

$$\frac{9 \times 20.09 - 21}{5 \times 20.09} > 0.$$

$$\text{又} \because g(1) = 1 + a - \frac{1-a}{e} = 1 - \frac{1}{e} + a \left(1 + \frac{1}{e}\right) < 1 - \frac{1}{e} + \left(\frac{3}{e^3} - 1\right) \cdot$$

$$\left(1 + \frac{1}{e}\right) = \frac{3+3e-2e^3}{e^4} \approx \frac{3+3 \times 2.72-2 \times 20.09}{e^4} < 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $[1, x_0]$ 上有唯一的零点(注:取 $g(0) < 0$ 也可以).

$$\text{当 } x > x_0 \text{ 时, } g'(x) = -\ln x + \frac{1}{x} - 1 - a < -\ln x_0 + \frac{1}{x_0} - 1 - a < -\ln 3 + \frac{1}{3} - 1 +$$

$$\frac{6}{5} = \frac{8}{15} - \ln 3 \approx \frac{8}{15} - 1.1 < 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore g(4) = -3\ln 4 - 5a > -3\ln 4 - 5\left(\frac{3}{e^3} - 1\right) = 5 - 3\ln 4 - \frac{15}{e^3} \approx 0.11 > 0,$$

$$g(e^2) = 2(1 - e^2) - a(e^2 + 1) \leq 2(1 - e^2) + \frac{6}{5}(e^2 + 1) = \frac{16 - 4e^2}{5} \approx$$

$$\frac{16 - 4 \times 7.39}{5} < 0,$$

$\therefore g(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上有唯一的零点.

综上,函数 $g(x)$ 有两个零点. (6分)

(求分段函数的零点,先求各分段函数的零点,最后再合并,从而得到整个分段函数的零点)

(2)由(1)可知 $g(x_1) = g(x_2) = 0$,其中 $1 < x_1 < x_0 < x_2$,由 $g(x_1) = 0$

得 $x_1 + a - \frac{x_1 - a}{e^{x_1}} = 0$,即 $x_1 - a(e^{x_1} + 1) - x_1 e^{x_1} = 0$,由 $g(x_2) = 0$ 得 $\ln x_2 -$

$$a(x_2 + 1) - x_2 \ln x_2 = 0. \quad (7 \text{分})$$

设 $h(x) = \ln x - a(x + 1) - x \ln x$,则 $h(x_2) = h(e^{x_1}) = 0$,

$$\therefore 1 < x_1 < x_0 < x_2, \therefore e^{x_1} > e, x_2 > x_0 > e,$$

$$\text{当 } x > e \text{ 时, } h'(x) = \frac{1}{x} - a - \ln x - 1 < \frac{1}{e} - a - 2 \leq \frac{1}{e} + \frac{6}{5} - 2 = \frac{1}{e} -$$

$$\frac{4}{5} < 0,$$

$\therefore h(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore x_2 = e^{x_1}$. (9分)

$$\text{要证 } \frac{e^{x_2} - x_2}{e^{x_1} - x_1} > e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}, \text{即证: } \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{x_2 - x_1} > e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}, \text{即证: } \frac{e^{x_2} - e^{x_1}}{e^{\frac{x_1 + x_2}{2}}} > x_2 - x_1,$$

$$\text{即证 } e^{\frac{x_2 - x_1}{2}} - e^{\frac{x_1 - x_2}{2}} > x_2 - x_1, \text{设 } \frac{x_2 - x_1}{2} = t (t > 0), \text{即证 } e^t - e^{-t} > 2t.$$

(10分)

设 $p(t) = e^t - e^{-t} - 2t$,则 $p'(t) = e^t + e^{-t} - 2 > 2 - 2 = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

\therefore 当 $t > 0$ 时, $p(t)$ 单调递增,

$\therefore p(t) > p(0) = 0$,即证. (12分)

方法速记 破解含双参不等式证明题的3个关键点:(1)转化,即由已知条件入手,寻找双参所满足的关系式,并把含双参的不等式转化为含单参的不等式;(2)巧构造函数,再借用导数,判断函数的单调性,从而求其最值;(3)回归双参的不等式的证明,把所求的最值应用到双参不等式,即可证得结果.

4 2023 河北省唐山市高三模拟考试

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	A	B	D	C	A	C	CD	AB
题号	11	12	13		14		15		16	
答案	BD	ACD	-3		$\frac{8}{15}$		$(0, 1]$		$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 (x \geq 1)$	

1. B 【基础考点】集合的交集运算

【深度解析】由题知,集合 $M = (-2, 5)$, $N = (0, +\infty)$,所以 $M \cap N = (0, 5)$,故选 B.

2. A 【基础考点】复数的模长公式与虚部的概念

【深度解析】由题意,设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$,则 $z - 2i = a + (b - 2)i$.因为 $|z - 2i| = |z|$,所以 $\sqrt{a^2 + (b - 2)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$,解得 $b = 1$,所以 $z = a + i$,所以复数 z 的虚部为 1,故选 A.

快解 取复数 $z = i$,满足 $|z - 2i| = |z|$,所以复数 z 的虚部为 1,故选 A.

3. A 【经典题型】投影向量的概念

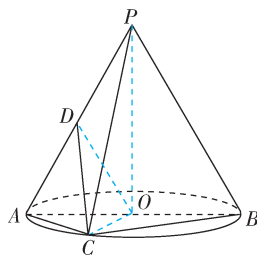
【深度解析】因为向量 $a = (2\sqrt{2}, 1)$, $b = (3, 0)$,所以 $a \cdot b = (2\sqrt{2}, 1) \cdot (3, 0) = 6\sqrt{2}$,所以 a 在 b 上的投影向量为 $\frac{a \cdot b}{|b|} \cdot \frac{b}{|b|} = (2\sqrt{2}, 0)$,故选 A.

快解 由题知,向量 $a = (2\sqrt{2}, 1)$ 在 $b = (3, 0)$ 上的投影向量即 a 在 x 轴上的投影向量,即 $(2\sqrt{2}, 0)$,故选 A.

4. B 【经典题型】异面直线所成角的求法

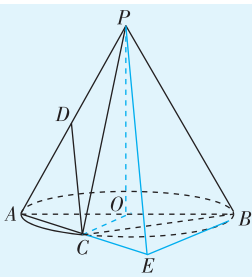
【深度解析】由题意,设等边三角形 PAB 的边长为 $2a$,取 AB 的中点 O ,连接 OC , OD , OP ,则 $OP \perp$ 平面 ABC .因为 D 是 PA 的中点,所以 $OD \parallel PB$, $OD = \frac{1}{2}PB = a$,所以异面直线 CD 与 PB 所成角为 $\angle ODC$ 或其补角.

因为 $OP \perp$ 平面 ABC , $OC \subset$ 平面 ABC ,所以 $OP \perp OC$.又 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,且 O 为 AB 的中点,所以 $OC \perp AB$, $OC = \frac{1}{2}AB = a$.又 $OP \cap AB = O$,所以 $OC \perp$ 平面 PAB .又 $OD \subset$ 平面 PAB ,所以 $OC \perp OD$.在 $\text{Rt} \triangle OCD$ 中, $OD = OC = a$,所以 $\angle ODC = 45^\circ$,故选 B.



一题多解

由题意,设等边三角形 PAB 的边长为 $2a$,取 AB 的中点 O ,连接 OC, OP ,则 $OP \perp$ 平面 ABC . 延长 AC 至点 E ,使 $AC=CE$,连接 PE, BE . 因为 D 是 PA 的中点,所以 $CD \parallel PE$,所以异面直线 CD 与 PB 所成角为 $\angle BPE$ 或其补角. 因为 $OP \perp$ 平面 $ABC, OC \subset$ 平面 ABC ,所以 $OP \perp OC$. 又 $\triangle ABC$ 为等腰三角形,且 O 为 AB 的中点,所以 $OC \perp AB, OC = \frac{1}{2}AB = a$,所以 $BE = 2OC = 2a$. 又 $OP \cap AB = O$,所以 $OC \perp$ 平面 PAB ,所以 $BE \perp$ 平面 PAB . 因为 $PB \subset$ 平面 PAB ,所以 $BE \perp PB$. 在 $Rt\triangle PBE$ 中, $PB = BE = 2a$,所以 $\angle BPE = 45^\circ$,故选 B.



5. D 【基础考点】随机事件的概率

【深度解析】由题知,从第 1 个箱子里摸出 1 个球是黄色球的概率为 $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$,从第 2 个箱子里摸出 1 个球是黄色球的概率为 $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$,则随机从两个箱子中摸出 1 个球是黄色球的概率是 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{9}{40}$,故选 D.

6. C 【经典题型】等比数列的通项公式与求和公式

【深度解析】由题意,设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 因为 $a_{n+1} = 2S_n + 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$),所以 $\begin{cases} a_2 = 2a_1 + 1, \\ a_3 = 2a_1 + 2a_2 + 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a_1 q = 2a_1 + 1, \\ a_1 q^2 = 2a_1 + 2a_1 q + 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a_1 = 1, \\ q = 3, \end{cases}$ 所以 $a_5 = a_1 q^4 = 1 \times 81 = 81$,故选 C.

一题多解 因为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,且 $a_{n+1} = 2S_n + 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$),所以 $a_n = 2S_{n-1} + 1, n \geq 2$,所以 $a_{n+1} - a_n = 2a_n$,所以 $a_{n+1} = 3a_n$ (提示:通过 S_n 求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,特别需要注意 $n \geq 2$ 和 $n=1$ 两种情况),故等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=3$. 因为 $a_{n+1} = 2S_n + 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$),所以当 $n=1$ 时, $a_2 = 2a_1 + 1$,即 $3a_1 = 2a_1 + 1$,所以 $a_1 = 1$,所以 $a_5 = a_1 q^4 = 1 \times 81 = 81$,故选 C.

7. A 【热门考点】三角恒等变换

【深度解析】因为 $\frac{1+\sin \beta}{\cos \beta} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha} = \frac{1+\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha + 2\cos \alpha \sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$,又 $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,所以 $2\alpha \in (0, \pi)$,所以 $\beta = 2\alpha$,故选 A.

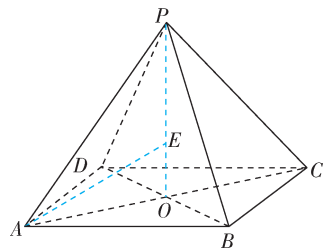
8. C

思路导引 O 为正方形 $ABCD$ 的中心 $\rightarrow PO \perp$ 平面 $ABCD \rightarrow OP$ 的长 \rightarrow 外接球的球心 E 在 PO 上 $\xrightarrow{\text{勾股定理}}$ 球半径 R $\xrightarrow{\text{球的表面积公式}}$ 球 E 的表面积

【热门考点】正四棱锥的外接球的表面积计算

【深度解析】由题意,作出正四棱锥 $P-ABCD$ 如图所示,设点 O 为

正方形 $ABCD$ 的中心,则 $OA = OB = OC = OD = 1$,且该正四棱锥的侧棱长为 $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. 连接 PO ,则 $PO \perp$ 平面 $ABCD$. 因为 $OA \subset$ 平面 $ABCD$,所以 $PO \perp OA$,所以 $OP = \sqrt{AP^2 - OA^2} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$. 设正四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心为 E ,则 E 在 PO 上,连接 AE ,设球 E 的半径为 R ,则 $AE^2 = OA^2 + OE^2 = 1^2 + (PO - PE)^2$,即 $R^2 = 1^2 + (2\sqrt{6} - R)^2$ (提示:通过勾股定理建立关于 R 的方程),解得 $R = \frac{25\sqrt{6}}{24}$,故球 E 的表面积为 $4\pi \times \left(\frac{25\sqrt{6}}{24}\right)^2 = \frac{625\pi}{24}$,故选 C.



9. CD 【基础考点】独立性检验

【深度解析】由分类变量“教师对延迟退休的态度”与“性别”的对应样本数据计算得 $\chi^2 = 4.916$,依据 $\alpha = 0.05$ 的独立性检验, $4.916 > 3.841$,故教师对延迟退休的态度与性别不独立,这个结论犯错误的概率不超过 0.05,故 C 正确;调查时按性别分层,采用分层随机抽样方法比简单随机抽样方法更好,因为样本更具有代表性,故 D 正确. 故选 CD.

10. AB 【经典题型】正弦型函数的图象与性质

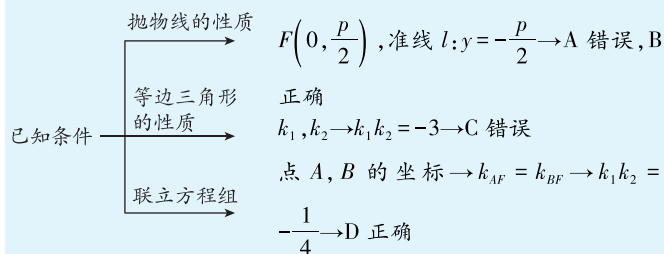
【深度解析】因为曲线 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ 关于点 $\left(-\frac{\pi}{12}, 0\right)$ 中心对称,所以 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \varphi\right) = 0$,所以 $-\frac{\pi}{6} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$,所以 $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$,又 $0 < \varphi < \pi$,所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$,所以 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,逐项分析如表:

选项	正误	原因
A	✓	$f(x)$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$
B	✓	因为 $x \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right)$,所以 $t = 2x + \frac{\pi}{6} \in \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{2}\right) = \left(2\pi - \frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{2}\right)$,又 $y = \sin t$ 在 $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, $t = 2x + \frac{\pi}{6}$ 在 $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{6}\right)$ 上单调递增
C	×	因为 $x \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$,所以 $2x + \frac{\pi}{6} \in \left(0, \frac{4\pi}{3}\right)$,所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right)$ 上有 1 个极值点
D	×	因为 $f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$,又 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 2\cos\frac{\pi}{2} = 0$,所以曲线 $y = f'(x)$ 不关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称

故选 AB.

11. BD

思路导引



【重难点考点】抛物线的标准方程与几何性质

【深度解析】由题知, 抛物线 $E: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$,

准线 l 的方程为 $y = -\frac{p}{2}$, 故 A 错误, B 正确; 不妨设点 A 在第一象限,

当 $\triangle OAB$ 为等边三角形时, 可知 A, B 关于 y 轴对称, 从而可得直线 AO 的倾斜角为 60° , BO 的倾斜角为 120° , 所以 $k_1 = \sqrt{3}$,

$k_2 = -\sqrt{3}$, 所以 $k_1 k_2 = -3$, 故 C 错误; 直线 AO 的方程为 $y = k_1 x$, 与

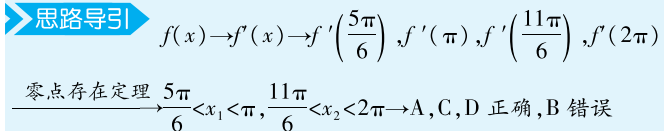
抛物线方程联立可得 $A(2pk_1, 2pk_1^2)$, 同理可得 $B(2pk_2, 2pk_2^2)$, 当 A, B, F 三点共线时, 则 $k_{AF} = k_{BF}$ (提示: 三点共线转化成斜率相等), 所以

$$\frac{2pk_1^2 - \frac{p}{2}}{2pk_1} = \frac{2pk_2^2 - \frac{p}{2}}{2pk_2}, \text{ 所以 } 4k_1^2 k_2 - k_2 = 4k_1 k_2^2 - k_1, \text{ 所以}$$

$$k_1 k_2 = -\frac{1}{4}, \text{ 故 D 正确. 故选 BD.}$$

12. ACD

思路导引



【重难点考点】函数与导数的综合应用

【深度解析】由 $f(x) = \frac{\cos x}{x}$, 得 $f'(x) = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$. 不妨设 $x_1 <$

$$x_2, \text{ 因为 } f'\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-\frac{5\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{5\pi}{6}\right)^2} < 0, f'(\pi) = \frac{1}{\pi^2} > 0, f'\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\frac{11\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{11\pi}{6}\right)^2} >$$

$$0, f'(2\pi) = -\frac{1}{4\pi^2} < 0, \text{ 所以 } \frac{5\pi}{6} < x_1 < \pi, \frac{11\pi}{6} < x_2 < 2\pi, \text{ 所以 } x_1 + x_2 < 3\pi,$$

故 B 错误. $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 内的两个极值点即 $f'(x) = 0$ 的两根, 因为

$$x \neq 0, \text{ 所以由 } -x \sin x - \cos x = 0 \text{ 得 } -\frac{1}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x, \text{ 所以 } -\frac{1}{x_1} =$$

$$\tan x_1, -\frac{1}{x_2} = \tan x_2. \text{ 因为 } x_1 < x_2, \text{ 所以 } -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2}, \text{ 即 } \tan x_1 = \tan(\pi +$$

$$x_1) < \tan x_2. \text{ 又 } \pi + x_1 \in \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right), y = \tan x \text{ 在 } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \text{ 上单调递}$$

$$\text{增, 则 } \pi + x_1 < x_2, \text{ 所以 } x_2 - x_1 > \pi, \text{ 故 A 正确. 由 } -\frac{1}{x_i} = \tan x_i, i = 1, 2$$

$$\text{得 } |f(x_1) - f(x_2)| = |-\sin x_1 + \sin x_2| = |\sin x_1 - \sin x_2|, \text{ 又 } \frac{5\pi}{6} < x_1 < \pi,$$

$$\frac{11\pi}{6} < x_2 < 2\pi, \text{ 所以 } 0 < \sin x_1 < \frac{1}{2}, 0 < -\sin x_2 < \frac{1}{2}, \text{ 所以 } |f(x_1) -$$

$$f(x_2)| < 1, \text{ 故 D 正确. 因为 } \pi + x_1 \in \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right), x_2 \in \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right) \text{ 且}$$

$$\pi + x_1 < x_2, y = \sin x \text{ 在 } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \text{ 上单调递增, 所以 } \sin(\pi + x_1) <$$

$$\sin x_2, \text{ 所以 } f(x_1) + f(x_2) = -\sin x_1 - \sin x_2 = \sin(\pi + x_1) - \sin x_2 < 0, \text{ 故}$$

C 正确. 故选 ACD.

13. -3 【基础考点】奇函数的定义、函数求值

【深度解析】由函数 $y = f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 得 $f(0) = 0$.

由当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 1$, 得 $f(2) = 4 - 1 = 3$, 所以 $f(-2) =$

$$-f(2) = -3, \text{ 所以 } f(0) + f(-2) = -3.$$

一题多解

因为函数 $y = f(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的奇函数, 所以

$f(0) = 0$. 因为当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - 1$, 所以当 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 且

$f(-x) = x^2 - 1 = -f(x)$, 所以 $f(x) = 1 - x^2$, 所以 $f(-2) = 1 - 4 = -3$,

$$\text{所以 } f(0) + f(-2) = -3.$$

14. $\frac{8}{15}$ 【基础考点】二项式定理的应用

【深度解析】 $(x+m)(2x-1)^6$ 的展开式中 x^2 的系数是 $C_6^5 \times 2 \times$

$$(-1)^5 + C_6^4 \times 2^2 \times (-1)^4 \times m = 20, \text{ 解得 } m = \frac{8}{15}.$$

15. (0, 1]

思路导引

已知条件 $\xrightarrow{\text{基本不等式}} a+b \leq -2\sqrt{ab} \rightarrow ab \leq -2\sqrt{ab}+3 \rightarrow 0 < \sqrt{ab} \leq 1 \rightarrow ab$ 的取值范围

【特色题型】基本不等式的应用

【深度解析】因为 $a, b < 0$, 且 $ab = a+b+3$, 所以 $a+b = -(-a-b) \leq$

$-2\sqrt{ab}$, 当且仅当 $a=b$ 时等号成立, 所以 $ab = a+b+3 \leq -2\sqrt{ab}+3$, 整理得

$$ab+2\sqrt{ab}-3 = (\sqrt{ab}-1)(\sqrt{ab}+3) \leq 0, \text{ 因为 } a, b < 0, \text{ 所以}$$

$0 < \sqrt{ab} \leq 1$, 所以 ab 的取值范围是 $(0, 1]$.

$$16. x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 (x \geq 1)$$

思路导引

设 $P(x, y) \rightarrow$ 线段 AP 的中点 Q \rightarrow 以线段 AP 为直

径的圆的半径 $\xrightarrow{\text{两圆外切的性质}} |OQ| = r+1 (x \geq 1) \rightarrow x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 (x \geq 1)$

【重难点考点】轨迹方程、圆与圆的位置关系

【深度解析】由题意, 设点 $P(x, y)$, 则线段 AP 的中点

$$Q\left(\frac{2+x}{2}, \frac{y}{2}\right), \text{ 以线段 AP 为直径的圆的半径 } r = \frac{1}{2}|AP| =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2 + y^2}. \text{ 因为以线段 AP 为直径的圆与圆 } O: x^2 + y^2 = 1 \text{ 外}$$

$$\text{切, 所以 } x \geq 1, \text{ 且 } |OQ| = r+1, \text{ 即 } \sqrt{\left(\frac{2+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(x-2)^2 + y^2} + 1, \text{ 化简整理得 } x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 (x \geq 1).$$

17. 【经典题型】等差数列与等比数列的通项公式、数列的递推关系与求和

【解】(1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $\{b_n\}$ 的公比为 q .

$$\text{由 } 2b_n = b_{n+2} - b_{n+1} \text{ 可得 } 2b_n = b_n q^2 - b_n q, \quad (1 \text{ 分})$$

$$\text{即 } q^2 - q - 2 = 0, \text{ 解得 } q = 2 \text{ 或 } q = -1 (\text{舍}), \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{所以 } b_n = 2^n. \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{由 } a_4 - b_3 = 3 \text{ 可得 } a_4 = 11, \text{ 即 } a_1 + 3d = 11, \text{ 解得 } d = 3, \quad (4 \text{ 分})$$

所以 $a_n = 3n - 1$. (5分)

(2) $a_1 = b_1 = 2, a_3 = b_3 = 8, a_{11} = b_5 = 32, a_{43} = b_7 = 128$. (7分)

记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,

则 $\{c_n\}$ 的前 40 项和 $T_{40} = S_{44} - (b_1 + b_3 + b_5 + b_7) = \frac{44 \times (2 + 131)}{2} - (2 + 8 + 32 + 128) = 2756$. (10分)

18. 【基础考点】利用正弦定理和余弦定理解三角形、三角恒等变换与正弦函数的有界性

【解】(1) 因为 $\frac{c}{a-b} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin C}$, 所以由正弦定理得 $\frac{c}{a-b} = \frac{a+b}{a-c}$. (1分)

整理可得 $a^2 + c^2 - b^2 = ac$, (2分)

由余弦定理得 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2}$. (3分)

又 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$. (5分)

(2) $a + c = \frac{b}{\sin B} (\sin A + \sin C) = \frac{4\sqrt{3}}{3} \left[\sin A + \sin \left(\frac{2\pi}{3} - A \right) \right]$
 $= \frac{4\sqrt{3}}{3} \left(\frac{3}{2} \sin A + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos A \right) = 4 \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right)$. (9分)

因为 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\frac{\pi}{3} < A + \frac{\pi}{6} < \frac{2\pi}{3}$, (10分)

从而有 $\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin \left(A + \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$, 所以 $2\sqrt{3} < a + c \leq 4$,

所以 $a + c$ 的取值范围为 $(2\sqrt{3}, 4]$. (12分)

19. 【热门考点】均值与方差的计算、离散型随机变量的分布列

【解】(1) $E(t) = 12 \times 0.04 + 13 \times 0.05 + 14 \times 0.25 + 15 \times 0.35 + 16 \times 0.18 + 17 \times 0.10 + 18 \times 0.03 = 15$, (3分)

$D(t) = (12-15)^2 \times 0.04 + (13-15)^2 \times 0.05 + (14-15)^2 \times 0.25 + (15-15)^2 \times 0.35 + (16-15)^2 \times 0.18 + (17-15)^2 \times 0.10 + (18-15)^2 \times 0.03 = 1.66$,

所以估计这一地区居民点疏散所需时间 t 的均值为 15 小时, 方差为 1.66. (6分)

(2) X 可取 0, 1, 2, 3.

$P(X=0) = \frac{C_3^0 C_{10}^5}{C_{13}^5} = \frac{28}{143}, P(X=1) = \frac{C_3^1 C_{10}^4}{C_{13}^5} = \frac{70}{143}$,
 $P(X=2) = \frac{C_3^2 C_{10}^3}{C_{13}^5} = \frac{40}{143}, P(X=3) = \frac{C_3^3 C_{10}^2}{C_{13}^5} = \frac{5}{143}$, (10分)

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{28}{143}$	$\frac{70}{143}$	$\frac{40}{143}$	$\frac{5}{143}$

(12分)

20. 【经典题型】线面垂直的判定、二面角的余弦值的计算

(1) 【证明】在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $DC \perp$ 平面 ADD_1A_1 , $AF \subset$ 平面 ADD_1A_1 , 所以 $AF \perp DC$. (1分)

又 $AF \perp A_1D, DC \cap A_1D = D$, 所以 $AF \perp$ 平面 A_1DC .

又 $A_1C \subset$ 平面 A_1DC ,

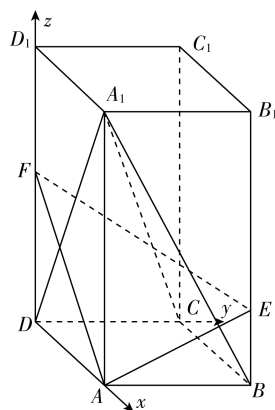
所以 $AF \perp A_1C$. (2分)

同理 $AE \perp A_1C$,

又 $AE \cap AF = A$, 所以 $A_1C \perp$ 平面 AEF . (4分)

(2) 【解】由题意得 $V_{A_1-AEF} = V_{E-A_1AF} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AA_1 \times AD \times AB = \frac{8\sqrt{2}}{3}$, $AA_1 = 2AB = 4$, 则 $AD = 2\sqrt{2}$. (6分)

以 D 为原点, 以 \overrightarrow{DA} 的方向为 x 轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系 $D-xyz$, 由题意可得 $D(0, 0, 0)$, $A_1(2\sqrt{2}, 0, 4)$, $B(2\sqrt{2}, 2, 0)$, $C(0, 2, 0)$, 所以 $\overrightarrow{DA_1} = (2\sqrt{2}, 0, 4)$, $\overrightarrow{DB} = (2\sqrt{2}, 2, 0)$. (7分)



设 $m = (x, y, z)$ 是平面 A_1BD 的法向量, 则 $\begin{cases} \overrightarrow{DA_1} \cdot m = 0, \\ \overrightarrow{DB} \cdot m = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 2\sqrt{2}x + 4z = 0, \\ 2\sqrt{2}x + 2y = 0, \end{cases}$ 不妨取 $m = (\sqrt{2}, -2, -1)$. (9分)

由(1)知 $\overrightarrow{A_1C} = (-2\sqrt{2}, 2, -4)$ 是平面 AEF 的一个法向量,

则 $\cos \langle m, \overrightarrow{A_1C} \rangle = \frac{m \cdot \overrightarrow{A_1C}}{|m| |\overrightarrow{A_1C}|} = -\frac{2}{7}$,

所以平面 AEF 与平面 A_1BD 的夹角的余弦值为 $\frac{2}{7}$. (12分)

21. 思路导引

联立方程 \rightarrow 点 M , 点 $N \rightarrow |MN|^2$
 联立方程 $\rightarrow x_1 + x_2, x_1 x_2 \xrightarrow{\text{弦长公式}} |AN|, |NB|$
 $|MN|^2 = |AN| |NB| \rightarrow \triangle ANM \sim \triangle MNB$
 $\angle ANM = \angle MNB$

【重难点考点】直线与椭圆的位置关系、相似三角形的判定定理

(1) 【解】由 $\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 得 $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$, (1分)

解得 $x = \sqrt{2}$, 则 $M(\sqrt{2}, 1)$. (3分)

(2) 【证明】

(联立直线 l_1 与直线 l_2 的方程, 求出点 N 的坐标, 结合点 M 的坐标表示出 $|MN|^2$)

由 $\begin{cases} y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 2, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + t, \end{cases}$ 得 $N\left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{t}{2} + 1\right)$, 则 $|MN|^2 = \frac{3}{4}t^2$. (5分)

(联立直线 l_2 与椭圆 E 的方程, 利用根与系数的关系求出 $x_1 + x_2, x_1 x_2$, 再利用弦长公式表示出 $|AN|, |NB|$)

由 $\begin{cases} y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + t, \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 得 $x^2 + \sqrt{2}tx + t^2 - 2 = 0$. 由 $\Delta = (\sqrt{2}t)^2 - 4(t^2 - 2) > 0$, 得

$0 < t^2 < 4$, 则 $x_1 + x_2 = -\sqrt{2}t, x_1 x_2 = t^2 - 2$, (6分)

$|AN| = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} \left| x_1 - \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) \right|$,

$|NB| = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} \left| x_2 - \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}t \right) \right|$,

$$|AN| \cdot |NB| = \frac{3}{2} \left| x_1 x_2 - \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} t \right) (x_1 + x_2) + \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} t \right)^2 \right| = \frac{3}{4} t^2. \quad (10 \text{ 分})$$

(根据 $|MN|^2 = |AN| \cdot |NB|$ 与 $\angle ANM = \angle MNB$ 证明三角形相似)

$$\text{所以 } |MN|^2 = |AN| \cdot |NB|, \text{ 则 } \frac{|AN|}{|MN|} = \frac{|NM|}{|NB|}, \text{ 又 } \angle ANM = \angle MNB,$$

所以 $\triangle ANM \sim \triangle MNB$. (12 分)

22. **思路导引** (1) $f(x), g(x) \rightarrow f'(x), g'(x) \xrightarrow[\text{公切线方程}]{\text{导数的几何意义}} a, b,$

$c, d;$

(2) $f(x), g(x) \rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{设 } p(x) = g(x) - (x-a) \xrightarrow{\text{求导}} p'(x) \geq 0 \rightarrow g(x) \geq x-a \\ \text{设 } h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x} \xrightarrow{\text{求导}} h'(x) \geq 0 \rightarrow f(x) \geq g(x) \end{array} \right\} \rightarrow \text{结论成立}$$

【重难点考点】导数的几何意义、利用导数讨论函数的单调性与最值

(1) **【解】** $f'(x) = ae^x + b, g'(x) = d(1 + \ln x)$. (2 分)

$$\text{依题意 } \begin{cases} f(1) = g(1) = 1-a, \\ f'(1) = g'(1) = 1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} ae+b+c=0=1-a, \\ ae+b=d=1, \end{cases}$$

$$\text{解得 } \begin{cases} a=1, \\ b=1-e, \\ c=-1, \\ d=1. \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

(2) **【证明】** 由 (1) 知 $f(x) = e^x + (1-e)x - 1, g(x) = x \ln x, l: y = x - 1$.
 $g(x) - (x-a) = x \ln x - x + 1$.

(设 $p(x) = g(x) - (x-a)$, 利用导数讨论 $p(x)$ 的单调性与最小值, 从而证明 $p(x) \geq 0$, 即 $g(x) \geq x-a$)

设 $p(x) = x \ln x - x + 1$, 则 $p'(x) = \ln x$. (6 分)

当 $x \in (0, 1)$ 时, $p'(x) < 0, p(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $p'(x) > 0, p(x)$ 单调递增,

因此当 $x=1$ 时, $p(x)$ 取得最小值 $p(1) = 0$,

可得 $p(x) \geq 0$, 所以 $g(x) \geq x-a$. (8 分)

(设 $h(x) = \frac{f(x)-g(x)}{x}$, 利用导数讨论 $h(x)$ 的单调性与最小值, 从而证明 $h(x) \geq 0$, 即 $f(x) \geq g(x)$)

$$f(x) - g(x) = e^x + (1-e)x - 1 - x \ln x = x \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - \ln x + 1 - e \right). \quad (9 \text{ 分})$$

$$\text{设 } h(x) = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} - \ln x + 1 - e, \text{ 则 } h'(x) = \frac{(e^x - 1)(x-1)}{x^2}. \quad (10 \text{ 分})$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $h'(x) < 0, h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 单调递增,

因此 $h(x) \geq h(1) = 0$, 即 $f(x) \geq g(x)$.

故 $f(x) \geq g(x) \geq x-a$. (12 分)

5 2023 江苏省 G4 联盟

苏州中学 扬州中学
常州中学 盐城中学

高三联合调研

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	D	B	D	C	D	C	B	BCD	ABD
题号	11	12	13		14		15		16	
答案	ABD	AC	15		$\frac{5\pi}{6}$		$(n^2-n+1) \cdot 3^{n+1}$		$[-3,1]$	

1. A 【基础考点】集合的交集运算

【深度解析】 因为 $A = \{-1, 0\}, B = \{x | -2 < x < 0\}$, 所以 $A \cap B = \{-1\}$.

故选 A.

2. D 【基础考点】共轭复数的概念及性质

【深度解析】 由题意知 $\bar{z} = \frac{4+3i}{i} = \frac{(4+3i)i}{i^2} = -(4i-3) = 3-4i$, 所以 $z =$

$3+4i$, 则 $z \cdot \bar{z} = (3+4i)(3-4i) = 3^2 + 4^2 = 25$. 故选 D.

3. B 【经典题型】对统计图表——折线图的分析

【深度解析】 对于选项 A, 由折线图可知, 城镇人口与年份呈现正相关, 故 A 正确; 对于 B 选项, 因为乡村人口与年份呈现负相关, 且线性相关性很强, 所以相关系数 r 接近 -1 , 故 B 错误; 对于选项 C, 城镇人口与年份呈现正相关, 且线性相关性很强, 相关系数 r 接近 1 , 所以城镇人口逐年增长率大致相同, 故 C 正确; 对于选项 D, 由折线图可知, 乡村人口与年份呈负线性相关关系, 可预测乡村人口仍呈现下降趋势, 故 D 正确. 故选 B.

4. D 【经典题型】函数图象的识别

【深度解析】 函数 $y = f(x) = 2x^2 - e^{|x|}$ 是偶函数, 其图象关于 y 轴对称, 因为 $f(2) = 8 - e^2$, 且 $0 < 8 - e^2 < 1$, 所以排除选项 A 和 B; 当 $x \in$

$[0, 2]$ 时, $y' = 4x - e^x$ 有一零点, 设为 x_0 , 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (x_0, 2)$ 时, $f(x)$ 单调递增. 故选 D.

一题多解 显然函数 $y = 2x^2 - e^{|x|}$ 是偶函数, 考虑 $x > 0$ 的情况.

$y = 2x^2 - e^x$, 当 $x=2$ 时, $y = 8 - e^2, 0 < 8 - e^2 < 1$, 排除 A, B. 设 $f(x) = 2x^2 - e^x (x > 0)$, $f'(x) = 4x - e^x$, 设 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = 4 - e^x = 0 \Rightarrow x = 2 \ln 2 \in (1, 2)$, 所以函数 $f'(x) = 4x - e^x$ 在 $(0, 2 \ln 2)$ 上单调递增, 在 $(2 \ln 2, 2)$ 上单调递减. 而 $f'(0) = -1 < 0, f'(1) = 4 - e > 0, f'(2) = 8 - e^2 > 0$, 所以存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 2)$ 上单调递增, 排除 C. 故选 D.

5. C 【热门考点】椭圆的定义及其几何性质

【深度解析】 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 其焦点为 $F_1(-c,$

$0)$. 由椭圆的几何性质知, 过 F_1 的最短弦 PQ 垂直于 x 轴, 不妨设

$P\left(-c, \frac{b^2}{a}\right), Q\left(-c, -\frac{b^2}{a}\right)$, 所以 $2 \times \frac{b^2}{a} = 10$, 即 $b^2 = 5a$. 又 $\triangle PF_2Q$

的周长为 $4a$ (提示: 椭圆的定义), 所以 $4a = 36$, 所以 $a = 9, c = 6$, 离

心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$. 故选 C.