9.【解】(1)将点(2,6)代入 $y=x^2-2ax+2a$ 得 $6=2^2-2a\times2+2a$，解得 $a=-1$.

(2)当 $a=1$ 时，$y=x^2-2x+2$.

①抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-2}{2}=1$.

∵ 抛物线开口向上，∴ 当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而减小. 故答案为 $x<1$.

②若 $0\leqslant x\leqslant4$，则当 $x=1$ 时，函数有最小值，最小值为 $1^2-2\times1+2=1$；

当 $x=4$ 时，函数有最大值，最大值为 $4^2-2\times4+2=10$. 故答案为 10，1.

10.【解】(1)由表格中数据可知，一次函数能比较恰当地表示 y 与 x 之间的关系.

设 $y=kx+b(k\neq0)$，则由题意得 $\begin{cases}51k+b=98,\\52k+b=96,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=200,\end{cases}$ 即 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-2x+200$.

(2)设该商场销售该产品每星期获得的利润为 w 元.

由题意得 $w=y(x-40)=(-2x+200)(x-40)=-2x^2+280x-8\ 000$，

当 $w=1\ 600$ 时，$-2x^2+280x-8\ 000=1\ 600$，解得 $x_1=60$，$x_2=80$.

答：当销售单价为 60 元/件或 80 元/件时，该商场销售该产品每星期获得的利润为 1 600 元.

(3)由(2)知 $w=-2x^2+280x-8\ 000=-2(x-70)^2+1\ 800$，∴ 当 $x=70$ 时，w 取得最大值，此时 $w=1\ 800$.

答：当销售单价为 70 元/件时，该商场销售该产品每星期获得的利润最大，最大利润为 1 800 元.

11.【解】(1) $B(3,0)$. ∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+3(a\neq0)$ 的对称轴是直线 $x=1$，∴ $-\dfrac{b}{2a}=1$，

∴ $b=-2a$. ①

关键点拨

(2)①利用二次函数的性质解题即可.

思路分析

(2)当 P,B,C 三点共线时，$PA+PC$ 的值最小，根据抛物线的对称性，得到 $PA+PC=PB+PC=BC$，求出直线 BC 的表达式，利用勾股定理求出 BC 的长，即为 $PA+PC$ 的最小值.

∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+3(a\neq0)$ 与 x 轴交于 A，B 两点，点 A 的坐标是 $(-1,0)$，∴ $a-b+3=0$. ②

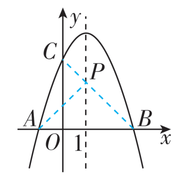
联立①②得 $\begin{cases}b=-2a,\\a-b+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}$

∴ 二次函数的表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

令 $y=0$ 得 $-x^2+2x+3=0$，解得 $x=3$ 或 $x=-1$，

∴ 点 B 的坐标为(3,0).

(2)如图(1)，连接 BC，线段 BC 与直线 $x=1$ 的交点就是符合题意的点 P. 连接 AP，



图(1)

∵ 点 A，B 关于直线 $x=1$ 对称，∴ $PA=PB$，∴ $PA+PC=PB+PC=BC$.

设直线 CB 的表达式为 $y=kx+b'$.

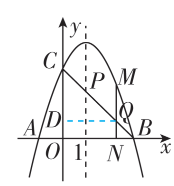
把 $C(0,3)$ 和 $B(3,0)$ 代入 $y=kx+b'$ 得 $\begin{cases}b'=3,\\0=3k+b',\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b'=3,\\k=-1,\end{cases}$

∴ 直线 CB 的表达式为 $y=-x+3$，∴ $P(1,2)$.

∵ $OB=OC=3$，∴ 在 Rt△BOC 中，$BC=3\sqrt{2}$，

∴ $PA+PC$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$.

(3)根据题意补全图形，如图(2)所示.



图(2)

由(1)得抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3$，

由(2)得 $y_{BC}=-x+3$，故设 $M(t,-t^2+2t+3)(0<t<3)$，则 $Q(t,-t+3)$，

∴ $MQ=-t^2+3t$.

如图(2)，过点 Q 作 $QD\perp OC$，垂足为 D，则△CDQ 是等腰直角三角形，∴ $CQ=\sqrt{2}t$，

∴ $MQ+\sqrt{2}CQ=-t^2+3t+2t=-t^2+5t=-\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$，

∴ 当 $t=\dfrac{5}{2}$ 时，$MQ+\sqrt{2}CQ$ 有最大值，此时点 M 的坐标为 $\left(\dfrac{5}{2},\dfrac{7}{4}\right)$.

第 6 章　图形的相似

6.1　图上距离与实际距离

刷基础

1. 1∶7 500　【解析】由题意得，比例尺 $=240:1\ 800\ 000=1:7\ 500$. 故答案为 1∶7 500.

2. 15.6　【解析】$1.56\div\dfrac{1}{1\ 000\ 000}=1.56\times1\ 000\ 000=1\ 560\ 000$(厘米) $=15.6$(千米). 故答案为 15.6.

3. B 【解析】

A	由于 $2:3\neq4:5$,即 2 cm,3 cm,4 cm,5 cm 不成比例,所以 A 选项不符合题意
B	由于 $2:3=4:6$,即 2 cm,3 cm,4 cm,6 cm 成比例,所以 B 选项符合题意
C	由于 $1:2\neq2:3$,即 1 cm,2 cm,3 cm,2 cm 不成比例,所以 C 选项不符合题意
D	由于 $3:2\neq6:3$,即 3 cm,2 cm,6 cm,3 cm 不成比例,所以 D 选项不符合题意

4. 16 或 9 或 1 【解析】设这条线段为 x. 由题意得,当 $3x=4\times12$ 时,解得 $x=16$;当 $4x=3\times12$ 时,解得 $x=9$;当 $12x=3\times4$ 时,解得 $x=1$. 故答案为 16 或 9 或 1.

5. 4 【解析】$\because$ 线段 $a=2,c=8$,线段 b 是线段 a,c 的比例中项,$\therefore b^2=ac=2\times8=16$,$\therefore b_1=4$,$b_2=-4$(舍去). 故答案为 4.

6. ±6 【解析】$\because b$ 是 9 和 4 的比例中项,$\therefore b^2=36$,$\therefore b_1=6,b_2=-6$,$\therefore b=\pm6$. 故答案为±6.

7. A 【解析】

A	由$\frac{x+y}{x}=\frac{5}{2}$得 $3x=2y$,故此选项比例式不成立,符合题意
B	由$\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$得 $2x=3y$,故此选项比例式成立,不符合题意
C	由$\frac{x-y}{x+y}=\frac{1}{5}$得 $2x=3y$,故此选项比例式成立,不符合题意
D	由 $y=\frac{2}{3}x$ 得 $2x=3y$,故此选项比例式成立,不符合题意

8. 2 或−1 【解析】分两种情况:①当 $a+b+c=0$ 时,$b+c=-a$,$\therefore k=\frac{b+c}{a}=-\frac{a}{a}=-1$;②当 $a+b+c\neq0$ 时,$\because\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=k$,$\therefore ak=b+c$,① $bk=a+c$,② $ck=a+b$,③ ①+②+③,得 $(a+b+c)k=2(a+b+c)$,故 $k=2$. 综上,$k=2$ 或−1.

9. 30 厘米,45 厘米 【解析】设△ABC 和△DEF 的周长分别是 x 厘米和 y 厘米. $\because\frac{AB}{DE}=\frac{BC}{EF}=\frac{CA}{FD}=\frac{2}{3}$,$\therefore\frac{AB+BC+CA}{DE+EF+FD}=\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$,① 由题意可得 $y-x=15$,② 由①得 $x=\frac{2}{3}y$. ③ 将③代入②,得 $y-\frac{2}{3}y=15$,$\therefore y=45$. 将 $y=45$ 代入②,得 $x=30$. 故△ABC 和△DEF 的周长分别是 30 厘米和 45 厘米.

刷有所得

对于四条线段 a,b,c,d,如果其中两条线段的比(即它们的长度比)与另两条线段的比相等,如 $a:b=c:d$(即 $ad=bc$),我们就说这四条线段是成比例线段.

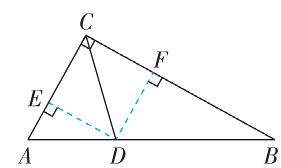
10.【解】(1)设$\frac{a}{3}=\frac{b}{4}=\frac{c}{5}=k(k\neq0)$,则 $a=3k$,$b=4k,c=5k$,

$\therefore\frac{3a-b+c}{a+3b-c}=\frac{3\times3k-4k+5k}{3k+3\times4k-5k}=\frac{10k}{10k}=1$,

$\therefore$ 代数式$\frac{3a-b+c}{a+3b-c}$的值为 1.

(2)由(1)得 $3k-4k+5k=24$,解得 $k=6$,则 $a=3k=3\times6=18$,$\therefore a$ 的值为 18.

11.【解】如图,过点 D 作 $DE\perp AC$ 于点 E,$DF\perp BC$ 于点 F.



在 Rt△ABC 中,由勾股定理得 $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+15^2}=17$.

又$\because CD$ 是$\angle ACB$ 的平分线,$\therefore DE=DF$,

$\therefore\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{\frac{1}{2}\times AC\times DE}{\frac{1}{2}\times BC\times DF}=\frac{AC}{BC}$.

易得$\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{AD}{BD}$,$\therefore\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$,即$\frac{8}{15}=\frac{AD}{17-AD}$,

$\therefore 8(17-AD)=15AD$,解得 $AD=\frac{136}{23}$.

刷易错

易错警示

若给出的线段长度单位不同,则必须化为同一长度单位后再求线段的比,求出的比值是没有单位的.

12. 1∶250 000 【解析】$\because$ 5 千米 = 500 000 厘米,$\therefore$ 地图上的距离与实际距离的比为 2∶500 000 = 1∶250 000.

6.2 黄金分割

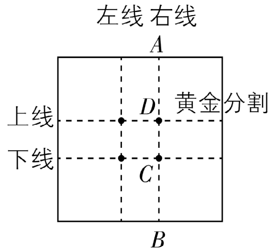
刷基础

1. C 【解析】$\because$ 点 C 是线段 AB 的黄金分割点,且 $AC>BC$,$\therefore\frac{AC}{AB}=\frac{BC}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$,$\therefore AC^2=BC\cdot AB$,故选项 A、B、D 正确,不符合题意;选项 C 错误,符合题意. 故选 C.

2. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 【解析】$\because$ 点 B 把线段 AC 分成两部分,$\frac{BC}{AB}=\frac{AB}{AC}=k$,$\therefore$ 点 B 是线段 AC 的黄金分割点,$AB>BC$,$\therefore k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故答案为$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

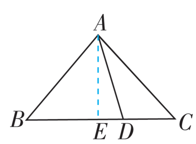
3. C 【解析】如图,C,D 是线段 AB 的两个黄金分割点. $\because$ 线段 AB 的长为 2 cm,$\therefore AC=BD=$

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB=(\sqrt{5}-1)$ cm，∴ $CD=BD-BC=BD-(AB-AC)=BD-(AB-BD)=2BD-AB=2(\sqrt{5}-1)-2=(2\sqrt{5}-4)$ cm，∴ 以四个黄金分割点为顶点的正方形的边长为 $(2\sqrt{5}-4)$ cm. 故选 C.



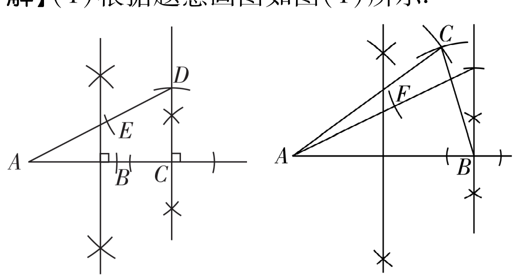
4. $(\sqrt{5}-1)$　【解析】设 $BE=x$ 米. ∵ $AB=2$ 米，∴ $AE=(2-x)$ 米. ∵ $BE^2=AE\cdot AB$，∴ $x^2=2(2-x)$，即 $x^2+2x-4=0$，解得 $x_1=\sqrt{5}-1$，$x_2=-\sqrt{5}-1$（舍去），∴ 线段 BE 的长为 $(\sqrt{5}-1)$ 米. 故答案为 $(\sqrt{5}-1)$.

5. $5-\sqrt{5}$　【解析】过点 A 作 $AE\perp BC$ 于点 E，如图所示.



∵ $AB=AC$，∴ $BE=CE=\frac{1}{2}BC=2$，∴ $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，∴ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}BC\times AE=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$. ∵ D 是 BC 边上的黄金分割点，$BD>CD$，∴ $\frac{BD}{BC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. ∵ $\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}BD\times AE}{\frac{1}{2}BC\times AE}=\frac{BD}{BC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，∴ $\triangle ABD$ 的面积为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\times2\sqrt{5}=5-\sqrt{5}$.

6.【解】(1) 根据题意画图如图(1)所示.



图(1)　　图(2)

(2) 是. 理由如下：

设 $AC=a$，则 $CD=\frac{1}{2}a$，

∴ $DE=DC=\frac{1}{2}a$.

易错警示

一条线段的黄金分割点有两个. 如果没有说明哪条线段较长，要分两种情况讨论. 本题分 $AC>BC$ 与 $AC<BC$ 两种情况讨论，利用黄金比分别列式求解，即可求出线段 AC 的长.

思路分析

(1) 根据几何语言按步骤作图；

(2) 设 $AC=a$，则 $DE=DC=\frac{1}{2}a$. 利用勾股定理得到 $AD=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，再得到 $AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$，利用黄金分割点的定义可判断点 B 是线段 AC 的黄金分割点；

(3) 按 (1) 中作点 E 的方法作点 F，以 B 为圆心，AF 长为半径画弧，以 A 为圆心，AB 长为半径画弧，交点为 C，连接 AC，BC，则 $\triangle ABC$ 即为所求.

∵ $AD=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$，

∴ $AE=AD-DE=\frac{\sqrt{5}}{2}a-\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$，

∴ $AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$，即 $AB=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AC$，

∴ 点 B 是线段 AC 的黄金分割点.

(3) 按 (1) 中作点 E 的方法作点 F，以 B 为圆心，AF 长为半径画弧，以 A 为圆心，AB 长为半径画弧，交点为 C，连接 AC，BC，则 $\triangle ABC$ 即为所求，如图(2).

刷易错

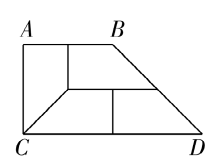
7. $3+\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{5}+1$　【解析】分两种情况讨论：①当 $AC>BC$ 时，$BC=AC-2$，∴ $\frac{BC}{AC}=\frac{AC-2}{AC}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，∴ $AC=\frac{4}{3-\sqrt{5}}=3+\sqrt{5}$；②当 $AC<BC$ 时，$BC=AC+2$，∴ $\frac{AC}{BC}=\frac{AC}{AC+2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，∴ $AC=\sqrt{5}+1$. 综上可知，线段 AC 的长为 $3+\sqrt{5}$ 或 $\sqrt{5}+1$.

6.3　相似图形

刷基础

1. B　【解析】两个腰长相等的等腰梯形、两个周长相等的三角形、两个面积相等的矩形都属于形状不唯一确定的图形，故 A、C、D 错误；圆的形状唯一确定，则两个半径不等的半圆相似，故 B 正确. 故选 B.

2.【解】如图：



3. C　【解析】A 选项，两个直角三角形的对应角不一定相等，对应边不一定成比例，不符合相似的定义，不符合题意；B 选项，两个等腰三角形的对应角不一定相等，对应边不一定成比例，不符合相似的定义，不符合题意；C 选项，两个等边三角形的对应角一定相等，对应边一定成比例，符合相似的定义，符合题意；D 选项，两个菱形的对应边成比例，对应角不一定相等，不符合相似的定义，不符合题意.

4. B　【解析】∵ 四边形 $ABCD$∽四边形 $A'B'C'D'$，∴ $AB:A'B'=BC:B'C'$. ∵ $AB:A'B'=3:5$，$B'C'=15$，∴ $BC=9$. 故选 B.

5.【解】(1) ∵ 四边形 $ABCD$∽四边形 $A'B'C'D'$，∴ $\angle C=\angle C'$，$\angle D=\angle D'=140°$. 又∵ $\angle A=62°$，$\angle B=75°$，∴ $\angle C=360°-\angle A-\angle B-\angle D=$

$360°-62°-75°-140°=83°$，∴ $\angle C'=83°$，即 $\alpha=83°$. 故答案为 83°.

(2)∵ 四边形 $ABCD$∽四边形 $A'B'C'D'$，

∴ $\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AD}{A'D'}$，即 $\dfrac{x}{8}=\dfrac{y}{11}=\dfrac{9}{6}$，解得 $x=12$，$y=\dfrac{33}{2}$，∴ 边 BC，AB 的长度分别为 12，$\dfrac{33}{2}$.

6. (1) 8 (2) 60° 【解析】(1)∵ $\triangle ABO$∽$\triangle CDO$，∴ $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{BO}{DO}$. ∵ $BO=10$，$DO=5$，$CD=4$，∴ $\dfrac{AB}{4}=\dfrac{10}{5}$，解得 $AB=8$. 故答案为 8.

(2)∵ $\triangle ABC$∽$\triangle DAC$，∴ $\angle B=\angle DAC$. ∵ $\angle B=50°$，$\angle C=20°$，∴ $\angle DAC=50°$，∴ $\angle BAD=180°-\angle B-\angle DAC-\angle C=180°-50°-50°-20°=60°$. 故答案为 60°.

7. 2∶1 【解析】设每个小正方形的边长为 1，则 $AE=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$A'E'=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. ∵ 五边形 $ABCDE$∽五边形 $A'B'C'D'E'$，∴ 五边形 $ABCDE$ 与五边形 $A'B'C'D'E'$ 的相似比为 $AE:A'E'=2\sqrt{2}:\sqrt{2}=2:1$，故答案为 2∶1.

8.【解】相似. 理由：∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 相似，相似具有传递性，∴ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 相似.

∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 的相似比为 $k_1=\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{6}$，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 的相似比为 $k_2=\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{8}$，∴ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 的相似比是 $\dfrac{3}{8}$.

思路分析

由四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 相似，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 相似，可得四边形 $ABCD$ 与四边形 $A_2B_2C_2D_2$ 相似，再结合 k_1，k_2 的值求解.

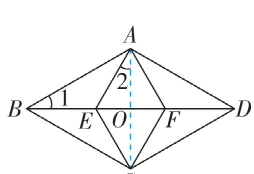
刷提升

1. A 【解析】设 5 个正方形中小正方形的边长为 a，大正方形的边长为 b，则 $AG=b$，$BG=b+a$，$BE=2b-a$，$CE=2b$，∴ $AB=2b+a$，$BC=2b+2b-a=4b-a=AD$. ∵ 矩形 $BEFG$∽矩形 $ABCD$，∴ $\dfrac{BG}{AD}=\dfrac{BE}{AB}$，即 $\dfrac{b+a}{4b-a}=\dfrac{2b-a}{2b+a}$，∴ $b=\dfrac{3}{2}a$，∴ $BG=b+a=\dfrac{5}{2}a$，$AD=4b-a=5a$，∴ $\dfrac{BG}{AD}=\dfrac{\frac{5}{2}a}{5a}=\dfrac{1}{2}$. 故选 A.

思路分析

设小正方形的边长为 a，大正方形的边长为 b，表示出 AG，BG，BE，CE，AB，AD，利用相似的性质得到 $\dfrac{BG}{AD}=\dfrac{BE}{AB}$，推得 $b=\dfrac{3}{2}a$，进而可求出 $\dfrac{BG}{AD}$ 的值.

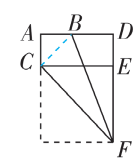
2. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$ 【解析】连接 AC 交 BD 于 O，如图. ∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，



$\angle ABC=60°$，$AB=a$，∴ $\angle 1=\dfrac{1}{2}\times60°=30°$，$BD\perp AC$，∴ $AO=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{a}{2}$. ∵ 菱形 $AECF$ 与菱形 $ABCD$ 相似，∴ $\angle EAF=\angle ABC=60°$，∴ $\angle 2=\dfrac{1}{2}\times60°=30°$，∴ $EO=\dfrac{1}{2}AE$. 根据勾股定理可得 $AO^2+EO^2=AE^2$，即 $\left(\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{AE}{2}\right)^2=AE^2$，解得 $AE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. 故答案为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

3. $\dfrac{40}{9}$ 或 5 【解析】设 $BF=x$，∴ $BF=B'F=x$，$FC=BC-BF=10-x$. 当 $\triangle CFB'$∽$\triangle CBA$ 时，$\dfrac{CF}{CB}=\dfrac{FB'}{BA}$，即 $\dfrac{10-x}{10}=\dfrac{x}{8}$，解得 $x=\dfrac{40}{9}$；当 $\triangle CFB'$∽$\triangle CAB$ 时，$\dfrac{CF}{CA}=\dfrac{FB'}{AB}$，即 $\dfrac{10-x}{8}=\dfrac{x}{8}$，解得 $x=5$. 综上所述，当 $BF=\dfrac{40}{9}$ 或 5 时，以点 B'，F，C 为顶点的三角形与 $\triangle ABC$ 相似. 故答案为 $\dfrac{40}{9}$ 或 5.

4.【解】(1) 如图，FC 与 BF 分别为第一次与第二次折叠的折痕，连接 BC. 设 $AB=x$.



由翻折的性质可知 $\angle ECF=45°$，$\triangle BCF\cong\triangle BDF$，∴ $\angle BCF=\angle BDF=90°$.

∵ $\angle ACB+\angle ECB=\angle BCE+\angle ECF=90°$，

∴ $\angle ACB=\angle ECF=45°$，

∴ $BC=\sqrt{2}x$，∴ $BD=BC=\sqrt{2}x$，∴ $AD=AB+BD=(\sqrt{2}+1)x$，∴ $EF=CE=AD=(\sqrt{2}+1)x$.

∵ $DE=AC=AB=x$，∴ $DF=DE+EF=(\sqrt{2}+2)x$，

∴ $\dfrac{DF}{AD}=\dfrac{(\sqrt{2}+2)x}{(\sqrt{2}+1)x}=\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}$，故答案为 $\sqrt{2}$.

(2) A4 纸与 A5 纸是相似图形. 理由：

由题意可知 A5 纸的长边为 A4 纸的短边，

∴ 由(1)可得 A5 纸的长边长为 $(\sqrt{2}+1)x$，A5 纸的短边长为 $\dfrac{\sqrt{2}+2}{2}x$，∴ 对于 A5 纸，$\dfrac{长边}{短边}=\dfrac{(\sqrt{2}+1)x}{\frac{\sqrt{2}+2}{2}x}=\sqrt{2}$.

又∵ 对于 A4 纸，$\dfrac{长边}{短边}=\sqrt{2}$，且 A4 纸、A5 纸均为矩形，∴ A4 纸与 A5 纸相似.

刷素养

5. (1)A (2)①相似比 ②相似比的平方 ③相似比的立方 【解析】(1)选项 A,两个球体的形状完全相同,是相似体;选项 B,对于两个圆锥,如果底面半径或高发生变化,它们的形状就会改变,不是相似体;选项 C,对于两个圆柱,如果底面半径或高发生变化,它们的形状就会改变,不是相似体;选项 D,对于两个长方体,如果长、宽、高中有一个发生变化,它们的形状就会改变,不是相似体. 故选 A.
(2)①相似体的一切对应线段(或弧)长的比等于相似比;②相似体表面积的比等于相似比的平方;③相似体体积的比等于相似比的立方. 故答案为①相似比,②相似比的平方,③相似比的立方.

6.4 探索三角形相似的条件

课时 1 平行线分线段成比例

刷基础

1. A 【解析】∵ $AB//CD//EF$, ∴ $\frac{AD}{DF}=\frac{BC}{CE}$, ∴ A 选项正确. 故选 A.

2. B 【解析】∵ $l_1//l_2//l_3$, ∴ $\frac{CF}{CD}=\frac{AE}{AB}=\frac{AE}{AE+EB}=\frac{2}{2+4}=\frac{1}{3}$. 故选 B.

3. D 【解析】∵ $A_1O=3$, $OB_1=B_1C_1=2$, $C_1D_1=4$, $AA_1//BB_1//CC_1//DD_1$, ∴ $\frac{AO}{OB}=\frac{A_1O}{OB_1}=\frac{3}{2}$, $\frac{OB}{BC}=\frac{OB_1}{B_1C_1}=1$, $\frac{BC}{CD}=\frac{B_1C_1}{C_1D_1}=\frac{1}{2}$, ∴ $AO=\frac{3}{2}OB$, $BC=OB$, $CD=2BC=2OB$, ∴ $AB=OA+OB=\frac{5}{2}OB$, $OC=OB+BC=2OB$, $BD=BC+CD=3OB$, ∴ $BD-AB=3OB-\frac{5}{2}OB=\frac{1}{2}OB$, $OC-OA=2OB-\frac{3}{2}OB=\frac{1}{2}OB$, $OC-CD=2OB-2OB=0$, $CD-OB=2OB-OB=OB$. ∵ $OB>\frac{1}{2}OB>0$, ∴ $CD-OB$ 的结果最大. 故选 D.

4. 10 【解析】∵ $AE=3$, $EB=2$, ∴ $AB=5$. ∵ $EG//BC$, $GF//DC$, ∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{AG}{AC}$, $\frac{AG}{AC}=\frac{AF}{AD}$, ∴ $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AD}$, ∴ $\frac{3}{5}=\frac{6}{AD}$, ∴ $AD=10$. 故答案为 10.

> **刷有所得** 根据平行线分线段成比例的基本事实求线段的长时,一般先根据已知线段和待求线段列出比例式,然后代入已知条件中的数据,最后根据比例的性质计算.

5. C 【解析】∵ $AB//CD$, $AE//DF$, ∴ $\triangle BFH\backsim\triangle BAG$, $\triangle BAG\backsim\triangle CEG$, $\triangle BFH\backsim\triangle CDH$, $\triangle CEG\backsim\triangle CDH$, ∴ $\triangle BFH\backsim\triangle CEG$, $\triangle CDH\backsim\triangle BAG$, ∴ 相似三角形共有 6 对. 故选 C.

> **刷有所得** 利用平行线寻找相似三角形的方法:若有两直线平行的条件,则在图形中寻找符合“A”型或“X”型的基本图形,这是解此类题的主要方法.

6. 8 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, ∴ $AD // BC$, $AD=BC$, ∴ $\triangle AEF\backsim\triangle CBF$, ∴ $\frac{AE}{BC}=\frac{AF}{CF}$. ∵ $AE:AD=AE:BC=2:3$, ∴ $\frac{AF}{CF}=\frac{2}{3}$, ∴ $\frac{AF}{AC}=\frac{2}{5}$. 又∵ $AC=20$, ∴ $AF=8$.

7. $\frac{9}{2}$ 【解析】∵ $DE//AC$, ∴ $\triangle BED\backsim\triangle BCA$, ∴ $\frac{BD}{BA}=\frac{DE}{AC}$. ∵ $DB=4$, $DA=2$, $DE=3$, ∴ $\frac{4}{4+2}=\frac{3}{AC}$, ∴ $AC=\frac{9}{2}$. 故答案为 $\frac{9}{2}$.

刷易错

8. $\frac{3}{5}$ 【解析】∵ $AB//CD//EF$, ∴ $\frac{BC}{CE}=\frac{AD}{DF}$. ∵ $AD=AG+GD=3$, $DF=5$, ∴ $\frac{BC}{CE}=\frac{3}{5}$.

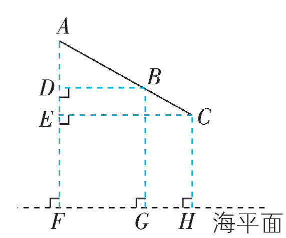
> **易错警示** 易受题中图形影响,主观认为不对应的一些边成比例而出错.

刷提升

1. B 【解析】∵ $AC//EF$, ∴ $\triangle BEF\backsim\triangle BAC$, ∴ $\frac{EF}{AC}=\frac{BF}{BC}$, ∴ $\frac{r}{p}=\frac{BF}{BC}$. ∵ $EF//DB$, ∴ $\triangle CEF\backsim\triangle CDB$, ∴ $\frac{EF}{DB}=\frac{CF}{CB}$, ∴ $\frac{r}{q}=\frac{CF}{BC}$, ∴ $\frac{EF}{AC}+\frac{EF}{DB}=\frac{BF}{BC}+\frac{CF}{CB}=\frac{BF+CF}{BC}=\frac{BC}{BC}=1$, 即 $\frac{r}{p}+\frac{r}{q}=1$. ∵ $\frac{r}{p}=\frac{BF}{BC}$, $\frac{r}{q}=\frac{CF}{BC}$, ∴ $BC\cdot r=BF\cdot p=CF\cdot q$, ∴ $\frac{p}{q}=\frac{CF}{BF}$. 故选 B.

> **刷有所得** 平行于三角形一边的直线与其他两边相交,所截得的三角形与原三角形相似.

2. B 【解析】经过 AC 且垂直于海平面的平面截面图如图,其中 AF, BG, CH 垂直于海平面, BD 垂直 AF 于点 D, CE 垂直 AF 于点 E,则 $BD//CE$, $AF=500$, $BG=300$, $CH=200$, ∴ $DF=BG=300$, $EF=CH=200$, ∴ $AD=AF-DF=500-300=200$, $AE=AF-EF=500-200=300$. ∵ $BD//CE$, ∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}=\frac{200}{300}=\frac{2}{3}$. 故选 B.

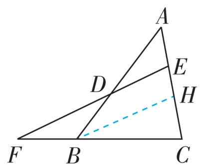


3. $\frac{1}{3}$

> **添加辅助线** 添加适当的辅助线构造平行线分线段成比例模型,本题中已知 $\frac{AD}{DB}$ 和 $\frac{AE}{EC}$ 的值,则需过 B 点作 EF 的平行线 BH,再列比例式求解.

【解析】如图,过点 B 作 $BH//EF$ 交 AC 于 H,

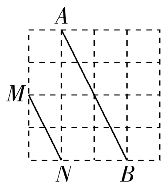
则$\frac{AE}{EH}=\frac{AD}{DB}=\frac{3}{2}$. ∵ $\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}$,



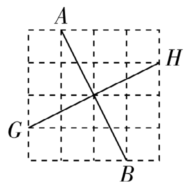
∴ $\frac{EH}{EC}=\frac{1}{3}$. ∵ $BH// EF$,

∴ $\frac{FB}{FC}=\frac{EH}{EC}=\frac{1}{3}$. 故答案为$\frac{1}{3}$.

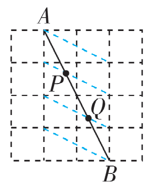
4.【解】(1)如图(1),线段 MN 为所求作的线段.(答案不唯一)



图(1)



图(2)



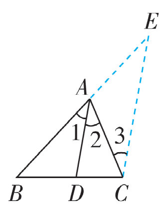
图(3)

(2)如图(2),线段 GH 为所求作的线段.(答案不唯一)

(3)如图(3),点 P,Q 为所求作的点.

刷素养

5.(1)【证明】如图,过点 C 作 $CE// DA$,交 BA 的延长线于点 E.



∵ $CE// DA$,∴ $\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{AE}$,$\angle 2=\angle 3$,$\angle 1=\angle E$.

∵ AD 平分$\angle BAC$,∴ $\angle 1=\angle 2$,∴ $\angle 3=\angle E$,

∴ $AE=AC$,∴ $\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}$.

(2)【解】①∵ AD 是角平分线,∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}$.

∵ $AB=5$ cm,$AC=4$ cm,$BC=7$ cm,∴ $\frac{5}{4}=\frac{BD}{7-BD}$,∴ $BD=\frac{35}{9}$ cm.

②∵ AD 是角平分线,∴ $\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD}=\frac{7}{11}$,∴ $CD=\frac{11}{7}BD$,∴ $BC=CD+BD=\frac{11}{7}BD+BD=\frac{18}{7}BD$.

∵ M 是 BC 的中点,∴ $CM=MB=\frac{9}{7}BD$.

∵ $FM// AD$,∴ $\frac{CF}{AC}=\frac{CM}{CD}=\frac{\frac{9}{7}BD}{\frac{11}{7}BD}=\frac{9}{11}$,∴ $CF=\frac{9}{11}AC=9$. 故答案为 9.

课时 2　两角分别相等的两个三角形相似

刷基础

1. C 【解析】36°的角在两个等腰三角形中,一个是顶角,一个是底角时,两个等腰三角形不相似,A 选项为假命题;45°的角在两个等腰三角形中,一个是顶角,一个是底角时,两个等腰三角形不相似,B 选项为假命题;有一个角是 60°的等腰三角形为等边三角形,所以有一个角是 60°的两个等腰三角形相似,C 选项为真命题;有一个角是钝角,且钝角的度数相等的两个等腰三角形相似,D 选项为假命题. 故选 C.

思路分析 先根据$\angle 1=\angle 2=\angle 3$以及公共角$\angle C$,得$\triangle ACE\backsim\triangle ECD$,$\triangle BCA\backsim\triangle ECD$,$\triangle ACE\backsim\triangle BCA$. 因为$\angle 2=\angle 3$,所以$DE// AB$,所以$\angle DEA=\angle BAE$,则$\triangle DEA\backsim\triangle EAB$.

2. C 【解析】∵ $\angle 1=\angle 2=\angle 3$,$\angle C=\angle C$,∴ $\triangle ACE\backsim\triangle ECD$,$\triangle BCA\backsim\triangle ECD$,$\triangle ACE\backsim\triangle BCA$. ∵ $\angle 2=\angle 3$,∴ $DE// AB$,∴ $\angle DEA=\angle BAE$,∴ $\triangle DEA\backsim\triangle EAB$. 综上,共有 4 对,故选 C.

3. A 【解析】A 选项,不一定存在相似三角形,故本选项符合题意. B 选项,∵ $\angle BCA=\angle AED=90°$,$\angle CAF=\angle DAE$,∴ $\triangle ACF\backsim\triangle AED$,故本选项不符合题意. C 选项,设 CB 与 AE 交于点 O. ∵ $\angle ACO=\angle FEO=90°$,$\angle AOC=\angle FOE$,∴ $\triangle ACO\backsim\triangle FEO$,故本选项不符合题意. D 选项,∵ $AD=AB$,$\angle B=30°$,$\angle D=45°$,∴ $AC=\frac{1}{2}AB$,$AE=\frac{\sqrt{2}}{2}AD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB$,∴ $CE=\sqrt{AE^2-AC^2}=\frac{1}{2}AB$,∴ $AC=EC$,∴ $\angle CAE=45°=\angle EAD$. 又∵ $\angle C=\angle AED=90°$,∴ $\triangle ACE\backsim\triangle AED$,故本选项不符合题意. 故选 A.

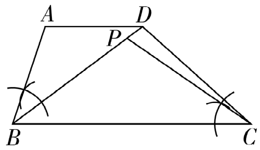
4. C 【解析】∵ $\angle A=\angle A$,$\angle AEC=\angle ADB=90°$,∴ $\triangle AEC\backsim\triangle ADB$,∴ $\angle ACE=\angle ABD$. 又∵ $\angle AEC=\angle BEC=90°$,∴ $\triangle AEC\backsim\triangle FEB$. ∵ $\angle ACE=\angle ACE$,$\angle AEC=\angle FDC=90°$,∴ $\triangle AEC\backsim\triangle FDC$,∴ 图中与$\triangle AEC$一定相似的三角形有 3 个. 故选 C.

关键点拨 再添加一组角相等可以利用有两组角对应相等的两个三角形相似来进行判定.

5. $\angle B=\angle D$(答案不唯一) 【解析】添加条件$\angle B=\angle D$. 理由如下:∵ $\angle BAC=\angle DAE$,$\angle B=\angle D$,∴ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$,故答案为$\angle B=\angle D$(答案不唯一).

6. $\frac{9}{5}$ 【解析】∵ CD 是斜边 AB 上的高,$\angle ACB=90°$,∴ $\angle ACB=\angle ADC=90°$. 又∵ $\angle BAC=\angle CAD$,∴ $\triangle ADC\backsim\triangle ACB$,∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$. ∵ $\angle ACB=90°$,$AC=3$,$BC=4$,∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=5$,∴ $AD=\frac{AC^2}{AB}=\frac{3^2}{5}=\frac{9}{5}$.

7.【解】如图所示.



8.【证明】(1) ∵ $AB/\!/CD$, $BF/\!/AD$, ∴ $\angle BAF=\angle ACD$, $\angle AFB=\angle CAD$, ∴ $\triangle ABF\backsim\triangle CDA$.

(2) ∵ $\triangle ABF\backsim\triangle CDA$, ∴ $\frac{AF}{CA}=\frac{BF}{DA}$.

∵ $\angle AFB=\angle CAD$, 且 $\angle BEF=\angle AED$,

∴ $\triangle BEF\backsim\triangle DEA$,

∴ $\frac{BF}{DA}=\frac{EF}{EA}$, ∴ $\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{AE}$.

刷易错

9.【解】∵ $\angle A=\angle A'=45^\circ$, $\angle B=26^\circ$, $\angle B'=109^\circ$, ∴ $\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-45^\circ-26^\circ=109^\circ$. ∵ $\angle B'=109^\circ$, ∴ $\angle C=\angle B'$. 又∵ $\angle A=\angle A'$, ∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A'C'B'$.

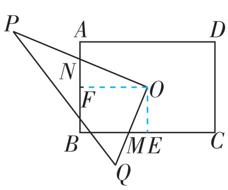
易错警示

易受思维定式的干扰，误认为点 B 的对应点就是点 B'，而 $\angle B\neq\angle B'$，错误地判断两三角形不相似.

刷提升

1. B　【解析】∵四边形 $ABCD$ 为矩形, $AF\perp BE$, ∴ $\angle ABC=\angle C=\angle AFB=\angle BFG=90^\circ$. 又∵ $\angle BAF=\angle BAG$, $\angle FBG=\angle CBE$, ∴ $\triangle AFB\backsim\triangle ABG$, $\triangle BFG\backsim\triangle BCE$. ∵ $\angle BAF+\angle ABF=90^\circ=\angle GBF+\angle ABF$, ∴ $\angle BAF=\angle GBF$, ∴ $\triangle AFB\backsim\triangle BFG$, ∴ $\triangle AFB\backsim\triangle ABG\backsim\triangle BFG\backsim\triangle BCE$. 综上, $\triangle AFB\backsim\triangle ABG$, $\triangle AFB\backsim\triangle BFG$, $\triangle AFB\backsim\triangle BCE$, $\triangle ABG\backsim\triangle BFG$, $\triangle ABG\backsim\triangle BCE$, $\triangle BFG\backsim\triangle BCE$, ∴有 6 对相似三角形. 故选 B.

2. C　【解析】如图，过点 O 分别作 $OF\perp AB$ 于 F, $OE\perp BC$ 于 E. ∵ $\angle POQ=\angle EOF=90^\circ$, ∴ $\angle NOF=\angle MOE$. ∵ $\angle NFO=\angle MEO=90^\circ$, ∴ $\triangle NOF\backsim\triangle MOE$, ∴ $\frac{NF}{OF}=\frac{ME}{OE}$. ∵ $AB=4$, $AD=6$, $BM=x$, $AN=y$, ∴ $NF=|2-y|$, $ME=|3-x|$, $OF=3$, $OE=2$, ∴ $\frac{|2-y|}{3}=\frac{|3-x|}{2}$. ∵易知 $(2-y)(3-x)\geqslant0$, ∴ $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$. ∵ $0\leqslant y\leqslant4$, ∴ $0\leqslant\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}\leqslant4$, ∴ $\frac{5}{3}\leqslant x\leqslant\frac{13}{3}$, ∴ $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$ $\left(\frac{5}{3}\leqslant x\leqslant\frac{13}{3}\right)$. 故选 C.

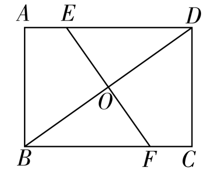


思路分析

过点 O 分别作 $OF\perp AB$ 于 F, $OE\perp BC$ 于 E，易证明 $\triangle NOF\backsim\triangle MOE$，根据相似三角形对应边成比例即可得到 y 与 x 之间的函数关系式，从而判断图像.

3. $\frac{15}{2}$　【解析】如图，设 EF 与 BD 的交点为 O.

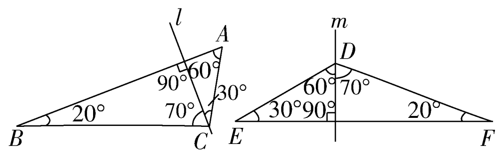
∵四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ $\angle BCD=\angle A=90^\circ$. 又∵ $AB=6$, $AD=BC=8$, ∴ $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=10$. ∵ EF 是 BD 的垂直平分线, ∴ $OB=OD=5$, $\angle BOF=90^\circ$, ∴ $\angle BOF=\angle BCD$. 又∵ $\angle DBC=\angle DBC$, ∴ $\triangle BOF\backsim\triangle BCD$, ∴ $\frac{OF}{CD}=\frac{BO}{BC}$, ∴ $\frac{OF}{6}=\frac{5}{8}$, 解得 $OF=\frac{15}{4}$. ∵ $ED/\!/BF$, ∴ $\triangle EOD\backsim\triangle FOB$, ∴ $\frac{OF}{OE}=\frac{OB}{OD}=1$, ∴ $OF=OE$, ∴ $EF=2OF=\frac{15}{2}$.



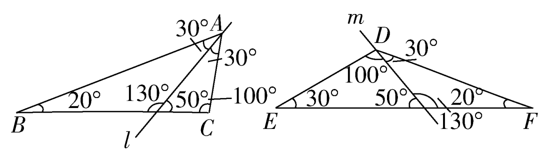
思路分析

根据矩形的性质和勾股定理求出 BD 的长，证明 $\triangle BOF\backsim\triangle BCD$，根据相似三角形的性质得到比例式，求出 OF 的长，再证明 $\triangle EOD\backsim\triangle FOB$，进而可求出 EF 的长.

4.【解】方法一：



方法二：



5.【证明】(1) ∵ $AB=AC$, $OA=OB=OC$,

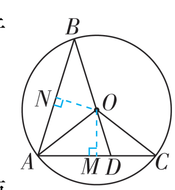
∴ $\triangle AOB\cong\triangle COA$, ∴ $\angle OBA=\angle OAC$.

又∵ $\angle ADO=\angle BDA$, ∴ $\triangle OAD\backsim\triangle ABD$.

(2) 如图，过点 O 作 $ON\perp AB$ 于 N, $OM\perp AC$ 于 M,

由(1)知 $\triangle AOB\cong\triangle COA$,

∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COA}$.



∵ $\triangle AOB$, $\triangle AOD$, $\triangle COD$ 的面积分别为 $S_1=S_{\triangle COA}=\frac{1}{2}AC\times OM$, $S_2=\frac{1}{2}AD\times OM$, $S_3=\frac{1}{2}CD\times OM$, $S_2^2=S_1\cdot S_3$,

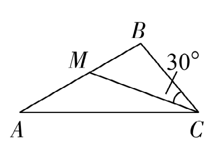
∴ $\left(\frac{1}{2}AD\times OM\right)^2=\frac{1}{2}AC\times OM\times\frac{1}{2}CD\times OM$,

∴ $AD^2=AC\times CD$, 即 $AD:AC=CD:AD$,

∴ 点 D 为线段 AC 的黄金分割点.

刷素养

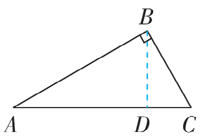
6.【解】(1) ①如图(1)所示.



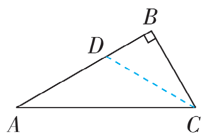
图(1)

②当 $\angle CBD=30^\circ$ 时，如图(2)，则 $DC=\frac{1}{2}BC=$

$\frac{1}{2}$, $\therefore BD=\sqrt{BC^2-DC^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



图(2)



图(3)

当$\angle BCD=30°$时,如图(3),设$BD=x(x>0)$,则$DC=2x$,$\therefore (2x)^2=x^2+1$,$\therefore x=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\therefore DC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

综上,$\triangle ABC$的"形似线段"的长是$\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故答案为$\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

(2)①若$\triangle DEG\backsim\triangle DFE$,则$\frac{EG}{EF}=\frac{DE}{DF}$. $\because DE=5$, $EF=6$, $DF=8$, $\therefore EG=\frac{15}{4}$.

②若$\triangle FEG\backsim\triangle FDE$,则$\frac{EG}{DE}=\frac{EF}{DF}$. $\because DE=5$, $EF=6$, $DF=8$, $\therefore EG=\frac{15}{4}$. 综上所述,$EG=\frac{15}{4}$.

课时 3　两边成比例且夹角相等的两个三角形相似

刷基础

1. A　【解析】由题图得,在$\triangle ABC$中,$\angle ACB=135°$, $AC=\sqrt{2}$, $BC=2$. B、C、D 选项中的三角形都没有135°的角,而 A 选项中三角形的钝角为135°,它的两边长分别为 1 和$\sqrt{2}$,因为$\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1}$,所以 A 选项中的三角形与$\triangle ABC$相似. 故选 A.

2. C　【解析】在$\triangle ABP$与$\triangle ACB$中,根据$\angle A=\angle A$, $\frac{AB}{AC}=\frac{BP}{BC}$不能判定$\triangle ABP\backsim\triangle ACB$,故选项 A 错误;$BP^2=AP\cdot PC$,即$\frac{BP}{AP}=\frac{PC}{BP}$,不能判定$\triangle ABP\backsim\triangle ACB$,故选项 B 错误;$AB^2=AP\cdot AC$,即$\frac{AB}{AC}=\frac{AP}{AB}$, $\angle A=\angle A$,能判定$\triangle ABP\backsim\triangle ACB$,故选项 C 正确;$\frac{AB}{BP}=\frac{AC}{PC}$不能判定$\triangle ABP\backsim\triangle ACB$,故选项 D 错误. 故选 C.

3. D　【解析】A 选项,剪开得到的三角形与原三角形有两个角相等,可以判定两三角形相似,故 A 选项不符合题意;B 选项,剪开得到的三角形与原三角形的两组对应边成比例且夹角相等,可以判定两三角形相似,故 B 选项不符合题意;C 选项,由同位角相等,两直线平行可得平行线,故可以判定两三角形相似,故 C 选项不符合题意;D 选项,两三角形的对应边成比例,但夹角不相等,不能判定两三角形相似,故 D 选项符合题意. 故选 D.

4. 4　【解析】$\because AC$平分$\angle BAD$, $\therefore \angle BAC=\angle DAC$. 当$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$时,$\triangle ABC\backsim\triangle ACD$,即$AC^2=AB\cdot AD$. $\because AB=9$, $AC=6$, $\therefore 6^2=9AD$, $\therefore AD=4$. 故答案为 4.

5. GCA　【解析】设正方形的边长为a,则$AC=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}a$. $\because \frac{AC}{CF}=\frac{\sqrt{2}a}{a}=\sqrt{2}$, $\frac{CG}{AC}=\frac{2a}{\sqrt{2}a}=\sqrt{2}$, $\therefore \frac{AC}{CF}=\frac{CG}{AC}$. 又$\because \angle ACF=\angle GCA$, $\therefore \triangle ACF\backsim\triangle GCA$.

思路分析
先利用同角的补角相等得到$\angle AED=\angle ACB$,则可判断$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$,所以$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$,利用比例的性质得到$\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$,接着证明$\angle DAB=\angle EAC$,从而可判断$\triangle DAB\backsim\triangle EAC$.

6.【证明】$\because \angle AEC+\angle ACB=180°$, $\angle AEC+\angle AED=180°$, $\therefore \angle AED=\angle ACB$. 又$\because \angle DAE=\angle BAC$, $\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$, $\therefore \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$, $\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$. $\because \angle DAE=\angle BAC$,即$\angle DAB+\angle BAE=\angle BAE+\angle EAC$, $\therefore \angle DAB=\angle EAC$. 又$\because \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$, $\therefore \triangle DAB\backsim\triangle EAC$.

7.【证明】$\because AC$, AF分别是正方形$ABCD$和正方形$AEFG$的对角线,$\therefore \triangle ADC$和$\triangle AGF$都是等腰直角三角形,$\therefore \angle DAC=\angle GAF=45°$,由勾股定理易得$\frac{AD}{AC}=\frac{AG}{AF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore \angle DAG+\angle CAG=\angle CAF+\angle CAG$, $\therefore \angle DAG=\angle CAF$, $\therefore \triangle AFC\backsim\triangle AGD$.

刷易错

易错警示
表述相似时,若利用相似符号"∽"表示,则相似三角形的对应边、对应角是确定的;若用文字表述,则对应边、对应角不确定,注意分类讨论.

8. 2 或 8 或 5　【解析】①当$\frac{AD}{PC}=\frac{PD}{BC}$时,$\triangle APD\backsim\triangle PBC$,此时$\frac{4}{10-PD}=\frac{PD}{4}$,解得$PD=2$或$PD=8$;②当$\frac{AD}{BC}=\frac{PD}{PC}$时,$\triangle PAD\backsim\triangle PBC$,此时$\frac{4}{4}=\frac{PD}{10-PD}$,解得$DP=5$. 综上所述,$DP$的长为 2 或 8 或 5. 故答案为 2 或 8 或 5.

课时 4　三边成比例的两个三角形相似

刷基础

1. C

2. C 【解析】A 选项,由 $\angle A=\angle D$,可以根据两边成比例且夹角相等,推出两三角形相似,本选项不符合题意;B 选项,由 $\angle B=\angle E$,可以推出 $\angle A=\angle D$,根据两边成比例且夹角相等,推出两三角形相似,本选项不符合题意;C 选项,由 $\angle A=\angle E$,不能判定两三角形相似,本选项符合题意;D 选项,由 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$,可以推出 $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$,根据三边成比例推出两三角形相似,本选项不符合题意. 故选 C.

3. A 【解析】三角形①的三边之比为 $1:2:\sqrt{5}$;三角形②的三边之比为 $\sqrt{2}:\sqrt{5}:\sqrt{5}$;三角形③的三边之比为 $1:2:\sqrt{5}$;三角形④的三边之比为 $1:1:\sqrt{2}$. 只有三角形①和③的三边对应成比例,所以相似三角形有 1 对. 故选 A.

4. C 【解析】A 选项,$\angle A$ 和 $\angle B$,$\angle D$ 和 $\angle E$ 不是两个三角形的对应角,故不能判定两三角形相似,A 选项不符合题意;B 选项,根据 $\angle B=\angle E$,$\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DF}$不能判定两三角形相似,因为相等的两个角不是成比例的两组边的夹角,B 选项不符合题意;C 选项,$\triangle ABC$ 的三边之比为 $2:6:7$,由 $\triangle DEF$ 三边之比为 $2:7:6$ 可知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEF$ 相似,C 选项符合题意;D 选项,因为 $\angle C=\angle E$,DE 与 AB,EF 与 AC 不是两个三角形的相等角的两组对应边,所以不能判定两三角形相似,D 选项不符合题意. 故选 C.

易错警示 两条边长分别是 6 和 8 的直角三角形,没有明确直角边和斜边,应分情况讨论,本题容易漏掉第二种情况.

5. C 【解析】设 $\triangle DEF$ 的另外两条边长分别为 x cm,y cm$(x<y)$. 若 $\triangle DEF$ 中长为 4 cm 的边的对应边的长为 6 cm,则 $\frac{4}{6}=\frac{x}{7.5}=\frac{y}{9}$,解得 $x=5$,$y=6$;若 $\triangle DEF$ 中长为 4 cm 的边的对应边的长为 7.5 cm,则 $\frac{4}{7.5}=\frac{x}{6}=\frac{y}{9}$,解得 $x=3.2$,$y=4.8$;若 $\triangle DEF$ 中长为 4 cm 的边的对应边的长为 9 cm,则 $\frac{4}{9}=\frac{x}{6}=\frac{y}{7.5}$,解得 $x=\frac{8}{3}$,$y=\frac{10}{3}$. 故选 C.

关键点拨 根据三边成比例的两个三角形相似求解. 注意 $\triangle DEF$ 中长为 4 cm 的边的对应边的长可能是 6 cm 或 7.5 cm 或 9 cm,所以有三种情况.

6. $\triangle DEB$ 【解析】设小正方形的边长为 1,则 $AC=\sqrt{2}$,$BC=\sqrt{5}$,$AB=1$,$CE=3$,$CD=1$,$BD=2\sqrt{2}$,$BE=2\sqrt{5}$,$DE=2$,$\therefore$ $\triangle ABC$ 的三边之比是 $AB:AC:BC=1:\sqrt{2}:\sqrt{5}$,$\triangle CEB$ 的三边之比是 $BC:EC:BE=\sqrt{5}:3:2\sqrt{5}$,$\triangle CDB$ 的三边之比是 $CD:BC:BD=1:\sqrt{5}:2\sqrt{2}$,$\triangle DEB$ 的三边之比是 $DE:BD:BE=2:2\sqrt{2}:2\sqrt{5}=1:\sqrt{2}:\sqrt{5}$,$\therefore$ $\triangle DEB$ 与 $\triangle ABC$ 相似,故答案为 $\triangle DEB$.

7. 【解】$\triangle ACD\backsim\triangle ECA$.

证明:由勾股定理得 $AC=\sqrt{2}$,$AD=\sqrt{5}$,$AE=\sqrt{10}$,则$\frac{AC}{EC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\frac{DC}{AC}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,$\frac{AD}{EA}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore \frac{AC}{EC}=\frac{DC}{AC}=\frac{AD}{EA}$,$\therefore$ $\triangle ACD\backsim\triangle ECA$.

8. (1)【证明】$\because$ $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$,$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$,$\therefore$ $\angle BAC=\angle DAE$,$\therefore$ $\angle BAC-\angle DAF=\angle DAE-\angle DAF$,$\therefore$ $\angle BAD=\angle CAE$.

(2)【解】由(1)得 $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$,$\therefore$ $\angle ABC=\angle ADE$. $\because$ $\angle ABC=\angle ABE+\angle EBC$,$\angle ADE=\angle ABE+\angle BAD$,$\therefore$ $\angle EBC=\angle BAD=21°$.

(3)【证明】由(1)得 $\angle BAD=\angle CAE$.

又$\because$ $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$,$\therefore$ $\triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

刷易错

9. 5 或$\sqrt{7}$ 【解析】根据题意,两条边长分别是 6 和 8 的直角三角形有两种情况,一种是 6 和 8 为直角边长,那么根据勾股定理可知斜边长为 10;另一种是 6 是直角边长,8 是斜边长,那么根据勾股定理可知另一条直角边长为 $2\sqrt{7}$. 所以另一个与它相似的直角三角形也有两种情况,第一种是$\frac{6}{3}=\frac{8}{4}=\frac{10}{x}$,解得 $x=5$;第二种是$\frac{6}{3}=\frac{2\sqrt{7}}{x}=\frac{8}{4}$,解得 $x=\sqrt{7}$. 综上,$x=5$ 或$\sqrt{7}$.

刷提升

1. C 【解析】设每个小正方形的边长为 1,则 $AB=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,$BC=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$,$AC=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,$DE=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$. 连接 EP_1,DP_1,则 $EP_1=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$,$DP_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. $\because$ $\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{10}}\neq\frac{5}{2\sqrt{2}}\neq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$,$\therefore$ $\triangle ABC$ 与 $\triangle EP_1D$ 不相似,故 A 选项不符合题意. 连接 EP_2,DP_2,则 $DP_2=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$,$EP_2=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. $\because$ $\frac{\sqrt{29}}{\sqrt{10}}\neq\frac{5}{2\sqrt{2}}\neq\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$,$\therefore$ $\triangle ABC$ 与 $\triangle EP_2D$ 不相似,故 B 选项不符合题意. 连接 EP_3,DP_3,则 $EP_3=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$,$DP_3=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$. $\because$ $\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$,$\therefore$ $\triangle ABC$ 与 $\triangle EP_3D$ 相似,故 C 选项符合题意. 连接 EP_4,

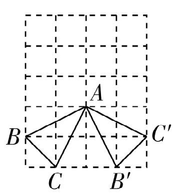
DP_4，则 $EP_4=3$，$DP_4=4$. $\because \dfrac{5}{\sqrt{10}}\neq\dfrac{4}{2\sqrt{2}}\neq\dfrac{3}{\sqrt{2}}$，

$\therefore \triangle ABC$ 与 $\triangle EP_4D$ 不相似，故 D 选项不符合题意. 故选 C.

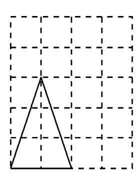
2. B 【解析】要满足三角形的两边之和大于第三边，则长 120 cm 的木条不能作为一边. 设从长 120 cm 的木条上截下的两段长分别为 x cm，y cm（$x<y$，$x+y\leqslant120$）. 由于 $x+y\leqslant120$，则长 60 cm 的木条不能与长 75 cm 的一边对应. 当长 60 cm 的木条与长 100 cm 的一边对应时，$\dfrac{x}{75}=\dfrac{y}{120}=\dfrac{60}{100}$，解得 $x=45$，$y=72$；当长 60 cm 的木条与长 120 cm 的一边对应时，$\dfrac{x}{75}=\dfrac{y}{100}=\dfrac{60}{120}$，解得 $x=37.5$，$y=50$，$\therefore$ 有两种不同的截法：把长 120 cm 的木条截成 45 cm，72 cm 两段或把长 120 cm 的木条截成 37.5 cm，50 cm 两段. 故选 B.

关键点拨 要满足三角形三边关系，因此长 120 cm 的木条不能作为一边，所以要从长 120 cm 的木条上截取.

3.【解】（1）如图（1）所示，$\triangle AB'C'$ 为所求作的三角形.



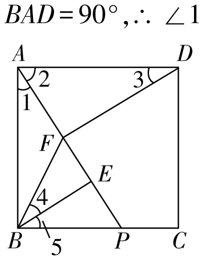
图（1）



图（2）

（2）如图（2）所示.（答案不唯一）

4.【证明】如图，$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，$\therefore AB=AD$，$\angle BAD=90°$，$\therefore \angle1+\angle2=90°$.



$\because BE\perp AP$，$DF\perp AP$，

$\therefore \angle BEA=\angle AFD=90°$，

$\therefore \angle2+\angle3=90°$，$\therefore \angle1=\angle3$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DAF$ 中，$\begin{cases}\angle BEA=\angle AFD,\\ \angle1=\angle3,\\ AB=DA,\end{cases}$

$\therefore \triangle ABE\cong\triangle DAF$，$\therefore BE=AF$.

又 $\because \dfrac{AF}{BF}=\dfrac{DF}{AD}$，$\therefore \dfrac{BE}{BF}=\dfrac{DF}{AD}$，$\therefore \dfrac{BE}{DF}=\dfrac{BF}{AD}$.

$\because \triangle BEF$ 和 $\triangle DFA$ 均是直角三角形，$\therefore \dfrac{BE}{DF}=\dfrac{BF}{AD}=\dfrac{EF}{AF}$，$\therefore \triangle BEF\backsim\triangle DFA$，$\therefore \angle4=\angle3$，

$\therefore \angle4=\angle1$.

$\because \angle ABP=\angle BEP=90°$，$\therefore \angle1+\angle APB=\angle5+\angle APB=90°$，

$\therefore \angle5=\angle1$，$\therefore \angle4=\angle5$.

又 $\because \angle BEP=\angle BEF=90°$，$BE=BE$，

$\therefore \triangle BEP\cong\triangle BEF$，$\therefore EF=EP$.

刷素养

5.【解】（1）证明过程如下：

$\because \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{A'D'}{A'B'}$，$\therefore \dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.

$\because \dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}$，$\therefore \dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AD}{A'D'}$，

$\therefore \triangle ADC\backsim\triangle A'D'C'$，$\therefore \angle A=\angle A'$.

$\because \dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AB}{A'B'}$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

故答案为 $\dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{AD}{A'D'}$，$\angle A=\angle A'$.

（2）$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$. 理由：如图，过点 D，D' 分别作 $DE/\!/BC$，$D'E'/\!/B'C'$，DE 交 AC 于 E，$D'E'$ 交 $A'C'$ 于 E'.

$\because DE/\!/BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ABC$，$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{DE}{BC}=\dfrac{AE}{AC}$.

同理 $\dfrac{A'D'}{A'B'}=\dfrac{D'E'}{B'C'}=\dfrac{A'E'}{A'C'}$.

$\because \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{A'D'}{A'B'}$，$\therefore \dfrac{DE}{BC}=\dfrac{D'E'}{B'C'}$，$\therefore \dfrac{DE}{D'E'}=\dfrac{BC}{B'C'}$.

同理 $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{A'E'}{A'C'}$，$\therefore \dfrac{AC-AE}{AC}=\dfrac{A'C'-A'E'}{A'C'}$，

即 $\dfrac{EC}{AC}=\dfrac{E'C'}{A'C'}$，$\therefore \dfrac{EC}{E'C'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

$\because \dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}$，$\therefore \dfrac{CD}{C'D'}=\dfrac{DE}{D'E'}=\dfrac{EC}{E'C'}$，

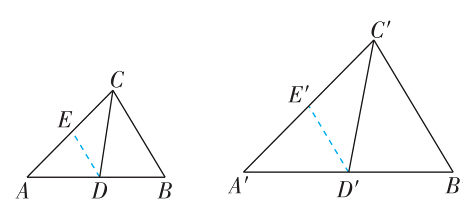
$\therefore \triangle DCE\backsim\triangle D'C'E'$，$\therefore \angle CED=\angle C'E'D'$.

$\because DE/\!/BC$，$\therefore \angle CED+\angle ACB=180°$，

同理，$\angle C'E'D'+\angle A'C'B'=180°$，

$\therefore \angle ACB=\angle A'C'B'$.

$\because \dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{CB}{C'B'}$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.



思路分析 （2）过点 D，D' 分别作 $DE/\!/BC$，$D'E'/\!/B'C'$，DE 交 AC 于 E，$D'E'$ 交 $A'C'$ 于 E'. 先证明 $\triangle CED\backsim\triangle C'E'D'$，推出 $\angle CED=\angle C'E'D'$，再证明 $\angle ACB=\angle A'C'B'$ 即可解决问题.

课时 5　三角形的重心

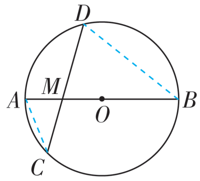
刷基础

1. A 【解析】如图，连接 AC，BD. $\because \angle A=\angle D$，$\angle C=\angle B$，$\therefore \triangle ACM\backsim\triangle DBM$，$\therefore \dfrac{AM}{DM}=\dfrac{CM}{BM}$.

$\because AM=2, AB=8, CM=3$,

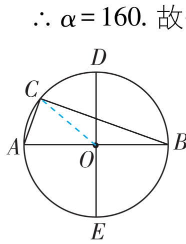
$\therefore BM=6$, $\therefore \dfrac{2}{DM}=\dfrac{3}{6}$,

$\therefore DM=4$, $\therefore CD=CM+DM=3+4=7$. 故选 A.

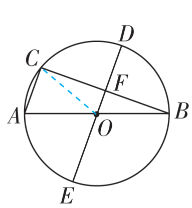


2. D 【解析】$\because AD$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle 1=\angle 2$. $\because \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{CD}$, $\therefore \angle 2=\angle CBD$, $\therefore \angle 1=\angle EBD$. $\because \angle ADB=\angle BDE$, $\therefore \triangle BDE \backsim \triangle ADB$, 故②正确. $\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AB}$, $\therefore \angle D=\angle C$. $\because \angle BED=\angle AEC$, $\therefore \triangle BDE \backsim \triangle ACE$, 故③正确. $\because \angle 1=\angle 2$, $\angle D=\angle C$, $\therefore \triangle AEC \backsim \triangle ABD$, 故④正确. 根据条件无法证明 $\triangle ABE \backsim \triangle ADB$, 故①不正确. 因此正确的是②③④. 故选 D.

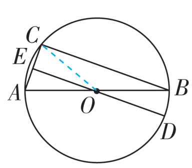
3. 50 或 70 或 160 【解析】$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB=90°$, $\therefore \angle A=90°-\angle B=70°$. 如图(1), 当 $DE \perp AB$ 时, 直径 DE 在 $\triangle ABC$ 中截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 连接 OC. $\because \angle ABC=20°$, $OB=OC$, $\therefore \angle OCB=\angle ABC=20°$, $\therefore \angle AOC=40°$, $\therefore \angle COD=\angle AOD-\angle AOC=90°-40°=50°$, $\therefore \alpha=50$. 如图(2), 当 $DE \perp BC$ 时, 直径 DE 在 $\triangle ABC$ 中截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 设垂足为 F, 连接 OC, 此时 $\triangle BOF \backsim \triangle BAC$, $\therefore \angle BOD=\angle A=70°$. $\because OA=OC$, $\therefore \angle A=\angle OCA=70°$, $\therefore \angle BOC=140°$. $\because OB=OC$, $OE \perp BC$, $\therefore \angle COD=\dfrac{1}{2}\angle BOC=70°$, $\therefore \alpha=70$. 如图(3), 当 $DE \perp AC$ 时, 直径 DE 在 $\triangle ABC$ 中截得的三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 连接 OC. $\because OA=OC$, $DE \perp AC$, $\therefore \angle COE=\angle AOE=\angle ABC=20°$, $\therefore \angle COD=180°-\angle COE=160°$, $\therefore \alpha=160$. 故答案为 50 或 70 或 160.



图(1)

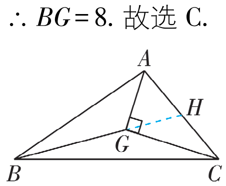


图(2)

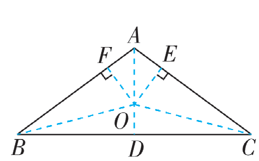


图(3)

4. C 【解析】如图, 延长 BG 交 AC 于点 H. $\because$ 点 G 是 $\triangle ABC$ 的重心, $\therefore BG=2GH$, $AH=CH$. $\because AG \perp GC$, $\therefore AC=2GH$, $\therefore BG=AC$. $\because AC=8$, $\therefore BG=8$. 故选 C.



(第 4 题图)



(第 5 题图)

关键点拨 (2)解题的关键是学会添加常用的辅助线, 构造平行四边形解决问题.

知识拓展 三角形的重心将三角形的三条中线都分成了 2∶1 的两条线段, 重心与三角形顶点的连线较长, 与中点的连线较短.

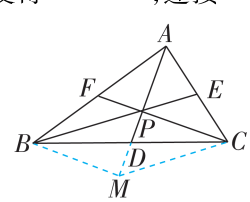
5. $r=3.2$ 或 $4<r<2\sqrt{17}$ 【解析】如图, 设点 O 为 $\triangle ABC$ 的重心, 连接 AO 并延长交 BC 于点 D, 则 AD 为 $\triangle ABC$ 的中线. $\because AB=AC=10$, $BC=16$, AD 为中线, $\therefore AD \perp BC$, $\angle BAD=\angle CAD$, $BD=CD=\dfrac{1}{2}BC=8$, $\therefore AD=\sqrt{AC^2-CD^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$, 则 $OD=2$, $AO=4$. 连接 BO, CO, 则 $BO=\sqrt{BD^2+OD^2}=\sqrt{8^2+2^2}=2\sqrt{17}$. 过点 O 作 $OE \perp AC$, $OF \perp AB$, 垂足分别为点 E, F, $\therefore OE=OF$, $\therefore$ 易知 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}$. $\because S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC \cdot AD=\dfrac{1}{2}\times 16\times 6=48$, $S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{2}\cdot BC \cdot OD=\dfrac{1}{2}\times 16\times 2=16$, $\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{2}\times(48-16)=16=\dfrac{1}{2}AC \cdot OE$, $\therefore OE=3.2$, $\therefore$ 如果 $\triangle ABC$ 的重心圆与该三角形各边的公共点一共有 4 个, 那么它的半径 r 的取值范围是 $r=3.2$ 或 $4<r<2\sqrt{17}$. 故答案为 $r=3.2$ 或 $4<r<2\sqrt{17}$.

刷素养

6. 【解】(1) $\because AE=EC$, $AF=FB$, $\therefore EF /\!/ BC$, $EF=\dfrac{1}{2}BC$, $\therefore \triangle FEP \backsim \triangle CBP$, $\therefore \dfrac{EF}{BC}=\dfrac{PF}{PC}=\dfrac{PE}{PB}=\dfrac{1}{2}$, $\therefore PE=\dfrac{1}{3}BE=3$, $PF=\dfrac{1}{3}CF=2$.

$\because BE \perp CF$, $\therefore \angle EPF=90°$, $\therefore EF=\sqrt{PE^2+PF^2}=\sqrt{13}$.

(2) $\triangle ABC$ 是"中垂三角形". 证明: 如图, 延长 PD 到 M, 使得 $DM=PD$, 连接 BM, CM.



$\because PD=DM$, $BD=DC$, $\therefore$ 四边形 $PBMC$ 是平行四边形, $\therefore PB=CM$.

由题意得 $PB=\dfrac{2}{3}BE=\dfrac{20}{3}$, $PD=DM=\dfrac{1}{3}AD=2$, $PC=\dfrac{2}{3}CF=\dfrac{16}{3}$, $\therefore PM=4$.

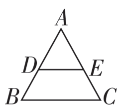
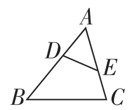
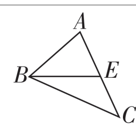
$\because PM^2+PC^2=4^2+\left(\dfrac{16}{3}\right)^2=\dfrac{400}{9}$, $CM^2=PB^2=\dfrac{400}{9}$, $\therefore CM^2=PM^2+PC^2$, $\therefore \angle CPD=90°$,

$\therefore CF \perp AD$, $\therefore \triangle ABC$ 是"中垂三角形".

大招专题 2　相似三角形判定的常考模型

刷难关

大招解读｜A 字型

正 A 字型	斜 A 字型（共角）	斜 A 字型（共角、共边）
 已知：$DE//BC$. 结论：$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$	 已知：$\angle ADE=\angle C$. 结论：$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$	 已知：$\angle ABE=\angle C$. 结论：$\triangle ABE\backsim\triangle ACB$

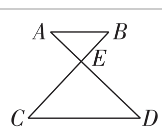
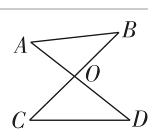
1. 3 或 $\frac{4}{3}$　【解析】∵ D 为 AC 中点，∴ $AD=\frac{1}{2}AC=2$. 当 $\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$ 时，∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle AED\backsim\triangle ABC$，此时 $AE=\frac{AB\cdot AD}{AC}=\frac{6\times2}{4}=3$；当 $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$ 时，∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，此时 $AE=\frac{AC\cdot AD}{AB}=\frac{4\times2}{6}=\frac{4}{3}$. 综上，$AE=3$ 或 $\frac{4}{3}$. 故答案为 3 或 $\frac{4}{3}$.

关键点拨 先得到 $AD=\frac{1}{2}AC=2$，再分 $\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$ 与 $\frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}$ 两种情况讨论即可解答.

2. B　【解析】∵ BE，CD 为 $\triangle ABC$ 的两条高，∴ $\angle AEB=\angle ADC=90°$. ∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle AEB\backsim\triangle ADC$，∴ $\frac{AE}{AD}=\frac{AB}{AC}$. ∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle AED\backsim\triangle ABC$，∴ $\frac{ED}{BC}=\frac{AE}{AB}$. ∵ $AB=6$，$BC=5$，$ED=3$，∴ $\frac{3}{5}=\frac{AE}{6}$，∴ $AE=\frac{18}{5}$，∴ $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{6^2-\left(\frac{18}{5}\right)^2}=\frac{24}{5}$. 故选 B.

刷有所得 三角形的中位线等于第三边的一半.

大招解读｜8 字型

正 8 字型	斜 8 字型（蝴蝶型）
 已知：$AB//CD$. 结论：$\triangle ABE\backsim\triangle DCE$	 已知：$\angle B=\angle D$. 结论：$\triangle AOB\backsim\triangle COD$

3. $\sqrt{3}-1$　【解析】在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，$\angle B=30°$，$AB=\sqrt{3}$，∴ $AE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，由勾股定理得，$BE=\frac{3}{2}$. 根据翻折的性质可得 $BF=2BE=3$，∴ $CF=3-\sqrt{3}$. ∵ $AD//CF$，∴ $\triangle ADG\backsim\triangle FCG$，∴ $\frac{AD}{CF}=\frac{DG}{CG}$. 设 $CG=x$，则 $\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-x}{x}$，解得 $x=\sqrt{3}-1$，故答案为 $\sqrt{3}-1$.

4. $\frac{mn}{m+n}$　【解析】∵ $AB=m$，$CD=n$，E，F 分别是 AB，CD 的中点，∴ $DF=CF=\frac{1}{2}CD=\frac{1}{2}n$，$AE=BE=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}m$. ∵ $AB//CD$，∴ $\angle DFG=\angle EAG$，$\angle CFH=\angle EBH$. ∵ $\angle DGF=\angle EGA$，$\angle CHF=\angle EHB$，∴ $\triangle DGF\backsim\triangle EGA$，$\triangle CHF\backsim\triangle EHB$，∴ $\frac{FG}{AG}=\frac{DF}{AE}=\frac{n}{m}$，$\frac{FH}{HB}=\frac{CF}{EB}=\frac{n}{m}$，∴ $\frac{FG}{AF}=\frac{FH}{FB}=\frac{n}{m+n}$. ∵ $\angle GFH=\angle AFB$，∴ $\triangle GFH\backsim\triangle AFB$，∴ $\frac{GH}{AB}=\frac{FG}{AF}$，∴ $\frac{GH}{m}=\frac{n}{m+n}$，解得 $GH=\frac{mn}{m+n}$. 故答案为 $\frac{mn}{m+n}$.

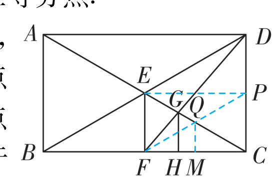
5. (1)【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ 点 E 为 AC 的中点，∴ $AE=EC$. ∵ $EF\perp BC$，$AB\perp BC$，∴ $EF//AB$，∴ $CF:FB=CE:EA$，∴ $CF=FB$，∴ 点 F 是 BC 的二等分点.

(2)【证明】∵ $AE=EC$，$BF=FC$，∴ EF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，∴ $EF=\frac{1}{2}AB$，∴ $EF=\frac{1}{2}DC$. ∵ $EF\perp BC$，$DC\perp BC$，∴ $EF//DC$，∴ $\triangle EFG\backsim\triangle CDG$，∴ $\frac{EG}{GC}=\frac{EF}{DC}=\frac{1}{2}$，∴ $\frac{GC}{CA}=\frac{1}{3}$.

∵ 易证 $GH//AB$，∴ $\frac{CH}{CB}=\frac{CG}{CA}=\frac{1}{3}$，

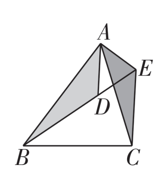
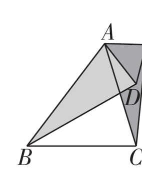
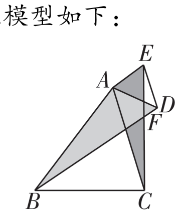
∴ 点 H 是 BC 的一个三等分点.

(3)【解】能. 如图所示，过点 E 作 $EP\perp DC$ 于点 P，连接 FP 交 CE 于点 Q，过点 Q 作 $QM\perp BC$ 于点 M，则点 M 为 BC 的一个四等分点.

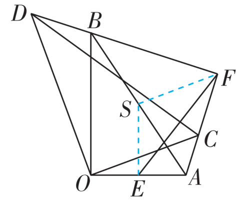


大招解读｜手拉手型

$\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 共顶点 A，通过两边成比例且夹角相等来判定三角形相似. 常见模型如下：

		
AD 在 $\triangle ABC$ 内且拉手线 CE 和 BD 无交点	AD 在 $\triangle ABC$ 外且拉手线 CE 和 BD 无交点	AD 在 $\triangle ABC$ 外且拉手线 CE 和 BD 有交点

6. $\sqrt{13}-3$ 【解析】如图，取 AB 的中点 S，连接 ES，FS，则 $FS-ES\leqslant FE\leqslant ES+FS$. ∵ $\angle AOB=90°$，$OA=4$，$OB=6$，∴ $AB=2\sqrt{13}$. ∵ $\angle AOB=\angle COD=90°$，$\angle ABO=\angle CDO$，∴ $\triangle AOB\backsim\triangle COD$，∴ $OB:OD=OA:OC$. ∵ $\angle AOB=\angle COD$，∴ $\angle AOC=\angle BOD$，∴ $\triangle DOB\backsim\triangle COA$，∴ $\angle OBD=\angle OAC$. ∵ $\angle OBD+\angle FBO=180°$，∴ $\angle OAC+\angle FBO=180°$，∴ $\angle AOB+\angle AFB=180°$，∴ $\angle AFB=\angle AOB=90°$. 又∵ S 为 AB 的中点，∴ $FS=\frac{1}{2}AB=\sqrt{13}$. ∵ E 为 OA 的中点，S 为 AB 的中点，∴ $ES=\frac{1}{2}OB=3$，∴ EF 的最小值为 $\sqrt{13}-3$. 故答案为 $\sqrt{13}-3$.

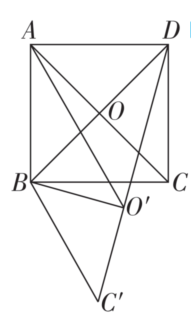


思路分析

取 AB 的中点 S，连接 ES，FS，则 $FS-ES\leqslant EF\leqslant FS+ES$. 由题意可知，$\triangle AOB\backsim\triangle COD$，进而可得 $\triangle DOB\backsim\triangle COA$，所以 $\angle OBD=\angle OAC$，根据四边形内角和可得 $\angle AOB=\angle AFB=90°$，再根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得出 FS 的长，根据中位线定理可得 ES 的长，由此可得结论.

7. $\sqrt{3}-1$ 或 $\sqrt{3}+1$ 【解析】①当 $O'C'$ 在 BD 的上方时，∵ $\triangle O'C'B$，$\triangle ABD$ 是等腰直角三角形，∴ $O'B:BC'=AB:BD=1:\sqrt{2}$. ∵ $\angle ABO'+\angle ABC'=\angle DBC'+\angle ABC'=45°$，∴ $\angle ABO'=\angle DBC'$，∴ $\triangle ABO'\backsim\triangle DBC'$，∴ $AO':DC'=AB:BD$. ∵ $BC'=BC=2$，∴ $O'C'=BO'=\frac{\sqrt{2}}{2}BC'=\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{2}BC=2\sqrt{2}$. ∵ $DO'^2=BD^2-BO'^2$，∴ $DO'^2=(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2$，∴ $DO'=\sqrt{6}$，∴ $DC'=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，∴ $AO':(\sqrt{6}-\sqrt{2})=1:\sqrt{2}$，∴ $AO'=\sqrt{3}-1$.

②当 $O'C'$ 在 BD 的下方时，如图所示. 同理可证 $\triangle ABO'\backsim\triangle DBC'$，∴ $AO':DC'=AB:BD=1:\sqrt{2}$. ∵ $BC'=BC=2$，∴ $O'C'=BO'=\frac{\sqrt{2}}{2}BC'=\sqrt{2}$，$BD=\sqrt{2}BC=2\sqrt{2}$. ∵ $DO'^2=BD^2-BO'^2$，∴ $DO'^2=(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{2})^2$，∴ $DO'=\sqrt{6}$，∴ $DC'=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，∴ $AO':(\sqrt{6}+\sqrt{2})=1:\sqrt{2}$，∴ $AO'=\sqrt{3}+1$. 综上所述，AO' 的长为 $\sqrt{3}-1$ 或 $\sqrt{3}+1$.



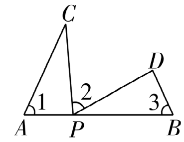
易错警示

分 $O'C'$ 在 BD 的上方和 $O'C'$ 在 BD 的下方两种情况讨论，不要漏解.

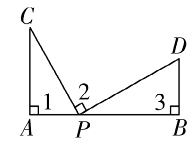
大招解读｜一线三等角型

如图，已知 A，P，B 三点共线，且 $\angle1=\angle2=\angle3$.

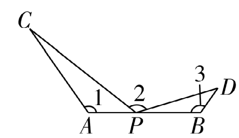
(1)点 P 在线段 AB 上：



图(1)

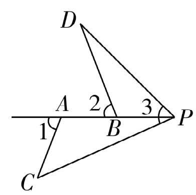


图(2)

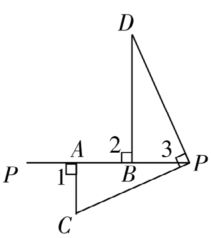


图(3)

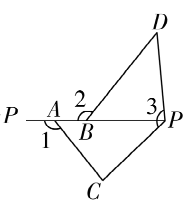
(2)点 P 在线段 AB 的延长线上：



图(4)



图(5)



图(6)

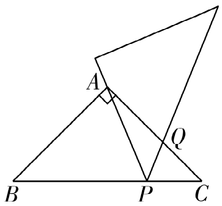
结论：$\triangle ACP\backsim\triangle BPD$.

8. (1)【证明】在正方形 $ABCD$ 中，$\angle B=\angle C=90°$. ∵ $AM\perp MN$，∴ $\angle AMN=90°$，∴ $\angle CMN+\angle AMB=90°$. 在 Rt $\triangle ABM$ 中，$\angle MAB+\angle AMB=90°$，∴ $\angle CMN=\angle MAB$，∴ Rt$\triangle ABM\backsim$Rt$\triangle MCN$.

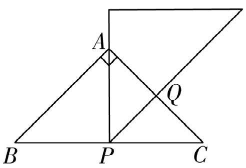
(2)【解】∵ $\angle B=\angle AMN=90°$，∴ 要使 Rt$\triangle ABM\backsim$Rt $\triangle AMN$，必须有 $\frac{AM}{MN}=\frac{AB}{BM}$. ∵ Rt$\triangle ABM\backsim$Rt$\triangle MCN$，∴ $\frac{AM}{MN}=\frac{AB}{MC}$，∴ $BM=MC$，∴ 当点 M 运动到 BC 的中点时，Rt$\triangle ABM\backsim$Rt$\triangle AMN$，此时 $x=2$.

9. 2 或 $4\sqrt{2}-4$ 【解析】由题意得 $\angle APQ=45°$. ∵ $\angle BAC=90°$，$AB=AC=4$，∴ $\angle B=\angle C=45°$，$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=4\sqrt{2}$. ∵ $\angle APC=\angle B+\angle BAP=\angle APQ+\angle CPQ$，∴ $\angle CPQ=\angle BAP$，∴ $\triangle BAP\backsim\triangle CPQ$，∴ $\frac{CQ}{BP}=\frac{CP}{BA}$，即 $CQ=\frac{CP\cdot BP}{BA}$. 如图(1)所示，当 $BP=AB=4$ 时，$CP=BC-BP=4\sqrt{2}-4$，∴ $CQ=\frac{CP\cdot BP}{BA}=4\sqrt{2}-4$. 如图(2)所示，当 $BP=AP$ 时，$\angle B=\angle BAP=45°$，∴ $\angle APB=90°$. 又∵ $\angle BAC=90°$，$AB=AC$，∴ $AP=BP=CP=\frac{1}{2}BC=2\sqrt{2}$，∴ $CQ=$

$\frac{CP\cdot BP}{BA}=2$. 综上所述,当$\triangle ABP$为等腰三角形时,CQ的长为2或$4\sqrt{2}-4$. 故答案为2或$4\sqrt{2}-4$.

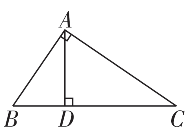


图(1)



图(2)

大招解读|射影定理

基本模型	结论
 Rt$\triangle ABC$中,$AD\perp BC$	$\triangle ABC\backsim\triangle DBA\backsim\triangle DAC$

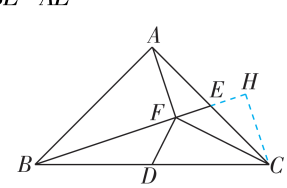
10. (1)【证明】∵$CD\perp AB$,∴$\angle CDA=\angle CDB=90°$. ∵$\angle ACB=90°$,∴$\angle ACD+\angle BCD=90°$. 又∵$\angle BCD+\angle B=90°$,∴$\angle ACD=\angle B$,∴$\triangle ACD\backsim\triangle CBD$.

(2)【证明】∵$\angle ACB=\angle CDB=90°$,$\angle B=\angle B$,∴$\triangle ACB\backsim\triangle CDB$,∴$\frac{BC}{AB}=\frac{BD}{BC}$,即$BC^2=BD\cdot AB$.

(3)【解】∵$\triangle ACD\backsim\triangle CBD$,∴$\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{BD}$,∴$CD^2=AD\cdot DB$. ∵$AD=3$,$BD=2$,∴$CD^2=6$. ∵$CD>0$,∴$CD=\sqrt{6}$.

11. (1)【证明】∵$AF\perp BE$,$AB\perp AC$,∴$\angle AFE=\angle AFB=\angle BAE=90°$,∴$\angle BAF+\angle EAF=90°$,$\angle ABF+\angle BAF=90°$,∴$\angle EAF=\angle ABF$,∴$\triangle AEF\backsim\triangle BEA$,∴$\frac{AE}{BE}=\frac{EF}{AE}$,∴$AE^2=BE\cdot EF$.

【解】(2)如图,过点C作$CH\perp BE$,交BE的延长线于H.



∵点E是AC的中点,∴$AE=EC$.
又∵$\angle AFE=\angle H=90°$,$\angle AEF=\angle CEH$,∴$\triangle AEF\cong\triangle CEH$(AAS),∴$AF=CH$,$EF=EH$.

∵$\triangle AEF\backsim\triangle BEA$,∴$\frac{AB}{AE}=\frac{AF}{EF}$.

又∵$AB=AC=2AE$,∴$AF=2EF$,∴$CH=AF=EF+EH=FH$,∴$\angle CFH=45°$,∴$\angle AFC=\angle AFE+\angle CFH=135°$.

思路分析 (3)通过证明$\triangle BDF\backsim\triangle CEF$,可得$\frac{DF}{EF}=\frac{BD}{CE}$,进而可求$EF$,由$AF=2EF$可求$AF$,证明$\triangle AEF\backsim\triangle BAF$,得$\frac{EF}{AF}=\frac{AF}{BF}$,可求$BF$,进而由三角形面积公式可求解.

刷有所得 在任意直角三角形中过直角顶点向斜边作垂线,得到的两个小直角三角形都和原直角三角形相似.

刷有所得 相似三角形的周长比等于相似比.

(3)如图,∵$\angle CFH=45°=\angle ACB$,∴$\angle FBC+\angle FCB=\angle ACF+\angle FCB$,$\angle BFC=\angle AFC=135°$,∴$\angle ACF=\angle FBC$,∴$\triangle AFC\backsim\triangle CFB$,∴$\frac{BF}{CF}=\frac{CF}{AF}=\frac{BC}{AC}$. ∵点$D$,$E$分别是$BC$,$AC$的中点,∴$DB=CD$,$AE=EC$,∴$\frac{BF}{CF}=\frac{BC}{AC}=\frac{BD}{CE}=\sqrt{2}$. 又∵$\angle FBC=\angle ACF$,∴$\triangle BDF\backsim\triangle CEF$,∴$\frac{DF}{EF}=\frac{BD}{CE}=\sqrt{2}$,∴$EF=\frac{DF}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,∴$AF=2EF=\sqrt{2}$. ∵$\angle EAF=\angle ABF$,$\angle AFE=\angle AFB$,∴$\triangle AEF\backsim\triangle BAF$,∴$\frac{EF}{AF}=\frac{AF}{BF}$,∴$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{BF}$,∴$BF=2\sqrt{2}$,∴$\triangle ABF$的面积为$\frac{1}{2}\times AF\times BF=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=2$.

6.5 相似三角形的性质

课时1 相似三角形的周长比和面积比

刷基础

1. C 【解析】∵$\triangle ABC\backsim\triangle DEF$,相似比为3∶1,∴$\frac{C_{\triangle ABC}}{C_{\triangle DEF}}=3$. ∵$\triangle ABC$的周长为18,∴$\triangle DEF$的周长为18÷3=6,故选C.

2. C 【解析】∵$\angle C=90°$,$\angle B=30°$,$AC=7$ cm,∴$AB=2AC=14$ cm. ∵$\triangle ABC\backsim\triangle DFE$,$DF=5$ cm,∴$\triangle ABC$与$\triangle DFE$的相似比为$AB:DF=14:5$,∴这把三角尺中$\triangle ABC$与$\triangle DFE$的周长比为14∶5. 故选C.

3. 18 【解析】∵两个相似三角形的一组对应边的长分别为8和24,∴其相似比为8∶24=1∶3. ∵相似三角形的周长比等于其相似比,∴可设较小三角形的周长为x,则较大三角形的周长为$3x$. 根据题意,得$3x-x=36$,解得$x=18$,∴较小三角形的周长为18,故答案为18.

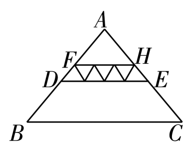
4.【解】(1)在Rt$\triangle ABC$中,$\angle ACB=90°$,$AB=\sqrt{6}$,$AC=2$,∴$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-2^2}=\sqrt{2}$. 当$\triangle ABD\backsim\triangle ACB$时,$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AB}$,即$\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{AD}{\sqrt{6}}$,解得$AD=3$;当$\triangle ABD\backsim\triangle BCA$时,$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{AB}$,即$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\frac{AD}{\sqrt{6}}$,解得$AD=3\sqrt{2}$. 综上所述,$AD$的长为3或$3\sqrt{2}$.

(2) $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 的周长的比值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $\sqrt{3}$.

当 $\triangle ABD \backsim \triangle ACB$ 时,周长的比值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$;当 $\triangle ABD \backsim \triangle BCA$ 时,周长的比值为 $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$. 故 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 的周长的比值为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 或 $\sqrt{3}$.

5. D 【解析】由题图可得 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times3\times2=3$, $BC=3$, $CE=4$. ∵ $\triangle ABC \backsim \triangle FCE$, ∴ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle FCE}}=\left(\frac{BC}{CE}\right)^2$, 即 $\frac{3}{S_{\triangle FCE}}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$, ∴ $S_{\triangle FCE}=\frac{16}{3}$. 故选 D.

6. 26 【解析】如图,根据题意得 $\triangle AFH \backsim \triangle ADE$, ∴ $\frac{S_{\triangle AFH}}{S_{\triangle ADE}}=\left(\frac{FH}{DE}\right)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$. 设 $S_{\triangle AFH}=9x$, 则 $S_{\triangle ADE}=16x$. 根据题意,得 $16x-9x=7$, 解得 $x=1$, ∴ $S_{\triangle ADE}=16$, ∴ 四边形 $DBCE$ 的面积为 $42-16=26$. 故答案为 26.



7. A 【解析】∵ $\triangle A'B'C'$ 的周长是 $\triangle ABC$ 周长的一半, ∴ $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $1:2$, ∴ $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 的面积比为 $1:4$. ∵ $\triangle A'B'C'$ 的面积为 6 cm², ∴ $\triangle ABC$ 的面积为 24 cm². 故选 A.

8. 104 【解析】∵ 两个相似三角形的周长比为 $2:3$, ∴ 它们的面积比为 $4:9$. 设两个三角形的面积分别为 $4x$, $9x$. 由题意得 $9x-4x=5x=40$, ∴ $x=8$, ∴ 它们的面积和为 $4x+9x=13x=13\times8=104$. 故答案为 104.

9. C 【解析】设较大多边形与较小多边形的周长分别是 m cm, n cm, 则 $\frac{n}{m}=\frac{3}{4.5}=\frac{2}{3}$, ∴ $n=\frac{2}{3}m$. 根据它们的周长之和是 80 cm, 得 $m+\frac{2}{3}m=80$, 解得 $m=48$. 故选 C.

刷易错

10. 45 cm² 【解析】∵ 两个相似三角形的相似比为 $2:3$, ∴ 它们的面积之比为 $4:9$. 设较大三角形的面积为 x cm². 根据题意,得 $4:9=(x-25):x$, 解得 $x=45$. 故较大三角形的面积是 45 cm².

关键点拨 将阴影部分的面积转化为矩形与两个三角形的面积的差,根据相似三角形的判定与性质求出两个三角形的面积是关键.

易错警示 相似三角形面积的比等于相似比的平方,而不是等于相似比.

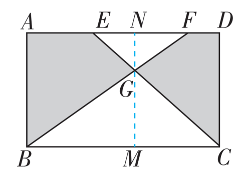
课时 2　相似三角形对应线段的比

刷基础

1. C 【解析】∵ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, BD 和 $B'D'$ 是它们的对应角平分线, ∴ $AC:A'C'=BD:B'D'$. ∵ $\frac{AC}{A'C'}=\frac{2}{3}$, $BD=4$, ∴ $B'D'=6$. 故选 C.

2. A 【解析】∵ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, AD 和 $A'D'$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的高, $AD=2$, $A'D'=3$, ∴ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的相似比为 $\frac{AD}{A'D'}=\frac{2}{3}$, ∴ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的面积的比为 $(2:3)^2=4:9$. 故选 A.

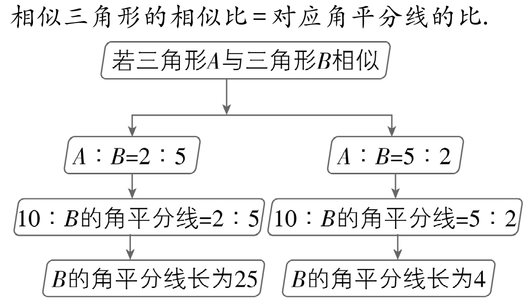
3. C 【解析】如图,过点 G 作 $GN\perp AD$ 于 N, 延长 NG 交 BC 于 M. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ $AD=BC$, $AD\parallel BC$. ∵ $EF=\frac{1}{2}AD$, ∴ $EF=\frac{1}{2}BC$. ∵ $AD\parallel BC$, $NG\perp AD$, ∴ $\triangle EFG \backsim \triangle CBG$, $GM\perp BC$, ∴ $GN:GM=EF:BC=1:2$. 又∵ $MN=AB=6$, $BC=10$, ∴ $GN=2$, $GM=4$, $EF=5$, ∴ $S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}\times10\times4=20$, $S_{\triangle EFG}=\frac{1}{2}\times5\times2=5$. ∵ $S_{矩形ABCD}=6\times10=60$, ∴ $S_{阴影}=60-20-5=35$. 故选 C.



4. 4 或 25

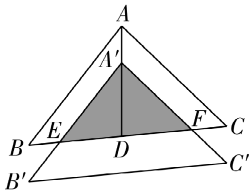
思路分析

相似三角形的相似比=对应角平分线的比.

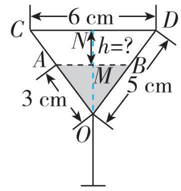


5. 9 【解析】∵ $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长的比值是 $\frac{4}{3}$, ∴ 相似比为 $\frac{4}{3}$, ∴ $\frac{BE}{B_1E_1}=\frac{4}{3}$. ∵ $BE=12$, ∴ $B_1E_1=9$. 故答案为 9.

6. 2 【解析】如图所示,易知 $\triangle ABC \backsim \triangle A'EF$, $A'D$ 为 $\triangle A'EF$ 的中线. ∵ $S_{\triangle ABC}=9$, $S_{\triangle A'EF}=4$, ∴ $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'EF}}=\frac{9}{4}$, ∴ $\frac{AB}{A'E}=\frac{AC}{A'F}=\frac{BC}{EF}=\frac{AD}{A'D}=\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{3}{2}$. ∵ $AD=AA'+A'D=1+A'D$, ∴ $\frac{A'D+1}{A'D}=\frac{3}{2}$, 解得 $A'D=2$.



（第 6 题图）



（第 7 题图）

7. $\frac{8}{5}$　【解析】如图，过 O 作 $ON\perp CD$ 于 N，交 AB 于 M. $\because CD/\!/AB$，$\therefore OM\perp AB$. $\because OC=OD$，$\therefore CN=\frac{1}{2}CD=3$ cm，$\therefore ON=\sqrt{OC^2-CN^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$ (cm). $\because CD/\!/AB$，$\therefore \triangle CDO\backsim\triangle ABO$，$\therefore \frac{OA}{OC}=\frac{OM}{ON}$，$\therefore \frac{3}{5}=\frac{OM}{4}$，$\therefore OM=\frac{12}{5}$ cm，$\therefore h=4-\frac{12}{5}=\frac{8}{5}$ (cm)，故答案为$\frac{8}{5}$.

关键点拨 本题考查相似三角形的实际应用，找出相似关系是解题关键.

8.【证明】$\because AD$，$A'D'$分别是$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$的中线，$\therefore BD=\frac{1}{2}BC$，$B'D'=\frac{1}{2}B'C'$.

$\because \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，

$\therefore \angle B=\angle B'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{2BD}{2B'D'}=\frac{BD}{B'D'}$，

$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle A'B'D'$，$\therefore AD:A'D'=AB:A'B'$.

9.【解】(1) $\because \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{1}{2}$，$CD$，$C'D'$分别为$\triangle ABC$，$\triangle A'B'C'$的角平分线，

$\therefore \frac{CD}{C'D'}=\frac{AB}{A'B'}=\frac{1}{2}$.

$\because CD=4$ cm，$\therefore C'D'=8$ cm.

(2) $\because \triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{1}{2}$，

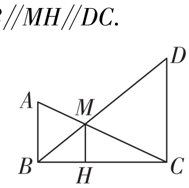
$\therefore \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2=\frac{1}{4}$. $\because \triangle ABC$的面积为$64\ \text{cm}^2$，$\therefore \triangle A'B'C'$的面积为$64\times4=256(\text{cm}^2)$.

刷提升

1. B

识图解题

如图，已知$AB/\!/MH/\!/DC$.

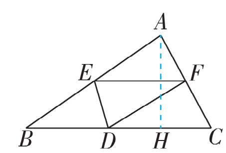


结论：$\frac{1}{AB}+\frac{1}{CD}=\frac{1}{MH}$.

【解析】$\because AB/\!/CD$，$\therefore \triangle ABM\backsim\triangle CDM$，$\therefore \frac{BH}{HC}=\frac{AB}{CD}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$（相似三角形对应高线的比等于相似比）. $\because MH/\!/AB$，$\therefore \triangle MCH\backsim\triangle ACB$，$\therefore \frac{MH}{AB}=\frac{CH}{BC}=\frac{3}{5}$，$\therefore \frac{MH}{8}=\frac{3}{5}$，$\therefore MH=\frac{24}{5}$ m. 故选 B.

2. A　【解析】在$\square ABCD$中，$AB=6$，$AD=9$，$\angle BAD$的平分线交BC于点E，$\therefore AB=CD=6$，$AD=BC=9$，$AB/\!/DC$，$\angle BAF=\angle DAF$，$\therefore \angle BAF=\angle F$，$\therefore \angle DAF=\angle F$，$\therefore AD=DF=9$，$\therefore CF=3$. 同理可得$AB=BE=6$，$\angle BEA=\angle BAE=\angle F=\angle CEF$，$\therefore CE=CF=3$. $\because BG\perp AE$，$\therefore \angle AGB=90°$. 在$\text{Rt}\triangle ABG$中，$AB=6$，$BG=4\sqrt{2}$，$\therefore AG=2$，$\therefore AE=2AG=4$，$\therefore \triangle ABE$的周长等于16. $\because AB/\!/DF$，$\therefore \triangle CEF\backsim\triangle BEA$，$\therefore$相似比为$CE:BE=3:6=1:2$，$\therefore \triangle CEF$的周长为8. 故选 A.

3. D　【解析】如图，过点A作$AH\perp BC$于点H. 因为$EF/\!/BC$，所以$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，所以$\frac{EF}{12}=\frac{6-x}{6}$，即$EF=2(6-x)$，所以$y=\frac{1}{2}\times2(6-x)x=-x^2+6x$ $(0<x<6)$，该函数的图象是抛物线的一部分，故选 D.



思路分析 过点A作$AH\perp BC$于点H，证得$\triangle AEF\backsim\triangle ABC$，根据相似三角形的性质可求出$EF$，进而求出$y$关于$x$的函数关系式，即可得出答案.

4. 36　【解析】由题可得$\triangle FDM\backsim\triangle IME\backsim\triangle MGH\backsim\triangle ABC$. 因为$\triangle FDM$，$\triangle IEM$，$\triangle GHM$的面积比为$1:4:9$，所以它们对应边边长的比为$1:2:3$. 又因为易得四边形$BDMG$与四边形$CEMH$为平行四边形，所以$DM=BG$，$EM=CH$. 设$DM$为$x$，则$ME=2x$，$GH=3x$，所以$BC=BG+GH+CH=DM+GH+ME=x+3x+2x=6x$，所以$BC:DM=6x:x=6:1$. 由面积比等于相似比的平方得$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle FDM}=36:1$，所以$S_{\triangle ABC}=36\times S_{\triangle FDM}=36\times1=36$. 故答案为 36.

5. $\left(\frac{3}{2},0\right)$或$(3,0)$或$\left(\frac{1}{2},0\right)$　【解析】如图(1)，当点B在点E右边时，过点A作$AH\perp OB$于H，交CF于G，则$GH=CD$. $\because$点A的坐标为$(1,1)$，$\therefore AH=OH=1$，$\angle AOB=45°$，$\therefore$易知$OD=CD$. 设$CF=x$. $\because$四边形$CDEF$是正方形，$\therefore CF/\!/DE$，$CD=CF=EF=DE=OD=GH=x$，$\angle OEF=\angle BEF=90°$，$\therefore OE=OD+DE=2EF=2x$. $\because$以B，E，F为顶点的三角形与$\triangle OFE$相似，$\therefore$ ①$EF=2EB$，则$EB=\frac{1}{2}x$，$\therefore OB=OE+EB=2x+\frac{1}{2}x=\frac{5}{2}x$. $\because CF/\!/DE$，

$\therefore \triangle ACF \backsim \triangle AOB$，$\therefore \dfrac{CF}{OB}=\dfrac{AG}{AH}=\dfrac{1-x}{1}$，即$\dfrac{x}{\frac{5}{2}x}=1-x$，$\therefore x=\dfrac{3}{5}$，$\therefore OB=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{2}$，$\therefore$ 点 B 的坐标为$\left(\dfrac{3}{2},0\right)$. ②$EB=2EF$，则 $EB=2x$，$\therefore OB=OE+EB=2x+2x=4x$. $\because CF /\!/ DE$，$\therefore \triangle ACF\backsim\triangle AOB$，$\therefore \dfrac{CF}{OB}=\dfrac{AG}{AH}=\dfrac{1-x}{1}$，即$\dfrac{x}{4x}=1-x$，$\therefore x=\dfrac{3}{4}$，$\therefore OB=4x=4\times\dfrac{3}{4}=3$，$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3,0)$.

如图(2)，当点 B 在点 E 左边时，过点 A 作 $AN\perp x$ 轴于 N，交 CF 的延长线于 M. 设 $CF=x$，同理可得 $CF /\!/ OB$，$OD=CD=CF=EF=DE=MN=x$. 由题可知 $\triangle OEF\backsim\triangle FEB$，$\therefore OE:EF=EF:BE=2:1$，$\therefore BE=\dfrac{1}{2}x$，$\therefore OB=\dfrac{3}{2}x$. $\because CF /\!/ OB$，$\therefore \triangle ACF\backsim\triangle AOB$，$\therefore \dfrac{CF}{OB}=\dfrac{AM}{AN}$，$\therefore \dfrac{x}{\frac{3}{2}x}=\dfrac{1-x}{1}$，$\therefore x=\dfrac{1}{3}$，$\therefore OB=\dfrac{1}{2}$，$\therefore B\left(\dfrac{1}{2},0\right)$. 综上所述，点 B 的坐标是$\left(\dfrac{3}{2},0\right)$或 $(3,0)$ 或$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

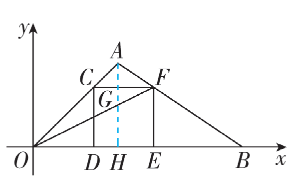
故答案为$\left(\dfrac{3}{2},0\right)$或 $(3,0)$ 或$\left(\dfrac{1}{2},0\right)$.

思路分析

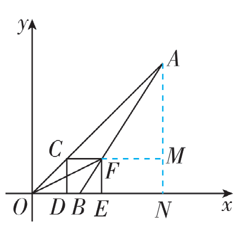
(2)过点 E 作 $EF\perp AC$ 于 F，设 $AD=x$，根据相似三角形的性质用含 x 的式子表示出 EF，再根据三角形的面积公式列方程求解即可，注意对求出的 x 值进行取舍.

易错警示

分点 B 在点 E 左边和点 B 在点 E 右边两种情况，注意不要漏解.



图(1)



图(2)

6. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore \angle D=\angle A=90°$. $\because HM\perp MN$，$\therefore \angle HMN=90°$，$\therefore \angle DMN+\angle AMH=\angle AHM+\angle AMH=90°$，$\therefore \angle AHM=\angle DMN$，$\therefore \triangle AHM\backsim\triangle DMN$.

【解】(2) $\because$ 点 M 是 AD 的中点，正方形 $ABCD$ 的边长为 4，$\therefore MD=AM=2$. 设 $HM=HB=x$，则 $AH=4-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AHM$ 中，$AH^2+AM^2=HM^2$，$\therefore (4-x)^2+2^2=x^2$，解得 $x=2.5$，$\therefore AH=1.5$.

$\because \triangle AHM\backsim\triangle DMN$，$\therefore \dfrac{AM}{DN}=\dfrac{MH}{MN}=\dfrac{AH}{MD}$，即$\dfrac{2}{DN}=\dfrac{2.5}{MN}=\dfrac{1.5}{2}$，$\therefore DN=\dfrac{8}{3}$，$MN=\dfrac{10}{3}$，$\therefore \triangle DMN$ 的周长为 $DN+MN+DM=\dfrac{8}{3}+\dfrac{10}{3}+2=8$.

(3) $\triangle DMN$ 的周长是一个定值，始终为 8. 理由如下：

设 $HM=HB=x$，则 $AH=4-x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle AHM$ 中，$AH^2+AM^2=HM^2$，$\therefore (4-x)^2+AM^2=x^2$，即 $AM=\sqrt{8x-16}$，$\therefore DM=4-AM=4-\sqrt{8x-16}$.

$\because \triangle AHM\backsim\triangle DMN$，且相似比为$\dfrac{AH}{MD}=\dfrac{4-x}{4-\sqrt{8x-16}}$，$\therefore C_{\triangle DMN}=C_{\triangle AHM}\cdot\dfrac{4-\sqrt{8x-16}}{4-x}=(4-x+x+\sqrt{8x-16})\cdot\dfrac{4-\sqrt{8x-16}}{4-x}=8$. $\therefore$ 在动点 H 逐渐向点 A 运动的过程中，$\triangle DMN$ 的周长是一个定值，始终为 8.

刷素养

7.【解】(1)① $\because DE /\!/ BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ACB$.

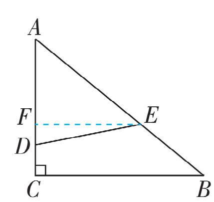
$\because DE$ 平分 $\triangle ABC$ 的面积，$\therefore \dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ACB}}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，即$\dfrac{AD}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，解得 $AD=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

②在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$，$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $3+4+5=12$.

$\because DE$ 平分 $\triangle ABC$ 的周长，$\therefore AD+AE=6$，即 $AE=6-AD$. $\because DE /\!/ BC$，$\therefore \triangle ADE\backsim\triangle ACB$，$\therefore \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{AE}{AB}$，即$\dfrac{AD}{3}=\dfrac{6-AD}{5}$，解得 $AD=\dfrac{9}{4}$.

(2)存在. 如图，过点 E 作 $EF\perp AC$ 于 F. 设 DE 将 $\triangle ABC$ 的周长平分，则 $AD+AE=6$. 设 $AD=x$，则 $AE=6-x$. $\because EF /\!/ BC$，



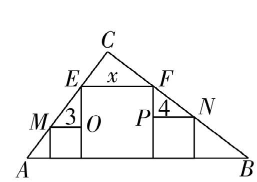
$\therefore \triangle AEF\backsim\triangle ABC$，$\therefore \dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AE}{AB}$，即$\dfrac{EF}{4}=\dfrac{6-x}{5}$，解得 $EF=\dfrac{24-4x}{5}$，$\therefore S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{2}AD\cdot EF=\dfrac{1}{2}x\cdot\dfrac{24-4x}{5}=-\dfrac{2}{5}x^2+\dfrac{12}{5}x$.

当 DE 将 $\triangle ABC$ 的面积平分时，$-\dfrac{2}{5}x^2+\dfrac{12}{5}x=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\dfrac{1}{2}$，解得 $x_1=\dfrac{6+\sqrt{6}}{2}$，$x_2=\dfrac{6-\sqrt{6}}{2}$.

$\because 0<x<3$，$\therefore x=\dfrac{6-\sqrt{6}}{2}$，即当 $AD=\dfrac{6-\sqrt{6}}{2}$时，DE 将 $\triangle ABC$ 的周长和面积同时平分.

微专题

1. B　【解析】如图，由题意得 $OM /\!/ AB /\!/ PN /\!/ EF$，$EO /\!/ FP$，$\angle C=\angle EOM=\angle NPF=90°$，



则$\angle CEF=\angle CMO$，$\angle CFE=\angle CNP$，$\therefore \triangle CEF\backsim\triangle OME\backsim\triangle PFN$，$\therefore OE:PN=OM:PF$. $\because EF=x$，$MO=3$，$PN=4$，$\therefore OE=x-3$，$PF=x-4$，$\therefore (x-3):4=3:(x-4)$，$\therefore (x-3)(x-4)=12$，即$x^2-4x-3x+12=12$，$\therefore x=0$（不符合题意，舍去）或7. 故选B.

思路分析 根据已知条件可以推出△CEF∽△OME∽△PFN，然后利用相似三角形对应边的比相等求解.

2.【解】（1）设正方形零件的边长为x mm，则$PN=PQ=ED=x$ mm，$\therefore AE=AD-ED=(80-x)$mm. $\because PN/\!/BC$，$\therefore \triangle APN\backsim\triangle ABC$，$\therefore \frac{PN}{BC}=\frac{AE}{AD}$，$\therefore \frac{x}{120}=\frac{80-x}{80}$，解得$x=48$，$\therefore$这个正方形零件的边长是48 mm.

（2）设$PN=2y$ mm，则$PQ=ED=y$ mm.

由题意可得$\triangle APN\backsim\triangle ABC$，$\therefore \frac{PN}{BC}=\frac{AE}{AD}$，

$\therefore \frac{2y}{120}=\frac{80-y}{80}$，解得$y=\frac{240}{7}$，

$\therefore PN=\frac{240}{7}\times2=\frac{480}{7}$(mm)，$\therefore$这个矩形零件的长和宽分别为$\frac{480}{7}$ mm，$\frac{240}{7}$ mm.

（3）设$PN=a$ mm，矩形$PQMN$的面积为S mm^2.

由题意可得$\triangle APN\backsim\triangle ABC$，$\therefore \frac{PN}{BC}=\frac{AE}{AD}$，

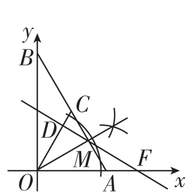
$\therefore \frac{a}{120}=\frac{80-PQ}{80}$，解得$PQ=80-\frac{2}{3}a$，$\therefore S=PN\cdot PQ=a\left(80-\frac{2}{3}a\right)=-\frac{2}{3}a^2+80a=-\frac{2}{3}(a-60)^2+2\ 400$.

$\because -\frac{2}{3}<0$，$\therefore$当$a=60$时，S有最大值，即矩形零件的最大面积为2 400 mm^2.

重难专题2　相似三角形与其他知识的综合

刷难关

1.【解】（1）如图，点M即为所求.



（2）如图，$\because \triangle AMO\backsim\triangle AOB$，$\therefore AO:AB=AM:AO$，$\therefore OA^2=AM\cdot AB$. $\because A(6,0)$，$\therefore OA=6$. $\because AB=4AM$，$\therefore AM\times4AM=36$，$\therefore AM=3$，$\therefore AB=12$，$\therefore OB=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$，$\therefore B(0,6\sqrt{3})$. $\because AC=BC$，$\therefore C(3,3\sqrt{3})$，$\therefore$直线$OC$的表达式为$y=\sqrt{3}x$. $\because \angle AMO=\angle AOB=90°$，$\therefore \frac{1}{2}\cdot OA\cdot OB=\frac{1}{2}\cdot OM\cdot AB$，

$\therefore OM=\frac{6\times6\sqrt{3}}{12}=3\sqrt{3}$，$\therefore$易得点$M$坐标为$\left(\frac{9}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. $\because MO=MF$，$\therefore$易得$F(9,0)$，

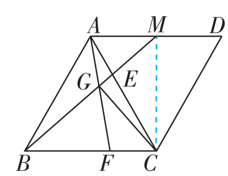
$\therefore$直线MF的表达式为$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3\sqrt{3}$.

由$\begin{cases}y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+3\sqrt{3},\\ y=\sqrt{3}x,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=\frac{9}{4},\\ y=\frac{9\sqrt{3}}{4},\end{cases}$

$\therefore D\left(\frac{9}{4},\frac{9\sqrt{3}}{4}\right)$.

2.【证明】（1）$\because$四边形$ABCD$是菱形，$\therefore AD/\!/BC$，$\therefore \angle MAB+\angle ABC=180°$. $\because \angle BGF=\angle ABC$，$\angle AGB+\angle BGF=180°$，$\therefore \angle AGB=\angle MAB$. 又$\because \angle ABG=\angle MBA$，$\therefore \triangle BAG\backsim\triangle BMA$.

（2）连接CM，如图. $\because$四边形$ABCD$为菱形，$\therefore AB=BC=CD$. $\because \angle ABC=60°$，$\therefore \triangle ABC$为等边三角形，$\therefore AB=BC=AC$，



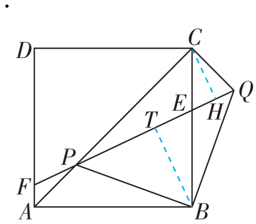
$\therefore AC=CD$. $\because M$为AD的中点，$\therefore CM\perp AD$. $\because AD/\!/BC$，$\therefore CM\perp BC$，$\therefore \angle MCB=90°$.

由（1）得$\triangle BAG\backsim\triangle BMA$，$\therefore \frac{AB}{BM}=\frac{BG}{AB}$，$\therefore BG\cdot BM=AB^2$，$\therefore BG\cdot BM=BC^2$，$\therefore \frac{BG}{BC}=\frac{BC}{BM}$.

又$\because \angle CBG=\angle MBC$，$\therefore \triangle BGC\backsim\triangle BCM$，$\therefore \angle BGC=\angle BCM=90°$，$\therefore CG\perp BM$.

3.（1）**【证明】**$\because$线段BP绕点B顺时针旋转90°得到线段BQ，$\therefore BP=BQ$，$\angle PBQ=90°$. $\because$四边形$ABCD$是正方形，$\therefore BA=BC$，$\angle ABC=90°$，$\therefore \angle ABC=\angle PBQ$，$\therefore \angle ABC-\angle PBC=\angle PBQ-\angle PBC$，即$\angle ABP=\angle CBQ$. 在$\triangle BAP$和$\triangle BCQ$中，$\because \begin{cases}BA=BC,\\ \angle ABP=\angle CBQ,\\ BP=BQ,\end{cases}$ $\therefore \triangle BAP\cong\triangle BCQ$(SAS)，$\therefore CQ=AP$.

（2）**【解】**如图，过点C作$CH\perp PQ$于H，过点B作$BT\perp PQ$于T.



$\because AP=\frac{1}{4}AC$，$\therefore$设$AP=CQ=a$，则$PC=3a$.

$\because$四边形$ABCD$是正方形，$\therefore \angle BAC=\angle ACB=45°$. $\because \triangle ABP\cong\triangle CBQ$，$\therefore \angle BCQ=\angle BAP=45°$，$\therefore \angle PCQ=90°$，$\therefore PQ=$

思路分析 （2）过点C作$CH\perp PQ$于H，过点B作$BT\perp PQ$于T. 由$AP=\frac{1}{4}AC$，可设$AP=CQ=a$，则$PC=3a$，进而求出CH，BT，利用相似三角形对应边成比例求解即可.

$\sqrt{PC^2+CQ^2}=\sqrt{(3a)^2+a^2}=\sqrt{10}a$.

∵ $CH\perp PQ$, ∴ $\frac{1}{2}PC\cdot CQ=\frac{1}{2}PQ\cdot CH$,

∴ $CH=\frac{PC\cdot CQ}{PQ}=\frac{3\sqrt{10}}{10}a$.

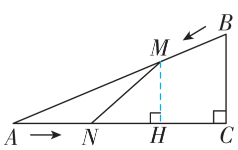
∵ $BP=BQ$, $BT\perp PQ$, ∴ $PT=TQ$. ∵ $\angle PBQ=90°$, ∴ $BT=\frac{1}{2}PQ=\frac{\sqrt{10}}{2}a$.

∵ 易证△CHE∽△BTE, ∴ $\frac{CE}{EB}=\frac{CH}{BT}=\frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}a}{\frac{\sqrt{10}}{2}a}=\frac{3}{5}$, ∴ $\frac{CE}{CB}=\frac{3}{8}$.

4.【解】(1)在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$, $BC=5$ cm, $AC=12$ cm,

∴ $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$(cm).

(2)如图，作 $MH\perp AC$ 于点 H，则 $MH/\!/BC$.



由题意得 $BM=2t$ cm, $AN=t$ cm，则 $AM=(13-2t)$ cm. ∵ $MH/\!/BC$, ∴ △AMH∽△ABC,

∴ $\frac{MH}{BC}=\frac{AM}{AB}$，即 $\frac{MH}{5}=\frac{13-2t}{13}$，解得 $MH=\frac{65-10t}{13}$ cm. 由题意得 $\frac{1}{2}\times t\times\frac{65-10t}{13}=\frac{1}{2}\times5\times12\times\frac{3}{26}$，解得 $t_1=2$, $t_2=\frac{9}{2}$，∴ t 为 2 或 $\frac{9}{2}$ 时，△AMN 的面积为△ABC 面积的 $\frac{3}{26}$.

(3)

思路分析｜相似三角形的分类讨论

以 A，M，N 为顶点的三角形与△ABC 相似 → $\angle A=\angle A$，点 A 与点 A 对应 → 分类讨论：
- △ANM∽△ACB → $\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$
- △AMN∽△ACB → $\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}$

存在. ∵ $\angle A=\angle A$, ∴ 当△ANM∽△ACB 时，$\frac{AN}{AC}=\frac{AM}{AB}$, ∴ $\frac{t}{12}=\frac{13-2t}{13}$，解得 $t=\frac{156}{37}$;

当△AMN∽△ACB 时，$\frac{AN}{AB}=\frac{AM}{AC}$, ∴ $\frac{t}{13}=\frac{13-2t}{12}$,

解得 $t=\frac{169}{38}$.

综上所述，存在 t 值使得以 A, M, N 为顶点的三角形与△ABC 相似，t 的值为 $\frac{156}{37}$ 或 $\frac{169}{38}$.

关键点拨 相似三角形面积的比等于相似比的平方.

易错警示 注意(3)需要分类讨论，不要漏解.

6.4~6.5　综合训练

刷综合

1. C　【解析】∵ $AD=DE=EB$, ∴ $AB=3BE$, $AE=2AD$. ∵ $EF/\!/AC$, ∴ △BEF∽△BAC, ∴ $EF:AC=BE:AB$. ∵ $AC=12$, $AB=3BE$, ∴ $EF:12=BE:3BE$, ∴ $EF=4$. ∵ $EF/\!/DG$, ∴ △ADH∽△AEF, ∴ $DH:EF=AD:AE$. ∵ $EF=4$, $AE=2AD$, ∴ $DH:4=AD:2AD$, ∴ $DH=2$. 故选 C.

2. $\frac{5}{2}$　【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，∴ $AD/\!/BC$, $OA=OC$. 又∵ $BE/\!/AC$, ∴ 四边形 $AEBC$ 是平行四边形，∴ $AC=BE$, ∴ $BE=2OA$. ∵ $AO/\!/BE$, ∴ 易证△OAF∽△EBF, ∴ $\frac{S_{\triangle OAF}}{S_{\triangle EBF}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, $\frac{EF}{OF}=\frac{BE}{OA}=2$, ∴ $S_{\triangle EBF}=4S_{\triangle OAF}$, $\frac{S_{\triangle AFE}}{S_{\triangle AOF}}=\frac{EF}{OF}=2$, ∴ $S_{\triangle AEF}=2S_{\triangle AOF}$. 同理可得 $S_{\triangle EBF}=2S_{\triangle OBF}$. ∵ $OA=OC$, ∴ $S_{\triangle OBC}=S_{\triangle OAB}$. 设 $S_{\triangle OAF}=x$，则 $S_{\triangle EBF}=4x$, $S_{\triangle AEF}=2x$, ∴ $S_{\triangle OBF}=2x$, ∴ $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle BOC}=S_{\triangle AOF}+S_{\triangle BOF}=x+2x=3x$, ∴ $S_{四边形BCOF}=S_{\triangle BOC}+S_{\triangle BOF}=3x+2x=5x$, ∴ $\frac{S_{四边形BCOF}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{5x}{2x}=\frac{5}{2}$，故答案为 $\frac{5}{2}$.

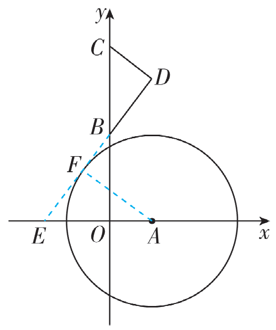
3. 5 或 10 或 $\frac{15}{13}$　【解析】设运动的时间为 t($t>0$)秒. 由题意，得 $OB=t$, $OC=2t$, ⊙A 的半径为 t, ∴ $BC=OC-OB=t$. ∵ $BD:CD=4:3$, ∴ 设 $BD=4k$($k>0$), $CD=3k$, ∴ $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=5k=t$, ∴ $k=\frac{t}{5}$, ∴ $BD=\frac{4t}{5}$, $CD=\frac{3t}{5}$. ∵ $A(5,0)$, ∴ $OA=5$.

①当⊙A 与△BCD 的 BC 边所在直线相切时，$OB=OA=5$, ∴ $t=5$.

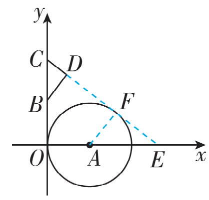
②如图(1)，当⊙A 与△BCD 的 BD 边所在直线相切时，设切点为点 F，延长 DB 交 x 轴于点 E，连接 AF，则 $AF=OB=t$, $AF\perp DE$. ∵ $\angle OBE=\angle DBC$, $\angle BOE=\angle BDC=90°$, ∴ △$BOE$∽△$BDC$, ∴ $\frac{OE}{CD}=\frac{OB}{BD}$，即 $\frac{OE}{\frac{3t}{5}}=\frac{t}{\frac{4t}{5}}$,

∴ $OE=\frac{3t}{4}$, ∴ $AE=OA+OE=5+\frac{3t}{4}$, $BE=\sqrt{OB^2+OE^2}=\frac{5t}{4}$. ∵ $\angle OEB=\angle FEA$, $\angle BOE=\angle AFE=90°$, ∴ △$BOE$∽△$AFE$, ∴ $\frac{OB}{AF}=\frac{BE}{AE}$,

即$\frac{t}{t}=\frac{\frac{5t}{4}}{5+\frac{3t}{4}}$，整理得$\frac{5t}{4}=5+\frac{3t}{4}$，解得 $t=10$.



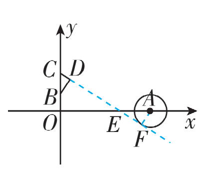
图(1)



图(2)

③如图(2)，当⊙A与△BCD的CD边所在直线相切，且点A在直线CD的下方时，设切点为点F，延长CD交x轴于点E，连接AF，则$AF=OB=t$，$AF\perp CE$. ∵ $\angle OCE=\angle DCB$，$\angle EOC=\angle BDC=90°$，∴ $\triangle EOC\backsim\triangle BDC$，∴ $\frac{OE}{BD}=\frac{OC}{CD}$，即$\frac{OE}{\frac{4t}{5}}=\frac{2t}{\frac{3t}{5}}$，∴ $OE=\frac{8t}{3}$，∴ $AE=OE-OA=\frac{8t}{3}-5$，$CE=\sqrt{OC^2+OE^2}=\frac{10t}{3}$. ∵ $\angle OEC=\angle FEA$，$\angle COE=\angle AFE=90°$，∴ $\triangle EOC\backsim\triangle EFA$，∴ $\frac{OC}{AF}=\frac{CE}{AE}$，即$\frac{2t}{t}=\frac{\frac{10t}{3}}{\frac{8t}{3}-5}$，整理得$\frac{10t}{3}=2\left(\frac{8t}{3}-5\right)$，解得 $t=5$.

④如图(3)，当⊙A与△BCD的CD边所在直线相切，且点A在直线CD的上方时，设切点为点F，延长CD交x轴于点E，连接AF，则$AF=OB=t$，$AF\perp CE$.



图(3)

∵ $\angle OCE=\angle DCB$，$\angle EOC=\angle BDC=90°$，∴ $\triangle EOC\backsim\triangle BDC$，∴ $\frac{OE}{BD}=\frac{OC}{CD}$，即$\frac{OE}{\frac{4t}{5}}=\frac{2t}{\frac{3t}{5}}$，∴ $OE=\frac{8t}{3}$，∴ $AE=OA-OE=5-\frac{8t}{3}$，$CE=\sqrt{OC^2+OE^2}=\frac{10t}{3}$. ∵ $\angle OEC=\angle FEA$，$\angle COE=\angle AFE=90°$，∴ $\triangle EOC\backsim\triangle EFA$，∴ $\frac{OC}{AF}=\frac{CE}{AE}$，

思路分析

(1)连接OD，由$\angle BAC$是直径所对的圆周角，可知$\angle BAC=90°$，再由AD是$\angle BAC$的平分线，可得$\angle BAD=45°$，根据同弧所对的圆周角与圆心角的关系，可得$\angle BOD=90°$，再由切线$DP\perp OD$，可证$DP//BC$.

思路分析

【基础模型】证明$\triangle ADC\backsim\triangle ACB$，得出$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$，则可证得结论.

【尝试应用】证明$\triangle BFE\backsim\triangle BCF$，得出$\frac{BF}{BC}=\frac{BE}{BF}$，则$BF^2=BE\cdot BC$，求出$BC$，则可求出$AD$.

【拓展延伸】分别延长EF，DC相交于点G，证得四边形$AEGC$为平行四边形，得出$AC=EG$，$CG=AE$，$\angle EAC=\angle G$，证明$\triangle EDF\backsim\triangle EGD$，得出$\frac{ED}{EG}=\frac{EF}{DE}$，则$DE=\sqrt{2}EF$，可求出$DG$，即可求得$DC$.

即$\frac{2t}{t}=\frac{\frac{10t}{3}}{5-\frac{8t}{3}}$，整理得$\frac{10t}{3}=2\left(5-\frac{8t}{3}\right)$，解得 $t=\frac{15}{13}$. 综上，运动的时间为 5 秒或 10 秒或$\frac{15}{13}$秒.

故答案为 5 或 10 或$\frac{15}{13}$.

4. (1)【证明】连接OD. ∵ DP是⊙O的切线，∴ $DO\perp DP$. ∵ AD是$\angle BAC$的平分线，∴ $\angle BAD=\angle CAD$. ∵ BC是⊙O的直径，∴ $\angle BAC=90°$，∴ $\angle BAD=45°$，∴ $\angle BOD=90°$，∴ $OD\perp BC$，∴ $DP//BC$.

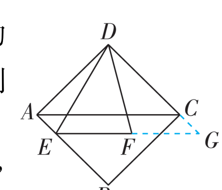
(2)【证明】∵ $DP//BC$，∴ $\angle ACB=\angle P$. ∵ $\angle ACB=\angle ADB$，∴ $\angle P=\angle ADB$.
连接OD. 由(1)知$\angle BOD=\angle ODP=90°$.
∵ $OD=OC$，∴ $\angle ODC=45°$，
∴ $\angle CDP=45°=\angle BAD$，∴ $\triangle ABD\backsim\triangle DCP$.

(3)【解】连接OD. ∵ $AB=5$ cm，$AC=12$ cm，$\angle BAC=90°$，∴ $BC=13$ cm. 在Rt△COD中，易得$CD=\frac{13\sqrt{2}}{2}$ cm. 在Rt△BOD中，易得$BD=\frac{13\sqrt{2}}{2}$ cm. ∵ $\triangle ABD\backsim\triangle DCP$，∴ $\frac{AB}{CD}=\frac{BD}{CP}$，∴ $\frac{5}{\frac{13\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{13\sqrt{2}}{2}}{CP}$，∴ $CP=\frac{169}{10}$ cm.

5.【基础模型】【证明】∵ $\angle ACD=\angle B$，$\angle A=\angle A$，∴ $\triangle ADC\backsim\triangle ACB$，∴ $\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$，∴ $AC^2=AD\cdot AB$.

【解】【尝试应用】∵ 四边形$ABCD$是平行四边形，∴ $AD=BC$，$\angle A=\angle C$. 又∵ $\angle BFE=\angle A$，∴ $\angle BFE=\angle C$. ∵ $\angle FBE=\angle CBF$，∴ $\triangle BFE\backsim\triangle BCF$，∴ $\frac{BF}{BC}=\frac{BE}{BF}$，∴ $BF^2=BE\cdot BC$. ∵ $BF=6$，$BE=4$，∴ $BC=\frac{BF^2}{BE}=\frac{6^2}{4}=9$，∴ $AD=9$.

【拓展延伸】菱形$ABCD$的边长为$5\sqrt{2}-2$. 如图，分别延长EF，DC相交于点G. ∵ 四边形$ABCD$是菱形，∴ $AB//DC$，$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BAD$.



∵ $AC//EF$，∴ 四边形$AEGC$为平行四边形，∴ $AC=EG$，$CG=AE$，$\angle EAC=\angle G$. ∵ $\angle EDF=\frac{1}{2}\angle BAD$，∴ $\angle EDF=\angle BAC$，∴ $\angle EDF=\angle G$.

又∵ $\angle DEF=\angle GED$，∴ $\triangle EDF\backsim\triangle EGD$，∴ $\frac{ED}{EG}=\frac{EF}{ED}$，∴ $DE^2=EF\cdot EG$. 又∵ $EG=AC=2EF$，∴ $DE^2=2EF^2$，∴ $DE=\sqrt{2}EF$. ∵ $\frac{DG}{FD}=\frac{DE}{FE}$，∴ $DG=\sqrt{2}DF=5\sqrt{2}$，∴ $DC=DG-CG=5\sqrt{2}-2$，∴ 菱形 $ABCD$ 的边长为 $5\sqrt{2}-2$.

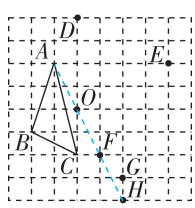
6.6　图形的位似

刷基础

1. D　【解析】

A	是位似图形，故本选项不符合题意
B	是位似图形，故本选项不符合题意
C	是位似图形，故本选项不符合题意
D	不是位似图形，故本选项符合题意

2. D　【解析】如图，连接 AO 并延长. ∵ 以点 O 为位似中心，点 D 是点 C 的对应点，∴ 相似比为 $\frac{OC}{OD}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，∴ 点 A 的对应点是 H. 故选 D.

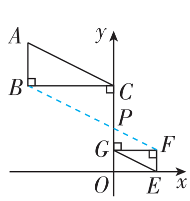


刷有所得　两个多边形不仅相似，而且对应顶点的连线所在的直线交于一点，并且对应边互相平行或位于同一直线上，像这样的两个图形叫做位似图形.

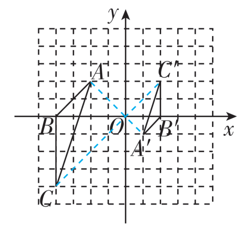
3. A　【解析】∵ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 位似，∴ $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$，$AC/\!/A_1C_1$，∴ $\triangle AOC\backsim\triangle A_1OC_1$，∴ $\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{OA}{OA_1}=\frac{1}{2}$，∴ $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 的周长比为 $1:2$. 故选 A.

4. 5　【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 与四边形 $A'B'C'D'$ 位似，位似中心为点 O，$OC=6$，$CC'=4$，∴ $\frac{OC}{OC'}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，∴ $\frac{AB}{A'B'}=\frac{3}{5}$. ∵ $AB=3$，∴ $A'B'=5$. 故答案为 5.

5. B　【解析】如图，连接 BF，交 CG 于点 P，点 P 即为位似中心. ∵ 点 B 和 F 的坐标分别为 $(-4,4)$，$(2,1)$，∴ $C(0,4)$，$G(0,1)$，$CB=4$，$FG=2$，$CG=3$. 由题意可得 $\triangle BCP\backsim\triangle FGP$，∴ $\frac{CB}{GF}=\frac{PC}{PG}=2$，∴ $2GP=3-GP$，解得 $GP=1$，∴ $OP=OG+GP=2$，∴ 位似中心的坐标为 $(0,2)$. 故选 B.



6.【解】(1) 如图，$\triangle A'B'C'$ 即为所求.



(2) $A'(1,-1)$，$B'(2,0)$，$C'(2,2)$.

(3) 由题意可得，点 M' 的坐标为 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$.

故答案为 $\left(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2}\right)$.

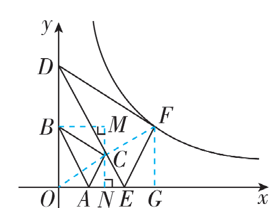
刷易错

7. $(2,1)$ 或 $(-2,-1)$　【解析】∵ 以点 O 为位似中心把 $\triangle ABO$ 缩小，相似比为 $\frac{1}{2}$，点 A 的坐标是 $(4,2)$，∴ 点 A 的对应点 A_1 的坐标为 $\left(4\times\frac{1}{2},2\times\frac{1}{2}\right)$ 或 $\left(-4\times\frac{1}{2},-2\times\frac{1}{2}\right)$，即 A_1 的坐标为 $(2,1)$ 或 $(-2,-1)$.

易错警示　几何图形关于一点的位似图形有两个，与原图形在位似中心同侧或异侧.

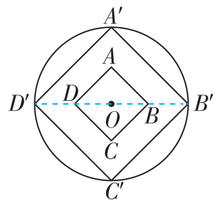
刷提升

1. A　【解析】如图，过点 C 作 $CN\perp x$ 轴于点 N，过点 B 作 $BM\perp CN$ 交 NC 延长线于点 M. 由题意可知 $OA=AC=1$，$OB=BC=2$，$\angle AOB=\angle ACB=90°$. ∵ $CN\perp x$ 轴，$BM\perp CN$，∴ $\angle M=\angle ANC=90°$，∴ 四边形 $ONMB$ 是矩形，∴ $\angle CAN+\angle ACN=90°$. 又∵ $\angle ACB=90°$，∴ $\angle BCM+\angle ACN=90°$，∴ $\angle BCM=\angle CAN$，∴ $\triangle ACN\backsim\triangle CBM$，∴ $\frac{CA}{BC}=\frac{AN}{CM}=\frac{CN}{BM}$，∴ $\frac{1}{2}=\frac{AN}{2-CN}=\frac{CN}{1+AN}$，则 $AN=\frac{3}{5}$，$CN=\frac{4}{5}$，∴ $ON=OA+AN=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}$，∴ $C\left(\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$. 连接 OF，∵ 以 O 为位似中心，将 $\triangle ACB$ 放大为原来的两倍后得到 $\triangle EFD$，其中点 C 的对应点为点 F，点 F 恰好在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像上，∴ 点 C 在 OF 上，$OB=BD$，$OA=AE$，$OC=CF$. 过点 F 作 $FG\perp x$ 轴，∴ $\angle CNO=\angle FGO=90°$，∴ $CN/\!/FG$，∴ $\triangle CON\backsim\triangle FOG$，∴ $\frac{ON}{OG}=\frac{CN}{FG}=\frac{OC}{OF}=\frac{1}{2}$，∴ $FG=\frac{8}{5}$，$OG=\frac{16}{5}$，∴ $F\left(\frac{16}{5},\frac{8}{5}\right)$. 将点 $F\left(\frac{16}{5},\frac{8}{5}\right)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$，得 $\frac{8}{5}=\frac{k}{\frac{16}{5}}$，∴ $k=\frac{128}{25}$.

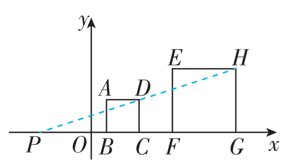


故选 A.

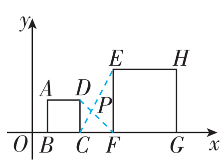
2. $4\sqrt{2}\pi$ 【解析】如图，连接 $B'D'$. 设 $B'D'$ 的中点为 O. 易得 $B'D'$ 为正方形 $A'B'C'D'$ 外接圆的直径，点 O 为圆心. $\because$ 正方形 $ABCD\backsim$ 正方形 $A'B'C'D'$，相似比为 $1:2$，且正方形 $ABCD$ 的面积为 4，$\therefore$ 正方形 $A'B'C'D'$ 的面积为 16，$\therefore A'B'=A'D'=4$. $\because \angle B'A'D'=90°$，$\therefore B'D'=\sqrt{2}A'B'=4\sqrt{2}$，$\therefore$ 正方形 $A'B'C'D'$ 的外接圆的周长为 $4\sqrt{2}\pi$. 故答案为 $4\sqrt{2}\pi$.



3. $(-3,0)$ 或 $\left(\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)$ 【解析】如图(1)，连接 HD 并延长交 x 轴于点 P，则点 P 为位似中心. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形，点 A 的坐标为 $(1,2)$，$\therefore$ 易得点 D 的坐标为 $(3,2)$. $\because DC\perp x$ 轴，$HG\perp x$ 轴，$\therefore DC// HG$，$\therefore \triangle PCD\backsim\triangle PGH$，$\therefore \frac{PC}{PG}=\frac{CD}{HG}$，即 $\frac{OP+3}{OP+9}=\frac{2}{4}$，解得 $OP=3$，$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 与正方形 $EFGH$ 的位似中心的坐标是 $(-3,0)$.



图(1)



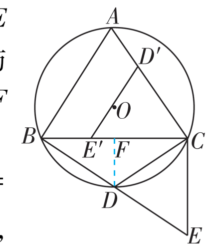
图(2)

如图(2)，连接 CE，DF 交于点 P，则点 P 为位似中心. 由题意易得 $C(3,0)$，$E(5,4)$，$D(3,2)$，$F(5,0)$，易得直线 DF 的表达式为 $y=-x+5$，直线 CE 的表达式为 $y=2x-6$. 联立 $\begin{cases}y=-x+5,\\ y=2x-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=\frac{11}{3},\\ y=\frac{4}{3},\end{cases}$ $\therefore$ 直线 DF，CE 的交点 P 为 $\left(\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)$，$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 与正方形 $EFGH$ 的位似中心的坐标是 $\left(\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)$. 故答案为 $(-3,0)$ 或 $\left(\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)$.

4. (1)【证明】$\because \triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接正三角形，$\therefore \angle BAC=60°$，$\therefore \angle BDC=120°$，$\therefore \angle CDE=60°$. $\because$ 点 D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore BD=CD$. $\because BD=DE$，$\therefore CD=DE$，$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形.

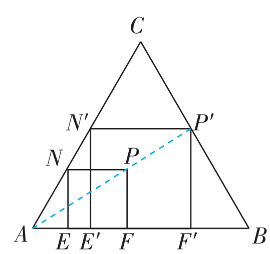
关键点拨
(1)解题的关键是利用圆内接四边形的性质得到 $\angle BDC$ 的度数.

(2)【解】如图，当 $\triangle CDE$ 绕点 C 顺时针旋转 $90°$ 后与 $\triangle ABC$ 位似(答案不唯一). 由(1)知 $\angle BDC=120°$，$BD=CD$，$\therefore \angle CBD=\angle BCD=30°$. $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore \angle ACB=60°$，$\therefore \angle ACD=90°$，$\therefore$ 当 $\triangle CDE$ 绕点 C 顺时针旋转 $90°$ 后与 $\triangle ABC$ 位似. 作 $DF\perp BC$ 于 F 点，设 $DC=D'C=E'C=2x$. $\because \angle BCD=30°$，$\therefore$ 易得 $FC=\sqrt{3}x$，$\therefore BC=2FC=2\sqrt{3}x$，$\therefore \triangle CD'E'$ 与 $\triangle ABC$ 的相似比为 $\frac{E'C}{BC}=\frac{2x}{2\sqrt{3}x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

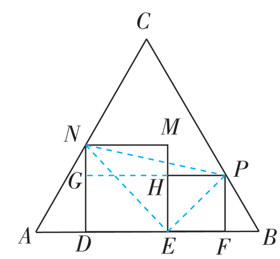


刷素养

5.【解】(1)如图(1)，正方形 $E'F'P'N'$ 即为所求.



图(1)



图(2)

(2)设正方形 $E'F'P'N'$ 的边长为 x. $\because \triangle ABC$ 为正三角形，$\angle P'F'B=90°$，$\therefore \angle B=60°$，$\therefore \angle F'P'B=30°$，$\therefore$ 易得 $BF'=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，同理得 $AE'=BF'=\frac{\sqrt{3}}{3}x$. $\because E'F'+AE'+BF'=AB$，$\therefore x+\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{3}x=3+\sqrt{3}$，$\therefore x=\frac{9+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3}$，即 $x=3\sqrt{3}-3$，

$\therefore$ 正方形 $E'F'P'N'$ 的边长为 $3\sqrt{3}-3$.

思路分析
(3)设正方形 $DEMN$、正方形 $EFPH$ 的边长分别为 m，$n(m\geqslant n)$，求得面积和的表达式为 $S=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}(m-n)^2$，可见 S 的大小只与 m，n 的差有关：①当 $m=n$ 时，S 取得最小值；②当 m 最大而 n 最小时，S 取得最大值.

(3)如图(2)，连接 NE，EP，PN，则易得 $\angle NEP=90°$. 设正方形 $DEMN$、正方形 $EFPH$ 的边长分别为 m，$n(m\geqslant n)$，它们的面积和为 S，则 $NE=\sqrt{2}m$，$PE=\sqrt{2}n$，同(2)易得 $AD=\frac{\sqrt{3}}{3}m$，$BF=\frac{\sqrt{3}}{3}n$，$\therefore PN^2=NE^2+PE^2=2m^2+2n^2=2(m^2+n^2)$，$\therefore S=m^2+n^2=\frac{1}{2}PN^2$. 延长 PH 交 ND 于点 G，则 $PG\perp ND$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle PGN$ 中，$PN^2=PG^2+GN^2=(m+n)^2+(m-n)^2$. $\because AD+DE+EF+BF=AB$，即 $\frac{\sqrt{3}}{3}m+m+n+\frac{\sqrt{3}}{3}n=\sqrt{3}+3$，化简得 $m+n=3$，$\therefore S=\frac{1}{2}[3^2+(m-n)^2]=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}(m-n)^2$. ①当 $(m-n)^2=0$，即 $m=n$ 时，S 最小，$\therefore S_{最小}=\frac{9}{2}$；②当 $(m-n)^2$ 最大时，S 最大，

即当 m 最大且 n 最小时,S 最大. $\because m+n=3$,由(2)知,$m_{最大}=3\sqrt{3}-3$,$\therefore n_{最小}=6-3\sqrt{3}$,

$\therefore S_{最大}=\frac{1}{2}[9+(m_{最大}-n_{最小})^2]=\frac{1}{2}[9+(3\sqrt{3}-3-6+3\sqrt{3})^2]=99-54\sqrt{3}$.

综上所述,$S_{最大}=99-54\sqrt{3}$,$S_{最小}=\frac{9}{2}$.

6.7　用相似三角形解决问题

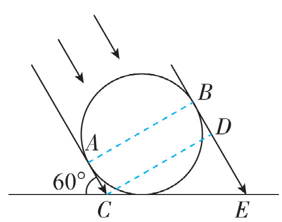
课时 1　平行投影

刷基础

1. B　【解析】当等边三角形木框与太阳光平行时,影子是 A;当等边三角形木框与太阳光有一定角度时,影子是 C 或 D,影子不可能是 B. 故选 B.

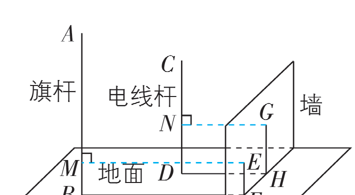
2. B　【解析】一天中,阳光下物体的影子变化规律是方向由西逐渐转向东,上午影子由长逐渐变短,下午影子由短逐渐变长. 据此按时间先后顺序给题中四张照片排序是①③②④. 故选 B.

3. B　【解析】如图,点 A 与点 B 为太阳光线与球的切点,点 C,E 为过点 A,B 的太阳光线与地面的交点,连接 AB,过点 C 作 $CD/\!/AB$ 交 BE 于点 D,则 AB 为皮球的直径,$CD\perp BE$,$CD=AB$,$CE=10\sqrt{3}$,$\angle DEC=60°$,$\therefore \angle DCE=30°$. 在 Rt$\triangle CDE$ 中,$DE=\frac{1}{2}CE=5\sqrt{3}$,$\therefore CD=\sqrt{CE^2-DE^2}=15$,$\therefore AB=CD=15$,即皮球的直径为 15 cm. 故选 B.



4. 11　【解析】设树高是 x 米. 根据题意,得 $\frac{x}{1}=\frac{16.5}{1.5}$,解得 $x=11$,即树高为 11 米. 故答案为 11.

5. 3　【解析】如图,过点 E 作 $EM\perp AB$ 于 M,过点 G 作 $GN\perp CD$ 于 N. 由题意得四边形 $EFBM$、四边形 $GHDN$ 是矩形,则 $MB=EF=2$ m,$ND=GH$,$ME=BF=10$ m,$NG=DH=5$ m. $\because AB=10$ m,$CD=7$ m,$\therefore AM=AB-MB=10-2=8$(m),$CN=CD-DN=7-GH$. 由平行投影可知,$\frac{AM}{ME}=\frac{CN}{NG}$,即 $\frac{8}{10}=\frac{7-GH}{5}$,$\therefore GH=3$ m. 故答案为 3.



刷有所得

当人在路灯下行走时,在灯光照射范围内,离开路灯越远,影子就越长.

归纳总结

在太阳光的照射下,在同一时刻,不同物体的物高与影长成比例.

6.【解】(1)由题意得 $DB/\!/AC$,$\therefore \frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}$.

$\because OC=1.2$,$OB=3.6$,$AB=2$,$\therefore OA=OB-AB=1.6$,$\therefore \frac{1.6}{2}=\frac{1.2}{CD}$,解得 $CD=1.5$.

答:窗框的高度为 1.5 米.

(2)由题意得 $DE/\!/A'C$,$\therefore \frac{OA'}{A'E}=\frac{OC}{CD}$.

$\because OC=1.2$,$OA'=OA+AA'=2$,$CD=1.5$,

$\therefore \frac{2}{A'E}=\frac{1.2}{1.5}$,$\therefore A'E=2.5$,$\therefore BE=OA'+A'E-OB=2+2.5-3.6=0.9$.

答:BE 的长为 0.9 米.

课时 2　中心投影

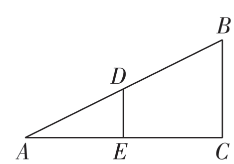
刷基础

1. C　【解析】A 选项,白天旗杆的影子为平行投影,所以 A 选项不合题意;B 选项,阳光下广告牌的影子为平行投影,所以 B 选项不合题意;C 选项,室内舞台上演员的影子是中心投影,所以 C 选项符合题意;D 选项,中午小明在室外跑步的影子是平行投影,所以 D 选项不合题意. 故选 C.

2. B　【解析】在中心投影下,一条线段的投影可能是一个点,可能是比原线段长或短的线段,不可能是一段圆弧. 故选 B.

3. B

4. C　【解析】示意图如图所示,由题意可得 $DE/\!/BC$,$\therefore \triangle AED\backsim\triangle ACB$,$\therefore \frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$. 设屏幕上图形的高度是 x cm,即 $BC=x$ cm,则 $\frac{20}{40}=\frac{8}{x}$,解得 $x=16$. 经检验,$x=16$ 是原方程的解,$\therefore$ 屏幕上图形的高度为 16 cm. 故选 C.



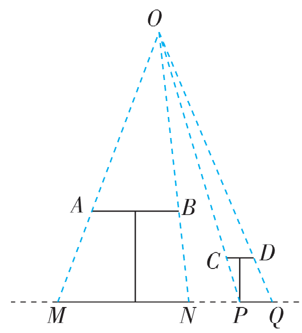
5. A　【解析】根据题意得 $CE\perp CF$,$\therefore \angle ECF=90°$,$\therefore \angle ECD+\angle DCF=90°$. $\because CD\perp EF$,$\therefore \angle CDE=\angle CDF=90°$,$\therefore \angle F+\angle DCF=90°$,$\therefore \angle ECD=\angle CFD$,$\therefore \triangle CDE\backsim\triangle FDC$,$\therefore \frac{ED}{CD}=\frac{CD}{FD}$,即 $CD^2=ED\cdot FD$,代入数据可得 $4^2=8ED$,解得 $ED=2$ m,即 B 时的影长 DE 为 2 m. 故选 A.

6. $8\sqrt{13}$　【解析】$\because \angle ACB=90°$,$BC=12$ cm,$AC=8$ cm,$B_1C_1=24$ cm,$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{8^2+12^2}=4\sqrt{13}$(cm). $\because \triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$,$\therefore A_1B_1:AB=B_1C_1:BC=2:1$,$\therefore A_1B_1=$

$8\sqrt{13}$ cm. 故答案为 $8\sqrt{13}$.

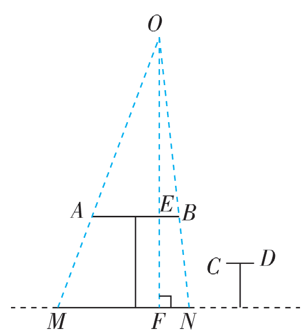
7. 7.5 【解析】∵ $AE\perp OD$，$GO\perp OD$，∴ $EA/\!/GO$，∴ $\triangle AEB\backsim\triangle OGB$，∴ $\frac{AE}{OG}=\frac{AB}{OB}$，∴ $\frac{1.6}{5.6}=\frac{AB}{AB+5}$，解得 $AB=2$ 米. ∵ 沿 OA 所在的直线行走到点 C 时，影长增加3米，∴ $DC=5$ 米. 同理可得 $\triangle DFC\backsim\triangle DGO$，∴ $\frac{FC}{GO}=\frac{CD}{OD}$，即 $\frac{1.6}{5.6}=\frac{5}{5+5+AC}$，解得 $AC=7.5$ 米. 故答案为 7.5.

8.【解】(1)如图(1)，点 O 即为路灯灯泡的位置，线段 PQ 即为 CD 的影子.



图(1)

(2)如图(2)，过点 O 作 $OF\perp MN$ 于点 F，交 AB 于点 E.



图(2)

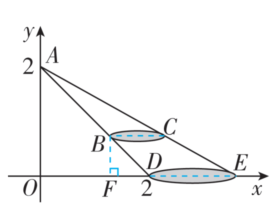
∵ $AB/\!/MN$，∴ $OE\perp AB$，$\triangle OAB\backsim\triangle OMN$，∴ $\frac{OE}{OF}=\frac{AB}{MN}$. 由题意可得，$AB=1.2$ m，$MN=1.8$ m，$EF=1.2$ m，则 $OE=OF-EF=OF-1.2$，∴ $\frac{OF-1.2}{OF}=\frac{1.2}{1.8}$，∴ $OF=3.6$ m.

答：路灯灯泡 O 与地面的距离为 3.6 m.

归纳总结 对应点所在直线的交点即为点光源的位置.

刷提升

1. B 【解析】如图，连接 BC，DE，过点 B 作 $BF\perp x$ 轴，垂足为 F. 由题意得，$BF=0.75$，$BC=1$. ∵ $BC/\!/DE$，



∴ $\triangle ABC\backsim\triangle ADE$，∴ $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}$. ∵ $BF\perp x$ 轴，$OA\perp x$ 轴，∴ $BF/\!/OA$，∴ $\triangle DBF\backsim\triangle DAO$，∴ $\frac{BD}{AD}=\frac{BF}{OA}$，∴ $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{OA-BF}{OA}$，即 $\frac{1}{DE}=\frac{2-0.75}{2}$，解得 $DE=\frac{8}{5}$，∴ $OE=2+\frac{8}{5}=3.6$，∴ 点 E 的坐标是(3.6,0). 故选 B.

2. B 【解析】∵ $AB\perp BD$，$AC\perp AB$，∴ $AC/\!/BD$，∴ $\angle ACB=\angle DBC$. ∵ $\angle A=\angle BCD=90°$，∴ $\triangle ABC\backsim\triangle CDB$，∴ $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{BD}$，∴ $BC^2=AC\cdot BD$. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$BC^2=AC^2+AB^2=10^2+30^2=1\ 000$，∴ $10BD=1\ 000$，∴ $BD=100$ cm. 故选 B.

关键点拨 先证$\triangle CAE\backsim\triangle COF$，得出$\frac{OA}{CO}=\frac{2}{5}$，再证$\triangle OAB\backsim\triangle OCD$，根据相似三角形的对应边成比例得出$\frac{AB}{CD}=\frac{OA}{CO}$，即可求出 CD 的长.

3. C 【解析】由题意得，$AB/\!/MN$，$AE/\!/OF$，$AB/\!/CD$，∴ 四边形 $ABOE$ 是平行四边形，∴ $AE=OB=6$ cm. ∵ $AE/\!/OF$，∴ $\triangle CAE\backsim\triangle COF$，∴ $\frac{CA}{CO}=\frac{AE}{OF}$，∴ $\frac{CA}{CO}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，∴ $\frac{OA}{CO}=\frac{2}{5}$. ∵ $AB/\!/CD$，∴ $\triangle OAB\backsim\triangle OCD$，∴ $\frac{AB}{CD}=\frac{OA}{CO}$，∴ $\frac{5.4}{CD}=\frac{2}{5}$，∴ $CD=13.5$ cm. 故选 C.

4. 32 【解析】设 $OE=x$ m，$OA=a$ m，$BC=b$ m，则 $AB=(2-b)$ m，$CD=(2.1-b)$ m，$CO=(2+a)$ m. 易知$\triangle AFB\backsim\triangle AEO$，$\triangle CGD\backsim\triangle CEO$，∴ $\frac{BF}{OE}=\frac{AB}{AO}$，$\frac{GD}{EO}=\frac{DC}{OC}$. ∵ $BF=GD$，∴ $\frac{AB}{AO}=\frac{DC}{CO}$，即 $\frac{2-b}{a}=\frac{2.1-b}{2+a}$，解得 $a=20(2-b)$. 将 a 的值代入 $\frac{BF}{OE}=\frac{AB}{AO}$ 中，得 $\frac{1.6}{x}=\frac{2-b}{20(2-b)}$，解得 $x=32$，∴ 楼的高度 OE 是 32 m. 故答案为 32.

刷素养

5.【解】(1)∵ $\angle CEF=\angle AEF$，$AB\perp BD$，$FE\perp BD$，$CD\perp BD$，∴ $\angle AEB=\angle CED=90°-\angle AEF$，$\angle B=\angle D=90°$，∴ $\triangle ABE\backsim\triangle CDE$，∴ $\frac{AB}{BE}=\frac{CD}{DE}$.

∵ $CD=1.7$ m，$BE=20$ m，$DE=2$ m，∴ $\frac{AB}{20}=\frac{1.7}{2}$，∴ $AB=17$ m.

(2)∵ $GB\perp BD$，$CD\perp BD$，∴ $\angle B=\angle D=90°$. ∵ 易知 $\angle GE_1B=\angle CE_1D$，∴ $\triangle GBE_1\backsim\triangle CDE_1$，∴ $\frac{GB}{BE_1}=\frac{CD}{DE_1}$. ∵ $DE_1=2$ m，$BD=10$ m，∴ $BE_1=BD-DE_1=10-2=8$(m).

$\because CD=1.7\ \text{m}$，$\therefore \frac{GB}{8}=\frac{1.7}{2}$，$\therefore GB=6.8\ \text{m}$.

$\because \angle B=\angle D=90°$，易知$\angle AE_2B=\angle CE_2D$，

$\therefore \triangle ABE_2 \backsim \triangle CDE_2$，$\therefore \frac{AB}{BE_2}=\frac{CD}{DE_2}$.

$\because DE_2=3.4\ \text{m}$，$BD=10\ \text{m}$，$\therefore BE_2=BD-DE_2=10-3.4=6.6(\text{m})$.

$\because CD=1.7\ \text{m}$，$\therefore \frac{AB}{6.6}=\frac{1.7}{3.4}$，$\therefore AB=3.3\ \text{m}$，

$\therefore AG=GB-AB=6.8-3.3=3.5(\text{m})$.

全章综合训练

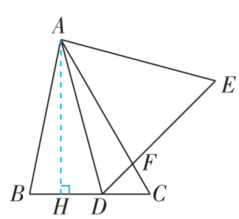
刷中考

1. D　【解析】

A	$\because \angle B+\angle 4=180°$，$\therefore CD/\!/BM$，$\therefore \angle CDN=\angle AME$. $\because AE/\!/BC$，$\therefore \angle AEM=\angle CND$，$\therefore \triangle MAE \backsim \triangle DCN$，故 A 不符合题意
B	$\because CD/\!/AB$，$\therefore \angle CDN=\angle AME$. $\because AE/\!/BC$，$\therefore \angle AEM=\angle CND$，$\therefore \triangle MAE \backsim \triangle DCN$，故 B 不符合题意
C	$\because AE/\!/BC$，$\therefore \angle 1+\angle B=180°$. $\because \angle 1=\angle 4$，$\therefore \angle B+\angle 4=180°$. 由 A 可知 $\triangle MAE \backsim \triangle DCN$，故 C 不符合题意
D	根据$\angle 2=\angle 3$，再结合已知条件不能证明$\triangle MAE \backsim \triangle DCN$，故 D 符合题意

故选 D.

2. $\frac{3}{4}$　【解析】如图所示，过点 A 作 $AH\perp BC$ 于 H. 在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中，$\angle C=60°$，$\angle AHC=90°$，$\therefore \angle CAH=30°$，$\therefore CH=\frac{1}{2}AC=\frac{3}{2}$，由



勾股定理易得，$AH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. $\because \triangle ADE$ 是等边三角形，$\therefore \angle ADE=60°=\angle C$. 又$\because \angle DAC=\angle FAD$，$\therefore \triangle DAC \backsim \triangle FAD$，$\therefore \frac{AD}{AC}=\frac{AF}{AD}$，$\therefore AF=\frac{AD^2}{AC}=\frac{AD^2}{3}$，$\therefore$ 当 AD 长度取得最小值时，AF 长度取得最小值. 当 $AD\perp BC$ 时，AD 长度取得最小值，此时点 D 与点 H 重合，$\therefore AD$ 长度的最小值为$\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$\therefore AF$ 长度的最小值为$\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3}=\frac{9}{4}$. $\because CF=AC-AF$，$\therefore$ 当 AF 长度取得最小值时，CF 长度取得最大值，$\therefore CF$ 长度的最大值为 $3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$，故答案为$\frac{3}{4}$.

思路分析

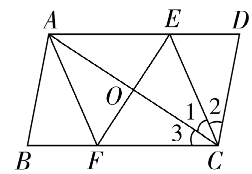
过点 A 作 $AH\perp BC$ 于 H，在 $\text{Rt}\triangle AHC$ 中根据直角三角形的性质得到 $AH=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，证明$\triangle DAC \backsim \triangle FAD$，可得 $AF=\frac{AD^2}{AC}=\frac{AD^2}{3}$. 根据 $CF=AC-AF$ 可知，当 AF 长度取得最小值时，CF 长度取得最大值. 当 $AD\perp BC$ 时，AD 长度取得最小值，即 AF 长度取得最小值，此时点 D 与点 H 重合，可求出 AF 长度的最小值为$\frac{9}{4}$，则 CF 长度的最大值为 $3-\frac{9}{4}=\frac{3}{4}$.

3. (1)【证明】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore AD/\!/BC$，$\therefore \angle AEO=\angle CFO$. $\because$ 对角线 AC 的垂直平分线与边 AD，BC 分别相交于点 E，F，$\therefore AO=OC$，$EA=EC$.

又$\because \angle AOE=\angle COF$，$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF(\text{AAS})$，$\therefore AE=CF$，$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是平行四边形.

$\because EA=EC$，$\therefore$ 四边形 $AFCE$ 是菱形.

(2)【解】如图. $\because CE$ 平分$\angle ACD$，$\therefore \angle 1=\angle 2$.



$\because$ 四边形 $AFCE$ 是菱形，$\therefore \angle 1=\angle 3$，$\therefore \angle 2=\angle 3$.

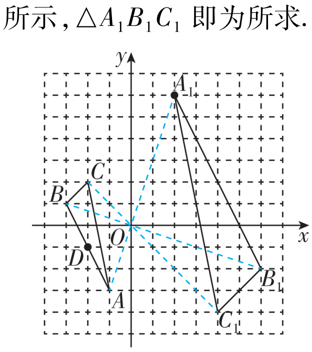
$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，$\therefore \angle B=\angle D$，$AB=CD=3$，$\therefore \triangle CBA \backsim \triangle CDE$，$\therefore \frac{CB}{CD}=\frac{AB}{DE}$，$\therefore \frac{5}{3}=\frac{3}{DE}$，$\therefore DE=\frac{9}{5}$.

4. C　【解析】$\because$ 点 A，A'的坐标分别为$(2,0)$，$(3,0)$，$\therefore OA=2$，$OA'=3$. $\because$ 五边形 $ABCDE$，$A'B'C'D'E'$是以坐标原点 O 为位似中心的位似图形，$\therefore OA:OA'=DE:D'E'=2:3$. $\because DE=3$，$\therefore D'E'=\frac{9}{2}$，故选 C.

5. $\left(-10,\frac{27}{2}\right)$　【解析】$\because \triangle A_1B_1C_1$ 与$\triangle ABC$ 位似，相似比为 2，且在点 P 同侧，$\therefore PA_1=2PA$，$\therefore A$ 为 PA_1 的中点. 设 $A_1(x,y)$，可得$\frac{x+6}{2}=4$，$\frac{y+\frac{3}{2}}{2}=3$，解得 $x=2$，$y=\frac{9}{2}$，$\therefore A_1\left(2,\frac{9}{2}\right)$. 同理可得 $A_2\left(-2,\frac{15}{2}\right)$，$A_3\left(-10,\frac{27}{2}\right)$.

6.【解析】(1)如图所示，点 D 即为所求，点 D 坐标为$(-2,-1)$.

(2)如图所示，$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求.



7.【解】(1)$\because$ 太阳光线是平行光线，

$\therefore \angle EFD=\angle ADC$.

又$\because \angle EDF=\angle ACD=90°$，

$\therefore \triangle EFD \backsim \triangle ADC$，$\therefore \frac{DF}{CD}=\frac{DE}{CA}$.

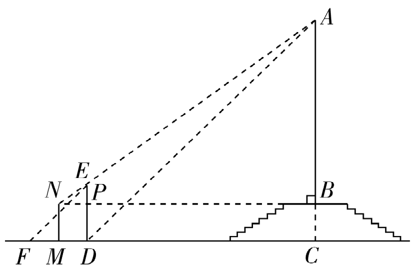
$\because DF=DE$, $\therefore CD=CA$.

(2)设 NB 与 DE 的交点为 P,如图.

由题意得 $PN=DM=1$, $DP=BC=MN=1.2$, $BN=CM$, $\therefore PE=DE-DP=2.1-1.2=0.9$.

设 $AB=x$,则 $CD=CA=AB+BC=x+1.2$,

$\therefore BN=CM=CD+DM=x+1.2+1=x+2.2$.

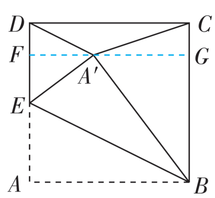


易知 $\triangle PNE \backsim \triangle BNA$, $\therefore \frac{PE}{AB}=\frac{PN}{BN}$,即 $\frac{0.9}{x}=\frac{1}{x+2.2}$,解得 $x=19.8$.

答:纪念碑 AB 的高度为 19.8 m.

(3)小红的结果误差较大,原因可能是平台底部点 C 不可直接到达,间接测量时产生了较大的误差(原因合理即可).

8. D 【解析】过点 A' 作 $FG/\!/AB$,分别交 AD,BC 于点 F,G,如图. 由翻折的性质得 $\angle AEB=\angle A'EB=\frac{1}{2}\angle AEA'$,

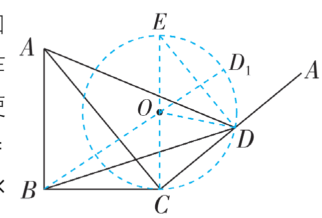


$AE=A'E$. $\because E$ 为边 AD 的中点,$\therefore AE=DE$, $\therefore DE=A'E$, $\therefore \angle EDA'=\angle EA'D$. $\because \angle AEA'$ 是 $\triangle A'ED$ 的外角,$\therefore \angle AEA'=\angle EDA'+\angle EA'D=2\angle EDA'$, $\therefore \angle AEB=\angle EDA'$, $\therefore A'D/\!/BE$,故选项 A 结论正确,不符合题意. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,$\therefore AB/\!/CD$, $AB=BC=CD=DA$, $\angle BAE=\angle ABC=\angle BCD=\angle CDE=90°$. 设 $AB=BC=CD=DA=10$. $\because E$ 为边 AD 的中点,$\therefore AE=DE=5$. 由翻折的性质得 $\angle BAE=\angle BA'E=90°$, $AE=A'E=5$, $AB=A'B=10$. $\because FG/\!/AB$, $\therefore FG/\!/CD$, $\therefore$ 易得四边形 $ABGF$ 和四边形 $DCGF$ 均为矩形,$\therefore FG=AB=10$, $\angle EFA'=\angle A'GB=\angle EA'B=90°$, $\therefore \angle EA'F=90°-\angle GA'B=\angle A'BG$, $\therefore \triangle EA'F \backsim \triangle A'BG$, $\therefore \frac{A'F}{BG}=\frac{EF}{A'G}=\frac{EA'}{A'B}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$. 设 $DF=CG=x$,则 $EF=5-x$, $BG=10-x$, $\therefore A'F=\frac{1}{2}BG=\frac{1}{2}(10-x)$, $A'G=2EF=2(5-x)$. $\because A'F+A'G=FG=10$, $\therefore \frac{1}{2}(10-x)+2(5-x)=10$,解得 $x=2$, $\therefore DF=CG=2$, $A'F=4$, $A'G=6$, $\therefore A'C=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$, $A'D=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$, $\therefore A'C=\sqrt{2}A'D$,故选项 B 结论正确,不符合题意. $\because \triangle A'CD$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times10\times2=10$, $\triangle A'DE$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times5\times4=10$, $\therefore \triangle A'CD$ 的面积 $=\triangle A'DE$ 的面积,故选项 C 结论正确,不符合题意. $\because$ 四边形 $A'BED$ 的面积 $=\triangle A'DE$ 的面积 $+\triangle A'BE$ 的面积 $=10+\frac{1}{2}\times5\times10=35$, $\triangle A'BC$ 的面积 $=\frac{1}{2}\times10\times6=30$, $\therefore$ 四边形 $A'BED$ 的面积 $\neq \triangle A'BC$ 的面积,故选项 D 结论不正确,符合题意. 故选 D.

归纳总结
折叠前后图形的形状和大小不变,对应边和对应角相等.

关键点拨
本题考查了相似三角形的判定与性质,分析出点 D 在以 CE 为直径的圆上是解题的关键.

9. $2\sqrt{13}+4$ 【解析】由题意得 $\angle ACD=90°$. $\because \triangle ACD$ 面积为 24, $\therefore AC\times CD\times\frac{1}{2}=24$, $\therefore AC\times CD=48$. 如图,过点 C 向上作线段 $CE\perp BC$,使得 $CE=8$. $\because BC=6$, $\therefore BC\times CE=6\times8=48$,即 $AC\times CD=BC\times CE$, $\therefore \frac{CE}{CA}=\frac{CD}{CB}$. 连接 DE. $\because CE\perp BC$, $\therefore \angle BCE=90°$, $\therefore \angle BCE-\angle ACE=\angle ACD-\angle ACE$, $\therefore \angle ACB=\angle ECD$. 又 $\because \frac{CE}{CA}=\frac{CD}{CB}$, $\therefore \triangle CED \backsim \triangle CAB$, $\therefore \angle EDC=\angle ABC=90°$,故点 D 在以 CE 为直径的圆上. 记圆心为 O,连接 OD. $\because CE=8$, $\therefore \odot O$ 的半径 $OD=4$. 连接 BO 并延长与 $\odot O$ 交于点 D_1,此时 BD_1 为 BD 的最大值. $\because BO=\sqrt{BC^2+OC^2}=\sqrt{36+16}=2\sqrt{13}$, $\therefore BD_1=BO+OD_1=2\sqrt{13}+4$. 故答案为 $2\sqrt{13}+4$.



10.【解】(1)把 $A(-2,1)$ 代入 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$ 中得 $1=\frac{k}{-2}$,解得 $k=-2$, $\therefore$ 反比例函数表达式为 $y=-\frac{2}{x}$. 对于 $y=-\frac{2}{x}$,当 $x=-1$ 时, $y=-\frac{2}{-1}=2$, $\therefore C(-1,2)$.

把 $A(-2,1)$, $C(-1,2)$ 代入 $y=mx+b$ 中得 $\begin{cases}-2m+b=1,\\-m+b=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\b=3,\end{cases}$ $\therefore$ 一次函数 $y=mx+b$ 的表达式为 $y=x+3$.

对于 $y=x+3$,当 $y=0$ 时, $x=-3$, $\therefore M(-3,0)$, $\therefore OM=3$, $\therefore S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}OM\cdot|y_A|=\frac{1}{2}\times3\times$

$1=\frac{3}{2}$.

(2)存在. ∵ 直线 AB 经过原点，∴ 易知点 B 的坐标为 $B(2,-1)$，$OA=OB$.

∵ $A(-2,1)$，$C(-1,2)$，∴ $OA=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$，$AC=\sqrt{[-2-(-1)]^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$，

$BC=\sqrt{[2-(-1)]^2+(-1-2)^2}=3\sqrt{2}$，

$AB=\sqrt{[2-(-2)]^2+(-1-1)^2}=2\sqrt{5}$，

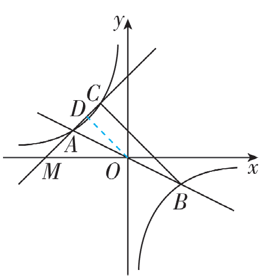
∴ $AC^2+BC^2=(\sqrt{2})^2+(3\sqrt{2})^2=2+18=20$，

$AB^2=(2\sqrt{5})^2=20$，∴ $AC^2+BC^2=AB^2$，

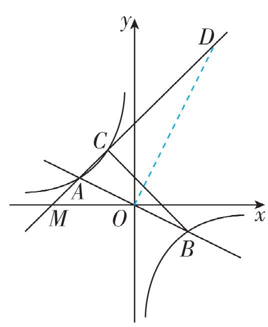
∴ $\angle ACB=90°$.

∵ $\triangle OAD$ 与 $\triangle ABC$ 相似，∴ 只存在 $\triangle OAD\backsim\triangle BAC$ 和 $\triangle OAD\backsim\triangle CAB$ 这两种情况.

如图(1)，当 $\triangle OAD\backsim\triangle BAC$ 时，$\frac{AD}{AC}=\frac{OA}{AB}=\frac{1}{2}$，∴ $AD=\frac{1}{2}AC$，∴ 点 D 为 AC 的中点，∴ 点 D 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$.



图(1)



图(2)

如图(2)，当 $\triangle OAD\backsim\triangle CAB$ 时，$\frac{AD}{AB}=\frac{OD}{BC}=\frac{OA}{AC}$，

则 $\frac{AD}{2\sqrt{5}}=\frac{OD}{3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$，∴ $AD=5\sqrt{2}$，$OD=3\sqrt{5}$.

设 $D(d,d+3)$，

∴ $\begin{cases}(-2-d)^2+(1-d-3)^2=(5\sqrt{2})^2,\\(0-d)^2+(0-d-3)^2=(3\sqrt{5})^2,\end{cases}$ 解得 $d=3$，

∴ $d+3=6$，∴ 点 D 的坐标为 $(3,6)$.

综上所述，点 D 的坐标为 $\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$ 或 $(3,6)$.

易错警示 (2)注意存在 $\triangle OAD\backsim\triangle BAC$ 和 $\triangle OAD\backsim\triangle CAB$ 这两种情况，不要漏解.

刷章测

1. A 【解析】因为 c 是 a，b 的比例中项，所以 $c^2=ab$，即 $c^2=2\times8$，解得 $c=4$(负值舍去). 故选 A.

2. C 【解析】∵ $l_1\parallel l_2\parallel l_3$，∴ $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，即 $\frac{AB}{AC-AB}=\frac{DE}{EF}$. ∵ $AB=3$，$AC=7$，$DE=2.4$，∴ $\frac{3}{7-3}=\frac{2.4}{EF}$，∴ $EF=3.2$. 故选 C.

3. D 【解析】∵ H 是 AB 的黄金分割点，∴ $AH^2=BH\cdot AB$. 由题意得，$S_1=AH^2$，$S_2=BH\cdot BC=BH\cdot AB$，∴ $S_1=S_2$，即 $\frac{S_1}{S_2}=1$. 故选 D.

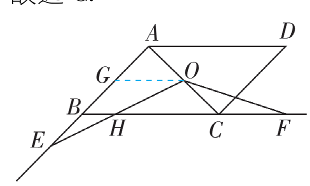
4. C 【解析】

①	当 $\angle ACP=\angle B$ 时，∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle ACP\backsim\triangle ABC$，①符合题意
②	当 $\angle APC=\angle ACB$ 时，∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle ACP\backsim\triangle ABC$，②符合题意
③	当 $AC^2=AP\cdot AB$ 时，$\frac{AC}{AP}=\frac{AB}{AC}$. ∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle ACP\backsim\triangle ABC$，③符合题意
④	当 $AB\cdot CP=AP\cdot CB$ 时，$\frac{AB}{AP}=\frac{BC}{CP}$. ∵ $\angle A=\angle A$，∴ 不能判定 $\triangle APC$ 和 $\triangle ACB$ 相似，④不符合题意

∴ 从中随机抽取一个，能使 $\triangle APC$ 和 $\triangle ACB$ 相似的概率是 0.75. 故选 C.

关键点拨 本题的解题关键是利用相似的性质抽象出相应的函数关系式.

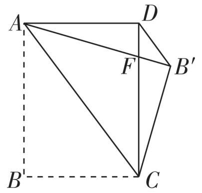
5. B 【解析】如图，



设 OE，BC 交于点 H，过点 O 作 $OG\parallel BC$. ∵ $\angle ABC=45°$，$AC=AB=2$，∴ $\angle ACB=\angle ABC=45°$，∴ $\angle BAC=90°$，$\angle EBH=\angle OCF=180°-45°=135°$，∴ $BC=2\sqrt{2}$. ∵ $OG\parallel BC$，∴ $\triangle AOG\backsim\triangle ACB$，∴ $\frac{AG}{AB}=\frac{OG}{BC}=\frac{AO}{AC}$. ∵ 点 O 为 AC 中点，∴ $OA=OC=\frac{1}{2}AC=1$，∴ $\frac{AG}{AB}=\frac{OG}{BC}=\frac{AO}{AC}=\frac{1}{2}$，∴ $AG=\frac{1}{2}AB=1$，$OG=\frac{1}{2}BC=\sqrt{2}$，∴ $BG=AB-AG=1$，∴ $EG=BE+BG=x+1$. ∵ $OG\parallel BC$，∴ $\triangle EBH\backsim\triangle EGO$，∴ $\frac{BE}{EG}=\frac{BH}{OG}$，即 $\frac{x}{1+x}=\frac{BH}{\sqrt{2}}$，∴ $BH=\frac{\sqrt{2}x}{1+x}$.

∵ $\angle EBH=135°$，$\angle EOF=135°$，∴ $\angle BEH+\angle BHE=45°$，$\angle OFC+\angle OHF=45°$. ∵ $\angle BHE=\angle OHF$，∴ $\angle BEH=\angle OFC$. 又 ∵ $\angle EBH=\angle OCF$，∴ $\triangle EBH\backsim\triangle FCO$，∴ $\frac{BE}{CF}=\frac{BH}{OC}$，即 $\frac{x}{y}=\frac{\frac{\sqrt{2}x}{1+x}}{1}$，∴ $y=x\cdot\frac{1+x}{\sqrt{2}x}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x+1)$. 故选 B.

6. C 【解析】如图，设 AB' 与 CD 交于点 F. ∵ 矩形 $ABCD$ 中，$DC // AB$，∴ $\angle DCA=\angle BAC$. 由折叠的性质可知 $\angle B'AC=\angle BAC$，∴ $\angle DCA=\angle B'AC$，∴ $AF=FC$. 由折叠的性质可知 $\angle FB'C=\angle B=90°$，$CB'=CB$，∴ 易得 $AD=CB'$，$\angle FB'C=\angle FDA=90°$. 在 $\triangle DAF$ 和 $\triangle B'CF$ 中，$\begin{cases}\angle DFA=\angle B'FC,\\ \angle FDA=\angle FB'C,\\ AD=CB',\end{cases}$

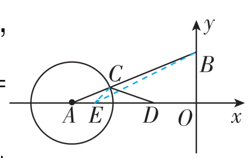


∴ $\triangle DAF\cong\triangle B'CF$(AAS)，∴ $DF=B'F$. ∵ 在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，$\angle B=90°$，∴ $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$. 设 $B'F=DF=x$，则 $FC=4-x$. 在 Rt $\triangle B'FC$ 中，根据勾股定理得 $B'C^2+B'F^2=FC^2$，即 $3^2+x^2=(4-x)^2$，解得 $x=\frac{7}{8}$，∴ $FC=\frac{25}{8}$. ∵ $AF=CF$，$DF=B'F$，$\angle AFC=\angle DFB'$，∴ $\frac{AF}{B'F}=\frac{CF}{DF}$，∴ $\triangle FAC\backsim\triangle FB'D$，∴ $\frac{AC}{DB'}=\frac{FC}{DF}$，即 $\frac{5}{DB'}=\frac{\frac{25}{8}}{\frac{7}{8}}$，解得 $DB'=1.4$. 故选 C.

▶思路分析
设 AB' 与 CD 交于 F. 先根据平行线的性质得到 $\angle DCA=\angle BAC$，然后根据折叠的性质得到 $\angle B'AC=\angle BAC$，从而可得到 $AF=FC$. 根据折叠的性质得到 $\angle FB'C=\angle B=\angle ADC=90°$，$CB'=CB=AD$，证明 $\triangle DAF\cong\triangle B'CF$，再根据全等三角形的性质得到 $DF=B'F$. 根据勾股定理得到 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=5$. 设 $B'F=DF=x$，则 $FC=4-x$，根据勾股定理得到 $x=\frac{7}{8}$. 最后根据相似三角形的判定与性质即可得到结论.

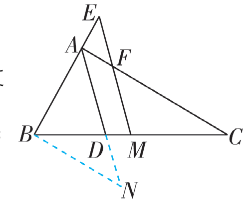
7. $\frac{3}{5}$ 【解析】∵ $\frac{a}{5}=\frac{b}{8}(a\neq 0)$，∴ $\frac{b}{a}=\frac{8}{5}$，∴ $\frac{b-a}{a}=\frac{b}{a}-1=\frac{8}{5}-1=\frac{3}{5}$.

8. $2\sqrt{29}$ 【解析】如图，在 AD 上截取 $AE=2$，连接 CE，BE. ∵ $\frac{AE}{AC}=\frac{AC}{AD}=\frac{1}{2}$，$\angle CAD$ 为公共角，∴ $\triangle ACE\backsim\triangle ADC$，∴ $\frac{CE}{CD}=\frac{AC}{AD}=\frac{1}{2}$，∴ $CE=\frac{1}{2}CD$，∴ $BC+\frac{1}{2}CD=BC+CE$，∴ 当 B，C，E 共线时，$BC+\frac{1}{2}CD$ 的值最小，此时 $BC+\frac{1}{2}CD=BE$. 由题意得，$OB=4$，$OE=10$，∴ $BE=\sqrt{OB^2+OE^2}=2\sqrt{29}$，∴ $BC+\frac{1}{2}CD$ 的最小值为 $2\sqrt{29}$，故答案为 $2\sqrt{29}$.

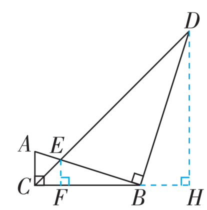


▶思路分析
在 AD 上截取 $AE=2$，连接 CE，BE，可证 $\triangle ACE\backsim\triangle ADC$，进而得出 $BC+\frac{1}{2}CD=BC+CE$，则 B，C，E 共线时 $BC+\frac{1}{2}CD$ 有最小值，即为 BE 的长.

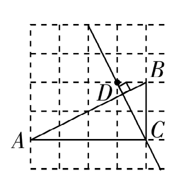
9. 5 【解析】如图，过点 B 作 $BN//AC$ 交 AD 的延长线于点 N. ∵ AD 是 $\angle BAC$ 的平分线，∴ $\angle BAD=\angle DAC$. ∵ $BN//AC$，∴ $\angle N=\angle DAC$，∴ $\angle N=\angle BAD$，∴ $BN=BA=4$. ∵ $BN//AC$，∴ 易得 $\triangle DBN\backsim\triangle DCA$，∴ $\frac{BD}{CD}=\frac{BN}{AC}=\frac{2}{3}$，∴ 设 $BD=2x$，$DC=3x$，则 $BC=5x$. ∵ M 是 BC 的中点，∴ $CM=2.5x$，∴ $DM=0.5x$. ∵ $ME//AD$，∴ $\frac{CF}{AF}=\frac{CM}{DM}=5$，$\angle BAD=\angle E$，$\angle DAC=\angle EFA$，∴ $\angle E=\angle AFE$，∴ $AE=AF$. ∵ $AC=6$，∴ $AF=AE=1$，∴ $BE=5$. 故答案为 5.



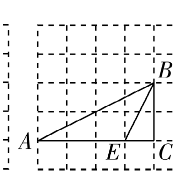
10. 4 【解析】如图，过点 E 作 $EF\perp CB$ 于点 F，过点 D 作 $DH\perp CB$ 交 CB 的延长线于点 H，则 $\angle H=\angle BFE=\angle CFE=90°$，$EF // DH$. ∵ $BD\perp AB$，∴ $\angle EBD=90°$，∴ $\angle EBF+\angle DBH=90°$，∴ $\angle BDH=\angle EBF=90°-\angle DBH$，∴ $\triangle BDH\backsim\triangle EBF$，∴ $\frac{DH}{BF}=\frac{BH}{EF}=\frac{BD}{BE}=\frac{6\sqrt{10}}{3\sqrt{10}}=2$，∴ $BH=2EF$，$DH=2BF$. ∵ $\angle ACB=90°$，CD 平分 $\angle ACB$，∴ $\angle FCE=\angle ACE=\frac{1}{2}\angle ACB=45°$，∴ $\angle FEC=\angle HDC=\angle FCE=45°$，∴ $CF=EF$，$CH=DH=2BF$，∴ $BH=2CF$，∴ $CF+BF+2CF=2BF$，∴ $BF=3CF=3EF$，∴ $BE=\sqrt{BF^2+EF^2}=\sqrt{(3EF)^2+EF^2}=\sqrt{10}EF=3\sqrt{10}$，∴ $CF=EF=3$，∴ $BF=3EF=3\times3=9$，∴ $BC=BF+CF=9+3=12$. ∵ $\angle ACB=\angle EFB=90°$，$\angle ABC=\angle EBF$，∴ $\triangle ABC\backsim\triangle EBF$，∴ $\frac{AC}{EF}=\frac{BC}{BF}$，∴ $\frac{AC}{3}=\frac{12}{9}$，∴ $AC=4$，故答案为 4.



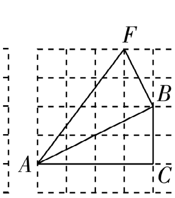
11.【解】(1) 如图(1)所示，点 D 和直线 CD 即为所求(点 D 位置不唯一).



图(1)



图(2)



图(3)

(2) 如图(2)所示，点 E 和 BE 即为所求(点 E 位置不唯一).

(3) 如图(3)所示，点 F，AF 和 BF 即为所求.

12. (1)【证明】由题意知四边形 $BDEF$ 内接于 $\odot O$，∴ $\angle EDB+\angle EFB=180°$.
∵ $\angle CFB+\angle EFB=180°$，∴ $\angle EDB=\angle CFB$.

∵ BD 是直径，∴ $\angle BED=90°$. ∵ $\angle C=90°$，
∴ $\angle BED=\angle C$，∴ $\triangle BCF\backsim\triangle BED$.

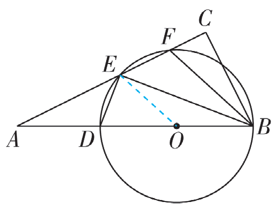
【解】(2) ∵ BE 平分 $\angle DBF$，∴ $\angle DBE=\angle FBE$，∴ $EF=DE=2.5$.

∵ $\triangle BCF\backsim\triangle BED$，∴ $\dfrac{BC}{BE}=\dfrac{CF}{DE}=\dfrac{2}{2.5}=\dfrac{4}{5}$，

∴ 设 $BC=4x$，$BE=5x$.

∵ $CE=CF+EF=2+2.5=4.5$，$BC^2+CE^2=BE^2$，∴ $(4x)^2+4.5^2=(5x)^2$，解得 $x=1.5$（负值已舍去），∴ $BC=4x=4\times1.5=6$.

(3) 如图，连接 OE.



由(2)知 $\angle DBE=\angle FBE$，$DE=EF$.

∵ $OB=OE$，

∴ $\angle OBE=\angle OEB$，

∴ $\angle FBE=\angle OEB$，∴ $OE/\!/BF$.

又∵ $BD=2AD$，$OD=OB$，∴ $AD=DO=OB$，

∴ $\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{AO}{OB}=2$.

设 $DE=EF=y$，$\odot O$ 的半径为 r，则 $AE=2y$.

∵ 四边形 $BDEF$ 内接于$\odot O$，∴ 易得$\angle AED=\angle ABF$. 又∵ $\angle A=\angle A$，∴ $\triangle ADE\backsim\triangle AFB$，

∴ $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AD}{AF}$，即$\dfrac{2y}{3r}=\dfrac{r}{2y+y}$，解得 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r$（负值已舍去）.

∵ $\triangle BCF\backsim\triangle BED$，∴ $\dfrac{CF}{BF}=\dfrac{DE}{BD}=\dfrac{y}{2r}=\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}r}{2r}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ∵ $BF=8$，∴ $CF=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\times8=2\sqrt{2}$.

13. (1)【证明】∵ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$BC=2$，$\angle ACB=90°$，∴ $AC=2$，$\angle ABC=45°$，

∴ $AB=2\sqrt{2}$，∴ $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 同理可得 $\angle DBE=45°$，$\dfrac{BE}{BD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{BE}{BD}$. 又∵ $\angle ABC=\angle EBD$，∴ $\angle ABC-\angle ABE=\angle DBE-\angle ABE$，

∴ $\angle CBE=\angle ABD$，∴ $\triangle ADB\backsim\triangle CEB$.

思路分析

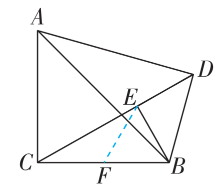
(1) 先判断出 $\dfrac{BC}{AB}=\dfrac{BE}{BD}$，再判断出夹角相等，即可得出结论.

(2) 先判断出 $\triangle BEF$ 是等边三角形，进而判断出 $\angle BEC=90°$，求出 CE，借助(1)的结论得出比例式，即可得出结论.

(3) 分两种情况，先判断出 $\angle AEB=90°$，利用勾股定理求出 AE，进而得出 AD，最后借助(1)中的结论得出比例式，即可求出 CE 的长.

【解】(2) 旋转前，点 E 是 BC 的中点，∴ $BE=\dfrac{1}{2}BC=1$.

如图(1)，取 BC 的中点 F，连接 EF，则 $BF=\dfrac{1}{2}BC=1$，∴ $BF=BE$. 由题意得 $\angle CBE=60°$，



图(1)

∴ $\triangle BEF$ 是等边三角形，

∴ $\angle BFE=60°$，$EF=BF=CF$，∴ $\angle BCE=30°$，∴ $\angle BCE+\angle CBE=90°$，∴ $\angle BEC=90°$，

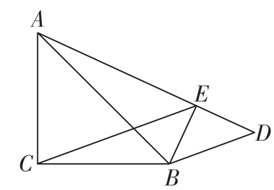
∴ $CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=\sqrt{3}$. 由(1)知，$\triangle ADB\backsim\triangle CEB$，∴ $\dfrac{AD}{CE}=\dfrac{AB}{BC}$，即$\dfrac{AD}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}$，∴ $AD=\sqrt{6}$.

(3) ①当点 E 在线段 AD 上时，如图(2).

∵ $\angle BED=90°$，

∴ $\angle AEB=90°$.

在 Rt$\triangle ABE$ 中，根据勾股定理得 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-1^2}=\sqrt{7}$.

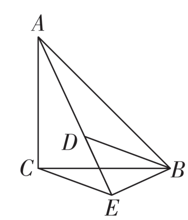


图(2)

在 Rt$\triangle BED$ 中，$DE=BE=1$，∴ $AD=AE+DE=\sqrt{7}+1$.

由(1)知，$\triangle ADB\backsim\triangle CEB$，∴ $\dfrac{AD}{CE}=\dfrac{AB}{BC}$，即 $\dfrac{\sqrt{7}+1}{CE}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}$，∴ $CE=\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}$.

②当点 E 在线段 AD 的延长线上时，如图(3). 同①的方法得 $AE=\sqrt{7}$，∴ $AD=AE-DE=\sqrt{7}-1$. 由(1)知 $\triangle ADB\backsim\triangle CEB$，∴ $\dfrac{AD}{CE}=\dfrac{AB}{BC}$，即$\dfrac{\sqrt{7}-1}{CE}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}$，∴ $CE=\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$.



图(3)

综上所述，CE 的长为$\dfrac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{2}$或$\dfrac{\sqrt{14}-\sqrt{2}}{2}$.

第 7 章　锐角三角函数

7.1　正切

刷基础

1. D 【解析】在 AB 上取格点 D，连接 CD，如图. 设网格中小正方形的边长均为 1，则 $AD=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$CD=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$. ∵ $(2\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2=(\sqrt{10})^2$，即 $AD^2+CD^2=AC^2$，∴ $\triangle ADC$ 是直角三角形，且 $\angle ADC=90°$，∴ $\tan\angle BAC=\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$. 故选 D.