批注式详答与详析

第 5 章　二次函数

5.1　二次函数

刷基础

1. B　【解析】选项 A，$y=x^2+\frac{1}{x}$不是二次函数，不合题意；选项 B，$s=2t^2-2t+1$ 是二次函数，符合题意；选项 C，$y=ax^2+bx+c$，当 $a=0$ 时，不是二次函数，不合题意；选项 D，$y=(x-1)^2-x^2=-2x+1$ 是一次函数，不合题意. 故选 B.

2. B　【解析】二次函数 $y=x^2+2x-1$ 的二次项系数、一次项系数、常数项分别是 1，2，-1. 故选 B.

易错警示　注意在找二次项系数、一次项系数和常数项时，不要漏掉符号.

3.【解】∵ $y=(a-x)x^{a^2-2a-1}-2$ 是二次函数，∴ $a^2-2a-1=1$，∴ $(a-1)^2=3$，∴ $a=1+\sqrt{3}$ 或 $a=1-\sqrt{3}$.

4. B　【解析】根据题意可得 $y=1-x^2$，故选 B.

5. A　【解析】根据题意得 $w=(x-30)y=(x-30)(-2x+80)$，故选 A.

6. $y=2(1-x)^2$　【解析】∵ 每次降价的百分率都是 x，∴ 经过两次降价后的价格 $y=2(1-x)^2$，故答案为 $y=2(1-x)^2$.

7. $y=\pi x^2+8\pi x$　【解析】新圆的面积为 $\pi(x+4)^2\ \mathrm{cm}^2$，∴ $y=\pi(x+4)^2-\pi\times4^2=\pi x^2+8\pi x$. 故答案为 $y=\pi x^2+8\pi x$.

8. $y=4x^2-96x+572(0<x<11)$　【解析】根据题意，得 $y=(26-2x)(22-2x)=572-52x-44x+4x^2=4x^2-96x+572$，且 $\begin{cases}x>0,\\22-2x>0,\end{cases}$ 解得 $0<x<11$，∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=4x^2-96x+572(0<x<11)$. 故答案为 $y=4x^2-96x+572(0<x<11)$.

9. (1) $y=-x+5$　一次　(2) $y=\frac{10}{x}$　反比例　(3) $S=-x^2+10x$　二次

【解析】(1) ∵ 绳长为 10 m，矩形相邻的两边长分别为 x m，y m，∴ $2x+2y=10$，即 $y=-x+5$，∴ y 是 x 的一次函数. 故答案为 $y=-x+5$，一次.

(2) ∵ 矩形的面积是 10 m²，矩形相邻的两边长分别为 x m，y m，∴ $xy=10$，即 $y=\frac{10}{x}$，∴ y 是 x 的反比例函数. 故答案为 $y=\frac{10}{x}$，反比例.

(3) ∵ 矩形的周长为 20 m，矩形的面积为 S m²，矩形相邻的两边长分别为 x m，y m，∴ $2x+2y=20$，$xy=S$，∴ $y=10-x$，∴ $S=x(10-x)=-x^2+10x$，∴ S 是 x 的二次函数. 故答案为 $S=-x^2+10x$，二次.

刷易错

10. $\frac{1}{4}$　【解析】由题意得 $k^2-3k+4=2$ 且 $k-1\neq0$，解得 $k=2$. 把 $k=2$ 代入 $y=(k-1)x^{k^2-3k+4}+2x-1$，得 $y=x^2+2x-1$，故当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}-1=\frac{1}{4}$. 故答案为$\frac{1}{4}$.

易错警示　根据二次函数的定义，要使 $y=(k-1)\cdot x^{k^2-3k+4}+2x-1$ 为二次函数，不但要满足 $k^2-3k+4=2$，还应满足 $k-1\neq0$，二者缺一不可. 在解题过程中易忽略隐含条件 $k-1\neq0$ 而导致错误.

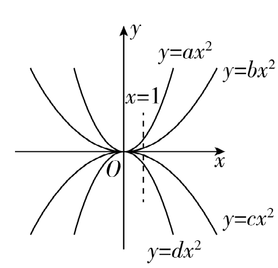
5.2　二次函数的图像和性质

课时 1　$y=ax^2$ 的图像和性质

刷基础

1. B　【解析】根据二次项系数小于 0 时图像开口向下可知，图像开口向下的是①④，共 2 个. 故选 B.

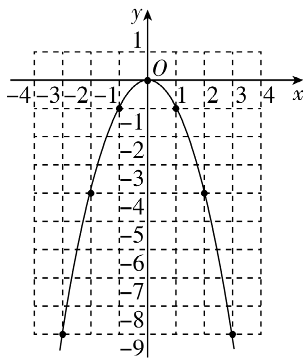
2. $a>b>c>d$　【解析】假设直线 $x=1$ 的位置如图，该直线与四条抛物线的交点坐标从上到下依次为 $(1,a)$，$(1,b)$，$(1,c)$，$(1,d)$，∴ $a>b>c>d$. 故答案为 $a>b>c>d$.



3.【解】列表如下：

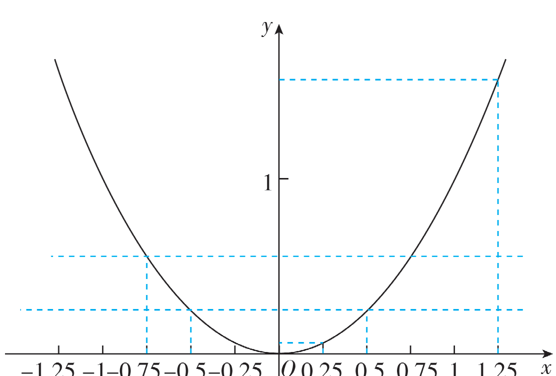
x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
y	…	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	…

描点、连线得到图像如图所示.



4. D 【解析】∵ $A(-1,m)$，$B(1,m)$，∴ 点 A 与点 B 关于 y 轴对称，∴ 符合题意的只有 C、D 选项. 由 $B(1,m)$，$C(2,m-3)$ 可知，在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而减小. 由二次函数的性质可知，当 $a<0$ 时，在对称轴的右侧，y 随 x 的增大而减小，∴ 符合题意的只有 D 选项. 故选 D.

5. A 【解析】二次函数 $y=x^2$ 的图像如图所示. 选项 A，若 $y_1<y_2<y_3$，则根据图像可知 $m>-0.5$，故选项 A 是错误的. 选项 B，易知当 $y_1=y_3$ 时，$y_2=0$，故选项 B 是正确的. 选项 C，若 $m=-\frac{3}{4}$，则根据图像可知 $y_2<y_1<y_3$，故选项 C 是正确的. 选项 D，∵ $y_3-y_2=(m+2)^2-(m+1)^2=2m+3$，$y_2-y_1=(m+1)^2-m^2=2m+1$. ∵ $2m+3>2m+1$，∴ $y_3-y_2>y_2-y_1$，故选项 D 是正确的. 故选 A.



6. 0 【解析】∵ 二次函数表达式为 $y=2\,025x^2$，∴ 该二次函数图像的对称轴为 y 轴. ∵ 图像上有两个不同的点 $P\left(t_1,\frac{1}{2}\right)$，$Q\left(t_2,\frac{1}{2}\right)$，∴ $P\left(t_1,\frac{1}{2}\right)$，$Q\left(t_2,\frac{1}{2}\right)$ 关于对称轴对称，∴ $t_1+t_2=0$. 故答案为 0.

7. $m<3$ 【解析】∵ 当 $0<x_1<x_2$ 时，有 $y_1>y_2$，∴ $m-3<0$，∴ $m<3$. 故答案为 $m<3$.

8.【解】(1) 当 $y=-4$ 时，$-4=-x^2$，∴ $x=\pm2$. ∵ 点 A 在第三象限，∴ $a=-2$. 当 $x=3$ 时，$y=-9$，∴ $b=-9$.

(2) ∵ $AB/\!/CD/\!/x$ 轴，∴ A 点与 B 点，C 点与 D 点的纵坐标相同.

∵ 抛物线 $y=-x^2$ 关于 y 轴对称，∴ $B(2,-4)$，$D(-3,-9)$.

(3) 由上得 $AB=4$，$CD=6$，梯形的高为 5，

∴ $S_{梯形ABCD}=\frac{1}{2}\times(4+6)\times5=25$.

刷易错

易错警示 此题容易忽略在顶点处取最小值，误认为在端点处取最小值.

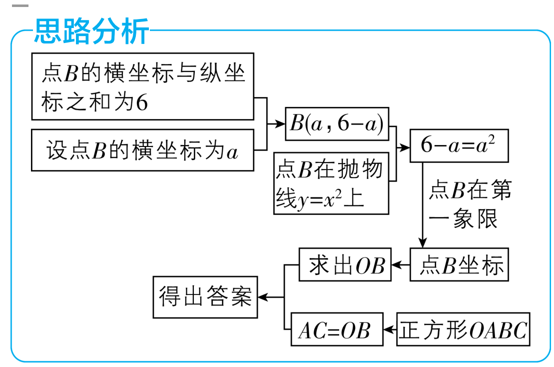
9. 16　0 【解析】当 $-2\leqslant x\leqslant0$ 时，y 随 x 的增大而减小，此时 $y_{最大}=(-2)^2=4$，$y_{最小}=0$. 当 $0\leqslant x\leqslant4$ 时，y 随 x 的增大而增大，此时 $y_{最大}=4^2=16$，$y_{最小}=0$. 综上所述，在 $-2\leqslant x\leqslant4$ 这个范围内，函数有最大值 16，最小值 0. 故答案为 16，0.

刷提升

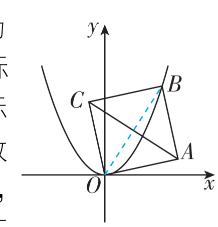
思路分析 分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况讨论. 当 $a>0$ 时，由 $ab>0$ 可知 $b>0$；当 $a<0$ 时，由 $ab>0$ 可知 $b<0$，分别分析图像即可确定正确的选项.

1. C 【解析】当 $a>0$ 时，∵ $ab>0$，∴ $b>0$，∴ $y=ax^2$ 的图像开口向上，$y=bx+a$ 的图像经过第一、二、三象限；当 $a<0$ 时，∵ $ab>0$，∴ $b<0$，∴ $y=ax^2$ 的图像开口向下，$y=bx+a$ 的图像经过第二、三、四象限. 综上可知，C 选项符合. 故选 C.

2. C



【解析】设点 B 的横坐标为 a. ∵ 点 B 的横坐标与纵坐标之和等于 6，∴ 点 B 的纵坐标为 $6-a$. ∵ 点 B 在二次函数 $y=x^2$ 的第一象限的图像上，∴ $6-a=a^2$，解得 $a_1=-3$（不合题意，舍去），$a_2=2$，∴ $6-a=4$，∴ 点 B 的坐标为 $(2,4)$. 如图，连接 OB，则 $BO=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$. ∵ 四边形 $OABC$ 是正方形，∴ $AC=OB=2\sqrt{5}$. 故选 C.



3. C 【解析】∵ $y=x^2$，$1>0$，∴ 该函数图像的对称轴为 y 轴，开口向上，∴ 当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大. A 选项，当 $x_1>x_2$ 时，y_1 不一定大于 y_2，例如当 $x_1=1$ 时，$y_1=1$，当 $x_2=-2$ 时，$y_2=4$，此时 $x_1>x_2$，但是 $y_1<y_2$，故选项 A 错误. B 选项，当 $x_1<x_2$ 时，y_1 不一定小于 y_2，例如当 $x_1=-2$ 时，$y_1=4$，当 $x_2=1$ 时，$y_2=1$，此时 $x_1<x_2$，但是 $y_1>$

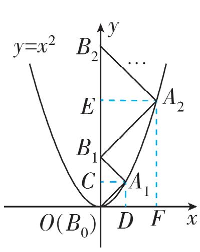
y_2,故选项 B 错误. C 选项,∵ $x_1x_2>x_2^2$,∴ $(x_1-x_2)\cdot x_2>0$,∴ $x_1<x_2<0$ 或 $x_1>x_2>0$. 当 $x_1<x_2<0$ 时,$y_1>y_2$;当 $x_1>x_2>0$ 时,$y_1>y_2$,∴ 当 $x_1x_2>x_2^2$ 时,$y_1>y_2$,故选项 C 正确. D 选项,当 $x_1x_2<x_2^2$ 时,y_1 不一定小于 y_2,例如当 $x_1=-2$ 时,$y_1=4$,当 $x_2=1$ 时,$y_2=1$,此时 $x_1x_2=-2<x_2^2=1$,但是 $y_1>y_2$,故选项 D 错误. 故选 C.

4. $\frac{1}{9}\leqslant a\leqslant 3$ 【解析】当抛物线 $y=ax^2$ 经过点 $(1,3)$ 时,$a=3$;当抛物线 $y=ax^2$ 经过点 $(3,1)$ 时,$9a=1$,∴ $a=\frac{1}{9}$. 故观察图像可知 $\frac{1}{9}\leqslant a\leqslant 3$ 时,抛物线 $y=ax^2$ 与正方形的边有公共点. 故答案为 $\frac{1}{9}\leqslant a\leqslant 3$.

> **关键点拨** 本题的关键是找到临界点,代入求得 a 的临界值.

5. 2 【解析】∵ $A(0,1)$,$AC/\!/x$ 轴,∴ 点 A,C 的纵坐标相同,∴ $1=\frac{1}{4}x^2$,解得 $x=2$(负值已舍去),∴ 点 C 的坐标为 $(2,1)$. ∵ $CD/\!/y$ 轴,∴ 点 D 的横坐标与点 C 的横坐标相同,为 2,∴ 点 D 的纵坐标为 $2^2=4$,∴ 点 D 的坐标为 $(2,4)$. ∵ $DE/\!/x$ 轴,∴ 点 E 的纵坐标与点 D 的纵坐标相同,为 4,∴ $4=\frac{1}{4}x^2$,解得 $x=4$(负值已舍去),∴ 点 E 的坐标为 $(4,4)$,∴ $DE=4-2=2$. 故答案为 2.

6. $2\,024\sqrt{2}$ 【解析】如图,作 $A_1C\perp y$ 轴,$A_2E\perp y$ 轴,垂足分别为 C,E,作 $A_1D\perp x$ 轴,$A_2F\perp x$ 轴,垂足分别为 D,F. ∵ $\triangle A_1B_0B_1$,$\triangle A_2B_1B_2$ 都是等腰直角三角形,∴ $B_1C=B_0C=A_1C=A_1D$,$B_2E=B_1E=A_2E$. 设 $A_1(a,b)$,则 $a=b$,将其代入表达式 $y=x^2$,得 $a=a^2$,解得 $a=0$(不合题意,舍去)或 $a=1$,∴ $B_1B_0=2$. 由勾股定理得 $A_1B_0=\sqrt{2}$. 设点 $A_2(x_2,y_2)$,可得 $A_2E=B_1E=x_2=y_2-2$,∴ $y_2=x_2+2$. 又∵ 点 A_2 在抛物线上,∴ $y_2=x_2^2$,∴ $x_2+2=x_2^2$,解得 $x_2=2$ 或 $x_2=-1$(不合题意,舍去),∴ $A_2B_1=2\sqrt{2}$. 同理可得 $A_3B_2=3\sqrt{2}$,$A_4B_3=4\sqrt{2}$,…,∴ $A_{2\,024}B_{2\,023}=2\,024\sqrt{2}$,∴ $\triangle A_{2\,024}B_{2\,023}B_{2\,024}$ 的腰长为 $2\,024\sqrt{2}$.



刷素养

7.【解】(1)令 $y=a(x+2)=0$,得 $x=-2$,故 A 点的坐标为 $(-2,0)$.

(2)联立直线 $l:y=a(x+2)$ 与抛物线 $E:y=ax^2$ 得 $\begin{cases}y=a(x+2),\\y=ax^2,\end{cases}$ ∴ $x^2-x-2=0$,∴ $x=-1$ 或 $x=2$,∴ $B(-1,a)$,$C(2,4a)$.

> **思路分析** (2)用含 a 的式子表示出 AB'^2,$B'C^2$,AC^2,利用勾股定理列方程并求解,因为直角顶点不确定,所以需分类讨论.

∵ B 点关于 x 轴的对称点为 B' 点,∴ $B'(-1,-a)$,∴ $AB'^2=(-2+1)^2+(0+a)^2=a^2+1$,$AC^2=(2+2)^2+(4a-0)^2=16a^2+16$,$B'C^2=(2+1)^2+(4a+a)^2=25a^2+9$.

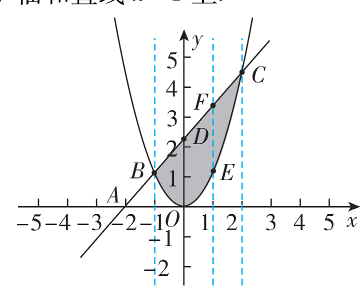
若 $\angle CAB'=90°$,则 $AB'^2+AC^2=B'C^2$,即 $a^2+1+16a^2+16=25a^2+9$,解得 $a=1$(负值已舍去);

若 $\angle AB'C=90°$,则 $AB'^2+B'C^2=AC^2$,即 $a^2+1+25a^2+9=16a^2+16$,解得 $a=\frac{\sqrt{15}}{5}$(负值已舍去);

若 $\angle ACB'=90°$,则 $AC^2+B'C^2=AB'^2$,即 $16a^2+16+25a^2+9=a^2+1$,此方程无实数解.

∴ $a=1$ 或 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

(3)如图,直线 l 与抛物线 E 所围成的封闭图形(即阴影部分,不包含边界)内的整点只能落在 y 轴和直线 $x=1$ 上.



∵ $D(0,2a)$,$E(1,a)$,$F(1,3a)$,∴ $OD=EF=2a$. ∵ 整点数恰好是 26 个,∴ 落在 y 轴和直线 $x=1$ 上的整点数应各为 13 个. 由落在 y 轴的整点有 13 个得 $13<2a\leqslant 14$,即 $\frac{13}{2}<a\leqslant 7$.

①若 $\frac{13}{2}<a<7$,则 $\frac{13}{2}<y_E<7$,∴ 线段 EF 上的整点应该为 $(1,7)$,$(1,8)$,…,$(1,19)$,∴ $19<3a\leqslant 20$,∴ $\frac{19}{3}<a\leqslant\frac{20}{3}$,∴ $\frac{13}{2}<a\leqslant\frac{20}{3}$;

②若 $a=7$,则 $y_E=7$,$y_F=21$,∴ 线段 EF 上的整点正好有 13 个.

综上,$\frac{13}{2}<a\leqslant\frac{20}{3}$ 或 $a=7$.

课时 2 $y=ax^2+k$ 与 $y=a(x+h)^2$ 的图像和性质

刷基础

1. B 【解析】抛物线 $y=3x^2-1$ 的顶点坐标是 $(0,-1)$,抛物线 $y=3x^2$ 的顶点坐标是 $(0,0)$,则可以将抛物线 $y=3x^2$ 向下平移 1 个单位长度得到抛物线 $y=3x^2-1$. 故选 B.

2. -2 2 【解析】由于抛物线平移后的形状不变,故 a 不变,则 $a=-2$;由抛物线 $y=ax^2+c$ 向

下平移 3 个单位长度后得到抛物线 $y=-2x^2-1$，得 $c-3=-1$，则 $c=2$. 故答案为 -2，2.

3. B 【解析】

A	$y=-x^2+3$ 图像的对称轴为 y 轴，此选项说法错误，不符合题意
B	$y=-x^2+3$ 图像的顶点坐标为 $(0,3)$，此选项说法正确，符合题意
C	$y=-x^2+3$ 中 $-1<0$，图像开口向下，则函数有最大值 3，此选项说法错误，不符合题意
D	$y=-x^2+3$ 中 $-1<0$，图像开口向下，则函数有最大值 3，此选项说法错误，不符合题意

4. -5 【解析】二次函数 $y=3x^2-5$ 的图像的对称轴为 y 轴，且 $3>0$，∴ 在 $-1\leqslant x\leqslant 4$ 范围内，当 $x=0$ 时，y 有最小值，最小值为 -5，故答案为 -5.

5. 3 【解析】由题意，得点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 关于抛物线 $y=2x^2+3$ 的对称轴对称. ∵ 对称轴为直线 $x=0$，∴ $x_1+x_2=2\times0=0$. 将 $x=0$ 代入 $y=2x^2+3$，得 $y=2\times0^2+3=3$. 故答案为 3.

6. D 【解析】把二次函数 $y=3x^2$ 的图像向左平移 2 个单位，所得函数图像的表达式是 $y=3(x+2)^2$，故选 D.

7. C 【解析】抛物线 $y=2x^2$ 的顶点坐标为 $(0,0)$. ∵ 将 y 轴向左平移 1 个单位（x 轴不动），∴ 新平面直角坐标系中抛物线的顶点坐标为 $(1,0)$，∴ 在新平面直角坐标系中抛物线的表达式是 $y=2(x-1)^2$. 故选 C.

8. D 【解析】∵ 抛物线的开口向下，∴ $a-5<0$，解得 $a<5$，观察四个选项，选项 D 符合题意. 故选 D.

9. $y_2>y_3>y_1$ 【解析】∵ $y=-2(x-1)^2$，$-2<0$，∴ 函数图像开口向下，对称轴为直线 $x=1$，∴ 当 $x<1$ 时，y 随 x 的增大而增大，当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小. ∵ $A(-1,y_1)$ 关于对称轴的对称点为 $(3,y_1)$，$1<2<3$，∴ $y_2>y_3>y_1$，故答案为 $y_2>y_3>y_1$.

10. $y=-2(x+3)^2$ 【解析】根据题意设二次函数表达式为 $y=a(x+h)^2$. 根据题意得 $a=-2$，$h=3$，∴ 二次函数的表达式是 $y=-2(x+3)^2$，故答案为 $y=-2(x+3)^2$.

11. 18 【解析】∵ $x=4$ 时的函数值与 $x=2$ 时的函数值相等，∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=3$，则 $m=3$，∴ 抛物线的表达式为 $y=2(x-3)^2$，∴ 当 $x=6$ 时的函数值为 $y=2\times(6-3)^2=18$. 故答案为 18.

归纳总结 函数图像的平移遵循“左加右减自变量，上加下减常数项”这一规律.

易错警示 本题在求常数项 c 时，在只知道平移的单位长度而没有确定平移的方向时，易因没有全面考虑各种情况而出错.

12. 6 【解析】令 $y=0$，得 $\frac{4}{9}(x-3)^2=0$，∴ $x=3$，∴ 点 A 的坐标为 $(3,0)$. 令 $x=0$，得 $y=\frac{4}{9}\times(0-3)^2=4$，∴ 点 B 的坐标为 $(0,4)$. ∵ 点 A 的坐标为 $(3,0)$，点 B 的坐标为 $(0,4)$，∴ $OA=3$，$OB=4$，∴ $S_{\triangle AOB}=\frac{OA\cdot OB}{2}=\frac{3\times4}{2}=6$.

刷易错

13. 【解】∵ 抛物线 $y=ax^2$ 与抛物线 $y=-\frac{2}{3}x^2+c$ 的形状完全相同，且经过平移两抛物线能够完全重合，∴ $a=-\frac{2}{3}$，∴ $y=-\frac{2}{3}x^2$.

又∵ 抛物线 $y=-\frac{2}{3}x^2$ 的对称轴为 y 轴，且抛物线 $y=-\frac{2}{3}x^2$ 沿对称轴平移 2 个单位后就能与抛物线 $y=-\frac{2}{3}x^2+c$ 完全重合，∴ 平移后的抛物线的表达式为 $y=-\frac{2}{3}x^2\pm2$，

∴ 这两个抛物线的表达式为 $y=-\frac{2}{3}x^2$ 和 $y=-\frac{2}{3}x^2\pm2$.

刷提升

1. D 【解析】∵ $m^2-3m+4=\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$，∴ 函数 $y=(m^2-3m+4)x^2+n$ 的图像开口向上. ∵ $x_1<0$ 且满足 $y_1<y_2$，∴ 点 B 在点 A 的左侧或点 B 在点 A 的右侧且 $|x_2|>|x_1|$. 当点 B 在点 A 的左侧时，$x_2<-x_1$，$x_2<x_1$，∴ $x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$；当点 B 在点 A 的右侧且 $|x_2|>|x_1|$ 时，$x_2>-x_1$，$x_2>x_1$，∴ $x_2^2-x_1^2=(x_2+x_1)(x_2-x_1)>0$. 综上所述，选项 D 中的关系一定不正确. 故选 D.

2. C 【解析】∵ 抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-1$ 的顶点坐标为 $A(0,-1)$，对称轴为 y 轴，∴ A_6 与点 A 重合，即 $A_6(0,-1)$，根据对称性可得 A_2 与 A_{10}，A_3 与 A_9，A_4 与 A_8，A_5 与 A_7 都关于点 A 对称，∴ $\frac{y_2+y_{10}}{2}=\frac{y_3+y_9}{2}=\frac{y_4+y_8}{2}=\frac{y_5+y_7}{2}=-1$，∴ $y_2+y_{10}=y_3+y_9=y_4+y_8=y_5+y_7=-2$. 又∵ $y_1=\frac{1}{4}\times$

$5^2-1=\frac{21}{4}$，$y_6=-1$，$\therefore y_1+y_2+y_3+\cdots+y_9+y_{10}=4\times(-2)+\frac{21}{4}+(-1)=-\frac{15}{4}$. 故选 C.

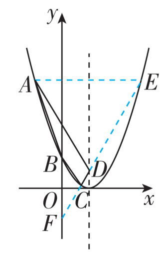
3. B 【解析】$\because$ 函数 $y=-3x^2+9$，$\therefore$ 其图像的开口向下，顶点坐标为 $(0,9)$，对称轴为 y 轴，最大值为 9，在对称轴左侧，y 的值随着 x 值的增大而增大；在对称轴右侧，y 的值随着 x 值的增大而减小. ①当 $n<0$ 时，当 $x=-2$ 时函数取得最小值，最小值为 -3，$x=n$ 时函数取得最大值，最大值为 $-3n^2+9$，$\therefore -3n^2+9+3=12$，解得 $n=0$，不符合题意，舍去；②当 $0\leqslant n\leqslant 2$ 时，$x=0$ 时函数取得最大值，最大值为 9，$x=-2$ 时函数取得最小值，最小值为 -3，此时最大值与最小值的差为 12，符合题意；③当 $n>2$ 时，$x=0$ 时函数取得最大值，最大值为 9，$x=n$ 时函数取得最小值，最小值为 $-3n^2+9$，$\therefore 9+3n^2-9=12$，解得 $n_1=-2$，$n_2=2$，不符合题意，舍去. 综上，n 的取值范围为 $0\leqslant n\leqslant 2$. 故选 B.

4. $\frac{2}{5}$ 【解析】把 $y=0$ 代入 $y=-\frac{4}{5}x^2+1$ 得 $0=-\frac{4}{5}x^2+1$，解得 $x_1=\frac{\sqrt{5}}{2}$，$x_2=-\frac{\sqrt{5}}{2}$，$\therefore$ 两抛物线的交点坐标为 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},0\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},0\right)$. 把 $\left(\frac{\sqrt{5}}{2},0\right)$ 代入 $y=kx^2-2$，得 $0=\frac{5}{4}k-2$，解得 $k=\frac{8}{5}$，$\therefore y=\frac{8}{5}x^2-2$. 抛物线 $y=-\frac{4}{5}x^2+1$ 向下平移 $\frac{1}{5}$ 个单位后得到抛物线的表达式为 $y=-\frac{4}{5}x^2+\frac{4}{5}$. 把 $y=0$ 代入 $y=-\frac{4}{5}x^2+\frac{4}{5}$，得 $0=-\frac{4}{5}x^2+\frac{4}{5}$，解得 $x=\pm1$，$\therefore$ 抛物线 $y=-\frac{4}{5}x^2+\frac{4}{5}$ 与 x 轴的交点为 $(1,0)$，$(-1,0)$. 把 $x=1$ 代入 $y=\frac{8}{5}x^2-2$，得 $y=-\frac{2}{5}$，$\therefore$ 抛物线 $y=\frac{8}{5}x^2-2$ 经过点 $\left(1,-\frac{2}{5}\right)$，$\therefore$ 把抛物线 $y=\frac{8}{5}x^2-2$ 向上平移 $\frac{2}{5}$ 个单位后两条抛物线的交点还在 x 轴上. 故答案为 $\frac{2}{5}$.

思路分析

作点 A 关于抛物线对称轴的对称点 E，点 B 关于 x 轴的对称点 F，连接 EF 交 x 轴于点 C，交对称轴于点 D，此时四边形 $ABCD$ 的周长取得最小值，再求得抛物线表达式即可求得点 B 坐标，利用对称的性质得出点 E，F 的坐标后求出直线 EF 的表达式，即可求解.

5. $\left(1,\frac{2}{3}\right)$ 【解析】抛物线 $y=a(x-1)^2$ 的对称轴为直线 $x=1$. 如图，作点 A 关于直线 $x=1$ 的对称点 E，则 $E(3,4)$，作点 B 关于 x 轴的对称点 F，连接 EF 交 x 轴于点 C，交直线 $x=1$ 于点 D，此时四边形 $ABCD$ 的周长取得最小值. 将点 $A(-1,4)$ 代入 $y=a(x-1)^2$ 得 $4a=4$，解得 $a=1$，$\therefore$ 抛物线表达式为 $y=(x-1)^2$. 当 $x=0$ 时，$y=1$，$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0,1)$，则点 F 的坐标为 $(0,-1)$. 设 CD 所在直线的表达式为 $y=mx+n$. 将 $E(3,4)$，$F(0,-1)$ 代入得 $\begin{cases}3m+n=4,\\ n=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{5}{3},\\ n=-1,\end{cases}$ $\therefore CD$ 所在直线的表达式为 $y=\frac{5}{3}x-1$. 当 $x=1$ 时，$y=\frac{2}{3}$，$\therefore D\left(1,\frac{2}{3}\right)$. 故答案为 $\left(1,\frac{2}{3}\right)$.



6.【解】(1) $\because y=(x+4)^2$，$\therefore$ 对称轴为直线 $x=-4$.

(2)存在. 令 $x=0$，则 $y=16$，令 $y=0$，则 $x=-4$，$\therefore A(-4,0)$，$B(0,16)$. 设 $P(m,n)$. $\because$ 以 P，A，O，B 为顶点的四边形为平行四边形，$\therefore$ 当 AB 为对角线时，$\begin{cases}\frac{-4+0}{2}=\frac{0+m}{2},\\ \frac{16+0}{2}=\frac{0+n}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-4,\\ n=16,\end{cases}$ $\therefore P(-4,16)$；

当 AO 为对角线时，$\begin{cases}\frac{-4+0}{2}=\frac{0+m}{2},\\ \frac{0+0}{2}=\frac{16+n}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-4,\\ n=-16,\end{cases}$ $\therefore P(-4,-16)$；当 AP 为对角线时，$\begin{cases}\frac{-4+m}{2}=\frac{0+0}{2},\\ \frac{0+n}{2}=\frac{16+0}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=4,\\ n=16,\end{cases}$ $\therefore P(4,16)$.

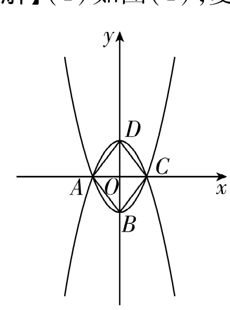
综上所述，P 点坐标为 $(4,16)$ 或 $(-4,-16)$ 或 $(-4,16)$.

刷素养

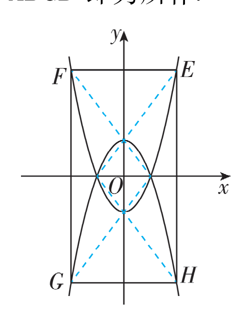
关键点拨

利用二次函数的图像与性质，结合菱形与矩形的判定作图.

7.【解】(1)如图(1)，菱形 $ABCD$ 即为所作.



图(1)



图(2)

(2)如图(2)，矩形 $EFGH$ 即为所作.

课时 3 $y=a(x+h)^2+k$ 与 $y=ax^2+bx+c$ 的图像和性质

刷基础

1. D 【解析】选项 A,该函数的图像开口向下,故选项 A 不符合题意;选项 B,该函数图像的对称轴是直线 $x=2$,故选项 B 不符合题意;选项 C,当 $x=2$ 时 y 取得最大值 5,故选项 C 不符合题意;选项 D,当 $x<2$ 时,y 随 x 的增大而增大,故选项 D 符合题意. 故选 D.

2. B 【解析】$\because y=3(x-1)^2+k$,$\therefore$ 二次函数图像开口向上,对称轴是直线 $x=1$,$\therefore$ 在对称轴的右侧,y 随 x 的增大而增大. $\because C(-2,y_3)$ 关于直线 $x=1$ 的对称点是 $(4,y_3)$,且 $2<3<4$,$\therefore y_3>y_1>y_2$. 故选 B.

3. -4 5 【解析】$\because |x|\leqslant 2$,$\therefore -2\leqslant x\leqslant 2$. $\because$ 二次函数为 $y=(x+1)^2-4$,$\therefore$ 图像的对称轴为直线 $x=-1$,图像开口向上,当 $x=-1$ 时,函数 y 取得最小值 -4. $\because -1-(-2)<2-(-1)$,$\therefore$ 当 $x=2$ 时,函数 y 取得最大值,最大值为 5,$\therefore$ 当 $|x|\leqslant 2$ 时,函数 y 的最小值和最大值分别是 -4 和 5,故答案为 -4,5.

> 易错警示 解题时易忽视根据函数有最小值,可得 $m>0$ 这一隐含条件致错.

4. B 【解析】$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$,$\therefore$ 将抛物线 $y=x^2-2x+3$ 向上平移 2 个单位长度,再向右平移 3 个单位长度后,得到的抛物线的表达式为 $y=(x-1-3)^2+2+2=(x-4)^2+4$. 故选 B.

5. 3 【解析】根据题意知,原抛物线的顶点坐标是 $(0+1,4-2)$,即 $(1,2)$,则原抛物线的表达式为 $y=-(x-1)^2+2=-x^2+2x+1$. 故 $m=2$,$n=1$,所以 $m+n=2+1=3$. 故答案为 3.

6. B 【解析】$\because$ 点 $A(m,n)$,$B(m+1,n)$ 是二次函数 $y=x^2+bx+c$ 图像上的两个点,$\therefore$ 该二次函数图像的对称轴为直线 $x=\frac{2m+1}{2}$,且开口向上. $\because$ 当 $x\leqslant 2$ 时,y 随 x 的增大而减小,$\therefore \frac{2m+1}{2}\geqslant 2$,解得 $m\geqslant\frac{3}{2}$. 故选 B.

> 思路分析 先根据点 A,B 是该二次函数图像上的两点且纵坐标相等,得对称轴为直线 $x=\frac{2m+1}{2}$,再根据图像开口向上,且 $x\leqslant 2$ 时,y 随 x 的增大而减小,得 $\frac{2m+1}{2}\geqslant 2$,解之即可得到答案.

7. -3 下 $(1,6)$ 【解析】把 $(0,0)$ 代入 $y=(a-3)x^2+12x+a^2-9$,得 $a^2-9=0$,解得 $a_1=3$,$a_2=-3$. $\because a-3\neq 0$,$\therefore a\neq 3$,$\therefore a$ 的值为 -3,$\therefore y=-6x^2+12x=-6(x-1)^2+6$,$\therefore$ 函数图像开口向下,顶点坐标为 $(1,6)$. 故答案为 -3,下,$(1,6)$.

8. 【解】(1)$\because$ 二次函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$,$\therefore -\frac{b}{2a}=-\frac{2}{-2}=1$,$\frac{4ac-b^2}{4a}=\frac{-4\times 3-2^2}{-4}=4$,$\therefore$ 该函数图像的顶点坐标为 $(1,4)$.

(2)$\because$ 点 $P(m,n)$ 在该二次函数图像上,且到 y 轴的距离小于 2,$\therefore -2<m<2$. $\because$ 二次函数表达式为 $y=-x^2+2x+3$,$-1<0$,$\therefore$ 二次函数的图像开口向下. 把 $x=-2$ 代入表达式,得 $y=-(-2)^2+2\times(-2)+3=-5$;把 $x=2$ 代入表达式,得 $y=-2^2+2\times 2+3=3$. 又$\because$ 二次函数图像的顶点坐标为 $(1,4)$,$\therefore -5<n\leqslant 4$.

9. ①② 【解析】由二次函数的图像开口向下得 $a<0$. $\because$ 对称轴 $x=-\frac{b}{2a}=1>0$,$\therefore b>0$. $\because$ 二次函数的图像交 y 轴于正半轴,$\therefore c>0$,$\therefore abc<0$,故①正确. $\because$ 对称轴 $x=-\frac{b}{2a}=1$,$\therefore b=-2a$,$\therefore 2a+b=0$,故②正确. 由图像知当 $x=2$ 时,$y=4a+2b+c>0$,故③错误. 当 $x=-1$ 时,$y=a-b+c=a-(-2a)+c=3a+c<0$,故④错误. $\therefore$ 正确的结论有①②.

刷易错

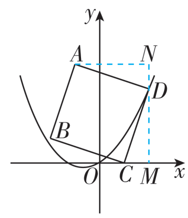
10. 4 【解析】$\because$ 抛物线 $y=mx^2+4x+m-1$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{2}{m}$,$\therefore$ 当 $x=-\frac{2}{m}$ 时,y 有最小值,$\therefore m\cdot\left(-\frac{2}{m}\right)^2-4\times\frac{2}{m}+m-1=2$,整理可得 $m^2-3m-4=0$,解得 $m=-1$ 或 $m=4$. 又$\because$ 函数有最小值,$\therefore m>0$,$\therefore m=4$.

刷提升

1. D 【解析】A 选项,由函数 $y=mx+m$ 的图像可知 $m<0$,$\therefore$ 函数 $y=-mx^2+2x+2$ 的图像应开口向上,故 A 选项错误;B 选项,由函数 $y=mx+m$ 的图像可知 $m<0$,$\therefore$ 函数 $y=-mx^2+2x+2$ 的图像应开口向上,对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2m}=\frac{1}{m}<0$,即对称轴应在 y 轴左侧,故 B 选项错误;C 选项,由函数 $y=mx+m$ 的图像可知 $m>0$,$\therefore$ 函数 $y=-mx^2+2x+2$ 的图像应开口向下,故 C 选项错误;D 选项,由函数 $y=mx+m$ 的图像可知 $m<0$,$\therefore$ 函数 $y=-mx^2+2x+2$ 的图像应开口向上,对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{2m}=\frac{1}{m}<0$,即对称轴应在 y 轴左侧,故 D 选项正确. 故选 D.

2. B 【解析】如图所示,作 $DM\perp x$ 轴于 M,$AN\perp DM$,交 MD 的延长线于 N. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,$\therefore \angle ADC=90°$,$AD=CD$,$\therefore \angle ADN+$

$\angle CDM=90°=\angle CDM+\angle DCM$，$\therefore \angle ADN=\angle DCM$. $\because \angle AND=\angle DMC=90°$，$\therefore \triangle ADN\cong\triangle DCM(AAS)$，$\therefore AN=DM$，$DN=CM$. 设 $D(a,b)$. $\because$ 点 A,C 的坐标分



别是$(-1,4)$，$(1,0)$，$\therefore \begin{cases}a-(-1)=b,\\4-b=a-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\b=3,\end{cases}$ $\therefore D(2,3)$. $\because$ 点 D 在函数 $y=\frac{1}{2}x^2+mx$ 的图像上，$\therefore \frac{1}{2}\times2^2+2m=3$，解得 $m=\frac{1}{2}$. 故选 B.

3. $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ 【解析】$\because$ 直线 $y=x$ 绕原点 O 逆时针旋转 $45°$得到直线 $x=0$，设抛物线 $y=2(x+1)^2+1$ 与 y 轴的交点为 M'，则 $OM=OM'$. 将 $x=0$ 代入 $y=2(x+1)^2+1$，得 $y=3$，$\therefore OM'=3$. 设点 $M(m,m)$. $\because OM=OM'=3$，$\therefore m^2+m^2=3^2$，$\therefore m=\frac{3\sqrt{2}}{2}$（负值已舍去），$\therefore$ 点 M 的坐标为$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$. 故答案为$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

关键点拨 本题的关键是能识别出原抛物线与直线 $x=0$ 组成的图形绕点 O 顺时针旋转 $45°$和新曲线与直线 $y=x$ 组成的图形完全重合，由此得到 $OM=OM'$.

4. ①④ 【解析】①$\because$ 抛物线 $y_2=\frac{1}{2}(x-3)^2+1$ 开口向上，顶点坐标在 x 轴的上方，$\therefore$ 无论 x 取何值，y_2 的值总是正数，故本结论正确. ②把 $A(1,3)$ 代入 $y_1=a(x+2)^2-3$，得 $3=a(1+2)^2-3$，解得 $a=\frac{2}{3}$，故本结论错误. ③$\because a=\frac{2}{3}$，$\therefore$ 抛物线 $y_1=a(x+2)^2-3=\frac{2}{3}(x+2)^2-3$. 当 $x=0$ 时，$y_1=\frac{2}{3}\times(0+2)^2-3=-\frac{1}{3}$，$y_2=\frac{1}{2}\times(0-3)^2+1=\frac{11}{2}$，故 $y_2-y_1=\frac{11}{2}-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{35}{6}$，故本结论错误. ④$\because$ 抛物线 $y_1=a(x+2)^2-3$ 与 $y_2=\frac{1}{2}(x-3)^2+1$ 交于点 $A(1,3)$，$\therefore$ 抛物线 y_1 的对称轴为直线 $x=-2$，抛物线 y_2 的对称轴为直线 $x=3$，$\therefore B(-5,3)$，$C(5,3)$，$\therefore AB=6$，$AC=4$，$\therefore 2AB=3AC$，故本结论正确. 故答案为①④.

5.【解】(1)$\because y=x^2-2mx+2m-3=x^2-(2x-2)m-3$，当 $2x-2=0$，即 $x=1$ 时，$y=x^2-(2x-2)m-3=1-3=-2$，$\therefore$ 不论 m 为何值，该函数图像恒过定点，定点为$(1,-2)$. 故答案为$(1,-2)$.

(2)$\because y=x^2-2mx+2m-3$，$\therefore$ 二次函数图像的对称轴为直线 $x=-\frac{-2m}{2\times1}=m$.

当 $m<-3$ 时，点 $A(-3,y_1)$，$B(2,y_2)$ 在函数图像对称轴的右侧，此时 y 随 x 的增大而增大，则 $y_1<y_2$，不符合题意，舍去；

当 $m>2$ 时，点 $A(-3,y_1)$，$B(2,y_2)$ 在函数图像对称轴的左侧，此时 y 随 x 的增大而减小，则 $y_1>y_2$，符合题意；

当 $-3\leqslant m\leqslant2$ 时，由 $y_1>y_2$ 得出点 A 到对称轴的距离大于点 B 到对称轴的距离，$\therefore m-(-3)>2-m$，解得 $m>-\frac{1}{2}$，$\therefore -\frac{1}{2}<m\leqslant2$.

综上所述，m 的取值范围为 $m>-\frac{1}{2}$.

刷素养

6.【解】(1)当 $m=1$ 时，$y=x(x-2)=x^2-2x=(x-1)^2-1$，$\therefore$ 当 $m=1$ 时，抛物线的顶点坐标为$(1,-1)$.

(2)①由抛物线 $y=mx(x-2m)=m(x-m)^2-m^3$ 得其对称轴为直线 $x=m$.

$\because M(x_1,y_1)$和 $N(x_2,y_2)$是抛物线上的两点，且对于 $x_1=-1$，$x_2=2$，有 $y_1=y_2$，$\therefore$ 点 M,N 关于直线 $x=m$ 对称，$\therefore m=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$.

②当 $x_1=2m$ 时，$y_1=0$，则 $M(2m,0)$. 当 $m>0$ 时，抛物线的开口向上，且 $2m>m$.

$\because$ 点 M 关于直线 $x=m$ 的对称点为 $M'(0,0)$，$x>m$ 时，y 随 x 的增大而增大，$x<m$ 时，y 随 x 的增大而减小，$\therefore$ 若当 $3\leqslant x_2\leqslant4$ 时，都有 $y_1<y_2$，则 $2m<3$，解得 $m<\frac{3}{2}$，$\therefore 0<m<\frac{3}{2}$.

当 $m<0$ 时，抛物线的开口向下，且 $2m<m$.

$\because$ 点 $M(2m,0)$关于直线 $x=m$ 的对称点为 $M'(0,0)$，$x>m$ 时，y 随 x 的增大而减小，$\therefore$ 当 $3\leqslant x_2\leqslant4$ 时，都有 $y_1>y_2$，不符合题意.

综上，满足条件的 m 的取值范围为 $0<m<\frac{3}{2}$.

关键点拨 (2)②分 $m>0$ 和 $m<0$ 两种情况讨论.

微专题

1. A 【解析】$\because$ 点$(2,a)$，$(-1,b)$，$(3,c)$都在抛物线 $y=x^2+x+2$ 上，$\therefore a=2^2+2+2=8$，$b=(-1)^2-1+2=2$，$c=3^2+3+2=14$，$\therefore c>a>b$. 故选 A.

2. D 【解析】二次函数 $y=-x^2+4x-c$ 图像的对称轴为直线 $x=2$，则点 $P_3(3,y_3)$关于直线 $x=2$ 的对称点为$(1,y_3)$. $\because -1<0$，$\therefore$ 抛物线 $y=-x^2+4x-c$ 开口向下，$\therefore$ 当 $x<2$ 时，y 随 x 的增大

大而增大. ∵ $-3<1=1$, ∴ $y_1<y_3=y_2$. 故选 D.

3. B 【解析】在 $y=ax^2-2ax-3a(a\neq0)$ 中,其图像的对称轴为直线 $x=-\frac{-2a}{2a}=1$. ∵ $-1<x_1<0$, $1<x_2<2$, $x_3>3$, ∴ $|x_3-1|>|x_1-1|>|x_2-1|$, ∴ 点 (x_3,y_3) 离对称轴最远,点 (x_2,y_2) 离对称轴最近. 当 $a>0$ 时,抛物线开口向上, ∴ $y_3>y_1>y_2$; 当 $a<0$ 时,抛物线开口向下, ∴ $y_3<y_1<y_2$. 综上,y_2 和 y_3 可能最大,也可能最小,y_1 不可能最大,也不可能最小. 故选 B.

思路分析 分 $a>0$ 和 $a<0$ 两种情况讨论,根据已知三点与对称轴的距离,结合抛物线开口方向分析即可.

4.【解】(1)∵ 对于 $x_1=3$, $x_2=4$ 有 $y_1=y_2$, ∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{7}{2}$.

∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=t$, ∴ $t=\frac{7}{2}$.

(2)∵ $2<x_1<3$, $3<x_2<4$, ∴ $\frac{5}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}<\frac{7}{2}$, $x_1<x_2$. 又∵ $y_1<y_2$, $a>0$, ∴ 点 (x_1,y_1) 离对称轴更近,则点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 连线的中点在对称轴的右侧, ∴ $\frac{x_1+x_2}{2}>t$, 即 $t\leqslant\frac{5}{2}$.

微专题

1.【解】$y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$, 抛物线对称轴为直线 $x=-1$. 当 $x>-1$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x<-1$ 时, y 随 x 的增大而减小.

(1)在全体实数范围内,当 $x=-1$ 时,函数有最小值-4,没有最大值.

(2)在 $-4\leqslant x\leqslant-2$ 的区间内,当 $x=-2$ 时,函数有最小值-3;当 $x=-4$ 时,函数有最大值 5.

(3)在 $-3\leqslant x\leqslant0$ 的区间内,当 $x=-1$ 时,函数有最小值-4;当 $x=-3$ 时,函数有最大值 0.

(4)在 $1\leqslant x\leqslant3$ 的区间内,当 $x=1$ 时,函数有最小值 0;当 $x=3$ 时,函数有最大值 12.

2. (1) 1 或 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$　(2) $-2\leqslant m\leqslant-1$

关键点拨 (1)依据题意,可得抛物线对称轴为直线 $x=1$,进而结合二次函数的性质分 $\frac{m}{2}>1$, $\frac{m}{2}\leqslant1\leqslant m+1$ 和 $m+1<1$ 三种情形进行讨论即可得解.

【解析】(1) 抛物线 $y=x^2-2x+m-1$ 的对称轴为直线 $x=1$,抛物线开口向上, ∴ 当 $x>1$ 时, y 随 x 的增大而增大; 当 $x<1$ 时, y 随 x 的增大而减小. ①当 $\frac{m}{2}>1$, 即 $m>2$ 时,则当 $x=\frac{m}{2}$ 时, $y=-1$, ∴ $\left(\frac{m}{2}\right)^2-2\cdot\frac{m}{2}+m-1=-1$, 解得 $m=0$,不符合题意,舍去. ②当 $\frac{m}{2}\leqslant1\leqslant m+1$, 即 $0\leqslant m\leqslant2$ 时,则当 $x=1$ 时, $y=-1$, ∴ $1-2+m-1=-1$, 解得 $m=1$. ③当 $m+1<1$, 即 $m<0$ 时,则当 $x=m+1$ 时, $y=-1$, ∴ $(m+1)^2-2(m+1)+m-1=-1$, ∴ $m^2+m-1=0$, 解得 $m_1=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $m_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$(舍去). 综上所述, $m=1$ 或 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. 故答案为 1 或 $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

(2)二次函数 $y=ax^2+2ax+1=a(x+1)^2-a+1\,(a>0)$, ∴ 该函数图像开口向上,对称轴是直线 $x=-1$,当 $x=-1$ 时,该函数取得最小值$-a+1$. ∵ 当 $m\leqslant x\leqslant0$ 时, y 有最小值 $1-a$ 和最大值 1,且当 $x=0$ 时, $y=1$,根据抛物线的对称性,当 $x=-2$ 时, $y=1$, ∴ $-2\leqslant m\leqslant-1$, 故答案为$-2\leqslant m\leqslant-1$.

3. -1 或 -2　【解析】$y=x^2+2ax=(x+a)^2-a^2$, ∴ 抛物线对称轴为直线 $x=-a$,抛物线开口向上. ①若 $-a<0$, 即 $a>0$, 则当 $x=0$ 时, $m=0$, 当 $x=3$ 时, $M=9+6a$. ∵ $M-m=4$, ∴ $9+6a-0=4$, 解得 $a=-\frac{5}{6}$(舍去). ②若 $0\leqslant-a\leqslant1.5$, 即 $-1.5\leqslant a\leqslant0$, 则当 $x=-a$ 时, $m=-a^2$, 当 $x=3$ 时, $M=9+6a$. ∵ $M-m=4$, ∴ $9+6a+a^2=4$, 解得 $a=-1$ 或 $a=-5$(舍去). ③若 $1.5<-a\leqslant3$, 即 $-3\leqslant a<-1.5$, 则当 $x=-a$ 时, $m=-a^2$, 当 $x=0$ 时, $M=0$. ∵ $M-m=4$, ∴ $0-(-a^2)=4$, 解得 $a=-2$ 或 $a=2$(舍去). ④若 $-a>3$, 即 $a<-3$, 则当 $x=3$ 时, $m=9+6a$, 当 $x=0$ 时, $M=0$. ∵ $M-m=4$, ∴ $0-(9+6a)=4$, 解得 $a=-\frac{13}{6}$(舍去). 综上可知, a 的值是-1 或-2,故答案为-1 或-2.

4.【解】$y=x^2+2mx+4m^2=(x+m)^2+3m^2$, ∴ 抛物线对称轴是直线 $x=-m$,抛物线开口向上.

①当 $2m>-m$, 即 $m>0$ 时,当 $x=2m$ 时, $y=9$, ∴ $4m^2+4m^2+4m^2=9$, 解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{2}$(负值已舍去),此时的二次函数表达式为 $y=x^2+\sqrt{3}x+3$.

②当 $2m\leqslant-m\leqslant2m+3$, 即 $-1\leqslant m\leqslant0$ 时,当 $x=-m$ 时, $y=9$, ∴ $3m^2=9$, 解得 $m=\pm\sqrt{3}$(都不符合题意,舍去).

③当 $2m+3<-m$, 即 $m<-1$ 时,当 $x=2m+3$ 时, $y=9$, ∴ $(2m+3)^2+2m(2m+3)+4m^2=9$, 解得 $m=0$(舍去)或-1.5,此时的二次函数表达式为 $y=x^2-3x+9$.

综上,二次函数表达式为 $y=x^2+\sqrt{3}x+3$ 或 $y=x^2-3x+9$.

5.3 用待定系数法确定二次函数表达式

刷基础

1. D 【解析】∵ $OA=OC=2$, ∴ 点 $A(-2,0)$,

$C(0,2)$,将其代入 $y=\frac{1}{8}x^2+bx+c$ 可得 $\begin{cases}\frac{1}{2}-2b+c=0,\\ c=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=\frac{5}{4},\\ c=2.\end{cases}$ 故选 D.

2. -19 【解析】∵ A,B,D 的纵坐标相同,∴ 二次函数图像不会同时经过 A,B,D 三点,∴ 分以下三种情况:①经过 A,B,C;②经过 B,D,C;③经过 A,D,C. 易知图像经过 B,D,C 三点的二次函数,$a+b+c$ 的值最小. 把 $B(4,2)$,$C(6,6)$,$D(8,2)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$,得 $\begin{cases}16a+4b+c=2,\\ 36a+6b+c=6,\\ 64a+8b+c=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=12,\\ c=-30,\end{cases}$ 此时 $a+b+c=-19$,故 $a+b+c$ 的最小值等于 -19. 故答案为 -19.

3. (1)【解】①将 $(2,5)$ 代入 $y=x^2+2ax-3a$ 可得 $5=4+4a-3a$,解得 $a=1$,∴ 该二次函数的表达式为 $y=x^2+2x-3$.

②∵ 将平面内一点 $A(1,n)$ 向左平移 $3m(m>0)$ 个单位,与图像上的点 B 重合;将点 A 向右平移 $m(m>0)$ 个单位,与图像上的点 C 重合,∴ $B(1-3m,n)$,$C(1+m,n)$.

∵ $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$,∴ 抛物线的对称轴为直线 $x=-1$,∴ $\frac{1-3m+1+m}{2}=-1$,解得 $m=2$,∴ $1+m=3$. 把 $x=3$ 代入 $y=x^2+2x-3$,得 $y=9+6-3=12$,即 $C(3,12)$.

(2)【证明】∵ 点 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$ 是该函数图像上的两点,$x_1+x_2=3$,∴ $x_2=3-x_1$,$y_1=x_1^2+2ax_1-3a$,∴ $y_2=(3-x_1)^2+2a(3-x_1)-3a$,∴ $y_1+y_2=x_1^2+2ax_1-3a+(3-x_1)^2+2a(3-x_1)-3a=x_1^2+2ax_1-3a+9-6x_1+x_1^2+6a-2ax_1-3a=2x_1^2-6x_1+9=2\left[x_1^2-3x_1+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]+9=2\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2+9-2\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=2\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$.

∵ $\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2\geqslant 0$,∴ $2\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\geqslant\frac{9}{2}$,即 $y_1+y_2\geqslant\frac{9}{2}$.

思路分析 (2)由 $x_1+x_2=3$ 可得 $x_2=3-x_1$,用含 x_1 的式子分别表示出 y_1,y_2,可得 $y_1+y_2=2\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$,再根据 $\left(x_1-\frac{3}{2}\right)^2\geqslant 0$ 得出结论.

4. B 【解析】∵ 抛物线的顶点是 $A(2,1)$,∴ 设抛物线的函数表达式是 $y=a(x-2)^2+1$. 把 B 点的坐标代入得 $0=a(1-2)^2+1$,解得 $a=-1$,即抛物线的函数表达式是 $y=-(x-2)^2+1=-x^2+4x-3$. 故选 B.

5. $y=2(x+1)^2+4$(答案不唯一) 【解析】∵ 抛物线顶点坐标为 $(-1,4)$,∴ 设抛物线的表达式为 $y=a(x+1)^2+4$. ∵ 抛物线开口向上,∴ $a>0$. 故满足题意的二次函数的表达式可以为 $y=2(x+1)^2+4$.

技巧点拨 一般地,当已知抛物线上三点时,常设其表达式为一般式,用待定系数法列三元一次方程组来求解;当已知抛物线的顶点或对称轴时,常设其表达式为顶点式来求解;当已知抛物线与 x 轴的两个交点时,可设其表达式为交点式来求解.

6. B 【解析】∵ 点 $(-4,0)$,$(2,0)$ 向右平移 3 个单位长度后对应点的坐标为 $(-1,0)$,$(5,0)$,∴ 平移后的抛物线表达式为 $y=a(x+1)(x-5)$. 把 $(0,-5)$ 代入得 $a\times(0+1)\times(0-5)=-5$,解得 $a=1$,∴ 原抛物线的表达式为 $y=(x+4)(x-2)$,即 $y=x^2+2x-8$,∴ $b=2$,$c=-8$,∴ $a+b+c=1+2-8=-5$. 故选 B.

7. 2 【解析】设 $x_1<x_2$,则 $AB=x_2-x_1$. 由 $\triangle ABC$ 的面积为 3,且 $C(0,3)$,得 $AB=2$,∴ $AB=x_2-x_1=2$. 联立 $\begin{cases}x_2-x_1=2,\\ x_1+x_2=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=3,\end{cases}$ ∴ $y=ax^2+bx+c=a(x-1)(x-3)$,将 $C(0,3)$ 代入,得 $3a=3$,∴ $a=1$,∴ $y=ax^2+bx+c=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$,∴ $b=-4$,$c=3$,∴ $3a+b+c=3\times1+(-4)+3=2$. 故答案为 2.

8. (1)【证明】令 $y=0$,则 $a(x-m)(x-m-6)=0$,∴ $x_1=m$,$x_2=m+6$.

∵ $m\neq m+6$,∴ 该函数的图像与 x 轴有两个交点.

【解】(2)∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{m+m+6}{2}=m+3$,顶点 A 的纵坐标为 -9,

∴ 当 $x=m+3$ 时,$y=-9a=-9$,∴ $a=1$.

∵ 该函数图像与 y 轴交于 $B(0,-5)$,

∴ $(0-m)(0-m-6)=-5$,即 $m^2+6m+5=0$,

∴ $(m+1)(m+5)=0$,解得 $m_1=-1$,$m_2=-5$.

当 $m=-5$ 时,$y=(x+5)(x-1)=x^2+4x-5$;

当 $m=-1$ 时,$y=(x+1)(x-5)=x^2-4x-5$,

∴ 该函数的表达式为 $y=x^2+4x-5$ 或 $y=x^2-4x-5$.

(3)∵ 函数图像顶点 A 的纵坐标为负数,且与 x 轴有两个交点,∴ 抛物线开口向上.

∵ 对称轴为直线 $x=m+3$,∴ 当 $m+3=\frac{-6+2}{2}=-2$,即 $m=-5$ 时,$y_1=y_2$;

当 $m>-5$ 时,$y_1>y_2$;当 $m<-5$ 时,$y_1<y_2$.

大招专题 1 二次函数中的最值问题

刷难关

大招解读 | 几何定理法求线段之差(和)的最值

(1)线段之差最大问题:当两定点和动点共线时,线段之差最大,所以动点在两定点所在的直线上,求解时可过两定点作直线.

(2)线段之和(周长)最小问题:这类问题一般是将军饮马中"两定点,定线上一动点",求解时作对称点,将求和的两条线段转化到一条线段上.

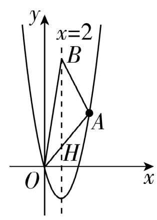
1.【解】(1)$\because$ 抛物线过点 $O(0,0)$,$A(5,5)$,且它的对称轴为直线 $x=2$,$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标为$(4,0)$.

设抛物线表达式为 $y=ax(x-4)$.

把 $A(5,5)$代入,得 $5a=5$,解得 $a=1$,

$\therefore$ 此抛物线的表达式为 $y=x^2-4x$.

(2)①如图(1),点 B 是抛物线对称轴上的一点,且点 B 在第一象限,$\therefore$ 设 $B(2,m)(m>0)$,直线 OA 的表达式为 $y=kx$,则 $5k=5$,解得 $k=1$,$\therefore$ 直线 OA 的表达式为 $y=x$. 设直线 OA 与抛物线对称轴交于点 H,则 $H(2,2)$,



图(1)

$\therefore BH=|m-2|$.

$\because S_{\triangle OAB}=15$,$\therefore \frac{1}{2}\times|m-2|\times5=15$,解得 $m=8$ 或 $m=-4$(舍去),$\therefore$ 点 B 的坐标为$(2,8)$.

②设直线 AB 的表达式为 $y=cx+d$. 把 $A(5,5)$,$B(2,8)$代入得$\begin{cases}5c+d=5,\\2c+d=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}c=-1,\\d=10,\end{cases}$

▶**关键点拨**

(2)②当 P,B,A 共线时,$PA-PB$ 的值最大.

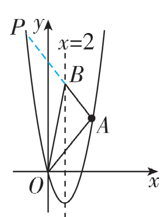
$\therefore$ 直线 AB 的表达式为 $y=-x+10$.

如图(2),当 $PA-PB$ 的值最大时,点 A,B,P 在同一条直线上.

$\because$ P 是抛物线上的动点,

$\therefore$ 联立$\begin{cases}y=-x+10,\\y=x^2-4x,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=-2,\\y_1=12,\end{cases}\begin{cases}x_2=5,\\y_2=5\end{cases}$(舍去),



图(2)

$\therefore P(-2,12)$.

2.【解】(1)把 $B(-3,0)$,$C(0,-3)$代入 $y=x^2+bx+c$ 得$\begin{cases}9-3b+c=0,\\c=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=2,\\c=-3,\end{cases}$$\therefore y=x^2+2x-3$.

把 $B(-3,0)$代入 $y=x+m$ 得 $-3+m=0$,解得 $m=3$,$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2+2x-3$,m 的值是 3.

(2)如图(1),连接 BC 交对称轴于 P.

▶**关键点拨**

(2)本题考查了将军饮马模型,利用二次函数图像的对称性找对称点是解题的关键.

$\because A$,B 关于对称轴对称,$\therefore PA=PB$,$\therefore PA+PC$ 的最小值为 BC 的长,$\therefore$ 此时点 P 就是所求的点.

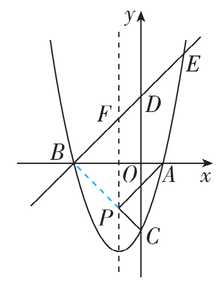
$\because$ 抛物线表达式为 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$,

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-1$.

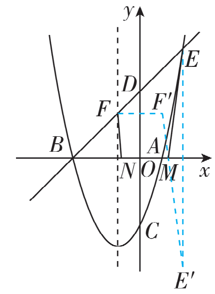
设直线 BC 的表达式为 $y=kx+t$,将 $B(-3,0)$,$C(0,-3)$代入,得$\begin{cases}-3k+t=0,\\t=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=-1,\\t=-3,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y=-x-3$.

把 $x=-1$ 代入,得 $y=1-3=-2$,$\therefore$ 点 P 的坐标为$(-1,-2)$.



图(1)



图(2)

(3)$\because E$,F 为定点,$MN=2$,$\therefore$ 线段 EF,MN 的长为定值,$\therefore$ 当 $EM+FN$ 的值最小时,四边形 $MEFN$ 的周长最小.

将点 F 向右平移 2 个单位得到 F',作点 E 关于 x 轴的对称点 E',连接 $E'F'$与 x 轴交于点 M,过点 F 作 $FN/\!/E'F'$交 x 轴于点 N,此时满足 $MN=2$,如图(2),由作图易知,$EM=E'M$,$FN=F'M$,

此时 $EM+FN$ 的值最小,$EM+FN=E'M+F'M=E'F'$.

$\because$ 抛物线对称轴为直线 $x=-1$,点 F 为直线 $y=x+3$ 与对称轴的交点,$\therefore$ 易得 $F(-1,2)$,

$\therefore F'(1,2)$.

联立直线 BD 和抛物线的表达式易得 $E(2,5)$,$\therefore E'(2,-5)$,

$\therefore E'F'=\sqrt{(2-1)^2+(-5-2)^2}=5\sqrt{2}$,$\therefore EM+FN$ 的最小值为 $5\sqrt{2}$.

$\because E(2,5)$,$F(-1,2)$,$\therefore EF=\sqrt{(2+1)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{2}$.

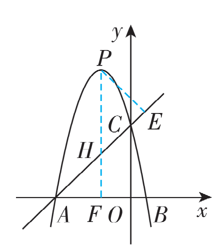
$\because$ 此时 $EM+FN+EF+MN=5\sqrt{2}+3\sqrt{2}+2=8\sqrt{2}+2$,$\therefore$ 四边形 $MEFN$ 周长的最小值为 $8\sqrt{2}+2$.

大招解读|代数法求线段最值

二次函数图像中求平行于坐标轴的线段最值问题时,常用代数法:设出动点坐标,利用坐标表示出线段长度,构造二次函数,利用二次函数的性质求最值.

3.【解】(1)$\because$ 点 $C(0,5)$在抛物线 $y=-x^2-4x+c$ 上,$\therefore c=5$,$\therefore y=-x^2-4x+5$,令 $y=0$,得 $0=-x^2-4x+5$,解得 $x=1$ 或 -5,$\therefore$ 点 A 的坐标为$(-5,0)$.

(2)由(1)知,$B(1,0)$. 过 P 作 $PE\perp AC$ 于点 E,过 P 作 $PF\perp x$ 轴交 AC 于点 H,交 x 轴于点 F,如图.



$\because A(-5,0)$,$C(0,5)$,

$\therefore OA=OC$,$\therefore \triangle AOC$ 是等腰直角三角形,$\therefore \angle CAO=45°$.

$\because PF\perp x$ 轴,$\therefore \angle AHF=45°=\angle PHE$,

$\therefore \triangle PHE$ 是等腰直角三角形，$\therefore PE=EH$，

$\therefore PH^2=PE^2+EH^2=2PE^2$，$\therefore PE=\dfrac{PH}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}PH$，

$\therefore$ 当 PH 最大时，PE 最大.

设直线 AC 的表达式为 $y=kx+5$，将 $A(-5,0)$ 代入得 $0=-5k+5$，$\therefore k=1$，$\therefore$ 直线 AC 的表达式为 $y=x+5$.

设 $P(m,-m^2-4m+5)(-5<m<0)$，则 $H(m,m+5)$，$\therefore PH=(-m^2-4m+5)-(m+5)=-\left(m+\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$.

$\because -1<0$，$\therefore$ 当 $m=-\dfrac{5}{2}$ 时，PH 取得最大值，为 $\dfrac{25}{4}$，$\therefore PE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{25}{4}=\dfrac{25\sqrt{2}}{8}$，$\therefore$ 点 P 到直线 AC 距离的最大值为 $\dfrac{25\sqrt{2}}{8}$.

4.【解】(1) $\because$ 抛物线 L: $y=ax^2+bx-2$ 经过 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点，$\therefore \begin{cases}a-b-2=0,\\9a+3b-2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\dfrac{2}{3},\\b=-\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

(2) 由(1)知抛物线 L 的函数表达式为 $y=\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x-2$.

$\because A(-1,0)$，$B(3,0)$，$\therefore AB=4$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\times|y_C|=\dfrac{1}{2}\times4\times|y_C|=4$，解得 $y_C=\pm2$.

$\because$ 点 C 在抛物线 L 上，且位于第四象限，

$\therefore y_C=-2$.

将 $y_C=-2$ 代入表达式，得 $\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{4}{3}x-2=-2$，解得 $x=0$(舍去)或 $x=2$，$\therefore C(2,-2)$.

设线段 AC 所在直线的函数表达式为 $y=mx+n$，$\therefore \begin{cases}-m+n=0,\\2m+n=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\dfrac{2}{3},\\n=-\dfrac{2}{3},\end{cases}$ $\therefore$ 线段 AC 所在直线的函数表达式为 $y=-\dfrac{2}{3}x-\dfrac{2}{3}$.

(3) 设 $P\left(t,\dfrac{2}{3}t^2-\dfrac{4}{3}t-2\right)$.

$\because PM/\!/x$ 轴，$\therefore y_M=y_P=\dfrac{2}{3}t^2-\dfrac{4}{3}t-2$，

$\therefore \dfrac{2}{3}t^2-\dfrac{4}{3}t-2=-\dfrac{2}{3}x_M-\dfrac{2}{3}$，$\therefore x_M=-t^2+2t+2$，

$\therefore M\left(-t^2+2t+2,\dfrac{2}{3}t^2-\dfrac{4}{3}t-2\right)$，

$\therefore PM=x_M-x_P=-t^2+2t+2-t=-t^2+t+2$.

▶**思路分析**

(1) 把点 C 的坐标代入表达式求出 c 的值，再令 $y=0$ 即可求出点 A 的坐标；

(2) 过 P 作 $PE\perp AC$ 于点 E，过 P 作 $PF\perp x$ 轴交 AC 于点 H，交 x 轴于点 F，证明 $\triangle PHE$ 是等腰直角三角形，求得 $PE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}PH$，当 PH 最大时，PE 最大，运用待定系数法求出直线 AC 的表达式为 $y=x+5$，设 $P(m,-m^2-4m+5)(-5<m<0)$，则 $H(m,m+5)$，求得 PH 的长，再根据二次函数的性质求解即可.

$\because PN/\!/y$ 轴，$\therefore x_N=t$，$\therefore N\left(t,-\dfrac{2}{3}t-\dfrac{2}{3}\right)$，

$\therefore PN=y_N-y_P=-\dfrac{2}{3}t-\dfrac{2}{3}-\left(\dfrac{2}{3}t^2-\dfrac{4}{3}t-2\right)=-\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{2}{3}t+\dfrac{4}{3}$，$\therefore PM+PN=-t^2+t+2-\dfrac{2}{3}t^2+\dfrac{2}{3}t+\dfrac{4}{3}=-\dfrac{5}{3}t^2+\dfrac{5}{3}t+\dfrac{10}{3}=-\dfrac{5}{3}\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}$.

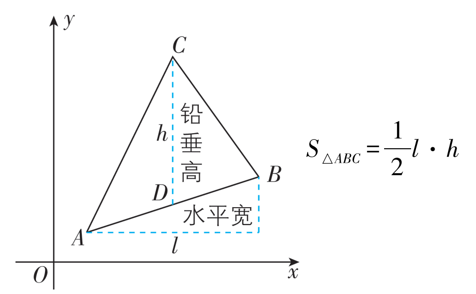
$\because$ 点 P 在线段 AC 下方的抛物线上，过 P 作 x 轴、y 轴的平行线分别交线段 AC 于 M，N，

$\therefore$ 结合(2)可知 $-1<t\leqslant0$.

$\because -\dfrac{5}{3}<0$，$\therefore$ 当 $t<\dfrac{1}{2}$ 时，$PM+PN$ 的值随 x 的增大而增大，$\therefore$ 当 $t=0$ 时，$PM+PN$ 有最大值，最大值为 $-\dfrac{5}{3}\times\left(0-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{15}{4}=\dfrac{10}{3}$.

大招解读 | 铅垂法巧求面积最值

铅垂法是一种求三角形面积的特殊方法，主要解决的是斜三角形面积问题. 具体公式为三角形面积等于水平宽和铅垂高乘积的一半. 三角形的水平宽指的是两个顶点之间的水平距离，而铅垂高是指从一个顶点到对边的铅垂高度.



结论证明◀

证明：如图，

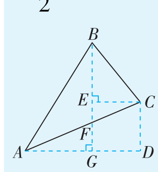
$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BCF}$

$=\dfrac{1}{2}BF\cdot AG+\dfrac{1}{2}BF\cdot EC$

$=\dfrac{1}{2}BF\cdot(AG+EC)$

$=\dfrac{1}{2}BF\cdot(AG+GD)$

$=\dfrac{1}{2}BF\cdot AD.$

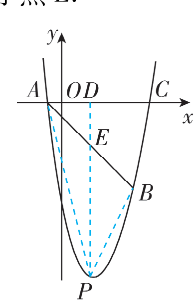


5.【解】(1) 设 $y=a(x+1)(x-6)(a\neq0)$.

把 $B(5,-6)$ 代入，得 $a(5+1)(5-6)=-6$，解得 $a=1$，

$\therefore y=(x+1)(x-6)=x^2-5x-6$.

(2) 如图，连接 AP，BP，过点 P 作 $PD\perp x$ 轴于点 D，交 AB 于点 E.



由 $A(-1,0)$，$B(5,-6)$，易得直线 AB 的表达式为 $y=-x-1$.

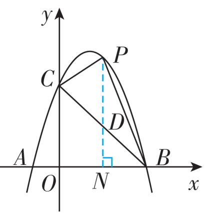
设 $P(m,m^2-5m-6)(-1<m<5)$，则 $E(m,-m-1)$，$\therefore PE=(-m-1)-(m^2-5m-6)=-m^2+4m+5$，$\therefore S_{\triangle ABP}=\dfrac{1}{2}PE\cdot(x_B-x_A)=$

$\frac{1}{2}(-m^2+4m+5)\times 6=-3(m-2)^2+27$,

∴ 当 $m=2$ 时，$S_{\triangle ABP}$ 最大，此时 $P(2,-12)$.

6.【解】(1)$A(-1,0)$，$B(3,0)$，$C(0,3)$.

(2)如图，过点 P 作 $PN\perp x$ 轴于点 N，交 BC 于点 D，则 $S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}PD\cdot OB$. ∵ $B(3,0)$，∴ $OB=3$，∴ $S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}PD\cdot OB=\frac{3}{2}PD$. 设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b$，把 $B(3,0)$，$C(0,3)$ 代入，得 $\begin{cases}0=3k+b,\\3=b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-1,\\b=3,\end{cases}$ ∴ 直线 BC 的表达式为 $y=-x+3$. 设 $P(m,-m^2+2m+3)(0<m<3)$，则 $D(m,-m+3)$，∴ $PD=-m^2+2m+3-(-m+3)=-m^2+3m=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，∴ 当 $m=\frac{3}{2}$ 时，PD 取最大值，即 $\triangle BCP$ 的面积最大，∴ $P\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$.



▶关键点拨

(2)易知 PD 取最大值时，$\triangle BCP$ 的面积最大，利用坐标将 PD 的长表示出来，根据二次函数的性质即可推出点 P 的坐标.

5.2~5.3　综合训练

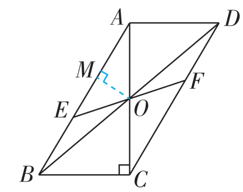
刷综合

1. C　【解析】∵ 抛物线 $y=(x-2)^2+1$ 的顶点坐标为 $(2,1)$，开口向上，∴ 抛物线 $y=(x-2)^2+1$ 绕点 $(2,1)$ 旋转 $180°$ 后得到的抛物线的顶点坐标为 $(2,1)$，开口向下，∴ 所得到的图像的表达式为 $y=-(x-2)^2+1$，故选 C.

2. A　【解析】当顶点 P 在 $E(3,1)$ 处时，A 点的横坐标最大，设此时抛物线的表达式为 $y=a(x-3)^2+1$，将 $A(2,0)$ 代入，解得 $a=-1$，则抛物线的表达式为 $y=-(x-3)^2+1$. 当顶点 P 在 $C(-1,4)$ 处时，B 点的横坐标最小，此时抛物线的表达式为 $y=-(x+1)^2+4$. 当 $y=0$ 时，$-(x+1)^2+4=0$，解得 $x_1=-3$，$x_2=1$，∴ $B(1,0)$，∴ 点 B 的横坐标的最小值为 1. 故选 A.

3. C　【解析】∵ 点 $A(1,m)$，$B(n,-4)$ 是关于 x 的“黄金函数”$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 图像上的一对“黄金点”，∴ A，B 关于原点对称，∴ $m=4$，$n=-1$，∴ $A(1,4)$，$B(-1,-4)$，代入 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 得 $\begin{cases}a+b+c=4,\\a-b+c=-4,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}b=4,\\a+c=0,\end{cases}$ ∴ ①②正确. ∵ 该函数图像的对称轴始终位于直线 $x=2$ 的右侧，∴ $-\frac{b}{2a}>2$，∴ $-\frac{4}{2a}>2$，∴ $-1<a<0$，∴ ④正确. ∵ $a+c=0$，∴ $c=-a$，∴ $0<c<1$. 当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{1}{4}a+2-a=2-\frac{3}{4}a$. ∵ $-1<a<0$，∴ $-\frac{3}{4}a>0$，∴ $\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=2-\frac{3}{4}a>0$，∴ ③错误. 综上所述，结论正确的是①②④. 故选 C.

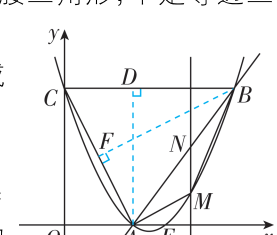
4. C　【解析】如图，过 O 点作 $OM\perp AB$ 于 M. ∵ $AC\perp BC$，$\angle ABC=60°$，∴ $\angle BAC=30°$. ∵ $BC=4$，∴ $AB=8$，∴ $AC=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$. ∵ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，AC，BD 交于点 O，∴ $AO=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$，∴ $OM=\frac{1}{2}AO=\sqrt{3}$，∴ $AM=\sqrt{AO^2-OM^2}=3$. ∵ $BE=x$，∴ $EM=AB-AM-BE=8-3-x=5-x$. ∵ $OE^2=EM^2+OM^2$，$OE^2=y$，∴ $y=(x-5)^2+3$，∴ y 关于 x 的函数图像是一条抛物线，由题意得 $0\leqslant x\leqslant 8$，当 $x=8$ 时，$y=12$，故符合表达式的函数图像为选项 C. 故选 C.



思路分析◀

过 O 点作 $OM\perp AB$ 于 M，根据含 $30°$ 角的直角三角形的性质和勾股定理得出 $AB=8$，$AC=4\sqrt{3}$，根据平行四边形的性质得出 $AO=2\sqrt{3}$，再求出 OM，AM 的长，用含 x 的式子表示 EM 的长，由 $OE^2=OM^2+EM^2$ 得到 y 关于 x 的函数表达式，结合自变量的取值范围求解即可.

5. C　【解析】将 $(2,0)$ 代入抛物线 $y=ax^2-\frac{10}{3}x+4$ 与直线 $y=\frac{4}{3}x+b$，可得 $a=\frac{2}{3}$，$b=-\frac{8}{3}$. 设点 M 的横坐标为 m，则 $M\left(m,\frac{2}{3}m^2-\frac{10}{3}m+4\right)$，$N\left(m,\frac{4}{3}m-\frac{8}{3}\right)$. 联立 $\begin{cases}y=\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{3}x+4,\\y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3},\end{cases}$ 可得点 B 的坐标为 $(5,4)$. 对于 $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{10}{3}x+4$，令 $x=0$，可得 $y=4$，∴ $C(0,4)$. ∵ $A(2,0)$，∴ 易知 $AB=BC=5$，则 $\angle CAB=\angle ACB$，∴ $\triangle ABC$ 是等腰三角形. A 选项，当 MN 与抛物线的对称轴重合时，点 M，N 的坐标分别为 $\left(\frac{5}{2},-\frac{1}{6}\right)$，$\left(\frac{5}{2},\frac{2}{3}\right)$，∴ 易得 $BN=\frac{25}{6}$，$MN=\frac{5}{6}$，∴ $BN+MN=5=AB$，故本选项错误. B 选项，∵ $BC/\!/x$ 轴（B，C 两点纵坐标相同），∴ $\angle BAE=\angle CBA$，而 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，不是等边三角形，$\angle CBA\neq\angle BAC$，∴ $\angle BAC=\angle BAE$ 不成立，故本选项错误. C 选项，如图，作 $AD\perp BC$，$BF\perp AC$. ∵ $AB=BC$，∴ BF 是 $\angle ABC$ 的平分线. 易证 $\angle CAD=$



$\angle ABF=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，而$\angle ACB-\angle ANM=\angle CAB-\angle DAN=\angle CAD=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，故本选项正确.

D 选项，$S_{四边形ACBM}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABM}$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times5\times4=10$，$S_{\triangle ABM}=\dfrac{1}{2}MN\cdot(x_B-x_A)=\dfrac{3}{2}\times\left[\left(\dfrac{4}{3}m-\dfrac{8}{3}\right)-\left(\dfrac{2}{3}m^2-\dfrac{10}{3}m+4\right)\right]=-m^2+7m-10=-\left(m-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$，其最大值为$\dfrac{9}{4}$，故$S_{四边形ACBM}$的最大值为$10+\dfrac{9}{4}=12.25$，故本选项错误. 故选 C.

6. $y=\dfrac{3}{4}x^2+3x+3$ 或 $y=\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{4}{3}x+2$

【解析】$\because$ 二次函数$y=ax^2+bx+c(a>0)$的图像与坐标轴共有两个交点，且这两个交点到原点的距离分别为 2 和 3，$\therefore$ 二次函数的图像与坐标轴的交点为$(0,c)$，$\left(-\dfrac{b}{2a},0\right)$. $\because$ 对称轴在y轴左侧，$a>0$，$\therefore b>0$，$c>0$. $\because$ 这两个交点到原点的距离分别为 2 和 3，$\therefore$ 当$-\dfrac{b}{2a}=-2$，$c=3$时，$4a-2b+3=0$，解得$a=\dfrac{3}{4}$，$b=3$，$\therefore y=\dfrac{3}{4}x^2+3x+3$；当$-\dfrac{b}{2a}=-3$，$c=2$时，$9a-3b+2=0$，解得$a=\dfrac{2}{9}$，$b=\dfrac{4}{3}$，$\therefore y=\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{4}{3}x+2$. 故答案为$y=\dfrac{3}{4}x^2+3x+3$ 或 $y=\dfrac{2}{9}x^2+\dfrac{4}{3}x+2$.

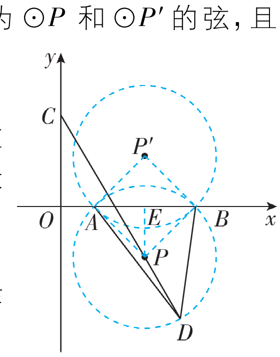
7. $(-1,-1)$，$(1,-2)$ **【解析】**$\because y=ax^2+bx=x(ax+b)$，$\therefore$ 当$x=0$时，$y=0$，$\therefore$ 二次函数$y=ax^2+bx$的图像经过定点$(0,0)$. 将二次函数$y=ax^2+bx$的图像向右平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位得到抛物线$y=a(x-1)^2+b(x-1)-2$. $\because$ 二次函数$y=ax^2+bx$的图像经过点$(0,0)$，$(-2,1)$，$\therefore$ 将点$(0,0)$，$(-2,1)$分别向右平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，得点$(1,-2)$，$(-1,-1)$. 故答案为$(-1,-1)$，$(1,-2)$.

8. $\dfrac{9}{4}$ **【解析】**$\because$ 抛物线$y=-x^2+bx+2$的对称轴为y轴，$\therefore -\dfrac{b}{-2}=0$，即$b=0$，$\therefore y=-x^2+2$. 将$(m,n)$代入$y=-x^2+2$得$n=-m^2+2$，$\therefore m+n=-m^2+m+2=-\left(m-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$，$\therefore m=\dfrac{1}{2}$时，$m+n$取最大值，为$\dfrac{9}{4}$. 故答案为$\dfrac{9}{4}$.

关键点拨 熟练掌握二次函数的性质是解题的关键.

9. ①④ **【解析】**$\because$ 二次函数的图像经过点$A(-1,0)$，$B(3,0)$，$\therefore$ 设二次函数表达式为$y=a(x+1)(x-3)$，$\therefore y=ax^2-2ax-3a=a(x-1)^2-4a$. $\because$ 抛物线开口向上，$\therefore$ 二次函数的最小值为$-4a$，故①结论正确. $\because y=ax^2-2ax-3a=a(x-1)^2-4a$，$\therefore$ 当$x=-1$时，$y=0$；当$x=4$时，$y=5a$；当$x=1$时，y有最小值$-4a$，$\therefore$ 若$-1\leqslant x_2\leqslant4$，则$-4a\leqslant y_2\leqslant5a$，故②结论错误. 若$y_2>y_1$，则点$C$到直线$x=1$的距离比点$D$到直线$x=1$的距离小，$\therefore |x_2-1|>|4-1|$，$\therefore |x_2-1|>3$，解得$x_2>4$或$x_2<-2$，故③结论错误. $\because -\dfrac{b}{2a}=1$，$\therefore b=-2a$，$\therefore$ 一元二次方程$-3ax^2+bx+a=0$可化为$-3ax^2-2ax+a=0$，即$3x^2+2x-1=0$，解得$x=-1$或$\dfrac{1}{3}$，故④结论正确. 故答案为①④.

10. $\left(3,-\dfrac{12}{5}\right)$ $\sqrt{34}+2\sqrt{2}$ **【解析】**设抛物线的表达式为$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$，把$(1,0)$，$(5,0)$，$(0,3)$代入，得$\begin{cases}a+b+c=0,\\25a+5b+c=0,\\c=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\dfrac{3}{5},\\b=-\dfrac{18}{5},\\c=3,\end{cases}$ $\therefore$ 抛物线的表达式为$y=\dfrac{3}{5}x^2-\dfrac{18}{5}x+3=\dfrac{3}{5}(x^2-6x)+3=\dfrac{3}{5}(x-3)^2-\dfrac{12}{5}$，$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为$\left(3,-\dfrac{12}{5}\right)$. $\because D$是平面内一点，且$\angle ADB=45^\circ$，$\therefore$ 点D在$\odot P$或$\odot P'$（P'在P上方，AB为$\odot P$和$\odot P'$的弦，且$\angle AP'B=\angle APB=90^\circ$）的优弧$AB$上，如图所示，$\therefore$ 当P在CD上时，CD的值最大. $\because PA=PB$，$\therefore \triangle PAB$为等腰直角三角形. 过点P作$PE\perp AB$于点E，



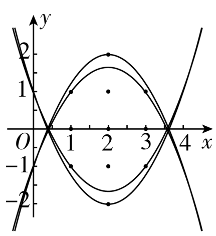
$\therefore PE=AE=BE=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times(5-1)=2$，$\therefore OE=OA+AE=1+2=3$，$\therefore$ 点P的坐标为$(3,-2)$. $\because C(0,3)$，$\therefore PC=\sqrt{(-2-3)^2+3^2}=\sqrt{34}$. 根据勾股定理，得$PD=PA=\sqrt{AE^2+PE^2}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$\therefore CD$的最大值

另解 本题也可设两点式$y=a(x-1)(x-5)$，代入$C(0,3)$求a的值，进而得到过点A，B，C的抛物线的表达式.

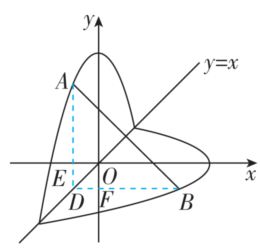
为 $\sqrt{34}+2\sqrt{2}$. 故答案为$\left(3,-\frac{12}{5}\right)$，$\sqrt{34}+2\sqrt{2}$.

11. $\frac{2}{3}\leqslant a<\frac{3}{4}$ 【解析】若抛物线 $y=ax^2-4ax+1$ $(a>0)$与其关于 x 轴对称的抛物线围成的封闭区域内(包括边界)共有 9 个整点，则 x 轴上有 3 个整点，且 x 轴上方、下方各有 3 个整点. $\because y=ax^2-4ax+1(a>0)$，$\therefore$ 抛物线的开口向上，对称轴为直线 $x=2$，抛物线必过点$(0,1)$. 如图，若抛物线过点$(1,-1)$，则$-1=a-4a+1$，解得 $a=\frac{2}{3}$，此时刚好有 9 个整点；若抛物线过点$(2,-2)$，则$-2=4a-8a+1$，解得 $a=\frac{3}{4}$，此时有 11 个整点，$\therefore \frac{2}{3}\leqslant a<\frac{3}{4}$. 故答案为$\frac{2}{3}\leqslant a<\frac{3}{4}$.

思路分析
先通过抛物线的表达式得到抛物线的开口向上，对称轴为直线 $x=2$，且过点$(0,1)$，再通过封闭区域内(包括边界)有 9 个整点，找到临界情况，求出 a 的取值范围.



(第 11 题图)



(第 12 题图)

12. $(-2,2)$或$(1,5)$ 【解析】如图，过点 A 作 $AD\perp x$ 轴，交 x 轴于点 E，交直线 $y=x$ 于点 D，连接 BD，交 y 轴于点 F. $\because A,B$ 关于直线 $y=x$ 对称，设 $A(a,b)$，$\therefore B(b,a)$，$\therefore$ 易知$\triangle ABD$ 是等腰直角三角形. $\because AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$，$\therefore 4\sqrt{2}=\sqrt{(b-a)^2+(a-b)^2}$，$(4\sqrt{2})^2=(b-a)^2+(b-a)^2$，$32=2(b-a)^2$，$(b-a)^2=16$，$b-a=4$ 或 $b-a=-4$(舍去)，$\therefore b=a+4$. 又$\because A(a,b)$在函数 $y=-x^2+6$ 的图像上，$\therefore b=-a^2+6$，即 $a+4=-a^2+6$，整理，得 $a^2+a-2=0$，解得 $a_1=-2$，$a_2=1$. 当 $a=-2$ 时，$b=a+4=-2+4=2$，$\therefore$ 点 A 的坐标为$(-2,2)$；当 $a=1$ 时，$b=a+4=1+4=5$，$\therefore$ 点 A 的坐标为$(1,5)$. 故答案为$(-2,2)$或$(1,5)$.

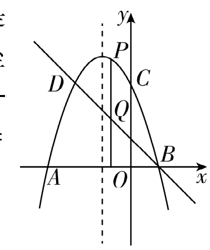
关键点拨
作垂线构造等腰直角三角形是解题的关键.

13.【解】(1)由抛物线与 x 轴的交点坐标 $A(-3,0)$和 $B(1,0)$，设抛物线的表达式为 $y=a(x+3)(x-1)$. 将$(0,3)$代入，得$-3a=3$，解得 $a=-1$，则抛物线的表达式为 $y=-(x+3)(x-1)=-x^2-2x+3$.

(2)$\because y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$，$\therefore$ 顶点坐标为$(-1,4)$，抛物线的对称轴为直线 $x=-1$，$\therefore$ 点 $C(0,3)$关于对称轴的对称点 D 的坐标为$(-2,3)$.

(3)存在. 要使$\triangle BCM$ 的周长最小，只需 $MB+MC$ 的值最小即可. $\because$ 点 C 和 D 关于直线 $x=-1$ 对称，$\therefore$ 当 $MB+MC$ 的值最小时，直线 BD 与直线 $x=-1$ 的交点就是点 M. 设直线 BD 的表达式为 $y=kx+m$. 把$(1,0)$和$(-2,3)$代入，可解得$\begin{cases}k=-1,\\m=1,\end{cases}$ $\therefore$ 直线 BD 的表达式为 $y=-x+1$. 设点 M 的坐标是$(-1,n)$，则 $n=1+1=2$，即点 M 的坐标为$(-1,2)$.

(4)如图，设点 P 的坐标是$(t,-t^2-2t+3)$，$\therefore$ 点 Q 的坐标是$(t,-t+1)$，则 $PQ=-t^2-2t+3-(-t+1)=-t^2-t+2=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$.



$\because -1<0$，$\therefore$ 当 $t=-\frac{1}{2}$时，PQ 的长取最大值，为$\frac{9}{4}$，此时$-t^2-2t+3=-\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3=\frac{15}{4}$，

即点 P 坐标为$\left(-\frac{1}{2},\frac{15}{4}\right)$时，$PQ$ 最长.

思路分析
(4)设点 P 的坐标是$(t,-t^2-2t+3)$，则点 Q 的坐标是$(t,-t+1)$，表示出 PQ 的长度，根据二次函数的性质确定 PQ 取最大值时的 t 值即可求解.

14.【解】(1)当 $t=1$ 时，$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$.

$\because y=2\ 024x+b$，$\therefore$ 函数的最大值 $M=3\ 036+b$，函数的最小值 $N=1\ 012+b$，$\therefore h=\frac{M-N}{2}=\frac{(3\ 036+b)-(1\ 012+b)}{2}=1\ 012$.

(2)$\because x>0$，$\therefore t-\frac{1}{2}>0$，解得 $t>\frac{1}{2}$.

$\because 2>0$，$\therefore y$ 随 x 的增大而减小，$\therefore h=\dfrac{\frac{2}{t-\frac{1}{2}}-\frac{2}{t+\frac{1}{2}}}{2}=4$，解得 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$或 $t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$(舍去)，

经检验，$t=\frac{\sqrt{2}}{2}$是原方程的解，$\therefore t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(3)存在实数 k，使得函数 y 的最大值等于 h 的最小值.

$\because y=-x^2+4x+k=-(x-2)^2+4+k$，$\therefore$ 函数图像的对称轴为直线 $x=2$，y 的最大值为 $4+k$.

①当 $2\leqslant t-\frac{1}{2}$，即 $t\geqslant\frac{5}{2}$时，$M=-\left(t-\frac{1}{2}-2\right)^2+4+k$，$N=-\left(t+\frac{1}{2}-2\right)^2+4+k$，$\therefore h=t-2$，此时 h 的最小值为$\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{2}=4+k$，解得 $k=-\frac{7}{2}$；

②当 $t+\frac{1}{2}\leqslant 2$，即 $t\leqslant\frac{3}{2}$时，$N=-\left(t-\frac{1}{2}-2\right)^2+$

$4+k$，$M=-\left(t+\frac{1}{2}-2\right)^2+4+k$，∴ $h=2-t$，此时 h 的最小值为$\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{2}=4+k$，解得 $k=-\frac{7}{2}$；

③当 $t-\frac{1}{2}\leqslant 2\leqslant t$，即 $2\leqslant t\leqslant\frac{5}{2}$ 时，$N=-\left(t+\frac{1}{2}-2\right)^2+4+k$，$M=4+k$，∴ $h=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2$，∴ h 的最小值为$\frac{1}{8}$，则$\frac{1}{8}=4+k$，解得 $k=-\frac{31}{8}$；

④当 $t\leqslant 2\leqslant t+\frac{1}{2}$，即 $\frac{3}{2}\leqslant t\leqslant 2$ 时，$N=-\left(t-\frac{1}{2}-2\right)^2+4+k$，$M=4+k$，∴ $h=\frac{1}{2}\left(t-\frac{5}{2}\right)^2$，∴ h 的最小值为$\frac{1}{8}$，则$\frac{1}{8}=4+k$，解得 $k=-\frac{31}{8}$.

综上所述，k 的值为$-\frac{31}{8}$或$-\frac{7}{2}$.

5.4 二次函数与一元二次方程

刷基础

1. C 【解析】令 $y=0$，得 $x^2+mx-2=0$，而 $m^2-4\times1\times(-2)=m^2+8$，∵ $m^2\geqslant0$，∴ $m^2+8>0$，∴ 抛物线 $y=x^2+mx-2$ 与 x 轴的交点个数是 2. 故选 C.

方法总结 不画图像，判断二次函数的图像与 x 轴的公共点的个数时，一般先把它转化成判断相应的一元二次方程的根的情况，然后根据根的判别式与 0 的大小关系得出结论.

2. B 【解析】由图像可得，该二次函数与 x 轴无交点，∴ 一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实数根，∴ $b^2-4ac<0$. 由图像可得当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c>0$，∴ 点 $A(b^2-4ac,a-b+c)$ 在第二象限. 故选 B.

3. C 【解析】∵ $y=ax^2-2ax+c=a(x-1)^2+c-a$，∴ 二次函数图像的对称轴为直线 $x=1$. ∵ 二次函数 $y=ax^2-2ax+c$ 的图像经过点$(-1,0)$，∴ 二次函数图像与 x 轴的另一个交点坐标为$(3,0)$，∴ 方程 $ax^2-2ax+c=0$ 的解为 $x_1=-1$，$x_2=3$. 故选 C.

4. $x_1=-1$，$x_2=5$ 【解析】∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(-4,4)$，$B(2,4)$，∴ 可以得到方程 $4=ax^2+bx+c$ 的解为 $x=-4$ 或 $x=2$. ∵ 方程 $a(x-3)^2-4=b(3-x)-c$ 可以转化为方程 $a(x-3)^2+b(x-3)+c=4$，∴ $x-3=-4$ 或 $x-3=2$，解得 $x_1=-1$，$x_2=5$. 故答案为 $x_1=-1$，$x_2=5$.

关键点拨 利用整体思想简化运算是解题的关键.

5. (1)【证明】当 $y=0$ 时，$x^2-(k+3)x+3k=0$，∴ $b^2-4ac=(k+3)^2-4\times3k=k^2-6k+9=(k-3)^2\geqslant0$，∴ 该方程总有实数根，∴ 无论 k 为何值，该函数的图像与 x 轴总有公共点.

(2)【解】令 $y=0$，则 $x^2-(k+3)x+3k=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=k$，∴ 该函数图像与 x 轴有两个交点$(3,0)$，$(k,0)$. ∵ 该函数图像在 x 轴上截出的线段长为 8，∴ $|k-3|=8$，∴ $k=11$ 或-5. ∵ 原点位于该图像的上方，∴ 当 $x=0$ 时，$y=3k<0$，即 $k<0$，∴ $k=-5$.

6. B 【解析】观察表格，得当 $x=1.2$ 时，函数值为 0.04，在给出的 y 值中最接近于 0，即最接近方程 $x^2+3x-5=0$ 的一个根为 1.2. 故选 B.

7. B 【解析】由表格中的数据看出-0.01 和 0.02 更接近于 0，且不同号，故方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个解的范围为 $3.18<x<3.19$，故选 B.

8. D 【解析】由抛物线和 y 轴的交点为$(0,3)$，对称轴为直线 $x=1$，得当 $x=0$ 或 $x=2$ 时，$y=3$，故不等式 $ax^2+bx+c<3$ 的解集为 $x<0$ 或 $x>2$. 故选 D.

9.【解】(1)把 $A(-3,0)$代入 $y=-x^2+mx$，得 $0=-9-3m$，∴ $m=-3$. 把 $A(-3,0)$代入 $y=-x+b$，得 $0=3+b$，∴ $b=-3$.

(2)由(1)可得，抛物线的表达式为 $y=-x^2-3x$，一次函数的表达式为 $y=-x-3$.

联立得$\begin{cases}y=-x^2-3x,\\y=-x-3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=1,\\y=-4\end{cases}$或$\begin{cases}x=-3,\\y=0,\end{cases}$∴ $B(1,-4)$.

由函数图像可知，当$-3<x<1$ 时，$-x^2-3x>-x-3$，∴ 不等式$-x^2+mx>-x+b$ 的解集为$-3<x<1$.

刷提升

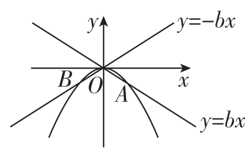
1. B 【解析】∵ $y=x^2+x+a$ 的图像与 x 轴交于 $A(x_1,0)$，$B(x_2,0)$两点，∴ x_1，x_2 是方程 $x^2+x+a=0$ 的两个根，∴ $x_1+x_2=-1$，$x_1x_2=a$. ∵ $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{(x_1x_2)^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}=\frac{(-1)^2-2a}{a^2}=3$，∴ $3a^2+2a-1=0$，解得 $a=-1$ 或 $a=\frac{1}{3}$. ∵ $y=x^2+x+a$ 的图像与 x 轴有两个不同的交点，∴ $1-4a>0$，∴ $a<\frac{1}{4}$，∴ $a=-1$. 故选 B.

2. B 【解析】∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过$(-3,0)$与$(1,0)$两点，∴ 当 $y=0$ 时，$ax^2+bx+c=0$ 的两个根为-3 和 1，函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像的对称轴是直线 $x=-1$. 又∵ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+m=0(m>0)$有两个根，其中一个根是 3，∴ 另一个根为-5，易知函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像开口向下. ∵ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+n=0(0<n<m)$有两个整数根，∴ 抛物线 $y=ax^2+bx+c+n$ 与 x 轴的一个交点的横坐标在-5 与-3 之间，另一个交点的横坐标在

1 与 3 之间，∴ 关于 x 的方程 $ax^2+bx+c+n=0$ $(0<n<m)$ 的两个整数根符合上述范围的是 -4 和 2. 故选 B.

3. A 【解析】当 $y\geqslant-2$ 时，$mx^2+nx\geqslant-2$，∴ $mx^2+nx+2\geqslant0$. ∵ 当 $y\geqslant-2$ 时，x 的取值范围为 $x\leqslant 3t-6$ 或 $x\geqslant-2-3t$，∴ $x=3t-6$ 或 $x=-2-3t$ 是方程 $mx^2+nx+2=0$ 的两个根，∴ $-\dfrac{n}{m}=3t-6-2-3t=-8$，∴ $n=8m$，∴ $y=mx^2+nx=mx^2+8mx=m(x+4)^2-16m$，∴ $-16m\leqslant-2$，∴ $m\geqslant\dfrac{1}{8}$. ∵ 函数图像经过点 $A(c,4)$，∴ $mc^2+8mc=4$，∴ $m=\dfrac{4}{c^2+8c}$，∴ $\dfrac{4}{c^2+8c}\geqslant\dfrac{1}{8}$，∴ $0<c^2+8c\leqslant32$，∴ $-32<c^2+8c-32\leqslant0$. 令 $0=c^2+8c-32$，解得 $c=-4-4\sqrt{3}$ 或 $-4+4\sqrt{3}$. 令 $-32=c^2+8c-32$，解得 $c=0$ 或 -8. ∵ 抛物线 $y=c^2+8c-32$ 开口向上，∴ $-32<c^2+8c-32\leqslant0$ 的解集为 $-4-4\sqrt{3}\leqslant c<-8$ 或 $0<c\leqslant-4+4\sqrt{3}$，∴ c 的值可能为 2. 故选 A.

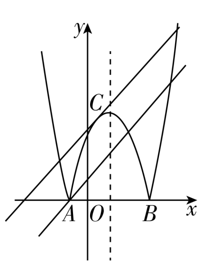
4. $\underline{-2<x<0}$ 【解析】如图，直线 $y=bx$ 与直线 $y=-bx$ 关于 y 轴对称，抛物线 $y=ax^2$ 关于 y 轴对称. 设直线 $y=-bx$ 与抛物线 $y=ax^2$ 交于点 B，∴ 直线 $y=-bx$ 与抛物线 $y=ax^2$ 的交点 B 和直线 $y=bx$ 与抛物线 $y=ax^2$ 的交点 A 关于 y 轴对称，∴ B 的横坐标是 -2. 由 $ax^2+bx>0$ 得 $ax^2>-bx$，其解集就是抛物线 $y=ax^2$ 在直线 $y=-bx$ 的上方时自变量 x 的范围，观察图像知，$-2<x<0$，故答案为 $-2<x<0$.



▶关键点拨

本题的关键是利用 $y=bx$ 与 $y=-bx$ 图像的对称关系求解.

5. $\underline{1 \text{ 或 } \dfrac{13}{4}}$ 【解析】∵ 抛物线的表达式为 $y=(x-1)^2-4$，∴ 抛物线的顶点坐标为 $(1,-4)$. 令 $y=0$，则 $(x-1)^2-4=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$，∴ $A(-1,0)$，$B(3,0)$. ∵ 点 $(1,-4)$ 关于 x 轴的对称点为 $(1,4)$，∴ 如图，曲线 ACB 所对应的函数表达式为 $y=-(x-1)^2+4(-1\leqslant x\leqslant3)$. 当直线 $y=x+b$ 与新图像恰有三个公共点时，有以下两种情况：



①当直线 $y=x+b$ 过点 $A(-1,0)$ 时，$0=-1+b$，解得 $b=1$；

②当直线 $y=x+b$ 与抛物线 $y=-(x-1)^2+4(-1\leqslant x\leqslant3)$ 只有一个公共点时，令 $-(x-1)^2+4=x+b$，即 $x^2-x-(3-b)=0$，∴ $1+4(3-b)=13-4b=0$，解得 $b=\dfrac{13}{4}$. 综上所述，b 的值为 1 或 $\dfrac{13}{4}$. 故答案为 1 或 $\dfrac{13}{4}$.

▶思路分析

先根据已知抛物线的表达式求出点 A，B 的坐标以及顶点坐标，再根据翻折变换求出曲线 ACB 所对应的表达式，最后根据直线 $y=x+b$ 与新图像恰有三个公共点，结合图像进行计算即可.

6. (1)【证明】∵ $y=(mx+2)(x-2)=mx^2+(2-2m)x-4$，∴ $(2-2m)^2+4\times4m=(2m+2)^2\geqslant0$，∴ 不论 m 为何值，该函数的图像与 x 轴总有公共点.

【解】(2)①当 $m>0$ 时，抛物线开口向上，与 x 轴的交点坐标分别为 $(2,0)$，$\left(-\dfrac{2}{m},0\right)$，即与 x 轴的两个交点分别在正半轴和负半轴上，∴ 抛物线经过第一、二、三、四象限.

②当 $m<0$，且 $m\neq-1$ 时，抛物线开口向下，易知抛物线与 x 轴的两个交点均在正半轴上，∴ 易知抛物线经过第一、三、四象限.

③当 $m=-1$ 时，抛物线开口向下，$(2m+2)^2=0$，∴ 易知抛物线经过第三、四象限.

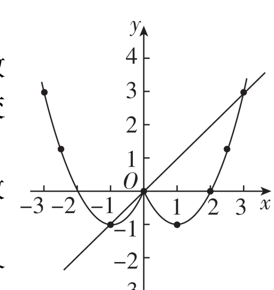
(3)由题可得，抛物线与直线 $y=-2(-3\leqslant x\leqslant3)$ 有两个交点，令 $y=mx^2+(2-2m)x-4=-2$，得 $mx^2+(2-2m)x-2=0$，∴ $(2-2m)^2-4m\times(-2)=4m^2+4>0$，解方程得 $x_1=\dfrac{m-1+\sqrt{m^2+1}}{m}$，$x_2=\dfrac{m-1-\sqrt{m^2+1}}{m}$，∴ $\begin{cases}\dfrac{m-1+\sqrt{m^2+1}}{m}\leqslant3,\\ \dfrac{m-1-\sqrt{m^2+1}}{m}\geqslant-3,\end{cases}$

解得 $m\geqslant\dfrac{8}{15}$ 或 $m<0$.

刷素养

7.【解】(1)将 $x=-2$ 代入 $y=x^2-2|x|$ 可得，$m=0$. 故答案为 0.

(2)如图.



(3)①从图像上看函数图像与 x 轴有 3 个交点，故对应方程 $x^2-2|x|=0$ 有 3 个根. 故答案为 3.

②$x^2-2|x|=a$ 有 4 个实数根，即 $y=x^2-2|x|$ 和 $y=a$ 的图像有 4 个交点，从图像看，此时 $-1<a<0$. 故答案为 $-1<a<0$.

③$-1<x<3$ 且 $x\neq0$. 当 $x\leqslant0$ 时，$y=x^2+2x$，令 $x^2+2x=x$，解得 $x=-1$ 或 $x=0$；当 $x>0$ 时，$y=x^2-2x$，令 $x^2-2x=x$，解得 $x=0$(舍去)或 $x=3$，∴ 直线 $y=x$ 与函数 $y=x^2-2|x|$ 的图像交点横坐标为 $-1,0,3$. 如图，由图像得，当 $-1<x<3$ 且 $x\neq0$ 时，$x^2-2|x|<x$.

5.5 用二次函数解决问题

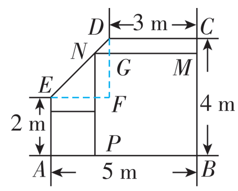
课时 1 最值问题

刷基础

1. A 【解析】设十字形小径的宽为 x m，花圃中的阴影部分的面积为 y m^2. 由题意得 $y=(20-x)(14-x)=x^2-34x+280=(x-17)^2-9$. ∵ $0<x\le 1$，∴ 当 $x=1$ 时，y 有最小值，此时 $y=(1-17)^2-9=247$. 故选 A.

思路分析 设十字形小径的宽为 x m，花圃中的阴影部分的面积为 y m^2. 根据平移的性质可得，花圃中的阴影部分可看作是长为 $(20-x)$m，宽为 $(14-x)$ m 的矩形，然后进行计算即可解答.

2. 14.5 【解析】如图，过 D 作 $DF/\!/BC$，交 MN 于 G，过 E 作 $EF\perp DF$ 于 F，则 $EF=DF=2$，∴ $\triangle DEF$ 是等腰直角三角形，则易知 $\triangle DNG$ 是等腰直角三角形. 设 $PB=x$ m，所剪得的两个正方形面积和为 S m^2，则 $NG=DG=x-3$，则 $BM=BC-CM=BC-DG=4-(x-3)=7-x$. 由 $BM=BP$ 得 $7-x=x$，∴ $x=3.5$，∴ $3\le x\le 3.5$，$S=(5-x)^2+x^2=2x^2-10x+25=2(x-2.5)^2+12.5$，当 $x=3.5$ 时，S 有最大值，此时 $S=2\times(3.5-2.5)^2+12.5=14.5$，故答案为 14.5.



3. 【解】(1) 根据题意知较大矩形与墙相对的一边长为 $2x$ m，与墙垂直的一边长为 $\dfrac{24-x-2x}{3}=(8-x)$m，∴ $(x+2x)\times(8-x)=36$，解得 $x=2$ 或 $x=6$.

$x=6$ 时，$3x=18>13$，不符合题意，舍去，

∴ $x=2$.

答：此时 x 的值为 2.

(2) 设矩形养殖场的总面积是 y m^2. ∵ 墙的长度为 13 m，∴ $0<x\le\dfrac{13}{3}$. 根据题意，得 $y=(x+2x)\times(8-x)=-3x^2+24x=-3(x-4)^2+48$.

∵ $-3<0$，∴ 当 $x=4$ 时，y 取最大值，最大值为 48.

答：当 $x=4$ 时，矩形养殖场的总面积最大，最大为 48 m^2.

关键点拨 本题考查了二次函数在几何图形的面积问题中的应用，理清题中的数量关系从而正确地得出函数关系式，同时明确二次函数的相关性质，这是解题的关键.

4. B 【解析】设生产数量为 $x(0<x\le 8)$ 万件，生产成本为 y_1 元/件，销售价格为 y_2 元/件. ∵ 生产成本和销售价格均是生产数量的一次函数，∴ 设 $y_1=k_1x+b_1(k_1\ne 0)$，$y_2=k_2x+b_2(k_2\ne 0)$. 由题表得 $\begin{cases}k_1+b_1=9,\\2k_1+b_1=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-1,\\b_1=10,\end{cases}$ ∴ $y_1=-x+10$. 由题表得 $\begin{cases}k_2+b_2=16,\\2k_2+b_2=14,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_2=-2,\\b_2=18,\end{cases}$ ∴ $y_2=-2x+18$. 设利润为 w 万元，则 $w=[(-2x+18)-(-x+10)]x=(-x+8)x=-x^2+8x$. ∵ $-1<0$，∴ 当 $x=-\dfrac{8}{2\times(-1)}=4$ 时，利润最大，即为获得最大利润，生产数量应为 4 万件. 故选 B.

5. 【解】(1) 根据题意得 $y=300-10(x-44)=-10x+740$，∴ y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-10x+740(44\le x\le 52)$.

(2) 根据题意得 $w=(-10x+740)(x-40)=-10x^2+1\,140x-29\,600=-10(x-57)^2+2\,890$.

∵ $-10<0$，∴ 当 $x<57$ 时，w 随 x 的增大而增大. ∵ $44\le x\le 52$，∴ 当 $x=52$ 时，w 有最大值，最大值为 $-10\times(52-57)^2+2\,890=2\,640$，∴ 将纪念品的销售单价定为 52 元/个时，商家每天销售纪念品获得的利润最大，最大利润是 2 640 元.

(3) 依题意可知剩余利润为 $(w-200)$ 元.

∵ 捐款后每天剩余利润不低于 2 200 元，

∴ $w-200\ge 2\,200$，即 $-10(x-57)^2+2\,890-200\ge 2\,200$，解得 $50\le x\le 64$.

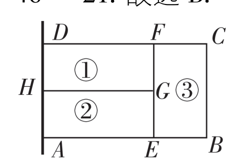
∵ $44\le x\le 52$，∴ $50\le x\le 52$.

答：为保证捐款后每天剩余利润不低于 2 200 元，销售单价 x(元/个) 的范围是 $50\le x\le 52$.

刷提升

1. B 【解析】根据题意得 $a(a+8)=30+k$，∴ $k=a^2+8a-30=(a+4)^2-46$. ∵ $1>0$，且 $a>0$，∴ k 随 a 的增大而增大，∴ 当 $a=1$ 时，k 可以取得最小整数，此时 $k=(1+4)^2-46=-21$. 故选 B.

2. 15 m 【解析】如图. ∵ 三块矩形区域的面积相等，∴ 矩形 $AEFD$ 的面积是矩形 $BCFE$ 面积的 2 倍，∴ $AE=2BE$. 设 $BC=x$ m，$BE=FC=a$ m，矩形区域 $ABCD$ 的面积为 S m^2，则 $AE=HG=DF=2a$ m. 由题意得 $DF+FC+HG+AE+EB+EF+BC=60$ m，即 $8a+2x=60$，∴ $a=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{15}{2}$，∴ $3a=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{45}{2}$，∴ $S=\left(-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{45}{2}\right)x=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{45}{2}x$. ∵ $a=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{15}{2}>0$，∴ $x<30$，则 $S=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{45}{2}x=-\dfrac{3}{4}(x-15)^2+\dfrac{675}{4}(0<x<30)$. ∵ $-\dfrac{3}{4}<0$，∴ 当 $x=15$ 时，S 取得最大值. 故答案为 15 m.



3. 9 时 $\dfrac{9}{4}$元 【解析】设交易时刻 y_1(时) 与每千克售价 x_1(元) 之间的函数关系式为 $y_1=$

kx_1+b ($k\neq0$). 将 (5, 10), (6, 8) 代入, 得 $\begin{cases}5k+b=10,\\6k+b=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=20,\end{cases}$ 所以 $y_1=-2x_1+20$ $(5\leqslant x_1\leqslant7)$. 设每千克成本 y_2(元) 与交易时刻 x_2(时) 之间的函数关系式为 $y_2=a(x_2-10)^2+3(a\neq0,6\leqslant x_2\leqslant10)$. 将 (6,7) 代入,得 $(6-10)^2a+3=7$,解得 $a=\frac{1}{4}$,所以 $y_2=\frac{1}{4}(x_2-10)^2+3=\frac{1}{4}x_2^2-5x_2+28$. 设在这段时间内,出售每千克这种水果的收益为 w 元. 根据题意,得 $y_2=\frac{1}{4}x_2^2-5x_2+28=\frac{1}{4}(-2x_1+20)^2-5(-2x_1+20)+28=x_1^2-10x_1+28$,则 $w=x_1-y_2=x_1-(x_1^2-10x_1+28)=-x_1^2+11x_1-28=-\left(x_1-\frac{11}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$,$\therefore$ 当 $x_1=\frac{11}{2}$ 时,$y_1=-11+20=9$,w 取得最大值 $\frac{9}{4}$. 故答案为 9 时,$\frac{9}{4}$ 元.

关键点拨 根据两个函数图像分别求出两个函数表达式,再根据收益=售价−成本列出二次函数表达式即可求解.

4.【解】(1)由题意可设 $y_1=kx(k\neq0)$.
$\because C(8,2)$ 在函数图像上,$\therefore 2=8k$,解得 $k=\frac{1}{4}$,$\therefore$ 甲产品的利润与投资金额之间的关系式为 $y_1=\frac{1}{4}x$.
设 $y_2=ax^2+bx(a\neq0)$,将 $A(4,-2)$,$B(10,-1.25)$ 代入,得 $\begin{cases}100a+10b=-1.25,\\16a+4b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{16},\\b=-\frac{3}{4},\end{cases}$
$\therefore$ 乙产品的利润与投资金额之间的关系式为 $y_2=\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{4}x$.
(2)当 $y_2=0$ 时,$\frac{1}{16}x^2-\frac{3}{4}x=0$,解得 $x_1=0$,$x_2=12$,$\therefore$ 该企业将资金全力投入乙产品的生产,投入资金至少超过 12 万元才能使企业获利.
(3)设该企业准备筹集 m 万元投入乙产品的生产,总利润为 y 万元,则投入甲产品的资金为 $(a-m)$ 万元,$\therefore y=y_2+y_1=\frac{1}{16}m^2-\frac{3}{4}m+\frac{1}{4}(a-m)=\frac{1}{16}m^2-m+\frac{1}{4}a$,函数 y 的图像的对称轴为直线 $m=-\frac{-1}{2\times\frac{1}{16}}=8$.
又$\because \frac{1}{16}>0$,$\therefore$ 当 $m=8$ 时,$y_{\min}=\frac{1}{16}m^2-m+\frac{1}{4}a=\frac{1}{4}a-4$,$\therefore \frac{1}{4}a-4\geqslant20\%a$,解得 $a\geqslant80$.
答:该企业至少要筹集到 80 万元资金.

5.【解】(1)①$\because BC$ 的长为 x m,$\therefore AB$ 的长为 $\frac{28-x}{2}$ m,$\therefore y=BC\cdot AB=x\cdot\frac{28-x}{2}=-\frac{1}{2}x^2+14x$.
②$\because AD$ 的长不超过墙长,$\therefore 0<x\leqslant6$.
$\because y=-\frac{1}{2}x^2+14x=-\frac{1}{2}(x-14)^2+98$,$-\frac{1}{2}<0$,
$\therefore$ 当 $0<x\leqslant6$ 时,y 随 x 的增大而增大,$\therefore$ 当 $x=6$ 时,矩形 $ABCD$ 的面积最大,最大为 $-\frac{1}{2}\times(6-14)^2+98=66(\text{m}^2)$.
(2)方案乙能使围成的矩形花圃的面积最大,最大是 $\frac{289}{4}$ m^2. 理由如下:方案乙中,设 BC 的长为 a m,矩形 $ABCD$ 的面积为 S m^2,则 $S=a\cdot\frac{28-a-(a-6)}{2}=-a^2+17a=-\left(a-\frac{17}{2}\right)^2+\frac{289}{4}$.
$\because$ 方案乙中 AD 的长超过了墙长,$\therefore a>6$.
$\because \frac{28-a-(a-6)}{2}>0$,$\therefore a<17$,$\therefore 6<a<17$,$\therefore$ 当 $a=\frac{17}{2}$ 时,矩形 $ABCD$ 的面积最大,最大为 $\frac{289}{4}$ m^2.
$\because \frac{289}{4}>66$,$\therefore$ 方案乙能使围成的矩形花圃的面积最大,最大是 $\frac{289}{4}$ m^2.

课时 2 抛物线形问题

刷基础

方法技巧 抛物线形问题可通过已知条件中的数据,求出各关键点的坐标,从而求出抛物线的表达式.

1. B 【解析】$\because AB=8$,$\therefore OA=OB=4$,$\therefore$ 点 $A(-4,0)$,$B(4,0)$,$\therefore$ 可设抛物线的表达式为 $y=a(x+4)(x-4)$. $\because AC=1$,$\therefore OC=OA-AC=3$. $\because CD=4$,$\therefore$ 点 $D(-3,4)$,$\therefore 4=a(-3+4)\times(-3-4)$,解得 $a=-\frac{4}{7}$,$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{4}{7}(x+4)(x-4)$,当 $x=0$ 时,$y=-\frac{4}{7}\times(0+4)\times(0-4)=\frac{64}{7}$,$\therefore$ 门高 OE 为 $\frac{64}{7}$ m. 故选 B.

2. 20 【解析】设抛物线表达式为 $y=ax^2$. 根据题意得 $C(14,9.8)$,$\therefore 9.8=a\times14^2$,$\therefore a=\frac{1}{20}$,$\therefore$ 抛物线表达式为 $y=\frac{1}{20}x^2$. 当满碗汤面的竖直高度下降 4.8 cm 时,汤面高度为 9.8−

$4.8=5(\mathrm{cm})$，将 $y=5$ 代入表达式，得 $5=\frac{1}{20}x^2$，

$\therefore x=\pm10$，$\therefore$ 碗中汤面的水平宽度为 $10-(-10)=20(\mathrm{cm})$. 故答案为 20.

3.【解】(1) 根据题意，得抛物线的顶点坐标为 $(6,4)$，可设抛物线的表达式为 $y=a(x-6)^2+4$. 把 $(0,0)$ 代入，得 $36a+4=0$，解得 $a=-\frac{1}{9}$，

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{9}(x-6)^2+4$.

(2) 当 $y=3$ 时，$-\frac{1}{9}(x-6)^2+4=3$，解得 $x_1=3$，$x_2=9$，$\therefore$ 当船露出水面部分的宽度小于 $9-3=6(\mathrm{m})$ 时，船能安全穿过桥洞.

4. A 【解析】A 选项，$\because$ 抛物线的顶点坐标为 $(0,3.5)$，$\therefore$ 可设抛物线的表达式为 $y=ax^2+3.5$. 由题图知篮圈中心 $(1.5,3.05)$ 在抛物线上，将它的坐标代入上式，得 $3.05=a\times1.5^2+3.5$，$\therefore a=-\frac{1}{5}$，$\therefore y=-\frac{1}{5}x^2+3.5$，故本选项正确；B 选项，由题图知，篮圈中心的坐标是 $(1.5,3.05)$，故本选项错误；C 选项，由题图知，此抛物线的顶点坐标是 $(0,3.5)$，故本选项错误；D 选项，设这次投篮时，篮球出手处离地面的高度为 h m. $\because y=-\frac{1}{5}x^2+3.5$，$\therefore$ 当 $x=-2.5$ 时，$h=-\frac{1}{5}\times(-2.5)^2+3.5=2.25$，$\therefore$ 篮球出手时离地面的高度是 2.25 m，故本选项错误. 故选 A.

知识拓展 同一个抛体运动，建立的平面直角坐标系的位置不同，得到的抛物线表达式也不同，但实际上最高点距地面的高度、落地最远距离等相同.

5.【解】(1) $\because$ 运动员在空中最高处 A 点的坐标为 $\left(\frac{3}{4},\frac{9}{16}\right)$，$\therefore A$ 点为抛物线的顶点，$\therefore$ 设该抛物线的表达式为 $y=a\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{16}$.

$\because$ 该抛物线经过点 $(0,0)$，$\therefore \frac{9}{16}a=-\frac{9}{16}$，解得 $a=-1$，$\therefore$ 运动员在空中运动时对应抛物线的表达式为 $y=-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{16}=-x^2+\frac{3}{2}x$.

$\because$ 跳水运动员在 10 米跳台上进行跳水训练，

$\therefore$ 令 $y=-10$，即 $-x^2+\frac{3}{2}x=-10$，解得 $x=4$ 或 $x=-\frac{5}{2}$（舍去），$\therefore B(4,-10)$.

(2) 该运动员此次跳水不会失误. 理由：

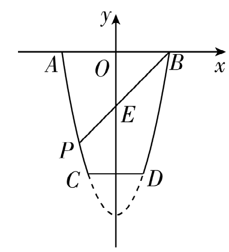
$\because$ 运动员在空中调整好入水姿势时，恰好距点 E 的水平距离为 4 米，点 E 的坐标为 $(-1,-10)$，$\therefore$ 运动员在空中调整好入水姿势时的点的横坐标为 3.

当 $x=3$ 时，$y=-3^2+3\times\frac{3}{2}=-\frac{9}{2}$，此时，运动员距水面的高度为 $10-\frac{9}{2}=5.5$（米）.

$\because 5.5>5$，$\therefore$ 该运动员此次跳水不会失误.

刷提升

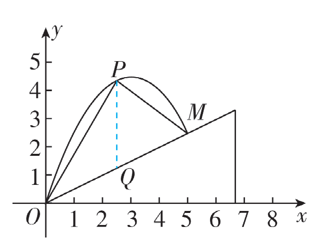
1. C 【解析】由题意得 $A(-4,0)$，$B(4,0)$，$C(-2,-12)$，$D(2,-12)$. 设轮廓线 AC，BD 所在抛物线的表达式为 $y=ax^2+k$，记 BP 与 y 轴的交点为 E，如图，把 $A(-4,0)$，$C(-2,-12)$ 代入得 $\begin{cases}16a+k=0,\\4a+k=-12,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\k=-16,\end{cases}$ $\therefore y=x^2-16$，故 A 正确. $\because \angle ABP=45°$，$\therefore \angle OEB=\angle ABP=45°$，$\therefore OB=OE$，$\therefore E(0,-4)$. 设直线 PB 的表达式为 $y=mx+n$，把 $B(4,0)$，$E(0,-4)$ 代入，得 $\begin{cases}4m+n=0,\\n=-4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=1,\\n=-4,\end{cases}$ $\therefore$ 直线 PB 的表达式为 $y=x-4$，故 B 正确. 令 $x^2-16=x-4$，解得 $x_1=-3$，$x_2=4$（舍去），当 $x=-3$ 时，$y=-3-4=-7$，$\therefore P(-3,-7)$，$\therefore$ 点 P 到杯口 AB 的距离为 7 cm，故 C 不正确. $PD=\sqrt{(2+3)^2+(-12+7)^2}=5\sqrt{2}(\mathrm{cm})$，故 D 正确. 故选 C.



2.【解】(1) 由题意可知 $-\frac{b}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=3$，$-\frac{b^2}{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=n$，解得 $b=3$，$n=4.5$.

(2) 令 $-\frac{1}{2}x^2+3x=\frac{1}{2}x$，解得 $x_1=0$（舍去），$x_2=5$. 将 $x=5$ 代入 $y=\frac{1}{2}x$ 得 $y=\frac{5}{2}$，$\therefore$ 点 M 的坐标为 $\left(5,\frac{5}{2}\right)$.

(3) 如图，过 P 点作 y 轴的平行线，交线段 OM 于 Q.



关键点拨 过 P 点作 y 轴的平行线，交线段 OM 于 Q，利用 $S_{\triangle POM}=S_{\triangle POQ}+S_{\triangle PMQ}$ 列式是解题的关键.

设 $P\left(m,-\frac{1}{2}m^2+3m\right)$，$Q\left(m,\frac{1}{2}m\right)$（$0<m<5$），

$\therefore PQ=-\frac{1}{2}m^2+3m-\frac{1}{2}m=-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{2}m$，

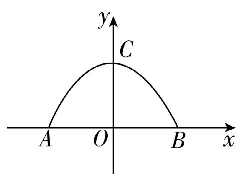
$\therefore S_{\triangle POM}=S_{\triangle POQ}+S_{\triangle PMQ}=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}m^2+\frac{5}{2}m\right)\times 5=-\frac{5}{4}\left(m-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{125}{16}$.

$\because -\frac{5}{4}<0$，$\therefore$ 抛物线 $y=-\frac{5}{4}\left(m-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{125}{16}$ 开口向下，$\therefore$ 当 $m=\frac{5}{2}$ 时，$\triangle POM$ 的面积最大，此时点 P 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{35}{8}\right)$.

关键点拨 （2）分 $AP=AO$，$OA=OP$，$AP=OP$ 三种情况讨论是解题的关键.

刷素养

3.【解】 任务 1：以 O 为原点，以 AB 所在直线为 x 轴，以 OC 所在直线为 y 轴建立如图（1）所示的直角坐标系.



图（1）

$\because$ 顶点 C 的坐标为（0，5），$\therefore$ 设抛物线的表达式为 $y=ax^2+5$.

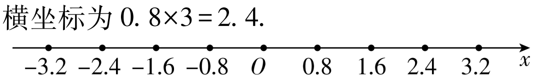
把 $A(-5,0)$ 代入表达式，得 $25a+5=0$，解得 $a=-\frac{1}{5}$，$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{5}x^2+5$.

任务 2：$\because$ 普通货车的高度大约为 2.5 m，货车顶部与警示灯带底部的距离应不少于 50 cm，$\therefore$ 安装点的纵坐标 $y\geqslant 2.5+0.2+0.5=3.2$. 当 $y=3.2$ 时，$-\frac{1}{5}x^2+5=3.2$，$\therefore x=\pm 3$，

$\therefore$ 安装点的横坐标的取值范围是 $-3\leqslant x\leqslant 3$.

关键点拨 任务 2：根据普通货车的高度大约为 2.5 m，货车顶部与警示灯带底部的距离应不少于 50 cm，计算安装点的纵坐标大于等于 3.2.

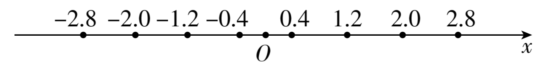
任务 3：方案一：如图（2）（坐标系的横轴），从顶点处开始安装灯带. $\because -3\leqslant x\leqslant 3$，相邻两条灯带安装点的水平间距均为 0.8 m，$\therefore$ 顶点一侧安装 4 条灯带时，$0.8\times 4>3$，顶点一侧安装 3 条灯带时，$0.8\times 3=2.4<3$，$\therefore$ 顶点一侧最多安装 3 条灯带. $\because$ 灯带安装后成轴对称分布，$\therefore$ 共可安装 7 条灯带，$\therefore$ 最右边一条灯带的横坐标为 $0.8\times 3=2.4$.



图（2）

方案二：如图（3）（坐标系的横轴）. $\because$ 顶点一侧安装 5 条灯带时，$0.4+0.8\times(5-1)>3$，顶点一侧安装 4 条灯带时，$0.4+0.8\times(4-1)<3$，$\therefore$ 顶点一侧最多安装 4 条灯带. $\because$ 灯带安装后成轴对称分布，$\therefore$ 共可安装 8 条灯带，$\therefore$ 最右边一条灯带的横坐标为 $0.4+0.8\times 3=2.8$.

（由于任务 1 中建立坐标系方法不唯一，故任务 1、任务 2、任务 3 答案不唯一）



图（3）

重难专题 1　二次函数的综合应用

刷难关

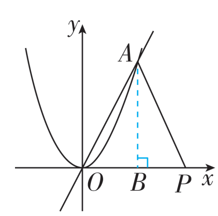
1.【解】（1）将点 A 的坐标 $(2,a)$ 代入 $y=x^2$，得 $a=4$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2,4)$. 将 $(2,4)$ 代入 $y=kx$，得 $4=2k$，解得 $k=2$，$\therefore$ 直线 l 的表达式为 $y=2x$.

（2）存在. 分三种情况讨论：

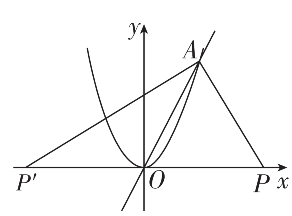
①如图（1），当 $AP=AO$ 时，过点 A 作 $AB\perp x$ 轴于点 B. $\because AP=AO$，$AB\perp OP$，$\therefore PB=OB$.

$\because$ 点 A 的坐标为 $(2,4)$，$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2,0)$，$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(4,0)$.

②如图（2），当 $OA=OP$ 时，符合题意的点 P 有两个，分别为点 P 和点 P'. $\because$ 点 A 的坐标为 $(2,4)$，$\therefore OA=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$，$\therefore OP=2\sqrt{5}$，$\therefore$ 点 P 和点 P' 的坐标分别为 $(2\sqrt{5},0)$ 和 $(-2\sqrt{5},0)$.

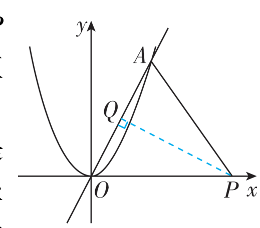


图(1)



图(2)

③如图（3），当 $AP=OP$ 时，点 P 只能在 x 轴正半轴上. 过点 P 作 $PQ\perp AO$ 于点 Q，则点 Q 是 OA 的中点. $\because$ 点 A 的坐标为 $(2,4)$，$\therefore$ 点 Q 的坐标为 $(1,2)$. 设点 P 的坐标为 $(t,0)$. $\because \frac{1}{2}OA\cdot PQ=\frac{1}{2}OP\times 4$，即 $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times\sqrt{(1-t)^2+2^2}=\frac{1}{2}t\times 4$，解得 $t_1=t_2=5$，



图(3)

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(5,0)$.

综上所述，符合条件的点 P 的坐标是 $(4,0)$ 或 $(2\sqrt{5},0)$ 或 $(-2\sqrt{5},0)$ 或 $(5,0)$.

2.【解】（1）将点 $A(1,0)$ 和 $B(-5,0)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$ 得 $\begin{cases}-1+b+c=0,\\-25-5b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-4,\\c=5,\end{cases}$ 则抛物线的函数表达式为 $y=-x^2-4x+5$.

（2）由题意可知，点 D 的坐标为 $(m,-m^2-4m+$

5). 对于二次函数 $y=-x^2-4x+5$,当 $x=0$ 时,$y=5$,即 $C(0,5)$.

设直线 BC 的表达式为 $y=k_0x+b_0$.

将点 $B(-5,0)$ 和 $C(0,5)$ 代入得 $\begin{cases}-5k_0+b_0=0,\\ b_0=5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_0=1,\\ b_0=5,\end{cases}$ 则直线 BC 的表达式为 $y=x+5$,$\therefore F(m,m+5)$,$\therefore DF=-m^2-4m+5-(m+5)=-\left(m+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$.

由二次函数的性质可知,当 $m=-\frac{5}{2}$ 时,DF 取得最大值,最大值为 $\frac{25}{4}$.

(3) $\because y=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$,$\therefore$ 此二次函数图像的顶点坐标为 $P(-2,9)$,对称轴为直线 $x=-2$.

设点 Q 的坐标为 $(-2,n)$,$\therefore PQ^2=(n-9)^2$,$PC^2=(0+2)^2+(5-9)^2=20$,$CQ^2=(-2-0)^2+(n-5)^2=4+(n-5)^2$.

①如图(1),当 CQ 为菱形的对角线,$PQ=PC$ 时,$PQ^2=PC^2$,即 $(n-9)^2=20$,解得 $n=9\pm2\sqrt{5}$,$\therefore Q(-2,9+2\sqrt{5})$ 或 $Q(-2,9-2\sqrt{5})$.

由菱形的性质可知,$PQ/\!/CR$,$CR=PQ=2\sqrt{5}$,$\because C(0,5)$,$\therefore$ 当点 Q 的坐标为 $(-2,9+2\sqrt{5})$ 时,$R(0,5+2\sqrt{5})$;当点 Q 的坐标为 $(-2,9-2\sqrt{5})$ 时,$R(0,5-2\sqrt{5})$.

②如图(2),当 PQ 为菱形的对角线,$QC=PC$ 时,$QC^2=PC^2$,即 $4+(n-5)^2=20$,解得 $n=1$ 或 $n=9$(此时点 Q 与点 P 重合,舍去),

$\therefore Q(-2,1)$.

设此时点 R 的坐标为 (n_1,n_2).

$\because$ 菱形的对角线互相平分,$\therefore \begin{cases}\frac{n_1+0}{2}=\frac{-2-2}{2},\\ \frac{n_2+5}{2}=\frac{1+9}{2},\end{cases}$

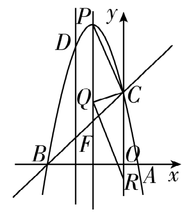
解得 $\begin{cases}n_1=-4,\\ n_2=5,\end{cases}$ $\therefore$ 此时点 R 的坐标为 $(-4,5)$.

③如图(3),当 CP 为菱形的对角线,$PQ=QC$ 时,$PQ^2=QC^2$,即 $(n-9)^2=4+(n-5)^2$,解得 $n=\frac{13}{2}$,$\therefore Q\left(-2,\frac{13}{2}\right)$,$\therefore PQ=9-\frac{13}{2}=\frac{5}{2}$.

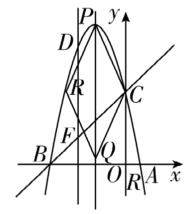
由菱形的性质可知,$PQ/\!/CR$,$CR=PQ=\frac{5}{2}$.

又 $\because C(0,5)$,$\therefore R\left(0,\frac{15}{2}\right)$.

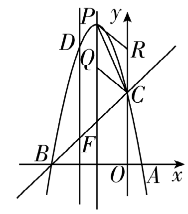
综上,点 R 的坐标为 $(0,5+2\sqrt{5})$ 或 $(0,5-2\sqrt{5})$ 或 $(-4,5)$ 或 $\left(0,\frac{15}{2}\right)$.



图(1)



图(2)



图(3)

思路分析

(1) 根据点 $A(1,0)$ 和 $B(-5,0)$,利用待定系数法求解即可得到抛物线的函数表达式;

(2) 先求出点 C 的坐标,再求出直线 BC 的表达式. 表示出点 D 与点 F 的坐标,从而可得 DF,然后根据二次函数的性质求解即可;

(3) 先求出点 $P(-2,9)$,再设点 Q 的坐标为 $(-2,n)$,然后分三种情况:① 当 CQ 为菱形的对角线,$PQ=PC$ 时;② 当 PQ 为菱形的对角线,$QC=PC$ 时;③ 当 CP 为菱形的对角线,$PQ=QC$ 时,分别列方程求解即可.

关键点拨

熟练掌握二次函数的图像与性质及圆的相关知识是解题的关键.

3. B 【解析】连接 ID,IC,OQ. $\because$ 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}$ 与坐标轴交于点 A,B,C,$\therefore A(-1,0)$,$B(3,0)$,$C\left(0,-\frac{3}{2}\right)$,$\therefore$ 点 $I(1,0)$,$\odot I$ 的半径为 2. $\because y=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2-2$,$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(1,-2)$,$\therefore ID=2$,$\therefore$ 点 D 在 $\odot I$ 上. ① $IC=\sqrt{OI^2+OC^2}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{2}\neq2$,故点 C 不在 $\odot I$ 上,故①不正确.

② $\because$ 圆心为 I,P 是半圆上一动点,点 D 在 $\odot I$ 上,点 Q 为 PD 的中点,$\therefore IQ\perp PD$,故②正确.

③ $\because IQ\perp PD$,$\therefore \angle IQD=90°$,$\therefore$ 点 Q 在以 DI 为直径的圆上运动. $\because A(-1,0)$,$B(3,0)$,$D(1,-2)$,$\therefore$ 当点 P 与点 B 重合时,点 Q 的坐标为 $\left(\frac{1+3}{2},\frac{-2}{2}\right)$,即 $Q(2,-1)$;当点 P 与点 A 重合时,点 Q 的坐标为 $\left(\frac{1-1}{2},\frac{-2}{2}\right)$,即 $Q(0,-1)$,$\therefore$ 易知 $ID\perp OQ$,$\therefore$ 点 Q 运动的路径长为 $\frac{1}{2}\times2\pi=\pi$,故③正确. ④由③易知,当点 Q 运动到 $(0,-1)$,即点 P 与点 A 重合时,BQ 的长最大,最大值为 $\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}<3.2$,$\therefore$ 线段 BQ 的长不可能是 3.2,故④不正确. 故正确说法有②③. 故选 B.

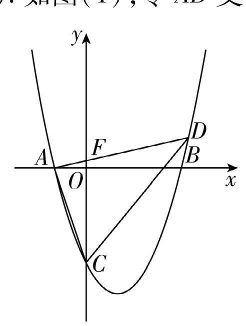
4.【解】(1)① $A(-1,0)$,$B(3,0)$,$C(0,-3)$.

当 $m=3$ 时,该抛物线表达式为 $y=x^2-2x-3$,

$y=0$ 时,$x^2-2x-3=0$,解得 $x_1=-1$,$x_2=3$,

$\therefore A(-1,0)$,$B(3,0)$. $x=0$ 时,$y=-3$,$\therefore C(0,-3)$.

② $D(2,-3)$. 如图(1),令 AD 交 y 轴于点 F.



图(1)

$\because C(0,-3),A(-1,0),\therefore OA=1,OC=3,$

$\therefore S_{\triangle ACO}=\frac{1}{2}OA\cdot OC=\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{3}{2},$

$\therefore S_{\triangle ACD}=2S_{\triangle ACO}=3.$

设 $D(t,t^2-2t-3)(t>0)$，直线 AD 的函数表达式为 $y=ax+n$.

把 $A(-1,0)$，$D(t,t^2-2t-3)$ 代入，得 $\begin{cases}0=-a+n,\\t^2-2t-3=at+n,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=t-3,\\n=t-3,\end{cases}$ $\therefore$ 直线 AD 的函数表达式为 $y=(t-3)x+t-3$.

当 $x=0$ 时，$y=t-3$，$\therefore F(0,t-3)$，$\therefore CF=|t-3+3|=|t|$，$\therefore S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}CF(x_D-x_A)=\frac{1}{2}|t|\times(t+1)=3.$

$\because t>0$，$\therefore t(t+1)=6$，则 $t^2+t-6=0$，解得 $t=-3$（舍去）或 $t=2$，$\therefore D(2,-3)$.

(2) 如图(2)，连接 AE，BC. 由 $y=x^2+(1-m)x-m$ 可得 $A(-1,0)$，$B(m,0)$，$C(0,-m)$，

$\therefore OB=OC=m$，$OA=1$，$\therefore \angle ABC=\angle ECB$.

$\because$ 点 A,C,B,E 四点共圆，$\therefore \angle AEO=\angle ABC$，$\angle EAO=\angle ECB$，$\therefore \angle AEO=\angle EAO$，$\therefore OA=OE$，$\therefore OE=1$，$\therefore E(0,1)$，$m=3OE=3$，$\therefore$ 该抛物线表达式为 $y=x^2-2x-3$，

$\therefore B(3,0)$，$C(0,-3)$.

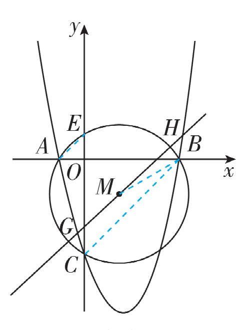
$\because$ 点 M 为圆心，$\therefore$ 点 M 横坐标与 AB 中点横坐标相等，点 M 纵坐标与 CE 中点纵坐标相等，$\therefore M\left(\frac{-1+3}{2},\frac{1-3}{2}\right)$，即 $M(1,-1)$.

连接 BM，$\therefore BM=\sqrt{(3-1)^2+1^2}=\sqrt{5}$，

$\therefore GH=2\sqrt{5}$.

把 $M(1,-1)$ 代入 $y=kx+b$，得 $-1=k+b$，整理得 $b=-k-1$，$\therefore y=kx-k-1$.

联立 $\begin{cases}y=kx-k-1,\\y=x^2-2x-3,\end{cases}$



图(2)

$\therefore x^2-(k+2)x+k-2=0$，$\therefore x_H+x_G=k+2$，$x_H\cdot x_G=k-2$，$\therefore (x_H-x_G)^2=(x_H+x_G)^2-4x_H\cdot x_G=(k+2)^2-4(k-2)=k^2+12.$

$\because y_H=k\cdot x_H-k-1$，$y_G=k\cdot x_G-k-1$，$\therefore HG^2=(x_H-x_G)^2+(y_H-y_G)^2=(x_H-x_G)^2+k^2(x_H-x_G)^2=(k^2+1)(k^2+12)=20$，

$\therefore k^2=\frac{-13\pm\sqrt{201}}{2}.$

$\because k^2>0$，$\therefore k^2=\frac{\sqrt{201}-13}{2}.$

5.【解】(1) $\because$ 抛物线的顶点坐标为 $D(2,1)$，$\therefore$ 设抛物线的顶点式为 $y=a(x-2)^2+1$.

关键点拨

(1) 根据顶点坐标为 $D(2,1)$，设抛物线的顶点式为 $y=a(x-2)^2+1$，由题意将 $A(0,-3)$ 代入表达式得 $a=-1$，即可得到抛物线的表达式；

(2) 过点 E 作 $EH\perp x$ 轴交 AC 于点 H，则 $\triangle EFH$ 是等腰直角三角形. 当 EH 最大时，EF 最大，求得 EH 关于 m 的二次函数，根据二次函数的性质即可求解；

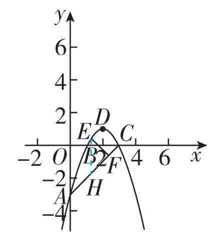
(3) 分两种情况：当点 G 在点 C 下方，$\angle DGC=2\angle DAC$ 时，$\angle DAC=\angle ADG$，即 $GD=AG$；当点 G' 在点 C 上方时，$DG=DG'$，进而求解.

$\because$ 抛物线与 y 轴交于 $A(0,-3)$，$\therefore a(0-2)^2+1=-3$，解得 $a=-1$，$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-(x-2)^2+1=-x^2+4x-3$.

(2) 令 $y=0$，$\therefore -x^2+4x-3=0$，$\therefore x=1$ 或 3，$\therefore$ 抛物线与 x 轴的交点为 $B(1,0)$，$C(3,0)$.

由 $A(0,-3)$，$C(3,0)$ 得直线 AC 的表达式为 $y=x-3$，$\angle OAC=45^\circ$.

如图(1)，过点 E 作 $EH\perp x$ 轴交 AC 于点 H.



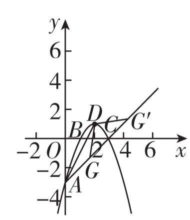
图(1)

设 $E(m,-m^2+4m-3)(0<m<3)$，则 $H(m,m-3)$.

$\because \angle OAH=45^\circ$，$\therefore \angle EHF=45^\circ$，$\therefore \triangle EFH$ 是等腰直角三角形，$\therefore EF=\frac{\sqrt{2}}{2}EH$，$\therefore$ 当 EH 最大时，EF 最大. $EH=-m^2+4m-3-(m-3)=-m^2+3m=-\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，

$\because -1<0$，$\therefore$ 当 $m=\frac{3}{2}$ 时，EH 有最大值，最大值为 $\frac{9}{4}$，$\therefore EF$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{9}{4}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$.

(3) 存在. 如图(2)，当点 G 在点 C 下方，$\angle DGC=2\angle DAC$ 时，$\angle DAC=\angle ADG$，即 $GD=AG$.



图(2)

由(2)得，直线 AC 的表达式为 $y=x-3$.

设点 G 的坐标为 $(n,n-3)$.

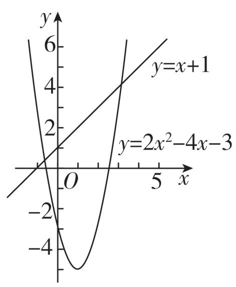
$\because AG=GD$，$\therefore n^2+(n-3+3)^2=(n-2)^2+(n-4)^2$，解得 $n=\frac{5}{3}$，则点 $G\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$；

当点 G' 在点 C 的上方时，$DG'=DG$.

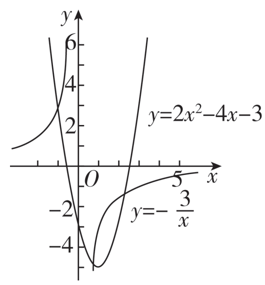
设点 $G'(t,t-3)$，则 $(t-2)^2+(t-4)^2=\left(2-\frac{5}{3}\right)^2+\left(1+\frac{4}{3}\right)^2$，解得 $t=\frac{5}{3}$（舍去）或 $\frac{13}{3}$，则点 $G'\left(\frac{13}{3},\frac{4}{3}\right)$.

综上，点 G 的坐标为 $\left(\frac{13}{3},\frac{4}{3}\right)$ 或 $\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)$.

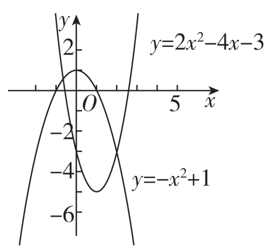
6.【解】(1) 分别作出 $y=x+1$，$y=-\frac{3}{x}$，$y=-x^2+1$ 与 $y=2x^2-4x-3$ 的图像，如图(1)、图(2)、图(3)所示，$\therefore y=-\frac{3}{x}$ 与 $y=2x^2-4x-3$ 的图像有三个不同的公共点，根据“兄弟函数”的定义，与二次函数 $y=2x^2-4x-3$ 互为“兄弟函数”的是②，故答案为②.



图(1)



图(2)



图(3)

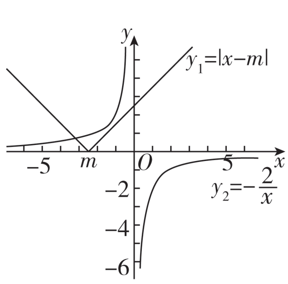
(2)①$\because$ 函数 $y_1=ax^2-5x+2(a\neq 0)$ 与 $y_2=-\dfrac{1}{x}$ 互为"兄弟函数",$x=1$ 是其中一个"兄弟点"的横坐标,$\therefore$ 当 $x=1$ 时,$y_1=a-3$,$y_2=-1$,$\therefore a-3=-1$,解得 $a=2$.

②联立 $\begin{cases} y=2x^2-5x+2, \\ y=-\dfrac{1}{x}, \end{cases}$

整理得 $2x^3-5x^2+2x+1=0$.

$\because x=1$ 是其中的一个解,$\therefore$ 因式分解得 $(x-1)(2x^2-3x-1)=0$,则 $2x^2-3x-1=0$,解得 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{17}}{4}$,$\therefore$ 另外两个"兄弟点"的横坐标是 $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{17}}{4}$,$\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{17}}{4}$,故答案为 $\dfrac{3}{4}+\dfrac{\sqrt{17}}{4}$,$\dfrac{3}{4}-\dfrac{\sqrt{17}}{4}$.

(3)在平面直角坐标系中作出 $y_1=|x-m|$(m 为常数)与 $y_2=-\dfrac{2}{x}$ 的图像,如图(4)所示.



图(4)

联立 $\begin{cases} y=|x-m|, \\ y=-\dfrac{2}{x}, \end{cases}$ 即 $|x-m|=-\dfrac{2}{x}$,

①当 $x-m\geqslant 0$ 时,$x-m=-\dfrac{2}{x}$,

即 $x^2-mx+2=0$,当 $m^2-8>0$,

关键点拨 理解"兄弟函数"及"兄弟点"的定义,利用数形结合思想解决问题是关键.

思路分析 二次函数图像与 x 轴有两个交点,且这两个交点分别位于 y 轴两侧,说明对应方程的两根异号,可得 $x_1x_2=\dfrac{a-3}{a}<0$. 结合开口方向、顶点坐标及特殊点处的函数值分析各选项即可.

即 $m^2>8$ 时,$x=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2-8}}{2}$;

②当 $x-m<0$ 时,$-(x-m)=-\dfrac{2}{x}$,即 $x^2-mx-2=0$. $\because m^2+8>0$,$\therefore x=\dfrac{m\pm\sqrt{m^2+8}}{2}$.

由图可知,两个函数图像的交点只能在第二象限,$\therefore x<0$.

$\because \dfrac{m+\sqrt{m^2+8}}{2}>0$,三个"兄弟点"的横坐标分别为 x_1,x_2,x_3,且 $x_1<x_2<x_3$,$\therefore x_1=\dfrac{m-\sqrt{m^2+8}}{2}$,$x_2=\dfrac{m-\sqrt{m^2-8}}{2}$,$x_3=\dfrac{m+\sqrt{m^2-8}}{2}$,

$\therefore (x_2+x_3-2x_1)^2=\left(\dfrac{m-\sqrt{m^2-8}}{2}+\dfrac{m+\sqrt{m^2-8}}{2}-2\times\dfrac{m-\sqrt{m^2+8}}{2}\right)^2=\left(m-m+\sqrt{m^2+8}\right)^2=m^2+8$.

$\because m^2>8$,$\therefore m^2+8>16$,$\therefore (x_2+x_3-2x_1)^2$ 的取值范围为 $(x_2+x_3-2x_1)^2>16$.

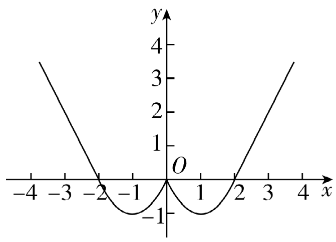
全章综合训练

刷中考

1. D 【解析】设 x_1,x_2 为方程 $ax^2-2ax+a-3=0$ 的两个解. 由题意可得,方程 $ax^2-2ax+a-3=0$ $(a\neq 0)$ 的两根异号,$\therefore x_1x_2=\dfrac{a-3}{a}<0$,解得 $0<a<3$,$\therefore$ 二次项系数 $a>0$,$\therefore$ 图像开口向上,故 A 不符合题意. $\because$ 抛物线 $y=ax^2-2ax+a-3$ $(a\neq 0)$ 的对称轴为直线 $x=-\dfrac{-2a}{2a}=1$,$\therefore$ 当 $x>1$ 时,y 的值随 x 值的增大而增大;当 $x<1$ 时,y 的值随 x 值的增大而减小,故 B 不符合题意. $\because$ 当 $x=1$ 时,$y=a-2a+a-3=-3$,$\therefore$ 函数的最小值为 -3,故 C 不符合题意. 当 $x=2$ 时,$y=4a-4a+a-3=a-3$. $\because 0<a<3$,$\therefore a-3<0$,即当 $x=2$ 时,$y<0$,故 D 符合题意. 故选 D.

2. A 【解析】$\because$ 点 $A(-2,y_1)$ 和 $B(1,y_2)$ 在抛物线 $y=3x^2+bx+1$ 上,$\therefore y_1=3\times(-2)^2-2b+1=13-2b$,$y_2=3\times1^2+b+1=4+b$. $\because 3<b<4$,$\therefore 5<13-2b<7$,$7<4+b<8$,即 $5<y_1<7$,$7<y_2<8$,$\therefore 1<5<y_1<7<y_2<8$,即 $1<y_1<y_2$,故选 A.

3. A 【解析】$\because$ 函数图像关于 y 轴对称,当 $0\leqslant x\leqslant 2$ 时,$y=x^2-2x$;当 $x>2$ 时,$y=2x-4$,$\therefore$ 当 $-2\leqslant x<0$ 时,$y=x^2+2x$;当 $x<-2$ 时,$y=-2x-4$. 画出函数图像如图.



联立$\begin{cases}y=x^2+2x,\\y=x+b,\end{cases}$则 $x^2+x-b=0$，当 $1+4b=0$，即 $b=-\dfrac{1}{4}$时，直线 $y=x+b$ 与 $y=x^2+2x(-2\leqslant x<0)$的图像相切，易知此时直线 $y=x-\dfrac{1}{4}$与抛物线 $y=x^2+2x(-2\leqslant x<0)$相切于点$\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{4}\right)$.
当直线 $y=x+b$ 过$(0,0)$时，$b=0$. 结合图像可知，当$-\dfrac{1}{4}<b<0$ 时，直线 $y=x+b$ 与这个函数图像有且仅有四个不同交点. 故选 A.

思路分析
先根据函数图像关于 y 轴对称，求出 $-2\leqslant x<0$ 和 $x<-2$ 时的函数表达式，再画出函数图像，结合直线 $y=x+b$ 的平移，分析直线与函数图像有四个交点时 b 的取值范围.

4. C 【解析】∵ 抛物线开口向上，∴ $a>0$. ∵ 抛物线对称轴在 y 轴右侧，∴ $-\dfrac{b}{2a}>0$，∴ $b<0$.
∵ 抛物线与 y 轴交于负半轴，∴ $c<0$，∴ $abc>0$，故 A 选项错误. 由题图易知$-\dfrac{b}{2a}<1$，∴ $-b<2a$，∴ $2a+b>0$，故 B 选项错误. ∵ 抛物线过点$(2,0)$，∴ $4a+2b+c=0$，∴ $c=-4a-2b$，∴ $2b-c=2b+4a+2b=4(a+b)$. 由题图易知$-\dfrac{b}{2a}>\dfrac{1}{2}$，∴ $a+b<0$，∴ $2b-c<0$，故 C 选项正确. 由图像可知，当 $x=-1$ 时，$y>0$，∴ $a-b+c>0$，故 D 选项错误. 故选 C.

5. $y=3x^2-2$ 【解析】∵ 函数 $y=3x^2$ 的图像向下平移 2 个单位，∴ 得到的新函数的表达式为 $y=3x^2-2$. 故答案为 $y=3x^2-2$.

6. (1)【解】因为二次函数 $y=x^2+2(a+1)x+3a^2-2a+3$ 中，$1>0$，所以二次函数的图像开口向上. 因为二次函数的图像与直线 $y=2a^2$ 有两个交点，所以函数的最小值小于 $2a^2$，则$\dfrac{4(3a^2-2a+3)-4(a+1)^2}{4}=2a^2-4a+2<2a^2$，解得 $a>\dfrac{1}{2}$.
(2)【解】因为二次函数的图像与 x 轴有交点，所以 $4(a+1)^2-4\times1\times(3a^2-2a+3)=-8a^2+16a-8=-8(a-1)^2\geqslant0$，所以 $8(a-1)^2\leqslant0$.
又因为 $8(a-1)^2\geqslant0$，所以 $8(a-1)^2=0$，所以 $a=1$.
(3)【证明】当 $x=0$ 时，$y=3a^2-2a+3=3\left(a-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}>0$，所以该二次函数的图像不经过原点.

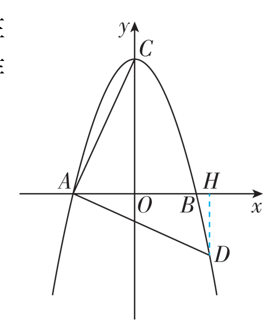
7. 8 【解析】由题意得 $OA=1.6$ m，则 $A(0,1.6)$. 将 $A(0,1.6)$代入 $y=a(x-3)^2+2.5$，得 $1.6=a(0-3)^2+2.5$，解得 $a=-\dfrac{1}{10}$，∴ $y=-\dfrac{1}{10}(x-3)^2+2.5$. 令 $y=0$，则$-\dfrac{1}{10}(x-3)^2+2.5=0$，解得 $x_1=8$，$x_2=-2$(舍去)，∴ $B(8,0)$，∴ $OB=8$ m，故答案为 8.

8.【解】(1)若该款巴小虎吉祥物降价 x 元，则每天售出的数量是$(60+10x)$件. 故答案为$(60+10x)$.
(2)设该款巴小虎吉祥物降价 a 元.
根据题意得$(40-30-a)(60+10a)=630$，整理得 $a^2-4a+3=0$，解得 $a=1$ 或 3.
∵ 让利于游客，∴ $a=1$ 舍去，∴ 该款巴小虎吉祥物应该降价 3 元.
(3)设该款巴小虎吉祥物降价 m 元，则 $W=(40-30-m)(60+10m)=(10-m)(60+10m)=-10m^2+40m+600=-10(m-2)^2+640$.
∵ $-10<0$，∴ 当 $m=2$ 时，W 取最大值，为 640，此时售价为 38 元.
答：售价为 38 元时，每天的利润最大，最大利润是 640 元.

9.【解】(1)∵ $a=-1$，$b=2$，$c=3$，
∴ 该抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3$.
∵ $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，
∴ 该抛物线顶点 P 的坐标为$(1,4)$.
(2)①∵ 点 $A(-1,0)$在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上，∴ $0=a-b+c$，即 $c=b-a>0$.
又∵ $a=-2$，点 $C(0,c)$，∴ $OC=c=b+2$，$AO=1$，
∴ 抛物线表达式为 $y=-2x^2+bx+b+2$，

思路分析
(2)①过点 D 作 $DH\perp x$ 轴于点 H，证明 $\triangle ADH\cong\triangle CAO(\mathrm{AAS})$，进而得出点 D 的坐标为$(b+1,-1)$，代入抛物线表达式，解方程，即可得到答案.

如图(1)，易知点 D 在第四象限，过点 D 作 $DH\perp x$ 轴于点 H，
∴ $\angle AHD=90^\circ$，
∴ $\angle HAD+\angle ADH=90^\circ$.
∵ $\angle CAD=90^\circ$，
∴ $\angle CAO+\angle HAD=90^\circ$，
∴ $\angle ADH=\angle CAO$.
又∵ $AD=AC$，$\angle AHD=\angle AOC=90^\circ$，



图(1)

∴ $\triangle ADH\cong\triangle CAO(\mathrm{AAS})$，
∴ $DH=AO=1$，$AH=OC=b+2$.
∵ $OH=AH-AO$，∴ $OH=b+2-1=b+1$，
∴ 点 D 的坐标为$(b+1,-1)$.
∵ 点 D 在抛物线 $y=-2x^2+bx+b+2$ 上，

$\therefore -1=-2(b+1)^2+b(b+1)+b+2$,

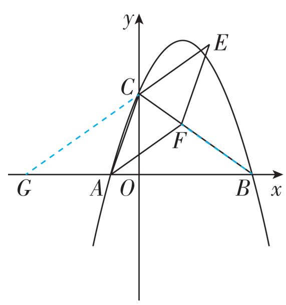
整理得,$b^2+2b-1=0$,解得 $b_1=-1+\sqrt{2}$,$b_2=-1-\sqrt{2}$.

$\because b>0$,$\therefore b_2=-1-\sqrt{2}$不合题意,舍去,

$\therefore b=-1+\sqrt{2}$,$\therefore$ 点 D 的坐标为$(\sqrt{2},-1)$.

②由题意得 $c>0$,$m>1$.

在 x 轴上点 A 的左侧取点 G,使 $GA=AC$,连接 GC,如图(2),$\therefore \angle ACG=\angle CGA$,得 $\angle CAB=2\angle CGA$.



图(2)

$\because \angle CAB=2\angle ABC$,$\therefore \angle ABC=\angle CGA$,

$\therefore CG=CB$,$\therefore GO=OB$.

在 Rt$\triangle AOC$ 中,根据勾股定理得,$AC^2=AO^2+OC^2$,$\therefore AC=\sqrt{1+c^2}$,$\therefore GA=\sqrt{1+c^2}$,$\therefore GO=GA+AO=\sqrt{1+c^2}+1$.

又$\because$ 点 $B(m,0)$,$\therefore OB=m$,$\therefore \sqrt{1+c^2}+1=m$,

即 $c^2=m^2-2m$.

根据题意,点 A 和点 B 关于直线 l 对称,点 F 在直线 l 上,连接 BF,则 $AF=BF$.

又$\because$ ▱$ACEF$ 中,$AF=CE$,$\therefore CE=BF$,$\therefore CE+CF=BF+CF\geqslant BC$,$\therefore$ 当点 F 在线段 BC 上时,$CE+CF$ 取得最小值 $2\sqrt{6}$,即 $BC=2\sqrt{6}$.

在 Rt$\triangle OBC$ 中,$OB^2+OC^2=BC^2$,$\therefore m^2+c^2=24$.

将 $c^2=m^2-2m$ 代入,得 $m^2+(m^2-2m)=24$,

解得 $m_1=4$,$m_2=-3$(舍),

$\therefore c=2\sqrt{2}$,$B(4,0)$,$\therefore C(0,2\sqrt{2})$,

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+2\sqrt{2}$.

设点 F 的横坐标为 x_0,则 $4-x_0=x_0-(-1)$,

解得 $x_0=\frac{3}{2}$,$\therefore$ 易得点 F 的坐标为$\left(\frac{3}{2},\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)$.

$\because$ 线段 CE 可以看作是由线段 AF 经过平移得到的,$\therefore$ 点 E 可以看作是点 F 向右平移 1 个单位,再向上平移 $2\sqrt{2}$个单位得到的,$\therefore$ 点 E 的坐标为$\left(\frac{5}{2},\frac{13\sqrt{2}}{4}\right)$.

思路分析

(1)将 A,B,C 的坐标代入抛物线的表达式,得到关于 a,b,c 的三元一次方程组,求解即可.

(2)利用待定系数法求出直线 AC 的表达式,过点 P 作 $PE/\!/y$ 轴交 AC 于 E,根据三角形的面积公式将求点 P 到直线 AC 的距离的最大值转换成求$\triangle ACP$ 的面积的最大值.

(3)分点 Q 在 x 轴下方和点 Q 在 x 轴上方两种情况求解.

10.【解】(1)$\because$ 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过 $A(-3,0)$,$B(1,0)$,$C(0,-3)$三点,

$\therefore \begin{cases}9a-3b+c=0,\\a+b+c=0,\\c=-3,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}a=1,\\b=2,\\c=-3,\end{cases}$ $\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2+2x-3$.

(2)设直线 AC 的表达式为 $y=kx+b_1(k\neq 0)$.

$\because A(-3,0)$,$C(0,-3)$,$\therefore \begin{cases}-3k+b_1=0,\\b_1=-3,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}k=-1,\\b_1=-3,\end{cases}$ $\therefore$ 直线 AC 的表达式为 $y=-x-3$.

过点 P 作 $PE/\!/y$ 轴交 AC 于 E,连接 AP,CP.

设 $P(p,p^2+2p-3)(-3<p<0)$,则 $E(p,-p-3)$,$\therefore PE=-p-3-(p^2+2p-3)=-p^2-3p=-\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$.

$\because S_{\triangle ACP}=S_{\triangle APE}+S_{\triangle CPE}$,$\therefore S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}PE\cdot(x_E-x_A)+\frac{1}{2}PE\cdot(x_C-x_E)=\frac{1}{2}PE\cdot(x_C-x_A)=\frac{1}{2}PE\cdot[0-(-3)]=\frac{3}{2}PE$,$\therefore$ 当 PE 有最大值时,$S_{\triangle ACP}$ 有最大值.

$\because PE=-\left(p+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$,$-1<0$,$-3<p<0$,

$\therefore$ 当 $p=-\frac{3}{2}$时,PE 有最大值,最大值为$\frac{9}{4}$,

$\therefore S_{\triangle ACP}$ 的最大值为$\frac{3}{2}\times\frac{9}{4}=\frac{27}{8}$.

$\because A(-3,0)$,$C(0,-3)$,$\therefore OA=OC=3$.

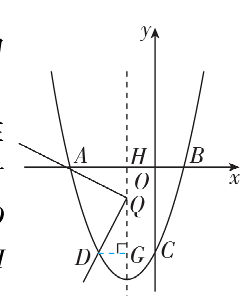
$\because \angle AOC=90°$,$\therefore AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=3\sqrt{2}$.

设点 P 到直线 AC 的距离为 h,$\therefore S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}AC\cdot h=\frac{3\sqrt{2}}{2}h$,$\therefore h=\frac{\sqrt{2}}{3}S_{\triangle ACP}$,

$\therefore$ 当 $S_{\triangle ACP}$ 有最大值时,h 有最大值,$\therefore h$ 的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{27}{8}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$,$\therefore$ 点 P 到直线 AC 的最大距离为$\frac{9\sqrt{2}}{8}$.

(3)存在. 点 Q 的坐标为$(-1,-1)$或$(-1,2)$.

如图(1)所示,当点 Q 在 x 轴下方时,设抛物线对称轴交 x 轴于 H,过点 D 作 $DG\perp QH$ 交直线 QH 于 G.



图(1)

∵ 抛物线表达式为 $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$,

∴ 抛物线对称轴为直线 $x=-1$,

∴ $H(-1,0)$,∴ $OH=1$.

∵ $A(-3,0)$,∴ $AH=-1-(-3)=2$.

设点 Q 的坐标为 $(-1,q)$,则 $QH=-q$. 由旋转的性质可得 $\angle AQD=90°$.

又∵ $\angle AHQ=\angle QGD=90°$,∴ $\angle HAQ+\angle HQA=\angle HQA+\angle GQD=90°$,

∴ $\angle HAQ=\angle GQD$.

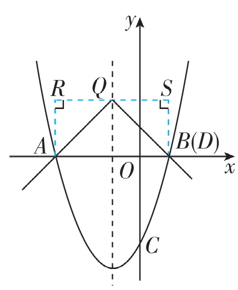
又∵ $AQ=QD$,∴ $\triangle HAQ\cong\triangle GQD$,∴ $DG=QH=-q$,$QG=AH=2$,∴ $HG=QH+QG=2-q$,

∴ 点 D 的横坐标为 $-1-(-q)=-1+q$,纵坐标为 $-(2-q)=q-2$,

∴ $D(-1+q,q-2)$.

∵ 点 D 在抛物线上,∴ $(-1+q)^2+2(-1+q)-3=q-2$,∴ $q^2-2q+1-2+2q-3=q-2$,∴ $q^2-q-2=0$,解得 $q=-1$ 或 $q=2$(舍去),∴ 此时点 Q 的坐标为 $(-1,-1)$.

如图(2)所示,当点 Q 在 x 轴上方时,过点 Q 作 $RS/\!/x$ 轴,分别过点 A,点 D 作直线 RS 的垂线,垂足分别为 R,S,



图(2)

∴ $\angle R=\angle S=90°$.

设点 Q 的坐标为 $(-1,q_1)$,由旋转的性质可得 $\angle AQD=90°$,∴ $\angle RAQ+\angle RQA=\angle RQA+\angle SQD=90°$,∴ $\angle RAQ=\angle SQD$.

又∵ $AQ=QD$,∴ $\triangle RAQ\cong\triangle SQD$,∴ $QS=AR=q_1$,$DS=QR=-1-(-3)=2$,∴ 点 D 的横坐标为 $-1+q_1$,纵坐标为 q_1-2,∴ $D(-1+q_1,q_1-2)$.

∵ 点 D 在抛物线上,∴ $(-1+q_1)^2+2(-1+q_1)-3=q_1-2$,∴ $q_1^2-2q_1+1-2+2q_1-3=q_1-2$,

∴ $q_1^2-q_1-2=0$,解得 $q_1=2$ 或 $q_1=-1$(舍去),

∴ 此时点 Q 的坐标为 $(-1,2)$.

综上所述,存在点 Q 使 $AQ=QD$,此时点 Q 的坐标为 $(-1,-1)$或$(-1,2)$.

刷章测

1. C 【解析】由表格可得 $\begin{cases}4a-2b+c=0,\\a-b+c=4,\\c=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=1,\\c=6,\end{cases}$ ∴ $y=-x^2+x+6=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}=-(x-3)(x+2)$.

A	∵ $y=-x^2+x+6$,$a=-1<0$,∴ 该抛物线的开口向下,选项 A 正确
B	∵ $y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$,∴ 该抛物线的对称轴是直线 $x=\dfrac{1}{2}$,选项 B 正确
C	∵ $y=-(x-3)(x+2)$,∴ 该抛物线与 x 轴的交点是$(-2,0)$和$(3,0)$,选项 C 错误
D	∵ $y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}$,∴ 当 $x=\dfrac{1}{2}$时,函数有最大值,最大值为$\dfrac{25}{4}$,选项 D 正确

思路分析

根据抛物线的特征判断 a,b,c 的正负,即可得到一次函数和反比例函数的图像的位置.

2. C 【解析】∵ 抛物线开口向上,∴ $a>0$. ∵ 抛物线对称轴在 y 轴左侧,∴ $b>0$. ∵ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴下方,∴ $c<0$,∴ 直线 $y=ax+b$ 经过第一、二、三象限,反比例函数 $y=-\dfrac{c}{x}$的图像位于第一、三象限. 故选 C.

思路分析

根据扇形周长与半径的关系,利用弧长公式判断Ⅰ;根据长方形的周长与边的关系,以及长方形和扇形的面积公式表示出长方形和扇形的面积,再根据函数关系式计算出函数最大值,即可判断Ⅱ.

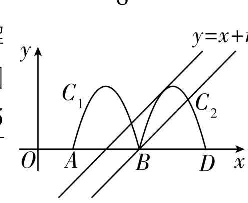
3. D 【解析】由题意可知,BC 的长为 $\dfrac{12-2x}{2}=(6-x)$ m,$\overset{\frown}{EF}$ 的长为 $(12-2R)$ m. 设扇形的圆心角为 $n°$,则 $12-2R=\dfrac{n\pi R}{180}$,解得 $n=\dfrac{180(12-2R)}{\pi R}$. $S_{矩形ABCD}=x(6-x)=-(x-3)^2+9$,

∵ $-1<0$,∴ 当 $x=3$ 时,$S_{矩形ABCD}$ 有最大值为 9.

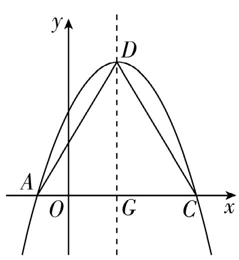
$S_{扇形OEF}=\dfrac{1}{2}(12-2R)R=-(R-3)^2+9$,∵ $-1<0$,

∴ 当 $R=3$ 时,$S_{扇形OEF}$ 有最大值为 9,∴ $S_1=S_2=9$. 综上,Ⅰ对,Ⅱ不对. 故选 D.

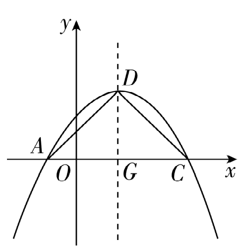
4. D 【解析】令 $y=-2x^2+8x-6=0$,即 $x^2-4x+3=0$,解得 $x=1$ 或 3,则 $A(1,0)$,$B(3,0)$,所以 $AB=2$,所以将 C_1 向右平移 2 个单位长度得 C_2,所以 $D(5,0)$,则 C_2 的函数表达式为 $y=-2(x-3)(x-5)=-2x^2+16x-30$ $(3\leqslant x\leqslant 5)$. 当 $y=x+n$ 与 C_2 只有 1 个公共点时,$x+n=-2x^2+16x-30$,即 $2x^2-15x+30+n=0$,则 $15^2-4\times2\times(30+n)=0$,解得 $n=-\dfrac{15}{8}$;当 $y=x+n$ 过点 B 时,$0=3+n$,解得 $n=-3$. 如图,根据图像可知,当 $-3<n<-\dfrac{15}{8}$时,直线 $y=x+n$ 与 C_1,C_2 共有 3 个不同的交点. 故选 D.



5. B 【解析】由图像可得 $a<0,c>0$. $x=-\frac{b}{2a}=\frac{3}{2}>0$,∴ $b=-3a>0$. 由图像可得 $x=1$ 时,$y>0$,∴ $a+b+c>0$,故①错误. ∵ $|a|<1$,∴ $-1<a<0$,∴ $2a+b=2a-3a=-a<1$,故②错误. ∵ 抛物线与 x 轴有两个交点,∴ $b^2-4ac>0$,∴ $4ac-b^2<0$,故③正确. ∵ 抛物线与 x 轴交点为 $A(-1,0)$ 和 C,对称轴为直线 $x=\frac{3}{2}$,∴ $C(4,0)$,∴ 由图像可得 $ax^2+bx+c>0$ 的解集为 $-1<x<4$,故④正确. 设抛物线的对称轴与 x 轴交于点 G,则 $AG=\frac{5}{2}$. 当△ACD 为等边三角形时,如图(1),此时∠$DAC=60°$,∴ 易得 $DG=\frac{5}{2}\sqrt{3}$,∴ $D\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\sqrt{3}\right)$,∴ 抛物线的表达式为 $y=a\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\sqrt{3}$,将点 $A(-1,0)$ 代入得 $a\left(-1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\sqrt{3}=0$,解得 $a=-\frac{2}{5}\sqrt{3}$,符合题意.

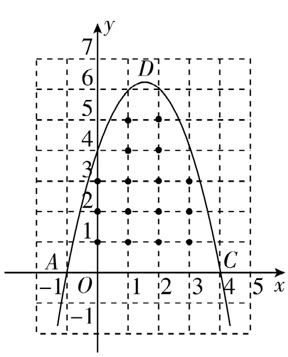


图(1)



图(2)

当△ACD 为等腰直角三角形时,如图(2),此时 ∠DAG = ∠DCG = 45°. ∵ $DG\perp x$ 轴,∴ △DGA 也为等腰直角三角形,∴ $DG=AG=\frac{5}{2}$,∴ $D\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$,∴ 抛物线的表达式为 $y=a\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$,将点 $A(-1,0)$ 代入得 $a\left(-1-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{5}{2}=0$,解得 $a=-\frac{2}{5}$,符合题意,故⑤正确. 当 $a=-1$ 时,$y=-(x+1)(x-4)=-x^2+3x+4$,如图(3).



图(3)

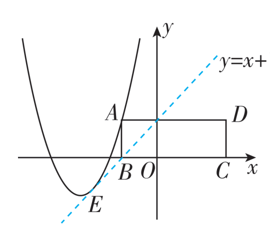
在 x 轴上方且在抛物线内部满足横、纵坐标均为整数的点有(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),共 16 个. ∵ $|a|<1$,∴ 当 a 无限接近−1 时,抛物线开口比图(3)中抛物线开口大一点点,满足条件的整点仍然有 16 个,故⑥错误,∴ 正确的有③④⑤. 故选 B.

思路分析 当 $a=-1$ 时,抛物线表达式为 $y=-x^2+3x+4$,那么在 x 轴上方且在抛物线内部满足横、纵坐标均为整数的点有(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(3,3),共 16 个,由于 $|a|<1$,当 a 无限接近−1 时,抛物线开口比图(3)中抛物线开口大一点点,满足条件的整点仍然有 16 个,据此可判断⑥.

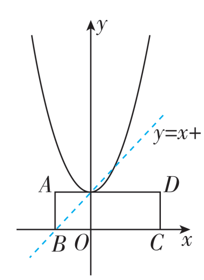
6. (0,−3) 【解析】令 $x=0$,则 $y=-2\times(0+1)^2-1=-3$,∴ 二次函数 $y=-2(x+1)^2-1$ 的图像与 y 轴的交点坐标是(0,−3). 故答案为(0,−3).

7. $m<1$ 【解析】∵ $y=a(x-m)^2(a>0)$,∴ 抛物线开口向上,对称轴为直线 $x=m$. 当抛物线上的点到直线 $x=m$ 的距离越小时,对应的 y 值越小. ∵ $A(-1,p)$,$B(3,q)$,且 $p<q$,∴ A 点到直线 $x=m$ 的距离小于 B 点到直线 $x=m$ 的距离,∴ 有两种情况:$m\leqslant-1$;$m+1<3-m$ 且 $m>-1$,解得 $-1<m<1$. 综上,$m<1$. 故答案为 $m<1$.

8. $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant0$ 【解析】将 $y=x^2-2mx+m^2+m+1$ 配方成顶点式为 $y=(x-m)^2+m+1$,此抛物线的顶点坐标是 $(m,m+1)$,$a=1$,开口向上,开口大小一定,则此抛物线的顶点在直线 $y=x+1$ 上运动. 如图(1),当抛物线与矩形第一次相交时,此时抛物线经过点 $A(-1,1)$,m 取最小值. 将 $(-1,1)$ 代入 $y=x^2-2mx+m^2+m+1$ 得 $1+2m+m^2+m+1=1$,解得 $m=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$(舍去),则 m 的最小值是 $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.



图(1)



图(2)

如图(2),当抛物线与矩形最后一次相交时,此时抛物线的顶点为矩形与 y 轴的交点(0,1),m 取最大值. 将(0,1)代入 $y=x^2-2mx+m^2+m+1$ 得 $m^2+m+1=1$,解得 $m=0$ 或 −1(舍去). ∴ m 的取值范围是 $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant0$. 故答案为 $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\leqslant m\leqslant0$.

9.【解】(1)将点(2,6)代入 $y=x^2-2ax+2a$ 得 $6=2^2-2a\times2+2a$,解得 $a=-1$.

(2)当 $a=1$ 时,$y=x^2-2x+2$.

①抛物线的对称轴为直线 $x=-\frac{-2}{2}=1$.

$\because$ 抛物线开口向上,$\therefore$ 当 $x<1$ 时,y 随 x 的增大而减小. 故答案为 $x<1$.

②若 $0\leqslant x\leqslant4$,则当 $x=1$ 时,函数有最小值,最小值为 $1^2-2\times1+2=1$;

当 $x=4$ 时,函数有最大值,最大值为 $4^2-2\times4+2=10$. 故答案为 10,1.

10.【解】(1)由表格中数据可知,一次函数能比较恰当地表示 y 与 x 之间的关系.

设 $y=kx+b(k\neq0)$,则由题意得 $\begin{cases}51k+b=98,\\52k+b=96,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=200,\end{cases}$ 即 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=-2x+200$.

(2)设该商场销售该产品每星期获得的利润为 w 元.

由题意得 $w=y(x-40)=(-2x+200)(x-40)=-2x^2+280x-8\ 000$,

当 $w=1\ 600$ 时,$-2x^2+280x-8\ 000=1\ 600$,解得 $x_1=60$,$x_2=80$.

答:当销售单价为 60 元/件或 80 元/件时,该商场销售该产品每星期获得的利润为 1 600 元.

(3)由(2)知 $w=-2x^2+280x-8\ 000=-2(x-70)^2+1\ 800$,$\therefore$ 当 $x=70$ 时,w 取得最大值,此时 $w=1\ 800$.

答:当销售单价为 70 元/件时,该商场销售该产品每星期获得的利润最大,最大利润为 1 800 元.

11.【解】(1)$B(3,0)$. $\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+3(a\neq0)$ 的对称轴是直线 $x=1$,$\therefore -\frac{b}{2a}=1$,

$\therefore b=-2a$. ①

关键点拨

(2)①利用二次函数的性质解题即可.

思路分析

(2)当 P,B,C 三点共线时,$PA+PC$ 的值最小,根据抛物线的对称性,得到 $PA+PC=PB+PC=BC$,求出直线 BC 的表达式,利用勾股定理求出 BC 的长,即为 $PA+PC$ 的最小值.

$\because$ 抛物线 $y=ax^2+bx+3(a\neq0)$ 与 x 轴交于 A,B 两点,点 A 的坐标是 $(-1,0)$,$\therefore a-b+3=0$. ②

联立①②得 $\begin{cases}b=-2a,\\a-b+3=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-1,\\b=2,\end{cases}$

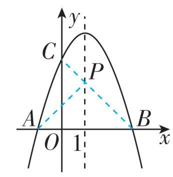
$\therefore$ 二次函数的表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

令 $y=0$ 得 $-x^2+2x+3=0$,解得 $x=3$ 或 $x=-1$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(3,0)$.

(2)如图(1),连接 BC,线段 BC 与直线 $x=1$ 的交点就是符合题意的点 P. 连接 AP,

$\because$ 点 A,B 关于直线 $x=1$ 对称,$\therefore PA=PB$,$\therefore PA+PC=PB+PC=BC$.



图(1)

设直线 CB 的表达式为 $y=kx+b'$.

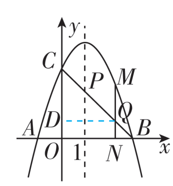
把 $C(0,3)$ 和 $B(3,0)$ 代入 $y=kx+b'$ 得 $\begin{cases}b'=3,\\0=3k+b',\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b'=3,\\k=-1,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 CB 的表达式为 $y=-x+3$,$\therefore P(1,2)$.

$\because OB=OC=3$,$\therefore$ 在 $\mathrm{Rt}\triangle BOC$ 中,$BC=3\sqrt{2}$,

$\therefore PA+PC$ 的最小值为 $3\sqrt{2}$.

(3)根据题意补全图形,如图(2)所示.



图(2)

由(1)得抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3$,

由(2)得 $y_{BC}=-x+3$,故设 $M(t,-t^2+2t+3)(0<t<3)$,则 $Q(t,-t+3)$,

$\therefore MQ=-t^2+3t$.

如图(2),过点 Q 作 $QD\perp OC$,垂足为 D,则 $\triangle CDQ$ 是等腰直角三角形,$\therefore CQ=\sqrt{2}t$,

$\therefore MQ+\sqrt{2}CQ=-t^2+3t+2t=-t^2+5t=-\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$,

$\therefore$ 当 $t=\frac{5}{2}$ 时,$MQ+\sqrt{2}CQ$ 有最大值,此时点 M 的坐标为 $\left(\frac{5}{2},\frac{7}{4}\right)$.

第 6 章 图形的相似

6.1 图上距离与实际距离

刷基础

1. $1:7\ 500$ 【解析】由题意得,比例尺 $=240:1\ 800\ 000=1:7\ 500$. 故答案为 $1:7\ 500$.

2. 15.6 【解析】$1.56\div\frac{1}{1\ 000\ 000}=1.56\times1\ 000\ 000=1\ 560\ 000$(厘米)$=15.6$(千米). 故答案为 15.6.