

Rt△ABC 中,先设 $OE=3a, AO=5a$,再表示出 BC, AB 即可解答.

23.【思路分析】(1)利用圆的切线的性质得到 $\angle BAC + \angle CAD = 90^\circ$,利用圆周角定理的推论得到 $\angle BAC + \angle B = 90^\circ$,再利用同角的余角相等的性质解答即可;(2)连接 AO 并延长交 $\odot O$ 于点 E ,连接 CE ,利用(1)的方法和圆周角定理的推论解答即可;(3)过点 A 作 $AF \perp BC$ 于点 F ,利用等腰三角形的判定与性质求得 AF, FC ,利用勾股定理求得 AD ,再利用相似三角形的判定与性质即可得出结论.

24.【思路分析】(1)由 BC 是 $\odot O$ 的直径,得 $\angle A = 90^\circ$,由 $\widehat{AC} = \widehat{AM}$,得 $\angle ABC = \angle ACM$.由 $DB = DE, \angle DEB = \angle AEC$,得 $\angle DBE = \angle DEB = \angle AEC$,所以 $\angle DBC = \angle DBE + \angle ABC = \angle AEC + \angle ACM = 90^\circ$,即可证明 DB 是 $\odot O$ 的切线;(2)由 $\angle ABM = \angle ABC = \angle ACD$,得 $\angle MBC = 2\angle ABC = 2\angle ACD$,再根据 $\angle D = \angle MBC = 90^\circ - \angle BCD$,得 $\angle D = 2\angle ACD$;(3)作 $EF \perp BC$ 于点 F ,则 $FE = ME$,由勾股定理得 $BC = \sqrt{DC^2 - DB^2} = 8$,则 $\frac{1}{2} \times 10BM = \frac{1}{2} \times 8 \times 6$,可求得 $BM = \frac{24}{5}$,所以 $CM = \sqrt{BC^2 - BM^2} = \frac{32}{5}$,即可由 $\frac{1}{2} \times \frac{24}{5} ME + \frac{1}{2} \times 8 ME = \frac{1}{2} \times \frac{24}{5} \times \frac{32}{5}$,求得 $ME = \frac{12}{5}$.

卷③ 第三十章基础诊断卷(A卷)

答案及评分细则

快速对答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	A	B	C	C	A	B	B	C	B	D	C

轻松评分

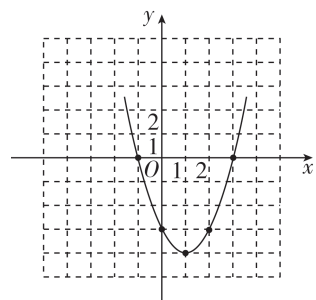
13. 增大 14. $y = 2x^2 + 4x + 2$ 15. 220 16. 4

17. (1)【解】把 $x = -1, 0, 1, 2, 3$ 分别代入 $y = x^2 - 2x - 3$ 得出 y 的值,将结果填入表格如下:

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	0	-3	-4	-3	0	...

..... (3分)

根据上表描点、连线,画出函数的图像如图所示.



..... (5分)

上分攻略 评分细则

规避失分点

13. 题目提供了备选答案,因此不要填“变大”等答案,否则不得分.

规避失分点

17. (1) 本题中自变量取值为全体实数,因此图像两端要出头儿,否则扣分.

(2) ① $-1 < x < 3$ (7分)

② -4 (8分)

【解析】①根据图像可知,当 $y < 0$ 时, x 的取值范围是 $-1 < x < 3$. 故答案为 $-1 < x < 3$. ②由图像可知,当 $0 < x < 4$ 时, y 的最小值为 -4 . 故答案为 -4 .

18.【解】(1) 设该二次函数的表达式为 $y = a(x-2)^2 - 3 (a \neq 0)$ (1分)
把 $B(3, 0)$ 代入得 $a \times (3-2)^2 - 3 = 0$, 解得 $a = 3$,
..... (3分)
所以该二次函数的表达式为 $y = 3(x-2)^2 - 3$.
..... (4分)

(2) 点 $C(3, -4)$ 不在该函数图像上, $D(1, 0)$ 在该函数图像上. (6分)
理由如下: 当 $x = 3$ 时, $y = 0 \neq -4$, 所以点 $C(3, -4)$ 不在该函数图像上.

..... (7分)

当 $x = 1$ 时, $y = 3 \times (1-2)^2 - 3 = 0$, 所以点 $D(1, 0)$ 在该函数图像上. (8分)

19.【解】(1) 根据题意, 得 $x^2 - 3x = -2$.
整理, 得 $(x-1)(x-2) = 0$, (3分)
解得 $x_1 = 1, x_2 = 2$, $\therefore x$ 的值为 1 或 2.

..... (4分)

(2) 根据题意知, $y = (x+2)^2 - (-2)(x+2) = x^2 + 4x + 4 + 2x + 4 = x^2 + 6x + 8 = (x+3)^2 - 1$,
..... (7分)
 \therefore 抛物线的顶点坐标为 $(-3, -1)$.
..... (8分)

20.【解】(1) 联立 $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x + 3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = 3, \\ y = 9 \end{cases}$ 或

$\begin{cases} x = -1, \\ y = 1, \end{cases} \therefore$ 点 A, B 的坐标分别为 $(3, 9), (-1, 1)$ (5分)

(2) 对于函数 $y = 2x + 3$, 令 $x = 0$, 则 $y = 3$, 即 $C(0, 3), \therefore OC = 3, \therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 3 \times 1 = 6$ (9分)

21. (1) $(30-3x)$ (1分)

【解析】 \therefore 修建所用木栏总长为 28 m, 且两处各留 1 m 宽的门(门不用木栏), $\therefore BC = 2 + 28 - 3x = (30-3x)$ m, 故答案为 $(30-3x)$.

找准得分点

18. (1) 求出 a 后, 还要代入表达式, 并把完整的表达式写出来, 否则不能得满分.

规避失分点

19. (2) 注意顶点的横、纵坐标的符号, 不要写成 $(3, -1)$.

找准得分点

20. (2) 求出 OC 的长得 1 分.

规避失分点

21. (1) 注意答案要加括号, 写成 $(30-3x)$ 的形式.

【解】(2) \therefore 墙最大可利用长度为 12 m, $\therefore 2 \leq BC \leq 12$, 即 $2 \leq 30-3x \leq 12$, 解得 $6 \leq x \leq \frac{28}{3}$ (3分)

根据题意可得 $x(30-3x) = 63$, 解得 $x_1 = 3$ (舍), $x_2 = 7, \therefore x$ 的值为 7. (5分)

(3) 设矩形的面积为 $S \text{ m}^2$, 则 $S = x(30-3x) = -3x^2 + 30x = -3(x-5)^2 + 75$ (7分)
 $\therefore -3 < 0, S$ 关于 x 的函数图像对称轴为直线 $x = 5$, 且 $6 \leq x \leq \frac{28}{3}, \therefore$ 当 $x = 6$ 时, S 有最大值, 最大值为 72.

答: 当 $x = 6$ 时, 矩形 $ABCD$ 的面积最大, 最大面积为 72 m^2 (9分)

22. (1)【证明】 令 $y = 0$, 即 $x^2 - mx + m - 2 = 0$.

$\therefore b^2 - 4ac = m^2 - 4(m-2) = (m-2)^2 + 4 > 0$,
..... (2分)

\therefore 无论 m 为何值, 此抛物线与 x 轴总有两个不同的交点. (4分)

(2) 【解】根据题意得 $x_1 + x_2 = m, x_1 x_2 = m - 2$.
..... (6分)

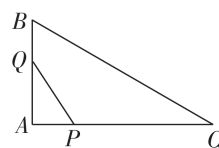
$\therefore x_1^2 + x_2^2 = 7, \therefore (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 7, \therefore m^2 - 2(m-2) = 7$, (8分)

整理得 $m^2 - 2m - 3 = 0$, 解得 $m_1 = 3, m_2 = -1$.
 $\therefore m$ 的值为 3 或 -1 (9分)

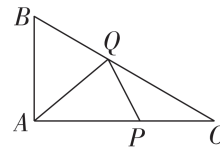
23.【解】(1) \therefore 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ, \angle C = 30^\circ, AB = 1, \therefore BC = 2, AC = \sqrt{3}$ (1分)

\therefore 两个动点 P, Q 同时从 A 点出发, 点 P 沿 AC 匀速运动, 点 Q 沿 AB, BC 匀速运动, 两点同时到达点 $C, \therefore (2+1) \div \sqrt{3} = \sqrt{3}, \therefore$ 点 Q 的速度是点 P 速度的 $\sqrt{3}$ 倍. (3分)

(2) 分两种情况讨论: ①当 Q 在 AB 上, 即 $0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, 如图(1). $\therefore AP = x, \therefore$ 由(1)可得 $AQ = \sqrt{3}x, \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2$; (5分)



图(1)



图(2)

规避失分点

21. (3) 要像答案中一样, 写出当 $x = 6$ 时, S 有最大值的原因, 否则扣分.

找准得分点

22. (1) 若缺少根的判别式, 扣 2 分.

找准得分点

23. (2) 把分类讨论的每种情况都要写完整, 后面的情况的步骤也不能省略, 否则扣分.

答案及评分细则

②当 Q 在 BC 上, 即 $\frac{\sqrt{3}}{3} < x \leq \sqrt{3}$ 时, 如图(2),

$$y = \frac{1}{2}x \times \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3}x) = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3}{4}x.$$

$$\text{综上, } y = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \left(0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3}{4}x \left(\frac{\sqrt{3}}{3} < x \leq \sqrt{3} \right). \end{cases}$$

..... (7分)

(3) 对于 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 \left(0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$,

当 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 时, $y_{\text{最大}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$; (8分)

对于 $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{3}{4}x \left(\frac{\sqrt{3}}{3} < x \leq \sqrt{3} \right)$, 当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

时, $y_{\text{最大}} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$ (9分)

$\because \frac{3\sqrt{3}}{16} > \frac{\sqrt{3}}{6}$, \therefore 当 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, $y_{\text{最大}} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$.

..... (10分)

24. 【解】(1) $y = -2x + 60 \ (10 \leq x \leq 19)$.

..... (3分)

设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y = kx + b \ (k \neq 0)$. 由表格数据可知, $\begin{cases} 36 = 12k + b, \\ 34 = 13k + b, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} k = -2, \\ b = 60. \end{cases} \text{ 故 } y \text{ 与 } x \text{ 之间的函数关系式为}$$

$$y = -2x + 60 \ (10 \leq x \leq 19).$$

(2) 根据题意得 $(x - 10)(-2x + 60) = 192$, 解得 $x_1 = 18, x_2 = 22$ (5分)

又 $\because 10 \leq x \leq 19, \therefore x = 18$.

答: 销售单价为 18 元. (6分)

(3) $w = (x - 10)(-2x + 60) = -2x^2 + 80x - 600 = -2(x - 20)^2 + 200$ (8分)

$\because a = -2 < 0, \therefore$ 抛物线开口向下.

\because 对称轴为直线 $x = 20, \therefore$ 当 $10 \leq x \leq 19$ 时, w 随 x 的增大而增大, (10分)

\therefore 当 $x = 19$ 时, w 有最大值, $w_{\text{最大}} = 198$.

答: 当销售单价为 19 元时, 每天获利最大, 最大利润是 198 元. (11分)

上分攻略 评分细则

找准得分点

23. (3) 两种情况的 y 的最大值都要求出来, 即要有比较的过程, 少写要扣分.

规避失分点

24. (1) 不要漏掉自变量的取值范围.

找准得分点

24. (3) 写明取最大值的原因, 否则进行相应扣分.

上分解析

1. A 【解析】 $\because y = 3x^2 + 2, 3 > 0, \therefore$ 抛物线 $y = 3x^2 + 2$ 开口方向是向上. 故选 A.

2. A 【解析】

$$\begin{array}{ccccccc} & & \text{化为顶点式} & & \text{左加右减自变量,} & & \\ & & & & \text{上加下减常数项} & & \\ y = -x^2 - 3 & \rightarrow & y = -(x-0)^2 - 3 & \rightarrow & y = -(x+2)^2 - 3 - 1 & \rightarrow & y = -(x+2)^2 - 4 \end{array}$$

3. B 【解析】 $\because C_1$ 是函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图像, C_2 是函数 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图像, 且

当 x 相等时, 两个函数的函数值互为相反数, \therefore 函数 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的图像与函数

$y = -\frac{1}{2}x^2$ 的图像关于 x 轴对称, \therefore 阴影部分的面积是 $\odot O$ 面积的一半, \therefore 阴影部分的面积为 $\frac{1}{2}\pi \times 2^2 = 2\pi$. 故选 B.

上分心得 | 两个二次函数图像的对称

当两个二次函数的图像关于 x 轴对称, 且 x 相等时, 两个函数的函数值互为相反数.

4. C 【解析】 \because 根据图像知, 抛物线与 x 轴的一个交点是 $(3, 0)$, 对称轴为直线 $x = 1, \therefore$ 根据抛物线的对称性, 抛物线与 x 轴的另一交点为 $(-1, 0)$. 令 $y = 0$, 即 $ax^2 + bx + c = 0, \therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解是 $x_1 = -1, x_2 = 3$. 即方程的另一个解为 -1 . 故选 C.

5. C 【解析】 \because 直线 l 为二次函数 $y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ 的图像的对称轴, \therefore 对称轴 $x = -\frac{b}{2a} > 0$, 当 $a < 0$ 时, $b > 0$, 当 $a > 0$ 时, $b < 0, \therefore a, b$ 异号, 故选 C.

6. A 【解析】由题意得 $S = x^2, x + y = 10, \therefore y = -x + 10, \therefore y$ 与 x, S 与 x 满足的函数关系分别为一次函数关系, 二次函数关系. 故选 A.

7. B 【解析】由函数图像可知, 当 $-1 < x < 5$ 时, 二次函数的图像在一次函数图像的下方, 即 $ax^2 + bx + c < mx + n$, 所以不等式 $ax^2 + bx + c < mx + n$ 的解集为 $-1 < x < 5$. 故选 B.

8. B 【解析】

结合描述, 抽象出关键点的坐标

$\because CH = 2 \text{ cm}, BD = 2 \text{ cm}$, 点 B, D 关于 y 轴对称, $\therefore D$ 点坐标为 $(1, 2)$. $\because AE \parallel x$ 轴, $AB = 4 \text{ cm}$, 最低点 C 在 x 轴上, $CH \perp AB, \therefore$ 点 A, B 关于直线 CH 对称, \therefore 左轮廓 ACB 所在抛物线的顶点 C 的坐标为 $(-3, 0), \therefore$ 右轮廓 DFE 所在抛物线的顶点 F 的坐标为 $(3, 0)$

待定系数法求二次函数表达式

设右轮廓 DFE 所在抛物线的表达式为 $y = a(x - 3)^2$. 把 $D(1, 2)$ 代入得 $2 = a \times (1 - 3)^2$, 解得 $a = \frac{1}{2}$, 故右轮廓 DFE 所在抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{2}(x - 3)^2$

故选 B.

9. C 【解析】将 $(1, 2), (5, 6)$ 代入函数表达式得 $\begin{cases} 2 = a(1-h)^2 + k, \\ 6 = a(5-h)^2 + k, \end{cases} \therefore a(5-h)^2 - a(1-h)^2 = 4$, 整理得 $a(6-2h) = 1$. 若 $h = 2$, 则 $a = \frac{1}{2} > 0$, 故 A 错误; 若

$h = 4$, 则 $a = -\frac{1}{2} < 0$, 故 B 错误; 若 $h = 6$, 则 $a = -\frac{1}{6} < 0$, 故 C 正确; 若 $h =$

8 , 则 $a = -\frac{1}{10} < 0$, 故 D 错误. 故选 C.

10. B 【解析】设 $AC = x$, 则 $BD = 12 - x$. 四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC \times BD =$

$$\frac{1}{2}x(12-x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6x = -\frac{1}{2}(x-6)^2 + 18, \therefore$$

当 $x = 6$ 时, 四边形 $ABCD$ 的面积最大, 最大值是 18. 故选 B.

上分点拨 | 几何图形面积的最值问题

求几何图形面积的最值时, 一般先把面积用未知数表示出来, 若表示面积的函数为二次函数, 则在未知数的取值范围内求二次函数的最值即可.

11. D 【解析】由表格可得, 抛物线 G 的对称轴是直线 $x = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2}$, 故选

项 B 正确; 由表格可以发现, 在对称轴左边, y 随 x 的增大而减小, 在对称轴右边, y 随 x 的增大而增大, \therefore 抛物线 G 开口向上, 故选项 A 正确; 当 $x = 0$ 时, $y = -2, \therefore$ 抛物线 G 与 y 轴交于点 $(0, -2)$, 故选项 C 正确;

\because 抛物线 G 的对称轴是直线 $x = -\frac{1}{2}$, 且开口向上, \therefore 二次函数 $y = ax^2 +$

$bx + c \ (a \neq 0)$ 的最小值在 $x = -\frac{1}{2}$ 处取到, 应小于 -2 , 故选项 D 错误. 故

选 D.

12. C 【解析】设 B 点坐标为 $(a, 0)$, 则 A 点坐标为 $(-3a, 0)$. 由题意得, $x = a$ 与 $x = -3a$ 是 $-x^2 + 2(m+1)x + m + 3 = 0$ 的解, $\therefore a + (-3a) = 2m + 2$,

$(-3a)a = -m - 3$, 解得 $a = -1, m = 0$ 或 $a = \frac{2}{3}, m = -\frac{5}{3}$. \because 对称轴在 y 轴右

侧, $\therefore -\frac{2(m+1)}{-2} > 0$, 解得 $m > -1, \therefore m = 0$. 故选 C.

13. 增大 【解析】 $\because y = 3(x+1)^2 - 2, \therefore$ 抛物线开口向上, 对称轴为直线 $x = -1, \therefore$ 当 $x > -1$ 时, y 随 x 的增大而增大, 故答案为增大.

14. $y = 2x^2 + 4x + 2$ 【解析】根据题意得, 满足所有条件的二次函数是 $y = 2(x+1)^2$, 即 $y = 2x^2 + 4x + 2$. 故答案为 $y = 2x^2 + 4x + 2$.

15. 220 【解析】由图像是经过原点的抛物线的一部分, 设抛物线表达式为

$$P = aI^2 + bI \ (a \neq 0). \text{ 把 } (1, 165), (4, 0) \text{ 代入得 } \begin{cases} a + b = 165, \\ 16a + 4b = 0, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} a = -55, \\ b = 220, \end{cases} \therefore \text{ 抛物线表达式为 } P = -55I^2 + 220I = -55(I-2)^2 + 220. \therefore -55 <$$

$0, \therefore$ 当 $I = 2$ 时, P 取得最大值, 为 220, \therefore 变阻器 R 消耗的电功率 P 最大为 220 W. 故答案为 220.

上分技巧 | 求二次函数的最值

求二次函数的最值的一种方法是将二次函数表达式化为顶点式.

16. 4 【解析】 $\because y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c = -\frac{1}{2}(x-b)^2 + c + \frac{1}{2}b^2$, \therefore 顶点 A 的坐标为 $(b, c + \frac{1}{2}b^2)$, 对称轴为直线 $x = b$. 当 $x = 0$ 时, $y = c$, $\therefore B(0, c)$. \because 点 B 关于抛物线对称轴的对称点为点 C , $\therefore C(2b, c)$. $\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\therefore 2b = 2(c + \frac{1}{2}b^2 - c)$, 解得 $b = 0$ 或 $b = 2$. $\because b > 0$, $\therefore b = 2$, $\therefore BC = 4$, 故答案为 4.

上分心得 | 直角三角形斜边上的中线

直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半. 这是一个等量关系, 可用列等式求值.

17. 【关键点拨】画二次函数图像时, 要用平滑的曲线顺次连接描出的各点, 并将图像画对称.
18. 【思路分析】(1) 设顶点式 $y = a(x-2)^2 - 3$, 再把 B 点坐标代入求出 a 的值, 最后写出函数表达式即可; (2) 将点的横坐标代入函数表达式, 若结果与纵坐标相等, 则点在函数图像上, 否则不在.
19. 【思路分析】(1) 利用新定义运算法则列出方程, 再求解即可; (2) 利用新定义运算法则得到抛物线表达式, 然后利用配方法化成顶点式, 即可得到答案.
20. 【关键点拨】解决本题的关键是将点的坐标转化为线段的长.
21. 【关键点拨】本题考查的是二次函数的应用, 解题关键是列出面积的函数关系式, 求最值时, 要配成顶点式, 方便计算.
22. 【刷有所得】二次函数图像与 x 轴交点的横坐标即为此二次函数的函数值为 0 时所构成的一元二次方程的解.
23. 【思路分析】此题考查了二次函数的最值、直角三角形的性质和勾股定理的应用, 解题时首先求出相关线段的长度, 然后利用面积公式列出函数表达式, 最后求出二次函数的最值即可解决问题.
24. 【关键点拨】找出等量关系: 利润 = 单件利润 \times 销售量.

第三十章 对点上分

上分解析

基础上分

1. $y = 3(x-3)^2 + 2$ 【解析】根据题意知, 坐标轴的移动可看作将抛物线 $y = 3(x-1)^2 + 1$ 向上平移 1 个单位长度, 再向右平移 2 个单位长度, 所以抛物线在新的平面直角坐标系中的表达式为 $y = 3(x-3)^2 + 2$. 故答案为 $y = 3(x-3)^2 + 2$.
2. $y = x^2 + 2x + 2$ 【解析】根据题意得 $\begin{cases} c = 2, \\ 1 + b + c = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b = 2, \\ c = 2, \end{cases}$ 所以二次函数

的表达式为 $y = x^2 + 2x + 2$.

3. 【解】由题意得, 抛物线的表达式为 $y = a(x-2)^2 + 1$.

将 $B(1, 0)$ 代入 $y = a(x-2)^2 + 1$, 得 $0 = a + 1$, $\therefore a = -1$, $\therefore y = -(x-2)^2 + 1$, \therefore 此函数的表达式为 $y = -x^2 + 4x - 3$.

4. 【解】 \because 二次函数的图像经过点 $A(0, -3)$, $B(1, 0)$ 和 $C(-3, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} -3 = c, \\ 0 = a + b + c, \\ 0 = 9a - 3b + c, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = 1, \\ b = 2, \\ c = -3, \end{cases} \therefore \text{二次函数的表达式为 } y = x^2 + 2x - 3.$$

上分心得 | 求二次函数表达式

一般地, 当已知抛物线上三点时, 常设一般式, 用待定系数法列三元一次方程组来求解; 当已知抛物线的顶点或对称轴时, 常设顶点式来求解; 当已知抛物线与 x 轴的两个交点时, 可选择设交点式来求解.

5. D 【解析】A 选项, 当 $x = -1$ 时, $y = -3 - 3 + 6 = 0$, 则点 $(-1, 4)$ 不在函数图像上, 故该选项不正确, 不符合题意; B 选项, $\because a = -3 < 0$, \therefore 抛物线开口方向向下, 故该选项不正确, 不符合题意; C 选项, $y = -3x^2 + 3x + 6$ 的对称轴是直线 $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2 \times (-3)} = \frac{1}{2}$, 故该选项不正确, 不符合题意; D 选项, \because 抛物线对称轴为直线 $x = \frac{1}{2}$, 开口向下, \therefore 当 $x > 1$ 时, y 随 x 的增大而减小, 故该选项正确, 符合题意. 故选 D.

6. B 【解析】 $\because y = ax^2 - 4ax + c = a(x-2)^2 - 4a + c$, \therefore 抛物线的对称轴为直线 $x = 2$. $\because a < 0$, \therefore 抛物线开口向下, 则抛物线上的点距离对称轴越近, 对应的函数值越大. \because 点 $A(-2, y_1)$ 到对称轴的距离为 $2 - (-2) = 4$, 点 $B(4, y_2)$ 到对称轴的距离为 $4 - 2 = 2$, $2 < 4$, \therefore 点 $B(4, y_2)$ 到对称轴的距离更近, $\therefore y_1 < y_2$. 故选 B.

7. C 【解析】由一次函数 $y = -x + a$ (a 为常数) 的图像可知 $a > 0$, \therefore 二次函数 $y = ax^2 - 2x + \frac{1}{a}$ 的图像开口向上, 图像与 y 轴的交点的纵坐标 $\frac{1}{a} > 0$, 对称轴为直线 $x = -\frac{-2}{2a} = \frac{1}{a} > 0$, 即对称轴在 y 轴的右侧, 只有 C 选项符合题意. 故选 C.

8. $-7 \leq y < 9$ 【解析】 $\because y = x^2 - 6x + 2 = (x-3)^2 - 7$, \therefore 抛物线开口向上, 对称轴为直线 $x = 3$, 顶点坐标为 $(3, -7)$. 将 $x = -1$ 代入 $y = x^2 - 6x + 2$, 得 $y = 1 + 6 + 2 = 9$, \therefore 当 $-1 < x < 4$ 时, y 的取值范围是 $-7 \leq y < 9$, 故答案为 $-7 \leq y < 9$.

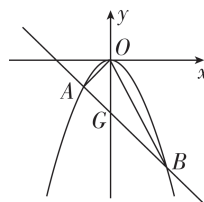
9. 【解】(1) $\because y = ax^2$ ($a \neq 0$) 的图像过点 $A(-1, -1)$, $\therefore -1 = a \times 1$, 解得 $a = -1$. \therefore 一次函数 $y = kx - 2$ ($k \neq 0$) 的图像过点 $A(-1, -1)$, $\therefore -1 = -k - 2$, 解得 $k = -1$.

$$(2) \text{ 由 (1) 得, } \begin{cases} y = -x - 2, \\ y = -x^2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -1, \\ y = -1 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 2, \\ y = -4, \end{cases}$$

\therefore 点 B 的坐标为 $(2, -4)$.

(3) 如图, 设直线 $y = -x - 2$ 与 y 轴的交点为 G , 则

$$G(0, -2), \therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle AOG} + S_{\triangle BOG} = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times$$



$2 = 3$.

10. 【解】(1) 抛物线的顶点坐标为 $(1, -4)$.

(2) \because 抛物线的对称轴为直线 $x = 1$, 开口向上, 而点 $C(\pi, y_3)$ 离对称轴最近, 点 $A(-2, y_1)$, $B(4, y_2)$ 与对称轴之间的距离相等, $\therefore y_3 < y_1 = y_2$.

(3) 当 $y = 0$ 时, $x^2 - 2x - 3 = 0$, 解得 $x = -1$ 或 3 , \therefore 图像与 x 轴的交点坐标为 $(-1, 0)$ 和 $(3, 0)$, \therefore 函数值小于 0 时, x 的取值范围为 $-1 < x < 3$.

11. 【解】(1) $\because m = n$, \therefore 点 $(-1, m)$ 和 $(3, n)$ 关于抛物线对称轴对称, \therefore 抛物线对称轴为直线 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$, $\therefore t = -\frac{b}{-2} = 1$, $\therefore b = 2$.

(2) $\because y = -x^2 + bx + c$, \therefore 抛物线开口向下, 抛物线与 y 轴交点坐标为 $(0, c)$. \because 抛物线对称轴为直线 $x = t$, \therefore 抛物线经过 $(2t, c)$.

\because 点 $(-1, m)$ 和 $(3, n)$ 在抛物线上, $-1 < 3$, $n < m < c$, 分三种情况讨论:

① 当点 $(-1, m)$ 和 $(3, n)$ 都在对称轴左侧时, $\because -1 < 0 < 3$, $\therefore m < c < n$, 不符合题意, 舍去.

② 当点 $(-1, m)$ 在对称轴左侧, 点 $(3, n)$ 在对称轴右侧时, 若 $t < 2t$, 则 $-1 < t < 2t < 2t + 1 < 3$, 解得 $0 < t < 1$. 若 $t = 2t$, 即 $t = 0$, 则对称轴为直线 $x = 0$, 此时满足 $n < m < c$, 符合题意. 若 $t > 2t$, 则 $-1 < 2t < t < 2t + 1 < 3$, 解得 $-\frac{1}{2} < t < 0$.

$$\therefore -\frac{1}{2} < t < 1.$$

③ 当点 $(-1, m)$ 和 $(3, n)$ 都在对称轴右侧时, $\because -1 < 0 < 3$, $\therefore n < c < m$, 不合题意, 舍去.

综上所述, $-\frac{1}{2} < t < 1$.

12. (1) 【解】设二次函数的表达式为 $y = ax^2$ ($a \neq 0$). 把 $A(2, 1)$ 代入 $y = ax^2$, 得 $1 = 4a$, 解得 $a = \frac{1}{4}$, \therefore 二次函数的表达式为 $y = \frac{1}{4}x^2$.

(2) 【解】抛物线上整点坐标可表示为 $(2n, n^2)$, 其中 n 为整数.

(3) 【证明】设直线 OA 的表达式为 $y = kx$ ($k \neq 0$). 把点 $A(2, 1)$ 代入 $y = kx$, 得 $1 = 2k$, 解得 $k = \frac{1}{2}$, \therefore 直线 OA 的表达式为 $y = \frac{1}{2}x$, \therefore 过点

$C(0, c)$ 与直线 OA 平行的直线的表达式为 $y = \frac{1}{2}x + c$. \because 点 B 是整点,

\therefore 点 B 的坐标可表示为 $(2n, n^2)$, 其中 n 为整数. 把 $B(2n, n^2)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x + c$, 得 $n^2 = n + c$, $\therefore c = n^2 - n = n(n-1)$. $\because BC \parallel OA$, $\therefore S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OAC} = \frac{1}{2} \times$

$c \times 2 = c = n(n-1)$. $\because n$ 为整数, $\therefore n$ 与 $n-1$ 一奇一偶, $\therefore n(n-1)$ 是偶数, $\therefore \triangle OAB$ 的面积是偶数.

13. C 【解析】由图像得抛物线开口向上, 与 y 轴交于负半轴, $\therefore a > 0, c <$

0 . \because 对称轴是直线 $x = -1$, $\therefore -\frac{b}{2a} = -1$, 即 $b = 2a > 0$, $\therefore abc < 0$, 故①正

确. \because 抛物线与 x 轴有 2 个不同的交点, $\therefore b^2 - 4ac > 0$, $\therefore b^2 > 4ac$, 故②正

确. 由图像得当 $x = -2$ 时, $y < 0$, 即 $4a - 2b + c < 0$, 故③错误. 由图像得当 $x = 1$ 时, $y > 0$, 即 $y = a + b + c = 3a + c > 0$, 故④正确. $\because b = 2a$, $\therefore b - 2a = 0$, $\therefore b^2 - 4a^2 = (b + 2a)(b - 2a) = 0$. $\because a > 0, c < 0$, $\therefore 2ac < 0$, $\therefore b^2 - 4a^2 > 2ac$, 故⑤正

确. 故选 C.

14. D 【解析】∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$, ∴ $-\frac{b}{2a}=1$, ∴ $b=-2a$, 故①错误; ②当 $x=1$ 时, $y=a+b+c=n$. ∵ $b=-2a$, ∴ $-a+c=n$, 故②正确; ∵ 抛物线的顶点坐标为 $(1, n)$, ∴ 抛物线 $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 与直线 $y=n$ 只有一个交点, 即方程 $ax^2+bx+c=n$ 有两个相等的实数根, ∴ $b^2-4a(c-n)=0$, ∴ $b^2=4a(c-n)$, 故③正确; ④把抛物线 $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 向下平移 c 个单位, 即可得到抛物线 $y=ax^2+bx (a \neq 0)$, ∴ 当 $x<0$ 时, $ax^2+bx<-2x$, 即 $ax^2+(b+2)x<0$, 故④正确; ⑤对于一元二次方程 $ax^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)x+c=0$, 由图像可知 $a<0, c>0$, ∴ $-4ac>0$, ∴ $\left(b-\frac{1}{2}\right)^2-4ac>0$, ∴ 一元二次方程 $ax^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)x+c=0$ 有两个不相等的实数根, 故⑤正确. 故选 D.

15. $-\frac{5}{2}$ 小 $-\frac{21}{4}$ 7 【解析】∵ $y=x^2+5x+1=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$, ∴ 抛物线开口向上, 函数有最小值. 当 $x=-\frac{5}{2}$ 时, y 有最小值, 为 $-\frac{21}{4}$. 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 图像在对称轴右侧, ∴ 当 $x=1$ 时, $y_{\text{最大}}=7$. 故答案为 $-\frac{5}{2}$, 小, $-\frac{21}{4}$, 7.

16. -4 【解析】由函数图像可得对称轴为直线 $x=-1$, ∴ $-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{2}=-1$, 解得 $b=2$. ∵ 图像经过点 $(-3, 0)$, ∴ $0=(-3)^2-3 \times 2+c$, 解得 $c=-3$, 故二次函数表达式为 $y=x^2+2x-3$, ∴ 二次函数的最小值为 $\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{4 \times 1 \times (-3)-2^2}{4 \times 1}=-4$. 故答案为 -4.

17. $\frac{17}{2}$ 【解析】设 P 的坐标为 $(x, -x^2+2x+2)$. 由题意得, 四边形 $OAPB$ 周长为 $2PA+2OA=-2x^2+4x+4+2x=-2x^2+6x+4=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{17}{2}$. 当 $x=\frac{3}{2}$ 时, 四边形 $OAPB$ 周长有最大值, 最大值为 $\frac{17}{2}$. 故答案为 $\frac{17}{2}$.

18. 800 【解析】设日销售量 y 与销售单价 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b (k \neq 0)$. ∵ 点 $(25, 50), (35, 30)$ 在函数图像上, ∴ $\begin{cases} 25k+b=50, \\ 35k+b=30, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-2, \\ b=100, \end{cases}$ ∴ $y=-2x+100$. 设每天的销售利润为 w 元, 则 $w=(x-10) \cdot y=(x-10)(-2x+100)=-2x^2+120x-1\,000=-2(x-30)^2+800$. ∵ $-2<0$, ∴ 二次函数的图像开口向下, ∴ 当 $x=30$ 时, w 有最大值, $w_{\text{最大}}=800$, 即超市每天销售这款拼装玩具的最大利润为 800 元, 故答案为 800.

19. 【解】(1) 把 $(0, -3), (-2, 5)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$, 得 $\begin{cases} c=-3, \\ -4-2b+c=5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=-6, \\ c=-3. \end{cases}$
(2) ∵ $y=-x^2-6x-3=-(x+3)^2+6$, ∴ 抛物线对称轴为直线 $x=-3$.

又: $-4 \leq x \leq 0$, ∴ 当 $x=-3$ 时, y 有最大值, 为 6.

(3) m 的值为 -2 或 $-3-\sqrt{10}$. ①当 $-3<m \leq 0$ 时, 在 $x=0$ 处, y 取得最小值, 为 -3, 在 $x=m$ 处, y 取得最大值, 为 $-m^2-6m-3$, ∴ $-m^2-6m-3+(-3)=2$, ∴ $m=-2$ 或 $m=-4$ (舍去), ∴ $m=-2$; ②当 $m \leq -3$ 时, ∵ 抛物线对称轴为直线 $x=-3$, ∴ $x=-3$ 时, y 有最大值, 为 6. ∵ y 的最大值与最小值之和为 2, ∴ y 的最小值为 -4, ∴ $-(m+3)^2+6=-4$, ∴ $m=-3-\sqrt{10}$ 或 $m=-3+\sqrt{10}$ (舍去). 综上所述, m 的值为 -2 或 $-3-\sqrt{10}$.

20. 【解】(1) 把 $(-1, 0)$ 和 $(0, 3)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$ 中, 得 $\begin{cases} -1-b+c=0, \\ c=3, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} b=2, \\ c=3. \end{cases}$

(2) 由 (1) 得 $y=-x^2+2x+3$, ∴ 抛物线对称轴为直线 $x=1$. ∵ $a=-1<0$, ∴ 当 $x=1$ 时, $y_{\text{最大}}=4$. ∵ k 为正数, ∴ $1+k>1$, ∴ 当 $0<x \leq 1+k$ 时, $m=4$. ∵ $m+n=7$, ∴ $n=3$. 当 $y=3$ 时, $-x^2+2x+3=3$, 解得 $x_1=0, x_2=2$. ∵ $0<x \leq 1+k$, ∴ $1+k=2$, 解得 $k=1$.

21. 1 【解析】∵ 抛物线 $y=x^2+2x-m+2$ 的顶点在 x 轴上, 令 $y=0$, 即 $x^2+2x-m+2=0$, ∴ $2^2-4 \times (-m+2)=0$, 即 $-4+4m=0$, 解得 $m=1$. 故答案为 1.

22. $x_1=4, x_2=-2$ 【解析】由图像可知, 该函数图像的对称轴是直线 $x=1$, 与 x 轴的一个交点是 $(4, 0)$. 由抛物线的对称性可知, 该函数图像与 x 轴的另一个交点是 $(-2, 0)$. 当 $y=0$, 即 $-x^2+2x+m=0$ 时, $x_1=4, x_2=-2$. 故关于 x 的一元二次方程 $-x^2+2x+m=0$ 的解为 $x_1=4, x_2=-2$, 故答案为 $x_1=4, x_2=-2$.

23. 【解】(1) ∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c (a \neq 0)$ 的图像经过 $A(-1, 0), B(3, 0), C(0, -3)$ 三点, ∴ $\begin{cases} a-b+c=0, \\ 9a+3b+c=0, \\ c=-3, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=1, \\ b=-2, \\ c=-3, \end{cases}$ ∴ 二次函数的表达式

为 $y=x^2-2x-3$.

(2) ① ∵ $y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4$, ∴ 对称轴为直线 $x=1$.
∵ 点 $C(0, -3)$ 与点 $(2, -3)$ 关于直线 $x=1$ 对称, ∴ 方程 $ax^2+bx+c=-3$ 的解为 $x=0$ 或 2, 故答案为 $x=0$ 或 2.

②由图像可知 $y>0$ 时, x 的取值范围为 $x<-1$ 或 $x>3$, ∴ 不等式 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $x<-1$ 或 $x>3$, 故答案为 $x<-1$ 或 $x>3$.

24. 【解】(1) ∵ 抛物线 $y=2x^2+mx$ 过点 $A(2, 0)$, ∴ $2 \times 2^2+2m=0$, 解得 $m=-4$, ∴ $y=2x^2-4x=2(x-1)^2-2$, ∴ 抛物线顶点 M 的坐标是 $(1, -2)$.

(2) $x<1$ 或 $x>2$. 令 $y=2x-4$, 易知直线 $y=2x-4$ 过点 A, M . 由图像可得 不等式 $2x^2+mx>2x-4$ 的解集为 $x<1$ 或 $x>2$.

重难上分

上分专题 (三) 实际应用问题

1. 11 【解析】设销售单价为 x 元 ($x \geq 10$), 每天所获利润为 y 元, 则 $y=[20-4(x-10)] \cdot (x-7)=-4x^2+88x-420=-4(x-11)^2+64$, 所以将销售单价定为 11 元时, 才能使每天所获销售利润最大. 故答案为 11.

2. 【解】(1) 当 $1 \leq x \leq 30$ 时, $w=(0.5x+35-30) \cdot (-2x+128)=-x^2+54x+$

640 ; 当 $31 \leq x \leq 60$ 时, $w=(50-30) \cdot (-2x+128)=-40x+2\,560$.

∴ w 与 x 之间的函数关系式为 $w=\begin{cases} -x^2+54x+640 (1 \leq x \leq 30), \\ -40x+2\,560 (31 \leq x \leq 60). \end{cases}$

(2) 当 $1 \leq x \leq 30$ 时, $w=-x^2+54x+640=-(x-27)^2+1\,369$.

∵ $-1<0$, ∴ 当 $x=27$ 时, w 有最大值, 最大值为 1 369;

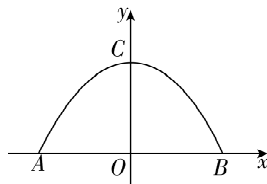
当 $31 \leq x \leq 60$ 时, $w=-40x+2\,560$.

∵ $-40<0$, ∴ 当 $x=31$ 时, w 有最大值, 最大值为 $-40 \times 31+2\,560=1\,320$.

∵ $1\,369>1\,320$, ∴ 该商品在第 27 天的日销售利润最大, 最大日销售利润是 1 369 元.

3. 2. 29 【解析】以 AB 所在直线为 x 轴, 过拱顶垂直地面的直线为 y 轴建立平面直角坐标系, 如图, 则 $A(-4, 0), C(0, 4)$. 设抛物线表达式为 $y=$

ax^2+k . 由题意, 得 $\begin{cases} 16a+k=0, \\ k=4, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{4}, \\ k=4, \end{cases}$ ∴ 抛



物线表达式为 $y=-\frac{1}{4}x^2+4$. ∵ $2+\frac{0.4}{2}=2.2$, 当 $x=2.2$ 时, $y=-\frac{1}{4} \times 2.2^2+4=2.79, 2.79-0.5=2.29$ (m), ∴ 该货车能够安全通行的最大高度为 2.29 m. 故答案为 2.29.

4. 【解】(1) ∵ 抛物线 $C_1: y=a(x-3)^2+2$, ∴ C_1 的最高点坐标为 $(3, 2)$.

∵ 点 $A(6, 1)$ 在抛物线 $C_1: y=a(x-3)^2+2$ 上, ∴ $1=(6-3)^2a+2$, 解得 $a=-\frac{1}{9}$, ∴ 抛物线 C_1 的表达式为 $y=-\frac{1}{9}(x-3)^2+2$.

令 $x=0$, 则 $c=-\frac{1}{9}(0-3)^2+2=1$.

(2) ∵ 嘉嘉在 x 轴上方 1 m 的高度上, 且到点 A 水平距离不超过 1 m 的范围内可以接到沙包, ∴ 可以接到沙包的位置的纵坐标为 1, 横坐标的取值范围为 $5 \leq x \leq 7$. 当抛物线 C_2 经过 $(5, 1)$ 时, $1=-\frac{1}{8} \times 5^2+\frac{n}{8} \times 5+1+1$, 解

得 $n=\frac{17}{5}$; 当抛物线 C_2 经过 $(7, 1)$ 时, $1=-\frac{1}{8} \times 7^2+\frac{n}{8} \times 7+1+1$, 解得 $n=\frac{41}{7}$, ∴ $\frac{17}{5} \leq n \leq \frac{41}{7}$, ∴ 符合条件的 n 的整数值为 4 和 5.

5. B 【解析】设 AD 的长为 x m, 则 AB 的长为 $\frac{40-x}{2}$ m. 当 $AB=6$ 时, $\frac{40-x}{2}=6$, 解得 $x=28$. ∵ AD 的长不能超过 26 m, ∴ $x \leq 26$, 故①错误. ∵ 菜园 $ABCD$ 的面积为 192 m^2 , ∴ $x \cdot \frac{40-x}{2}=192$, 整理得 $x^2-40x+384=0$, 解得

$x=24$ 或 $x=16$, ∴ AB 的长有两个不同的值满足菜园 $ABCD$ 的面积为 192 m^2 , 故②正确. 设矩形菜园的面积为 $y \text{ m}^2$. 根据题意得 $y=x \cdot \frac{40-x}{2}=-\frac{1}{2}(x^2-40x)=-\frac{1}{2}(x-20)^2+200$, ∴ $-\frac{1}{2}<0, 20<26$, ∴ 当 $x=20$ 时, y 有最大值, 最大值为 200, 故③错误. ∴ 正确的有 1 个, 故选 B.

6. 【解】(1) ∵ 花圃的宽 AB 为 x m, ∴ $BC=(24-4x)$ m, ∴ $S=x(24-4x)=$

$$-4x^2+24x(0<x<6).$$

$$(2) S=-4x^2+24x=-4(x-3)^2+36. \therefore 24-4x \leq 8, \therefore x \geq 4.$$

又 $\because 0 < x < 6, \therefore 4 \leq x < 6. \therefore -4 < 0, \therefore$ 当 $4 \leq x < 6$ 时, S 随 x 的增大而减小,
 \therefore 当 $x=4$ 时,围成的花圃有最大面积, $S_{\text{最大}}=32$.

答:围成花圃的最大面积是 32 m^2 .

7.【解】(1) ①当 $2 \leq x < 8$ 时,设直线 MN 的表达式为 $y=kx+b$.将 $M(2, 12), N(8, 6)$ 代入得 $\begin{cases} 2k+b=12, \\ 8k+b=6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k=-1, \\ b=14, \end{cases} \therefore y=-x+14(2 \leq x < 8);$

②当 $x \geq 8$ 时, $y=6. \therefore$ A类杨梅平均销售价格 y 与销售数量 x 之间的函数关系式为 $y=\begin{cases} -x+14(2 \leq x < 8), \\ 6(x \geq 8). \end{cases}$

(2) \because 销售A类杨梅 x 吨, \therefore 销售B类杨梅 $(20-x)$ 吨. $w_B=9(20-x)-[12+3(20-x)]=108-6x$.

当 $2 \leq x < 8$ 时, $w_A=x(-x+14)-x=-x^2+13x, \therefore w=w_A+w_B-3 \times 20=(-x^2+13x)+(108-6x)-60=-x^2+7x+48;$

当 $8 \leq x \leq 20$ 时, $w_A=6x-x=5x, \therefore w=w_A+w_B-3 \times 20=5x+(108-6x)-60=-x+48$.

$\therefore w$ 关于 x 的函数关系式为 $w=\begin{cases} -x^2+7x+48(2 \leq x < 8), \\ -x+48(8 \leq x \leq 20). \end{cases}$

(3)设该公司共购买了 m 吨杨梅,其中A类杨梅为 a 吨,B类杨梅为 $(m-a)$ 吨,则购买费用为 $3m$ 万元,A类杨梅包装成本为 a 万元,B类杨梅深加工成本为 $[12+3(m-a)]$ 万元,

$\therefore 3m+a+[12+3(m-a)]=132$,化简得 $a=3m-60. w_B=9(m-a)-[12+3(m-a)]=6m-6a-12$.

①当 $2 \leq a < 8$ 时, $w_A=a(-a+14)-a=-a^2+13a, \therefore w=w_A+w_B-3m=(-a^2+13a)+(6m-6a-12)-3m=-a^2+7a+3m-12$.

将 $3m=a+60$ 代入得 $w=-a^2+8a+48=-(a-4)^2+64, \therefore$ 当 $a=4$ 时,公司有最大利润64万元,此时 $m=\frac{64}{3}, m-a=\frac{52}{3};$

②当 $a \geq 8$ 时, $w_A=6a-a=5a, \therefore w=w_A+w_B-3m=5a+(6m-6a-12)-3m=-a+3m-12$.

将 $3m=a+60$ 代入得 $w=48, \therefore$ 当 $a \geq 8$ 时,公司有最大利润48万元.

综上所述,购买杨梅共 $\frac{64}{3}$ 吨,其中A类杨梅4吨,B类杨梅 $\frac{52}{3}$ 吨,公司能够获得最大利润,最大利润为64万元.

上分专题(四)二次函数与几何图形的综合

1. $(3, 5)$ 或 $(\frac{7}{2}, \frac{11}{2})$ 【解析】 \because 直线 $y=x+2$ 过点 $B(4, m), \therefore m=6,$

$\therefore B(4, 6)$.将 A, B 两点坐标代入抛物线表达式得 $\begin{cases} \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+6=\frac{5}{2}, \\ 16a+4b+6=6, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} a=2, \\ b=-8, \end{cases} \therefore$ 抛物线的表达式为 $y=2x^2-8x+6$.

①若 A 点为直角顶点,如图(1).设 AC 的表达式为 $y=-x+b'$.将 A 点坐标代入 $y=-x+b'$ 得 $b'=3, \therefore AC$ 的表达式

为 $y=-x+3$.由 $\begin{cases} y=-x+3, \\ y=2x^2-8x+6, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=3, \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$ (舍去), $\therefore C(3, 0), \therefore P$ 点的横坐标为3,则纵坐标为5, $\therefore P(3, 5);$

②若 C 点为直角顶点,如图(2).令 $2x^2-8x+6=\frac{5}{2}$,解得

$x=\frac{7}{2}$ 或 $x=\frac{1}{2}$ (舍去),则 $C(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}), \therefore P$ 点的横坐标为

$\frac{7}{2}$,则纵坐标为 $\frac{11}{2}, \therefore P(\frac{7}{2}, \frac{11}{2})$.故答案为 $(3, 5)$ 或 $(\frac{7}{2}, \frac{11}{2})$.

2.【解】(1)在 $y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-t)$ 中,令 $y=0$ 得 $x=-2$ 或 $x=t, \therefore A(-2, 0), B(t, 0)$.

\because 抛物线的对称轴为直线 $x=1, \therefore \frac{-2+t}{2}=1$,解得 $t=4, \therefore y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)=-\frac{1}{2}x^2+x+4, \therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$.

(2)在抛物线的对称轴上存在点 D ,使得 $\triangle DBC$ 为等腰三角形.

设 $D(1, m)$.在 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$ 中,令 $x=0$,得 $y=4, \therefore C(0, 4)$.

由(1)知 $B(4, 0), \therefore CD^2=1+(m-4)^2, BD^2=9+m^2, BC^2=32$.

①当 $CD=BD$ 时, $1+(m-4)^2=9+m^2$,解得 $m=1, \therefore D(1, 1);$

②当 $CD=BC$ 时, $1+(m-4)^2=32$,解得 $m=4+\sqrt{31}$ 或 $m=4-\sqrt{31}, \therefore D(1, 4+\sqrt{31})$ 或 $(1, 4-\sqrt{31});$

③当 $BD=BC$ 时, $9+m^2=32$,解得 $m=\sqrt{23}$ 或 $m=-\sqrt{23}, \therefore D(1, \sqrt{23})$ 或 $(1, -\sqrt{23}).$

综上所述,点 D 的坐标为 $(1, 1)$ 或 $(1, 4+\sqrt{31})$ 或 $(1, 4-\sqrt{31})$ 或 $(1, \sqrt{23})$ 或 $(1, -\sqrt{23}).$

3.【解】(1) \because 二次函数 $y=\frac{1}{2}x^2+bx-\frac{3}{2}$ 的图像与 x 轴交于点 $A(-3, 0),$

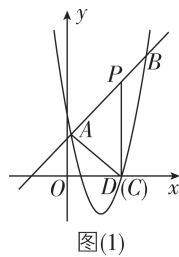
$\therefore \frac{1}{2} \times 9-3b-\frac{3}{2}=0$,解得 $b=1, \therefore$ 二次函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}$.令 $y=$

0 ,则 $\frac{1}{2}x^2+x-\frac{3}{2}=0$,解得 $x_1=-3, x_2=1, \therefore$ 点 B 的坐标为 $(1, 0), \therefore AB=1-(-3)=4. \because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\therefore AD=AB=4, \angle DAB=90^\circ, \therefore$ 点 D 的坐标为 $(-3, 4)$.

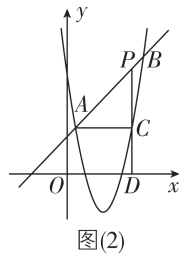
(2)设 $OP=m. \because A(-3, 0), \therefore OA=3, \therefore AP=3-m$.

\because 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\therefore \angle DAP=90^\circ$.

$\therefore \angle POE=90^\circ, \therefore \angle DAP=\angle POE$.



图(1)



图(2)

$\therefore \angle DPE=90^\circ, \therefore \angle OPE+\angle APD=90^\circ$.

$\therefore \angle ADP+\angle APD=90^\circ, \therefore \angle ADP=\angle OPE, \therefore \triangle ADP \sim \triangle OPE, \therefore \frac{AD}{OP}=$

$\frac{AP}{OE}, \therefore \frac{4}{m}=\frac{3-m}{OE}, \therefore OE=-\frac{1}{4}m^2+\frac{3}{4}m=-\frac{1}{4}(m-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{16}.$

$\therefore -\frac{1}{4} < 0, \therefore$ 当 $m=\frac{3}{2}$ 时, OE 有最大值,为 $\frac{9}{16}$,即当点 P 运动到 OA 的中点

时, OE 有最大值,最大值是 $\frac{9}{16}$.

4.【解】(1) $\because y=-x+4, \therefore$ 当 $x=0$ 时, $y=4, \therefore B(0, 4);$ 当 $y=0$ 时, $x=4, \therefore C(4, 0)$.将点 B, C 的坐标代入 $y=ax^2+x+c$,得 $\begin{cases} 16a+4+c=0, \\ c=4, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} a=-\frac{1}{2}, \\ c=4, \end{cases} \therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+4$.

(2)过 E 点作 $EG \parallel y$ 轴交 BC 于点 G .设 $E(t, -\frac{1}{2}t^2+t+4)$,则 $G(t, -t+4), \therefore EG=-\frac{1}{2}t^2+2t, \therefore S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{2}t^2+2t) \times 4=-t^2+4t=-(t-2)^2+4, \therefore$ 当 $t=2$ 时, $\triangle BCE$ 的面积有最大值4,此时 $E(2, 4)$.

(3)存在点 P ,使得以 P, Q, B, C 为顶点的四边形是平行四边形. $\because y=-\frac{1}{2}x^2+x+4=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{9}{2}, \therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$.设 $Q(1, m), P(n, -\frac{1}{2}n^2+n+4).$

①当 PQ 为平行四边形的对角线时, $1+n=4$,解得 $n=3, \therefore P(3, \frac{5}{2});$

②当 PB 为平行四边形的对角线时, $n=4+1=5, \therefore P(5, -\frac{7}{2});$

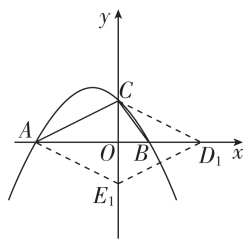
③当 PC 为平行四边形的对角线时, $4+n=1$,解得 $n=-3, \therefore P(-3, -\frac{7}{2}).$

综上所述, P 点坐标为 $(3, \frac{5}{2})$ 或 $(5, -\frac{7}{2})$ 或 $(-3, -\frac{7}{2}).$

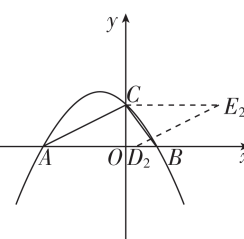
5.【解】(1) \because 抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 与 x 轴交于 $A(-4, 0)$ 和 $B(1, 0),$

$\therefore \begin{cases} 16a-4b+2=0, \\ a+b+2=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{2}, \\ b=-\frac{3}{2}, \end{cases} \therefore$ 该抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x+2$.

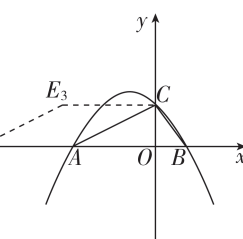
(2)存在点 E ,使以点 A, D, C, E 为顶点的四边形是菱形. \because 以点 A, D, C, E 为顶点的四边形是菱形, \therefore ①如图(1),当 AD_1 为对角线时,点 E_1 和点 C 关于原点对称.由(1)易得点 $C(0, 2), \therefore$ 点 $E_1(0, -2);$



图(1)

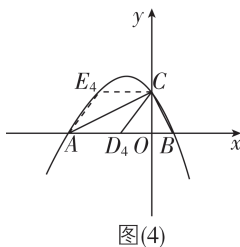


图(2)



图(3)

- ②如图(2),当 $AD_2=AC$,点 D_2 在点 A 右侧时, \therefore 点 $C(0,2)$, $CE_2=AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=2\sqrt{5}$, \therefore 点 $E_2(2\sqrt{5},2)$;
- ③如图(3),当 $AD_3=AC$,点 D_3 在点 A 左侧时, \therefore 点 $C(0,2)$, $CE_3=AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=2\sqrt{5}$, \therefore 点 $E_3(-2\sqrt{5},2)$;
- ④当 AC 为对角线时,如图(4)所示.
 设 $CE_4=AD_4=CD_4=x$,则 $OD_4=OA-AD_4=4-x$.
 $\therefore CD_4^2=OD_4^2+OC^2$, $\therefore x^2=(4-x)^2+2^2$,解得 $x=\frac{5}{2}$, $\therefore CE_4=\frac{5}{2}$, \therefore 点 $E_4(-\frac{5}{2},2)$.
- 综上,点 E 的坐标为 $E_1(0,-2)$, $E_2(2\sqrt{5},2)$, $E_3(-2\sqrt{5},2)$, $E_4(-\frac{5}{2},2)$.



卷④ 第三十章提优验收卷(B卷)

答案及评分细则

快速对答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	D	D	B	D	B	C	A	B	A

轻松评分数

13. 6 14. 1(答案不唯一) 15. (1)120 (2)96

16. $\frac{n}{a(n+1)}$

17. (1)将 $(-1,0)$ 代入 $y=-x^2+bx-3$, 可得 $-1-b-3=0$, $\therefore b=-4$. (2分)

(2)由(1)可知 $b=-4$, $\therefore y=-x^2-4x-3$,
 (3分)

$\therefore y=-x^2-4x-3=-(x^2+4x+4-1)=-(x+2)^2+1$, (5分)

\therefore 该抛物线的顶点坐标为 $(-2,1)$.

..... (6分)

(3)根据二次函数的性质可知,抛物线 $y=-x^2-4x-3$, 开口向下, 对称轴为直线 $x=-2$.

当 $x<-2$ 时, y 随 x 的增大而增大, 当 $x>-2$ 时, y 随 x 的增大而减小.

$\therefore 1>-1>-2$, $\therefore y_1<y_2$, 故答案为 $<$.

..... (8分)

18. 【解】(1) \therefore 抛物线 L 有最低点, \therefore 二次项的系数大于 0, (3分)

即 $m-2>0$, $\therefore m>2$ (4分)

(2) \therefore 抛物线 L 与抛物线 $y=x^2$ 的形状相同, 开口方向相反,

上分攻略 评分细则

规避失分点

15. 题中横线后已有单位, 故答案不需再写单位.

规避失分点

17. (2) 将一般式转化为顶点式时, 当二次项系数为负数时, 加括号后要注意变号.

找准关键点

18. (1) 根据抛物线 L 有最低点得到二次项的系数大于 0 是解题的关键.

\therefore 它们的二次项的系数互为相反数, 即 $m-2=-1$, $\therefore m=1$ (8分)

19. 【解】(1) \therefore 抛物线 C_1 的表达式为 $y=x^2-2x+1=(x-1)^2$, (1分)

\therefore 抛物线 C_1 的顶点坐标为 $(1,0)$,

..... (3分)

\therefore 平移后的抛物线的顶点坐标为 $(2,-2)$,

..... (4分)

\therefore 平移后的抛物线 C_2 的表达式为 $y=(x-2)^2-2$ (5分)

(2)点 $A(a,-3)$ 不在抛物线 C_2 上.

..... (6分)

理由: \therefore 抛物线 C_2 的开口向上, 函数有最小值 -2 , $A(a,-3)$, $-3<-2$, (7分)

\therefore 点 A 不在抛物线 C_2 上. (8分)

20. 【解】(1) $\therefore B(3,3)$, $BC=10$, $\therefore C(-7,3)$.
 (1分)

把 $C(-7,3)$ 代入 $y_2=a(x+3)^2-1$ 得 $3=a(-7+3)^2-1$, 解得 $a=\frac{1}{4}$ (3分)

(2)由(1)得 $a=\frac{1}{4}$, $\therefore y_2=\frac{1}{4}(x+3)^2-1$. 令 $y=3$, 得 $3=\frac{1}{4}(x+3)^2-1$, 解得 $x=1$ 或 -7 .

\therefore 点 A 在第一象限, $\therefore A(1,3)$ (4分)

$\therefore B(3,3)$, $\therefore h=\frac{1+3}{2}=2$, \therefore 抛物线 y_1 的对称轴是直线 $x=2$. \therefore 点 $(2,m)$, $(3,n)$ 及 $(4,p)$ 都在抛物线 y_1 上, 且抛物线 y_1 开口向上, $\therefore m<n<p$ (6分)

(3)由(2)得 $h=2$, $\therefore y_1=\frac{1}{2}(x-2)^2+k$. 把 $B(3,3)$ 代入 $y_1=\frac{1}{2}(x-2)^2+k$, 得 $k=\frac{5}{2}$, $\therefore y_1=\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{5}{2}$ (7分)

在 $y_1=\frac{1}{2}(x-2)^2+\frac{5}{2}$ 中, 令 $x=0$ 得 $y=\frac{9}{2}$, $\therefore P(0,\frac{9}{2})$ (8分)

规避失分点

19. (1) 求出顶点式后无需转化为一般式, 因为转化时容易出错, 导致扣分.

找准得分点

20. (2) 得到点 A 的坐标得 1 分.

找准得分点

20. (3) 得到“ $k=\frac{5}{2}$ ”得 1 分.

在 $y_2=\frac{1}{4}(x+3)^2-1$ 中, 令 $x=0$ 得 $y=\frac{5}{4}$, $\therefore Q(0,\frac{5}{4})$, $\therefore PQ=\frac{9}{2}-\frac{5}{4}=\frac{13}{4}$.

..... (9分)

21. 【解】(1) 依题意, 抛物线的顶点 B 的坐标为 $(5,4)$, 点 A 的坐标为 $(0,2)$ (2分)

设该抛物线的表达式为 $y=a(x-5)^2+4(a\neq 0)$ (3分)

\therefore 抛物线过点 $A(0,2)$, $\therefore a(0-5)^2+4=2$, 解得 $a=-\frac{2}{25}$, \therefore 该抛物线的表达式为

$y=-\frac{2}{25}(x-5)^2+4$ (5分)

(2) 令 $y=0$, 得 $-\frac{2}{25}(x-5)^2+4=0$, 解得 $x_1=5+5\sqrt{2}$, $x_2=5-5\sqrt{2}$ (点 C 在 x 轴正半轴上, 故舍去), (7分)

\therefore 点 C 的坐标为 $(5+5\sqrt{2},0)$, (8分)

$\therefore OC=5+5\sqrt{2}>10$, \therefore 小法此次试投的成绩能达到满分. (9分)

22. 【解】(1) $\therefore b=4$, $c=-1$, \therefore 二次函数表达式为 $y=x^2+4x-1$ (1分)

$\therefore y=x^2+4x-1=(x+2)^2-5$, \therefore 顶点 C 的坐标为 $(-2,-5)$ (2分)

令 $x^2+4x-1=0$, 则 $x=-2\pm\sqrt{5}$,
 \therefore 抛物线与 x 轴的交点 A, B 的坐标分别为 $(-2-\sqrt{5},0)$, $(-2+\sqrt{5},0)$ (3分)

(2)① \therefore 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 恰好经过 P, Q 两点, $P(-1,10)$, $Q(4,0)$,

$\therefore \begin{cases} 1-b+c=10, \\ 16+4b+c=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=-5, \\ c=4. \end{cases}$ (6分)

② $b\leq -11$ 或 $b\geq -\frac{7}{2}$ (9分)

\therefore 抛物线与线段 PQ 有公共点,
 \therefore 当 $x=-1$ 时, $y\geq 10$ 或当 $x=4$ 时, $y\geq 0$, $\therefore 1-b-2\geq 10$ 或 $16+4b-2\geq 0$, 解得 $b\leq -11$ 或 $b\geq -\frac{7}{2}$.

23. 【解】(1) 当 $10\leq x\leq 20$ 时, $y=200$,
 $\therefore W=(x-10)y=200(x-10)=200x-2\ 000$.

..... (2分)

找准得分点

21. (2) 由抛物线的对称性可以看出 $x=10$ 时, 实心球的高度正好是投掷时出手点的高度 2 m , 此时实心球没有落地, 那么点 C 的横坐标一定大于 10 , 这种快速解题的方法可以在选填中使用, 在解答题中则要写过程, 否则会扣分.

规避失分点

22. (2) ②这种直接写出答案的问题, 考试中不需要浪费时间写过程, 写错还会扣分.

答案及评分细则

当 $20 < x \leq 40$ 时, 设 y 与 x 的函数关系式为 $y = kx + b (k \neq 0)$.

\therefore 点 $(20, 200), (25, 180)$ 在该函数图像上,

$$\therefore \begin{cases} 20k + b = 200, \\ 25k + b = 180, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k = -4, \\ b = 280, \end{cases}$$

\therefore 当 $20 < x \leq 40$ 时, y 与 x 的函数关系式为 $y = -4x + 280$, $\therefore W = (x - 10)y = (x - 10) \cdot (-4x + 280) = -4x^2 + 320x - 2\,800$. \cdots (4分)

综上所述, W 与 x 之间的函数关系式为 $W = \begin{cases} 200x - 2\,000 (10 \leq x \leq 20), \\ -4x^2 + 320x - 2\,800 (20 < x \leq 40). \end{cases}$

\cdots (5分)

$$(2) \text{ 根据题意得 } \begin{cases} x \geq 15, \\ -4x + 280 \geq 140, \end{cases}$$

解得 $15 \leq x \leq 35$. \cdots (7分)

① 当 $15 \leq x \leq 20$ 时, $W = 200x - 2\,000$, \therefore 当 $x = 20$ 时, W 有最大值, 最大值为 $2\,000$.

\cdots (8分)

② 当 $20 < x \leq 35$ 时, $W = -4x^2 + 320x - 2\,800$, 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{320}{2 \times (-4)} = 40$, $-4 <$

0 , \therefore 当 $x \leq 40$ 时, W 随 x 的增大而增大,

\therefore 当 $x = 35$ 时, W 有最大值, 最大值为 $3\,500$.

\cdots (9分)

综上, W 的最大值为 $3\,500$. \cdots (10分)

24. 【解】 (1) $\because A(-1, 0), C(0, 2)$ 在抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 上,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{1}{2} - b + c = 0, \\ c = 2, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} b = \frac{3}{2}, \\ c = 2, \end{cases} \quad \cdots (2 \text{ 分})$$

\therefore 此抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$.

\cdots (3分)

(2) 令 $y = 0$, 有 $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$, 解得 $x_1 = -1, x_2 = 4$, $\therefore B(4, 0)$. \cdots (4分)

$\because C(0, 2)$, 设直线 BC 的表达式为 $y =$

$$kx + m (k \neq 0), \text{ 则 } \begin{cases} 4k + m = 0, \\ m = 2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{1}{2}, \\ m = 2, \end{cases}$$

上分攻略 评分细则

找准得分点

23. (1) 分段函数要写成答案中这种带大括号的形式, 且因为是分段函数, 因此一定要写出自变量在每一段的取值范围, 否则扣分.

找准关键点

24. (2) $A(-1, 0)$, A 点在 B 点左侧, 故 B 点横坐标为 4 .

\therefore 直线 BC 的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

\cdots (5分)

设 $E(x, -\frac{1}{2}x + 2)$, 则 $F(x, -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2)$,

$$\therefore EF = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2\right) - \left(-\frac{1}{2}x + 2\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2 (0 < x < 4).$$

\cdots (6分)

$\because a = -\frac{1}{2} < 0$, \therefore 当 $x = 2$ 时, 线段 EF 的值最大, 最大值为 2 , 此时 E 点的坐标为 $(2, 1)$.

\cdots (7分)

(3) 存在点 P , 使 $\triangle PCD$ 是以 CD 为腰的等腰三角形. \cdots (8分)

$$\because y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{8},$$

\therefore 对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$, $\therefore D\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

$$\because C(0, 2), D\left(\frac{3}{2}, 0\right), \therefore CD = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2^2} = \frac{5}{2}.$$

\cdots (9分)

设 $P\left(\frac{3}{2}, n\right)$, $\therefore CP = \sqrt{(n - 2)^2 + \frac{9}{4}}$, $DP = |n|$.

当 $CD = CP$ 时, $\frac{5}{2} = \sqrt{(n - 2)^2 + \frac{9}{4}}$, 解得 $n =$

4 或 $n = 0$ (舍去), $\therefore P\left(\frac{3}{2}, 4\right)$; \cdots (10分)

当 $CD = DP$ 时, $\frac{5}{2} = |n|$, 解得 $n = \frac{5}{2}$ 或 $n =$

$-\frac{5}{2}$, $\therefore P$ 点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

综上所述, 满足条件的 P 点坐标为 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$.

\cdots (11分)

规避失分点

24. (2) 此问有 2 个问题, 不要漏写 E 点的坐标, 否则扣分.

找准得分点

24. (3) 注意分类讨论, 点 P 的坐标有 3 个.

找准关键点

24. (3) 利用勾股定理求出 CD 的长是解题的关键.

上分技巧 | 二次函数的图像的对称性

只要二次函数的图像的对称轴确定, 此二次函数的图像上任意一点关于对称轴对称的点的坐标就能确定, 不需要知道此二次函数的表达式.

3. C 【解析】 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{2}{2 \times 1} = -1$. 当 $x = -1$ 时, $y = 1 - 2 + a = 7$, 解得 $a = 8$, 故选 C.

4. D 【解析】 $\because x = 1$ 时, $y = -3$; $x = 4$ 时, $y = -3$, \therefore 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为直线 $x = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$. $\because x = -2$ 时, $y = 0$, $\therefore x = 7$ 时, $y = 0$, \therefore 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解为 $x_1 = -2, x_2 = 7$. 故选 D.

5. D 【解析】 \because 一次函数 $y = ax + b$ 的图像经过第一、三、四象限, $\therefore a > 0, b < 0$, $\therefore -\frac{b}{2a} > 0$, \therefore 二次函数 $y = ax^2 + bx$ 的图像开口方向向上, 图像经过原点, 对称轴在 y 轴右侧. 故选 D.

6. B 【解析】 由图像可知, 抛物线开口向下, 对称轴为直线 $x = 1$, \therefore 当 $x \leq 1$ 时, y 随 x 的增大而增大. 又 \because 当 $-1 < x < m$ 时, y 随 x 的增大而增大, $\therefore -1 < m \leq 1$, 故选 B.

上分技巧 | 特殊值法

本题也可以用特殊值法, 在每个选项的范围内选取特殊值, 看是否符合题意.

7. D 【解析】 由题意可知, 抛物线与 x 轴的两个交点分别为 $(-1, 0)$ 和 $(4, 0)$, \therefore 二次函数图像的对称轴为直线 $x = \frac{-1+4}{2} = 1.5$, 故选 D.

8. B 【解析】 设 $A(x, y)$, 则 $B(x + 12, y), C(x + 16, y), D(x + 22, y)$, $\therefore M$ 的横坐标为 $\frac{x+x+16}{2} = x + 8$, N 的横坐标为 $\frac{x+12+x+22}{2} = x + 17$, $\therefore MN = (x + 17) - (x + 8) = 9$. 故选 B.

9. C 【解析】 $y = x^2 - (2 - m)x + m = x^2 - 2x + m(1 + x)$. \because 二次函数的图像总过一定点, 且该定点坐标与 m 的值无关, $\therefore 1 + x = 0$, 解得 $x = -1$, 此时 $y = 1 + 2 = 3$, \therefore 无论 m 为何实数, 该二次函数的图像总过的定点是 $(-1, 3)$. 故选 C.

10. A 【解析】 易知二次函数图像在一次函数图像上方, $\therefore x^2 - 2x + 3 - (x - 2) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}$, 当 $x = \frac{3}{2}$ 时, 该式的最小值为 $\frac{11}{4}$, \therefore 二次函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 与一次函数 $y = x - 2$ 的“向心值”为 $\frac{11}{4}$. 故选 A.

11. B 【解析】 ①由题图可知, 抛物线开口向下, 所以①错误; ②若当 $x = -2$ 时, y 取最大值, 则由于点 A 和点 C 到直线 $x = -2$ 的距离相等, 可知这两点的纵坐标应该相等, 但是题图中点 A 和点 C 纵坐标显然不相等, 所以②错误; ③当 $x = -2$ 时, $y = 4$, 而 B 点不是抛物线的顶点, 则当 $m < 4$

上分解析

1. B 【解析】 当 $a - b \neq 0$, 即 $a \neq b$ 时, $y = (a - b)x^2 + 1$ 是二次函数. 故选 B.

2. A 【解析】 \because 二次函数 $y = ax^2$ 的图像的对称轴为 y 轴, \therefore 若二次函数 $y = ax^2$ 的图像经过点 $P(-2, 4)$, 则该图像必经过点 $(2, 4)$. 故选 A.