由双曲线的定义, 可得 $|PF_1| - |PF_2| = 2a$. 因为 $|PQ| = |F_1F_2|$, $PF_1 \perp QF_2$, 所以四边形 PQF_1F_2 是菱形, 所以 $|PF_2| = |F_1F_2| = 2c$. 因为 $\triangle QF_1O$ 为直角三角形, 且 $|QF_1| = 2c, |F_1O| = c$, 所以 $\angle QF_1O = \frac{\pi}{3}$, 所以 $|PF_1| = 2\sqrt{3}c$. 又 $|PF_1| = 2(a+c)$, 所以 $2\sqrt{3}c = 2(a+c)$, 即 $\sqrt{3}c = a+c$, 所以双曲线的离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. 故选 B.

【一题多解】不妨设点 P 在第一象限, 依题意可得四边形 PQF_1F_2 是菱形, 所以点 P 的横坐标为 $2c$, 代入双曲线方程, 得点 P 的纵坐标为 $\sqrt{\left(\frac{4c^2}{a^2}-1\right)b^2}$, 所以 $|PF_1| = \sqrt{9c^2 + \left(\frac{4c^2}{a^2}-1\right)b^2} = 2a+2c$, 两边平方得 $9c^2 + \left(\frac{4c^2}{a^2}-1\right)b^2 = 4a^2+4c^2+8ac$, 整理得 $4c^4-8a^3c-3a^4=0$, 两边同时除以 a^4 , 得 $4\left(\frac{c}{a}\right)^4-8\frac{c}{a}-3=0$, 解得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$. 故选 B.

8. B

【思路导引】求导 $f'(x), g'(x) \rightarrow$ 联立消去 a 得到关于 x_0 的等式 \rightarrow 求出 $e^{2x_0} \ln x_0$ 的值

【新趋考点】函数的极值点

【深度解析】依题意, $f'(x) = 2x + \ln x + 1 - a (x > 0), f'(x_0) = 2x_0 + \ln x_0 + 1 - a = 0, g'(x) = -2ae^{-2x} + 2x$, 则 $g'(x_0) = -2ae^{-2x_0} + 2x_0 = 0$, 联立消去 a 可得 $2x_0 + \ln x_0 + 1 = x_0 e^{2x_0} = e^{2x_0 + \ln x_0}$ (提示: 根据对数恒等

式,作“同构”处理). 令 $2x_0 + \ln x_0 = t$, 则有 $t+1 = e^t$. 由于 $e^t \geq t+1$ 恒成立, 当且仅当 $t=0$ 时取等号, 所以 $2x_0 + \ln x_0 = 0, x_0 e^{2x_0} = 1$, 所以 $-2x_0 = \ln x_0, e^{2x_0} = \frac{1}{x_0}$, 所以 $e^{2x_0} \ln x_0 = -2$, 故选 B.

9. AC 【基础考点】互斥事件的概率和条件概率

【深度解析】对于 A 选项, $P(A_2) = \frac{3}{10}, P(A_3) = \frac{1}{5}, P(A_1) = \frac{1}{2}$,
 $P(A_2 + A_3) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} = P(A_1)$, 所以 A 选项正确; 对于 B 选项,
 $P(BA_2) = \frac{3}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{27}{100}$, 所以 B 选项不正确; 对于 C 选项, $P(B) =$
 $\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{3}{10} \times \frac{9}{10} + \frac{1}{5} \times \frac{7}{10} = \frac{81}{100}$, 所以 C 选项正确; 对于 D 选项,
 $P(A_2|B) = \frac{P(A_2B)}{P(B)} = \frac{\frac{27}{100}}{\frac{81}{100}} = \frac{1}{3}$, 所以 D 选项不正确. 故选 AC.

10. BD 【经典题型】空间线面平行、垂直的判定

【深度解析】对于 A 选项, 由条件可以得出 m, n 可能相交、平行和异面, 所以 A 选项不正确; 对于 B 选项, 两条直线分别垂直两平行平面中的一个, 则两直线平行, 所以 B 选项正确; 对于 C 选项, 由条件得出 α, β 可能相交、平行, 所以 C 选项不正确; 对于 D 选项, 由条件可以得出 $m \perp n$, 所以 D 选项正确. 故选 BD.

11. BCD 【热门考点】点与圆的位置关系、直线与圆的位置关系

【深度解析】对于 A 选项, 由题知圆 C 的圆心为 $C(1, 2)$, 半径 $r = 4$, 则 $|PC| = 5$, 所以圆 C 上有且仅有一个点到点 P 的距离为 1, 所以 A 选项不正确;

对于 B 选项, 当 PQ 为圆 C 的切线时, $\tan \angle CPQ = \frac{4}{3}$, 故存在点 Q 使得 $\tan \angle CPQ = \frac{4}{3}$, 所以 B 选项正确;

对于 C 选项, $\vec{PQ} \cdot \vec{PC} = |\vec{PQ}| |\vec{PC}| \cos \angle CPQ$, 由数量积的几何意义可知, $|\vec{PQ}| \cos \angle CPQ$ 为 \vec{PQ} 在 \vec{PC} 方向上的投影数量, 且 $|\vec{PQ}| \cos \angle CPQ \in [1, 9]$, $|\vec{PC}| = 5$, 所以 $\vec{PQ} \cdot \vec{PC} \in [5, 45]$, 所以 C 选项正确;

对于 D 选项, 设点 N 在线段 PM 上, 当 M, N 接近重合时, $\frac{|PM|}{|PN|}$ 接近于 1, 当 MN 经过圆心时, $\frac{|PM|}{|PN|} = 9$, 所以 $\frac{|PM|}{|PN|} \in (1, 9]$, 所以存在直线 l, 使得 $\vec{PM} = 3\vec{PN}$, 所以 D 选项正确. 故选 BCD.

12. ACD 【重点题型】不等式性质和基本不等式应用

【深度解析】对于 A 选项, 将 $4a^2 - ab + b^2 = 1$ 看成关于 b 的一元二次方程 $b^2 - ab + 4a^2 - 1 = 0$, 则该方程有实根, 所以 $\Delta = (-a)^2 - 4(4a^2 - 1) \geq 0$, 解得 $|a| \leq \frac{2\sqrt{15}}{15}$, 所以 A 选项正确;

对于 B 选项, 取 $a=0, b=1$, a, b 满足 $4a^2 - ab + b^2 = 1$, 但是 $|a-b| = 1$, 所以 B 选项不正确;

对于 C 选项, 因为 $4a^2 - ab + b^2 = 1$, 即 $4a^2 + b^2 = 1 + ab = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2ab$,

又因为 $-\frac{(2a)^2 + b^2}{2} \leq 2ab \leq \frac{(2a)^2 + b^2}{2}$, 令 $4a^2 + b^2 = t$, 则有 $1 - \frac{t}{4} \leq t \leq 1 + \frac{t}{4}$, 解得 $\frac{4}{5} \leq t \leq \frac{4}{3}$, 即 $\frac{4}{5} \leq 4a^2 + b^2 \leq \frac{4}{3}$, 所以 C 选项正确;

对于 D 选项, 依题意有 $(2a-b)^2 + 3ab = 1, (2a-b)^2 = 1 - 3ab = 1 + \frac{3}{2} \cdot 2a \cdot (-b)$, 同理依据基本不等式得 $2a \cdot (-b) \leq \left(\frac{2a-b}{2}\right)^2$, 令 $|2a-b| = u$, 可得 $u^2 \leq 1 + \frac{3}{8}u^2$, 解得 $u^2 \leq \frac{8}{5}$, 所以 $u \leq \frac{2\sqrt{10}}{5}$, 所以 D 选项正确. 故选 ACD.

13. π 【基础考点】三角恒等变换、三角函数的性质

【深度解析】函数 $f(x) = 1 + \sin 2x$, 所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{2} = \pi$.

14. $y=2x-2$ 【基础考点】导数的几何意义

【深度解析】因为 $f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}, f'(1) = 2, f(1) = 0$, 所以切线方程为 $y-0 = 2(x-1)$, 即 $y = 2x-2$.

15. 720 【热门考点】排列组合的应用问题

【深度解析】由于学号为奇数的同学不能安排在周一、周三、周五三天, 故先在学号为偶数(2, 4, 6, 8)的四位同学中选出三位安排在周一、周三、周五值日, 有 A_4^3 种方法, 再从剩下的 6 位同学中选出两位安排在周二、周四值日, 有 A_6^2 种方法, 所以满足条件的不同安排方法种数为 $A_4^3 \cdot A_6^2 = 720$.

16. (1) 5 (2) $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$

思路一: (1) 利用 A, B 两点在椭圆上, 及 $x_1x_2 + 4y_1y_2 = 0$ 三个方程, 联立求出 $x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$ 的值;

(2) 分直线 AB 的斜率是否存在两种情况讨论→对于斜率存在的情况, 联立直线和椭圆方程→根据 $x_1x_2 + 4y_1y_2 = 0$ 并结合根与系数的关系找出关系式→利用点到直线的距离公式求解

思路二: 设 $A(2\cos \alpha, \sin \alpha), B(2\cos \beta, \sin \beta) \rightarrow$ 代入 $x_1x_2 + 4y_1y_2 = 0 \rightarrow$ 令 $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ 求出 $|OA|^2 + |OB|^2$ 的值→利用点到直线的距离公式与三角函数的有界性求出 O 到直线 AB 的取值范围

【重难点考点】椭圆的综合应用、点到直线的距离

【深度解析】解法一: (1) 将 A, B 两点的坐标代入椭圆方程, 整理得 $\begin{cases} x_1^2 + 4y_1^2 = 4, \\ x_2^2 + 4y_2^2 = 4, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x_1^2 = 4(1-y_1^2), \\ x_2^2 = 4(1-y_2^2), \end{cases}$ 两式相乘, 得 $x_1^2x_2^2 = 16(1-y_1^2)(1-y_2^2) = 16(1+y_1^2y_2^2-y_1^2-y_2^2)$. 由 $x_1x_2 + 4y_1y_2 = 0$ 移项平方, 得 $x_1^2x_2^2 = 16y_1^2y_2^2$, 所以 $0 = 16(1-y_1^2-y_2^2)$, 所以 $y_1^2 + y_2^2 = 1$.

$\begin{cases} x_1^2 + 4y_1^2 = 4, \\ x_2^2 + 4y_2^2 = 4 \end{cases}$ 中两式相加, 得 $x_1^2 + x_2^2 + 4 = 8$, 所以 $x_1^2 + x_2^2 = 4$, 所以 $|OA|^2 + |OB|^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 5$.

(2) 当直线 AB 的斜率不存在时, 设直线 AB 的方程为 $x=t$, 不妨设点 A 在点 B 的上方, 代入椭圆方程可得 $A\left(t, \sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\right), B\left(t, -\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\right)$, 又 $x_1x_2 + 4y_1y_2 = 0$, 即 $t^2 + 4\left(\frac{t^2}{4} - 1\right) = 0$, 解得 $|t| =$

$\sqrt{2}$, 此时点 O 到直线 AB 的距离为 $\sqrt{2}$.

当直线 AB 的斜率存在时, 设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$, 和椭圆方程联立得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$, 由 $\Delta>0$ 得 $4k^2+1>m^2$.

$$x_1+x_2=\frac{-8km}{4k^2+1}, x_1x_2=\frac{4m^2-4}{4k^2+1}, \text{ 则 } y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+$$

$$km(x_1+x_2)+m^2=\frac{m^2-4k^2}{4k^2+1}. \text{ 因为 } x_1x_2+4y_1y_2=0, \text{ 即}$$

$$\frac{4m^2-4+4m^2-16k^2}{4k^2+1}=0, \text{ 所以 } 2m^2=1+4k^2. \text{ 又 } 4k^2+1>m^2, \text{ 解得 } m\neq$$

0. 由点到直线的距离公式, 得原点 O 到直线 AB 的距离为

$$\frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{\frac{m^2}{k^2+1}}=\sqrt{\frac{4k^2+1}{2(k^2+1)}}=\sqrt{2-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k^2+1}}. \text{ 因为 } \frac{1}{k^2+1}\in(0,$$

$$1], \text{ 所以 } \frac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{2-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{k^2+1}}\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]. \text{ 综上所述, 坐标原}$$

点 O 到直线 AB 的距离的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right]$.

解法二: 由椭圆的方程, 设 $A(2\cos\alpha, \sin\alpha), B(2\cos\beta, \sin\beta)$, 代

入 $x_1x_2+4y_1y_2=0$, 得 $4\cos\alpha\cos\beta+4\sin\alpha\sin\beta=4\cos(\alpha-\beta)=0$, 不

失一般性, 令 $\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$, 则 $A(2\cos\alpha, \sin\alpha)$ 即

$$A\left(2\cos\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)\right), \text{ 即 } A(-2\sin\beta, \cos\beta).$$

$$(1) |OA|^2+|OB|^2=(4\sin^2\beta+\cos^2\beta)+(4\cos^2\beta+\sin^2\beta)=5;$$

(2) 由点 $A(-2\sin\beta, \cos\beta), B(2\cos\beta, \sin\beta)$ 可得直线 AB 的方程为 $(\cos\beta-\sin\beta)x+2(\cos\beta+\sin\beta)y-2=0$, 从而坐标原点 O 到直

$$\text{线 } AB \text{ 的距离 } |OH|=\frac{2}{\sqrt{(\cos\beta-\sin\beta)^2+4(\cos\beta+\sin\beta)^2}}=$$

$$\frac{2}{\sqrt{5+3\sin 2\beta}}\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right].$$

17. 【基础考点】正弦定理、余弦定理、两角和的余弦公式、三角形面积公式

【解】(1) 由 $a\sin B=b\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$ 及正弦定理

$$\text{得 } \sin A\sin B=\sin B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A\right). \quad (2 \text{ 分})$$

$$\because B\in(0, \pi), \therefore \sin B\neq 0, \therefore \sqrt{3}\sin A=\cos A, \therefore \tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\because A\in(0, \pi), \therefore A=\frac{\pi}{6}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由题知 } \frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}bc, \therefore bc=2a^2. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{又由余弦定理知 } \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore b^2+c^2=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)bc,$$

$$\therefore \frac{b}{c}+\frac{c}{b}=\frac{1}{2}+\sqrt{3}. \quad (10 \text{ 分})$$

18. 【基础题型】等差数列基本运算与求和

【解】(1) $\because S_8=4(a_4+a_5)=9a_4, \therefore 4a_5=5a_4, \therefore a_4=4d.$ (3 分)

$$\text{又 } \because a_4=a_1+3d, \therefore a_1=d, \therefore \frac{a_1}{d}=1. \quad (5 \text{ 分})$$

$$(2) \because S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{n(n+1)}{2}d,$$

$$\therefore \frac{1}{S_n}=\frac{2}{d}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right), \quad (8 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{2}{d}\left(1-\frac{1}{n+1}\right). \quad (10 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{1}{2}\leq 1-\frac{1}{n+1}<1,$$

$$\therefore \frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<1 \text{ 只需 } \frac{2}{d}\leq 1, \text{ 解得 } d<0 \text{ 或 } d\geq 2.$$

$$\therefore d \text{ 的取值范围是 } (-\infty, 0)\cup[2, +\infty). \quad (12 \text{ 分})$$

19. 【经典题型】线面垂直、线线垂直、直线与平面所成角

(1) **【证明】**在梯形 $ABCD$ 中, $AB=AD=CD=\frac{1}{2}BC=2$, 则 $\angle ABC=$

$$\frac{\pi}{3}, \angle BDC=\frac{\pi}{2}, \text{ 即 } BD\perp CD. \quad (2 \text{ 分})$$

解法一: 翻折后, 在 $\triangle A'DC$ 中, $A'D=DC=2$, 又 $A'C=2\sqrt{2}$, 则 $A'D^2+DC^2=A'C^2$, 所以 $CD\perp A'D$. (4 分)

又因为 $BD\perp CD, BD\cap A'D=D, BD, A'D\subset$ 平面 $A'BD$,

所以 $CD\perp$ 平面 $A'BD$. (5 分)

又因为 $A'B\subset$ 平面 $A'BD$, 所以 $CD\perp A'B$. (6 分)

解法二: 取 BD 的中点 E , 连接 $A'E, EC$, 图略. 由 $A'B=A'D$ 得 $A'E\perp BD, A'E=1, EC=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$, 所以 $A'C^2=A'E^2+EC^2$, 所以 $A'E\perp EC$. 又因为 $EC, BD\subset$ 平面 $BCD, EC\cap BD=E$, 所以 $A'E\perp$ 平面 BCD . 因为 $CD\subset$ 平面 BCD , 所以 $A'E\perp CD$. (4 分)

又 $CD\perp BD, BD, A'E\subset$ 平面 $A'BD, BD\cap A'E=E$, 所以 $CD\perp$ 平面 $A'BD$. 又因为 $A'B\subset$ 平面 $A'BD$, 所以 $CD\perp A'B$. (6 分)

(2) **【解】**在平面 $A'BD$ 中, 过点 B 作 $BF\perp A'D$, 交直线 $A'D$ 于 F , 图略. (8 分)

由(1)可知, $CD\perp$ 平面 $A'BD$, 所以 $CD\perp BF$. 又 $A'D\cap CD=D, A'D, CD\subset$ 平面 $A'CD$, 所以 $BF\perp$ 平面 $A'CD$, 所以 $\angle FA'B$ 即为直线 $A'B$ 与平面 $A'CD$ 所成的角. (11 分)

$$\text{又 } \angle BA'D=\frac{2\pi}{3}, \text{ 所以 } \angle FA'B=\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{3},$$

即直线 $A'B$ 与平面 $A'CD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{3}$. (12 分)

一题多解

取 BD 的中点 E , 以 E 为原点, 以 $\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{EA'}$ 的方向分别为 x, y, z 轴的正方向建立空间直角坐标系, 图略, 则 $B(\sqrt{3}, 0, 0), A'(0, 0, 1), D(-\sqrt{3}, 0, 0), C(-\sqrt{3}, 2, 0), \overrightarrow{A'B}=(\sqrt{3}, 0, -1), \overrightarrow{A'C}=(-\sqrt{3}, 2, -1), \overrightarrow{DC}=(0, 2, 0).$ (8 分)

设平面 $A'CD$ 的法向量为 $m=(x, y, z)$, 则 $\begin{cases} -\sqrt{3}x+2y-z=0, \\ 2y=0, \end{cases}$ 取 $x=1$, 得 $m=(1, 0, -\sqrt{3}).$ (10 分)

$$\cos\langle\overrightarrow{A'B}, m\rangle=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{4}\times\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 故直线 } A'B \text{ 与平面 } A'CD \text{ 所成角为 } \frac{\pi}{3}. \quad (12 \text{ 分})$$

20. 【经典考点】样本的数字特征、独立性检验、二项分布

【解】(1) $\bar{x}=1\times\frac{6}{100}+3\times\frac{18}{100}+5\times\frac{35}{100}+7\times\frac{25}{100}+9\times\frac{10}{100}+11\times\frac{5}{100}+13\times$

$$\frac{1}{100} = 5.68. \quad (3 \text{ 分})$$

(2) 2×2 列联表如下:

	潜伏期 ≤ 6 天	潜伏期 > 6 天	总计
60 岁以上 (含 60 岁)	35	15	50
60 岁以下	24	26	50
总计	59	41	100

(5 分)

$$K^2 = \frac{100 \times (35 \times 26 - 24 \times 15)^2}{50 \times 50 \times 59 \times 41} \approx 5 > 3.841, \text{ 故有 } 95\% \text{ 的把握认为该传}$$

染病的潜伏期与患者年龄有关. (7 分)

(3) 设这 10 人中有 X 人潜伏期不超过 8 天, 由题知 $X \sim B(10, 0.84)$, 则 $P(X=k) = C_{10}^k 0.84^k 0.16^{10-k}, k=0, 1, 2, \dots, 10.$ (9 分)

$$\text{由 } \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{C_{10}^{k+1} 0.84^{k+1} 0.16^{9-k}}{C_{10}^k 0.84^k 0.16^{10-k}} = \frac{21(10-k)}{4(k+1)},$$

当 $k < 8.24$ 时, $P(X=k) < P(X=k+1)$, 当 $k > 8.24$ 时, $P(X=k) > P(X=k+1)$, 故 $P(X=9)$ 最大, (11 分)

所以抽到的 10 人中潜伏期不超过 8 天的人数最有可能为 9. (12 分)

21. 【重难点考点】利用导数研究函数的单调性、零点问题

(1) 【解】依题意, 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x} + a - 2 = \ln x + \frac{1}{x} + a - 1,$$

(二次求导, 确定 $f'(x)$ 的单调性, 从而确定其符号的变化)

$$\text{令 } g(x) = f'(x), \text{ 则 } g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}. \quad (2 \text{ 分})$$

令 $g'(x) = 0$, 解得 $x = 1$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以函数 $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, 所以函数 $f'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增;

所以函数 $f'(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 $f'(1) = a \geq 0$, 即 $f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

所以函数 $f(x)$ 只有单调递增区间 $(0, +\infty)$. (4 分)

(2) 【证明】由 (1) 可知, 当 $a \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $x \rightarrow 0, f(x) \rightarrow -\infty; x \rightarrow +\infty, f(x) \rightarrow +\infty$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在唯一零点. (6 分)

当 $a < 0$ 时, $f'(1) = a < 0$, 且 $x \rightarrow 0, f'(x) \rightarrow +\infty; x \rightarrow +\infty, f'(x) \rightarrow +\infty$, 所以存在 $x_1 \in (0, 1), x_2 \in (1, +\infty)$, 使得 $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$,

$$\text{则有 } \ln x_1 + \frac{1}{x_1} + a - 1 = 0,$$

(借助“隐零点”, 通过等量代换, 整体代换消去参数)

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减, 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增. (10 分)

$$\text{因为 } f(x_1) = (x_1+1) \ln x_1 + \left(-1 - \frac{1}{x_1} - \ln x_1\right) x_1 + 2 = \ln x_1 - x_1 + 1,$$

$$\text{又 } \ln x_1 - x_1 + 1 < 0,$$

(切线放缩, 常见的放缩不等式: $\ln x \leq x-1, e^x \geq x+1$)

所以 $f(x_1) < 0$.

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在唯一零点. (12 分)

22. 【思路导引】(2) 先假设存在 \rightarrow 根据 $\triangle ABC$ 三边所在直线的斜率是否存在分类讨论 \rightarrow 若斜率不存在, 求出三边所在直线的方程, 发现不成立 \rightarrow 若斜率存在, 设过 A 的圆 C_2 的切线方程, 得出关于 k 的方程 \rightarrow 直线 BC 方程, 求 C_2 到 BC 的距离 $d \rightarrow$ 令 $d=1$, 发现关于 y_0 的方程无解 \rightarrow 综上, 不存在.

【重难点题型】抛物线与圆的综合问题

【解】(1) 由题意知, P, Q 之间距离的最小值为 1 等价于 P, C_2 之间距离的最小值为 2. (1 分)

$$\text{设 } P(x_p, y_p), \text{ 则 } |PC_2|^2 = (x_p - p)^2 + y_p^2 = x_p^2 - 2px_p + p^2 + 2px_p = x_p^2 + p^2 \geq p^2, \text{ 从而 } p^2 = 4, \text{ 解得 } p = 2, \quad (3 \text{ 分})$$

所以抛物线 C_1 和圆 C_2 的方程分别为 $C_1: y^2 = 4x, C_2: (x-2)^2 + y^2 = 1.$ (4 分)

(2) 若存在, 设 $A(x_0, y_0), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 显然 y_0, y_1, y_2 均不等于 ± 1 .

① 当 $\triangle ABC$ 三边所在直线中, 有一条直线的斜率不存在时, 由对称性知, 若 $\triangle ABC$ 外切于圆 C_2 , 则三角形必有一个顶点为坐标原点 (不妨设为 C), 且另两个顶点的连线必垂直于 x 轴, 即为直线 AB , 方程为 $x=3$. 设点 A 在第一象限, 点 B 在第四象限, 此时直线

CA, CB 的方程分别为 $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x, y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x$, 易知直线 CA, CB 不与圆 C_2 相切, 与假设矛盾, 所以 $\triangle ABC$ 不存在. (6 分)

② 当 $\triangle ABC$ 三边所在直线的斜率都存在时, 设过点 A 的圆 C_2 的切线为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 即 $kx - y + y_0 - \frac{1}{4}ky_0^2 = 0$.

$$\text{由相切知 } \frac{\left|2k + y_0 - \frac{1}{4}ky_0^2\right|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 1 \Rightarrow \left[\left(2 - \frac{1}{4}y_0^2\right)k + y_0\right]^2 = k^2 + 1 \Rightarrow$$

$$\left[\left(2 - \frac{1}{4}y_0^2\right)^2 - 1\right]k^2 + 2y_0\left(2 - \frac{1}{4}y_0^2\right)k + y_0^2 - 1 = 0. (*) \quad (7 \text{ 分})$$

设 $k_{AB} = k_1, k_{AC} = k_2$, 则 k_1, k_2 为方程 $(*)$ 的两根;

$$\text{又 } k_1 = \frac{y_1 - y_0}{\frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_0^2} = \frac{4}{y_1 + y_0}, k_2 = \frac{y_2 - y_0}{\frac{1}{4}y_2^2 - \frac{1}{4}y_0^2} = \frac{4}{y_2 + y_0}, \text{ 将 } k_1, k_2 \text{ 代入}$$

方程 $(*)$, 整理得 $(y_0^2 - 1)y_i^2 + 14y_0y_i + 48 - y_0^2 = 0 (i=1, 2),$

$$\text{从而 } y_1 + y_2 = \frac{-14y_0}{y_0^2 - 1}, y_1y_2 = \frac{48 - y_0^2}{y_0^2 - 1}. \quad (9 \text{ 分})$$

又直线 BC 的方程为 $4x - (y_1 + y_2)y + y_1y_2 = 0,$

$$\text{此时圆心 } C_2(2, 0) \text{ 到直线 } BC \text{ 的距离 } d = \frac{|18 + y_1y_2|}{\sqrt{16 + (y_1 + y_2)^2}} =$$

$$\frac{17y_0^2 + 401}{2\sqrt{4y_0^4 + 41y_0^2 + 4}}. \text{ 令 } d = 1, \text{ 得 } (7y_0^2 + 40)^2 = 4(4y_0^4 + 41y_0^2 + 4),$$

整理得 $33y_0^4 + 396y_0^2 + 1584 = 0$, 此方程显然无解, 与假设矛盾, 此时 $\triangle ABC$ 不存在. (11 分)

综上, 在抛物线 C_1 上不存在三点 A, B, C , 使得 $\triangle ABC$ 外切于圆 C_2 . (12 分)