



第十三章 三角形

13.1 三角形的概念

刷基础

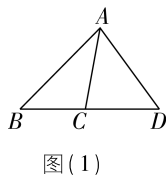
1. **C** 【解析】三角形是由不在同一条直线上的三条线段首尾顺次相接所组成的图形. 故选 C.

2. 8 2 AB $\angle BAO$ 【解析】题图中共有 8 个三角形, 分别是 $\triangle BDO$, $\triangle ABO$, $\triangle AOE$, $\triangle ABD$, $\triangle ADC$, $\triangle ABE$, $\triangle BCE$, $\triangle ABC$; 以 AE 为边的三角形有 $\triangle AOE$, $\triangle ABE$, 共 2 个; $\triangle ABO$ 中, $\angle AOB$ 所对的边是 AB , 边 OB 所对的角是 $\angle BAO$.

3. 【解】按点共线分类, 可分为三种情形:

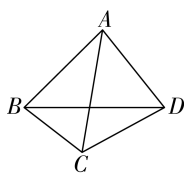
(1) 四点共线: 四个点 A, B, C, D 在同一条直线上, 不能组成三角形;

(2) 三点共线: 四个点 A, B, C, D 中有且仅有三个点 (例如 B, C, D) 在同一条直线上, 如图(1)所示, 可组成三个三角形, 分别是 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ABD$;



图(1)

(3) 任意三点不共线: 四个点 A, B, C, D 中任意三个点都不在同一条直线上, 如图(2)所示, 可组成四个三角形, 分别是 $\triangle ABC$, $\triangle ABD$, $\triangle ACD$, $\triangle BCD$.



图(2)

4. **C** 【解析】将三角形按边的相等关系可以分为三边都不相等的三角形和等腰三角形, 其中等腰三角形包含等边三角形; 将三角形按角的大小可以分为锐角三角形、直角三角形和钝角三角形, \therefore 两处“?”分别为等边三角形, 钝角三角形, 故选 C.

5. **D** 【解析】当三角形的一个内角是锐角时, 若另外两个内角都是锐角, 则是锐角三角形; 若另外两个内角一个是锐角, 一个是直角, 则是直角三角形; 若另外两个内角一个是钝角, 一个是锐角, 则是钝角三角形, \therefore 该三角形是锐角三角形或直角三角形或钝角三角形, 故选 D.

关键点拨

一个三角形中最多有一个直角或最多有一个钝角.

技巧点拨

运用三角形的三边关系判断三条线段能否构成三角形时, 不一定要列出三个不等式, 只要两条较短的线段长度之和大于第三条线段的长度即可. 当三条线段成比例时, 可以设适当的参数来辅助求解.

6. 3 【解析】 \therefore 在所有的内角中, 有 5 个直角, 3 个钝角, 25 个锐角, \therefore 共有 $(5+3+25) \div 3 = 33 \div 3 = 11$ (个) 三角形. \therefore 在一个三角形中, 最多有一个直角或最多有一个钝角, \therefore 这些三角形中, 有 5 个直角三角形和 3 个钝角三角形, \therefore 有 $11-5-3=3$ (个) 锐角三角形. 故答案为 3.

7. 【解】锐角三角形: $\triangle AED$, 直角三角形: $\triangle ACD$, 钝角三角形: $\triangle ABC$, $\triangle BDC$.

13.2 与三角形有关的线段

13.2.1 三角形的边

刷基础

1. **C** 【解析】根据三角形的三边关系可知, 任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边.

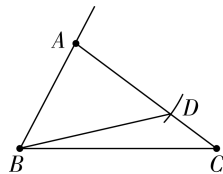
- | | |
|---|--------------------------------------------------------------|
| A | 设 a, b, c 分别为 $x, 2x, 3x$, 则有 $a+b=c$, 故不能组成三角形 |
| B | 将 $a+b=4$ 代入 $a+b+c=9$, 得 $c=5, 4<5$, 即 $a+b<c$, 故不能组成三角形 |
| C | 符合三角形的三边关系, 故能组成三角形 |
| D | $a=b+c$, 故不能组成三角形 |

2. **B** 【解析】 $\because b>a, \therefore$ 由三角形三边关系得到将长为 b 的小棒正中间剪一刀, 三根小棒一定能围成三角形. 故选 B.

3. $2<x<12$ 【解析】由题意得第三边长 x 的取值范围是 $7-5<x<7+5$, 即 $2<x<12$, 故答案为 $2<x<12$.

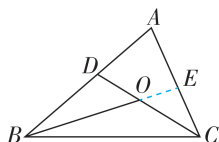
4. $<$ 【解析】 $\because a, b, c$ 是 $\triangle ABC$ 的三边长, $\therefore a+c>b, b+c>a, \therefore a-b+c>0, a-b-c<0, \therefore (a-b+c)(a-b-c)<0$, 故答案为 $<$.

5. 【解】(1) 如图所示. ①射线 BA 即为所求作. ②线段 BC 即为所求作. ③线段 AC, AD, BD 即为所求作.



(2) 在 $\triangle DBC$ 中, $DB+DC>BC$. 故答案为 $>$.

6. 【证明】延长 BO 交 AC 于点 E , 如图.



在 $\triangle EOC$ 中, $EO+EC>OC$,

$\therefore EO+EC+OB>OC+OB$,

即 $EB+EC>OC+OB$.

在 $\triangle ABE$ 中, $AB+AE>EB$,

$\therefore AB+AE+EC>EB+EC$,

即 $AB+AC>EB+EC$,

$\therefore AB+AC>OB+OC$.

7. D 【解析】由题意可知, 为了窗框稳固, 需要在窗框上钉一根木条, 根据三角形具有稳定性, 这根木条钉在 E, G 两点处时, 不能构成三角形, 所以不应该钉在 E, G 两点处. 故选 D.

8. 三角形具有稳定性 【解析】因为 AB, AC, BC 构成的几何图形是三角形, 所以使自行车结构更加稳固用到的几何原理是三角形具有稳定性. 故答案为三角形具有稳定性.

刷易错

9. 22 【解析】①若 4 是腰长, 则底边长是 9, 但是 $4+4<9$, 故不能构成三角形, 舍去. ②若 4 是底边长, 则腰长是 9, $4+9>9$, 符合三角形三边关系, 成立. 故等腰三角形的周长为 $4+9+9=22$.

刷提升

1. B 【解析】因为长为 6 的线段围成的等腰三角形的腰长为 a , 所以底边长为 $6-2a$. 由三角形的三边关系可得 $\begin{cases} 2a>6-2a, \\ 6-2a>0, \end{cases}$ 解得 $\frac{3}{2}<a<3$. 所以 a 的值可以是 2, 故选 B.

2. C 【解析】

解不等式	解不等式 $x-a<0$, 可得 $x<a$; 解不等式 $2x-1\geq 7$, 可得 $x\geq 4$
列整数组解	因为不等式组至少有两个整数解, 所以一定包含 4 和 5
画数轴	
定范围	因为表示 a 的点上画的是空心圆, 所以不能取到 5, 所以 $a>5$

因为存在三边长为 3, a , 7 的三角形, 所以 $4<$

$a<10$, 故 $5<a<10$, 所以 a 的整数解有 4 个, 故选 C.

3. D 【解析】设 $PQ=x$ cm ($x>5$). $\because AP=5$ cm, $PQ=x$ cm, $\therefore BQ=AB-AP-PQ=20-5-x=(15-x)$ cm. 由 AP 向右翻折, BQ 向左翻折, 可知 $AP=MP, MQ=BQ$. $\therefore \triangle MPQ$ 符合三角形三边关系, $\therefore MQ-MP<PQ<MQ+MP$, 即 $15-x-5<x<15-x+5$, 解得 $5<x<10$, 故选 D.

4. 11 【解析】设中间的数为 x , 则前面一个数为 $x-1$, 后面一个数为 $x+1$. 由题意得 $\begin{cases} 1\ 986<x-1+x+x+1<2\ 022, \\ x-1+x>x+1, \end{cases}$ 解得 $662<x<674$. $\because x$ 为自然数, $\therefore x=663, 664, 665, \dots, 673$, \therefore 这样的三角形有 11 个. 故答案为 11.

5. 6 【解析】 $\because n$ 段之和为定值 60 cm, \therefore 要让 n 尽可能大, 必须每段长度尽可能小, 而每段长度为不小于 1 cm 的整数, 且任意 3 段不能拼成三角形, \therefore 任意 3 段中最长的一段的长度不小于其他 2 段长度之和, 因此这些截成的小段的长度 (单位: cm) 只可能是 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55. $\because 1+1+2+3+5+8+13+21=54<60, 1+1+2+3+5+8+13+21+34=88>60$, $\therefore n$ 的最大值是 8. 将长为 60 cm 的铁丝截成满足条件的 8 段, 共有下列 6 种方式: ① 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 27; ② 1, 1, 2, 3, 5, 8, 14, 26; ③ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 15, 25; ④ 1, 1, 2, 3, 5, 8, 16, 24; ⑤ 1, 1, 2, 3, 5, 9, 14, 25; ⑥ 1, 1, 2, 3, 5, 9, 15, 24. 故答案为 6.

易错警示

对于等腰三角形不能确定哪条边是腰或底边时, 要分情况讨论, 还要注意判断分情况后的三条线段能否构成三角形.

思路分析

(1) 利用三角形任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边建立不等式组即可解决问题.

6. 【解】(1) 由题意得 $a-b<c<a+b$, 且 $a+b=3c-4, a-b=2c-6$, $\therefore 2c-6<c<3c-4$, $\therefore 2<c<6$. 又 $\because a>b$, $\therefore a-b=2c-6>0$, $\therefore c>3$, $\therefore 3<c<6$. (2) $\because \triangle ABC$ 的周长为 12, $\therefore a+b+c=12$. 又 $\because a+b=3c-4$, $\therefore 3c-4+c=12$, $\therefore c=4$.

刷素养

7. 【解】(1) ①中, $1+2<4$, 故长为 4 cm, 2 cm, 1 cm 的小木棍不能组成“不均衡三角形”; ②中, $18-13>13-9$, 所以长为 13 cm, 18 cm, 9 cm 的小木棍能组成“不均衡三角形”; ③中, $19=19$, 所以长为 19 cm, 20 cm, 19 cm 的小木棍不能组成“不均衡三角形”; ④中, $9-8<8-6$, 所以长为 9 cm, 8 cm, 6 cm 的小木棍不能组成“不均衡三角形”. 故答案为 ②.

(2) 因为 $2x+2>2x-6$, 所以需分三种情况:

① $16 > 2x + 2 > 2x - 6$, 解得 $x < 7$, 此时有 $16 - (2x + 2) > 2x + 2 - (2x - 6)$, 解得 $x < 3$. 因为 $2x - 6 > 0$, 解得 $x > 3$, 所以不合题意, 舍去;

② $2x + 2 > 16 > 2x - 6$, 解得 $7 < x < 11$, 此时有 $2x + 2 - 16 > 16 - (2x - 6)$, 解得 $x > 9$, 故 $9 < x < 11$. 因为 x 为整数, 所以 $x = 10$. 当 $x = 10$ 时, $2x + 2 = 2 \times 10 + 2 = 22$, $2x - 6 = 2 \times 10 - 6 = 14$, 易知长为 22, 16, 14 的线段可组成三角形.

③ $2x + 2 > 2x - 6 > 16$, 解得 $x > 11$, 此时有 $2x + 2 - (2x - 6) > 2x - 6 - 16$, 解得 $x < 15$, 故 $11 < x < 15$. 因为 x 为整数, 所以 $x = 12$ 或 13 或 14. 易知当 $x = 12$ 或 13 或 14 时, 可以组成三角形.

综上所述, x 的整数值为 10 或 12 或 13 或 14.

关键点拨 | 判断是否组成三角形的步骤

- (1) 由于边长中含有参数, 需分类讨论.
- (2) 因为 $2x + 2$ 一定大于 $2x - 6$, 所以只需按边长为 16 的边在三角形三边中的大小关系分三种情况讨论.
- (3) 三边的长度确定后, 均需要用三角形三边关系检验是否能组成三角形.

13.2.2 三角形的中线、角平分线、高

刷基础

1. **A** 【解析】 \because 三角形硬纸板处于平衡状态, \therefore 这个点为三角形的重心. 由题图可知点 N 最可能为该三角形的重心. 故选 A.

2. **B** 【解析】 $\because BD$ 是边 AC 上的中线, $\therefore AD = CD$, $\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$. 又 $\because S_{\triangle ABC} = 18 \text{ cm}^2$, $\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle BDC} = 9 \text{ cm}^2$. $\because E$ 是 BD 的中点, $\therefore BE = DE$, $\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD} = 4.5 \text{ cm}^2$, $S_{\triangle CBE} = S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2} S_{\triangle BDC} = 4.5 \text{ cm}^2$, $\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDE} = 9 \text{ cm}^2$. 故选 B.

3. **8** 【解析】 $\because AD$ 是 BC 边上的中线, $\therefore BD = CD$, $\therefore \triangle ABD$ 的周长 $- \triangle ADC$ 的周长 $= (AB + AD + BD) - (AC + AD + CD) = AB - AC = 3$, 即 $AB - AC = 3$. ① 又 $\because AB + AC = 13$, ② \therefore 由 ① + ② 得 $2AB = 16$, 解得 $AB = 8$. 故答案为 8.

4. **C** 【解析】 $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle BAD = \angle CAD$, $\angle BAC = 2\angle BAD$, 故选项 A、B、D 正确; 不能得到 $BD = CD$, 故选项 C 错误. 故选 C.

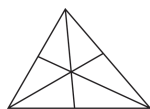
关键点拨

三角形三条高所在的直线交于一点.

思路分析

根据两个三角形周长的差得出边 AB 与 AC 长度的差, 结合 AB 与 AC 长度的和为 13, 利用加减消元法求解即可.

5. **A** 【解析】如图, 三角形的三条角平分线的交点一定在三角形的内部. 故选 A.



锐角三角形

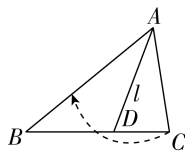


直角三角形



钝角三角形

6. **角平分线** 【解析】如图. 由折叠的性质可知 $\angle CAD = \angle BAD$, $\therefore l$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线.



7. **D** 【解析】选项 A 画的是 AC 边上的高, 故不符合题意; 选项 B、C 画的不是任何边上的高, 故不符合题意; 选项 D 画的是 BC 边上的高, 故符合题意. 故选 D.

8. **A** 【解析】由题图知 $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, $CF \perp AB$, \therefore 线段 AD 是 BC 边上的高, 线段 BE 是 AC 边上的高, 线段 CF 是 AB 边上的高, 故 A 选项符合题意. 故选 A.

9. **D** 【解析】 \because 三角形的高 AD 与高 BE 所在直线交于点 H , 点 H 在 $\triangle ABC$ 的外部, $\therefore \triangle ABC$ 是钝角三角形. $\because \angle B = 45^\circ$, $\therefore \angle A$ 与 $\angle C$ 一个是锐角, 一个是钝角, 具体哪个角是钝角无法确定, 故选 D.

关键点拨

10. **12 : 15 : 10** 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, $CE \perp AB$, AD 与 CE 交于点 O , BO 的延长线交 AC 于点 F , $\therefore BF \perp AC$, $\therefore \frac{1}{2} AB \times CE = \frac{1}{2} BC \times AD = \frac{1}{2} AC \times BF$. $\because AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 6$, $\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times CE = \frac{1}{2} \times 4 \times AD = \frac{1}{2} \times 6 \times BF$, $\therefore CE : AD : BF = 12 : 15 : 10$. 故答案为 12 : 15 : 10.

刷提升

1. **B** 【解析】

$$\begin{aligned} & \triangle ADB \rightarrow \text{底} AD \leftarrow \triangle ADC \\ & \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ & \text{高} BE \quad \quad \quad \text{高} CF \\ & \downarrow \\ & S_{\triangle ADB} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AD(BE + CF) \\ & \downarrow \\ & S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AD(BE + CF) \end{aligned}$$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积不变, 点 D 沿 CB 自点 C 向点 B 运动时 AD 逐渐减小, $\therefore BE + CF$ 的值逐渐变大, 故选 B.

2. **D** 【解析】设 $\triangle ABE$ 的边 AB 上的高为 h_1 , $\triangle BCE$ 的边 BC 上的高为 h_2 , $\triangle CDE$ 的边 CD

上的高为 h_3 , $\triangle ADE$ 的边 AD 上的高为 h_4 .
 \therefore 长方形 $ABCD$ 中, $AB=CD, AD=BC, \therefore h_1+h_3=BC, h_2+h_4=AB$. $\therefore S_1=\frac{1}{2}AB \cdot h_1, S_2=\frac{1}{2}BC \cdot h_2, S_3=\frac{1}{2}CD \cdot h_3, S_4=\frac{1}{2}AD \cdot h_4$, 已知长方形的面积, 即已知 $AB \cdot BC$ 的值, $\therefore S_1$ 不可求, 故 A 选项不符合题意; $S_1+S_2=\frac{1}{2}(AB \cdot h_1+BC \cdot h_2)$ 不可求, 故 B 选项不符合题意; $S_1+S_2+S_3=\frac{1}{2}(AB \cdot h_1+BC \cdot h_2+CD \cdot h_3)=\frac{1}{2}(AB \cdot BC+BC \cdot h_2)$ 不可求, 故 C 选项不符合题意; $S_1+S_3=\frac{1}{2}AB \cdot h_1+\frac{1}{2}CD \cdot h_3=\frac{1}{2}AB \cdot BC$ 可求, 故 D 选项符合题意. 故选 D.

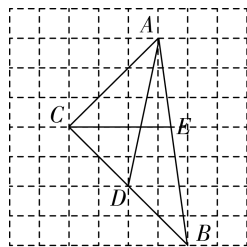
3.2 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, AD 为 BC 边上的中线, $\therefore BD=DC, \therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$. 又 $\because DE \perp AB$ 于 $E, DF \perp AC$ 于 $F, AB=3, AC=4, DF=1.5$, $\therefore \frac{1}{2}AB \cdot ED=\frac{1}{2}AC \cdot DF$, 即 $\frac{1}{2} \times 3 \times ED=\frac{1}{2} \times 4 \times 1.5$, 解得 $ED=2$, 故答案为 2.

4.4 【解析】 $\because G$ 是重心, \therefore 点 G 为 $\triangle ABC$ 的三条中线的交点, $\therefore BE, AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\therefore AE=CE, CD=DB, \therefore S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}, S_{\triangle BCE}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$, 即 $S_{\triangle ACD}=S_{\triangle BCE}, \therefore S_{\triangle AEG}=S_{\triangle BDG}, \therefore S_{\triangle AEG}=S_{\triangle CEG}=S_{\triangle CDG}=S_{\triangle BDG}, \therefore S_{\triangle AGC}=2S_{\triangle CDG}, \therefore AG=2GD. \because CG \perp BG, \therefore$ 当 $GD \perp BC$ 时, $\triangle BGC$ 面积最大. $\therefore AG \times BC=16, \therefore \triangle BGC$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times BC \times GD=\frac{1}{2} \times BC \times \frac{1}{2}AG=4$, 故答案为 4.

5. 【解】(1) 由格点可知, $\angle ACB=45^\circ+45^\circ=90^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形, 故选 C.

(2) 如图, 线段 AD 即为所求作的 $\triangle ABC$ 的中线, 线段 CE 即为所求作的 $\triangle ABC$ 的角平分线.

(3) 由题意知 $S_{\triangle ABC}=\frac{(3+4) \times 7}{2}-\frac{3 \times 3}{2}-\frac{4 \times 4}{2}=12, \therefore S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=6$, 故答案为 12, 6.

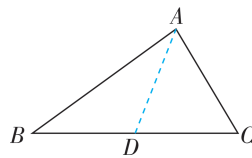


关键点拨 掌握三角形的中线将三角形分成面积相等的两部分是解题的关键.

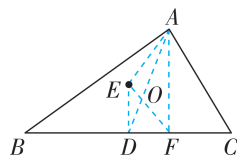
易错警示 题干中“中线 BD 将该三角形的周长分为 5 和 3 两个部分”没有明确哪个部分是 5, 哪个部分是 3, 因此需要分类讨论, 并且这两个部分指的是 $AB+AD$ 与 $BC+CD$, 并不是指 $AB+AD+BD$ 与 $BC+CD+BD$, 需理解题意.

刷素养

6. 【解】(1) 如图(1), 取 BC 的中点 D , 点 D 即为所求. 理由: 连接 AD . $\because D$ 为 BC 中点, $\therefore BD=CD, \therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle ACD$ 等底同高, $\therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ACD}$.



图(1)



图(2)

(2) 存在. 如图(2), 取 BC 的中点 D , 连接 AD, AE, DE , 过点 A 作 $AF \parallel DE$, 交 BC 于点 F , 点 F 即为所求. 理由如下: 连接 EF 交 AD 于 O . $\because BD=CD, \therefore S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ADC}$. $\because DE \parallel AF, \therefore$ 点 D 到 AF 的距离与点 E 到 AF 的距离相等, $\therefore S_{\triangle AEF}=S_{\triangle ADF}, \therefore S_{\triangle AEO}=S_{\triangle DFO}, \therefore S_{\text{四边形}ABFE}=S_{\text{四边形}AEFC}$.

重难点专题 1 三角形中线、高线的应用

刷难关

1. C 【解析】①当 $\triangle ABD$ 的周长大于 $\triangle ADC$ 的周长时, $\because AD$ 为 BC 边上的中线, $\therefore BD=CD, \therefore \triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的周长差 $= (AB+AD+BD) - (AC+AD+CD) = AB-AC$. $\because \triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的周长差为 5, $AC=8, \therefore AB-8=5$, 解得 $AB=13$. ②当 $\triangle ADC$ 的周长大于 $\triangle ABD$ 的周长时, $\because AD$ 为 BC 边上的中线, $\therefore BD=CD, \therefore \triangle ADC$ 与 $\triangle ABD$ 的周长差 $= (AC+AD+CD) - (AB+AD+BD) = AC-AB$. $\because \triangle ABD$ 与 $\triangle ADC$ 的周长差为 5, $AC=8, \therefore 8-AB=5$, 解得 $AB=3$. 综上, $AB=3$ 或 13, 故选 C.

2. A 【解析】设腰长 $AB=AC=x$, 底边长 $BC=y$. $\because BD$ 是中线, $\therefore AD=CD=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}x. \therefore$ 中线 BD 将该三角形的周长分为 5 和 3 两个部分,

$$\therefore \begin{cases} AB+AD=5, \\ BC+CD=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} AB+AD=3, \\ BC+CD=5, \end{cases} \therefore \begin{cases} x+\frac{1}{2}x=5, \\ y+\frac{1}{2}x=3 \end{cases}$$

$$\text{或 } \begin{cases} x+\frac{1}{2}x=3, \\ y+\frac{1}{2}x=5 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x=\frac{10}{3}, \\ y=\frac{4}{3} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=2, \\ y=4. \end{cases} \text{ 当等腰三}$$

角形 ABC 腰长为 $\frac{10}{3}$, 底边长为 $\frac{4}{3}$ 时, $\frac{10}{3}+\frac{4}{3}>\frac{10}{3}$, 可以组成三角形; 当等腰三角形 ABC 腰长

为 2, 底边长为 4 时, $2+2=4$, 不可以组成三角形, \therefore 该等腰三角形的底边长为 $\frac{4}{3}$, 故选 A.

3. **D** 【解析】 $\because D, E, F$ 分别是边 BC, AD, AC 上的中点, $\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABD}$, $S_{\triangle ADF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ADC}$, $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} S_{\triangle ADF}$, $\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC}$, $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{8} S_{\triangle ABC}$, $\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle BDE} + S_{\triangle DEF} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} + \frac{1}{8} S_{\triangle ABC} = \frac{3}{8} S_{\triangle ABC}$, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{8}{3} S_{\text{阴影部分}} = \frac{8}{3} \times 6 = 16$, 故选 D.

4. **A** 【解析】如图, 连接 AB_1, BC_1, CA_1 , 根据等底同高的三角形面积相等, 可得 $\triangle A_1BC$, $\triangle A_1B_1C$, $\triangle AB_1C$, $\triangle AB_1C_1$, $\triangle ABC_1$, $\triangle A_1BC_1$, $\triangle ABC$ 的面积都相等, $\therefore S_{\triangle A_1B_1C_1} = 7S_{\triangle ABC}$, 同理可得 $S_{\triangle A_2B_2C_2} = 7S_{\triangle A_1B_1C_1} = 7^2 S_{\triangle ABC}$, \dots , 则 $S_{\triangle A_{2024}B_{2024}C_{2024}} = 7^{2024} S_{\triangle ABC}$. $\because S_{\triangle ABC} = 1$, $\therefore \triangle A_{2024}B_{2024}C_{2024}$ 的面积为 7^{2024} . 故选 A.

5. **4** 【解析】 $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$. $\because AG:GD = 2:1$, $\therefore S_{\triangle ABG} = \frac{2}{3} S_{\triangle ABD} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$, $S_{\triangle AGC} = \frac{2}{3} S_{\triangle ACD} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$. 又 $\because BE, CF$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, \therefore 点 E, F 分别是 AC, AB 的中点, $\therefore S_{\triangle GFB} = \frac{1}{2} S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$, $S_{\triangle GCE} = \frac{1}{2} S_{\triangle AGC} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$, $\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle GFB} + S_{\triangle GCE} = 2 + 2 = 4$. 故答案为 4.

6. 【解】(1) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD$. 故答案为 $\frac{1}{2} AB \cdot CD$.

(2) 由 (1) 可得 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CD$, 则 $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times CD$, 解得 $CD = \frac{12}{5}$.

(3) $\because AH \perp BC, PM \perp AB, PN \perp AC, S_{\triangle ABC} =$

思路分析 分 AD 在 $\triangle ABC$ 内部与在 $\triangle ABC$ 外部两种情况求解即可.

$$S_{\triangle ABP} + S_{\triangle ACP}, \therefore \frac{1}{2} BC \cdot AH = \frac{1}{2} AB \cdot PM + \frac{1}{2} AC \cdot PN, \therefore \frac{1}{2} \times 10 \times 12 = \frac{1}{2} \times 13 PM + \frac{1}{2} \times 13 PN = \frac{1}{2} \times 13 (PM + PN), \therefore PM + PN = \frac{120}{13}.$$

7. **D** 【解析】当 AD 在 $\triangle ABC$ 内部时, 如图 (1). $\therefore \triangle ABC$ 的面积为 24, AD 是 BC 边上的高, $AD = 4, CD = 5$, $\therefore \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} (BD + CD) \cdot AD = \frac{1}{2} (BD + 5) \times 4 = 24$, $\therefore BD = 7$.

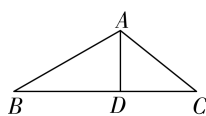


图 (1)

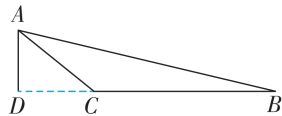


图 (2)

- 当 AD 在 $\triangle ABC$ 外部时, 如图 (2). $\therefore \triangle ABC$ 的面积为 24, AD 是 BC 边上的高, $AD = 4, CD = 5$, $\therefore \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} BC \times 4 = 24$, $\therefore BC = 12$, $\therefore BD = BC + CD = 12 + 5 = 17$. 综上所述, BD 的长为 7 或 17, 故选 D.

13.3 三角形的内角与外角

13.3.1 三角形的内角

课时 1 三角形的内角



刷基础

1. **D** 【解析】 $\because CE \parallel AB, \therefore \angle ABC = \angle ECD, \angle BAC = \angle ACE. \therefore \angle BCD = 180^\circ$, 即 $\angle ECD + \angle ACB + \angle ACE = 180^\circ, \therefore \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$, 这个证明方法体现了转化的数学思想, 故选 D.

- 关键点拨** 2. **C** 【解析】 $\because \angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 6, \therefore$ 设 $\angle A = x, \angle B = 2x, \angle C = 6x. \therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, 即 $x + 2x + 6x = 180^\circ$, 解得 $x = 20^\circ, \therefore$ 最大角为 $\angle C = 120^\circ, \therefore$ 此三角形是钝角三角形, 故选 C.

3. **D** 【解析】 $\because \angle A = 40^\circ, \angle B = 68^\circ, \angle A + \angle B + \angle BCA = 180^\circ, \therefore \angle BCA = 180^\circ - 40^\circ - 68^\circ = 72^\circ. \therefore CF$ 平分 $\angle BCA, \therefore \angle BCF = \frac{1}{2} \angle BCA = 36^\circ, \therefore \angle BFC = \angle EFD = 180^\circ - 36^\circ - 68^\circ = 76^\circ. \therefore ED \perp AB, \therefore \angle FDE = 90^\circ, \therefore \angle FED = 180^\circ -$

$90^\circ - 76^\circ = 14^\circ$, \therefore 当 E 点运动时, $\angle E$ 的度数不变, 为 14° . 故选 D.

4. 240° 【解析】如图. $\because \angle 1 +$

$$\angle DEC = 180^\circ, \angle 2 + \angle EDC =$$

$$180^\circ, \therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle DEC +$$

$$\angle EDC = 360^\circ. \therefore \angle C = 60^\circ,$$

$\therefore \angle DEC + \angle EDC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ, \therefore \angle 1 + \angle 2 = 360^\circ - (\angle DEC + \angle EDC) = 240^\circ$, 故答案为 240° .

5. 【证明】(1) 在 $\triangle AOC$ 中, $\angle A + \angle C + \angle AOC =$ **关键点拔**

$$180^\circ, \text{在 } \triangle BOD \text{ 中}, \angle B + \angle D + \angle BOD = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle AOC = \angle BOD, \therefore \angle A + \angle C = \angle B + \angle D.$$

(2) 同(1)中模型可得, 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CEF$ 中, 有 $\angle B + \angle BAF = \angle E + \angle ECF$, 在 $\triangle CDG$ 和 $\triangle AEG$ 中, 有 $\angle D + \angle DCE = \angle E + \angle EAD$,

$$\therefore \angle B + \angle D + \angle DCE + \angle BAF = 2\angle E + \angle ECF + \angle EAD.$$

$$\therefore \angle DCE = \angle ECF, \angle BAF = \angle EAD, \therefore \angle B +$$

$$\angle D = 2\angle E.$$

6. C 【解析】如图. 由题意得 $AD \parallel BE, \therefore \angle ABE =$

$$\angle BAD = 20^\circ, \therefore \angle CAB = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ.$$

$$\because \angle ACB = 67^\circ, \therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle ACB -$$

$$\angle BAC = 53^\circ, \therefore \angle CBE = \angle ABC + \angle ABE = 73^\circ.$$

A 选项, 点 A 位于点 B 北偏西 20° 方向, 故 A 不符合题意; B 选项, 点 A 位于点 C 北偏东 40° 方向, 故 B 不符合题意; C 选项, 点 C 位于点 B 北偏西 73° 方向, 故 C 符合题意; D 选项, $\angle ABC = 53^\circ$, 故 D 不符合题意. 故选 C.

思路分析

分两种情况进行解答, 即点 M 在线段 AB 上和 AB 的延长线上, 再根据“ $\triangle BMN$ 中有两个角相等”分情况进行讨论.

图(1)

图(2)

图(1)

图(2)

图(1)

图(2)

图(1)

图(2)

图(1)

图(2)

图(1)

图(2)

图(1)

图(2)

图(1)

图(2)

图(1)

图(2)

图(1)

图(2)

是否合格, 符合题意; 丙: 测量出 $\angle BAD$ 和 $\angle ADC$ 的度数, 利用邻补角的定义和三角形内角和定理即可检验该零件是否合格, 符合题意. 故选 A.

2. C 【解析】 $\because AB \perp OM, \therefore \angle BAO = 90^\circ. \therefore \angle AOB =$

$$60^\circ, \therefore \angle ABO = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \therefore 90^\circ = 3 \times 30^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOB \text{ 是“灵动三角形”, 故①②正确.}$$

$$\because \angle OAB = 90^\circ, \angle BAC = 70^\circ, \therefore \angle OAC = 20^\circ.$$

$$\because \angle AOC = 60^\circ = 3 \times 20^\circ, \therefore \triangle AOC \text{ 是“灵动三角形”, 故③正确.}$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 是“灵动三角形”, 分三种情况讨论: 当 } \angle ACB = 3 \angle ABC \text{ 时, } \angle ACB =$$

$$90^\circ, \therefore \angle CAB = 60^\circ, \therefore \angle OAC = 30^\circ; \text{ 当 } \angle ABC =$$

$$3 \angle CAB \text{ 时, } \angle CAB = 10^\circ, \therefore \angle OAC = 80^\circ; \text{ 当}$$

$$\angle ACB = 3 \angle CAB \text{ 时, } \therefore \angle CAB + \angle ACB + \angle ABC =$$

$$180^\circ, \text{ 即 } 4 \angle CAB + 30^\circ = 180^\circ, \therefore \angle CAB =$$

$$37.5^\circ, \therefore \angle OAC = 52.5^\circ. \text{ 综上所述, 满足条件的 } \angle OAC \text{ 的度数为 } 30^\circ \text{ 或 } 52.5^\circ \text{ 或 } 80^\circ, \text{ 故④}$$

$$\text{错误. 综上所述, 正确的有①②③, 共 3 个. 故选 C.}$$

$$3. 25^\circ \text{ 或 } 50^\circ \text{ 或 } 65^\circ \text{ 或 } 80^\circ \text{ 【解析】(1) 当点 M}$$

$$\text{在线段 AB 上时, 如图(1). } \because MN \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle AMN = 50^\circ, \therefore \angle BMN = 180^\circ -$$

$$50^\circ = 130^\circ. \therefore \triangle BMN \text{ 中有两个角相等, } \therefore \text{ 只有 } \angle MBN = \angle BNM \text{ 这一种情况, } \therefore \angle MNB =$$

$$\frac{180^\circ - 130^\circ}{2} = 25^\circ.$$

$$\text{图(1)}$$

$$\text{图(2)}$$

$$(2) \text{ 当点 M 在 AB 的延长线上时, 如图(2).}$$

$$\text{①当 } \angle BMN = \angle BNM \text{ 时, 由 } MN \parallel BC, \text{ 得 } \angle BMN =$$

$$\angle ABC = 50^\circ, \therefore \angle BNM = 50^\circ. \text{ ②当 } \angle BMN =$$

$$\angle MBN \text{ 时, } \angle BMN = \angle ABC = 50^\circ, \therefore \angle MBN =$$

$$50^\circ, \therefore \angle MNB = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ. \text{ ③当}$$

$$\angle MBN = \angle MNB \text{ 时, } \angle BMN = \angle ABC = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle MNB = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = 65^\circ.$$

$$\text{综上所述, } \angle MNB \text{ 的度数为 } 25^\circ \text{ 或 } 50^\circ \text{ 或 } 65^\circ$$

$$\text{或 } 80^\circ, \text{ 故答案为 } 25^\circ \text{ 或 } 50^\circ \text{ 或 } 65^\circ \text{ 或 } 80^\circ.$$

$$\text{刷素养}$$

$$4. \text{ 【解】(1) } \because \angle A = 50^\circ, \therefore \angle ABC + \angle ACB =$$

$$130^\circ. \therefore \angle P = 90^\circ, \therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ,$$

刷提升

1. A 【解析】甲: 延长 BA 和 CD, 设交点为 O, 则

测量 $\angle O$ 是否等于 40° 可以检验该零件是否

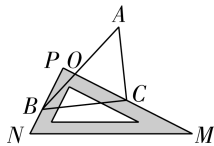
合格, 符合题意; 乙: 只需测量出 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的

度数, 由三角形内角和定理即可检验该零件

$\therefore \angle ABP + \angle ACP = 130^\circ - 90^\circ = 40^\circ$, 故答案为 90, 40.

(2) $\angle ABP + \angle ACP = 90^\circ - \angle A$. 理由: $\because (\angle PBC + \angle PCB) + (\angle ABP + \angle ACP) + \angle A = 180^\circ$, $\therefore (180^\circ - \angle P) + (\angle ABP + \angle ACP) + \angle A = 180^\circ$. $\therefore \angle P = 90^\circ$, $\therefore \angle ABP + \angle ACP + \angle A = 90^\circ$, $\therefore \angle ABP + \angle ACP = 90^\circ - \angle A$.

(3) $\angle ACP - \angle ABP = 90^\circ - \angle A$. 理由: 设 AB 交 PC 于 O , 如图. $\because \angle AOC = \angle POB$, $\therefore \angle ACO + \angle A = \angle P + \angle PBO$, 即 $\angle ACP + \angle A = 90^\circ + \angle ABP$, $\therefore \angle ACP - \angle ABP = 90^\circ - \angle A$.



课时2 直角三角形的性质与判定

刷基础

1. **B** 【解析】 \because 直角三角形的两锐角互余, \therefore 需要补的角的度数为 $90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$, 故选 B.

2. **A** 【解析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$. $\because \angle A = 2\angle B$, $\therefore 3\angle B = 90^\circ$, $\therefore \angle B = 30^\circ$, $\therefore \angle A = 60^\circ$. 故选 A.

3. **A** 【解析】 $\because \angle BAC = 90^\circ, AD \perp BC, DF \perp AB$, $\therefore \angle C + \angle B = 90^\circ, \angle BAD + \angle B = 90^\circ, \angle BDF + \angle B = 90^\circ$, $\therefore \angle C = \angle BDF = \angle BAD$. 同理, $\angle DAC + \angle C = 90^\circ, \angle DAC + \angle ADE = 90^\circ$, $\therefore \angle C = \angle ADE$, \therefore 题图中与 $\angle C$ ($\angle C$ 除外) 相等的角的个数是 3 个, 故选 A.

4. **135^\circ** 【解析】 $\because \angle C = 90^\circ$, $\therefore \angle CAB + \angle CBA = 90^\circ$. $\because AD$ 平分 $\angle CAB, BE$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle FAB = \frac{1}{2} \angle CAB, \angle FBA = \frac{1}{2} \angle CBA$, $\therefore \angle FAB + \angle FBA = \frac{1}{2} (\angle CAB + \angle CBA) = 45^\circ$, $\therefore \angle AFB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. 故答案为 135° .

5. **60^\circ 或 90^\circ** 【解析】当点 D 为直角顶点时, 如图 (1) 所示, 则 $\angle ADE = 90^\circ$. $\because \angle A = 30^\circ$, $\therefore \angle AED = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

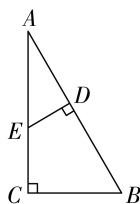


图 (1)

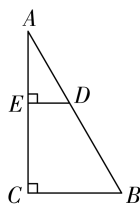


图 (2)

思路分析

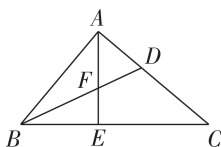
分两种情况讨论: 点 D 为直角顶点; 点 E 为直角顶点.

当点 E 为直角顶点时, 如图 (2) 所示, 则 $\angle AED = 90^\circ$. 综上, $\angle AED$ 的度数为 60° 或 90° .

6. 【解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ, \angle C = 40^\circ$, $\therefore \angle ABC = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. $\because BD$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 25^\circ$, $\therefore \angle ADB = 90^\circ - \angle ABD = 65^\circ$.

(2) 如图所示. ① $\because AE$ 是 BC 边上的高线,

$\therefore \angle AEC = 90^\circ$, $\therefore \angle C + \angle CAE = 90^\circ$. $\because \angle BAC = 90^\circ$, $\therefore \angle BAE + \angle CAE = 90^\circ$, $\therefore \angle BAE = \angle C$. ② $\because AE$ 是 BC 边上的高线, $\therefore \angle AEB = 90^\circ$, $\therefore \angle DBC + \angle BFE = 90^\circ$. $\because \angle BFE = \angle AFD, \angle ABD = \angle DBC$, $\therefore \angle AFD + \angle ABD = 90^\circ$. $\therefore \angle ABD + \angle ADF = 90^\circ$, $\therefore \angle AFD = \angle ADF$.



7. **B** 【解析】在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $\therefore \angle A + \angle C = 90^\circ$. $\because \angle DEC = \angle A$, $\therefore \angle DEC + \angle C = 90^\circ$, $\therefore \triangle EDC$ 是直角三角形. 故选 B.

8. 【证明】 $\because CE \perp AD$, $\therefore \angle CED = 90^\circ$, $\therefore \angle C + \angle D = 90^\circ$. $\because \angle A = \angle C$, $\therefore \angle A + \angle D = 90^\circ$, $\therefore \angle ABD = 90^\circ$, $\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形.

刷易错

易错警示

没有确定三角形最大内角的情况下, 应分类讨论作答, 本题可分以下两种情况:

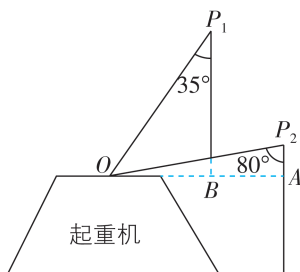
- ① $\angle C = 90^\circ$;
- ② $\angle B = 90^\circ$.

注意不要漏解.

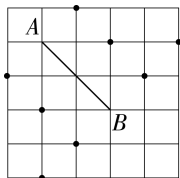
9. **2 或 4** 【解析】设 $\angle A = x^\circ, \angle C = 3x^\circ$. 当 $\angle C = 90^\circ$ 时, $3x^\circ = 90^\circ$, 解得 $x = 30$, $\therefore \angle A = 30^\circ, \angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $\therefore \angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$, $\therefore m = 2$; 当 $\angle B = 90^\circ$ 时, $\angle A + \angle C = 90^\circ$, 即 $x^\circ + 3x^\circ = 90^\circ$, 解得 $x = 22.5$, $\therefore \angle A = 22.5^\circ, \angle C = 67.5^\circ$, $\therefore \angle A : \angle B : \angle C = 1 : 4 : 3$, $\therefore m = 4$, 故 m 的值是 2 或 4.

刷提升

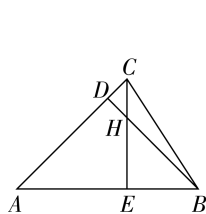
1. **B** 【解析】如图, 由题意知 P_1B, P_2A 垂直于 OA . 在 $\text{Rt}\triangle OAP_2$ 中, $\angle AOP_2 = 90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle OBP_1$ 中, $\angle BOP_1 = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$, $\therefore \angle P_1OP_2 = \angle P_1OA - \angle P_2OA = 55^\circ - 10^\circ = 45^\circ$. 故选 B.



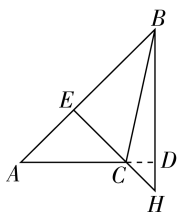
2. D 【解析】根据题意可得以 AB 为边画 $\text{Rt}\triangle ABC$, 使点 C 在格点上, 满足这样条件的点 C 共 8 个, 如图所示. 故选 D.



3. 135° 或 45° 【解析】①如图(1), $\triangle ABC$ 是锐角三角形时, $\because BD, CE$ 是 $\triangle ABC$ 的高线, $\therefore \angle ADB = 90^\circ, \angle BEC = 90^\circ$. 在 $\triangle ABD$ 中, $\because \angle A = 45^\circ, \therefore \angle ABD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. 在 $\text{Rt}\triangle BEH$ 中, $\angle EHB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ, \therefore \angle BHC = 180^\circ - \angle EHB = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.



图(1)

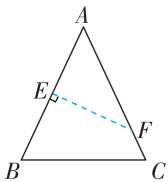


图(2)

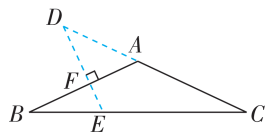
②如图(2), $\triangle ABC$ 是钝角三角形时, $\because BD, CE$ 是 $\triangle ABC$ 的高线, $\therefore \angle A + \angle ACE = 90^\circ, \angle BHC + \angle HCD = 90^\circ. \therefore \angle ACE = \angle HCD$ (对顶角相等), $\therefore \angle BHC = \angle A = 45^\circ$.

综上所述, $\angle BHC$ 的度数是 135° 或 45° .

4. 50° 或 130° 【解析】分两种情况讨论: ①如图(1), 由折叠的性质可知 $EF \perp AB, \therefore \angle AEF = 90^\circ. \therefore$ 折痕所在直线与 AC 边所在直线的夹角为 $40^\circ, \therefore \angle AFE = 40^\circ, \therefore \angle A = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$.



图(1)



图(2)

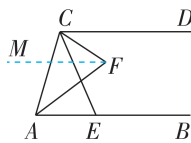
②如图(2), 由折叠的性质可知 $EF \perp AB, \therefore \angle AFD = 90^\circ. \therefore$ 折痕所在直线与 AC 边所在直线的夹角为 $40^\circ, \therefore \angle D = 40^\circ, \therefore \angle DAB = 90^\circ - \angle D = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ, \therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$. 故答案为 50° 或 130° .

5. 【解】 $\because AB \parallel CD, \therefore \angle ADC + \angle BAD = 180^\circ$.

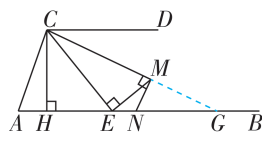
$\because AC$ 平分 $\angle BAD, BD$ 平分 $\angle ADC, \therefore \angle DAE = \frac{1}{2} \angle BAD, \angle ADE = \frac{1}{2} \angle ADC, \therefore \angle ADE + \angle DAE = \frac{1}{2} \angle ADC + \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{1}{2} (\angle ADC + \angle BAD) = 90^\circ, \therefore \angle AED = 90^\circ. \therefore AC$ 和 BD 交于点 $E, \therefore \angle DEC = \angle AEB = \angle AED = 90^\circ, \therefore \triangle AED, \triangle AEB, \triangle DEC$ 均为直角三角形.

刷素养

6. 【解】(1) $\because EM \perp CE, \therefore \angle CEM = 90^\circ, \therefore \angle ECD + \angle CME = 90^\circ, \therefore 2\angle ECD + 2\angle CME = 180^\circ. \therefore CE$ 平分 $\angle ACD, \therefore \angle ACD = 2\angle ECD, \therefore \angle ACD + 2\angle CME = 180^\circ. \therefore AB \parallel CD, \therefore \angle ACD + \angle A = 180^\circ, \therefore \angle A = 2\angle CME$.
(2) 如图(1), 过点 F 作 $FM \parallel AB$.
 $\because AB \parallel CD, \therefore FM \parallel AB \parallel CD, \therefore \angle AFM = \angle BAF, \angle CFM = \angle DCF, \therefore \angle AFM + \angle CFM = \angle BAF + \angle DCF$, 即 $\angle AFC = \angle BAF + \angle DCF. \therefore AF$ 平分 $\angle CAB, CF$ 平分 $\angle DCE, \therefore \angle CAB = 2\angle BAF, \angle DCE = 2\angle DCF, \therefore \angle CAB + \angle DCE = 2(\angle BAF + \angle DCF) = 2\angle AFC. \therefore \angle AFC = 70^\circ, \therefore \angle CAB + \angle DCE = 140^\circ. \therefore AB \parallel CD, \therefore \angle CAB + \angle ACD = \angle CAB + \angle ACE + \angle DCE = 180^\circ, \therefore \angle ACE = 180^\circ - (\angle CAB + \angle DCE) = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.



图(1)



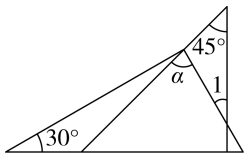
图(2)

(3) $\angle MNB$ 与 $\angle A$ 之间的数量关系是 $\angle MNB = 135^\circ - \angle A$. 如图(2), 延长 CM 交 AB 于点 $G. \therefore MN \perp CM, \therefore \angle NMG = 90^\circ, \therefore \angle MNB = 90^\circ - \angle MGN$, 同理 $\angle HCG = 90^\circ - \angle MGN, \therefore \angle MNB = \angle HCG. \therefore \angle ACH = \frac{1}{2} \angle ECH, \therefore$ 设 $\angle ACH = x$, 则 $\angle ECH = 2x. \therefore CM$ 平分 $\angle DCE, \therefore$ 设 $\angle ECM = \angle DCM = y, \therefore \angle MNB = \angle HCG = 2x + y. \therefore AB \parallel CD, CH \perp AB, \therefore CH \perp CD, \therefore \angle HCD = 90^\circ, \therefore \angle ECH + \angle ECD = 90^\circ, \therefore 2x + 2y = 90^\circ, \therefore x + y = 45^\circ. \therefore CH \perp AB, \therefore \angle A = 90^\circ - \angle ACH = 90^\circ - x, \therefore \angle A + \angle MNB = 90^\circ - x + 2x + y = 90^\circ + x + y = 135^\circ, \therefore \angle MNB = 135^\circ - \angle A$.

13.3.2 三角形的外角

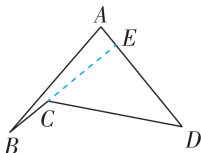
刷基础

1. **C** 【解析】 $\angle CDB$ 是 $\triangle ADB$ 的外角. 故选 C.
 2. **D** 【解析】如图, 由题意得 $\angle 1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, 所以 $\angle \alpha = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$, 故选 D.



3. **D** 【解析】根据图形可知 $\angle A$ 不一定等于 $\angle E$, $\angle C$ 不等于 $\angle E$, $\angle B$ 不一定等于 $\angle E + \angle F$. $\therefore \angle D$ 相当于 $\triangle ABC$ 的外角, $\therefore \angle D = \angle A + \angle B$, 故选项 A、B、C 不符合题意, 选项 D 符合题意. 故选 D.

4. **C** 【解析】如图, 延长 BC 交 AD 于 E . $\therefore \angle BED$ 是 $\triangle ABE$ 的一个外角, $\angle A = 80^\circ$, $\angle B = 10^\circ$, $\therefore \angle BED = \angle A + \angle B = 90^\circ$. $\therefore \angle BCD$ 是 $\triangle CDE$ 的一个外角, $\therefore \angle BCD = \angle BED + \angle D = 130^\circ$, 故选 C.



5. **360** 【解析】 \therefore 三角形每个顶点处的内角与其外角之和为 180° , 三角形的内角和为 180° , $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 3 \times 180^\circ - 180^\circ = 360^\circ$. 故答案为 360.

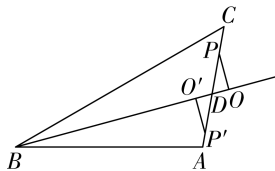
6. $\angle P = \frac{1}{2} \angle A$ 【解析】 $\therefore \angle ACE$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角, $\therefore \angle A = \angle ACE - \angle ABC$. $\therefore CP$ 是 $\angle ACE$ 的平分线, $\therefore \angle PCE = \frac{1}{2} \angle ACE$. $\therefore BP$ 是 $\angle ABC$ 的平分线, $\therefore \angle PBE = \frac{1}{2} \angle ABC$, $\therefore \angle P = \angle PCE - \angle PBC = \frac{1}{2} \times (\angle ACE - \angle ABC) = \frac{1}{2} \angle A$, 故答案为 $\angle P = \frac{1}{2} \angle A$.

7. 【解】证法 1: $\therefore \angle BAE, \angle CBF, \angle ACD$ 是 $\triangle ABC$ 的三个外角, $\therefore \angle BAE = \angle 2 + \angle 3$, $\angle CBF = \angle 1 + \angle 3$, $\angle ACD = \angle 1 + \angle 2$, $\therefore \angle BAE + \angle CBF + \angle ACD = 2(\angle 1 + \angle 2 + \angle 3)$. $\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, $\therefore \angle BAE + \angle CBF + \angle ACD = 360^\circ$. 故答案为 $\angle BAE = \angle 2 + \angle 3$, $\angle CBF = \angle 1 + \angle 3$, $\angle ACD = \angle 1 + \angle 2$; $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. 证法 2: \therefore 平角等于 180° , $\therefore \angle BAE + \angle 1 +$

易错警示 点 P 的位置需分两种情形: 点 P 在线段 CD 上或在线段 AD 上, 不要漏解.

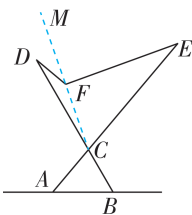
刷易错

8. **25° 或 155°** 【解析】如图. $\therefore BD$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = 15^\circ$. 当点 P 在线段 CD 上时, $\therefore \angle PDO = \angle ADB = 180^\circ - \angle A - \angle ABD = 180^\circ - 100^\circ - 15^\circ = 65^\circ$, $OP \perp BD$, $\therefore \angle POD = 90^\circ$, $\therefore \angle APO = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$; 当点 P 在线段 AD 上时, 如点 P' , $\angle AP'O' = \angle P'O'D + \angle P'DO' = 90^\circ + 65^\circ = 155^\circ$, 故答案为 25° 或 155° .



刷提升

1. **D** 【解析】连接 CF 并延长至点 M , 如图所示. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 50^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$, $\therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle CAB - \angle CBA = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$, $\therefore \angle DCE = \angle ACB = 70^\circ$. $\therefore \angle DFM = \angle DCF + \angle D$, $\angle EFM = \angle ECF + \angle E$, $\therefore \angle EFD = \angle DCF + \angle ECF + \angle D + \angle E = \angle DCE + \angle D + \angle E$, 即 $130^\circ = 70^\circ + \angle D + 30^\circ$, $\therefore \angle D = 30^\circ$, 故选 D.
2. **B** 【解析】 $\therefore \angle ABC = 2 \angle C$, BP 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle PBC = \angle C$. 设 $\angle C = x$, 则 $\angle PBC = x$. $\therefore \angle FEC = 28^\circ$, $\therefore \angle AFE = x + 28^\circ$. $\therefore \angle AEF = 2 \angle AFE$, $\therefore \angle AEF = 2x + 56^\circ$. $\therefore EP$ 平分 $\angle AEF$, $\therefore \angle FEP = x + 28^\circ$. $\therefore \angle PEC = \angle P + \angle PBC$, $\therefore x + 28^\circ + 28^\circ = \angle P + x$, $\therefore \angle P = 56^\circ$, 故选 B.



思路分析

证法 2: 根据平角的定义得到 $\angle BAE + \angle 1 + \angle CBF + \angle 2 + \angle ACD + \angle 3 = 540^\circ$, 再根据三角形内角和定理与角的和差关系即可得到结论.

3. **$0^\circ < \angle A < 60^\circ$ 或 $90^\circ < \angle A < 150^\circ$** 【解析】由题意, 分两种情况: 若 $\angle A$ 为钝角, 则 $90^\circ < \angle A < 180^\circ - 30^\circ$, 即 $90^\circ < \angle A < 150^\circ$. 若 $\angle A$ 为锐角, 则 $0^\circ < \angle A < 90^\circ$, $90^\circ < \angle APO < 180^\circ - 30^\circ$, 即 $90^\circ < \angle APO < 150^\circ$, $\therefore 30^\circ < \angle APN < 90^\circ$. $\therefore \angle APN = \angle O + \angle A$, $\therefore 30^\circ < \angle A + 30^\circ < 90^\circ$, $\therefore 0^\circ < \angle A < 60^\circ$. 综上, $\angle A$ 的取值范围为 $0^\circ < \angle A < 60^\circ$ 或 $90^\circ < \angle A < 150^\circ$.

4. $\frac{360}{7}$ 【解析】 $\therefore BD$ 平分 $\angle CBA$, 且 $\angle CBA =$

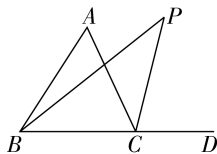
$m^\circ, \therefore \angle CBD = \frac{1}{2} \angle CBA = \frac{1}{2} m^\circ. \therefore$ 延长 DB 至点 $G, \therefore \angle CBD + \angle CBG = 180^\circ, \therefore \angle CBG = 180^\circ - \angle CBD = 180^\circ - \frac{1}{2} m^\circ. \therefore BE$ 平分 $\angle CBG, \therefore \angle CBE = \frac{1}{2} \angle CBG = \frac{1}{2} (180^\circ - \frac{1}{2} m^\circ) = 90^\circ - \frac{1}{4} m^\circ. \therefore$ 延长 AC 至点 $F, \therefore \angle FCB$ 是 $\triangle ABC$ 的外角. $\therefore \angle CAB = n^\circ, \angle CBA = m^\circ, \therefore \angle FCB = \angle CBA + \angle CAB = m^\circ + n^\circ. \text{ 又 } \because BE \parallel AC, \therefore \angle FCB + \angle CBE = 180^\circ, \therefore m^\circ + n^\circ + 90^\circ - \frac{1}{4} m^\circ = 180^\circ, \therefore \frac{3}{4} m + n = 90, \therefore \frac{4}{7} n + \frac{3}{7} m = \frac{4}{7} (n + \frac{3}{4} m) = \frac{4}{7} \times 90 = \frac{360}{7}. \text{ 故答案为 } \frac{360}{7}.$

刷素养

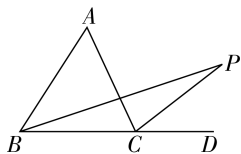
5. 【解】(1) 如图(1), 当 BD 是“邻 AB 三分线”时, $\angle ABD' = \frac{1}{3} \times 45^\circ = 15^\circ, \therefore \angle BD'C = 70^\circ + 15^\circ = 85^\circ$; 当 BD 是“邻 BC 三分线”时, $\angle ABD'' = \frac{2}{3} \times 45^\circ = 30^\circ, \therefore \angle BD''C = 70^\circ + 30^\circ = 100^\circ$. 故答案为 85° 或 100° .
- (2) $\because BP \perp CP, \therefore \angle BPC = 90^\circ, \therefore \angle PBC + \angle PCB = 90^\circ$. 又 $\because BP, CP$ 分别是 $\angle ABC$ 的“邻 AB 三分线”和 $\angle ACB$ 的“邻 AC 三分线”, $\therefore \angle PBC = \frac{2}{3} \angle ABC, \angle PCB = \frac{2}{3} \angle ACB, \therefore \frac{2}{3} \angle ABC + \frac{2}{3} \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle ABC + \angle ACB = 135^\circ$. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ, \therefore \angle A = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ACB) = 45^\circ$.
- (3) $\angle BPC$ 的度数为 $\frac{2}{3} m^\circ$ 或 $\frac{1}{3} m^\circ$ 或 $\frac{2}{3} m^\circ + \frac{1}{3} n^\circ$ 或 $\frac{1}{3} m^\circ - \frac{1}{3} n^\circ$ 或 $\frac{1}{3} n^\circ - \frac{1}{3} m^\circ$.

分四种情况进行画图计算:

- ①如图(2), 当 BP 和 CP 分别是“邻 AB 三分线”“邻 AC 三分线”时, $\angle BPC = \frac{2}{3} \angle A = \frac{2}{3} m^\circ$;



图(2)



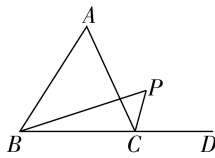
图(3)

思路分析

(3) 根据 $\angle ABC$ 的“三分线”所在的直线与 $\angle ACD$ 的“三分线”所在的直线交于点 P , 分四种情况画图: 情况一, 当 BP 和 CP 分别是“邻 AB 三分线”“邻 AC 三分线”时; 情况二, 当 BP 和 CP 分别是“邻 BC 三分线”“邻 CD 三分线”时; 情况三, 当 BP 和 CP 分别是“邻 BC 三分线”“邻 AC 三分线”时; 情况四, 当 BP 和 CP 分别是“邻 AB 三分线”“邻 CD 三分线”时, 再根据 $\angle A = m^\circ, \angle ABC = n^\circ$, 求出 $\angle BPC$ 的度数.

- ②如图(3), 当 BP 和 CP 分别是“邻 BC 三分线”“邻 CD 三分线”时, $\angle BPC = \frac{1}{3} \angle A = \frac{1}{3} m^\circ$;

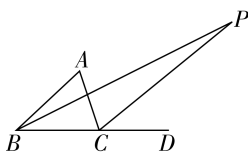
- ③如图(4), 当 BP 和 CP 分别是“邻 BC 三分线”“邻 AC 三分线”时,



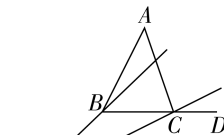
图(4)

$$\angle BPC = \frac{2}{3} \angle A + \frac{1}{3} \angle ABC = \frac{2}{3} m^\circ + \frac{1}{3} n^\circ;$$

- ④如图(5)、图(6), 当 BP 和 CP 分别是“邻 AB 三分线”“邻 CD 三分线”时,



图(5)



图(6)

当 $m > n$ 时, $\angle BPC = \frac{1}{3} \angle A - \frac{1}{3} \angle ABC = \frac{1}{3} m^\circ - \frac{1}{3} n^\circ$; 当 $m < n$ 时, $\angle BPC = \frac{1}{3} \angle ABC - \frac{1}{3} \angle A = \frac{1}{3} n^\circ - \frac{1}{3} m^\circ$.

综上所述, $\angle BPC$ 的度数为 $\frac{2}{3} m^\circ$ 或 $\frac{1}{3} m^\circ$ 或

$$\frac{2}{3} m^\circ + \frac{1}{3} n^\circ \text{ 或 } \frac{1}{3} m^\circ - \frac{1}{3} n^\circ \text{ 或 } \frac{1}{3} n^\circ - \frac{1}{3} m^\circ.$$

大招专题 1 三角形中的倒角模型



刷难关

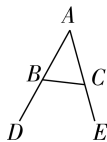
大招解读 | A 字型

【结论 1】如图(1), $\angle DBC + \angle ECB = 180^\circ + \angle A$.

证明: $\because \angle DBC = \angle A + \angle ACB,$

$$\angle ECB = \angle A + \angle ABC,$$

$$\therefore \angle DBC + \angle ECB = \angle A + \angle ACB + \angle A + \angle ABC = \angle A + 180^\circ.$$



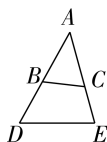
图(1)

【结论 2】如图(2), $\angle ABC + \angle ACB = \angle D + \angle E$.

证明: $\because \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ,$

$$\angle A + \angle D + \angle E = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ACB = \angle D + \angle E.$$



图(2)

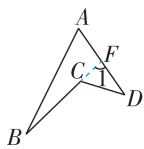
1. D 【解析】 $\because \angle A = 65^\circ, \therefore \angle ADE + \angle AED = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ, \therefore \angle BDE + \angle CED = 360^\circ -$

$115^\circ = 245^\circ$, 故选 D.

2. **B** 【解析】 $\because \angle 1 = 70^\circ, \angle 2 = 140^\circ, \therefore \angle B + \angle C = 360^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 360^\circ - 70^\circ - 140^\circ = 150^\circ$,
 $\therefore \angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.
 故选 B.

大招解读 | 飞镖型 (或燕尾型)

结论: 如图, $\angle BCD = \angle A + \angle B + \angle D$.



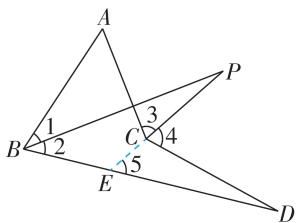
证明: 延长 BC 交 AD 于点 F.

$$\therefore \angle 1 = \angle A + \angle B,$$

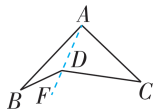
$$\angle BCD = \angle 1 + \angle D,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle A + \angle B + \angle D.$$

3. **B** 【解析】如图, 延长 PC 交 BD 于 E.
 $\because \angle ABD, \angle ACD$ 的平分线交于点 P, $\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$. 由三角形的内角和定理得,
 $\angle A + \angle 1 = \angle P + \angle 3$. ① 在 $\triangle PBE$ 中, $\angle 5 = \angle 2 + \angle P$, 在 $\triangle DCE$ 中, $\angle 5 = \angle 4 - \angle D$,
 $\therefore \angle 2 + \angle P = \angle 4 - \angle D$. ② ① - ② 得 $\angle A - \angle P = \angle P + \angle D, \therefore \angle P = \frac{1}{2}(\angle A - \angle D)$.
 $\because \angle A = 55^\circ, \angle D = 15^\circ, \therefore \angle P = \frac{1}{2}(55^\circ - 15^\circ) = 20^\circ$. 故选 B.



4. 【解】(1) $\angle BDC = \angle BAC + \angle B + \angle C$. 理由: 如图, 连接 AD 并延长至点 F.



根据外角的性质, 可得 $\angle BDF = \angle BAD + \angle B$,
 $\angle CDF = \angle C + \angle CAD$. 又 $\because \angle BDC = \angle BDF + \angle CDF$,
 $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD, \therefore \angle BDC = \angle BAC + \angle B + \angle C$.

(2) ① 由 (1) 可得 $\angle D = \angle ABD + \angle ACD + \angle A$.
 又 $\because \angle A = 40^\circ, \angle D = 90^\circ, \therefore \angle ABD + \angle ACD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, 故答案为 50.

② 由 (1) 可得 $\angle P = \angle A + \angle ABP + \angle ACP, \angle D = \angle A + \angle ABD + \angle ACD, \therefore \angle ABP + \angle ACP = \angle P - \angle A = 130^\circ - 40^\circ = 90^\circ$.

关键点拨

根据等角的余角相等即可求解.

思路分析

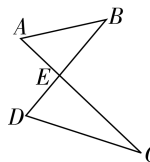
设 $\angle PAB = \angle OAP = x$,
 $\angle ECP = \angle PCB = y$, 则 $\angle BAO = 2x, \angle BCE = 2y$.
 $\because \angle AOB = \angle COD, \angle AGP = \angle CGD$,
 $\therefore \angle B + \angle BAO = \angle D + \angle OCD, \angle P + \angle PAG = \angle D + \angle GCD$,
 然后构建方程组即可解决问题.

思路分析

根据角平分线的定义和三角形的内角和定理可得规律, 进而得到 $\angle D_4$ 的度数.

又 $\because BD$ 平分 $\angle ABP, CD$ 平分 $\angle ACP$,
 $\therefore \angle ABD + \angle ACD = \frac{1}{2}(\angle ABP + \angle ACP) = 45^\circ$,
 $\therefore \angle D = 45^\circ + 40^\circ = 85^\circ$. 故答案为 85° .

大招解读 | 8 字型



结论: 如图, $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D$.

证明: $\because \angle BEC$ 是 $\triangle ABE$ 的外角, $\therefore \angle BEC = \angle A + \angle B$.

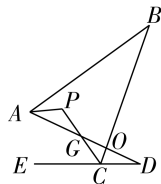
$\because \angle BEC$ 是 $\triangle CDE$ 的外角,

$$\therefore \angle BEC = \angle C + \angle D,$$

$$\therefore \angle A + \angle B = \angle C + \angle D.$$

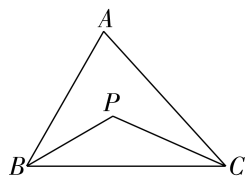
5. **D** 【解析】由对顶角相等得 $\angle CED = \angle AEB$.
 $\because \angle A = \angle C = 90^\circ, \therefore \angle CED + \angle 1 = 90^\circ$,
 $\angle AEB + \angle 2 = 90^\circ, \therefore \angle 1 = \angle 2 = 27^\circ$. 故选 D.

6. **B** 【解析】如图, 设 PC 交 AD 于 G, $\angle PAB = \angle OAP = x$,
 $\angle ECP = \angle PCB = y$, 则 $\angle BAO = 2x, \angle BCE = 2y$.
 $\because \angle AOB = \angle COD, \angle AGP = \angle CGD$,
 $\therefore \angle B + \angle BAO = \angle D + \angle OCD, \angle P + \angle PAG = \angle D + \angle GCD$,
 $\therefore \begin{cases} \angle B + 2x = \angle D + 180^\circ - 2y, & \text{①} \\ \angle P + x = \angle D + 180^\circ - y, & \text{②} \end{cases}$
 ① - 2 × ②, 可得 $\angle B - 2\angle P = -\angle D - 180^\circ$, 则
 $2\angle P - \angle B - \angle D = 180^\circ$. 故选 B.



大招解读 | 双内角平分线模型

如图, BP, CP 分别是 $\angle ABC, \angle ACB$ 的平分线, 则 $\angle P = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.



7. **60°** 【解析】 $\because \angle A = 52^\circ, \angle ABC$ 与 $\angle ACB$ 的平分线交于点 $D_1, \therefore \angle ABC + \angle ACB = 128^\circ$,
 $\angle CBD_1 = \frac{1}{2}\angle ABC, \angle BCD_1 = \frac{1}{2}\angle ACB$,
 $\therefore \angle CBD_1 + \angle BCD_1 = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 64^\circ$, 即 $\angle ABD_1 + \angle ACD_1 = 64^\circ, \therefore \angle D_1 = 116^\circ$.
 $\therefore \angle ABD_1$ 与 $\angle ACD_1$ 的平分线交于点 D_2 ,
 $\therefore \angle D_2BD_1 + \angle D_2CD_1 = \frac{1}{2}(\angle ABD_1 + \angle ACD_1) = 32^\circ$,
 $\therefore \angle CBD_2 + \angle BCD_2 = \angle D_1BD_2 + \angle D_1BC + \angle D_2CD_1 + \angle D_1CB = 96^\circ, \therefore \angle D_2 = 84^\circ$. 同理可得 $\angle D_3 = 68^\circ, \angle D_4 = 60^\circ$. 故答案为 60° .

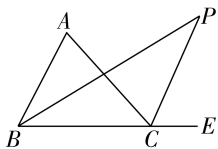
8. 【解】(1) $\because \angle A = 54^\circ, \therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 54^\circ = 126^\circ$. 又 $\because BD$ 平分 $\angle ABC, CE$ 平分 $\angle ACB, \therefore \angle CFD = \angle FBC + \angle FCB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = 63^\circ$.

(2) $\because \triangle ABC$ 的角平分线 BD, CE 相交于点 $F, \therefore \angle CBF = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle BCF = \frac{1}{2} \angle ACB, \therefore \angle BFC = 180^\circ - \angle CBF - \angle BCF = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC - \frac{1}{2} \angle ACB = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$. $\because \angle A + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ, \therefore \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A, \therefore \angle BFC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$, 即 $2\angle BFC = \angle A + 180^\circ$.

关键点拨

大招解读 | 内外角平分线模型

如图, BP, CP 分别是 $\angle ABC, \angle ACE$ 的平分线, 则 $\angle P = \frac{1}{2} \angle A$.

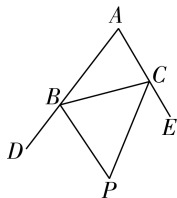


(2) 解题的关键是利用三角形内角和定理将 $\angle BFC$ 和 $\angle A$ 联系起来.

9. $\frac{1}{2^{2022}} \alpha$ 【解析】 $\because \angle ACD = 180^\circ - \angle ACB$, $\angle ABC$ 的平分线与 $\triangle ACB$ 的外角 ($\angle ACD$) 的平分线交于点 $A_1, \therefore \angle A_1 = 180^\circ - (\angle A_1BC + \angle ACB + \angle A_1CA) = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle ABC - \angle ACB - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2} \angle A$. 同理可得 $\angle A_2 = \frac{1}{2} \angle A_1 = \frac{1}{2^2} \angle A, \angle A_3 = \frac{1}{2} \angle A_2 = \frac{1}{2^3} \angle A, \dots, \therefore \angle A_{2022} = \frac{1}{2^{2022}} \angle A$. $\because \angle A = \alpha, \therefore \angle A_{2022} = \frac{1}{2^{2022}} \alpha$. 故答案为 $\frac{1}{2^{2022}} \alpha$.

大招解读 | 双外角平分线模型

如图, BP, CP 分别是 $\angle CBD, \angle BCE$ 的平分线, 则 $\angle P = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$.

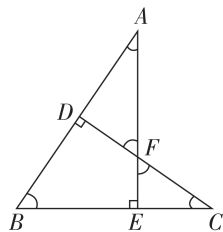


10. 【解】(1) 因为 BP, CP 分别平分 $\angle ABC$ 与 $\angle ACB$, 所以 $\angle PBC = \frac{1}{2} \angle ABC, \angle PCB = \frac{1}{2} \angle ACB$. 因为 $\angle BPC = 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB)$, 所以 $\angle BPC = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)$, 所以 $\angle BPC = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$. 因为 $\angle BPC = \alpha$, 所以 $\angle A = 2\alpha - 180^\circ$. 故答案为 $2\alpha - 180^\circ$.

(2) $\angle BPC + \angle Q = 180^\circ$. 理由: 因为 BQ, CQ 分别平分 $\angle MBC, \angle NCB$, 所以 $\angle QBC = \frac{1}{2} \angle CBM, \angle BCQ = \frac{1}{2} \angle BCN$, 所以 $\angle QBC + \angle QCB = \frac{1}{2}(\angle CBM + \angle BCN)$, 所以 $\angle QBC + \angle QCB = \frac{1}{2}(\angle A + \angle ACB + \angle A + \angle ABC) = \frac{1}{2}(180^\circ + \angle A)$, 所以 $\angle QBC + \angle QCB = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$, 所以 $\angle Q = 180^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2} \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$. 由(1)知 $\angle BPC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle A$, 所以 $\angle BPC + \angle Q = 180^\circ$.

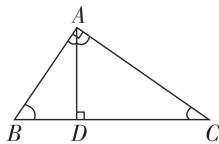
大招解读 | 双垂直模型

一般型:



结论: ① $\angle A = \angle C$; ② $\angle B = \angle AFD = \angle CFE$; ③ $AB \cdot CD = AE \cdot BC$

子母型 (射影定理模型):



结论: ① $\angle B = \angle CAD$; ② $\angle C = \angle BAD$; ③ $AB \cdot AC = AD \cdot BC$

关键点拨

11. 【解】(1) $\because CF \perp AB, \therefore \angle CFB = 90^\circ$. $\because \angle B = 46^\circ, \therefore \angle BCF = 44^\circ$. $\because AD \perp BC, \therefore \angle ADC = 90^\circ, \therefore \angle AEC = \angle ADC + \angle BCF = 90^\circ + 44^\circ = 134^\circ$.

(2) $\because CF \perp AB, AD \perp BC, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot$

$$AD = \frac{1}{2} AB \cdot CF. \because AB = 8, BC = 10, AD = 6,$$

$$\therefore CF = \frac{AD \cdot BC}{AB} = \frac{6 \times 10}{8} = \frac{15}{2}.$$

12. 【解】(1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\therefore \angle A = 60^\circ$. $\because CD \perp AB$, $\therefore \angle ADC = 90^\circ$, $\therefore \angle ACD = 90^\circ - \angle A = 30^\circ$. 故答案为 30.

(2) $\because BE \perp CP$, $\therefore \angle BEC = 90^\circ$. $\because \angle CBE = 70^\circ$, $\therefore \angle BCE = 90^\circ - \angle CBE = 20^\circ$. $\because \angle MCN = 90^\circ$, $\therefore \angle ACD = 90^\circ - \angle BCE = 70^\circ$. $\because AD \perp CP$, $\therefore \angle CAD = 90^\circ - \angle ACD = 20^\circ$.

(3) $\because \angle ADP$ 是 $\triangle ACD$ 的外角, $\therefore \angle ADP = \angle ACD + \angle CAD = 60^\circ$, 同理, $\angle BEP = \angle BCE + \angle CBE = 60^\circ$, $\therefore \angle CAD + \angle CBE + \angle ACB = \angle CAD + \angle CBE + \angle ACD + \angle BCE = (\angle CAD + \angle ACD) + (\angle CBE + \angle BCE) = 120^\circ$. 故答案为 120.

思路分析
(3) 利用三角形外角的性质得出相关结论, 再进行计算即可.

大招解读 | 高分线模型

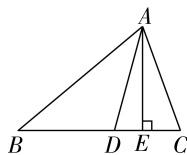
条件: AD 是高, AE 是角平分线.	条件: AD 是高, AE 是角平分线, F 是 AE 延长线上一点, 过 F 作 $FG \perp BC$.
结论: $\angle DAE = \frac{ \angle B - \angle C }{2}$	结论: $\angle F = \angle DAE = \frac{ \angle B - \angle C }{2}$

关键点拨

熟练掌握角平分线的定义、三角形内角和定理、三角形外角的性质、直角三角形的两内角互余是解题关键.

13. 【解】 $\because AD$ 是 BC 边上的高, $\angle B = 50^\circ$, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$, $\therefore \angle BAD = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$. $\because \angle EAD = 15^\circ$, $\therefore \angle BAE = \angle BAD - \angle EAD = 40^\circ - 15^\circ = 25^\circ$. $\because AE$ 是 $\angle BAC$ 的平分线, $\therefore \angle BAC = 2 \angle BAE = 50^\circ$. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC + \angle B + \angle C = 180^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle BAC = 50^\circ$, $\therefore \angle C = 180^\circ - \angle B - \angle BAC = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$.

14. 【解】(1) ①如图, AE 即为所求. \because 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 40^\circ$, $\angle C = 70^\circ$, $\therefore \angle BAC =$



$180^\circ - 40^\circ - 70^\circ = 70^\circ$. $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线, $\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 35^\circ$. $\because \angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的一个外角, $\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BAD = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$. \therefore 用三角尺作 BC 边上的高 AE , 垂足为点 E , $\therefore \angle DAE = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$.

② $\angle DFE = 15^\circ$. $\because \angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的一个外角, $\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BAD = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$. $\because FE \perp BC$, $\therefore \angle DFE = 90^\circ - \angle ADC = 15^\circ$.

(2) 不会发生变化. 理由如下:

$\because \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 35^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, $\angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的一个外角, $\therefore \angle ADC = \angle B + \angle BAD = 40^\circ + 35^\circ = 75^\circ$. $\because FE \perp BC$, $\therefore \angle DFE = 90^\circ - \angle ADC = 15^\circ$, $\therefore \angle DFE$ 的度数不会发生变化.

(3) 如题图 (4) 所示, \because 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $\therefore \angle BAC = 180^\circ - \alpha - \beta$. $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线, $\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$. $\because \angle ADC$ 是 $\triangle ABD$ 的一个外角, $\therefore \angle ADC = \angle ABC + \angle BAD = \alpha + 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2}$. $\because FE \perp AD$, $\therefore \angle DEF =$

$$90^\circ - \angle ADC = 90^\circ - \left(90^\circ + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

如题图 (5) 所示, \because 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \alpha$, $\angle ACB = \beta$, $\therefore \angle BAC = 180^\circ - \alpha - \beta$. $\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线, $\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2}$, $\therefore \angle ADB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAD = 180^\circ - \alpha - \left(90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = 90^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2}$. $\therefore FE \perp AD$, $\therefore \angle DEF = 90^\circ - \angle ADB = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) = \frac{\alpha - \beta}{2}$. 综上所述, $\angle DEF = \frac{\beta - \alpha}{2}$ 或 $\angle DEF = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

数学活动



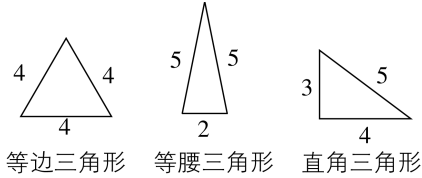
刷活动

1. C 【解析】由题图可知, 搭 1 个三角形所需小木棒的根数为 $3 = 1 \times 2 + 1$; 搭 2 个三角形所需

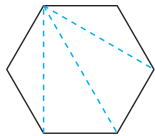
小木棒的根数为 $5=2\times 2+1$; 搭 3 个三角形所需小木棒的根数为 $7=3\times 2+1$; 搭 4 个三角形所需小木棒的根数为 $9=4\times 2+1$; \cdots , 所以搭 n 个三角形所需小木棒的根数为 $2n+1$, 当 $n=2\,024$ 时, $2n+1=2\times 2\,024+1=4\,049$, 即搭 2 024 个三角形所需小木棒的根数为 4 049.

2. 12 1 【解析】 设每根火柴棒的长度均为 1. \because 三角形两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边, 三边共用 24 根火柴棒, \therefore 三角形三边长度如下: ① 2, 11, 11; ② 3, 10, 11; ③ 4, 9, 11; ④ 4, 10, 10; ⑤ 5, 8, 11; ⑥ 5, 9, 10; ⑦ 6, 7, 11; ⑧ 6, 8, 10; ⑨ 6, 9, 9; ⑩ 7, 7, 10; ⑪ 7, 8, 9; ⑫ 8, 8, 8. 综上, 一共可搭 12 种形状不同的三角形, 其中等边三角形有 1 个. 故答案为 12, 1.

3. 【解】 (1) 4 根火柴不能搭成三角形.
(2) 12 根火柴能搭成 3 种不同形状的三角形. 示意图如下:



4. C 【解析】 如图, 连接对角线, 可知一个六边形可以分割成 4 个三角形. 故选 C.



5. D 【解析】 从五边形的一个顶点出发, 可以连接两条对角线, 得到 3 个三角形. \because 五边形有 5 个顶点, \therefore 共有 5 种剖分方法.

6. n-2 【解析】 由题图可以看出, 四边形被分为 $4-2=2$ (个) 三角形, 五边形被分为 $5-2=3$ (个) 三角形, 六边形被分为 $6-2=4$ (个) 三角形, \cdots , 那么 n 边形可以被分为 $(n-2)$ 个三角形.

7. 【解】 (1) 有关系. 关系如下: 题图(1)中, 三角形的个数 = 多边形的边数 - 2; 题图(2)中, 三角形的个数 = 多边形的边数; 题图(3)中, 三角形的个数 = 多边形的边数 - 1.

(2) 由(1)得, 若是 n (n 为大于 3 的整数) 边形, 三种方法分割所得三角形的个数依次为 $n-2, n, n-1$.

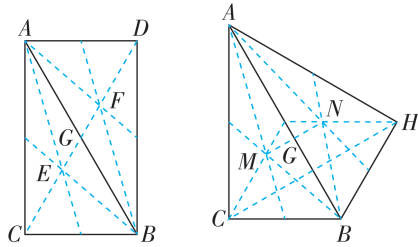
综合与实践 确定匀质薄板的重心位置

刷实践

【解】 问题 1: ①如图(1)所示, $\text{Rt}\triangle ABC$ 的重心

关键点拨
本题主要考查图形变化的规律, 根据所给图形发现所需小木棒的根数依次增加 2 是解题的关键.

是其三条中线的交点 E , $\text{Rt}\triangle ABD$ 的重心是其三条中线的交点 F . 由题意可得, 这两个完全相同的直角三角形拼成一个长方形 $ACBD$, 而这个长方形 $ACBD$ 也可由 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 拼成, 易知这两个三角形的重心都在 AB 上, 则线段 EF 与 AB 的交点 G 就是长方形 $ACBD$ 的重心.

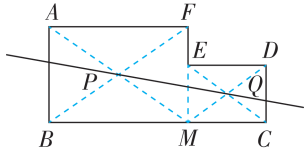


图(1)

图(2)

②如图(2)所示, $\text{Rt}\triangle ABC$ 的重心是其三条中线的交点 M , $\text{Rt}\triangle AHB$ 的重心是其三条中线的交点 N , 连接 MN, CH . 易知 $\triangle ACH$ 和 $\triangle BCH$ 的重心都在 AB 上, 所以四边形 $ACBH$ 的重心是线段 MN 与 AB 的交点 G .

问题 2: (所作直线不唯一) 如图(3), 延长 FE 交 BC 于 M , 作长方形 $ABMF$ 和长方形 $DCME$ 的对角线, 过两个长方形的对角线交点 P, Q 的直线即为所求.



图(3)

理由: 因为经过多边形重心的任一直线都将这个多边形分成面积相等的两部分, 所以 PQ 既平分长方形 $ABMF$ 又平分长方形 $DCME$, 故 PQ 将该图形分成面积相等的两部分.

全章综合训练

刷中考

1. C 【解析】 由题意得 $\triangle ABD, \triangle ABC, \triangle ADC, \triangle ADE$ 均为直角三角形, \therefore 共有 4 个直角三角形. 故选 C.

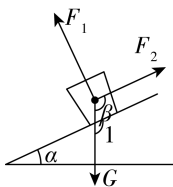
2. B 【解析】 设这根小木棒长为 x cm. 由三角形三边关系得 $5-3 < x < 5+3$, 所以 x 的取值范围是 $2 < x < 8$, 观察选项, 只有选项 B 符合题意. 故选 B.

3. 4 (答案不唯一) 【解析】 \because 长度分别为 3, 6, a 的三条线段能组成一个三角形, $\therefore 6-3 < a < 6+3$, $\therefore 3 < a < 9$, \therefore 整数 a 的值可以是 4, 故答案为 4 (答案不唯一).

4. **B** 【解析】 $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \times AD = 12, AD = 4,$
 $\therefore BC = 6. \because AE$ 是中线, $\therefore BE = \frac{1}{2}BC = 3,$ 故
 选 B.

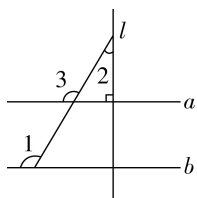
5. **100°** 【解析】 $\because \angle BCD = 30^\circ, \angle ACB = 80^\circ,$
 $\therefore \angle ACD = 50^\circ. \because CD$ 是边 AB 上的高,
 $\therefore \angle ADC = 90^\circ, \therefore \angle DAC = 40^\circ. \because AE$ 是 $\angle CAB$
 的平分线, $\therefore \angle CAE = \frac{1}{2} \angle DAC = 20^\circ,$
 $\therefore \angle AEB = \angle CAE + \angle ACB = 20^\circ + 80^\circ = 100^\circ.$ 故
 答案为 100° .

6. **C** 【解析】如图, \because 重力 G
 的方向竖直向下, \therefore 重力 G
 与水平方向夹角为 $90^\circ. \because$ 摩
 擦力 F_2 的方向与斜面平行,
 $\alpha = 25^\circ, \therefore \beta = \angle 1 = \alpha + 90^\circ =$
 $25^\circ + 90^\circ = 115^\circ,$ 故选 C.

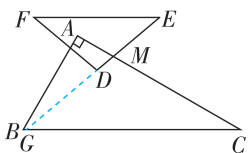


7. **直角** 【解析】设这个三角形最小的内角度数
 是 x° , 则另外两内角的度数分别为 $2x^\circ, 3x^\circ$.
 根据题意得 $x + 2x + 3x = 180$, 解得 $x = 30$,
 $\therefore 3x^\circ = 3 \times 30^\circ = 90^\circ, \therefore$ 这个三角形是直角三
 角形, 故答案为直角.

8. **30** 【解析】如图. $\because a \parallel b, \therefore \angle 3 = \angle 1 = 120^\circ.$
 $\because l \perp a, \therefore \angle 3 = \angle 2 + 90^\circ, \therefore \angle 2 = 30^\circ.$ 故答案
 为 30.



(第 8 题图)



(第 9 题图)

9. **110°** 【解析】如图, 延长 ED 交 BC 于点 G . **归纳总结**
 $\because \angle BAC = 90^\circ, \angle B = 60^\circ, \therefore \angle C = 90^\circ - 60^\circ =$
 $30^\circ. \because \angle EDF = 100^\circ, \angle F = 40^\circ, \therefore \angle E =$
 $180^\circ - 40^\circ - 100^\circ = 40^\circ. \because BC \parallel EF, \therefore \angle EGC =$
 $\angle E = 40^\circ, \therefore \angle DMC = 180^\circ - \angle EGC - \angle C =$
 $110^\circ.$ 故答案为 110° .

10. **25°或 115°** 【解析】由折叠的性质得 $\angle ADB' =$
 $\angle ADB. \because B'D \perp BC, \therefore \angle BDB' = 90^\circ.$ 分两种
 情况讨论: ①当 B' 在 BC 下方时, 如图 (1).
 $\therefore \angle ADB + \angle ADB' + \angle BDB' = 360^\circ, \therefore \angle ADB =$
 $\frac{1}{2} \times (360^\circ - 90^\circ) = 135^\circ, \therefore \angle BAD = 180^\circ -$
 $\angle B - \angle ADB = 25^\circ.$

思路分析

分两种情况:

- ①点 B' 在 BC
 的下方, 由折
 叠的性质及
 $\angle BDB' = 90^\circ$
 可知 $\angle ADB' =$
 $\angle ADB = 135^\circ,$
 即可求得
 $\angle BAD = 25^\circ;$
 ②点 B' 在 BC
 的上方, 由折
 叠的性质及
 $\angle BDB' = 90^\circ$
 可知 $\angle ADB' =$
 $\angle ADB = 45^\circ,$
 即可求得
 $\angle BAD = 115^\circ.$

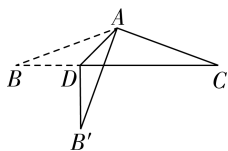


图 (1)

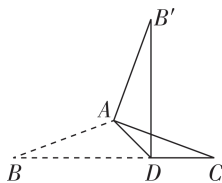


图 (2)

②当 B' 在 BC 上方时, 如图 (2). $\therefore \angle ADB +$
 $\angle ADB' = 90^\circ, \therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$
 $\therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle B - \angle ADB = 115^\circ.$ 综上,
 $\angle BAD$ 的度数为 25° 或 $115^\circ.$ 故答案为 25° 或
 $115^\circ.$

刷章测

1. **B** 【解析】有两个角互余的三角形是直角三
 角形. 故选 B.

2. **B** 【解析】题图中以 AB 为边的三角形有
 $\triangle ABD, \triangle ABE, \triangle ABC$, 共 3 个. 故选 B.

3. **C** 【解析】 $\because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CE = \frac{1}{2}BC \cdot AD,$
 $\therefore CE = \frac{BC \cdot AD}{AB} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5},$ 故选 C.

4. **C** 【解析】由题图得 $AB = 1 - (-1) = 2, BC =$
 $x - 1, CD = 7 - x. \because$ 线段 AB, BC, CD 能围成三
 角形, \therefore 由三角形三边关系得 $\begin{cases} x - 1 + 7 - x > 2, & \text{①} \\ 2 + x - 1 > 7 - x, & \text{②} \\ 2 + 7 - x > x - 1, & \text{③} \end{cases}$

不等式①恒成立, 解不等式②得 $x > 3$, 解不等
 式③得 $x < 5, \therefore$ 不等式组的解集是 $3 < x < 5.$ 观
 察四个选项, 只有 C 选项符合题意, 故选 C.

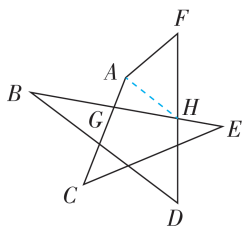
5. **C** 【解析】 $\because F$ 是 CE 的中点, $\therefore S_{\triangle ACE} =$
 $2S_{\triangle AEF} = 2 \times 7 = 14. \because E$ 是 BD 的中点, $\therefore S_{\triangle ADE} =$
 $\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}, S_{\triangle CDE} = \frac{1}{2}S_{\triangle CBD}, \therefore S_{\triangle CDE} + S_{\triangle ADE} =$
 $\frac{1}{2}S_{\triangle CBD} + \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}(S_{\triangle CBD} + S_{\triangle ABD}) = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$
 $\therefore S_{\triangle ADE} + S_{\triangle CDE} = S_{\triangle ACE} = 14, \therefore S_{\triangle ABC} = 2(S_{\triangle ADE} +$
 $S_{\triangle CDE}) = 28,$ 故选 C.

6. **B** 【解析】 $\because \angle 1 = 180^\circ - \angle AEA', \angle 2 = 180^\circ -$
 $\angle ADA', \therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - \angle AEA' + 180^\circ -$
 $\angle ADA' = 360^\circ - (\angle AEA' + \angle ADA'). \because \angle A +$
 $\angle A' = 360^\circ - (\angle AEA' + \angle ADA'), \therefore \angle A +$
 $\angle A' = \angle 1 + \angle 2. \because \angle A = \angle A', \therefore 2\angle A = \angle 1 +$
 $\angle 2,$ 故选 B.

7. **D** 【解析】 $\because \angle ABC = n^\circ, \therefore \angle BAC + \angle BCA =$

$180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - n^\circ$. $\therefore O$ 是三个内角的平分线的交点, $\therefore \angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2} n^\circ$,
 $\angle OCA = \frac{1}{2} \angle BCA$, $\angle OAC = \frac{1}{2} \angle BAC$,
 $\therefore \angle OAC + \angle OCA = \frac{1}{2} (\angle BAC + \angle BCA) =$
 $\frac{1}{2} (180^\circ - n^\circ) = 90^\circ - \frac{1}{2} n^\circ$, $\therefore \angle AOC = 180^\circ -$
 $(\angle OAC + \angle OCA) = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{1}{2} n^\circ\right) = 90^\circ +$
 $\frac{1}{2} n^\circ$. $\therefore \angle ODC = \angle AOC$, $\therefore \angle ODC = 90^\circ +$
 $\frac{1}{2} n^\circ$. $\therefore \angle ODC = \angle OBC + \angle BOD$, $\angle OBC =$
 $\frac{1}{2} n^\circ$, $\therefore \angle BOD = 90^\circ$, 故选 D.

8. B 【解析】如图所示, 连接 AH , 设 AC 与 BE 交于点 G . 由三角形外角性质可知 $\angle AGH = \angle C + \angle E$, $\angle FHG = \angle B + \angle D$. $\therefore \angle FAG = \angle FAH + \angle GAH$, $\angle FHG = \angle FHA + \angle GHA$. 在 $\triangle AGH$ 中, $\angle AGH + \angle GHA + \angle HAG = 180^\circ$; 在 $\triangle AFH$ 中, $\angle F + \angle FHA + \angle HAF = 180^\circ$, $\therefore \angle F + \angle FAG + \angle AGH + \angle FHG = 360^\circ$, $\therefore \angle FAG + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 360^\circ$, 故选 B.



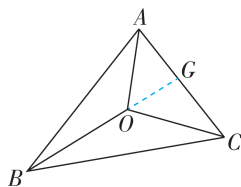
9. B 【解析】① $\begin{cases} \angle A + \angle B = \angle C, \\ \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ, \end{cases} \therefore 2\angle C = 180^\circ$, $\therefore \angle C = 90^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.
 ② 由条件可设 $\angle A = x$, $\angle B = 2x$, $\angle C = 3x$. $\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, $\therefore x + 2x + 3x = 6x = 180^\circ$, $\therefore x = 30^\circ$, $\therefore \angle C = 3x = 90^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形. ③ $\therefore \angle A = 90^\circ - \angle B$, $\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$, $\therefore \angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形. ④ 由 $\angle A = \angle B = 2\angle C$, 设 $\angle C = x$, $\angle A = \angle B = 2x$. $\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, $\therefore 2x + 2x + x = 5x = 180^\circ$, $\therefore x = 36^\circ$, $\therefore \angle A = \angle B = 2x = 72^\circ$, $\angle C = x = 36^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形. ⑤ 由条件可知 $\angle B = \frac{1}{2} \angle A$, $\angle C = \frac{1}{3} \angle A$. $\therefore \angle A + \angle B + \angle C =$

关键点拨 添加辅助线构造三角形, 应用三角形三边关系是解题的关键.

思路分析 根据三角形内角和定理求出 $\angle BAC$, 再由角平分线定义求得 $\angle DAE$, 再由三角形内角和定理求得 $\angle ADC$, 进而分 $\angle ADE$ 是钝角和 $\angle AED$ 是钝角两种情况进行讨论, 即可求得结果.

180° , $\therefore \angle A + \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{3} \angle A = \frac{11}{6} \angle A = 180^\circ$,
 $\therefore \angle A = \frac{1080^\circ}{11} > \frac{990^\circ}{11} = 90^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形. 综上, 能确定 $\triangle ABC$ 是直角三角形的条件有①②③, 共 3 个, 故选 B.

10. D 【解析】如图, $\therefore OA + OB > AB$, $OB + OC > BC$, $OC + OA > AC$, $\therefore 2(OA + OB + OC) > AB + BC + AC$, $\therefore 2S_1 > S_2$. 延长 BO 交 AC 于点 G . $\therefore AB + AG > BO + OG$, $OG + GC > OC$, $\therefore AB + AC > OB + OC$, 同理可得, $AB + BC > OA + OC$, $AC + BC > OA + OB$, $\therefore 2(AB + BC + AC) > 2(OA + OB + OC)$, $\therefore S_2 > S_1$, $\therefore S_2 < 2S_1 < 2S_2$. 故选 D.



11. 1 【解析】根据三角形具有稳定性可知, 要使这个木架不变形, 他至少要再钉上 1 根木条, 故答案为 1.

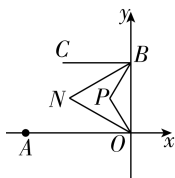
12. $2b - 2c$ 【解析】 $\therefore \triangle ABC$ 的三边长分别是 a, b, c , $\therefore a + b > c$, $b - a < c$, $\therefore a + b - c > 0$, $b - a - c < 0$, $\therefore |a + b - c| - |b - a - c| = a + b - c - (-b + a + c) = a + b - c + b - a - c = 2b - 2c$. 故答案为 $2b - 2c$.

13. $0^\circ < \angle ADE < 45^\circ$ 或 $90^\circ < \angle ADE \leq 95^\circ$
【解析】 $\therefore \angle B = 50^\circ$, $\angle C = 40^\circ$, $\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 90^\circ$. $\therefore AD$ 平分 $\angle BAC$, $\therefore \angle DAE = 45^\circ$, $\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle DAE - \angle C = 95^\circ$. 当 $\angle ADE$ 是钝角时, $90^\circ < \angle ADE \leq 95^\circ$. 当 $\angle AED$ 是钝角时, $\angle AED > 90^\circ$. $\therefore \angle AED = 180^\circ - \angle DAE - \angle ADE = 180^\circ - 45^\circ - \angle ADE = 135^\circ - \angle ADE$, $\therefore 135^\circ - \angle ADE > 90^\circ$, $\therefore 0^\circ < \angle ADE < 45^\circ$. 综上, $0^\circ < \angle ADE < 45^\circ$ 或 $90^\circ < \angle ADE \leq 95^\circ$.

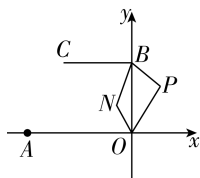
14. $\angle BNO + \frac{1}{2} \angle BPO = 180^\circ$ 或 $\angle BPO = 2\angle BNO$

【解析】① 如图 (1), 当点 P 在 OB 左侧时, $\angle BPO = 2\angle BNO$. 理由如下: 在 $\triangle BPO$ 中, $\angle PBO + \angle POB = 180^\circ - \angle BPO$. 由题可知 $BC \parallel OA$, BN 平分 $\angle CBP$, ON 平分 $\angle AOP$, $\therefore \angle NBP + \angle NOP = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle BPO -$

$\angle POB$). 在 $\triangle NOB$ 中, $\angle BNO = 180^\circ - (\angle NBP + \angle NOP + \angle PBO + \angle POB) = 180^\circ - \left[\frac{1}{2}(180^\circ - \angle PBO - \angle POB) + \angle PBO + \angle POB \right] = 90^\circ - \frac{1}{2}(\angle PBO + \angle POB) = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BPO) = \frac{1}{2}\angle BPO$, $\therefore \angle BPO = 2\angle BNO$.



图(1)



图(2)

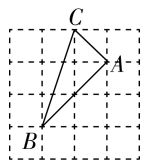
②如图(2), 当点 P 在 OB 右侧时, $\angle BNO + \frac{1}{2}\angle BPO = 180^\circ$. 理由如下: $\because BC \parallel OA$, \therefore 易得 $\angle CBP + \angle AOP + \angle BPO = 360^\circ$. $\because BN$ 平分 $\angle CBP$, ON 平分 $\angle AOP$, $\therefore \angle PBN + \angle PON + \frac{1}{2}\angle BPO = \frac{1}{2} \times 360^\circ = 180^\circ$, $\therefore \angle PBN + \angle PON = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BPO$. 在四边形 $BNOP$ 中, $\angle BNO = 360^\circ - \angle PBN - \angle PON - \angle BPO = 360^\circ - \left(180^\circ - \frac{1}{2}\angle BPO\right) - \angle BPO = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BPO$, $\therefore \angle BNO + \frac{1}{2}\angle BPO = 180^\circ$. 综上, $\angle BPO$ 与 $\angle BNO$ 之间的数量关系为 $\angle BNO + \frac{1}{2}\angle BPO = 180^\circ$ 或 $\angle BPO = 2\angle BNO$.

易错警示

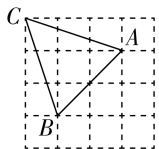
没有说明 $\triangle BDE$ 中哪个角是直角, 需要分 $\angle BED = 90^\circ$ 或 $\angle BDE = 90^\circ$ 两种情况讨论, 避免漏解.

易错警示

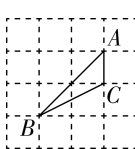
需要对点 P 的位置进行分类讨论: ①点 P 在 OB 的左侧; ②点 P 在 OB 的右侧. 避免漏解.



图(1)



图(2)



图(3)

16. 【解】(1) $\because DE \parallel AC$, $\therefore \angle BED = \angle BAC$. $\because \angle BAC = \angle ADC$, $\therefore \angle BED = \angle ADC$. $\because \angle BED = \angle EAD + \angle ADE$, $\angle ADC = \angle B + \angle BAD$, $\therefore \angle ADE = \angle B = 35^\circ$.

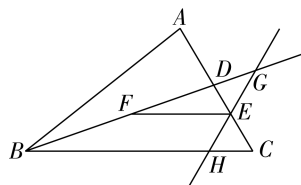
(2) 当 $\angle BED$ 的度数是 90° 时, $\triangle BDE$ 是直角三角形. 当 $\angle BDE = 90^\circ$, 则 $\angle BED = 90^\circ -$

$35^\circ = 55^\circ$ 时, $\triangle BDE$ 是直角三角形. 综上, 当 $\angle BED$ 的度数是 90° 或 55° 时, $\triangle BDE$ 是直角三角形. 故答案为 90° 或 55° .

17. 【解】(1) ① $\because \angle ABC = 40^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, \therefore 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 180^\circ - \angle ABC - \angle C = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$. $\because EF \parallel BC$, $\therefore \angle EFB = \angle FBC$. $\because BD$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle FBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 20^\circ$, $\therefore \angle EFB = \angle FBC = 20^\circ$, 故答案为 $80^\circ, 20^\circ$.

② $\angle BGE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$. 理由: $\because \angle BGE$ 是 $\triangle EGF$ 的一个外角, $\therefore \angle BGE = \angle EFG + \angle FEG$. $\because EF \parallel BC$, $\therefore \angle C = \angle DEF$. $\because \angle ABC + \angle C = 180^\circ - \angle A$, $\therefore \angle ABC + \angle DEF = 180^\circ - \angle A$. $\because BD$ 平分 $\angle ABC$, EG 平分 $\angle CEF$, $\therefore \angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle FEG = \frac{1}{2}\angle DEF$, $\therefore \angle CBD + \angle FEG = \frac{1}{2}\angle ABC + \frac{1}{2}\angle DEF = \frac{1}{2} \times (180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$. $\because EF \parallel BC$, $\therefore \angle EFG = \angle CBD$, $\therefore \angle EFG + \angle FEG = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$, $\therefore \angle BGE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.

(2) $\angle BGE = \frac{1}{2}\angle A$. 如图, 设 $\angle CEF$ 的平分线与 BC 交于点 H .



$\because EF \parallel BC$, $\therefore \angle FEH = \angle EHC$. $\because EH$ 是 $\angle FEC$ 的平分线, $\therefore \angle FEH = \angle HEC$, $\therefore \angle HEC = \angle EHC$, $\therefore \angle EHC = \frac{180^\circ - \angle C}{2}$. $\because BG$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle GBC = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\therefore \angle BGE = \angle EHC - \angle GBC = \frac{180^\circ - \angle C}{2} - \frac{1}{2}\angle ABC = \frac{180^\circ - \angle C - \angle ABC}{2} = \frac{1}{2}\angle A$.