

# 第十五章 轴对称

## 15.1 图形的轴对称


### 15.1.1 轴对称及其性质

#### 刷基础

1. **A** 【解析】选项 B、C、D 找不到这样的一条直线,使图形沿这条直线折叠后,直线两旁的部分能够互相重合,所以不是轴对称图形;选项 A 能找到这样的一条直线,使图形沿这条直线折叠后,直线两旁的部分能够互相重合,所以是轴对称图形,故选 A.

2. **C** 【解析】A 选项,有无数条对称轴;B 选项,有 2 条对称轴;C 选项,有 1 条对称轴;D 选项,有 3 条对称轴. 故选 C.

3. **A** 【解析】根据镜面对称的特征,可知小球在平面镜中的像是以 1 cm/s 的速度,竖直向下运动. 故选 A.

4. **A** 【解析】根据两个图形成轴对称的定义可得小手盖住的三角形是 , 故选 A.

5. **A** 【解析】题图中阴影部分的面积为正方形 ABCD 面积的一半,∴ 题图中阴影部分的面积为  $\frac{1}{2} \times 2^2 = 2$ . 故选 A.

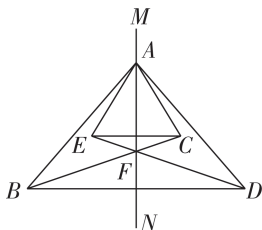
6. **D** 【解析】∵  $\triangle ABC$  和  $\triangle A'B'C'$  关于直线  $l$  对称,∴  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ , ①正确;  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ , ②正确; 直线  $l$  垂直平分  $CC'$ , ③正确; 直线  $BC$  和  $B'C'$  的交点一定在直线  $l$  上, ④不正确. 故选 D.

7. (1) D  $\angle C$  (2) 3 (3)  $EC \parallel BD$

【解析】(1) 点 B 的对应点是点 D,  $\angle E$  的对应角是  $\angle C$ , 故答案为 D,  $\angle C$ .

(2) ∵ 由对称知  $DF = BF = 6$ , ∴  $EF = ED - DF = 9 - 6 = 3$ .

(3) 如图, ∵ 由对称可知  $MN \perp EC$ ,  $MN \perp DB$ , ∴  $EC \parallel BD$ .

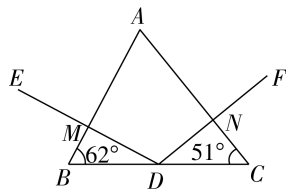


**技巧点拨**  
确定一个图形是不是轴对称图形,关键是确定对称轴,如果能找到对称轴,就是轴对称图形,否则就不是轴对称图形.

**归纳总结**  
如果两个图形关于某条直线对称,那么对称轴是任何一对对应点所连 line 段的垂直平分线,两个图形的对应 line 段,对应角分别相等.

不符,故选 C.

2. **A** 【解析】如图,设  $AB$  与  $ED$  交于点  $M$ ,  $AC$  与  $DF$  交于点  $N$ . ∵ 分别以  $AB, AC$  所在直线为对称轴,画出点  $D$  的对称点  $E, F$ , ∴  $AB \perp ED, AC \perp DF$ , ∴  $\angle BMD = \angle DNC = 90^\circ$ . 在  $Rt \triangle BDM$  中,  $\angle ABD = 62^\circ$ , ∴  $\angle BDM = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$ . 在  $Rt \triangle CDN$  中,  $\angle ACD = 51^\circ$ , ∴  $\angle CDN = 90^\circ - \angle ACD = 90^\circ - 51^\circ = 39^\circ$ , ∴  $\angle EDF = 180^\circ - \angle BDM - \angle CDN = 180^\circ - 28^\circ - 39^\circ = 113^\circ$ . 故选 A.



3. 9.6

**思路分析** | 利用轴对称的性质解决最值问题

连接  $CP$ . 点  $P$  关于直线  $AC, BC$  对称的点分别为  $P_1, P_2$

$CP_1 = CP = CP_2$ ;  $\angle P_1CA = \angle PCA, \angle P_2CB = \angle PCB$

$P_1, C, P_2$  三点共线

$P_1P_2 = 2CP$ , 求  $CP$  的最小值

由垂线段最短, 转化为求  $AB$  边上的高

利用  $S_{Rt\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CP = \frac{1}{2} AC \cdot BC$ ,

且  $AB = 10, AC = 8, BC = 6$

【解析】如图, 连接  $CP$ . ∵ 点  $P$  关于直线  $AC, BC$  对称的点分别为

$P_1, P_2$ , ∴  $P_1C = PC =$

$P_2C, \angle P_1CA = \angle PCA,$

$\angle P_2CB = \angle PCB,$

∴  $\angle P_1CP_2 = 2\angle ACB = 180^\circ$ , ∴  $P_1, C, P_2$  三点共线, ∴  $P_1P_2 = 2CP$ . 当  $CP \perp AB$  时,  $CP$  的长最小, 此时线段  $P_1P_2$  的长最小. ∵  $\angle ACB =$

$90^\circ, BC = 6, AC = 8, AB = 10$ , ∴  $CP = \frac{AC \times BC}{AB} =$

$4.8$ , ∴ 线段  $P_1P_2$  的长的最小值是 9.6.

4.  $(-2\ 025, -2\ 021)$  【解析】∵ 直线  $m$  上各点的横坐标都为 0, ∴ 直线  $m$  为直线  $x = 0$ , ∴ 点  $A_0(-1, 3)$  关于直线  $m$  的对称点为  $A_1(1, 3)$ , 在第一象限. ∴ 直线  $n$  上各点的纵坐标都为

#### 刷提升

1. **C** 【解析】先由轴对称的定义, 判断每条虚线两侧的图形是否成轴对称, 由此得 C, D 两项满足, 但 D 选项的基本图形的  $\angle$  位置与题意

1,  $\therefore$  直线  $n$  为直线  $y=1$ ,  $\therefore$  点  $A_1(1,3)$  关于直线  $y=1$  的对称点为  $A_2(1,-1)$ , 在第四象限.  
 $\because$  直线  $p$  上各点的横坐标都为  $-2$ ,  $\therefore$  直线  $p$  为直线  $x=-2$ ,  $\therefore$  点  $A_2(1,-1)$  关于直线  $p$  的对称点为  $A_3(-5,-1)$ , 在第三象限.  $\because$  直线  $q$  上各点的纵坐标都为  $3$ ,  $\therefore$  直线  $q$  为直线  $y=3$ ,  $\therefore$  点  $A_3(-5,-1)$  关于直线  $q$  的对称点为  $A_4(-5,7)$ , 在第二象限.  $\because A_4(-5,7)$  与  $A_5$  关于直线  $m$  (即直线  $x=0$ ) 对称,  $\therefore A_5(5,7)$ , 在第一象限.  $\because A_5(5,7)$  与  $A_6$  关于直线  $n$  (即直线  $y=1$ ) 对称,  $\therefore A_6(5,-5)$ , 在第四象限.  $\because A_6(5,-5)$  与  $A_7$  关于直线  $p$  (即直线  $x=-2$ ) 对称,  $\therefore A_7(-9,-5)$ , 在第三象限.  $\cdots$ , 按此规律, 每四个点所在象限为一个循环.  $\because 2\ 023 = 4 \times 505 + 3$ ,  $\therefore$  点  $A_{2\ 023}$  与点  $A_3$  在同一象限. 又  $\because A_3(-5,-1), A_7(-9,-5), \cdots$ ,  $\therefore$  第三象限的点  $A_n$  坐标的特征为横坐标为  $-(n+2)$ , 纵坐标为  $-(n-2)$ ,  $\therefore$  点  $A_{2\ 023}$  的横坐标为  $-(2\ 023+2) = -2\ 025$ , 纵坐标为  $-(2\ 023-2) = -2\ 021$ ,  $\therefore A_{2\ 023}$  的坐标是  $(-2\ 025, -2\ 021)$ .

关键点拨

根据这些点的坐标推导一般性规律是解题的关键.

刷素养

5. 【解】(1) ①  $\because$  点  $A$  坐标为  $(2,1), 2>1$ ,  $\therefore$  点  $A$  作变换 1 后的点的坐标为  $(1,2)$ , 故答案为  $(1,2)$ .

② 若点  $Q$  作变换 1 后的点的坐标为  $(-1,2)$ , 则点  $Q$  的坐标为  $(2,-1)$ ; 若点  $Q$  作变换 2 后的点的坐标为  $(-1,2)$ , 则两点关于直线  $y=-1$  对称,  $\therefore$  点  $Q$  的坐标为  $(-1,-4)$ . 故点  $Q$  的坐标为  $(2,-1)$  或  $(-1,-4)$ .

(2)  $\because B(m,1), C(m,3)$ ,  $\therefore$  设线段  $BC$  上的点为  $M(m,n)$ , 则  $1 \leq n \leq 3, M(m,n)$  关于直线  $y=m$  的对称点的坐标为  $(m, 2m-n)$ .

①  $\because$  点  $(m,n)$  作变换 2,  $\therefore |n| \geq |m|$ ,  $\therefore -1 \leq m \leq 1$ .  $\because$  线段  $BC$  上所有的点通过变换 2 所得图形在  $x$  轴下方,  $\therefore 2m-n < 0$ .  $\therefore n$  的最小值为 1,  $\therefore 2m < 1$ , 即  $m < \frac{1}{2}$ ,  $\therefore -1 \leq m < \frac{1}{2}$ . 故答案为  $-1 \leq m < \frac{1}{2}$ .

②  $\because$  正方形内部 (含边) 同时存在线段  $BC$  上点的两种变换点, 则线段  $BC$  与第二、四象限的角平分线或第一、三象限的角平分线有交点,  $\therefore -3 \leq m < -1$  或  $1 < m \leq 3$ .

当  $M(m,n)$  在第二、四象限的角平分线上时,  $n=-m$ .  $M$  经过变换 2 得到的点在直线  $y=-4$  上时,  $n-m = m - (-4)$ ,  $\therefore n = 2m+4$ . 又  $\because n =$

思路分析

根据线段垂直平分线的性质可得  $AP=BP, AQ=QC$ , 分两种情况: 当点  $P$  在点  $Q$  的左侧时, 当点  $P$  在点  $Q$  的右侧时, 根据三角形的周长公式即可得到结果.

$$-m, \therefore m = -\frac{4}{3}, \therefore -\frac{4}{3} \leq m < -1.$$

综上所述,  $-\frac{4}{3} \leq m < -1$  或  $1 < m \leq 3$ . 故答案为  $-\frac{4}{3} \leq m < -1$  或  $1 < m \leq 3$ .

## 15.1.2 线段的垂直平分线

### 课时 1 线段的垂直平分线的性质及判定



刷基础

1. C 【解析】 $\because$  中转仓到  $A, B, C$  三地的距离相等,  $\therefore$  中转仓的位置应选在  $\triangle ABC$  三边的垂直平分线的交点处, 故选 C.

2. B 【解析】 $\because DE$  是  $AB$  的垂直平分线,  $\therefore EA = EB, AD = BD = \frac{1}{2} AB$ .  $\because \triangle BCE$  的周长是 14 cm,  $\therefore BC + BE + EC = 14$  cm, 即  $AC + BC = 14$  cm.  $\because \triangle ABC$  的周长是 22 cm,  $\therefore AB + AC + BC = 22$  cm,  $\therefore AB = 22 - 14 = 8$  (cm),  $\therefore BD = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 8 = 4$  (cm). 故选 B.

3. 10 或 14 【解析】当点  $P$  在点  $Q$  的左侧时, 如图 (1). 由线段垂直平分线的性质可得,  $AP = BP, AQ = QC$ ,  $\therefore \triangle AQP$  的周长为  $AP + AQ + PQ = BP + QC + PQ = BC = 10$ .

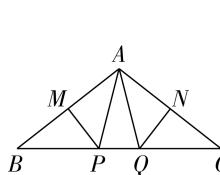


图 (1)

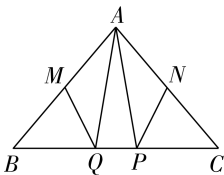
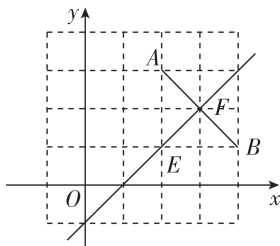


图 (2)

当点  $P$  在点  $Q$  的右侧时, 如图 (2). 由线段垂直平分线的性质可得,  $AP = BP, AQ = QC$ ,  $\therefore \triangle AQP$  的周长为  $AP + AQ + PQ = BP + QC + PQ = BP + CP + PQ + PQ = BC + 2PQ = 10 + 4 = 14$ . 综上所述,  $\triangle AQP$  的周长为 10 或 14, 故答案为 10 或 14.

4. B 【解析】 $\because AC = AD, BC = BD$ ,  $\therefore$  点  $A, B$  均在  $CD$  的垂直平分线上,  $\therefore AB$  垂直平分  $CD$ . 故选 B.

5.  $(1,0)$  或  $(0,-1)$  【解析】如图, 取格点  $E(2,1), F(3,2)$ , 作直线  $EF$ , 则点  $F$  为  $AB$  的中点,  $AE = BE = 2$ ,  $\therefore AF = BF$ ,  $\therefore$  点  $E, F$  都在线段  $AB$  的垂直平分



线上,  $\therefore$  直线  $EF$  是线段  $AB$  的垂直平分线. 根据图易得直线  $EF$  与  $x$  轴交于点  $(1,0)$ , 与  $y$  轴交于点  $(0,-1)$ .  $\therefore$  点  $P$  到点  $A$  和点  $B$  的距离相等,  $\therefore$  点  $P$  在线段  $AB$  的垂直平分线  $EF$  上,  $\therefore$  点  $P$  的坐标为  $(1,0)$  或  $(0,-1)$ , 故答案为  $(1,0)$  或  $(0,-1)$ .

6. (1) 【证明】 $\because AD$  平分  $\angle BAC$ ,  $DE \perp AB$ ,  $DF \perp AC$ ,  $\therefore \angle EAD = \angle FAD$ ,  $\angle DEA = \angle DFA = 90^\circ$ ,  $DE = DF$ ,  $\therefore$  点  $D$  在  $EF$  的垂直平分线上. 在

$$\triangle AED \text{ 和 } \triangle AFD \text{ 中, } \begin{cases} \angle DEA = \angle DFA, \\ \angle EAD = \angle FAD, \\ AD = AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle AFD$  (AAS),  $\therefore AE = AF$ ,  $\therefore$  点  $A$  在  $EF$  的垂直平分线上,  $\therefore AD$  垂直平分  $EF$ .

(2) 【解】 $\because DE = 3$ ,  $\therefore DF = DE = 3$ .  $\because AB + AC = 10$ ,  $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot DE + \frac{1}{2}AC \cdot DF = \frac{1}{2}(AB + AC) \cdot DE = 15$ .

7. A 【解析】“直角都相等”的题设是“两个角是直角”, 结论是“这两个角相等”; “相等的角是直角”的题设是“两个角相等”, 结论是“这两个角是直角”, 这两个命题的题设和结论互换, 所以是互逆命题. “相等的角是直角”是假命题, 所以“直角都相等”与“相等的角是直角”不是互逆定理. 故选 A.

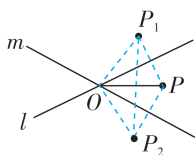
8. 【解】(1) ①“相等的角是内错角”的逆命题: 如果两个角是内错角, 那么这两个角相等.

②“如果  $a+b>0$ , 那么  $ab>0$ ”的逆命题: 如果  $ab>0$ , 那么  $a+b>0$ .

(2) 因为(1)中①的原命题与逆命题都是假命题, 所以(1)中①的原命题和逆命题不是互逆定理.

### 刷提升

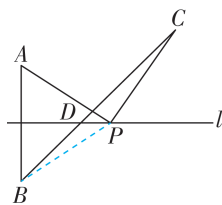
1. B 【解析】如图, 连接  $OP_1, OP_2, P_1P_2, PP_1, PP_2$ .  $\because$  点  $P$  关于直线  $l, m$  的对称点分别是点  $P_1, P_2$ ,  $\therefore$  直线  $l$  垂直平分  $PP_1$ , 直线  $m$  垂直平分  $PP_2$ ,  $\therefore OP_1 = OP = OP_2 = 2$ . 8. 根据三角形三边关系定理可知  $OP_1 - OP_2 < P_1P_2 < OP_1 + OP_2$ , 即  $0 < P_1P_2 < 5.6$ , 故选 B.



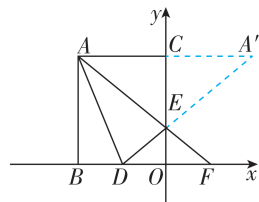
### 思路分析

利用线段垂直平分线的性质可得  $AP = BP$ , 进而可得  $AP + PC = BP + PC$ , 再根据三角形三边关系及  $P$  点位置即可确定结论.

2. B 【解析】如图, 连接  $BP$ .  $\because$  直线  $l$  是线段  $AB$  的垂直平分线,  $\therefore AP = BP$ ,  $\therefore AP + PC = BP + PC$ .  $\because$  点  $P$  不与点  $D$  重合,  $\therefore AP + PC = BP + PC > BC$ . 故选 B.



(第2题图)



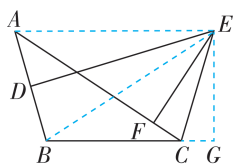
(第3题图)

3. C 【解析】 $\because$  长方形  $ABOC$  的顶点  $A$  的坐标为  $(-4,5)$ ,  $D$  是  $OB$  的中点,  $\therefore AB \perp BO$ ,  $OC \perp AC$ ,  $\therefore AB = 5$ ,  $OB = 4$ ,  $\therefore OD = \frac{1}{2}OB = 2$ . 如图, 作点  $A$  关于  $y$  轴的对称点  $A'$ , 连接  $A'E$ . 由轴对称的性质可得  $A'C = AC$ .  $\because OC \perp AC$ ,  $\therefore CO$  垂直平分  $AA'$ ,  $\therefore AE = A'E$ ,  $\therefore \triangle ADE$  的周长  $= AD + AE + DE = AD + A'E + DE$ ,  $\therefore$  当  $A', E, D$  三点在同一条直线上时,  $A'E + DE$  的值最小, 即  $\triangle ADE$  的周长最小, 易得此时  $OF = OD = 2$ ,  $\therefore DF = OD + OF = 4$ ,  $\therefore \triangle ADF$  的面积是  $\frac{1}{2}DF \cdot$

$AB = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$ , 故选 C.

### 思路分析

连接  $AE, BE$ , 过点  $E$  作  $EG \perp BC$  交  $BC$  的延长线于点  $G$ .  $\because D$  是  $AB$  的中点,  $DE \perp AB$ ,  $\therefore DE$  垂直平分线段  $AB$ ,  $\therefore AE = BE$ .  $\because \angle ACE + \angle BCE = 180^\circ$ ,  $\angle ECG + \angle BCE = 180^\circ$ ,  $\therefore \angle ACE = \angle ECG$ ,  $\therefore CE$  是  $\angle ACG$  的平分线.  $\because EF \perp AC$ ,  $EG \perp BC$ ,  $\therefore EF = EG$ . 又  $\because CE = CE$ ,  $\therefore \text{Rt} \triangle EFC \cong \text{Rt} \triangle EGC$  (HL),  $\therefore CF = CG$ . 在  $\text{Rt} \triangle AEF$  和  $\text{Rt} \triangle BEG$  中,  $\begin{cases} EA = EB, \\ EF = EG, \end{cases}$   $\therefore \text{Rt} \triangle AEF \cong \text{Rt} \triangle BEG$  (HL),  $\therefore AF = BG$ . 设  $CF = CG = x$ , 则  $AF = AC - CF = 6 - x$ ,  $BG = BC + CG = 4 + x$ ,  $\therefore 6 - x = 4 + x$ , 解得  $x = 1$ ,  $\therefore AF = 6 - 1 = 5$ .



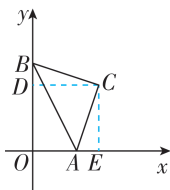
4. 5 【解析】如图, 连接  $AE, BE$ , 过点  $E$  作  $EG \perp BC$  交  $BC$  的延长线于点  $G$ .  $\because D$  是  $AB$  的中点,  $DE \perp AB$ ,  $\therefore DE$  垂直平分线段  $AB$ ,  $\therefore AE = BE$ .

$\because \angle ACE + \angle BCE = 180^\circ$ ,  $\angle ECG + \angle BCE = 180^\circ$ ,  $\therefore \angle ACE = \angle ECG$ ,  $\therefore CE$  是  $\angle ACG$  的平分线.  $\because EF \perp AC$ ,  $EG \perp BC$ ,  $\therefore EF = EG$ . 又  $\because CE = CE$ ,  $\therefore \text{Rt} \triangle EFC \cong \text{Rt} \triangle EGC$  (HL),  $\therefore CF = CG$ .

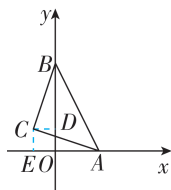
在  $\text{Rt} \triangle AEF$  和  $\text{Rt} \triangle BEG$  中,  $\begin{cases} EA = EB, \\ EF = EG, \end{cases}$   $\therefore \text{Rt} \triangle AEF \cong \text{Rt} \triangle BEG$  (HL),  $\therefore AF = BG$ . 设  $CF = CG = x$ , 则  $AF = AC - CF = 6 - x$ ,  $BG = BC + CG = 4 + x$ ,  $\therefore 6 - x = 4 + x$ , 解得  $x = 1$ ,  $\therefore AF = 6 - 1 = 5$ .

5. (6,6) 或  $(-2,2)$  【解析】分两种情况: (1) 如图(1)所示, 过点  $C$  作  $CD \perp OB$  于  $D$ ,  $CE \perp x$  轴于  $E$ .  $\because \angle BCA = \angle DCE = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle BCD = \angle ACE = 90^\circ - \angle ACD$ .  $\because$  点  $C$  在  $AB$  的垂直平分线上,  $\therefore BC = AC$ . 在  $\triangle BCD$  与  $\triangle ACE$  中,

$\begin{cases} \angle BDC = \angle AEC = 90^\circ, \\ \angle BCD = \angle ACE, \\ BC = AC, \end{cases} \therefore \triangle BCD \cong \triangle ACE$   
 (AAS),  $\therefore AE = BD, CE = CD = OE$ .  $\because OA = 4, OB = 8, \therefore 4 + AE = 8 - AE, \therefore AE = 2, \therefore OE = OD = 6$ , 则点  $C$  坐标为  $(6, 6)$ .



图(1)



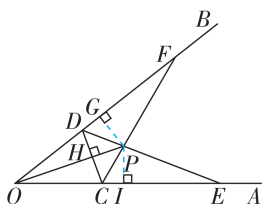
图(2)

如图(2)所示,过点  $C$  作  $CD \perp OB$  于  $D, CE \perp x$  轴于  $E$ .  $\because \angle BCA = \angle DCE = 90^\circ, \therefore \angle BCD = \angle ACE = 90^\circ - \angle ACD$ .  $\because$  点  $C$  在  $AB$  的垂直平分线上,  $\therefore BC = AC$ . 在  $\triangle BCD$  与  $\triangle ACE$  中,

$\begin{cases} \angle BDC = \angle AEC = 90^\circ, \\ \angle BCD = \angle ACE, \\ BC = AC, \end{cases} \therefore \triangle BCD \cong \triangle ACE$   
 (AAS),  $\therefore AE = BD, CE = CD = OE, \therefore 4 + OE = 8 - OE, \therefore OE = 2$ , 则点  $C$  坐标为  $(-2, 2)$ . 综上所述可知点  $C$  坐标为  $(6, 6)$  或  $(-2, 2)$ . 故答案为  $(6, 6)$  或  $(-2, 2)$ .

6. (1) 【证明】 $\because$  点  $P$  在  $\angle AOB$  的平分线上,  $\therefore \angle EOP = \angle FOP$ . 又  $\because \angle OFP = \angle OEP, OP = OP, \therefore \triangle OFP \cong \triangle OEP$  (AAS),  $\therefore PF = PE$ .

(2) 【解】①如图,过点  $P$  作  $OA, OB, CD$  的垂线,垂足分别为  $I, G, H$ .



$\because$  点  $P$  在  $\angle AOB$  的平分线上,  $\therefore PG = PI$ .  
 $\because DP$  平分  $\angle CDB, \therefore PG = PH, \therefore PH = PI, \therefore CP$  平分  $\angle ACD$ .  
 ②由(1)得  $\triangle OFP \cong \triangle OEP, \therefore OF = OE$ . 又  $\because \angle OFC = \angle OED, \angle FOC = \angle EOD, \therefore \triangle FOC \cong \triangle EOD$  (ASA),  $\therefore OD = OC, DE = CF$ .  $\because PF = PE, \therefore PD = PC, \therefore OP$  是线段  $CD$  的垂直平分线, 则点  $H$  是  $OP$  与  $CD$  的交点.  $\because CD = 2, S_{\triangle PCD} = 2, \therefore \frac{1}{2} \times CD \times PH = 2, \therefore PH = 2, \therefore PH = PI = 2$ , 即点  $P$  到射线  $OA$  的距离为 2.

## 刷素养

### 思路分析

7. 【解】(1) 当  $x = 5$  时, 点  $E$  在线段  $CD$  的垂直平分线上. 理由: 当  $x = 5$  时,  $AE = 2 \times 5 = 10$  (cm).  $\therefore AB = 25$  cm,  $DA = 15$  cm,  $CB = 10$  cm,  $\therefore BE = AD = 15$  cm,  $AE = BC = 10$  cm. 在  $\triangle ADE$  和  $\triangle BEC$  中,

$\begin{cases} AD = BE, \\ \angle A = \angle B, \\ AE = BC, \end{cases} \therefore \triangle ADE \cong \triangle BEC$  (SAS),  $\therefore DE = CE, \therefore$  点  $E$  在线段  $CD$  的垂直平分线上. 故当  $x = 5$  时, 点  $E$  在线段  $CD$  的垂直平分线上.

(2)  $DE$  与  $CE$  的位置关系是  $DE \perp CE$ . 理由:  $\because \triangle ADE \cong \triangle BEC, \therefore \angle ADE = \angle CEB$ .  $\because \angle A = 90^\circ, \therefore \angle ADE + \angle AED = 90^\circ, \therefore \angle AED + \angle CEB = 90^\circ, \therefore \angle DEC = 180^\circ - (\angle AED + \angle CEB) = 90^\circ, \therefore DE \perp CE$ .

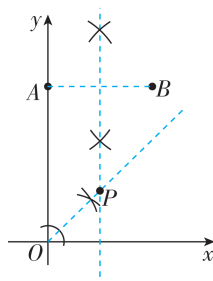
## 课时2 作线段的垂直平分线



### 刷基础

1. D 【解析】 $\because PA + PB = BC, PC + PB = BC, \therefore PA = PC, \therefore$  点  $P$  在  $AC$  的垂直平分线上, 即点  $P$  为  $AC$  的垂直平分线与  $BC$  的交点. 故选 D.
2. 30 【解析】由作法得  $MN$  垂直平分  $AB, \therefore AD = BD, \therefore S_{\triangle ADC} = S_{\triangle BDC} = 24. \therefore S_{\triangle ADE} = 18, \therefore S_{\triangle CDE} = S_{\triangle ADC} - S_{\triangle ADE} = 24 - 18 = 6, \therefore$  四边形  $EDBC$  的面积  $= S_{\triangle CDE} + S_{\triangle BCD} = 6 + 24 = 30$ . 故答案为 30.

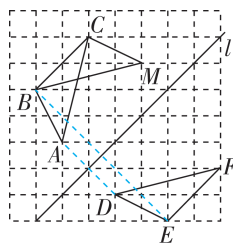
3. 【解】(1) 如图, 点  $P$  即为所求.



(2)  $\because$  点  $A(0, 8),$  点  $B(6, 8), \therefore$  线段  $AB$  中点坐标为  $(3, 8), \therefore$  点  $P$  横坐标为 3.  $\because$  点  $P$  到两坐标轴的距离相等, 点  $P$  在第一象限,  $\therefore P(3, 3)$ . 故答案为  $(3, 3)$ .

### 关键点拨

(2) 用一个长方形的面积减去三个直角三角形的面积可得  $\triangle ABC$  的面积.

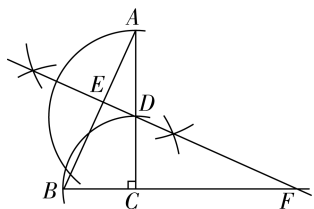




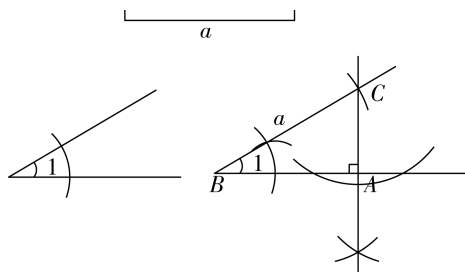
(2)  $\triangle ABC$  的面积为  $2 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \frac{1}{2} \times 4 \times 1 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 3$ . 故答案为 3.

(3) 如图,  $\triangle MBC$  即为以  $BC$  为一边且与  $\triangle ABC$  全等(不与  $\triangle ABC$  重合)的三角形, 这样的三角形在网格内能画 1 个. 故答案为 1.

5. 【解】如图.



6. 【解】如图,  $\text{Rt}\triangle ABC$  即为所求.



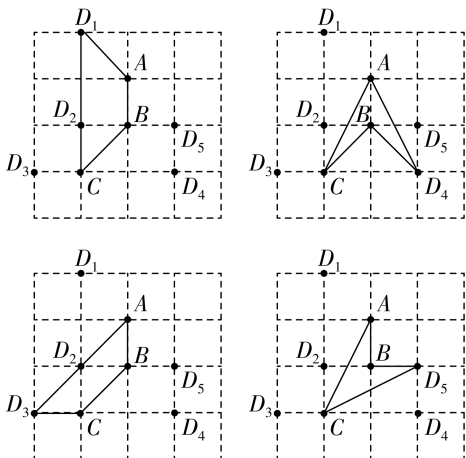
## 15.2 画轴对称的图形

### 课时 1 画轴对称的图形

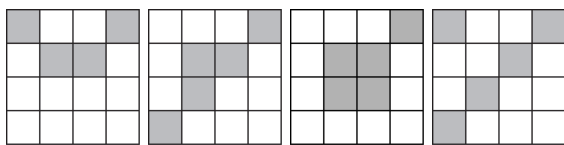
#### 刷基础

1. **C** 【解析】只有第四个图案中的图形沿某条直线折叠后直线两旁的部分能够完全重合, 是轴对称图形, 所以不是利用轴对称设计的图案有 3 个. 故选 C.

2. **4** 【解析】如图,  $D_1, D_3, D_4, D_5$  四点满足题意, 故答案为 4.



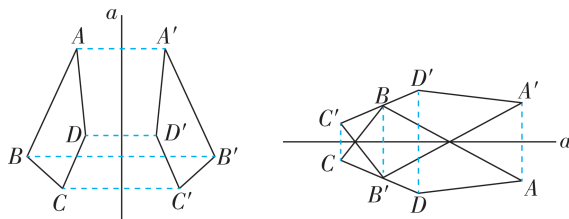
3. 【解】如图(1)、(2)、(3)、(4). (答案不唯一)



图(1) 图(2) 图(3) 图(4)

4. **B** 【解析】作  $\triangle ABC$  关于直线  $MN$  对称的图形正确的是 B 选项, 故选 B.

5. 【解】如图(1)、(2), 四边形  $A'B'C'D'$  即为所求.



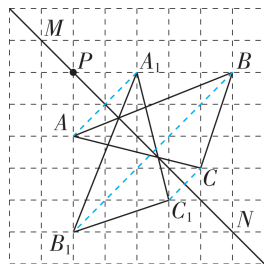
图(1) 图(2)

思路分析 6. 【解】(1) 如图,  $\triangle A_1B_1C_1$  即为所作.

(1) 利用网格特点, 分别画出  $A, B, C$  关于直线  $MN$  的对称点  $A_1, B_1, C_1$  即可.

(2) 由于  $PA = PA_1$ , 则  $|PB - PA| = |PB - PA_1|$ , 而  $|PB - PA_1| \leq A_1B$ , 当点  $P, A_1, B$  共线时取等号, 从而得到  $|PB - PA|$  的最大值.

(2) 如图, 点  $P$  即为所求,  $|PB - PA|$  的最大值为 3.



### 课时 2 轴对称与坐标变化

#### 刷基础

1. **C** 【解析】 $\because$  点  $A$  的坐标为  $(3, 4)$ , 点  $B$  与点  $A$  关于  $y$  轴对称,  $\therefore B(-3, 4)$ ,  $\therefore$  线段  $AB$  的长度为  $3 - (-3) = 6$ . 故选 C.

2. **A** 【解析】 $\because$  小红同学误将点  $A$  的横、纵坐标次序颠倒, 写成  $A(a, b)$ ,  $\therefore$  点  $A$  的正确坐标为  $(b, a)$ .  $\because$  另一学生误将点  $B$  的坐标写成关于  $y$  轴对称的点的坐标, 为  $B(-b, -a)$ ,  $\therefore$  点  $B$  的正确坐标为  $(b, -a)$ ,  $\therefore A, B$  两点原来的位置关系是关于  $x$  轴对称. 故选 A.

3. **A** 【解析】 $\because$  点  $A$  坐标为  $(0, a)$ ,  $\therefore$  点  $A$  在平面直角坐标系的  $y$  轴上.  $\because$  点  $C, D$  的坐标为  $(c, m), (d, m)$ ,  $\therefore$  点  $C, D$  关于  $y$  轴对称.  $\because$  正五边形  $ABCDE$  是轴对称图形,  $\therefore y$  轴是正五边形  $ABCDE$  的一条对称轴,  $\therefore$  点  $B, E$  关于  $y$  轴对称.  $\because$  点  $B$  的坐标为  $(-2, -1)$ ,  $\therefore$  点  $E$  的坐标为  $(2, -1)$ , 故选 A.

#### 思路分析

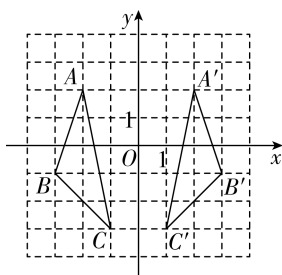
根据坐标的特点, 判定点  $A$  在  $y$  轴上,  $C, D$  关于  $y$  轴对称, 结合正五边形是轴对称图形, 得到  $B, E$  关于  $y$  轴对称, 即可得到答案.

4.  $-2 < m < 1$  【解析】 $\because$  点  $M(m-1, 2m+4)$  关于  $x$  轴对称的点的坐标为  $(m-1, -2m-4)$ , 且点  $(m-1, -2m-4)$  在第三象限,  $\therefore \begin{cases} m-1 < 0, \\ -2m-4 < 0, \end{cases}$  解得  $-2 < m < 1$ , 故答案为  $-2 < m < 1$ .

5. B 【解析】 $\because \triangle ABC$  边上各点的横坐标都乘  $-1$ , 纵坐标不变,  $\therefore$  所得三角形边上各点与  $\triangle ABC$  边上对应点的横坐标互为相反数, 纵坐标相等,  $\therefore$  所得三角形与  $\triangle ABC$  关于  $y$  轴对称. 故选 B.

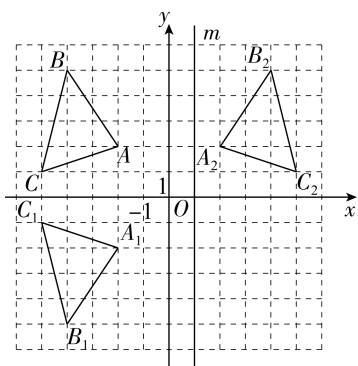
6. 【解】(1) 如图, 平面直角坐标系  $xOy$  即为所求,  $C(-1, -3)$ .

(2) 如图,  $\triangle A'B'C'$  即为所求.



7. (1) 【解】如图所示,  $\triangle A_1B_1C_1$  即为所作, 点  $B_1$  的坐标为  $(-4, -5)$ .

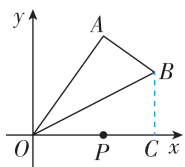
(2) 【解】如图所示,  $\triangle A_2B_2C_2$  即为所作, 点  $B_2$  的坐标为  $(4, 5)$ .



(3)  $(2-a, b)$  【解析】 $\because$  点  $P(a, b)$  是  $\triangle ABC$  内部一点,  $\therefore$  设点  $P$  关于直线  $m$  对称的点  $P'$  的横坐标为  $x$ , 则  $\frac{a+x}{2} = 1$ , 故  $x = 2-a$ ,  $\therefore$  点  $P$  关于直线  $m$  对称的点的坐标是  $(2-a, b)$ .

### 刷提升

1. C 【解析】如图, 过  $B$  点作  $BC \perp x$  轴于点  $C$ .  $\because \angle A = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle A = \angle OCB = 90^\circ$ .  $\because OB$  平分  $\angle AOP$ ,  $\therefore \angle AOB = \angle BOC$ . 又  $\because OB = OB$ ,  $\therefore \triangle OAB \cong \triangle OCB$ ,  $\therefore OC = OA$ , 即  $a-1 = 2$ , 解得  $a = 3$ ,  $\therefore B(2, 1)$ ,



### 关键点拨

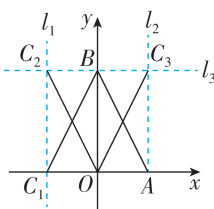
解答本题的关键是要明确点  $B$  对应点的坐标规律: 第  $n$  次变换后, 当  $n$  为奇数时点  $B$  对应点的坐标为  $(1-n, -1)$ , 当  $n$  为偶数时点  $B$  对应点的坐标为  $(1-n, 1)$ .

$\therefore B(2, 1)$  关于  $x$  轴对称的点的坐标是  $(2, -1)$ . 故选 C.

2. B 【解析】 $\because$  正方形  $ABCD$  的顶点  $A$  的坐标为  $(1, 3)$ ,  $AB \parallel y$  轴且  $AB = 2$ ,  $\therefore B(1, 1)$ . 根据题意得, 第 1 次变换后点  $B$  的对应点的坐标为  $(0, -1)$ , 第 2 次变换后点  $B$  的对应点的坐标为  $(-1, 1)$ , 第 3 次变换后点  $B$  的对应点的坐标为  $(-2, -1)$ ,  $\dots$ , 则第  $n$  次变换后, 当  $n$  为奇数时点  $B$  的对应点的坐标为  $(1-n, -1)$ , 当  $n$  为偶数时点  $B$  的对应点的坐标为  $(1-n, 1)$ ,  $\therefore$  连续经过 2 024 次变换后, 正方形  $ABCD$  的顶点  $B$  的对应点的坐标为  $(-2\ 023, 1)$ . 故选 B.

3.  $-1$  或  $1$  2 【解析】如图,

在  $x$  轴负半轴上取点  $C_1$ , 使  $OC_1 = OA$ , 作  $l_1 \perp x$  轴于点  $C_1$ ,  $l_2 \perp x$  轴于点  $A$ ,  $l_3 \perp y$  轴于点  $B$ , 分别交  $l_1, l_2$  于点  $C_2, C_3$ , 易得  $\triangle ABO \cong \triangle C_1BO \cong \triangle C_2OB \cong \triangle C_3OB$ . 因为  $A(1, 0)$ , 所以  $OC_1 = BC_2 = BC_3 = OA = 1$ , 所以  $C_1(-1, 0)$ . 因为  $\angle OBC_2 = \angle OBC_3 = 90^\circ$ ,  $B(0, 2)$ , 所以  $C_2(-1, 2)$ ,  $C_3(1, 2)$ , 所以点  $C$  的横坐标为  $-1$  或  $1$ . 因为  $C_1(-1, 0)$  与  $A(1, 0)$  关于  $y$  轴对称,  $B(0, 2)$ ,  $C_3(1, 2)$  分别与  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 0)$  关于直线  $y = 1$  对称, 所以  $\triangle C_1BO$  与  $\triangle ABO$  关于  $y$  轴对称,  $\triangle C_3OB$  与  $\triangle ABO$  关于直线  $y = 1$  对称, 所以与  $\triangle ABO$  成轴对称的  $\triangle BOC$  有 2 个. 故答案为  $-1$  或  $1, 2$ .

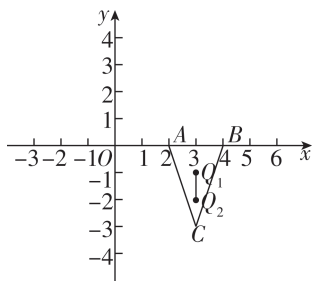


### 刷素养

### 思路分析

4. 【解】(1) ①将点  $B(4, 0)$  关于直线  $x = 1$  对称得到点  $(-2, 0)$ , 再将点  $(-2, 0)$  关于直线  $y = 1$  对称得到点  $(-2, 2)$ , 则点  $B(4, 0)$  关于  $M$  的对应点为点  $(-2, 2)$ . 将点  $C(3, -3)$  关于直线  $x = 1$  对称得到点  $(-1, -3)$ , 再将点  $(-1, -3)$  关于直线  $y = 1$  对称得到点  $(-1, 5)$ , 则点  $C(3, -3)$  关于  $M$  的对应点为点  $(-1, 5)$ , 故答案为  $(-2, 2), (-1, 5)$ .

②点  $P_1(-1, n)$  关于  $M$  的对应点为  $Q_1(3, 2-n)$ , 点  $P_2(-1, n+1)$  关于  $M$  的对应点为  $Q_2(3, 1-n)$ . 如图, 若线段  $Q_1Q_2$  在  $\triangle ABC$  内部, 则只需  $Q_1$  在  $x$  轴下方,  $Q_2$  在  $C(3, -3)$  上方,  $\therefore \begin{cases} 2-n < 0, \\ 1-n > -3, \end{cases}$  解得  $2 < n < 4$ .



(2)  $1 \leq a \leq 2$ . 设点  $D(0, d)$ .  $\therefore M(a, b)$ ,  $\therefore$  点  $D$  关于  $M$  的对应点为  $D'(2a, 2b-d)$ .  $\therefore$  点  $D$  关于  $M$  的对应点恰好落在  $\triangle ABC$  的边上,  $\therefore 2 \leq 2a \leq 4$ ,  $\therefore 1 \leq a \leq 2$ .

### 15.3 等腰三角形

#### 15.3.1 等腰三角形

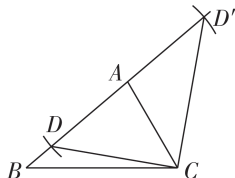
##### 课时 1 等腰三角形的性质

##### 刷基础

1. **C** 【解析】①当  $80^\circ$  的角是顶角时, 两个底角的度数为  $50^\circ, 50^\circ$ ; ②当  $80^\circ$  的角是底角时, 顶角的度数为  $20^\circ$ . 故它的其余两个角的度数为  $50^\circ, 50^\circ$  或  $80^\circ, 20^\circ$ . 故选 C.

2. **D** 【解析】 $\because OA = OB = OC$ ,  $\angle ABC = \angle ADC = 70^\circ$ ,  $\therefore \angle ABO = \angle BAO$ ,  $\angle OBC = \angle OCB$ ,  $\therefore \angle AOB + \angle BOC = 360^\circ - 2(\angle ABO + \angle OBC) = 220^\circ$ ,  $\therefore \angle AOC = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$ .  $\therefore \angle OAD + \angle ADC + \angle OCD + \angle AOC = 360^\circ$ ,  $\therefore \angle DAO + \angle DCO = 150^\circ$ . 故选 D.

3. **C** 【解析】如图. 在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 40^\circ$ ,  $\angle BAC = 80^\circ$ ,  $\therefore \angle ACB = 180^\circ - 40^\circ - 80^\circ = 60^\circ$ .



①由作图可知  $AC = AD$ ,  $\therefore \angle ACD = \angle ADC = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ$ ,  $\therefore \angle BCD = \angle ACB - \angle ACD = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$ ; ②由作图可知  $AC = AD'$ ,  $\therefore \angle ACD' = \angle AD'C$ .  $\therefore \angle ACD' + \angle AD'C = \angle BAC = 80^\circ$ ,  $\therefore \angle AD'C = 40^\circ$ ,  $\therefore \angle BCD' = 180^\circ - \angle ABC - \angle AD'C = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$ . 综上所述,  $\angle BCD$  的度数是  $10^\circ$  或  $100^\circ$ . 故选 C.

4.  $\left(\frac{75}{2^{n-1}}\right)$  【解析】 $\because$  在  $\triangle CBA_1$  中,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $CB = A_1B$ ,  $\therefore \angle BA_1C = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 75^\circ$ .  $\therefore A_1A_2 =$

##### 思路分析

作  $AE \perp BC$  于  $E$ ,  $DF \perp CB$  交  $CB$  的延长线于  $F$ , 根据等腰三角形三线合一的性质, 得出  $CE = BE = \frac{1}{2}BC$ , 证明  $\triangle ABE \cong \triangle BDF$ , 得出  $DF = BE$ , 即可求出  $\triangle BCD$  的面积.

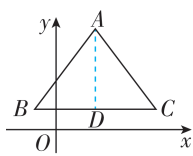
##### 易错警示

本题中未指出腰, 所以需要分腰进行讨论, 避免漏解.

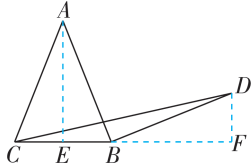
$A_1D$ ,  $\angle BA_1C$  是  $\triangle A_1A_2D$  的外角,  $\therefore \angle DA_2A_1 = \frac{1}{2} \angle BA_1C = \frac{1}{2} \times 75^\circ = 37.5^\circ$ . 同理可得,  $\angle EA_3A_2 = \left(\frac{75}{4}\right)^\circ$ ,  $\angle FA_4A_3 = \left(\frac{75}{8}\right)^\circ$ ,  $\therefore$  第  $n$  个等腰三角形的底角的度数是  $\left(\frac{75}{2^{n-1}}\right)^\circ$ .

5. **D** 【解析】 $\because AB = AC$ ,  $AD \perp BC$  于点  $D$ ,  $\therefore AD$  平分  $\angle BAC$ , 即  $\angle BAD = \angle CAD$ ,  $BD = CD$ , ①③正确;  $\because AD$  平分  $\angle BAC$ ,  $\therefore AD$  上任意一点到  $AB, AC$  的距离相等, ②正确;  $\because AD \perp BC$ ,  $BD = CD$ ,  $\therefore AD$  为  $BC$  的垂直平分线.  $\therefore$  点  $P$  在直线  $AD$  上,  $\therefore PB = PC$ , ④正确. 故选 D.

6. **C** 【解析】过点  $A$  作  $AD \perp BC$  于  $D$ , 如图.  $\because AB = AC$ ,  $AD \perp BC$ ,  $\therefore BD = CD$ .  $\therefore$  点  $A(2, 5)$ ,  $B(-1, 1)$ ,  $BC \parallel x$  轴,  $\therefore$  点  $D(2, 1)$ . 设点  $C(m, 1)$ , 则  $CD = m - 2$ .  $\because BD = 2 - (-1) = 3$ ,  $\therefore m - 2 = 3$ ,  $\therefore m = 5$ ,  $\therefore$  点  $C$  的坐标为  $(5, 1)$ , 故选 C.



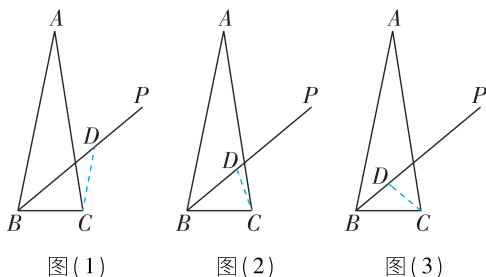
7. **9** 【解析】如图, 作  $AE \perp BC$  于  $E$ , 作  $DF \perp CB$  交  $CB$  的延长线于  $F$ .  $\because AB = AC$ ,  $BC = 6$ ,  $\therefore CE = BE = \frac{1}{2}BC = 3$ .  $\because \angle ABD = 90^\circ$ ,  $DF \perp CB$ ,  $\therefore \angle ABC + \angle DBF = \angle BDF + \angle DBF$ ,  $\therefore \angle ABC = \angle BDF$ .  $\because AE \perp BC$ ,  $\therefore \angle AEB = \angle BFD = 90^\circ$ . 在  $\triangle ABE$  和  $\triangle BDF$  中,  $\begin{cases} \angle ABC = \angle BDF, \\ \angle AEB = \angle BFD, \\ AB = BD, \end{cases} \therefore \triangle ABE \cong \triangle BDF (AAS)$ ,  $\therefore DF = BE = 3$ ,  $\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}BC \cdot DF = \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$ . 故答案为 9.



##### 刷易错

8.  $40^\circ$  或  $70^\circ$  或  $100^\circ$  【解析】①当  $BC = CD$  时, 如图 (1) 所示.  $\because \angle A = 20^\circ$ ,  $AB = AC$ ,  $\therefore \angle ABC = 80^\circ$ .  $\because BP$  平分  $\angle ABC$ ,  $\therefore \angle CBD = 40^\circ$ .  $\because BC = CD$ ,  $\therefore \angle CBD = \angle BDC = 40^\circ$ . ②当  $BD = BC$  时, 如图 (2) 所示. 由①可知  $\angle CBD = 40^\circ$ .  $\because BD = BC$ ,  $\therefore \angle BDC = 70^\circ$ . ③当  $DB = DC$

时,如图(3)所示. 由①可知  $\angle CBD = 40^\circ$ .  
 $\because BD = CD, \therefore \angle BDC = 100^\circ$ . 故答案为  $40^\circ$  或  $70^\circ$  或  $100^\circ$ .

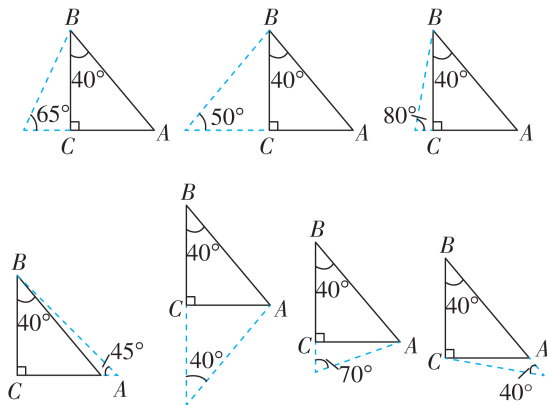


## 课时2 等腰三角形的判定

### 刷基础

1. **B** 【解析】 $\because BD$  是  $\triangle ABC$  的角平分线,  
 $\therefore \angle ABD = \angle EBD$ .  $\because DE \parallel AB, \therefore \angle ABD = \angle EDB$ ,  
 $\therefore \angle EBD = \angle EDB, \therefore DE = BE$ .  $\because CE = 4, DE = 3, \therefore BC = BE + CE = DE + CE = 3 + 4 = 7$ .  
 故选 B.

2. **C** 【解析】如图所示,这样的三角形共有 7 个,故选 C.



3. **5** 【解析】 $\because AB = AC, \angle A = 36^\circ, \therefore \triangle ABC$  是等腰三角形,  
 $\therefore \angle ACB = \angle ABC = 72^\circ$ .  $\because BD$  平分  $\angle ABC$  交  $AC$  于  $E, \therefore \angle ABE = \angle EBC = 36^\circ$ ,  
 $\therefore \angle A = \angle ABE = 36^\circ, \therefore \triangle ABE$  是等腰三角形.  $\because \angle BEC = \angle A + \angle ABE = 72^\circ = \angle ACB$ ,  
 $\therefore \triangle BEC$  是等腰三角形.  $\because CD$  平分  $\angle ACB$ ,  
 $\therefore \angle DCB = 36^\circ. \therefore \angle DBC = \angle DCB = 36^\circ$ ,  
 $\therefore \triangle BCD$  是等腰三角形.  $\because \angle EDC = \angle DBC + \angle DCB = 72^\circ = \angle DEC$ ,  
 $\therefore \triangle CDE$  是等腰三角形,  $\therefore$  共有 5 个等腰三角形.

4. (1) 【解】猜想  $\triangle DOP$  是等腰三角形,故答案为等腰.

(2) 【证明】 $\because OC$  平分  $\angle AOB, \therefore \angle DOP = \angle BOP$ .  
 $\because DN \parallel EM, \therefore \angle DPO = \angle BOP, \therefore \angle DOP = \angle DPO, \therefore OD = PD, \therefore \triangle DOP$  是等

### 关键点拨

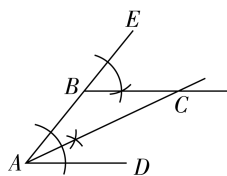
利用三角形的内角和定理、外角性质及角平分线的定义得到各角的度数,根据等腰三角形的判定得出答案.

### 思路分析

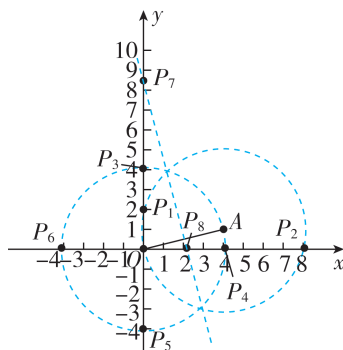
分别作  $BC$  边、 $AB$  边的垂直平分线,由垂直平分线的性质可得等腰三角形,或以点  $B$  为圆心,  $BA$  长为半径画弧交  $BC$  于点  $F$ ,也可得等腰三角形,最后根据三角形的面积公式可得答案.

腰三角形.

5. **C** 【解析】①根据作图得  $\angle A = \angle C$ ,故  $AB = BC$ ,符合题意;②根据作图得  $AB = AC$ ,不符合题意;③如图. 根据作图得  $AC$  平分  $\angle BAD, BC \parallel AD$ ,  
 $\therefore \angle BAC = \angle CAD, \angle BCA = \angle CAD, \therefore \angle BAC = \angle BCA, \therefore BA = BC$ ,符合题意;④根据作图得  $CA = CB$ ,不符合题意,故符合题意的有①③,故选 C.



6. **C** 【解析】如图,①以  $A$  为圆心,  $OA$  长为半径作圆,交坐标轴于  $P_1, P_2$  两点 ( $O$  除外);



②以  $O$  为圆心,  $OA$  长为半径作圆,交坐标轴于  $P_3, P_4, P_5, P_6$  四点;

③作线段  $AO$  的垂直平分线,交坐标轴于  $P_7, P_8$  两点,  $\therefore$  满足条件的点  $P$  有  $2 + 4 + 2 = 8$  (个),故选 C.

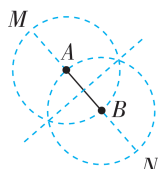
### 刷有所得 | 两圆一中垂构造等腰三角形

如图,已知线段  $AB$ ,在平面内找一点  $C$ ,使得  $\triangle ABC$  为等腰三角形.

①当  $AB = AC$  时,点  $C$  在以点  $A$  为圆心,  $AB$  长为半径的圆上 (不与点  $B, M$  重合);

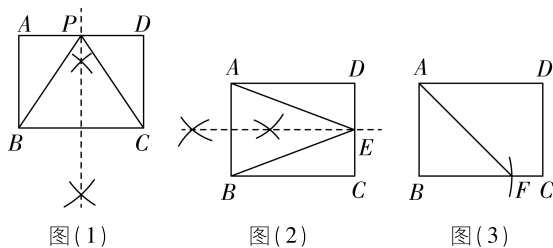
②当  $AB = BC$  时,点  $C$  在以点  $B$  为圆心,  $AB$  长为半径的圆上 (不与点  $A, N$  重合);

③当  $AC = BC$  时,点  $C$  在线段  $AB$  的垂直平分线上 (不在线段  $AB$  上).



7. 【解】如图(1),作  $BC$  边的垂直平分线,交  $AD$  于点  $P, \therefore PB = PC$ ,即  $\triangle PBC$  为等腰三角形,  
 $\triangle PBC$  的面积为  $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 (\text{cm}^2)$ ;

如图(2),作  $AB$  边的垂直平分线,交  $CD$  于点  $E, \therefore EA = EB$ ,即  $\triangle ABE$  为等腰三角形,  $\triangle ABE$  的面积为  $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 (\text{cm}^2)$ ;



图(1)

图(2)

图(3)

如图(3),以点  $B$  为圆心,  $BA$  长为半径画弧,交  $BC$  于点  $F$ ,  $\therefore BA = BF$ , 即  $\triangle ABF$  为等腰三角形,  $\triangle ABF$  的面积为  $\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = 4.5 (\text{cm}^2)$ .

(答案不唯一)

### 刷提升

1. **D** 【解析】延长  $AD$  交  $BC$  于点  $E$ , 如图.  $\therefore BD$  平分  $\angle ABC$ ,  $AD \perp BD$ ,

$\therefore \angle ABD = \angle EBD$ ,  
 $\angle ADB = \angle EDB = 90^\circ$ . 又  $\because BD = BD$ ,  $\therefore \triangle ABD \cong \triangle EBD (\text{ASA})$ ,  
 $\therefore BE = BA = 5$ ,  $AD = ED = 2$ ,  $\therefore AE = 4$ .  $\therefore \angle CAD = \angle C$ ,  $\therefore EC = EA = 4$ ,  $\therefore BC = BE + EC = 9$ . 故选  $D$ .

由角平分线和高重合构造等腰三角形是常用的作辅助线的方法.

2. **B** 【解析】 $\because A(4,0), B(0,3)$ , 且  $AB = 5$ , 当点  $D$  坐标为  $(-3,0)$  时, 只能作以  $PD, PA$  为腰的等腰三角形; 当点  $D$  坐标为  $(-1,0)$  时, 可以作以  $PD, PA$  为腰的等腰三角形, 也可以作以  $AP, AD$  为腰的等腰三角形; 当点  $D$  坐标为  $(5,0)$  时, 只能作以  $AD, PA$  为腰的等腰三角形; 当点  $D$  坐标为  $(9,0)$  时, 只能作以  $AD, PA$  为腰的等腰三角形. 故选  $B$ .

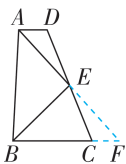
3.  $\frac{9}{2}$  【解析】如图, 延长  $BD, AC$  交于点  $H$ .  $\because AD \perp BH$ ,  $\therefore \angle ADB = \angle ADH = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle ABD + \angle BAD = 90^\circ$ ,  $\angle H + \angle HAD = 90^\circ$ .  $\because AD$  是  $\angle BAC$  的平分线,  $\therefore \angle BAD = \angle HAD$ ,  $\therefore \angle ABD = \angle H$ ,  $\therefore AB = AH$ .  $\because AD \perp BH$ ,  $\therefore BD = DH$ .  $\because DC = CA$ ,  $\therefore \angle CDA = \angle CAD$ .  $\because \angle CAD + \angle H = 90^\circ$ ,  $\angle CDA + \angle CDH = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle CDH = \angle H$ ,  $\therefore CD = CH = AC$ .  $\therefore AE = EC$ ,  $\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABH}$ ,  $S_{\triangle CDH} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABH}$ ,  
 $\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CDH}$ .  $\therefore S_{\triangle OBD} - S_{\triangle AOE} = S_{\triangle ADB} - S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ADH} - S_{\triangle CDH} = S_{\triangle ACD}$ .  $\therefore AC = CD = 3$ ,  $\therefore$  当  $DC \perp AC$  时,  $\triangle ACD$  的面积最大, 最大面积为  $\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$ . 故答案为  $\frac{9}{2}$ .

关键点拨  
证明两个阴影三角形的面积之差  $= S_{\triangle ACD}$ , 再根据  $DC \perp AC$  时,  $\triangle ACD$  的面积最大求解.

4. (1) 【解】 $\triangle ACE$  是等腰三角形. 理由: 在长方形  $ABCD$  中,  $\because DC \parallel AB$ ,  $\therefore \angle ACD = \angle BAC$ . 由折叠的性质可得  $\angle BAC = \angle B'AC$ ,  $\therefore \angle ACD = \angle B'AC$ ,  $\therefore AE = CE$ ,  $\therefore \triangle ACE$  是等腰三角形.

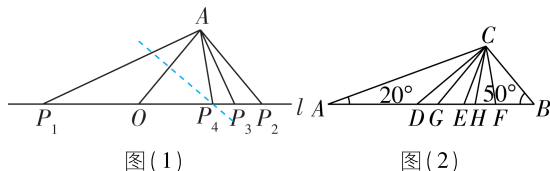
(2) 【解】 $BD = DE + CE$ . 理由: 同(1)可证  $\triangle BDO$  为等腰三角形, 则  $BD = OD$ .  $\because CO$  平分  $\angle ACG$ ,  $DO \parallel BC$ ,  $\therefore \angle OCG = \angle ECO = \angle EOC$ ,  $\therefore CE = OE$ ,  $\therefore BD = DO = DE + EO = DE + CE$ .

(3) 【证明】如图, 延长  $AE$  交  $BC$  的延长线于  $F$ .  $\because AD \parallel BC$ ,  $\therefore \angle F = \angle DAE$ ,  $\angle D = \angle ECF$ .  
 $\because AE$  平分  $\angle BAD$ ,  $\therefore \angle BAF = \angle DAF$ ,  $\therefore \angle BAF = \angle F$ ,  $\therefore BA = BF$ .  $\because E$  是  $CD$  的中点,  $\therefore DE = CE$ . 在  $\triangle ADE$  和  $\triangle FCE$  中,  
 $\begin{cases} \angle DAE = \angle CFE, \\ \angle ADE = \angle FCE, \\ DE = CE, \end{cases} \therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE (\text{AAS})$ ,  
 $\therefore AE = EF$ ,  $\therefore$  点  $E$  是  $AF$  的中点,  $\therefore BE \perp AE$ .



### 刷素养

5. 【解】(1) 如图(1), ①  $AO = OP_1$ , ②  $AO = AP_2$ , ③  $AO = OP_3$ , ④  $AP_4 = OP_4$ , 故这样的等腰三角形能画 4 个. 故答案为 4.

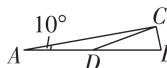


图(1)

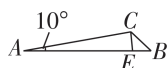
图(2)

(2) 如图(2), ①  $AC = AF$ , ②  $BC = BE$ , ③  $CB = CG$ , ④  $AD = CD$ , ⑤  $BH = HC$ , 故过顶点  $C$  作一条直线, 把该三角形分割出一个小等腰三角形, 这样的直线最多可以画 5 条. 故答案为 5.

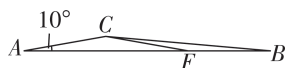
(3) 如图(3), 当  $AD = CD$  时,  $\angle ACD = \angle A = 10^\circ$ ,  $\therefore \angle CDB = 20^\circ$ . ① 当  $CD = BD$  时,  $\angle B = \angle BCD = 80^\circ$ ; ② 当  $CD = BC$  时,  $\angle B = \angle CDB = 20^\circ$ ; ③ 当  $BD = BC$  时,  $\angle B = 180^\circ - 20^\circ - 20^\circ = 140^\circ$ . 如图(4), 当  $AC = AE$ ,  $CE = BE$  时,  $\therefore \angle A = 10^\circ$ ,  $\therefore \angle ACE = \angle AEC = 85^\circ$ ,  $\therefore \angle B = \angle BCE = 42.5^\circ$ . 如图(5), 当  $AC = CF$ ,  $CF = BF$  时,  $\therefore \angle A = 10^\circ$ ,  $\therefore \angle AFC = \angle A = 10^\circ$ ,  $\therefore \angle B = 5^\circ$ . 综上所述,  $\angle B$  的度数为  $80^\circ$  或  $20^\circ$  或  $140^\circ$  或  $42.5^\circ$  或  $5^\circ$ .



图(3)



图(4)



图(5)



### 15.3.2 等边三角形

#### 课时1 等边三角形的性质与判定

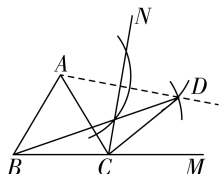
#### 刷基础

1. **D** 【解析】 $\because$  可以拼成一个等边三角形,  
 $\therefore \angle A = \angle B = 60^\circ, \therefore \angle \alpha = 540^\circ - 60^\circ - 60^\circ -$   
 $(180^\circ - 70^\circ) - 160^\circ = 150^\circ$ . 故选 D.

2. **C** 【解析】如图,过点 A  
 作  $AD \parallel l_1$ , 则  $\angle BAD =$   
 $\angle \alpha = 35^\circ. \because l_1 \parallel l_2,$   
 $\therefore AD \parallel l_2, \therefore \angle DAC =$   
 $\angle \beta. \because \triangle ABC$  是等边三  
 角形,  $\therefore \angle BAC = 60^\circ, \therefore \angle \beta = \angle DAC = \angle BAC -$   
 $\angle DAB = 60^\circ - 35^\circ = 25^\circ$ . 故选 C.

3. **50** 【解析】 $\because \triangle ABC$  是等边三角形,  $\therefore \angle A =$   
 $\angle B = \angle C = 60^\circ. \because \angle DEC = \angle 2 + \angle DEF = \angle 1 +$   
 $\angle B, \angle 1 = \angle 2, \therefore \angle DEF = \angle B = 60^\circ.$   
 $\because \angle DFE = 70^\circ, \therefore \angle EDF = 180^\circ - \angle DEF -$   
 $\angle DFE = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$ . 故答案为 50.

4. 【解】(1) 如图所示.



(2)  $\because A, D$  关于  $CN$  对称,  $\therefore CN$  垂直平分  $AD$ ,  
 $\therefore AC = CD, \therefore \angle ACN = \angle NCD = 40^\circ. \because \triangle ABC$   
 是等边三角形,  $\therefore \angle ACB = 60^\circ, AC = BC,$   
 $\therefore \angle BCD = \angle BCA + \angle ACN + \angle NCD = 60^\circ + 2 \times$   
 $40^\circ = 140^\circ, BC = CD, \therefore \angle CBD = \angle CDB,$   
 $\therefore \angle BDC = \frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$ .

5. **B** 【解析】

- |   |   |
|---|---|
| A | $\because \angle A = \angle B = 60^\circ, \therefore \angle C = 60^\circ, \therefore \angle A =$<br>$\angle B = \angle C, \therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, 故选项 A 不符合题意 |
| B | $\because \angle B + \angle C = 120^\circ, \therefore \angle A = 60^\circ, \therefore \triangle ABC$<br>不一定是等边三角形, 故选项 B 符合题意   |
| C | $\because \angle B = 60^\circ, AB = AC, \therefore \triangle ABC$ 是等边三<br>角形, 故选项 C 不符合题意   |
| D | $\because \angle A = 60^\circ, AB = AC, \therefore \triangle ABC$ 是等边三<br>角形, 故选项 D 不符合题意   |

6. **B** 【解析】连接  $AC. \because$  点  $B$  在点  $A$  的南偏西

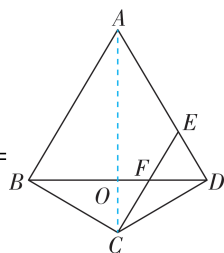
$40^\circ$  方向上, 点  $C$  在点  $B$  的北偏西  $20^\circ$  方向上,  
 $\therefore \angle CBA = 60^\circ. \text{又} \because BC = BA, \therefore \triangle ABC$  为等边  
 三角形,  $\therefore AC = BC = AB = 80$  海里. 故选 B.

7.  $\angle B = \angle A$  (答案不唯一) 【解析】当  $\angle B = \angle A$   
 时,  $\because \angle B = \angle C, \therefore \angle A = \angle B = \angle C, \therefore \triangle ABC$   
 是等边三角形. 故答案为  $\angle B = \angle A$  (答案不  
 唯一).

8. 【证明】 $\because AD \parallel CE, \therefore \angle A = \angle CEB = 60^\circ.$   
 $\because \angle CEB = \angle B, \therefore CE = CB, \therefore \triangle CEB$  是等腰  
 三角形. 又  $\because \angle CEB = 60^\circ, \therefore \triangle CEB$  是等边三  
 角形.

9. 【解】(1)  $\triangle DEF$  是等边三角形. 理由如下:  
 $\because AB = AD, \angle A = 60^\circ, \therefore \triangle ABD$  为等边三角  
 形,  $\therefore \angle ADB = \angle ABD = 60^\circ. \because CE \parallel AB,$   
 $\therefore \angle DEF = \angle A = 60^\circ, \angle EFD = \angle ABD = 60^\circ,$   
 $\therefore \angle EFD = \angle EDF = \angle DEF, \therefore \triangle DEF$  是等边  
 三角形.

(2) 连接  $AC$  交  $BD$  于点  
 $O$ , 如图.  $\because AB = AD, CB =$   
 $CD, \therefore AC$  垂直平分  $BD,$   
 $\therefore AC$  平分  $\angle BAD, \therefore \angle BAO =$   
 $\angle DAO. \because CE \parallel AB,$   
 $\therefore \angle ACE = \angle BAO =$   
 $\angle DAO, \therefore AE = CE = 9, \therefore DE = AD - AE = 13 - 9 =$   
 $4. \because \triangle DEF$  是等边三角形,  $\therefore EF = DE = 4,$   
 $\therefore CF = CE - EF = 9 - 4 = 5$ . 故答案为 5.



**一题多解**  
 延长  $BA$  与  $l_2$   
 交于点  $E$ , 运  
 用平行线的性  
 质及三角形外  
 角的性质解决  
 问题.

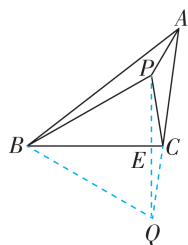
**归纳总结**  
 判定等边三角  
 形的方法:  
 (1) 由定义判  
 定: 三条边都  
 相等的三角形  
 是等边三角形.

(2) 判定定理  
 1: 三个角都相  
 等的三角形是  
 等边三角形.  
 (3) 判定定理  
 2: 有一个角是  
 $60^\circ$  的等腰三  
 角形是等边三  
 角形.

#### 刷提升

1. **D** 【解析】 $\because AD = DE = DF, \therefore \angle DAE =$   
 $\angle DEA, \angle DAF = \angle DFA. \because \angle DAE + \angle DAF =$   
 $\angle BAC = 60^\circ, \therefore \angle DEA + \angle DFA = 60^\circ.$   
 $\because \angle ABC = \angle DEA + \angle EDB = 60^\circ, \therefore \angle EDB =$   
 $\angle DFA. \because \angle ACB = \angle CFD + \angle CDF = 60^\circ,$   
 $\therefore \angle CDF = \angle BED, \therefore \triangle BDE \cong \triangle CFD,$   
 $\therefore BD = CF, BE = CD, \therefore \triangle BED$  的周长为  $BD +$   
 $BE + DE = BD + CD + AD = BC + AD. \because$  点  $D$  在  $BC$  边  
 上从  $B$  至  $C$  的运动过程中,  $AD$  的长先变小后变  
 大,  $\therefore \triangle BED$  的周长先变小后变大, 故选 D.

2. **142** 【解析】延长  $AC$  到  $Q$ ,  
 使  $AQ = AB$ , 连接  $PQ, BQ, PQ$   
 交  $BC$  于点  $E$ , 如图.  
 $\because \angle PBA = 8^\circ, \angle APB =$   
 $150^\circ, \therefore \angle BAP = 180^\circ -$   
 $(\angle PBA + \angle APB) = 22^\circ$ .



$\therefore \angle CAP = 22^\circ, \therefore \angle CAP = \angle BAP = 22^\circ$ . 在

$\triangle QAP$  和  $\triangle BAP$  中,  $\begin{cases} AQ=AB, \\ \angle QAP=\angle BAP, \\ AP=AP, \end{cases}$   
 $\therefore \triangle QAP \cong \triangle BAP$  (SAS),  $\therefore \angle APQ = \angle APB = 150^\circ, \angle PQA = \angle PBA = 8^\circ, PQ = PB,$   
 $\therefore \angle BPQ = 360^\circ - (\angle APQ + \angle APB) = 60^\circ,$   
 $\therefore \triangle PBQ$  是等边三角形,  $\therefore \angle PBQ = \angle BPQ = 60^\circ. \therefore \angle PBC = 30^\circ, \therefore \angle QBC = \angle PBQ - \angle PBC = 30^\circ, \therefore \angle QBC = \angle PBC = 30^\circ, \therefore BC$  是  $\angle PBQ$  的平分线,  $\therefore BC \perp PQ, PE = QE, \therefore BC$  是线段  $PQ$  的垂直平分线,  $\therefore PC = QC,$   
 $\therefore \angle CPQ = \angle PQA = 8^\circ, \therefore \angle BPC = \angle BPQ + \angle CPQ = 68^\circ, \therefore \angle APC = 360^\circ - (\angle APB + \angle BPC) = 360^\circ - (150^\circ + 68^\circ) = 142^\circ$ . 故答案为 142.

**关键点拨**  
作辅助线, 构造全等三角形和等边三角形是解决问题的关键.

3. (1) 【证明】 $\because \triangle ABC, \triangle CDE$  都是等边三角形,  $\therefore AC = BC, CD = CE, \angle ACB = \angle DCE = 60^\circ,$   
 $\therefore \angle ACB + \angle BCD = \angle DCE + \angle BCD,$   
 $\therefore \angle ACD = \angle BCE.$

在  $\triangle ACD$  和  $\triangle BCE$  中,  $\begin{cases} AC=BC, \\ \angle ACD=\angle BCE, \\ CD=CE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE, \therefore AD = BE.$

(2) 【解】 $\because \triangle ACD \cong \triangle BCE, \therefore \angle ADC = \angle BEC. \because \triangle DCE$  是等边三角形,  $\therefore \angle CED = \angle CDE = 60^\circ, \therefore \angle ADE + \angle BED = \angle ADC + \angle CDE + \angle BED = \angle ADC + 60^\circ + \angle BED = \angle CED + 60^\circ = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ, \therefore \angle DOE = 180^\circ - (\angle ADE + \angle BED) = 60^\circ$ , 即  $\angle DOE$  的度数是  $60^\circ$ .

(3) 【证明】 $\because \triangle ACD \cong \triangle BCE, \therefore \angle CAD = \angle CBE, AD = BE, AC = BC.$

又  $\because$  点  $M, N$  分别是线段  $AD, BE$  的中点,  
 $\therefore AM = \frac{1}{2}AD, BN = \frac{1}{2}BE, \therefore AM = BN.$

在  $\triangle ACM$  和  $\triangle BCN$  中,  $\begin{cases} AC=BC, \\ \angle CAM=\angle CBN, \\ AM=BN, \end{cases}$   
 $\therefore \triangle ACM \cong \triangle BCN, \therefore CM = CN, \angle ACM = \angle BCN.$  又  $\because \angle ACB = 60^\circ, \therefore \angle ACM + \angle MCB = 60^\circ, \therefore \angle BCN + \angle MCB = 60^\circ, \therefore \angle MCN = 60^\circ,$   
 $\therefore \triangle MNC$  是等边三角形.

## 刷素养

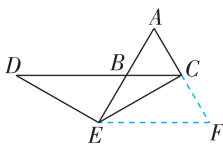
4. (1) =

【解】(2)  $AE = DB$ . 理由如下: 过点  $E$  作  $EF \parallel BC$ , 交  $AC$  于点  $F. \because \triangle ABC$  为等边三角形,  $\therefore \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ. \because EF \parallel BC, \therefore \angle AEF = \angle AFE = 60^\circ, \therefore \triangle AEF$  为等边三角形,  $\therefore AE = EF = AF, \therefore BE = CF. \because ED = EC, \therefore \angle D = \angle ECD. \because \angle DEB = \angle ABC - \angle D = 60^\circ - \angle D, \angle ECF = \angle ACB - \angle ECD = 60^\circ - \angle ECD, \therefore \angle DEB = \angle ECF.$

在  $\triangle DBE$  和  $\triangle EFC$  中,  $\begin{cases} DE=EC, \\ \angle DEB=\angle ECF, \\ BE=FC, \end{cases}$   
 $\therefore \triangle DBE \cong \triangle EFC$  (SAS),  $\therefore DB = EF$ , 则  $AE = DB$ . 故答案为 =.

(3) 根据题意画图, 如图

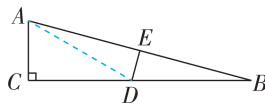
所示,  $CD = 3$ . 过点  $E$  作  $EF \parallel BC$ , 交  $AC$  延长线于点  $F. \because \triangle ABC$  是等边三角形,  $\therefore \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ. \because EF \parallel BC, \therefore \angle AEF = \angle F = 60^\circ, \therefore \triangle AEF$  为等边三角形,  $\therefore AE = EF = 2$ , 同 (2) 可证  $\triangle DBE \cong \triangle EFC, \therefore DB = EF = 2$ , 则  $CD = BC + DB = 3$ .



## 课时2 含 $30^\circ$ 角的直角三角形的性质

### 刷基础

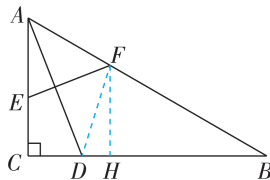
1. C 【解析】连接  $AD$ , 如图.  $\because DE$  是  $AB$  的垂直平分线,  $\therefore AD =$



$DB = 12$  cm,  $\therefore \angle DAE = \angle B = 15^\circ$ . 又  $\because \angle C = 90^\circ, \therefore \angle CAD = 180^\circ - \angle C - \angle B - \angle DAE = 60^\circ, \therefore \angle ADC = 30^\circ$ . 在直角三角形  $ACD$  中,  $AC = \frac{1}{2}AD = 6$  cm. 故选 C.

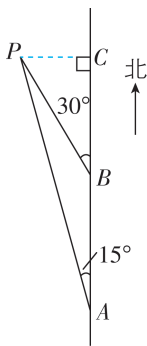
2. A 【解析】 $\because$  在  $\triangle ABC$  中,  $\angle A : \angle B : \angle BCA = 1 : 2 : 3, \therefore \angle ACB = 90^\circ, \angle A = 30^\circ, \angle B = 60^\circ. \therefore AB = 12, \therefore BC = 6. \because CD \perp AB, \therefore \angle BDC = 90^\circ, \therefore \angle BCD = 30^\circ, \therefore BD = 3.$

3. C 【解析】过点  $F$  作  $FH \perp BC$  于  $H$ , 连接  $DF$ , 如图.  $\because EF$  垂直平分  $AD, \therefore AF = DF$ . 设  $AF = DF = x. \because \angle B = 30^\circ, \angle C = 90^\circ, AC =$

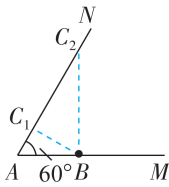


2,  $\therefore AB = 4$ , 则  $BF = 4 - x$ ,  $\therefore FH = \frac{1}{2}BF = 2 - \frac{1}{2}x$ ,  $\therefore x \geq 2 - \frac{1}{2}x$ , 解得  $x \geq \frac{4}{3}$ ,  $\therefore AF$  长的最小值为  $\frac{4}{3}$ , 故  $BF$  长的最大值为  $4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ . 故选 C.

4. 有 【解析】如图, 过点  $P$  作  $PC \perp AB$ .  $\because \angle PBC = 30^\circ$ ,  $\angle PAB = 15^\circ$ ,  $\therefore \angle APB = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$ ,  $\therefore \angle PAB = \angle APB$ ,  $\therefore PB = AB$ .  $\because AB = 15 \times 2 = 30$  (海里),  $\therefore PB = 30$  海里,  $\therefore PC = \frac{1}{2}PB = 15$  海里.  $\because 15 < 18$ ,  $\therefore$  有触礁的危险. 故答案为有.



5.  $1 < AC < 4$  【解析】如图, 过点  $B$  作  $BC_1 \perp AN$ , 垂足为  $C_1$ ,  $BC_2 \perp AM$ , 交  $AN$  于点  $C_2$ . 在  $Rt \triangle ABC_1$  中,  $AB = 2$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\therefore \angle ABC_1 = 30^\circ$ ,  $\therefore AC_1 = \frac{1}{2}AB = 1$ . 在  $Rt \triangle ABC_2$  中,  $AB = 2$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\therefore \angle AC_2B = 30^\circ$ ,  $\therefore AC_2 = 2AB = 4$ . 当点  $C$  在  $C_1$  和  $C_2$  之间时,  $\triangle ABC$  是锐角三角形,  $\therefore AC$  的取值范围是  $1 < AC < 4$ . 故答案为  $1 < AC < 4$ .



6.  $9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2025}$  【解析】 $\because$  点  $A$  的坐标是  $(0, 9)$ , 以  $OA$  为边在其右侧作等边三角形  $OAA_1$ , 过点  $A_1$  作  $x$  轴的垂线, 垂足为点  $O_1$ ,  $\therefore \angle A_1OO_1 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ,  $\angle OO_1A_1 = 90^\circ$ ,  $OA_1 = OA = 9$ ,  $\therefore O_1A_1 = \frac{1}{2}OA_1 = 9 \times \frac{1}{2}$ ,  $\therefore$  点  $A_1$  的纵坐标是  $9 \times \frac{1}{2}$ .  $\therefore$  以  $O_1A_1$  为边在其右侧作等边三角形  $O_1A_1A_2$ , 过点  $A_2$  作  $x$  轴的垂线, 垂足为点  $O_2$ ,  $\therefore \angle A_2O_1O_2 = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ,  $\angle O_1O_2A_2 = 90^\circ$ ,  $O_1A_2 = O_1A_1 = 9 \times \frac{1}{2}$ ,  $\therefore O_2A_2 = \frac{1}{2}O_1A_2 = 9 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ,  $\therefore$  点  $A_2$  的纵坐标是  $9 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ , 即  $9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$ .  $\therefore$  以  $O_2A_2$  为边在其右侧作等边三角形  $O_2A_2A_3$ , 同理, 得点  $A_3$  的纵坐标是  $9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$ ,  $\therefore$  根据规律可知点  $A_{2025}$  的

### 思路分析

当点  $C$  在射线  $AN$  上运动时,  $\triangle ABC$  的形状可能是钝角三角形、直角三角形或锐角三角形. 画出相应的图形, 根据三角形的变化, 构造含  $30^\circ$  角的直角三角形, 即可得到  $AC$  的取值范围.

### 思路分析

设这个三角形的底角的度数为  $x$ , 分两种情况: ①底角是顶角的 2 倍; ②顶角是底角的 2 倍, 再根据三角形的内角和定理求解即可.

纵坐标是  $9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2025}$ . 故答案为  $9 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2025}$ .

7. 【解】(1) 根据题意可得  $AD = t$  cm,  $CD = (6 - t)$  cm,  $CE = 2t$  cm.  $\because \angle A = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $AC = 6$  cm,  $\therefore BC = 2AC = 12$  cm,  $\angle C = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .  $\because \triangle DEC$  为等边三角形,  $\therefore CD = CE$ ,  $\therefore 6 - t = 2t$ ,  $\therefore t = 2$ ,  $\therefore$  当  $t$  的值为 2 时,  $\triangle DEC$  为等边三角形.

(2) ①当  $\angle DEC$  为直角时,  $\angle EDC = 30^\circ$ ,  $\therefore CE = \frac{1}{2}DC$ ,  $\therefore 2t = \frac{1}{2}(6 - t)$ ,  $\therefore t = \frac{6}{5}$ ; ②当  $\angle EDC$  为直角时,  $\angle DEC = 30^\circ$ ,  $\therefore CD = \frac{1}{2}CE$ ,  $\therefore 6 - t = \frac{1}{2} \times 2t$ ,  $\therefore t = 3$ ,  $\therefore$  当  $t$  的值为  $\frac{6}{5}$  或 3 时,  $\triangle DEC$  为直角三角形.

## 重难点专题 2 等腰三角形中的分类讨论

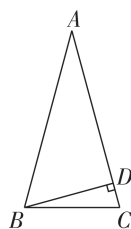


### 刷难关

1. C 【解析】分情况考虑: 当 4 cm 是腰长时, 则底边长是  $11 - 2 \times 4 = 3$  (cm), 长为 4 cm, 4 cm, 3 cm 的线段能组成三角形. 当 4 cm 是底边长时, 腰长是  $(11 - 4) \times \frac{1}{2} = 3.5$  (cm), 长为 4 cm, 3.5 cm, 3.5 cm 的线段能组成三角形. 故选 C.

2.  $72^\circ$  或  $45^\circ$  【解析】设这个三角形的底角的度数为  $x$ . 由题意分以下两种情况: ①这个三角形的三个角的度数分别为  $x, x, \frac{x}{2}$ , 由三角形的内角和定理得  $x + x + \frac{x}{2} = 180^\circ$ , 解得  $x = 72^\circ$ ; ②这个三角形的三个角的度数分别为  $x, x, 2x$ , 由三角形的内角和定理得  $x + x + 2x = 180^\circ$ , 解得  $x = 45^\circ$ , 故答案为  $72^\circ$  或  $45^\circ$ .

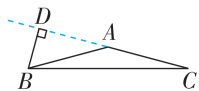
3. C 【解析】由题意得在等腰  $\triangle ABC$  中,  $AB = AC$ ,  $BD$  为腰  $AC$  上的高,  $\angle ABD = 60^\circ$ . 当  $BD$  在  $\triangle ABC$  内部时, 如图(1).  $\because BD \perp AC$ ,  $\therefore \angle ADB = 90^\circ$ ,  $\therefore \angle BAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .  $\because AB = AC$ ,



图(1)

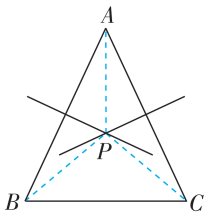
$\therefore \angle ABC = \angle ACB = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$ . 当  $BD$  在  $\triangle ABC$  外部时, 如图(2).  $\because BD \perp AC$ ,

$\therefore \angle ADB = 90^\circ, \therefore \angle BAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ. \because AB = AC,$   
 $\therefore \angle ABC = \angle ACB.$   
 $\therefore \angle BAD = \angle ABC + \angle ACB,$   
 $\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle BAD = 15^\circ.$  综上所述, 这个等腰三角形底角的度数为  $75^\circ$  或  $15^\circ$ . 故选 C. ► 关键点拨



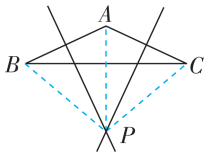
图(2)

**4. C** 【解析】分两种情况: 当点  $P$  在  $\triangle ABC$  内部时, 如图(1), 连接  $AP, BP, PC$ . 因为  $AB$  和  $AC$  的垂直平分线交于点  $P$ , 所以  $PA = PB = PC$ , 所以  $\angle BAP = \angle ABP, \angle PBC = \angle PCB, \angle PAC = \angle ACP$ . 因



图(1)

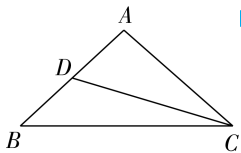
为  $\angle BPC = 100^\circ$ , 所以  $\angle PBC + \angle PCB = 180^\circ - \angle BPC = 80^\circ$ . 因为  $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$ , 所以  $\angle ABP + \angle BAP + \angle ACP + \angle CAP = 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB) = 100^\circ$ , 所以  $2\angle BAP + 2\angle CAP = 100^\circ$ , 所以  $\angle BAP + \angle CAP = 50^\circ$ , 所以  $\angle BAC = 50^\circ$ . 当点  $P$  在  $\triangle ABC$  外部时, 如图(2),



图(2)

连接  $AP, BP, PC$ . 因为  $AB$  和  $AC$  的垂直平分线交于点  $P$ , 所以  $PA = PB = PC$ , 所以  $\angle BAP = \angle ABP, \angle PAC = \angle ACP$ . 因为  $\angle BPC = 100^\circ$ , 所以  $\angle ABP + \angle BAP + \angle CAP + \angle ACP = 360^\circ - \angle BPC = 260^\circ$ , 所以  $2\angle BAP + 2\angle CAP = 260^\circ$ , 所以  $\angle BAP + \angle CAP = 130^\circ$ , 所以  $\angle BAC = 130^\circ$ . 综上所述, 等腰三角形的顶角为  $50^\circ$  或  $130^\circ$ . 故选 C.

**5. 15** 【解析】如图, 设等腰  $\triangle ABC$  的腰长是  $AB = AC = x$  cm. 当  $AD + AC - (BD + BC) = 5$  时,



$$\frac{1}{2}x + x - \left(\frac{1}{2}x + 10\right) = 5,$$

解得  $x = 15$ . 长为 15, 15, 10 的线段能够组成三角形. 当  $BC + BD - (AD + AC) = 5$  时,  $10 + \frac{1}{2}x -$

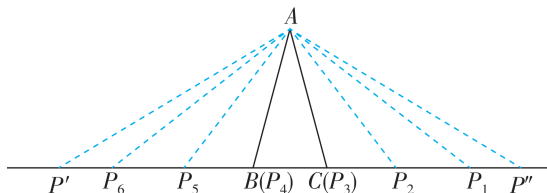
$\left(\frac{1}{2}x + x\right) = 5$ , 解得  $x = 5$ . 长为 5, 5, 10 的线段不能组成三角形. 故这个三角形的腰长为 15 cm. 故答案为 15.

注意分两种情况讨论: ①当  $BD$  在  $\triangle ABC$  内部时; ②当  $BD$  在  $\triangle ABC$  外部时.

► 易错警示

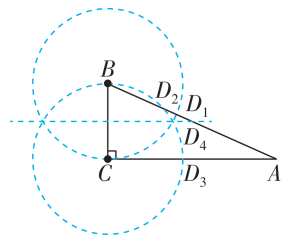
设等腰三角形的腰长是  $x$  cm, 根据周长的其中一部分比另一部分长 5 cm 列方程求解即可, 注意分类讨论, 不要漏解.

**6. C** 【解析】 $\because$  在  $\triangle ABC$  中,  $\angle ABC = 75^\circ, \angle BAC = 30^\circ, \therefore \angle ACB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 180^\circ - 75^\circ - 30^\circ = 75^\circ$ . 如图, 当  $\angle CAP_1 = \angle CP_1A = \frac{1}{2} \times 75^\circ = 37.5^\circ$  时,  $\triangle CAP_1$  为等腰三角形. 当  $\angle BAP_2 = \angle BP_2A = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 75^\circ) = 52.5^\circ$  时,  $\triangle BAP_2$  为等腰三角形. 当  $\angle P''AB = \angle P''BA = 75^\circ$  时,  $\triangle P''AB$  为等腰三角形. 当  $P_3$  与  $C$  重合时,  $\triangle ABP_3$  为等腰三角形. 当  $P_4$  与  $B$  重合时,  $\triangle ACP_4$  为等腰三角形. 当  $\angle P'AC = \angle P'CA = 75^\circ$  时,  $\triangle P'AC$  为等腰三角形. 当  $\angle CAP_5 = \angle CP_5A = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 75^\circ) = 52.5^\circ$  时,  $\triangle CAP_5$  为等腰三角形. 当  $\angle BAP_6 = \angle BP_6A = \frac{1}{2} \times 75^\circ = 37.5^\circ$  时,  $\triangle BAP_6$  为等腰三角形. 综上, 满足条件的点  $P$  的位置有 8 个. 故选 C.



**7. 130 或 100 或 160** 【解析】由旋转的性质得  $BD = AB = BC$ .  $\because \triangle ADC$  为等腰三角形,  $\therefore$  分三种情况: ①当  $DA = DC$  时, 易得  $\triangle ABD \cong \triangle CBD, \therefore \angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} (360^\circ - \angle ABC) = 130^\circ, \therefore m = 130$ ; ②当  $AD = AC$  时, 易得  $\triangle ABD \cong \triangle ABC, \therefore \angle ABD = \angle ABC = 100^\circ, \therefore m = 100$ ; ③当  $CA = CD$  时, 易得  $\triangle CBA \cong \triangle CBD, \therefore \angle CBD = \angle ABC = 100^\circ, \therefore \angle ABD = 360^\circ - 100^\circ - 100^\circ = 160^\circ, \therefore m = 160$ . 综上所述,  $m$  所有可能的取值为 130 或 100 或 160. 故答案为 130 或 100 或 160.

**8. C** 【解析】如图, ①以  $BC$  为腰时, 以  $B$  为圆心、 $BC$  长为半径画圆, 与  $AB$  有一个交点  $D_1$ ; 以  $C$  为圆心、 $BC$  长为半径画圆, 与  $AB$  有一个交点, 与  $AC$  有一个交点, 分别为  $D_2, D_3$ . ②以  $BC$  为底时, 作  $BC$  的垂直



平分线,与  $AB$  有一个交点  $D_4$ . 综上所述,点  $D$  的位置有 4 个,故选 C.

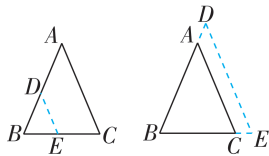
9.  $25^\circ$  或  $40^\circ$  【解析】由题意知  $\triangle ABD$  与  $\triangle DBC$  均为等腰三角形,对于  $\triangle ABD$  可能有①  $AB = BD$ , 此时  $\angle ADB = \angle A = 80^\circ$ ,  $\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ ,  $\therefore \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - 100^\circ) = 40^\circ$ ; ②  $AB = AD$ , 此时  $\angle ADB = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = \frac{1}{2}(180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ$ ,  $\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ ,  $\therefore \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - 130^\circ) = 25^\circ$ ; ③  $AD = BD$ , 此时  $\angle ADB = 180^\circ - 2 \times 80^\circ = 20^\circ$ ,  $\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$ ,  $\therefore \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - 160^\circ) = 10^\circ$ . 此时  $\angle ABC = 90^\circ$ , 则  $AC$  为最长边,与  $BC$  为最长边矛盾,故舍去. 综上所述,  $\angle C$  的度数可以为  $25^\circ$  或  $40^\circ$ . 故答案为  $25^\circ$  或  $40^\circ$ .

大招专题 4 构造等腰三角形的方法

刷难关

大招解读 | 作平行线

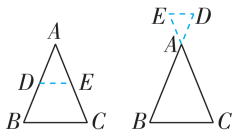
【模型】作腰的平行线.



【条件】 $AB = AC, DE \parallel AC$ .

【结论】 $DB = DE$

【模型】作底边的平行线.



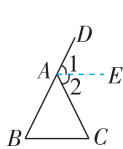
【条件】 $AB = AC, DE \parallel BC$ .

【结论】 $AD = AE$

【模型】过顶角顶点作底边的平行线.

【条件】 $AB = AC$ , 点  $D$  在  $BA$  延长线上,  $AE \parallel BC$ .

【结论】 $\angle 1 = \angle 2$

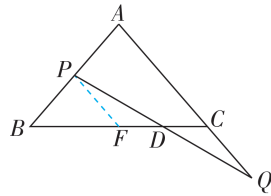


思路分析  
分  $AB = BD$ ,  $AB = AD$ ,  $AD = BD$  三种情况讨论, 先求出  $\angle ADB$ , 再求出  $\angle BDC$ , 然后根据等腰三角形的性质列式计算即可.

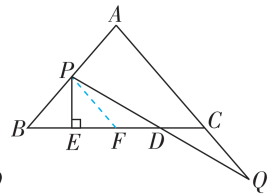
思路分析

(1) 过点  $P$  作  $PF \parallel AC$  交  $BC$  于  $F$ , 则  $\angle PFB = \angle ACB$ ,  $\angle DPF = \angle DQC$ , 先证  $PF = CQ$ , 进而由 AAS 证得  $\triangle PFD \cong \triangle QCD$ , 根据全等三角形的性质即可得出结论.

图(1). 因为点  $P$  和点  $Q$  同时出发, 且速度相同, 所以  $BP = CQ$ . 因为  $PF \parallel AQ$ , 所以  $\angle PFB = \angle ACB$ ,  $\angle DPF = \angle DQC$ . 因为  $AB = AC$ , 所以  $\angle B = \angle ACB$ , 所以  $\angle B = \angle PFB$ , 所以  $BP = PF$ , 所以  $PF = CQ$ . 因为  $\angle PDF = \angle QDC$ ,  $\angle DPF = \angle DQC$ ,  $PF = CQ$ , 所以  $\triangle PFD \cong \triangle QCD$ , 所以  $PD = QD$ .



图(1)



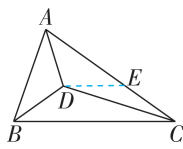
图(2)

(2) 存在,  $ED$  的长度保持不变. 理由如下: 过点  $P$  作  $PF \parallel AQ$  交  $BC$  于点  $F$ , 如图(2). 同(1)可证  $PB = PF$ . 因为  $PE \perp BF$ , 所以  $BE = EF$ . 同(1)可证  $\triangle PFD \cong \triangle QCD$ , 所以  $FD = DC$ , 所以  $ED = EF + FD = BE + DC = \frac{1}{2}BC$ , 所以  $ED$  的长度为定值, 即  $ED$  的长度保持不变.

大招解读 | 截长补短

	截长法	补短法	截长法	补短法
模型展示				
条件	$\angle 1 = \angle 2, \angle ABC = 2\angle C$	$\angle 1 = \angle 2, \angle ABC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$		
方法	在 $AC$ 上截取 $AE = AB$	延长 $AB$ 至点 $E$ , 使 $BE = BD$	在 $AC$ 上截取 $AE = AB$	延长 $AB$ 至点 $E$ , 使 $AE = AC$
结论	$AC = AB + BD$	$AC = AB + CD$		

2. 【证明】如图, 在  $AC$  上截取  $AE$ , 使  $AE = AB$ , 连接  $DE$ , 则  $AC = AB + CE = AE + CE = AB + BD$ ,  $\therefore CE = BD$ .  $\therefore AD, BD, CD$  分别平分  $\angle BAC, \angle ABC, \angle ACB$ ,  $\therefore \angle DAB = \angle DAE, \angle ABC = 2\angle ABD, \angle ACB = 2\angle ACD$ . 又  $\because AD = AD$ ,  $\therefore \triangle ABD \cong \triangle AED$ ,



1. 【解】(1) 过  $P$  点作  $PF \parallel AC$  交  $BC$  于  $F$ , 如



$\therefore BD = DE, \angle ABD = \angle AED, \therefore DE = CE,$   
 $\therefore \angle EDC = \angle ECD, \therefore \angle ABD = \angle AED = \angle EDC + \angle ECD = 2\angle ECD = \angle ACB, \therefore \angle ABC = 2\angle ACB.$

### 大招解读 | 作延长线

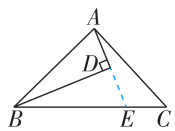
条件:  $\triangle ABC$  中,  $BD$  平分  $\angle ABC, AD \perp BD$ .

辅助线: 延长  $AD$  交  $BC$  于点  $E$ .

结论: (1)  $\triangle ABD \cong \triangle EBD$ .

(2)  $AD = DE$ .

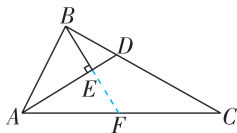
(3)  $BA = BE$ .



### 关键点拨

利用等量代换及等式的性质得出  $\angle CBF = \angle C$  是解题关键.

3. 【证明】如图, 延长  $BE$  交  $AC$  于点  $F$ .  $\because BF \perp AD, \therefore \angle AEB = \angle AEF = 90^\circ. \therefore AD$  平分  $\angle BAC, \therefore \angle BAE = \angle FAE$ .



在  $\triangle ABE$  和  $\triangle AFE$  中,  $\begin{cases} \angle AEB = \angle AEF, \\ AE = AE, \\ \angle BAE = \angle FAE, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle AFE (ASA), \therefore \angle ABF = \angle AFB, AB = AF, BE = EF. \therefore \angle C + \angle CBF = \angle AFB = \angle ABF, \angle ABF + \angle CBF = \angle ABC = 3\angle C, \therefore \angle C + 2\angle CBF = 3\angle C, \therefore \angle CBF = \angle C,$   
 $\therefore BF = CF, \therefore BE = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}CF. \therefore CF = AC -$

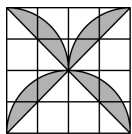
$AF = AC - AB, \therefore BE = \frac{1}{2}(AC - AB).$

### 数学活动

#### 刷活动

1. C 【解析】只有 C 选项中的文字能找到这样的一条直线, 使其沿这条直线折叠, 直线两旁的部分能够互相重合, 所以 C 选项中的文字是轴对称图形.

2. 【解】如图所示 (答案不唯一).



3. (1) 【解】①依据 1: 等腰三角形的两个底角相等 (或等边对等角).

依据 2: 两角分别相等且其中一组等角的对边相等的两个三角形全等 (或角角边或 AAS). 故答案为等腰三角形的两个底角相等 (或等边对等角), 两角分别相等且其中一组等角的

对边相等的两个三角形全等 (或角角边或 AAS).

②另一种证法如下: 如图 (1), 连接  $AD$ .  $\because AB = AC, D$  是  $BC$  的中点,  $\therefore AD$  是  $\angle BAC$  的平分线.  $\because DE \perp AB, DF \perp AC, \therefore DE = DF$ . (证法不唯一)

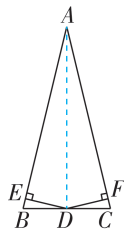


图 (1)

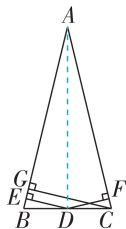


图 (2)

### 思路分析

(2) 由等腰三角形的性质可得  $AD$  是  $\angle BAC$  的平分线, 由角平分线的性质可得  $DE = DF$ , 再通过等面积法即可求得  $CG = 2DE$ .

(2) 【解】如图 (2), 连接  $AD$ .  $\because AB = AC, D$  是  $BC$  的中点,  $\therefore AD$  是  $\angle BAC$  的平分线.  $\because DE \perp AB, DF \perp AC, \therefore DE = DF. \therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD}, \therefore \frac{1}{2} \times AB \times CG = \frac{1}{2} \times AB \times DE + \frac{1}{2} \times AC \times DF, \therefore CG = 2DE$ , 故答案为  $CG = 2DE$ .

(3) 【证明】(任选一个证明即可) 选择 ①:  $\because DE, DF$  分别是  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACD$  的中线,  $\therefore BE = \frac{1}{2}AB, CF = \frac{1}{2}AC. \because AB = AC, \therefore BE = CF, \angle B = \angle C$ . 又  $\because D$  是  $BC$  的中点,  $\therefore BD =$

$CD$ . 在  $\triangle BDE$  与  $\triangle CDF$  中,  $\begin{cases} BE = CF, \\ \angle B = \angle C, \\ BD = CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CDF (SAS), \therefore DE = DF$ .

选择 ②:  $\because AB = AC, D$  是  $BC$  的中点,  $\therefore \angle B = \angle C, BD = CD, AD \perp BC, \therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ . 又  $\because DE, DF$  分别是  $\triangle ABD$  和  $\triangle ACD$  的角平分线,  $\therefore \angle BDE = \angle CDF = 45^\circ$ . 在  $\triangle BDE$

与  $\triangle CDF$  中,  $\begin{cases} \angle B = \angle C, \\ BD = CD, \\ \angle BDE = \angle CDF, \end{cases} \therefore \triangle BDE \cong$

$\triangle CDF (ASA), \therefore DE = DF$ .

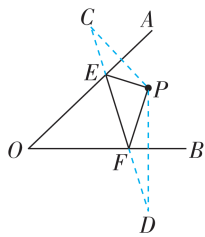
### 综合与实践 最短路径问题

#### 刷实践

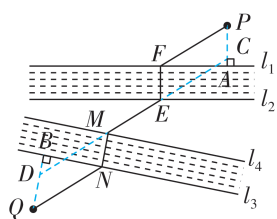
【解】【分析问题】 $\because$  点  $B, B'$  关于  $l$  对称,  $\therefore CB = CB', C'B = C'B', \therefore AC + CB = AC + CB' = AB', AC' + C'B = AC' + C'B'. \therefore AB' < AC' + C'B', \therefore AC + CB < AC' + C'B, \therefore$  作  $B$  关于  $l$  的对称点  $B'$ , 连接  $AB'$  与  $l$  交于点  $C$ , 点  $C$  就是饮马的地方, 此时按路线

$AC-CB$  走的路程是最短的.

【解决问题】任务一:如图(1)所示,分别作点  $P$  关于  $OA, OB$  的对称点  $C, D$ , 连接  $CD$ , 分别交  $OA, OB$  于  $E, F$ , 则路线  $PE-EF-FP$  即为所求.



图(1)



图(2)

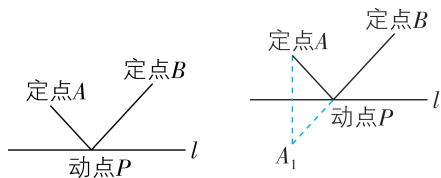
任务二:如图(2)所示,分别过点  $P$  和点  $Q$  作  $l_1, l_3$  的垂线,垂足分别为  $A, B$ , 在  $PA$  上截取  $PC$  等于靠近  $P$  村的河的宽, 在  $BQ$  上截取  $QD$  等于靠近  $Q$  村的河的宽, 连接  $CD$  分别交  $l_2, l_4$  于  $E, M$ , 分别过点  $E, M$  作  $l_1, l_3$  的垂线,垂足分别为  $F, N$ , 连接  $PF, QN$ , 则路线  $PF-FE-EM-MN-NQ$  即为所求.

## 大招专题 5 轴对称——将军饮马

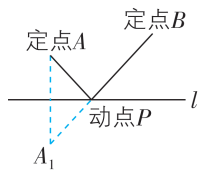
### 刷难关

#### 大招解读 | 两定一动

条件:如图(1),在直线  $l$  上找一点  $P$ , 使  $AP+BP$  的值最小.



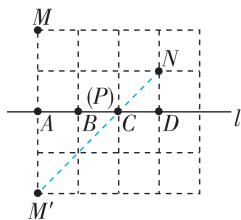
图(1)



图(2)

方法:如图(2),作点  $A$  关于  $l$  的对称点  $A_1$ , 连接  $A_1B$ ,  $A_1B$  与  $l$  的交点即为点  $P$ , 此时  $AP+BP$  的最小值为  $A_1P+BP=A_1B$ .

1. C 【解析】如图,点  $M'$  是点  $M$  关于直线  $l$  的对称点,连接  $M'N$ , 则  $M'N$  与直线  $l$  的交点,即为点  $P$ , 此时  $PM+PN$  的值最小. 因为  $M'N$  与直线  $l$  交于点  $C$ , 所以点  $P$  应选在  $C$  点. 故选 C.

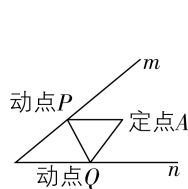


#### 关键点拨

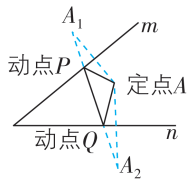
根据轴对称的性质,得出  $M, N$  的位置是解题的关键.

#### 大招解读 | 两动一定 (有去有回)

条件:如图(1),点  $A$  为定点,点  $Q$  在直线  $n$  上运动,点  $P$  在直线  $m$  上运动,求  $\triangle PAQ$  周长的最小值.



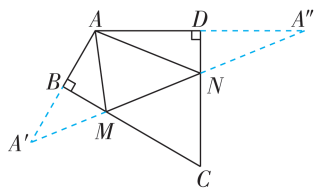
图(1)



图(2)

方法:如图(2),分别作点  $A$  关于直线  $m, n$  的对称点  $A_1, A_2$ , 连接  $A_1A_2$ ,  $A_1A_2$  与直线  $m$  的交点即为点  $P$ , 与直线  $n$  的交点即为点  $Q$ , 此时  $\triangle PAQ$  的周长有最小值, 为  $PA+QA+PQ=PA_1+QA_2+PQ=A_1A_2$ .

【解析】如图,分别作  $A$  关于直线  $BC$  和  $CD$  的对称点  $A', A''$ , 连接  $A'A''$ , 交  $BC$  于  $M$ , 交  $CD$  于  $N$ , 则易得  $A'A''$  的长即为  $\triangle AMN$  周长的最小值. 因为  $\angle DAB = 120^\circ$ ,



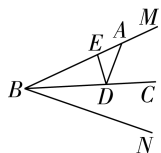
所以  $\angle A' + \angle A'' = 180^\circ - \angle DAB = 60^\circ$ . 因为  $\angle A' = \angle MAA'$ ,  $\angle NAD = \angle A''$ , 且  $\angle A' + \angle MAA' = 180^\circ - \angle AMA' = \angle AMN$ ,  $\angle NAD + \angle A'' = 180^\circ - \angle ANA'' = \angle ANM$ , 所以  $\angle AMN + \angle ANM = \angle A' + \angle MAA' + \angle NAD + \angle A'' = 2(\angle A' + \angle A'') = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$ . 故选 B.

#### 大招解读 | 两动一定 (有去无回)

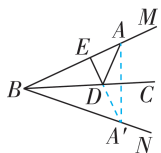
条件:如图(1),  $BC$  是  $\angle MBN$  的平分线, 点  $A$  是  $BM$  上的一个定点, 点  $E, D$  分别为  $BA, BC$  上的两个动点, 求  $DA+DE$  的最小值.

方法1:如图(2),找点  $A$  关于  $BC$  的对称点  $A'$ , 实现化“折”为“直”. 过点  $A'$  作  $A'E \perp AB$  于点  $E$ , 交  $BC$  于点  $D$ , 则  $A'E$  的长即为  $DA+DE$  的最小值;

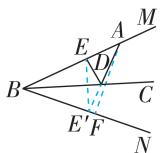
方法2:如图(3),作点  $E$  关于  $BC$  的对称点  $E'$ , 连接  $AE'$ , 交  $BC$  于点  $D$ , 过点  $A$  作  $AF \perp BN$  于点  $F$ . 由轴对称的性质易得  $DA+DE=AE'$ . 因为  $BC$  是  $\angle MBN$  的平分线, 所以点  $E'$  在  $BN$  上, 所以  $AE' \geq AF$ , 所以  $DA+DE$  的最小值为  $AF$  的长.



图(1)

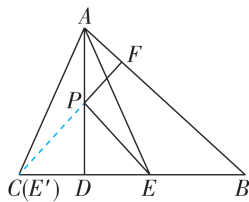


图(2)



图(3)

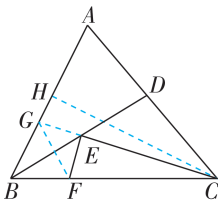
**3. 24 【解析】**作  $E$  关于  $AD$  的对称点  $E'$ , 过  $E'$  作  $E'F \perp AB$  于  $F$ , 交  $AD$  于  $P$ , 如图. 因为  $E$  关于  $AD$  的对称点为  $E'$ ,  $AD \perp BC$ ,  $AC = AE$ , 所以点  $E'$  与点  $C$  重合, 所以  $PE + PF$  的最小值即为  $PE' + PF = CF$ , 所以  $CF = 6$ . 由三角形的面积公式可知  $\frac{1}{2} \times AB \times$



#### 关键点拨

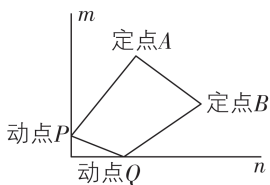
作点  $F$  关于  $BD$  的对称点  $G$ , 连接  $CG$ , 交  $BD$  于  $E$ , 作  $CH \perp AB$  于  $H$ , 可得出  $CE + EF = CG \geq CH$ , 进一步利用面积公式得出结果.

**4. B 【解析】**如图, 作点  $F$  关于直线  $BD$  的对称点  $G$ , 连接  $CG$ , 交  $BD$  于  $E$ , 作  $CH \perp AB$  于  $H$ . 由轴对称的性质易得  $CE + EF = CG$ . 因为  $BD$  平分  $\angle ABC$ , 所以点  $G$  在  $AB$  上, 所以  $CG \geq CH$ , 所以  $CE + EF$  的最小值为  $CH$  的长. 因为  $\frac{1}{2} AB \cdot CH = 18$ , 所以  $\frac{1}{2} \times 6CH = 18$ , 所以  $CH = 6$ , 所以  $CE + EF$  的最小值为 6. 故选 B.



#### 大招解读 | 两定两动

条件: 如图, 点  $A, B$  为定点, 点  $Q$  在直线  $n$  上运动, 点  $P$  在直线  $m$  上运动, 求四边形  $APQB$  周长的最小值.



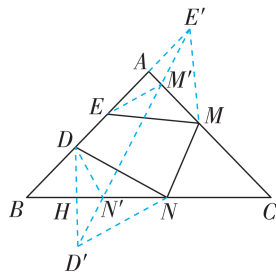
方法: 作点  $A$  关于直线  $m$  的对称点  $A_1$ , 作点  $B$  关于直线  $n$  的对称点  $B_1$ , 连接  $A_1B_1$ ,  $A_1B_1$  与直线  $m$  的交点即为点  $P$ , 与直线  $n$  的交点即为点  $Q$ , 此时四边形  $APQB$  的周长最小, 最小为  $AB + AP + PQ + BQ = AB + A_1P + PQ + B_1Q = AB + A_1B_1$ .

**5. B 【解析】**如图, 作点  $D$  关于直线  $BC$  的对称点  $D'$ , 作点  $E$  关于直线  $AC$  的对称点  $E'$ , 连接  $D'E'$  分别交  $AC, BC$  于点  $M', N'$ , 连接  $ME', ND', EM', DN'$ . 由轴对称的性质可得  $ME = ME', ND = ND'$ , 所以四边形  $DEMN$  的周长为  $DE + ME + MN + ND = DE + ME' + MN + ND' \geq DE + D'E'$ . 因为  $DE$  的长固定, 所以当点  $M$  与点  $M'$  重合, 点  $N$  与点  $N'$  重合时, 四边形  $DEMN$  的周长最小, 此时  $\angle DNM + \angle EMN = \angle DN'M' +$

#### 关键点拨

能用一条线段表示出三条线段的和的最小值, 并确定值最小时点  $M, N$  的位置是解题的关键.

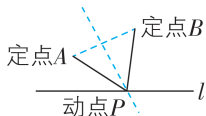
$\angle EM'N'$ . 由对称性、三角形内角和及平角的性质可知  $\angle DN'M' = 180^\circ - \angle DN'D' = \angle N'DD' + \angle N'D'D = 2\angle N'D'D$ ,  $\angle EM'N' = 180^\circ - \angle EM'E' = \angle M'EE' + \angle M'E'E = 2\angle M'E'E$ , 所以  $\angle DN'M' + \angle EM'N' = 2\angle N'D'D + 2\angle M'E'E = 2(180^\circ - \angle D'DE')$ . 设  $DD'$  与  $BC$  交于点  $H$ . 因为  $AB = AC$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ , 所以易得  $\angle BDH = 45^\circ$ , 所以  $\angle D'DE' = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ , 所以  $\angle DN'M' + \angle EM'N' = 2(180^\circ - 135^\circ) = 90^\circ$ , 即当四边形  $DEMN$  的周长最小时,  $\angle DNM + \angle EMN$  的度数是  $90^\circ$ , 故选 B.



#### 大招解读 | 线段差最值问题

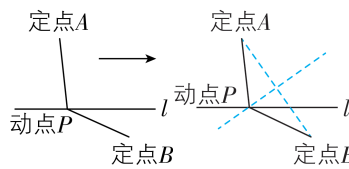
1. 在直线  $l$  上找一点  $P$ , 使  $|PA - PB|$  最小.

同侧:



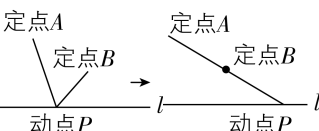
因为绝对值的最小值为 0, 所以当  $PA = PB$  时,  $|PA - PB|$  最小, 所以作线段  $AB$  的垂直平分线交  $l$  于点  $P$ , 此时  $PA = PB$ .

异侧:



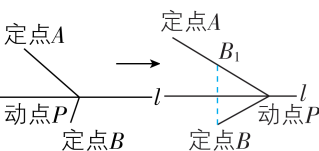
2. 在直线  $l$  上找一点  $P$ , 使  $|PA - PB|$  最大.

同侧:



因为  $|PA - PB| < AB$  (三角形两边之差小于第三边), 所以当  $A, B, P$  三点共线时,  $|PA - PB|$  最大.

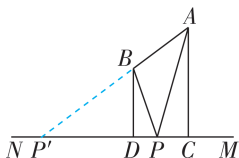
异侧:



作点  $B$  关于  $l$  的对称点  $B_1$ , 连接  $AB_1$  并延长交  $l$  于点  $P$ . 此时,  $|PA - PB|$  最大, 为  $AB_1$  的长.

**6. 5 【解析】**如图, 延长  $AB$  交  $MN$  于点  $P'$ . 因为

$P'A - P'B = AB$ ,  $AB \geq |PA - PB|$ , 所以当点  $P$  运动到点  $P'$  的位置时,  $|PA - PB|$  的值最大. 因为  $AB = 5$ , 所以  $|PA - PB|$  的最大值为 5. 故答案为 5.



### 全章综合训练

#### 刷中考

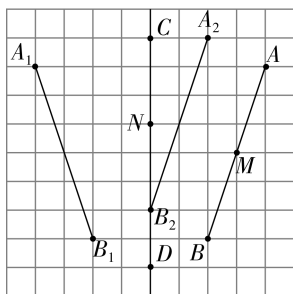
1. **C** 【解析】如果一个平面图形沿着一条直线折叠后, 直线两旁的部分能够互相重合, 那么这个图形叫作轴对称图形. A 选项, 不是轴对称图形, 不符合题意; B 选项, 不是轴对称图形, 不符合题意; C 选项, 是轴对称图形, 符合题意; D 选项, 不是轴对称图形, 不符合题意. 故选 C.

2. **A** 【解析】由轴对称的性质得到  $\triangle ABO \cong \triangle CDO$ ,  $AC \perp PQ$ ,  $BD \perp PQ$ ,  $\therefore AC \parallel BD$ ,  $\therefore$  B、C、D 选项不符合题意. 故选 A.

3. **C** 【解析】由作图知,  $EF$  垂直平分  $AB$ ,  $\therefore AD = BD$ ,  $\therefore \triangle BCD$  的周长为  $BD + CD + BC = AD + CD + BC = AC + BC$ .  $\because AB = AC = 6$ ,  $BC = 4$ ,  $\therefore \triangle BCD$  的周长为  $6 + 4 = 10$ , 故选 C.

4. **(-5, -1)** 【解析】根据关于  $y$  轴对称的点的坐标特征可得, 点  $P(5, -1)$  关于  $y$  轴对称的点的坐标为  $(-5, -1)$ , 故答案为  $(-5, -1)$ .

5. 【解】(1) 如图所示, 线段  $A_1B_1$  即为所求.  
(2) 如图所示, 线段  $A_2B_2$  即为所求.  
(3) 如图所示, 点  $M, N$  即为所求.

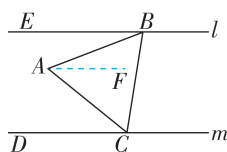


6. **B** 【解析】如图, 过点  $A$  作  $AF \parallel l$ .  $\because$  直线  $l \parallel m$ ,  $\therefore AF \parallel m$ .  $\because \triangle ABC$  是等边三角形,  $\therefore \angle BAC = 60^\circ$ .  $\because AF \parallel l$ ,  $\therefore \angle BAF = \angle ABE$ .  $\because \angle ABE = 21^\circ$ ,  $\therefore \angle BAF = 21^\circ$ ,  $\therefore \angle CAF = \angle BAC - \angle BAF = 60^\circ - 21^\circ = 39^\circ$ .  $\therefore AF \parallel m$ ,

#### 思路分析

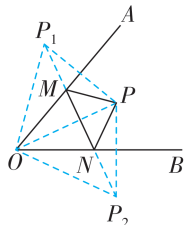
过点  $A$  作  $AF \parallel l$ , 则  $AF \parallel m$ , 根据平行线的性质得出  $\angle BAF = \angle ABE$ ,  $\angle ACD = \angle CAF$ , 根据等边三角形的性质得出  $\angle BAC = 60^\circ$ , 即可求出  $\angle ACD$  的度数.

$\therefore \angle ACD = \angle CAF = 39^\circ$ , 故选 B.



7. **100** 【解析】因为等腰三角形的一个底角的度数为  $40^\circ$ , 所以其顶角的度数为  $180^\circ - 40^\circ \times 2 = 100^\circ$ . 故答案为 100.

8. **80** 【解析】如图, 作  $P$  关于  $OA, OB$  的对称点  $P_1, P_2$ , 连接  $OP_1, OP_2, P_1P_2, OP, P_1P_2$  分别交  $OA, OB$  于点  $M, N$ , 此时  $\triangle PMN$  的周长最小.  $\because P, P_1$  关于  $OA$  对称,  $\therefore \angle P_1OP = 2\angle MOP$ ,  $OP_1 = OP$ ,  $P_1M = PM$ ,  $\angle OP_1M = \angle OPM$ . 同理,  $\angle P_2OP = 2\angle NOP$ ,  $OP = OP_2$ ,  $\angle OP_2N = \angle OPN$ ,  $\therefore \angle P_1OP_2 = \angle P_1OP + \angle P_2OP = 2(\angle MOP + \angle NOP) = 2\angle AOB = 100^\circ$ ,  $OP_1 = OP_2 = OP$ ,  $\therefore \triangle P_1OP_2$  是等腰三角形,  $\therefore \angle OP_2N = \angle OP_1M = 40^\circ$ ,  $\therefore \angle MPN = \angle MPO + \angle NPO = \angle OP_1M + \angle OP_2N = 80^\circ$ . 故答案为  $80^\circ$ .



#### 刷章测

1. **C** 【解析】由①的折叠方式可知,  $\angle BAD = \angle CAD$ , 所以  $AD$  是  $\triangle ABC$  的角平分线. 由②的折叠方式可知,  $\angle ADB = \angle ADB'$ . 又因为  $\angle ADB + \angle ADB' = 180^\circ$ , 所以  $\angle ADB = \angle ADB' = 90^\circ$ , 即  $AD \perp BC$ , 所以  $AD$  是  $\triangle ABC$  的高线. 由③的折叠方式可知,  $CD = BD$ , 所以  $AD$  是  $\triangle ABC$  的中线. 故选 C.

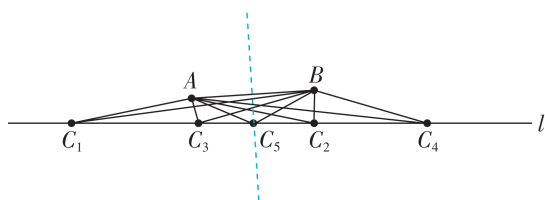
2. **B** 【解析】 $\because$  点  $A(m-1, 3)$  与点  $B(2, n-1)$  关于  $x$  轴对称,  $\therefore m-1=2, n-1=-3$ ,  $\therefore m=3, n=-2$ ,  $\therefore (m+n)^{2020} = 1$ . 故选 B.

3. **B** 【解析】在  $\triangle ABC$  中,  $\angle BAC = 75^\circ$ ,  $\angle ACB = 35^\circ$ ,  $\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 70^\circ$ .  $\because BD$  平分  $\angle ABC$ ,  $\therefore \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 35^\circ$ ,  $\therefore \angle DBC = \angle ACB$ ,  $\therefore BD = CD$ ,  $\therefore AD + BD = AD + CD = AC = 8$ , 故选 B.

4. **D** 【解析】A 选项,  $\because \angle C = 72^\circ, \angle A = 36^\circ$ ,  $\therefore \angle ABC = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$ .  $\because BD$  平分  $\angle ABC$ ,  $\therefore \angle DBC = \angle DBA = \angle A = 36^\circ$ ,

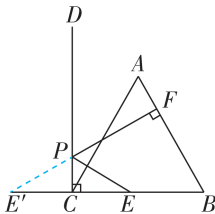
$\therefore \angle BDC = \angle C = 72^\circ$ ,  $AD = BD$ ,  $\therefore BC = BD$ ,  
 $\therefore \triangle ABD$  和  $\triangle BCD$  都为等腰三角形,  $\therefore BD$  能把  $\triangle ABC$  分成两个等腰三角形, 故 A 不符合题意. B 选项,  $\therefore BD$  是线段  $AC$  的垂直平分线,  $\angle C = \angle A = 45^\circ$ ,  $\therefore \angle CDB = \angle ADB = 90^\circ$ ,  
 $\therefore \angle ABD = \angle CBD = \angle C = \angle A = 45^\circ$ ,  $\therefore AD = BD$ ,  $DC = BD$ ,  $\therefore \triangle ABD$  和  $\triangle BCD$  都为等腰三角形,  $\therefore BD$  能把  $\triangle ABC$  分成两个等腰三角形, 故 B 不符合题意. C 选项,  $\therefore \angle A = 30^\circ$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ ,  $\therefore BC = \frac{1}{2}AC$ ,  $\angle C = 60^\circ$ .  $\therefore CD = BC = \frac{1}{2}AC$ ,  $\therefore BC = CD = AD$ ,  $\triangle BCD$  是等边三角形,  $\therefore AD = BD = CD$ ,  $\therefore \triangle ABD$  和  $\triangle BCD$  都为等腰三角形,  $\therefore BD$  能把  $\triangle ABC$  分成两个等腰三角形, 故 C 不符合题意. D 选项,  $\therefore \angle A = \angle C = 30^\circ$ ,  $AB = AD$ ,  $\therefore \angle ABD = \angle ADB = 75^\circ$ ,  $\angle ABC = 120^\circ$ ,  $\therefore \angle BDC = 105^\circ$ ,  $\angle DBC = 45^\circ$ ,  $\therefore \triangle BDC$  不是等腰三角形,  $\therefore BD$  不能把  $\triangle ABC$  分成两个等腰三角形, 故 D 符合题意. 故选 D.

5. **A** 【解析】如图, 点  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  即为符合条件的点  $C$ , 故选 A.

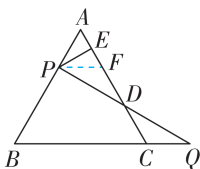


6. **B** 【解析】如图, 作  $E$  点关于  $CD$  的对称点  $E'$ , 过  $E'$  作  $E'F \perp AB$  于点  $F$ , 交  $CD$  于点  $P$ , 连接  $PE$ , 则  $PE = PE'$ ,  $\therefore EP + FP = PE' + PF = E'F$ , 此时  $EP + FP$  的值最小.

$\therefore \triangle ABC$  是等边三角形,  
 $\therefore \angle B = 60^\circ$ .  $\therefore E'F \perp AB$ ,  
 $\therefore \angle FE'B = 30^\circ$ ,  $\therefore BE' = 2BF = 2 \times 5 = 10$ .  $\therefore BE = 4$ ,  
 $CE = CE'$ ,  $\therefore 10 = 2CE + BE = 2CE + 4$ ,  $\therefore CE = 3$ ,  
 $\therefore BC = BE + CE = 4 + 3 = 7$ ,  $\therefore AB = BC = 7$ ,  
 $\therefore AF = AB - BF = 7 - 5 = 2$ , 故选 B.



7. **A** 【解析】过  $P$  作  $BC$  的平行线交  $AC$  于  $F$ , 如图,  $\therefore \angle Q = \angle FPD$ .  $\therefore \triangle ABC$  是等边三角形,  $PF \parallel BC$ ,  
 $\therefore \angle APF = \angle B = 60^\circ$ ,  $\angle AFP = \angle ACB = 60^\circ$ ,



### 关键点拨

得到规律: 第  $n$  次变换后的对角线交点  $M$  的对应点的坐标: ①  $n$  为奇数时坐标为  $(2+n, -2)$ ; ②  $n$  为偶数时坐标为  $(2+n, 2)$  是解题关键.

### 归纳总结

需分别按  $AB = AC$ ,  $AC = BC$ ,  $AB = BC$  三种情形画出图形, 其中当  $AC = BC$  时,  $C$  在  $AB$  的垂直平分线与直线  $l$  的交点处.

$\therefore \triangle APF$  是等边三角形,  $\therefore AP = PF$ .  $\therefore AP = CQ$ ,  $\therefore PF = CQ$ . 在  $\triangle PFD$  和  $\triangle QCD$  中,  

$$\begin{cases} \angle FPD = \angle Q, \\ \angle PDF = \angle QDC, \\ PF = CQ, \end{cases} \therefore \triangle PFD \cong \triangle QCD (AAS),$$
  
 $\therefore FD = CD$ .  $\therefore PE \perp AC$  于  $E$ ,  $\triangle APF$  是等边三角形,  $\therefore AE = EF$ ,  $\therefore AE + DC = EF + FD$ ,  $\therefore DE = \frac{1}{2}AC$ .  $\therefore AC = 4$ ,  $\therefore DE = 2$ . 故选 A.

8. **A** 【解析】 $\therefore$  正方形  $ABCD$  顶点  $A(1, 3)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(3, 1)$ ,  $\therefore$  对角线交点  $M$  的坐标为  $(2, 2)$ . 根据题意得第 1 次变换后点  $M$  的对应点的坐标为  $(2+1, -2)$ , 即  $(3, -2)$ ; 第 2 次变换后点  $M$  的对应点的坐标为  $(2+2, 2)$ , 即  $(4, 2)$ ; 第 3 次变换后点  $M$  的对应点的坐标为  $(2+3, -2)$ , 即  $(5, -2)$ ;  $\therefore$  第  $n$  次变换后的点  $M$  的对应点的坐标: 当  $n$  为奇数时坐标为  $(2+n, -2)$ , 当  $n$  为偶数时坐标为  $(2+n, 2)$ ,  $\therefore$  连续经过 2 020 次变换后, 正方形  $ABCD$  对角线的交点  $M$  的坐标变为  $(2\ 022, 2)$ . 故选 A.

9. **D** 【解析】如图 (1), 连接  $OB$ .  $\therefore \angle BAC = 120^\circ$ ,  $AB = AC$ ,  $AD \perp BC$ ,  $\therefore \angle ABC = \angle ACB = 30^\circ$ ,  $BD = CD$ ,  $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$ ,  $\therefore AD$  垂直平分  $BC$ ,  $\therefore OB = OC$ .  $\therefore OP = OC$ ,  $\therefore OB = OC = OP$ ,  $\therefore \angle APO = \angle ABO$ ,  $\angle DCO = \angle DBO$ ,  $\therefore \angle APO + \angle DCO = \angle ABO + \angle DBO = \angle ABD = 30^\circ$ , 故 ① 正确.  $\therefore \angle APC + \angle DCP + \angle PBC = 180^\circ$ ,  $\therefore \angle APC + \angle DCP = 150^\circ$ .  $\therefore \angle APO + \angle DCO = 30^\circ$ ,  $\therefore \angle OPC + \angle OCP = 120^\circ$ ,  $\therefore \angle POC = 180^\circ - (\angle OPC + \angle OCP) = 60^\circ$ .  $\therefore OP = OC$ ,  $\therefore \triangle OPC$  是等边三角形, 故 ② 正确.  $\therefore \triangle OPC$  是等边三角形,  $\therefore OP = OC = PC$ ,  $\angle OPC = 60^\circ$ .

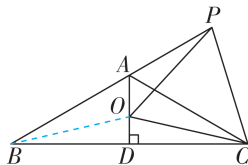


图 (1)

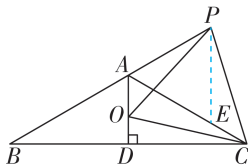


图 (2)

如图 (2), 在  $AC$  上截取  $AE = PA$ .  $\therefore \angle PAE = 180^\circ - \angle BAC = 60^\circ$ ,  $\therefore \triangle APE$  是等边三角形,  $\therefore \angle PEA = \angle APE = 60^\circ$ ,  $PE = PA$ ,  $\therefore \angle APO + \angle OPE = 60^\circ$ .  $\therefore \angle OPE + \angle CPE = \angle CPO =$



$60^\circ$ ,  $\therefore \angle APO = \angle CPE$ . 在  $\triangle OPA$  和  $\triangle CPE$  中,  $\begin{cases} PA=PE, \\ \angle APO = \angle EPC, \\ OP=CP, \end{cases} \therefore \triangle OPA \cong \triangle CPE$

(SAS),  $\therefore AO=CE$ ,  $\therefore AC=CE+AE=AO+AP$ , 故③正确.

如图(3), 过点  $C$  作  $CH \perp AP$  于  $H$ .  $\because \angle PAC = \angle DAC = 60^\circ$ ,  $AD \perp BC$ ,

$\therefore CH = CD$ .  $\therefore S_{\triangle ABC} =$

$\frac{1}{2}AB \cdot CH$ ,  $S_{\text{四边形}AOC P} =$

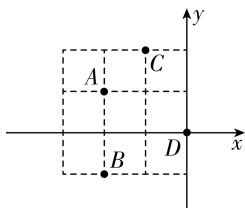
$S_{\triangle ACP} + S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}AP \cdot$

$CH + \frac{1}{2}OA \cdot CD = \frac{1}{2}AP \cdot CH + \frac{1}{2}OA \cdot CH =$

$\frac{1}{2}CH \cdot (AP + OA) = \frac{1}{2}CH \cdot AC = \frac{1}{2}CH \cdot AB$ ,

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\text{四边形}AOC P}$ , 故④正确. 故选 D.

10. D 【解析】如图所示, 点  $A$  与点  $B$  关于  $x$  轴对称, 原点是点  $D$ . 故答案为 D.



11.  $\angle A = 60^\circ$  (答案不唯一) 【解析】添加  $\angle A = 60^\circ$ . 理由如下:  $\because \triangle ABC$  为等腰三角形,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\therefore \angle B = \angle C = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 60^\circ$ ,  $\therefore \triangle ABC$  为等边三角形, 故答案为  $\angle A = 60^\circ$  (答案不唯一).

12. 11 或 13 【解析】 $\because (a-3)^2 + \sqrt{b-5} = 0$ , 根据平方及算术平方根的非负性求出  $a, b$  的值是求解本题的关键.

13.  $\frac{10}{3}$  或 10 【解析】当  $P$  在  $OA$  上,  $PO=QO$  时,  $\triangle POQ$  是等腰三角形, 如图(1)所示.  $\therefore PO=AO-AP=(10-2t)$  cm,  $OQ=t$  cm,  $\therefore$  当  $PO=QO$  时,  $10-2t=t$ , 解得  $t=\frac{10}{3}$ . 当  $P$  在  $OB$  上,  $PO=QO$  时,  $\triangle POQ$  是等腰三角形, 如图(2)所示.  $\therefore PO=AP-AO=(2t-10)$  cm,  $OQ=t$  cm,  $\therefore$  当  $PO=QO$  时,  $2t-10=t$ , 解得  $t=10$ .

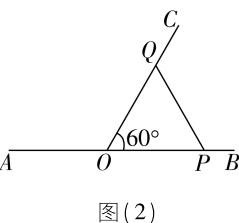
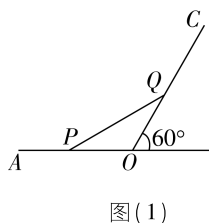
易错警示

当  $\triangle POQ$  是等腰三角形时, 需分情况讨论:

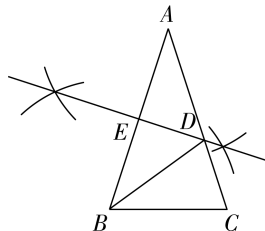
① 当点  $P$  在  $OA$  上时,  $PO=OQ$ ;

② 当点  $P$  在  $OB$  上时,  $PO=OQ$ .

故当  $t=\frac{10}{3}$  或 10 时,  $\triangle POQ$  是等腰三角形.

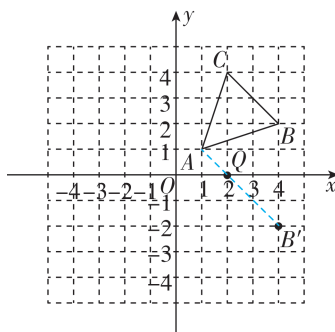


14. (1) 【解】如图.



(2) 【证明】 $\because AB=AC$ ,  $\angle A=36^\circ$ ,  $\therefore \angle ABC = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 72^\circ$ .  $\therefore DE$  是  $AB$  的垂直平分线,  $\therefore AD=BD$ ,  $\therefore \angle ABD = \angle A = 36^\circ$ ,  $\therefore \angle BDC = \angle A + \angle ABD = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ = \angle C$ ,  $\therefore BD=BC$ .

15. 【解】(1) 根据题图得  $A(1,1), B(4,2), C(2,4)$ , 故答案为  $(1,1), (4,2), (2,4)$ . (2) 如图, 作点  $B$  关于  $x$  轴对称的点  $B'$ , 连接  $AB'$ , 交  $x$  轴于  $Q$ , 则点  $Q$  即为所求, 点  $Q$  的坐标为  $(2,0)$ . 故答案为  $(2,0)$ .



16. (1) 【证明】 $\because \triangle BOC \cong \triangle ADC$ ,  $\therefore OC=DC$ .  $\therefore \angle OCD=60^\circ$ ,  $\therefore \triangle OCD$  是等边三角形. 【解】(2)  $\triangle AOD$  是直角三角形. 理由如下:  $\because \triangle OCD$  是等边三角形,  $\therefore \angle ODC=60^\circ$ .  $\because \triangle BOC \cong \triangle ADC$ ,  $\alpha=150^\circ$ ,  $\therefore \angle ADC = \angle BOC = \alpha = 150^\circ$ ,  $\therefore \angle ADO = \angle ADC - \angle ODC = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$ ,  $\therefore \triangle AOD$  是直角三角形. (3)  $\because \triangle OCD$  是等边三角形,  $\therefore \angle COD = \angle ODC = 60^\circ$ .  $\because \angle AOB = 110^\circ$ ,  $\angle ADC = \angle BOC = \alpha$ ,  $\therefore \angle AOD = 360^\circ - \angle AOB - \angle BOC - \angle COD = 360^\circ - 110^\circ - \alpha - 60^\circ = 190^\circ -$

$\alpha, \angle ADO = \angle ADC - \angle ODC = \alpha - 60^\circ, \therefore \angle OAD = 180^\circ - \angle AOD - \angle ADO = 180^\circ - (190^\circ - \alpha) - (\alpha - 60^\circ) = 50^\circ$ . 分三种情况: ①当  $\angle AOD = \angle ADO$  时,  $190^\circ - \alpha = \alpha - 60^\circ, \therefore \alpha = 125^\circ$ . ②当

$\angle AOD = \angle OAD$  时,  $190^\circ - \alpha = 50^\circ, \therefore \alpha = 140^\circ$ . ③当  $\angle ADO = \angle OAD$  时,  $\alpha - 60^\circ = 50^\circ, \therefore \alpha = 110^\circ$ . 综上所述, 当  $\alpha = 110^\circ$  或  $125^\circ$  或  $140^\circ$  时,  $\triangle AOD$  是等腰三角形.

## 第十六章 整式的乘法

### 16.1 幂的运算

#### 16.1.1 同底数幂的乘法



1. C 【解析】 $6^3 \times 6^3 \times 6^3 \times 6^3 \times 6^3 = 6^{3+3+3+3+3} = 6^{3 \times 5}$ , 故选 C.

2. C 【解析】 $\because x \cdot x^2 = x^3, \therefore$  “ $\circ$ ” 中的运算符号为  $\times$ , 故选 C.

3. A 【解析】 $\because (-a)^5 \cdot (-a)^{2n} = (-a)^{2n+5}, \therefore$  当  $a < 0, n$  为正整数, 即  $-a > 0$  时,  $(-a)^{2n+5} > 0$ , 是正数.

4.  $x+y=z$  【解析】 $\because 3^x = 12, 3^y = 6, 3^z = 72, 12 \times 6 = 72, \therefore 3^x \cdot 3^y = 3^z$ , 即  $3^{x+y} = 3^z, \therefore x+y=z$ . 故答案为  $x+y=z$ .

5.  $-a^{21}$  【解析】原式  $= -a \cdot a^5 \cdot a^6 \cdot a^7 \cdot a^2 = -a^{21}$ .

6. 【解】原式  $= (m-n) \cdot [-(m-n)^3] \cdot (m-n)^4 = -(m-n)^4 \cdot (m-n)^4 = -(m-n)^8$ .

7. 【解】 $a^4 \cdot a^3 + a \cdot a^2 \cdot a^4 + a^6 = a^7 + a^7 + a^6 = 2a^7 + a^6$ .

8. B 【解析】 $m^6 = m^1 \cdot m^5 = m^2 \cdot m^4 = m^3 \cdot m^3$ , 故 B 符合题意. 故选 B.

9. 128 【解析】由题意可知, 调整后甲袋中有球  $(29-2^x+2^y)$  个, 乙袋中有球  $29+2^x-(2^x+2^y) = (29-2^y)$  个, 丙袋中有球  $5+(2^x+2^y)-2^y = (5+2^x)$  个.  $\therefore$  一共有  $29+29+5=63$  (个) 球, 且调整后三只袋中球的个数相同,  $\therefore$  调整后每只袋中球的个数为  $63 \div 3 = 21$  (个),  $\therefore 5+2^x = 21, 29-2^y = 21, \therefore 2^x = 16, 2^y = 8, \therefore 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = 16 \times 8 = 128$ , 故答案为 128.

刷易错

10. 【解】不正确. 理由如下:  $(a-b)^{2n} \cdot (b-a)^3 \cdot (a-b)^{m-2} = (a-b)^{2n} \cdot [-(a-b)]^3 \cdot (a-b)^{m-2} = -(a-b)^{2n} \cdot (a-b)^3 \cdot (a-b)^{m-2} = -(a-b)^{2n+m+1}$ .

思路分析

首先运用同底数幂的乘法法则计算, 然后判断所得幂的底数的符号, 进而得出结果.

易错警示

把互为相反数的底数化为同底数时, 要注意负数的奇次幂中负号的处理.

#### 16.1.2 幂的乘方与积的乘方



1. C 【解析】 $\because \underbrace{2 \times 2 \times 2 \cdots 2}_{m \text{ 个 } 2} = 2^m, \therefore 2^m = (2^2)^3,$

$\therefore m = 2 \times 3 = 6$ . 故选 C.

2. C 【解析】 $(x^m \cdot x^n)^p = (x^{m+n})^p = x^{(m+n)p} = x^{mp+np}$ , 故选 C.

3. -5 【解析】 $\because 3^a \times 27^b = 3^a \times (3^3)^b = 3^a \times 3^{3b} = 3^{a+3b} = 81 = 3^4, \therefore a+3b = 4, \therefore 3-2a-6b = 3-2(a+3b) = 3-2 \times 4 = 3-8 = -5$ . 故答案为 -5.

4. 【解】(1) 原式  $= a^6 \cdot a^{12} + a^{10} = a^{18} + a^{10}$ .  
(2) 原式  $= 2x^4 + x^2 + x^6 - 5x^6 = -4x^6 + 2x^4 + x^2$ .  
(3) 原式  $= -x^{12} + 3x^8 \cdot x^4 = -x^{12} + 3x^{12} = 2x^{12}$ .

5. C 【解析】 $x^{4n} = (x^{2n})^2$ , 故选项 C 符合题意.

6. C 【解析】①  $a^{2m} = (a^2)^m$ , 正确; ②  $a^{2m} = (a^m)^2$ , 正确; ③  $a^{2m} = (-a^m)^2$ , 正确; ④ 当  $m$  为奇数时不成立, 故④错误. 故正确的有①②③, 共 3 个. 故选 C.

7.  $m^3 n^4 - 5m^4 n^8$  【解析】 $\because 3^x = m, 3^y = n, \therefore 3^{3x+4y} - 5 \times 81^{x+2y} = 3^{3x} \times 3^{4y} - 5 \times (3^4)^{x+2y} = (3^x)^3 \times (3^y)^4 - 5 \times 3^{4x+8y} = (3^x)^3 \times (3^y)^4 - 5 \times (3^x)^4 \times (3^y)^8 = m^3 n^4 - 5m^4 n^8$ . 故答案为  $m^3 n^4 - 5m^4 n^8$ .

8. 64 【解析】 $\because x+3y=3, \therefore 4^x \cdot 8^{2y} = 4^x \cdot (8^2)^y = 4^x \cdot 64^y = 4^x \cdot 4^{3y} = 4^{x+3y} = 4^3 = 64$ .

9. 【解】(1)  $\because a^m = 2, a^n = 3, \therefore a^{2m+n} = a^{2m} \cdot a^n = (a^m)^2 \cdot a^n = 2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12$ .  
(2)  $\because x^{2n} = 2, \therefore (x^{3n})^2 - 4(x^2)^{2n} = x^{6n} - 4x^{4n} = (x^{2n})^3 - 4(x^{2n})^2 = 2^3 - 4 \times 2^2 = 8 - 4 \times 4 = 8 - 16 = -8$ .

10. D 【解析】A 选项,  $(xy^2)^2 = x^2 y^4$ , 本选项错误; B 选项,  $(3xy)^3 = 27x^3 y^3$ , 本选项错误; C 选项,  $(-2a^2)^2 = 4a^4$ , 本选项错误; D 选项,  $(-3ab^2)^2 = 9a^2 b^4$ , 本选项正确. 故选 D.