

五、(本大题共 2 小题,每小题 10 分,满分 20 分)

19. 解 (1) $a = 50 - (3 + 3 + 15 + 10) = 19$. 故答案为 19. (3 分)

(2) 将这组数据从小到大排列,第 25 个数据和第 26 个数据都在 D 组,故中位数落在 D 组. 故答案为 D. (6 分)

(3) 良好. 理由:该景区 5 月份游客评分的平均数为 $\frac{1}{50} \times (50 \times 3 + 60 \times 3 + 70 \times 15 + 80 \times 19 + 90 \times 10) = 76$ (分) > 75 分,故该景区 5 月份的服务质量良好. (10 分)

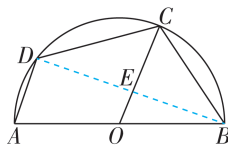
20. (1) 证明 $\because \angle DAB + 2\angle ABC = 180^\circ, \angle AOC = 2\angle ABC,$

$\therefore \angle DAB + \angle AOC = 180^\circ, \therefore AD \parallel OC.$ (5 分)

(2) 解 如图,连接 BD 交 OC 于点 E . 由题意知, $\angle ADB = 90^\circ,$

O 是 AB 的中点. $\therefore OC \parallel AD, \therefore OC \perp BD,$

且 OE 是 $\triangle ABD$ 的中位线, $\therefore OE = \frac{1}{2}AD = 1.$



设半圆的半径为 r , 则 $CE = r - 1.$

由勾股定理知, $OB^2 - OE^2 = BE^2 = BC^2 - CE^2$, 即 $r^2 - 1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (r - 1)^2,$

解得 $r_1 = 3, r_2 = -2$ (舍去), $\therefore AB = 2r = 6.$ (10 分)

六、(本题满分 12 分)

21. 解 由题意得每增加一个题图(4)所示的拼接单元,则增加 1 个正六边形和 6 个正三角形,长度增加 $20 + 20 + 20 = 60$ (cm),从而 y 个这样的拼接单元拼成一行的长度为 $(60y + 10)$ cm.

令 $40x + 10 \leq 740$, 解得 $x \leq 18.25$, 所以每行可以先拼 18 块拼接单元,但剩余 $740 - (40 \times 18 + 10) = 10$ (cm) 无法继续拼接,所以共用去 18 个正六边形和 36 个正三角形组件,所以每行的成本为 $18 \times 5 + 36 \times 1 = 126$ (元). 设拼成 t 行, 则 $20\sqrt{3}t \leq 600$, 解得 $t \leq 10\sqrt{3} \approx 17.3$, 故需铺 17 行, 总成本为 $126 \times 17 = 2142$ (元).

故答案为 ①1, ②6, ③60, ④ $(60y + 10)$, ⑤126, ⑥2142. (12 分)

七、(本题满分 12 分)

22. (1) 解 由垂直平分线的性质知 $A'E = AE = 1, BA' = BA.$

$\because BE = BE, \therefore \triangle EA'B \cong \triangle EAB, \therefore \angle EA'B = \angle EAB = 90^\circ, \therefore \angle EA'D = 90^\circ.$

又 $\because \angle ADB = 45^\circ, \therefore \triangle A'DE$ 是等腰直角三角形, (2 分)

$\therefore DE = \sqrt{2}A'E = \sqrt{2}, \therefore AB = AD = AE + DE = 1 + \sqrt{2}.$ (4 分)

(2) (i) 证明 由题意知, $BA = BA' = BC, \therefore \angle BAA' = \angle BA'A, \angle BCA' = \angle BA'C,$

$\therefore \angle AA'C = \angle AA'B + \angle CA'B = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABA') + \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CBA') = 180^\circ -$

$\frac{1}{2}(\angle ABA' + \angle CBA') = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ, \therefore \angle CA'F = 180^\circ - \angle AA'C = 45^\circ.$ (8 分)

(ii) 解 $\triangle A'DG$ 是等腰直角三角形. 理由如下: 如图, 作 $CN \perp BG$ 交 BG 于点 M , 交 AB 于点 N . $\because CG = CB, \therefore M$ 为 BG 的中点.

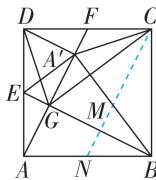
$\because AA' \perp BE, \therefore CN \parallel AF, \therefore MN$ 是 $\triangle ABG$ 的中位线, $\therefore BN = \frac{1}{2}AB.$

$\because \angle ABE = 90^\circ - \angle CBG = \angle BCN, \angle BAE = \angle CBN = 90^\circ, AB = BC,$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCN, \therefore AE = BN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AD$, 即 E 为 AD 的中点.

又 $\because AG = GA', \therefore EG \parallel A'D, \therefore \angle DA'G = \angle EGA = 90^\circ.$

同理可证 $\triangle ADA' \cong \triangle BAG, \therefore A'D = AG = A'G, \therefore \triangle A'DG$ 是等腰直角三角形. (12 分)



八、(本题满分 14 分)

23. 解 (1) 由题意得, $16a + 4b = 0$, 即 $b = -4a$, 所以 $-\frac{b}{2a} = 2$,

故该抛物线的对称轴是直线 $x = 2.$ (4 分)

评分细则

19. (1)(2) 每空 3 分.

(3) 根据加权平均数的计算公式正确列出式子得 2 分.

20. (1) 根据圆心角和圆周角的关系得出 $\angle AOC = 2\angle ABC$ 得 3 分, 最后证得结果再得 2 分.

(2) 正确求出 OE 的长得 2 分, 根据勾股定理列出等式得 1 分, 最后求出答案再得 2 分.

21. 每空 2 分, 不需要写出解题过程, 答案对即可得分.

22. (1) 证明 $\triangle A'DE$ 是等腰直角三角形可得 2 分, 最后得出正确答案再得 2 分.

(2)(ii) 先写出 $\triangle A'DG$ 是等腰直角三角形得 1 分, 否则扣 1 分. 理由正确可再得 3 分.

23. (1) 将点 $(4, 0)$ 代入表达式得出 a 与 b 之间的关系得 2 分.

评分细则

(2)(i) 用含 x_1 的式子表示出 $y_2 - y_1$ 的值得 2 分, 比较出大小后再得 3 分.

(2)(ii) 得出 $x_2 = a(x_1 - 4) + 2$ 得 1 分, 得出 a 的值得 3 分, 得出 b 的值得 1 分.

(2)(i) 由题意知, 抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$. 因为 $x_1 = x_2$, 所以 $y_2 - y_1 = (\frac{1}{2}x_2^2 - 2x_2) - (\frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1) = (\frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1) - (\frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$. 因为抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 过原点, 且点 A 与原点不重合, 所以 $x_1 \neq 0$, 所以 $\frac{1}{2}x_1^2 > 0$, 故 $y_2 > y_1$. (9 分)

(ii) 由题意知, $y_1 = ax_1^2 - 4ax_1$, $y_2 = x_2^2 - 2x_2$. 因为 $\frac{y_2}{x_1} = \frac{x_2}{x_1}$, 所以 $\frac{x_2^2 - 2x_2}{a(x_1^2 - 4x_1)} = \frac{x_2}{x_1}$.

因为两条抛物线均过原点, 且 A, B 与原点都不重合, 所以 $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$, 故 $\frac{x_2 - 2}{a(x_1 - 4)} =$

1, 即 $x_2 = a(x_1 - 4) + 2$, 所以 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{a(x_1 - 4) + 2}{x_1} = a + \frac{2 - 4a}{x_1}$. 依题意知, $a + \frac{2 - 4a}{x_1}$ 是与 x_1 无关

的定值. 不妨将 $x_1 = 1$ 和 $x_1 = 2$ 分别代入 $a + \frac{2 - 4a}{x_1}$, 可得 $2 - 3a = 1 - a$, 解得 $a = \frac{1}{2}$.

经检验, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2}$ 是一个与 x_1 无关的定值, 符合题意,

所以 $a = \frac{1}{2}, b = -4a = -2$. (14 分)


★全解全析

1. A 解析 $\because -2 < 0 < 2 < 5, \therefore$ 最小的数是 -2 . 故选 A.

2. C 解析 $521.7 \text{ 亿} = 52\,170\,000\,000 = 5.217 \times 10^{10}$. 故选 C.

上分技巧 用科学记数法表示带数量单位的数的方法

用科学记数法表示带有“万”“亿”“百万”“千万”的数时, 要先把这些数化为原数, 再用科学记数法表示.

3. A 解析 “阳马”的主视图为 . 故选 A.

4. B 解析 A 选项, $\sqrt{(-a)^2} = |a|$, 原式计算错误; B 选项, $\sqrt[3]{(-a)^3} = -a$, 正确; C 选项, $a^3 \cdot (-a)^2 = a^5$, 原式计算错误; D 选项, $(-a^2)^3 = -a^6$, 原式计算错误. 故选 B.

5. D 解析 A 选项, $\Delta = -4 < 0$, 故方程没有实数根; B 选项, $\Delta = 0$, 故方程有两个相等的实数根; C 选项, $\Delta = -3 < 0$, 故方程没有实数根; D 选项, $\Delta = 5 > 0$, 故方程有两个不相等的实数根. 故选 D.

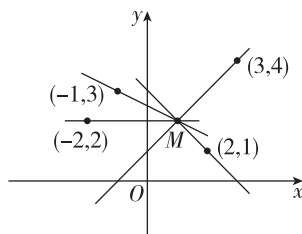
上分点拨 一元二次方程根的判别式

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 的根与判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系: ① $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根; ② $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根; ③ $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

6. B 解析 $\because \angle A = 120^\circ, AB = AC, \therefore \angle C = 30^\circ, \therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle DEC$ 中, $CD = \frac{DE}{\tan 30^\circ} = 3, \therefore D$ 为 AC 中点, $\therefore AC = 6$. 故选 B.

7. D 解析 如图. 若过 $M(1, 2)$ 的直线经过点 $(-2, 2)$, 则该直线与 x 轴平行, 不符合题意; 若过 $M(1, 2)$ 的直线经过点

$(2, 1)$, 则 y 随着 x 的增大而减小, 不符合题意; 若过 $M(1, 2)$ 的直线经过点 $(-1, 3)$, 则 y 随着 x 的增大而减小, 不符合题意; 若过 $M(1, 2)$ 的直线经过点 $(3, 4)$, 则 y 随着 x 的增大而增大, 符合题意. 故选 D.



8. C 解析 如图所示, 连接 EG . \because 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\therefore AD \parallel BC, \angle A = \angle C, AD = BC. \therefore E, G$ 分别为边 AD, BC 的中点, $\therefore DE = AE = BG = CG$. 又 $\because AF = CH, \therefore \triangle AEF \cong \triangle CGH (SAS), \therefore EF = GH$, 同理可证 $EH = GF, \therefore$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形. $\because AE \parallel BG$, 且 $AE = BG, \therefore$ 四边形 $EABG$ 为平行四边形, $\therefore S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2} S_{\square EFGH} = \frac{1}{2} S_{\square ABGE} = \frac{1}{4} S_{\square ABCD}, \therefore S_{\square EFGH} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$, 故四边形 $EFGH$ 的面积为定值, 故选 C.

9. C 解析 \because 抛物线开口向上, $\therefore a > 0. \therefore$ 抛物线对称轴在 y 轴右侧, $\therefore -\frac{b}{2a} > 0, \therefore b < 0. \therefore$ 抛物线与 y 轴交于负半轴, $\therefore c < 0, \therefore abc > 0$, 故 A 选项错误. 由题图易知 $-\frac{b}{2a} < 1, \therefore -b < 2a, \therefore 2a + b > 0$, 故 B 选项错误. \because 抛物线过点 $(2, 0), \therefore 4a +$

$2b+c=0$, $\therefore c=-4a-2b$, $\therefore 2b-c=2b+4a+2b=4(a+b)$. 由题图易知 $-\frac{b}{2a} > \frac{1}{2}$, $\therefore a+b < 0$, $\therefore 2b-c < 0$, 故 C 选项正确. 由图象可知, 当 $x=-1$ 时, $y > 0$, $\therefore a-b+c > 0$, 故 D 选项错误. 故选 C.

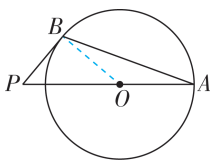
上分点拨

B 选项只涉及 a, b , 考虑对称轴; C 选项只涉及 b, c , 可考虑将抛物线经过的定点坐标代入表达式得到一个方程, 再将 c 转化为含有 a, b 的式子, 利用对称轴的范围判断.

10. **A** **解析** 如图所示, 连接 BD , 将 DA 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 DM , 将 DB 绕点 D 逆时针旋转 90° 得到 DN , 连接 MN , 则易得点 F 在 MN 上运动. 当点 E 和点 A 重合时, $EC-ED$ 有最大值. $\because EC = \sqrt{4^2+3^2} = 5$, $ED = 1$, $\therefore EC-ED$ 的最大值为 $5-1=4$, 故 A 选项错误. 当点 F 和点 M 重合时, FB 有最小值, 此时 $FB = \sqrt{(4-1)^2+1^2} = \sqrt{10}$, 故 B 选项正确. 作点 D 关于 AB 的对称点 D' , 连接 $D'E, CD'$, 则 $DE=D'E$, \therefore 当 C, E, D' 三点共线时, $EC+ED$ 的值最小, 即为 CD' 的长, $\therefore EC+ED$ 的最小值为 $\sqrt{(3+1)^2+4^2} = 4\sqrt{2}$, 故 C 选项正确. 当点 F 和点 M 或点 N 重合时, FC 有最大值, 此时 $FC = \sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2} = \sqrt{13}$, 故 D 选项正确. 故选 A.

11. **6** **解析** 原式 $= 5+1=6$, 故答案为 6.

12. **20** **解析** 如图, 连接 OB . $\because PB$ 为 $\odot O$ 切线, $\therefore \angle OBP = 90^\circ$. 又 $\because \angle P = 50^\circ$, $\therefore \angle BOP = 40^\circ$, $\therefore \angle A = 20^\circ$. 故答案为 20.



上分总结

遇切点, 连半径

遇到切点, 连接圆心和切点构造直角三角形是常用的解题方法.

13. $\frac{1}{3}$ **解析** 从四件物品中任选两件共有 6 种组合: (10 g, 20 g), (10 g, 30 g), (10 g, 40 g), (20 g, 30 g), (20 g, 40 g), (30 g, 40 g), 其中符合平衡条件的共有 2 种: (10 g, 40 g), (20 g, 30 g), \therefore 天平恢复平衡的概率为 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

14. (1) **2** (2) **11** **解析** (1) $\because 15 \div 3 = 5$, \therefore 进行一次变换得到的数为 $\frac{15}{3} = 5$; $\because 5 \div 3 = 1 \cdots 2$, \therefore 进行二次变换得到的

数为 $5+1=6$; $\because 6 \div 3 = 2$, \therefore 进行三次变换得到的数为 $\frac{6}{3} = 2$.

(2) 设对正整数 n 进行一次变换得到的数为 a , a 为正整数. 已知对正整数 n 进行二次变换得到的数为 1, 若余数为 0, 则 $1 = \frac{a}{3}$, $\therefore a = 3$; 若余数为 1, 则 $1 = 2a$, $\therefore a = \frac{1}{2}$ (舍去); 若余数为 2, 则 $1 = a+1$, $\therefore a = 0$ (舍去), 故对正整数 n 进行一次变换得到的数是 3, 若余数为 0, 则 $3 = \frac{n}{3}$, $\therefore n = 9$; 若余数为 1, 则 $3 = 2n$, $\therefore n = \frac{3}{2}$ (舍去); 若余数为 2, 则 $3 = n+1$, $\therefore n = 2$, 故所有满足条件的 n 的值之和为 $2+9=11$.

上分点拨

(2) 本题重在理解题意后进行分类讨论和逆推, 解题思路如下:

$$1 \Rightarrow a = \begin{cases} 9, \\ 3, \Rightarrow n = \begin{cases} \frac{3}{2} \text{ (舍去)}, \\ 2 \end{cases} \Rightarrow 9+2=11 \\ \frac{1}{2} \text{ (舍去)}, \\ 0 \text{ (舍去)} \end{cases}$$

20. **上分点拨** 圆中直径相关的辅助线

当圆中出现直径时, 构造直径所对的圆周角是常作辅助线之一, 然后可利用相似或勾股定理构造方程来解题.

20. **一题多解**

(2) 如图, 延长 BC, AD 交于 E 点.

$\because AD \parallel OC$, O 为 AB 中点, $\therefore OC$ 为 $\triangle ABE$ 的中位线.

设半圆 O 的半径为 R , 则 $AE = 2R$, $\therefore DE = 2R-2$.

$\because BC = 2\sqrt{3}$, $\therefore CE = 2\sqrt{3}$, $BE = 4\sqrt{3}$.

$\because \angle EDC = 180^\circ - \angle ADC = \angle B$, $\angle E = \angle E$, $\therefore \triangle EDC \sim$

$$\triangle EBA, \therefore \frac{EC}{EA} = \frac{ED}{EB}, \text{ 即 } \frac{2\sqrt{3}}{2R} = \frac{2R-2}{4\sqrt{3}},$$

解得 $R_1 = 3, R_2 = -2$ (舍去), $\therefore AB = 2R = 6$.

