

第二部分 中考真题分类集训

(一) 实数与代数式

刷考点

1. **A** 【解析】数轴上表示-2的点是M,故选A.

2. **B** 【解析】0是整数,3.14是有限小数, $\frac{2}{3}$ 是分数,它们不是无理数, $\sqrt{2}$ 是无理数,故选B.

3. **A** 【解析】 $\frac{3}{4}$ 的相反数为 $-\frac{3}{4}$,故选A.

4. **D** 【解析】 $\because 6.18 \times 10^8 = 618\,000\,000, 6.28 \times 10^8 = 628\,000\,000, 6.18 \times 10^9 = 6\,180\,000\,000, 6.28 \times 10^9 = 6\,280\,000\,000$,且 $618\,000\,000 < 628\,000\,000 < 6\,180\,000\,000 < 6\,280\,000\,000$,
 $\therefore 6.18 \times 10^8 < 6.28 \times 10^8 < 6.18 \times 10^9 < 6.28 \times 10^9$,
 \therefore 四个数中,最大的是 6.28×10^9 ,故选D.

5. **D** 【解析】观察数轴可知, $-2 < a < -1, 0 < b < 1, |a| > |b|$, $\therefore a+b < 0, a-b < 0$,故A、B、C选项的结论错误,D选项的结论正确,故选D.

6. **6** 【解析】原式 $= 5+1=6$,故答案为6.

7. 【解】原式 $= \frac{1}{2} \times 6 - 9 + (-4) = 3 - 9 - 4 = -10$.

8. 【解】(1)在第一步开始出现错误.

$$(-6) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} \right) = -6 \times \frac{1}{2} - 6 \times \frac{2}{3} + 6 \times \frac{5}{6} = -3 - 4 + 5 = -2.$$

$$(2) |2 - \sqrt{2}| - (-2)^2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 2 - \sqrt{2} - 4 \times \frac{1}{4} = 1 - \sqrt{2}.$$

9. **B** 【解析】

选项	解析	原选项正误
A	$x+2x=3x$	×
B	$x^2 \cdot x^3 = x^5$	✓
C	$x^6 \div x^2 = x^4$	×
D	$(xy)^2 = x^2y^2$	×

故选B.

10. 【解】 $(x+2)(x-2)+x(1-x) = x^2-4+x-x^2 = x-4$.

当 $x=6$ 时,原式 $= 6-4=2$.

11. 【解】(1)根据月历中数之间的关系可得 $a=4+1=5, b=4+7=11$. 故答案为5,11.

思路分析

设这两个奇数分别为 $2k+1$ 和 $2n+1$,求出它们的平方差,再利用平方差公式分解因式,根据分解因式的结果进行判断即可.

关键点拨

本题考查了分式的混合运算,能根据求出的结果得出规律是解题的关键.

(2)根据月历中数之间的关系可得 $c=n+1, d=n+7$. 故答案为 $n+1, n+7$.

(3)根据题意得 $17+2+e=2+10+18, 17+10+f=2+10+18, \therefore e=11, f=3$. 故答案为11,3.

(4)根据月历中数之间的关系可得 $9g=n+n+1+n+2+n+7+n+8+n+9+n+14+n+15+n+16, \therefore g=n+8$. 故答案为 $n+8$.

12. **D** 【解析】设一个奇数为 $2k+1$,另一个奇数为 $2n+1, k, n$ 都是自然数. 根据题意,得 $(2k+1)^2 - (2n+1)^2 = (2k+1+2n+1)(2k+1-2n-1) = 2(k+n+1) \cdot 2(k-n) = 4(k-n)(k+n+1)$. 因为 $k-n$ 或 $k+n+1$ 必有一个为偶数,所以一定能被8整除,故选D.

13. **2(x-3y)^2** 【解析】 $2x^2-12xy+18y^2 = 2(x^2-6xy+9y^2) = 2(x-3y)^2$,故答案为 $2(x-3y)^2$.

14. **4** 【解析】 $\because a+b=2, \therefore a^2-b^2+4b = (a+b)(a-b)+4b = 2(a-b)+4b = 2(a+b) = 4$,故答案为4.

15. **B** 【解析】 $\frac{a^2+12a+36}{a^2+6a} = \frac{(a+6)^2}{a(a+6)} = \frac{a+6}{a}$. 当 $a=-3$ 时,原式 $= \frac{-3+6}{-3} = -1$. 故选B.

16. **A** 【解析】 \because 计算 $\frac{A}{xy+y^2} - \frac{y}{x^2+xy}$ 的结果为 $\frac{x-y}{xy}, \therefore \frac{y}{x^2+xy} + \frac{x-y}{xy} = \frac{A}{xy+y^2}, \therefore \frac{y^2}{xy(x+y)} + \frac{(x-y)(x+y)}{xy(x+y)} = \frac{x^2}{xy(x+y)} = \frac{x}{xy+y^2} = \frac{A}{xy+y^2}, \therefore A=x$. 故选A.

17. **$-\frac{1}{x}$** 【解析】 $\because a_1 = x+1, \therefore a_2 = \frac{1}{1-a_1} = \frac{1}{1-(x+1)} = -\frac{1}{x}, \therefore a_3 = \frac{1}{1-a_2} = \frac{1}{1-(-\frac{1}{x})} = \frac{x}{x+1}, \therefore a_4 = \frac{1}{1-a_3} = \frac{1}{1-\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{\frac{1}{x+1}} = x+1, \therefore a_5 = -\frac{1}{x}, a_6 = \frac{x}{x+1}, \dots$,由上可得,每三个为一个循环组. $\because 2\,024 \div 3 = 674 \dots 2$,

$$\therefore a_{2024} = -\frac{1}{x}. \text{ 故答案为 } -\frac{1}{x}.$$

$$\begin{aligned} 18. \text{【解】原式} &= \frac{2+x-1}{x-1} \cdot \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x(x-1)}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x}{x+1}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } x = -2 \text{ 时, 原式} = \frac{-2}{-2+1} = 2.$$

$$19. \text{C} \text{ 【解析】由题意得该矩形的面积 } S = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10} \text{ (cm}^2\text{)}. \because 9 < 10 < 16, \therefore \sqrt{9} < \sqrt{10} <$$

关键点拨

掌握二次根式有意义的条件为被开方数是非负数和分式有意义的条件为分母不为0是解题的关键.

$$\sqrt{16}, \therefore 3 < \sqrt{10} < 4, \text{ 即 } S \text{ 在 } 3 \text{ 和 } 4 \text{ 之间. 故选 C.}$$

$$20. \underline{m \geq 1} \text{ 【解析】} \because \text{式子 } \frac{\sqrt{m-1}}{m+2} \text{ 在实数范围内}$$

$$\text{有意义, } \therefore \begin{cases} m-1 \geq 0, \\ m+2 \neq 0, \end{cases} \text{ 解得 } m \geq 1, \therefore m \text{ 的取值}$$

$$\text{范围是 } m \geq 1, \text{ 故答案为 } m \geq 1.$$

$$21. \underline{60} \text{ 【解析】} (\sqrt{61} + 1)(\sqrt{61} - 1) = (\sqrt{61})^2 - 1^2 = 61 - 1 = 60, \text{ 故答案为 } 60.$$

$$22. \underline{-2\sqrt{3}} \text{ 【解析】} \sqrt{12} - \sqrt{8} \cdot \sqrt{6} = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = -2\sqrt{3}. \text{ 故答案为 } -2\sqrt{3}.$$

(二) 方程(组)

刷考点

$$1. \underline{A} \text{ 【解析】当 } x = 1, y = 2 \text{ 时, } 2x + 3y = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8, \text{ 故选项 A 符合题意; 当 } x = 2, y = 1 \text{ 时, } 2x + 3y = 2 \times 2 + 3 \times 1 = 7 \neq 8, \text{ 故选项 B 不符合题意; 当 } x = -1, y = 2 \text{ 时, } 2x + 3y = 2 \times (-1) + 3 \times 2 = 4 \neq 8, \text{ 故选项 C 不符合题意; 当 } x = 2, y = 4 \text{ 时, } 2x + 3y = 2 \times 2 + 3 \times 4 = 16 \neq 8, \text{ 故选项 D 不符合题意. 故选 A.}$$

$$2. \underline{B} \text{ 【解析】根据题意得 } \frac{x}{3} \times 1 + \frac{x}{4} \times 1 + \frac{x}{5} \times 1 = 100, \text{ 即 } \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} = 100. \text{ 故选 B.}$$

$$3. \underline{B} \text{ 【解析】} \begin{cases} 3x - y = 4m + 1, \text{ ①} \\ x + y = 2m - 5, \text{ ②} \end{cases} \text{ ①} - \text{②} \text{ 得 } 2x - 2y = 2m + 6, \therefore x - y = m + 3. \text{ 由 } x - y = 4, \text{ 可得 } m + 3 = 4, \text{ 解得 } m = 1, \text{ 故选 B.}$$

$$4. \underline{C} \text{ 【解析】设购买足球 } x \text{ 个, 篮球 } y \text{ 个. 根据题意得 } 80x + 120y = 1200, \text{ 即 } 2x + 3y = 30, \text{ 则 } x = \frac{30 - 3y}{2}. \because x, y \text{ 都是正整数, } \therefore \begin{cases} x = 12, \\ y = 2 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 9, \\ y = 4 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 6, \\ y = 6 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 3, \\ y = 8, \end{cases} \therefore \text{ 共有 4 种购买方案, 故选 C.}$$

$$5. \underline{99} \text{ 【解析】} \because \text{甲纸条的 } \frac{1}{3} \text{ 与乙纸条的 } \frac{2}{5} \text{ 叠合在一起, } \therefore \frac{1}{3}a = \frac{2}{5}b, \text{ 则设 } a = 3k, b = \frac{5}{2}k. \because \text{重叠后的总长度为 } 81, \therefore a + b - \frac{2}{5}b = 81, \therefore a +$$

关键点拨

解题的关键是把方程组的两个方程相减得到 $x - y = m + 3$.

$$\frac{3}{5}b = 81, \therefore 3k + \frac{3}{5} \times \frac{5}{2}k = 81, \therefore k = 18, \therefore a = 3 \times 18 = 54, b = \frac{5}{2} \times 18 = 45, \therefore a + b = 99, \text{ 故答案为 } 99.$$

$$6. \text{【解】} \begin{cases} x + 2y = 3, \text{ ①} \\ x - 2y = 1, \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{①} + \text{②}, \text{ 得 } 2x = 4, \text{ 解得 } x = 2.$$

$$\text{①} - \text{②}, \text{ 得 } 4y = 2, \text{ 解得 } y = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{ 方程组的解为 } \begin{cases} x = 2, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

$$7. \text{【解】设胸腹高为 } x \text{ cm, 则门条的长为 } (5x - 10) \text{ cm, } AB = CD = x \text{ cm, 头部高为 } x \text{ cm, 尾部高为 } 2x \text{ cm, 所以题图 (1) 中 } BC = \frac{5}{9}(5x - 10) \text{ cm, 这只风筝的骨架的总高为 } 4x \text{ cm. 题图 (1) 中, 由 } AD = AB + BC + CD, \text{ 可得 } 5x - 10 = x + \frac{5}{9}(5x - 10) + x, \text{ 解得 } x = 20, \text{ 所以 } 4x = 80.$$

$$\text{答: 这只风筝的骨架的总高为 } 80 \text{ cm.}$$

$$8. \text{【解】设 A 种农作物的种植面积是 } x \text{ 公顷, B 种农作物的种植面积是 } y \text{ 公顷.}$$

$$\text{根据题意得 } \begin{cases} 4x + 3y = 24, \\ 8x + 9y = 60, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = 3, \\ y = 4. \end{cases}$$

$$\text{答: A 种农作物的种植面积是 } 3 \text{ 公顷, B 种农作物的种植面积是 } 4 \text{ 公顷.}$$

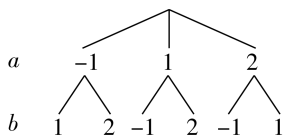
$$9. \underline{D} \text{ 【解析】} \because x_1, x_2 \text{ 是一元二次方程 } x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ 的两个实数根, } \therefore x_1 + x_2 = 4, x_1 x_2 = 3, \text{ 故选 D.}$$

10. **A** 【解析】 \because 关于 x 的一元二次方程 $(a+2)x^2+ax+a^2-4=0$ 的一个根是 $x=0$, $\therefore a^2-4=0$ 且 $a+2 \neq 0$, $\therefore a=2$, 故选 A.

11. **B** 【解析】设原来的方程为 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$). 由题知, $-\frac{b}{a}=6+1=7$, $\frac{c}{a}=-2 \times (-5)=10$, 所以 $b=-7a$, $c=10a$, 所以方程为 $ax^2-7ax+10a=0$. 观察选项可知, 原来的方程为 $x^2-7x+10=0$. 故选 B.

12. **A** 【解析】设小路的宽是 x m, 则余下的部分可拼成长为 $(100-2x)$ m, 宽为 $(50-2x)$ m 的矩形. 根据题意得 $(100-2x)(50-2x)=3600$, 整理得 $x^2-75x+350=0$, 解得 $x_1=5$, $x_2=70$ (不符合题意, 舍去), \therefore 小路的宽是 5 m. 故选 A.

13. $\frac{1}{2}$ 【解析】 \because 方程 $ax^2+bx+1=0$ 有实数根, $\therefore \Delta=b^2-4a \geq 0$. 画树状图如下:



共有 6 种等可能的结果, 其中能使该一元二次方程有实数根的结果有 3 种, \therefore 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+1=0$ 有实数根的概率为 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, 故答案为 $\frac{1}{2}$.

14. $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ 【解析】根据题意得直角三角形的两直角边长分别为 $m, \frac{n}{2}$, \therefore 四边形 EFGH 的面积为 $m^2 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 = m^2 + \frac{n^2}{4}$, 四边形 ABCD 的面积为 $\left(m - \frac{n}{2}\right)^2 = m^2 - mn + \frac{n^2}{4}$. \because 四边形 EFGH 的面积等于四边形 ABCD 面积的 2 倍, $\therefore m^2 + \frac{n^2}{4} = 2\left(m^2 - mn + \frac{n^2}{4}\right)$, 整理得 $4m^2 - 8mn + n^2 = 0$, $\therefore 4\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 8 \cdot \frac{m}{n} + 1 = 0$. 设 $\frac{m}{n} = t$, $\therefore 4t^2 - 8t + 1 = 0$, 解得 $t = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$ 或 $t = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ (舍去), $\therefore \frac{m}{n} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$, 故答案为 $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

15. 【解】 $x^2-7x=-12, x^2-7x+12=0, (x-4)(x-3)=0, \therefore x-4=0$ 或 $x-3=0, \therefore x_1=4, x_2=3$.

易错警示
不要忽略一元二次方程中二次项系数不为 0 的隐含条件.

16. 【解】(1) 设该市参加健身运动人数的年均增长率为 x . 由题意得 $32(1+x)^2=50$, 解得 $x_1=0.25=25\%$, $x_2=-2.25$ (不符合题意, 舍去). 答: 该市参加健身运动人数的年均增长率为 25%.

(2) $\because 1600 \times 100 = 160000 < 240000$, \therefore 购买的这种健身器材的套数大于 100 套. 设购买的这种健身器材的套数为 m 套. 由题意得 $m\left(1600 - \frac{m-100}{10} \times 40\right) = 240000$, 整理得 $m^2 - 500m + 60000 = 0$, 解得 $m_1=200, m_2=300$. 当 $m=300$ 时, 售价为 $1600 - \frac{300-100}{10} \times 40 = 800 < 1000$, 不符合题意, 舍去. 答: 购买的这种健身器材的套数为 200 套.

17. **D** 【解析】去分母, 得 $x+3=5x$, 移项、合并同类项, 得 $-4x=-3$, 解得 $x=\frac{3}{4}$, 经检验, $x=\frac{3}{4}$ 是分式方程的解, 故选 D.

18. **D** 【解析】设 B 型机器人每小时搬运 x 千克化工原料, 则 A 型机器人每小时搬运 $(x+30)$ 千克化工原料. 根据题意, 得 $\frac{900}{x+30} = \frac{600}{x}$, 解得 $x=60$, 经检验, $x=60$ 是原方程的解且符合题意, $\therefore x+30=90$. 故选 D.

刷有所得

分式方程无解: 将分式方程化为整式方程后, ①当整式方程无解时, 分式方程无解; ②当整式方程有解, 但所有解都是分式方程的增根时, 分式方程也无解.

19. **A** 【解析】 $\frac{kx}{x-3} - 2 = \frac{3}{3-x}$ 去分母并整理得 $(k-2)x=-9$. ①当 $k-2=0$ 时, 整式方程无解, 即原分式方程无解, 此时 $k=2$. ②当 $k-2 \neq 0$ 时, 解得 $x = \frac{-9}{k-2}$. \because 关于 x 的分式方程 $\frac{kx}{x-3} - 2 = \frac{3}{3-x}$ 无解, $\therefore x-3=0$, 解得 $x=3$, 则 $\frac{-9}{k-2}=3$, 解得 $k=-1$, 经检验, $k=-1$ 是方程 $\frac{-9}{k-2}=3$ 的解. 综上, $k=-1$ 或 $k=2$. 故选 A.

20. 【解】小李的解法中, 第一步是去分母. 去分母的依据: 等式的基本性质. 小李的解答过程不正确.

正确的解答过程: $\frac{1-x}{x-2} = \frac{1}{2-x} - 2$, 去分母, 得 $1-x = -1 - 2(x-2)$, 去括号, 得 $1-x = -1 - 2x + 4$, 移项、合并同类项, 得 $x=2$. 检验: 当 $x=2$ 时, $x-2=0$. \therefore 原分式方程无解.

21. 【解】方程两边同时乘 $(x-2)(x-1)$, 得 $(x-3)(x-1)-2=2(x-2)$, 去括号, 得 $x^2-3x-x+3-2=2x-4$, 移项, 合并同类项, 得 $x^2-6x+5=0$, $\therefore (x-1)(x-5)=0$, $\therefore x-1=0$ 或 $x-5=0$, 解得 $x=1$ 或 $x=5$. 检验: 当 $x=1$ 时, $x-1=0$, $\therefore x=1$ 是原分式方程的增根; 当 $x=5$ 时, $(x-2)(x-1)=12 \neq 0$, $\therefore x=5$ 是原分式方程的解, \therefore 原分式方程的解为 $x=5$.

22. 【解】(1) 设 A 种外墙漆每千克的价格是 x 元, B 种外墙漆每千克的价格是 y 元. 根据题意得 $\begin{cases} 300x+300y=15\ 000, \\ x-y=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=26, \\ y=24. \end{cases}$

答: A 种外墙漆每千克的价格是 26 元, B 种外墙漆每千克的价格是 24 元.

(2) 设甲每小时粉刷外墙的面积是 m 平方米, 则乙每小时粉刷外墙的面积是 $\frac{4}{5}m$ 平方米.

根据题意得 $\frac{500}{\frac{4}{5}m} - \frac{500}{m} = 5$,

解得 $m=25$, 经检验, $m=25$ 是所列方程的解, 且符合题意.

答: 甲每小时粉刷外墙的面积是 25 平方米.

(三) 一元一次不等式(组)

刷考点

1. A 【解析】 \therefore 初始时, 两杯水的质量分别为 a 克和 b 克, \therefore 加入 c 克水后, 两杯水的质量分别变为 $(a+c)$ 克和 $(b+c)$ 克. $\therefore a > b$, $\therefore a+c > b+c$, 故选 A.

2. C 【解析】 $\therefore a-b+1=0$, $\therefore b=a+1$. $\therefore 0 < a+b+1 < 1$, $\therefore 0 < a+a+1+1 < 1$, 即 $0 < 2a+2 < 1$, $\therefore -1 < a < -\frac{1}{2}$, 故选项 A 错误, 不合题意. $\therefore b=a+1$, $-1 < a < -\frac{1}{2}$, $\therefore 0 < b < \frac{1}{2}$, 故选项 B 错误, 不合

题意. 由 $-1 < a < -\frac{1}{2}$ 得 $-2 < 2a < -1$, $-4 < 4a < -2$;

由 $0 < b < \frac{1}{2}$ 得 $0 < 4b < 2$, $0 < 2b < 1$, $\therefore -2 < 2a+4b < 1$, $-4 < 4a+2b < -1$, 故选项 C 正确, 符合题意, 选项 D 错误, 不合题意. 故选 C.

3. C 【解析】 $\frac{1}{2}x+1 \leq 2$, 移项, 得 $\frac{1}{2}x \leq 2-1$, 即 $\frac{1}{2}x \leq 1$, 系数化为 1, 得 $x \leq 2$, 解集在数轴上表示为 $\overbrace{0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4}^{\rightarrow}$, 故选 C.

4. 0 (答案不唯一) 【解析】不等式整理得 $\frac{1}{2}x \leq 1-m$, 解得 $x \leq 2-2m$. \therefore 不等式 $m-\frac{x}{2} \leq 1-x$ 有正数解, $\therefore 2-2m > 0$, 解得 $m < 1$, $\therefore m$ 的值可以是 0, 故答案为 0 (答案不唯一).

5. 【解】 $\frac{3x-2}{6} - \frac{x+3}{3} \leq 1$, $\therefore 3x-2-2(x+3) \leq 6$, $\therefore 3x-2-2x-6 \leq 6$, $\therefore x \leq 14$, \therefore 原不等式的解

刷有所得

确定不等式组的解集的口诀: 同大取大, 同小取小, 大小小大中间找, 大大小小找不到.

关键点拨

由 $a-b+1=0$ 得出 $b=a+1$, 代入 $0 < a+b+1 < 1$ 可得 $-1 < a < -\frac{1}{2}$, 再根据 $b=a+1$ 即可求出 $0 < b < \frac{1}{2}$, 然后判断各选项即可.

集为 $x \leq 14$.

6. B 【解析】A 选项, 原不等式组的解集为 $x > 2$, 不符合题意; B 选项, 原不等式组无解, 符合题意; C 选项, 原不等式组的解集为 $x < -1$, 不符合题意; D 选项, 原不等式组的解集为 $-1 < x < 2$, 不符合题意. 故选 B.

7. B 【解析】由 $x-a > 2$, 得 $x > a+2$, 由 $x+1 < b$, 得 $x < b-1$. \therefore 不等式组的解集为 $-1 < x < 1$, $\therefore a+2 = -1$, $b-1 = 1$, 解得 $a = -3$, $b = 2$, $\therefore (a+b)^{2\ 023} = (-3+2)^{2\ 023} = (-1)^{2\ 023} = -1$. 故选 B.

8. C 【解析】 \therefore 点 $P(2a-4, a+3)$ 在第二象限, $\therefore \begin{cases} 2a-4 < 0, \\ a+3 > 0, \end{cases} \therefore -3 < a < 2$, 故选项 A 错误. \therefore 点 $P(2a-4, a+3)$ 为“整点”, $-3 < a < 2$, \therefore 整数 a 为 $-2, -1, 0, 1$, \therefore “整点” P 为 $(-8, 1)$, $(-6, 2)$, $(-4, 3)$, $(-2, 4)$, \therefore 点 P 的个数为 4 个, 故选项 B 错误. $\therefore \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}, \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}, \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}, \frac{4}{-2} = -2$, \therefore 若 P 为“超整点”, 则点 P 的个数为 1 个, 故选项 C 正确. \therefore “超整点” P 的坐标为 $(-2, 4)$, \therefore 点 P 到两坐标轴的距离之和为 $2+4=6$, $6 < 10$, 故选项 D 错误. 故选 C.

9. -1 (答案不唯一) 【解析】 $\begin{cases} x+2 \geq 1, \textcircled{1} \\ 2x-1 < 5, \textcircled{2} \end{cases}$ 由 $\textcircled{1}$ 得 $x \geq -1$, 由 $\textcircled{2}$ 得 $x < 3$, \therefore 该不等式组的解集为 $-1 \leq x < 3$, \therefore 该不等式组的一个整数解为 -1 . 故答案为 -1 (答案不唯一).

10. $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ 【解析】解不等式 $4-2x \geq 0$, 得 $x \leq 2$, 解不等式 $\frac{1}{2}x-a > 0$, 得 $x > 2a$, \therefore 不等式

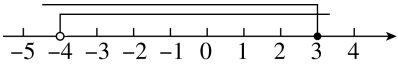
组的解集为 $2a < x \leq 2$. \therefore 不等式组恰有 3 个整数解, $\therefore -1 \leq 2a < 0$, 即 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$. 故答案为 $-\frac{1}{2} \leq a < 0$.

11.2 或-1 【解析】 $\begin{cases} 2x+1 > x+a, ① \\ \frac{x}{2}+1 \geq \frac{5}{2}x-9, ② \end{cases}$ 解不等式

①得 $x > a-1$, 解不等式②得 $x \leq 5$. \therefore 不等式组有解, $\therefore a-1 < x \leq 5$. \therefore 所有整数解的和为 14, \therefore 不等式组的整数解为 5, 4, 3, 2 或 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, $\therefore 1 \leq a-1 < 2$ 或 $-2 \leq a-1 < -1$, $\therefore 2 \leq a < 3$ 或 $-1 \leq a < 0$. $\therefore a$ 为整数, $\therefore a = 2$ 或 $a = -1$, 故答案为 2 或-1.

12. 【解】 $\begin{cases} 2x-7 < 3(x-1), ① \\ \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{3}x \leq 1, ② \end{cases}$ 解不等式①, 得

$x > -4$, 解不等式②, 得 $x \leq 3$, 所以不等式组的解集是 $-4 < x \leq 3$, 不等式组的解集在数轴上的表示如图所示:



13. C 【解析】设小明答对 x 道题, 则答错或不答的题数为 $(20-x)$ 道. 根据题意得 $10x - 5(20-x) \geq 80$, 解得 $x \geq 12$, $\therefore x$ 的最小值为 12, \therefore 他至少要答对 12 道题. 故选 C.

14. 8.8 【解析】设打 x 折销售, 则 $5 \times 0.1x - 4 \geq 4 \times 10\%$, 解得 $x \geq 8.8$. 故答案为 8.8.

15. 【解】(1) 由题意得, $\frac{800}{a} - \frac{600}{a} = 25$, 解得 $a = 8$.

思路分析

求出 $a-1 < x \leq 5$, 根据所有整数解的和为 14, 列出关于 a 的不等式组, 得到 a 的范围, 即可求得答案.

关键点拨

利润率 = (售价 - 进价) \div 进价, 利用利润率公式列不等式是解题的关键.

经检验, $a = 8$ 是原方程的解, 且符合题意, $\therefore a$ 的值为 8.

(2) 1 小时 = 3 600 秒.

设需要 x 个这样的机器人.

由题意得 $\frac{3\ 600}{8} \times 4x \geq 10\ 000$, 解得 $x \geq \frac{50}{9}$.

$\therefore x$ 为正整数, $\therefore x$ 的最小值为 6.

答: 至少需要 6 个这样的机器人同时工作 1 小时, 才能使采摘的苹果个数不少于 10 000 个.

16. 【解】(1) 设 A 品种柑橘礼盒每件的售价为 x 元, 则 B 品种柑橘礼盒每件的售价为 $(x+20)$ 元. 由题意得 $25x + 15(x+20) = 3\ 500$, 解得 $x = 80$, $\therefore x+20 = 100$.

答: A 品种柑橘礼盒每件的售价为 80 元, B 品种柑橘礼盒每件的售价为 100 元.

(2) 设销售 A 品种柑橘礼盒 m 件, 则销售 B 品种柑橘礼盒 $(1\ 000-m)$ 件.

由题意得 $\begin{cases} m \leq 1.5(1\ 000-m), \\ 50m + 60(1\ 000-m) \leq 54\ 050, \end{cases}$

解得 $595 \leq m \leq 600$.

设收益为 w 元. 由题意得 $w = (80-50)m + (100-60) \cdot (1\ 000-m) = -10m + 40\ 000$.

$\therefore -10 < 0$, $\therefore w$ 随 m 的增大而减小,

\therefore 当 $m = 595$ 时, w 有最大值, 最大值为 $-10 \times 595 + 40\ 000 = 34\ 050$,

此时, $1\ 000-m = 1\ 000-595 = 405$.

答: 要使农户收益最大, 应该安排销售 A 品种柑橘礼盒 595 件, B 品种柑橘礼盒 405 件, 农户在这次农产品展销活动中的最大收益为 34 050 元.

(四) 一次函数

刷考点

1. D 【解析】注水时, 下层实心圆柱体底面半径大, 水面上升快, 上层实心圆柱体底面半径小, 水面上升慢, 当水没过上层实心圆柱体的上底面时, 水面上升更慢, 所以对应图象的第一段比较陡, 第二段比第一段缓, 第三段比第二段缓. 故选 D.

2. (2 891, $-\sqrt{3}$) 【解析】由题知, 点 A_1 的坐标为 $(1, -\sqrt{3})$, 点 A_2 的坐标为 $(3, -\sqrt{3})$, 点 A_3 的坐标为 $(4, 0)$, 点 A_4 的坐标为 $(6, 0)$, 点 A_5 的坐标为 $(7, \sqrt{3})$, 点 A_6 的坐标为 $(9, \sqrt{3})$, 点 A_7 的坐标为 $(10, 0)$, 点 A_8 的坐标为 $(11,$

关键点拨

找到规律: 每七个点为一个循环, 每增加一个循环, 循环中对应位置的点的横坐标增加 10, 且点 A_n 的纵坐标按 $-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0, 0, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 0$ 循环出现是解题的关键.

$-\sqrt{3})$, 点 A_9 的坐标为 $(13, -\sqrt{3})$, 点 A_{10} 的坐标为 $(14, 0)$, 点 A_{11} 的坐标为 $(16, 0)$, 点 A_{12} 的坐标为 $(17, \sqrt{3})$, 点 A_{13} 的坐标为 $(19, \sqrt{3})$, 点 A_{14} 的坐标为 $(20, 0)$, \cdots , 由此可见, 每七个点为一个循环, 每增加一个循环, 循环中对应位置的点的横坐标增加 10, 且点 A_n 的纵坐标按 $-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0, 0, \sqrt{3}, \sqrt{3}, 0$ 循环出现. 又因为 $2\ 024 \div 7 = 289 \cdots 1$, 所以点 $A_{2\ 024}$ 的横坐标为 $1 + 289 \times 10 = 2\ 891$, 纵坐标为 $-\sqrt{3}$, 则点 $A_{2\ 024}$ 的坐标为 $(2\ 891, -\sqrt{3})$. 故答案为 $(2\ 891, -\sqrt{3})$.

3. A 【解析】如图, 用 y 表示跳跃高度, 用 x 表

示身高,根据题意设

$k = \frac{y}{x}$, $\therefore y = kx$. 根据正

比例函数的意义可知,

k 越大,直线越陡,

\therefore 观察图象可得,跳跃

高度与自己身高的比值最大的同学为甲,

\therefore 获胜的同学是甲,故选 A.

4. D 【解析】 $\because m^{2025} + 2025m = 2025, \therefore m > 0$ 且 $2025m < 2025, \therefore 0 < m < 1, \therefore 1 - m > 0, \therefore$ 一次函数 $y = (1 - m)x + m$ 的图象经过第一、二、三象限,不经过第四象限,故选 D.

5. A 【解析】当 $m + 1 > 0$, 即 $m > -1$ 时, y 随 x 的增大而增大, \therefore 当 $x = 5$ 时, 一次函数 $y = (m + 1)x + m^2 + 1$ 有最大值 6, $\therefore 5(m + 1) + m^2 + 1 = 6$, 解得 $m = 0$ 或 $m = -5$ (舍去). 当 $m + 1 < 0$, 即 $m < -1$ 时, y 随 x 的增大而减小, \therefore 当 $x = 2$ 时, 一次函数 $y = (m + 1)x + m^2 + 1$ 有最大值 6, $\therefore 2(m + 1) + m^2 + 1 = 6$, 解得 $m = -3$ 或 $m = 1$ (舍去). 综上, 当 $2 \leq x \leq 5$ 时, 一次函数 $y = (m + 1)x + m^2 + 1$ 有最大值 6, 则实数 m 的值为 0 或 -3, 故选 A.

6. $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ 【解析】依题意画出旋转前的函数图象 l_1 和旋转后的函数图象 l_2 , 如图所示.

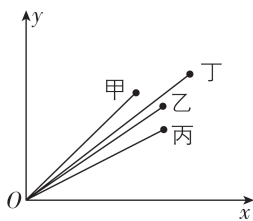
设 l_1 与 y 轴的交点为点 B , l_2 与 y 轴的交点为点 C . 在 $y = x - 1$ 中, 令 $x = 0$, 得 $y = -1$; 令 $y = 0$, 得 $x = 1, \therefore A(1, 0), B(0, -1), \therefore OA = 1, OB = 1, \therefore \angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$.

\therefore 直线 l_1 绕点 A 逆时针旋转 15° , 得到直线 $l_2, \therefore \angle OAC = 60^\circ, \therefore OC = OA \times \tan \angle OAC = \sqrt{3}OA = \sqrt{3}$, 则点 $C(0, -\sqrt{3})$. 设直线 l_2 的表达式为 $y = kx + b$, 则 $\begin{cases} 0 = k + b, \\ -\sqrt{3} = b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = \sqrt{3}, \\ b = -\sqrt{3}, \end{cases}$ \therefore 直线 l_2 的表达式为 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$, 故答案为 $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$.

7. 5 【解析】令直线 AB 的表达式为 $y_1 = k_1x + b_1$,

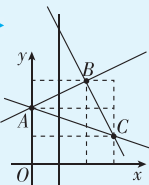
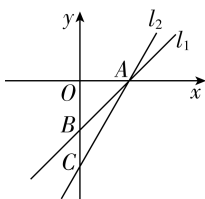
将点 $A(0, 2), B(2, 3)$ 代入, 得 $\begin{cases} b_1 = 2, \\ 2k_1 + b_1 = 3, \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}, \\ b_1 = 2, \end{cases} \therefore k_1 + b_1 = \frac{5}{2}$. 令直线 AC 的表达式



一题多解

如图, 作直线 AB, AC, BC , 作直线 $x = 1$. 令直线 AB 的表达式为 $y_1 = k_1x + b_1$, 直线 AC 的表达式为 $y_2 = k_2x + b_2$, 直线 BC 的表达式为 $y_3 = k_3x + b_3$. 由图象可知, 直线 $x = 1$ 与直线 BC 的交点最高, 即当 $x = 1$ 时, $k_1 + b_1, k_2 + b_2, k_3 + b_3$ 的值中, 最大的值为 $k_3 + b_3$. 将点 $B(2, 3), C(3, 1)$ 代入 $y_3 = k_3x + b_3$, 得 $\begin{cases} 2k_3 + b_3 = 3, \\ 3k_3 + b_3 = 1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k_3 = -2, \\ b_3 = 7, \end{cases} \therefore k_3 + b_3 = 5, \therefore k_1 + b_1, k_2 + b_2, k_3 + b_3$ 的值中, 最大的值等于 5. 故答案为 5.



为 $y_2 = k_2x + b_2$, 将点 $A(0, 2), C(3, 1)$ 代入, 得

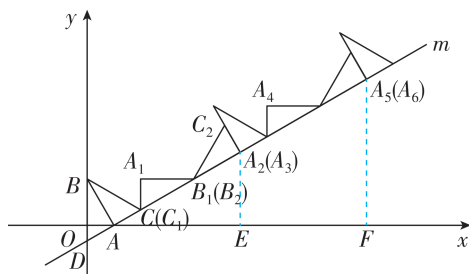
$$\begin{cases} b_2 = 2, \\ 3k_2 + b_2 = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k_2 = -\frac{1}{3}, \\ b_2 = 2, \end{cases} \therefore k_2 + b_2 = \frac{5}{3}. \text{ 令直}$$

线 BC 的表达式为 $y_3 = k_3x + b_3$, 将点 $B(2, 3),$

$$C(3, 1) \text{ 代入, 得 } \begin{cases} 2k_3 + b_3 = 3, \\ 3k_3 + b_3 = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k_3 = -2, \\ b_3 = 7, \end{cases}$$

$\therefore k_3 + b_3 = 5. \therefore \frac{5}{3} < \frac{5}{2} < 5, \therefore$ 其中最大的值等于 5.

8. 2 004 【解析】如图, 设直线 m 与 y 轴交于点 D , 分别过点 A_2, A_5 作 $A_2E \perp x$ 轴, $A_5F \perp x$ 轴, 垂足分别为点 E, F .



在直线 $m: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 中, 当 $x = 0$ 时, $y =$

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \therefore D\left(0, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), \therefore OD = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \therefore A(2,$$

$0), B(0, 2\sqrt{3}), \therefore OA = 2, OB = 2\sqrt{3}, \therefore \tan \angle OAD =$

$$\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}, \therefore \angle OAD = 60^\circ, \therefore \angle OAB = 30^\circ, \therefore \angle BAC = 90^\circ. \text{ 由勾股定理得 } AB =$$

$\sqrt{OB^2 + OA^2} = 4, \therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} =$

5. 由旋转性质可知 $CB_1 = BC = 5, B_1A_2 = B_1A_1 =$

$AB = 4, \therefore AA_2 = AC + CB_1 + B_1A_2 = 12, \therefore A_2E =$

$\frac{1}{2}AA_2 = 6$, 即 A_2 的纵坐标为 6, 同理 A_5 的纵坐

标为 12. $\therefore 1\ 001 = 3 \times 333 + 2, \therefore$ 点 $A_{1\ 001}$ 在直

线 m 上, $\therefore A_{1\ 001}$ 的纵坐标为 $334 \times 6 = 2\ 004$, 故

答案为 2 004.

9. (1) 【证明】由条件易知 $A(0, 4), B(4, 0),$

$\therefore OA = OB = 4.$

$\therefore \angle AOB = 90^\circ, \therefore \angle OAB = 45^\circ.$

(2) 【解】 \because 点 C 的坐标为 $(0, m), \therefore OC = m,$

$\therefore AC = 4 - m.$

由条件可知 $CE = AC = 4 - m, \angle OAB = \angle CED =$

$45^\circ, \therefore OE = CE - OC = 4 - 2m.$

$\because \angle EOF = 90^\circ, \therefore \angle OEF = \angle OFE = 45^\circ,$
 $\therefore OF = OE = 4 - 2m.$
 $\because CD \perp OA, \therefore CD \parallel OF, \angle OAB = \angle CDA = 45^\circ,$
 \therefore 四边形 $COFD$ 是直角梯形, $CD = AC = 4 - m,$
 $\therefore S_{\text{四边形}COFD} = \frac{1}{2}(OF + CD) \times OC = \frac{1}{2}(4 - 2m + 4 - m) \times m = -\frac{3}{2}m^2 + 4m = -\frac{3}{2}\left(m - \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}.$
 $\because -\frac{3}{2} < 0, 0 < m < 2, \therefore$ 当 $m = \frac{4}{3}$ 时, 四边形 $COFD$ 面积取得最大值, 最大值为 $\frac{8}{3}.$

10. $x = -2$ 【解析】 \because 一次函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象与 x 轴交于点 A , 且 $OA = 2, \therefore A(-2, 0), \therefore$ 关于 x 的方程 $kx + b = 0$ 的解为 $x = -2,$ 故答案为 $x = -2.$

11. 【解】(1) \because 在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的图象经过点 $(1, 3)$ 和 $(2, 5), \therefore \begin{cases} k + b = 3, \\ 2k + b = 5, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = 2, \\ b = 1. \end{cases}$
 (2) $2 \leq m \leq 3.$
 由(1)可得函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 的表达式为 $y = 2x + 1$, 函数 $y = x + k$ 的表达式为 $y = x + 2.$
 当 $mx < 2x + 1$ 时, 有 $(m - 2)x < 1,$
 当 $mx < x + 2$ 时, 有 $(m - 1)x < 2.$
 \therefore 当 $x < 1$ 时, 对于 x 的每一个值, 函数 $y = mx (m \neq 0)$ 的值既小于函数 $y = kx + b$ 的值, 也小于函数 $y = x + k$ 的值, $\therefore m - 2 \geq 0$, 且 $m - 1 \geq 0,$
 $\therefore m \geq 2.$
 ①当 $m = 2, x < 1$ 时, $2x < 2x + 1$ 和 $2x < x + 2$ 恒成立, 故 $m = 2$ 符合题意.

思路分析

(2) 由(1)可得出函数 $y = kx + b (k \neq 0)$ 和 $y = x + k$ 的表达式, 根据题意得 $m \geq 2,$ 再分情况讨论: ①当 $m = 2$ 时; ②当 $m > 2$ 时, 最后综合得出 m 的取值范围.

②当 $m > 2$ 时, 则 $x < \frac{1}{m-2}$ 且 $x < \frac{2}{m-1},$

当 $\frac{1}{m-2} \geq \frac{2}{m-1},$ 即 $m \leq 3$ 时, 有 $\frac{2}{m-1} \geq 1,$

解得 $m \leq 3,$ 符合题意, $\therefore 2 < m \leq 3.$

当 $\frac{1}{m-2} < \frac{2}{m-1},$ 即 $m > 3$ 时, 有 $\frac{1}{m-2} \geq 1,$

解得 $m \leq 3,$ 此时不符合题意.

综上所述, $2 \leq m \leq 3.$

12. 250 【解析】由题意可知善行者行走的路程 s 关于善行者的行走时间 t 的表达式为 $s = 100t,$ 不善行者行走的路程 s 关于善行者的行走时间 t 的表达式为 $s = 60t + 100.$ 联立得 $\begin{cases} s = 100t, \\ s = 60t + 100, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t = 2.5, \\ s = 250, \end{cases} \therefore$ 两图象交点 P 的纵坐标是 250. 故答案是 250.

13. 【解】(1) 根据题意, 得 $\begin{cases} 8a + 7b = 670, \\ 4a + 5b = 410, \end{cases}$ 解得

$\begin{cases} a = 40, \\ b = 50, \end{cases} \therefore a$ 的值是 40, b 的值是 50.

(2) 购买 B 种型号吉祥物的数量为 $(90 - x)$

个. 根据题意, 得 $\begin{cases} x \geq \frac{4}{3}(90 - x), \\ x \leq 2(90 - x), \end{cases}$ 解得 $\frac{360}{7} \leq$

$x \leq 60.$

$y = (40 - 35)x + (50 - 42)(90 - x) = -3x + 720.$

$\because -3 < 0, \therefore y$ 随 x 的增大而减小.

$\therefore \frac{360}{7} \leq x \leq 60$ 且 x 为整数,

\therefore 当 $x = 52$ 时, y 的值最大, $y_{\text{最大}} = -3 \times 52 + 720 = 564, \therefore y$ 的最大值是 564.

(五) 反比例函数

刷考点

1. C 【解析】根据题意得 $\begin{cases} -2n + 4 > 0, \\ -\frac{n-1}{2} > 0, \\ n + 1 > 0, \end{cases}$ 解得 $-1 < n < 1, \therefore n$ 的取值范围是 $-1 < n < 1.$ 故选 C.

2. D 【解析】设 A, C 两点的坐标分别为 $(x_1, \frac{a}{x_1}), (x_2, \frac{a}{x_2}). \because AB \parallel CD \parallel y$ 轴, \therefore 点 B 与点 A 的横坐标相同, 点 D 与点 C 的横坐标相同,

关键点拨
 熟练掌握反比例函数图象上各点的坐标特点是解题的关键.

\therefore 点 B 的坐标为 $(x_1, \frac{b}{x_1}),$ 点 D 的坐标为

$(x_2, \frac{b}{x_2}). \because AB = 3, CD = 2, \therefore \begin{cases} \frac{a}{x_1} - \frac{b}{x_1} = 3, \\ \frac{b}{x_2} - \frac{a}{x_2} = 2. \end{cases}$ 解

得 $\begin{cases} x_1 = \frac{a-b}{3}, \\ x_2 = \frac{b-a}{2}. \end{cases} \because AB$ 与 CD 的距离为 5, $\therefore x_1 -$

$x_2=5, \therefore \frac{a-b}{3} - \frac{b-a}{2} = 5$, 即 $\frac{a-b}{3} + \frac{a-b}{2} = 5$, 解得 $a-b=6$, 故选 D.

3. 【解】(1) 由 $M(1,3), N_1(4,2)$, 得 $x_1+x_2=y_1$ ➔ 思路分析

$y_2=5, \therefore$ 点 $N_1(4,2)$ 是点 M 的等和点.
由 $M(1,3), N_2(3,-1)$, 得 $x_1+x_2=4, y_1+y_2=2$,
 $\therefore x_1+x_2 \neq y_1+y_2, \therefore$ 点 $N_2(3,-1)$ 不是点 M 的等和点. 由 $M(1,3), N_3(0,-2)$, 得 $x_1+x_2=y_1+y_2=1, \therefore$ 点 $N_3(0,-2)$ 是点 M 的等和点.
故答案为 $N_1(4,2), N_3(0,-2)$.

(2) 由题意, 设点 N 的横坐标为 a .
 \therefore 点 N 是点 $M(3,-2)$ 的等和点,
 \therefore 点 N 的纵坐标为 $3+a-(-2)=a+5$,
 \therefore 点 N 的坐标为 $(a, a+5)$. 又 \therefore 点 N 在直线 $y=x+b$ 上, $\therefore a+5=a+b, \therefore b=5$.

(3) 由题意得 $k>0$, 即双曲线 $y_1=\frac{k}{x}$ 位于第一、三象限. 设直线 $y_2=x-2$ 与双曲线 $y_1=\frac{k}{x}$ 的交点分别为点 A, B , 如图. 由满足 $y_1 < y_2$ 的 x 取值范围是 $x>4$ 或 $-2 < x < 0$, 得 A 的横坐标为 $4, B$ 的横坐标为 -2 .

把 $x=4$ 代入 $y_2=x-2$, 得 $y_2=4-2=2, \therefore A(4,2)$.

把 $A(4,2)$ 代入 $y_1=\frac{k}{x}$, 得 $2=\frac{k}{4}, \therefore k=8, \therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{8}{x}$. 设 $P\left(m, \frac{8}{m}\right)$, 点 Q 的横坐标为 $n. \therefore$ 点 Q 是点 P 的等和点,

\therefore 点 Q 的纵坐标为 $m+n-\frac{8}{m}, \therefore Q\left(n, m+n-\frac{8}{m}\right). \therefore$ 点 Q 在直线 $y_2=x-2$ 上, $\therefore m+n-\frac{8}{m}=n-2, \therefore m-\frac{8}{m}+2=0$, 解得 $m_1=-4, m_2=2$, 经检验, $m_1=-4, m_2=2$ 是方程 $m-\frac{8}{m}+2=0$ 的解,

\therefore 点 P 的坐标为 $(-4, -2)$ 或 $(2, 4)$.

4. D 【解析】如图, 延长 DC, BA 交于点 E . 由题意可知 $k<0$, 设 $CD=a(a>0). \therefore CD:OB=1:3, \therefore OB=3a. \therefore AB \perp y$ 轴, $CD \perp x$ 轴, \therefore 点 A 的纵坐标为 $3a$, 点 C 的纵坐标为 $a, \therefore a=\frac{k}{x_C}, 3a=\frac{k}{x_A}, \therefore x_C=\frac{k}{a}, x_A=\frac{k}{3a}, \therefore OD=-\frac{k}{a}, AB=$

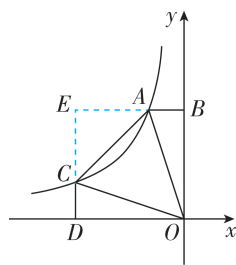
(3) 根据“满足 $y_1 < y_2$ 的 x 取值范围是 $x>4$ 或 $-2 < x < 0$ ”可得到双曲线 $y_1=\frac{k}{x}$ 和直线 $y_2=x-2$ 的交点的横坐标, 把其中一个交点的横坐标代入 $y_2=x-2$ 可得其纵坐标, 进而可得双曲线 y_1 的表达式, 再根据等和点的定义求解即可.

关键点拨

将除第一个阴影矩形外的所有阴影矩形向左平移至 y 轴, 得到一个大的矩形是解题关键.

$-\frac{k}{3a}. \therefore$ 反比例函数 $y=$

$\frac{k}{x}$ 的图象经过 A, C 两点, $\therefore S_{\triangle DOC} = S_{\triangle AOB} = -\frac{k}{2}. \therefore \angle EDO = \angle DOB =$

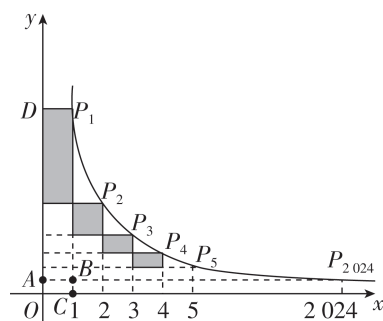


$\angle EBO=90^\circ, \therefore$ 四边形 $OBED$ 是矩形, $\therefore BE=OD=-\frac{k}{a}, DE=OB=3a, \therefore AE=BE-AB=-\frac{2k}{3a}, CE=DE-CD=2a, \therefore S_{\triangle AEC}=\frac{1}{2}AE \cdot CE=-\frac{2k}{3}, \therefore S_{\text{矩形}OBED}=OD \cdot OB=-\frac{k}{a} \times 3a=-3k. \therefore S_{\triangle ACO}=4, \therefore S_{\text{矩形}OBED}-S_{\triangle DOC}-S_{\triangle AOB}-S_{\triangle AEC}=S_{\triangle ACO}$, 即 $-3k-\left(-\frac{k}{2}\right)-\left(-\frac{k}{2}\right)-\left(-\frac{2k}{3}\right)=4, \therefore k=-3$, 故选 D.

5. $\frac{2\ 023}{253}$ 【解析】如图, $\therefore P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2\ 024}$ 的

横坐标依次为 $1, 2, 3, \dots, 2\ 024, \therefore$ 阴影矩形的一边长都为 1 , 将除第一个矩形外的所有矩形向左平移至 y 轴, $\therefore S_1+S_2+S_3+\dots+S_{2\ 023}=S_{\text{矩形}ABP_1D}$. 把 $x=2\ 024$ 代入关系式得, $y=\frac{1}{253}$,

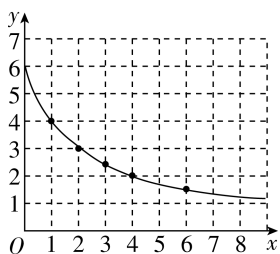
即 $OA=\frac{1}{253}, \therefore S_{\text{矩形}OABC}=OA \cdot OC=\frac{1}{253}$, 由反比例函数中 k 的几何意义得, $S_{\text{矩形}OCP_1D}=8, \therefore S_{\text{矩形}ABP_1D}=8-\frac{1}{253}=\frac{2\ 023}{253}$. 故答案为 $\frac{2\ 023}{253}$.



6. 【解】(1) 根据题意得, $3=\frac{12}{a+2}, b=\frac{12}{6+2},$

解得 $a=2, b=1.5$. 故答案为 $2, 1.5$.

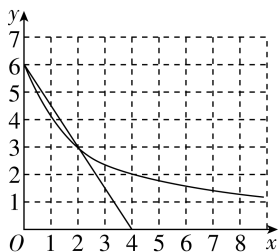
(2) ①根据表格数据描点, 在平面直角坐标系中画出对应函数 $y=\frac{12}{x+2}(x \geq 0)$ 的图象如图(1).



图(1)

②由图象可知,随着自变量 x 的不断增大,函数值 y 的变化趋势是不断减小,故答案为不断减小.

(3)在同一平面直角坐标系中画出函数 $y = \frac{12}{x+2}$ 和 $y = -\frac{3}{2}x+6 (x \geq 0)$ 的图象如图(2).



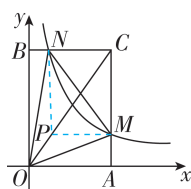
图(2)

由函数图象知,当 $x \geq 2$ 或 $x = 0$ 时, $\frac{12}{x+2} \geq -\frac{3}{2}x+6$, 即当 $x \geq 0$ 时, $\frac{12}{x+2} \geq -\frac{3}{2}x+6$ 的解集为 $x \geq 2$ 或 $x = 0$, 故答案为 $x \geq 2$ 或 $x = 0$.

7. B 【解析】 设点 C 坐标为 (a, b) . 由矩形的性质和反比例函数中 k 的几何意义可知,

$$S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOC}, S_{\triangle BON} = S_{\triangle AOM} = \frac{1}{2}, \therefore S_{\triangle CON} = S_{\triangle COM}, \text{故 ① 正确.}$$

如图,过点 M 作 $MP \parallel x$ 轴,交 OC 于 P , 连结 NP . $\because C$ 点坐标为 (a, b) , $\therefore M$ 点坐标为 $(a, \frac{1}{a})$, N 点坐标为 $(\frac{1}{b}, b)$, 直线 OC 的表达式为 $y = \frac{b}{a}x$, $\therefore P$ 点坐标为 $(\frac{1}{b}, \frac{1}{a})$, $\therefore PN \parallel y$ 轴, \therefore 易得四边形 $PNCM$ 为矩形, $\therefore S_{\triangle CMN} = S_{\triangle PMN}$. 若 $S_{\triangle OMN} = S_{\triangle CMN}$, 则 $S_{\triangle OMN} = S_{\triangle PMN}$, $\therefore OP \parallel MN$ 或 O, P 重合. \because 点 P 在 OC 上, $\therefore OP$ 不可能平行于 MN . $\because \frac{1}{a} \neq 0, \frac{1}{b} \neq 0, \therefore O, P$ 不可能重合,故 $S_{\triangle MON}$ 和 $S_{\triangle MCN}$ 不可能相等,故 ② 错误.



刷有所得

用待定系数法求函数表达式的步骤:

① 设: 根据已知条件, 设出合适的函数表达式;

② 代: 把已知点的坐标代入, 得到关于待定系数的方程(组);

③ 解: 解方程(组), 求出待定系数的值;

④ 写: 写出函数的表达式.

$\because M(a, \frac{1}{a}), N(\frac{1}{b}, b), P(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}), \therefore OM^2 = a^2 + \frac{1}{a^2}, ON^2 = b^2 + \frac{1}{b^2}, MN^2 = (a - \frac{1}{b})^2 + (b - \frac{1}{a})^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + b^2 + \frac{1}{b^2} - \frac{2a}{b} - \frac{2b}{a}.$ $\because a > \frac{1}{b}, b > \frac{1}{a}, A, B$ 为动点, 故可取 $a = 1, b = 3$, 依次代入

可得 $OM^2 = 2, ON^2 = \frac{82}{9}, MN^2 = \frac{40}{9}.$ $\therefore OM^2 + MN^2 < ON^2, \therefore \triangle OMN$ 为钝角三角形, 故 ③ 错误.

由题意可知, 若 $\triangle MON$ 为等边三角形, 则 $OM = ON = MN, \therefore OM^2 = ON^2$, 即 $a^2 + \frac{1}{a^2} = b^2 + \frac{1}{b^2}$, 解得 $a = b$ 或 $a = \frac{1}{b}$ (舍去).

当 $a = b$ 时, $\therefore OM^2 = MN^2, \therefore b^2 + \frac{1}{b^2} = 4$, 解得 $b^2 = 2 + \sqrt{3}$ 或 $b^2 = 2 - \sqrt{3}$ (不合题意, 舍去), $\therefore b = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, 故存在当 $a = b = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$ 时, $\triangle MON$ 为等边三角形, 故 ④ 正确. 故选 B.

8. 【解】(1) 把 $A(2, a)$ 代入 $y = 2x$ 得, $a = 2 \times 2 = 4, \therefore A(2, 4)$. 把 $A(2, 4)$ 代入 $y = -x + m$ 得, $4 = -2 + m, \therefore m = 6, \therefore$ 直线 $y = -x + m$ 的表达式为 $y = -x + 6$. 把 $B(b, 0)$ 代入 $y = -x + 6$ 得, $0 = -b + 6, \therefore b = 6, \therefore a$ 的值为 4, m 的值为 6, b 的值为 6.

(2) 设 $C(t, \frac{k}{t})$. 由(1)知 $A(2, 4), B(6, 0)$, 且 $O(0, 0)$. ① 当 AC, BO 为对角线时, AC, BO 的中点重合, $\therefore \begin{cases} t+2=6+0, \\ \frac{k}{t}+4=0+0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t=4, \\ k=-16, \end{cases}$ 经检验, $t=4, k=-16$ 均符合题意, 此时点 C 的坐标为 $(4, -4)$;

② 当 CB, AO 为对角线时, CB, AO 的中点重合, $\therefore \begin{cases} t+6=2+0, \\ \frac{k}{t}+0=4+0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t=-4, \\ k=-16, \end{cases}$ 经检验, $t=-4, k=-16$ 均符合题意, 此时点 C 的坐标为 $(-4, 4)$;

③ 当 CO, AB 为对角线时, CO, AB 的中点重合, $\therefore \begin{cases} t+0=2+6, \\ \frac{k}{t}+0=4+0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} t=8, \\ k=32, \end{cases} \therefore k=32 > 0,$

∴ 这种情况不符合题意.

综上所述,点 C 的坐标为 $(4, -4)$ 或 $(-4, 4)$, k 的值为 -16 .

(3) 如图. 设直线

AC 的表达式为 $y =$

$px + q$. 把 $A(2, 4)$ 代

入, 得 $4 = 2p + q$,

∴ $q = 4 - 2p$, ∴ 直线

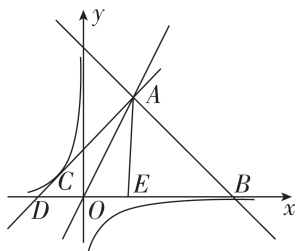
AC 的表达式为 $y =$

$px + 4 - 2p$. 在 $y = px + 4 - 2p$ 中, 令 $y = 0$ 得 $x =$

$\frac{2p-4}{p}$, ∴ $D(\frac{2p-4}{p}, 0)$. ∴ 点 E 与点 D 关于 y 轴

对称, ∴ $E(\frac{4-2p}{p}, 0)$. ∴ $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABE$ 相似,

∴ 点 E 只能在点 B 左侧, ∴ $\angle ABE = \angle DBA$,



故 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABE$ 相似, 只需 $\frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BD}$ 即可,
即 $BE \cdot BD = AB^2$. ∵ $B(6, 0)$, ∴ $BE = 6 -$
 $\frac{4-2p}{p} = \frac{8p-4}{p}$, $BD = 6 - \frac{2p-4}{p} = \frac{4p+4}{p}$. ∴ $A(2, 4)$,
 $B(6, 0)$, ∴ $AB^2 = 32$, ∴ $\frac{8p-4}{p} \times \frac{4p+4}{p} = 32$, 解得
 $p = 1$, 经检验, $p = 1$ 是分式方程的解, 且符合题
意, ∴ 直线 AC 的表达式为 $y = x + 2$. ∴ 有且只
有一点 C , 使得 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABE$ 相似, ∴ 直线
 AC 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 图象只有一个
交点, ∴ $x + 2 = \frac{k}{x}$ 只有一个解, 即 $x^2 + 2x - k = 0$
有两个相等的实数根, ∴ $\Delta = 2^2 + 4k = 0$, 解得
 $k = -1$, ∴ k 的值为 -1 .

(六) 二次函数

刷考点

1. **A** 【解析】∵ $y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$, ∴ 将抛物
线 $y = x^2 + 2x$ 向下平移 2 个单位后, 所得新抛
物线的顶点式为 $y = (x+1)^2 - 3$, 故选 A.

2. **C** 【解析】∵ 二次函数表达式为 $y = -(x -$

关键点拨

熟练掌握二
次函数的图象与
性质是解题的
关键.

2) $^2 + c$, ∴ 二次函数 $y = -(x-2)^2 + c$ 的图象开
口向下, 对称轴为直线 $x = 2$, ∴ 图象上的点离
对称轴越近, 函数值越大. ∴ 点 $(-2, y_1)$ 的横
坐标 -2 与 2 的距离为 $|-2-2| = 4$, 点 $(3, y_2)$
的横坐标 3 与 2 的距离为 $|3-2| = 1$, 点 $(7, y_3)$
的横坐标 7 与 2 的距离为 $|7-2| = 5$, 且 $1 < 4 <$
 5 , ∴ $y_2 > y_1 > y_3$, 故选 C.

3. **A** 【解析】设抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交
点的横坐标分别为 x_1, x_2 , 且 $x_1 < 1 < x_2$. ∴ $a =$
 $-1 < 0$, ∴ 抛物线开口向下, ∴ 当 $x = 1$ 时, $y > 0$,
即 $-1 + b + c > 0$, ∴ $b + c > 1$, 故 A 选项正确, 符合
题意; 根据已知条件不能得出对称轴为直线
 $x = 1$, 即不能得出 $b = 2$, 故 B 选项不正确, 不符
合题意; ∵ 抛物线与 x 轴有两个交点, ∴ 方程
 $-x^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根, 即
 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$. 又 ∵ $a = -1$, ∴ $b^2 + 4c > 0$, 故 C 选
项错误, 不符合题意; 无法判断 c 的符号, 故 D
选项错误, 不符合题意. 故选 A.

思路分析

先根据题意得
到二次函数图
象开口向上,
且对称轴为直
线 $x = a$, 顶点
坐标为 $(a, a -$
 $a^2)$, 再分 $a > 0$
和 $a < 0$ 两种
情况分别讨论
 y_1 与 a 的大
小和 y_2 与 0
的大小, 即可
求解.

4. **D** 【解析】∵ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 图象的
顶点坐标为 $(-1, 4)$, ∴ 二次函数图象的对称
轴是直线 $x = -1$, 故 A 错误; ∵ 二次函数 $y =$

$ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴的一个交点的横坐标
是 -3 , 对称轴是直线 $x = -1$, ∴ 二次函数图象
与 x 轴的另一个交点的横坐标是 1 , 故 B 错
误; ∵ 抛物线开口向下, 对称轴是直线 $x = -1$,
∴ 当 $x < -1$ 时, y 随 x 的增大而增大, 故 C 错
误; 设二次函数表达式为 $y = a(x+1)^2 + 4$, 把
 $(-3, 0)$ 代入, 得 $0 = a(-3+1)^2 + 4$, 解得 $a =$
 -1 , ∴ $y = -(x+1)^2 + 4$, 当 $x = 0$ 时, $y = -(0 +$
 $1)^2 + 4 = 3$, ∴ 二次函数图象与 y 轴的交点的
纵坐标是 3 , 故 D 正确, 故选 D.

5. **D** 【解析】由题图可知, 抛物线开口向下, 且
与 y 轴交于正半轴, ∴ $a < 0, c > 0$. ∴ 抛物线对
称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = 2$, ∴ $b = -4a > 0$, ∴ $bc > 0$,
 $4a + b = 0$, 故选项 A, B 正确, 不符合题意.
∵ $ax_1^2 + bx_1 = ax_2^2 + bx_2$ 且 $x_1 \neq x_2$, ∴ $ax_1^2 + bx_1 + c =$
 $ax_2^2 + bx_2 + c$, ∴ $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 关于对称轴直线
 $x = 2$ 对称, ∴ $x_1 + x_2 = 4$, 故选项 C 正确, 不符合
题意. ∵ 抛物线开口向下, ∴ 抛物线上的点离
对称轴越远, 函数值越小. ∴ $(-1, y_1), (3, y_2)$
两点都在抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上, 且 $|-1-2| >$
 $|3-2|$, ∴ $y_1 < y_2$, 故选项 D 错误, 符合题意, 故
选 D.

6. **C** 【解析】∵ 二次函数表达式为 $y = x^2 - 2ax + a$
($a \neq 0$), ∴ 二次函数图象开口向上, 且对称轴
为直线 $x = -\frac{-2a}{2} = a$, 顶点坐标为 $(a, a - a^2)$. 当

$a > 0$ 时, $0 < \frac{a}{2} < a$, $\therefore a - a^2 < y_1 < a$. 当 $a < 0$ 时, $a < \frac{a}{2} < 0$, $\therefore a - a^2 < y_1 < a$, 故 A、B 错误, 不符合题意. 当 $a > 0$ 时, $0 < a < 2a < 3a$, 由二次函数图象的对称性可知点 $(0, a)$ 和点 $(2a, a)$ 关于对称轴对称. \therefore 在对称轴右侧, y 随 x 的增大而增大, \therefore 当 $x = 3a$ 时, $y_2 > a > 0$. 当 $a < 0$ 时, $3a < 2a < a < 0$, 由二次函数图象的对称性可知点 $(0, a)$ 和点 $(2a, a)$ 关于对称轴对称. \therefore 在对称轴左侧, y 随 x 的增大而减小, \therefore 当 $x = 3a$ 时, $y_2 > a$, 但不一定大于 0, 故 C 正确, 符合题意; D 错误, 不符合题意. 故选 C.

7. 【解】(1) 由题意得, $16a + 4b = 0$, 即 $b = -4a$, 所以 $-\frac{b}{2a} = 2$, 故该抛物线的对称轴是直线 $x = 2$.

(2) (i) 由题意知, 抛物线的表达式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$. 因为 $x_1 = x_2$, 所以 $y_2 - y_1 = (\frac{1}{2}x_2^2 - 2x_2) - (\frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1) = (\frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1) - (\frac{1}{2}x_1^2 - 2x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$.

因为抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x$ 过原点, 且点 A 与原点不重合, 所以 $x_1 \neq 0$, 所以 $\frac{1}{2}x_1^2 > 0$, 故 $y_2 > y_1$.

(ii) 由题意知, $y_1 = ax_1^2 - 4ax_1$, $y_2 = x_2^2 - 2x_2$. 因为 $\frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1}$, 所以 $\frac{x_2^2 - 2x_2}{a(x_1^2 - 4x_1)} = \frac{x_2}{x_1}$.

因为两条抛物线均过原点, 且 A、B 与原点都不重合, 所以 $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, 故 $\frac{x_2 - 2}{a(x_1 - 4)} = 1$, 即

$x_2 = a(x_1 - 4) + 2$, 所以 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{a(x_1 - 4) + 2}{x_1} = a + \frac{2 - 4a}{x_1}$. 依题意知, $a + \frac{2 - 4a}{x_1}$ 是与 x_1 无关的定值. 不妨将 $x_1 = 1$ 和 $x_1 = 2$ 分别代入 $a + \frac{2 - 4a}{x_1}$,

可得 $2 - 3a = 1 - a$, 解得 $a = \frac{1}{2}$.

经检验, 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $\frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2}$ 是一个与 x_1 无关的定值, 符合题意, 所以 $a = \frac{1}{2}$, $b = -4a = -2$.

8. ②③④ 【解析】 \therefore 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数, $a < 0$) 经过 $(-1, 1)$, $(m, 1)$ 两点, 且 $0 < m < 1$, \therefore 抛物线对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1+m}{2}$. $\therefore -\frac{1}{2} < \frac{-1+m}{2} < 0$, $\therefore -\frac{b}{2a} < 0$. $\therefore a < 0$,

思路分析

(2) (ii) 根据题意整理得 $\frac{x_2^2 - 2x_2}{a(x_1^2 - 4x_1)} = \frac{x_2}{x_1}$, 根据 $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$ 可得 $x_2 = a(x_1 - 4) + 2$, 再利用特殊值法即可求解.

易错警示

确定函数类型: 对于含参数的函数, 要考虑系数为 0 的特殊情况, 依据最高项系数是否为 0, 判断该函数是哪类函数.

$\therefore b < 0$, 故 ① 错误. $\therefore 0 < x < 1$, $\therefore -1 < x - 1 < 0$, $\therefore y > 1$, \therefore 若 $0 < x < 1$, 则 $a(x - 1)^2 + b(x - 1) + c > 1$, 故 ② 正确. 由 ① 可得 $-\frac{1}{2} < -\frac{b}{2a} < 0$. $\therefore a = -1$, $\therefore -\frac{1}{2} < \frac{b}{2} < 0$, $\therefore -1 < b < 0$. 当 $a = -1$ 时, 抛物线表达式为 $y = -x^2 + bx + c$. \therefore 抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 经过点 $(-1, 1)$, $\therefore -1 - b + c = 1$, $\therefore c = b + 2$, \therefore 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 可整理为 $-x^2 + bx + b = 0$, $\therefore \Delta = b^2 + 4b = b(b + 4)$. $\therefore -1 < b < 0$, $\therefore \Delta < 0$, \therefore 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 2$ 无实数解, 故 ③ 正确. $\therefore a < 0$, \therefore 抛物线开口向下. \therefore 点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 在抛物线上, $x_1 + x_2 > -\frac{1}{2}$, $x_1 > x_2$, 总有 $y_1 < y_2$, $\therefore \frac{x_1 + x_2}{2} > -\frac{1}{4}$, 且点 $A(x_1, y_1)$ 离直线 $x = -\frac{1}{4}$ 较远, $\therefore -\frac{1}{2} < \frac{-1+m}{2} \leq -\frac{1}{4}$, 解得 $0 < m \leq \frac{1}{2}$, 故 ④ 正确. 故答案为 ②③④.

9. (1) 【证明】当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $4a + 2 = 0$, 函数 $y = (4a + 2)x^2 + (9 - 6a)x - 4a + 4 = 12x + 6$ 为一次函数, 此时, 令 $y = 0$, 则 $12x + 6 = 0$, 解得 $x = -\frac{1}{2}$, \therefore 一次函数 $y = 12x + 6$ 的图象与 x 轴的交点为 $(-\frac{1}{2}, 0)$; 当 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时, $4a + 2 \neq 0$, 函数 $y = (4a + 2)x^2 + (9 - 6a)x - 4a + 4$ 为二次函数. $\therefore \Delta = (9 - 6a)^2 - 4(4a + 2)(-4a + 4) = 81 - 108a + 36a^2 + 64a^2 - 32a - 32 = 100a^2 - 140a + 49 = (10a - 7)^2 \geq 0$, \therefore 当 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时, $y = (4a + 2)x^2 + (9 - 6a)x - 4a + 4$ 的图象与 x 轴总有交点, \therefore 无论 a 取什么实数, 图象 T 与 x 轴总有公共点.

(2) 【解】存在. $\therefore a$ 为整数, $\therefore a \neq -\frac{1}{2}$. 当 $a \neq -\frac{1}{2}$ 时, 对于函数 $y = (4a + 2)x^2 + (9 - 6a)x - 4a + 4$, 令 $y = 0$, 则 $(4a + 2)x^2 + (9 - 6a)x - 4a + 4 = 0$, $\therefore [(2a + 1)x - (4a - 4)](2x + 1) = 0$, $\therefore (2a + 1)x - (4a - 4) = 0$ 或 $2x + 1 = 0$, $\therefore x = \frac{4a - 4}{2a + 1} = 2 - \frac{6}{2a + 1}$ 或 $x = -\frac{1}{2}$. \therefore 整数 a 使图象 T 与 x 轴的公共点中有整点, 即 x 为整数, $\therefore 2a + 1 = 1$ 或 $2a + 1 = -1$ 或 $2a + 1 = 2$ 或 $2a + 1 = -2$ 或 $2a + 1 = 3$ 或 $2a + 1 = -3$ 或 $2a + 1 = 6$ 或 $2a + 1 = -6$, 解得

$a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=\frac{1}{2}$ (舍去) 或 $a=-\frac{3}{2}$ (舍去) 或 $a=1$ 或 $a=-2$ 或 $a=\frac{5}{2}$ (舍去) 或 $a=-\frac{7}{2}$ (舍去), $\therefore a=0$ 或 $a=-1$ 或 $a=1$ 或 $a=-2$.

10. 【解】(1) 将点 A 的坐标代入 $y=x^2+mx$ 得 $0=4+2m$, 解得 $m=-2$. 将点 A 的坐标代入 $y=-x+b$ 得 $0=-2+b$, 解得 $b=2$. 故 $m=-2, b=2$.

(2) 由 (1) 得, 直线和抛物线的表达式分别为 $y=-x+2, y=x^2-2x$, 联立上述两个函数表

$$\text{达式并解得} \begin{cases} x=-1, \\ y=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=2, \\ y=0, \end{cases}$$

\therefore 点 B 的坐标为 $(-1, 3)$. 从题图可以看出, 不等式 $x^2+mx > -x+b$ 的解集为 $x < -1$ 或 $x > 2$.

(3) 当点 M 在线段 AB 上, 线段 MN 与抛物线只有一个公共点时, $-1 \leq x_M < 2$; 当点 M 在点 B 的左侧时, 线段 MN 与抛物线没有公共点; 当点 M 在点 A 的右侧且 $x_M=3$ 时, 抛物线与线段 MN 交于抛物线的顶点 $(1, -1)$, 即 $x_M=3$ 时, 线段 MN 与抛物线只有一个公共点. 综上, $-1 \leq x_M < 2$ 或 $x_M=3$.

11. 8 【解析】由题意得, $A(0, 1.6)$, 将 $A(0, 1.6)$ 代入 $y=a(x-3)^2+2.5$, 得 $1.6=a(0-3)^2+2.5$, 解得 $a=-\frac{1}{10}$, $\therefore y=-\frac{1}{10}(x-3)^2+2.5$. 令 $y=0$, 得 $-\frac{1}{10}(x-3)^2+2.5=0$, 解得 $x_1=8, x_2=-2$ (舍去), $\therefore OB$ 为 8 m, 故答案为 8.

12. 能 【解析】 $\because CD=4$ m, $B(6, 2.68)$, $\therefore OC=6-4=2$ (m). 在 $y=-0.02x^2+0.3x+1.6$ 中, 当 $x=2$ 时, $y=-0.02 \times 2^2+0.3 \times 2+1.6=2.12$. $\because 2.12 > 1.8$, \therefore 货车能完全停到车棚内. 故答案为能.

13. 【解】(1) 根据题意, 得 $w_1=(8-m)x-30$ ($0 \leq x \leq 500$), $w_2=(20-12)x-(80+0.01x^2)=-0.01x^2+8x-80$ ($0 \leq x \leq 300$).

(2) $\because 4 \leq m \leq 6, \therefore 8-m > 0, \therefore w_1$ 随 x 的增大而增大. 又 $\because 0 \leq x \leq 500, \therefore$ 当 $x=500$ 时, w_1 有最大值, $w_{1\text{最大}}=-500m+3\,970$.

$w_2=-0.01x^2+8x-80=-0.01(x-400)^2+1\,520$. 又 $\because -0.01 < 0$, 对称轴为直线 $x=400, \therefore$ 当 $0 \leq x \leq 300$ 时, w_2 随 x 的增大而增大,

易错警示

(3) 注意分点 M 在线段 AB 上, 点 M 在点 B 的左侧以及点 M 在点 A 的右侧三种情况讨论, 不要漏解.

思路分析

(3) ① 根据要求作出线段 OF 即可. 连结 BF, 过点 F 作 $FQ \perp OB$ 于点 Q, 证明 $\triangle AOE \cong \triangle BOF$, 得到 $\angle OBF = \angle OAE = 45^\circ, BF = AE = \sqrt{2}$, 进而得到 $\triangle FQB$ 为等腰直角三角形, 求出 F 点坐标, 将 F 点的横坐标代入抛物线的表达式, 即可判断点 F 是否在抛物线上.

\therefore 当 $x=300$ 时, w_2 有最大值, $w_{2\text{最大}}=-0.01 \times (300-400)^2+1\,520=1\,420$.

综上, 产销 A 产品的最大日利润为 $(-500m+3\,970)$ 元, 产销 B 产品的最大日利润为 1 420 元.

(3) 当 $m=5.1$ 时, 选择产销 A, B 两种产品均可; 当 $4 \leq m < 5.1$ 时, 选择产销 A 种产品; 当 $5.1 < m \leq 6$ 时, 选择产销 B 种产品. 理由如下:

① 若 $w_{1\text{最大}}=w_{2\text{最大}}$, 即 $-500m+3\,970=1\,420$, 解得 $m=5.1$; ② 若 $w_{1\text{最大}} > w_{2\text{最大}}$, 即 $-500m+3\,970 > 1\,420$, 解得 $m < 5.1$; ③ 若 $w_{1\text{最大}} < w_{2\text{最大}}$, 即 $-500m+3\,970 < 1\,420$, 解得 $m > 5.1$.

综上可得, 为获得最大日利润,

当 $m=5.1$ 时, 选择产销 A, B 两种产品均可;

当 $4 \leq m < 5.1$ 时, 选择产销 A 种产品;

当 $5.1 < m \leq 6$ 时, 选择产销 B 种产品.

14. 【解】(1) 把 $B(0, -4)$ 代入 $y=a\left(x+\frac{5}{2}\right) \cdot$

$(x-4)$ ($a \neq 0$), 得 $-10a=-4$, 解得 $a=\frac{2}{5}$,

$\therefore y=\frac{2}{5}\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-4)=\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{5}x-4$.

(2) 令 $y=\frac{2}{5}\left(x+\frac{5}{2}\right)(x-4)=0$, 解得 $x_1=-\frac{5}{2}, x_2=4, \therefore A(4, 0)$. $\because M$ 是 OA 的中点,

$\therefore M(2, 0), \therefore OM=2. \because B(0, -4), \therefore$ 设直线 AB 的表达式为 $y=kx-4$, 把 $A(4, 0)$ 代入, 得

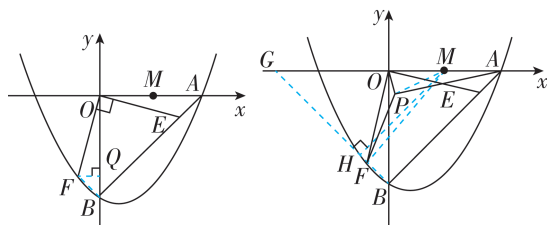
$k=1, \therefore y=x-4$, 易得 $C(2, -2), D\left(2, -\frac{18}{5}\right)$,

$\therefore CD=-2+\frac{18}{5}=\frac{8}{5}, \therefore \triangle BCD$ 的面积为

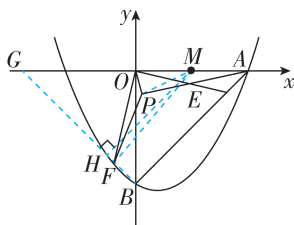
$$\frac{1}{2}CD \cdot OM = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{8}{5} = \frac{8}{5}.$$

(3) ① 如图 (1), 线段 OF 即为所求. 连结 BF, 过点 F 作 $FQ \perp OB$ 于点 Q. 由 (2) 可知, $OA=OB=4, \therefore \angle OAB = \angle OBA = 45^\circ$. 由旋转得, $OE=OF, \angle EOF=90^\circ=\angle BOA, \therefore \angle AOE = \angle BOF$. 又 $\because OA=OB, \therefore \triangle AOE \cong \triangle BOF, \therefore \angle OBF = \angle OAE = 45^\circ, BF=AE=\sqrt{2}. \because FQ \perp OB, \therefore \triangle FQB$ 为等腰直角三角形, $\therefore FQ=BQ=\frac{\sqrt{2}}{2}BF=1, \therefore OQ=OB-BQ=3, \therefore F(-1, -3)$. 点 F 在抛物线上. 理由: 对

于 $y=\frac{2}{5}x^2-\frac{3}{5}x-4$, 当 $x=-1$ 时, $y=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-4=-3, \therefore$ 点 F 在抛物线上.



图(1)



图(2)

②连结 BF 并延长, 交 x 轴于点 G , 连结 PM , MF , 作 $MH \perp BG$ 于点 H , 如图(2). $\because \angle OPA = 90^\circ$, M 为 OA 的中点, $\therefore PM = \frac{1}{2}OA = 2$. 同①

可得, $\angle OBF = \angle OAE = 45^\circ$, \therefore 点 F 在线段 BG 上运动, \therefore 当 $MF \perp BG$, 即点 F 与点 H 重合时, MF 的值最小. $\because PF \geq MF - PM$, \therefore 此时 PF 的值最小, 为 $MH - PM$. $\because \angle OBG = 45^\circ$, $\therefore \triangle OBG$ 为等腰直角三角形, $\therefore OG = OB = 4$, $\angle BGO = 45^\circ$, $\therefore MG = OG + OM = 6$, $\triangle MHG$ 为等腰直角三角形, $\therefore MH = \frac{\sqrt{2}}{2}MG = 3\sqrt{2}$, $\therefore PF$ 的最小值为 $MH - PM = 3\sqrt{2} - 2$.

(七) 几何初步

刷考点

1. **A** 【解析】A 选项中的图形可以作为一个正方体的展开图, 故本选项符合题意; B 选项中的图形有“田”字型结构, 不可以作为一个正方体的展开图, 故本选项不符合题意; C 选项中的图形不可以作为一个正方体的展开图, 故本选项不符合题意; D 选项中的图形不可以作为一个正方体的展开图, 故本选项不符合题意. 故选 A.

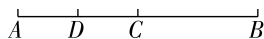
2. **A** 【解析】将直角三角形绕它的一条直角边所在直线旋转一周后形成的几何体是圆锥, 故选 A.

3. **B** 【解析】 $\because OE \perp OC$, $\therefore \angle COE = 90^\circ$. $\because \angle AOC + \angle COE + \angle BOE = 180^\circ$, $\angle AOC = 58^\circ$, $\therefore \angle EOB = 180^\circ - 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$, 故选 B.

4. **C** 【解析】根据题意分两种情况.

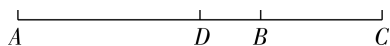
①如图(1). $\because AB = 4, BC = 2$, $\therefore AC = AB - BC = 2$. **关键点拨**

$\because D$ 是线段 AC 的中点, $\therefore AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.



图(1)

②如图(2). $\because AB = 4, BC = 2$, $\therefore AC = AB + BC = 6$.



图(2)

$\because D$ 是线段 AC 的中点, $\therefore AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

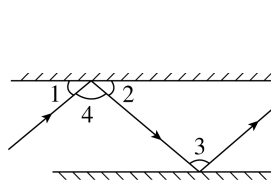
3. 综上, 线段 AD 的长为 1 或 3. 故选 C.

5. **A** 【解析】依据的数学原理是垂线段最短, 故选 A.

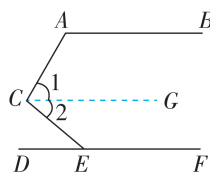
6. **C** 【解析】 $\because AD \parallel BC$, $\angle B = 38^\circ$, $\therefore \angle DAE = \angle B = 38^\circ$, $\angle DAC = \angle C$. $\because AD$ 是 $\angle EAC$ 的平分线, $\therefore \angle DAC = \angle DAE = 38^\circ$, $\therefore \angle C =$

$\angle DAC = 38^\circ$. 故选 C.

7. **C** 【解析】如图, $\because \angle 1 = \angle 2 = 40^\circ$, $\therefore \angle 4 = 180^\circ - \angle 1 - \angle 2 = 100^\circ$. \because 两个平面镜平行放置, \therefore 经过两次反射后的光线与入射光线平行, $\therefore \angle 3 = \angle 4 = 100^\circ$, 故选 C.



(第7题图)



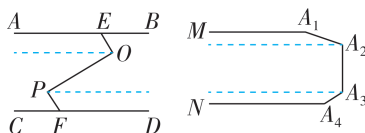
(第8题图)

8. 模型归纳 | 拐点模型

1. 单拐点模型



2. 多拐点模型

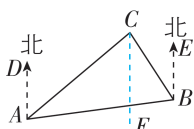


B 【解析】如图, 过点 C 作 $CG \parallel AB$. $\because DF \parallel AB$, $\therefore DF \parallel AB \parallel CG$, $\therefore \angle 1 + \angle CAB = 180^\circ$, $\angle 2 = \angle CED$. $\because \angle BAC = 120^\circ$, $\angle ACE = 100^\circ$, $\therefore \angle 1 = 60^\circ$, $\therefore \angle 2 = \angle ACE - \angle 1 = 40^\circ$, $\therefore \angle CED = \angle 2 = 40^\circ$. 故选 B.

9. **85°** 【解析】过点 C 作

$CF \parallel AD$, 如图. $\because AD \parallel BE$, $\therefore AD \parallel CF \parallel BE$, $\therefore \angle ACF =$

$\angle DAC$, $\angle BCF = \angle EBC$, $\therefore \angle ACB = \angle ACF + \angle BCF = \angle DAC + \angle EBC$. 由 C 岛在 A 岛的北偏东 50° 方向, C 岛在 B 岛的北偏西 35° 方向, 得 $\angle DAC = 50^\circ$, $\angle CBE = 35^\circ$, $\therefore \angle ACB = 50^\circ + 35^\circ = 85^\circ$. 故答案为 85° .

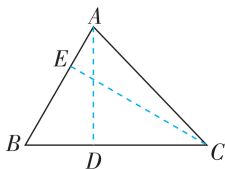


(八) 三角形

刷考点

1. **B** 【解析】A 选项, $1+2=3$, 不能构成三角形, 故本选项不符合题意; B 选项, $2+3>4$, 能构成三角形, 故本选项符合题意; C 选项, $3+5=8$, 不能构成三角形, 故本选项不符合题意; D 选项, $5+4<10$, 不能构成三角形, 故本选项不符合题意. 故选 B.

2. **C** 【解析】如图, 作 $\triangle ABC$ 的边 BC 和 AB 上的高 AD , CE . $\because \triangle ABC$ 是锐角三角形, $\therefore AD$, CE 在 $\triangle ABC$ 的内部, 即



$BC>BD$, $AB>BE$. \because 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, $\angle B=60^\circ$, $AB=4$, $\therefore BD=AB \cdot \cos B=4 \times \frac{1}{2}=2$, $\therefore BC>2$. 又 $\because BC=\frac{BE}{\cos B}<\frac{AB}{\cos B}=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8$,

$\therefore 2<BC<8$, \therefore C 选项符合题意. 故选 C.

3. **C** 【解析】由题意得 $\triangle ABD$, $\triangle ABC$, $\triangle ADC$, $\triangle ADE$ 均为直角三角形, \therefore 共有 4 个直角三角形. 故选 C.

4. 100° 【解析】 $\because CD$ 是边 AB 上的高, $\therefore \angle CDB=\angle CDA=90^\circ$. $\because \angle BCD=30^\circ$, $\angle ACB=80^\circ$, $\therefore \angle ACD=\angle ACB-\angle BCD=50^\circ$, $\angle CBD=90^\circ-\angle BCD=60^\circ$, $\therefore \angle CAB=90^\circ-\angle ACD=40^\circ$. $\because AE$ 是 $\angle CAB$ 的平分线, $\therefore \angle EAB=\frac{1}{2}\angle CAB=20^\circ$, $\therefore \angle AEB=180^\circ-\angle EAB-\angle EBA=100^\circ$, 故答案为 100° .

5. $\frac{1}{3^n}m$ 【解析】设 $\angle E_1AD=\alpha$, $\angle E_1BD=\beta$, 则 $\angle CAB=3\alpha$, $\angle CBD=3\beta$. 由三角形的外角的性质得 $\beta=\alpha+\angle E_1$, $3\beta=3\alpha+\angle C$, $\therefore \angle E_1=\frac{1}{3}\angle C$. 同理可得 $\angle E_2=\frac{1}{3}\angle E_1$, 即 $\angle E_2=\left(\frac{1}{3}\right)^2\angle C$, \dots , $\therefore \angle E_n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\angle C$, 即 $\angle E_n=\frac{1}{3^n}m^\circ$, 故答案为 $\frac{1}{3^n}m$.

6. **A** 【解析】如图, 过点 C 作 $CE \perp OA$ 于点 E , 摆绳 OA 所在直线与地面的交点为 F . 由题意可知, $OB=OC=2$ m, $BD=1.6$ m, $DF=1.3$ m, $\therefore OD=\sqrt{OB^2-BD^2}=1.2$ m, $\therefore OF=OD+DF=$

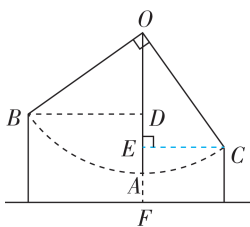
关键点拨
掌握三角形的三边关系是解决本题的关键.

思路分析
连结 AB , BC , OC , 首先证出 $\triangle OAC \cong \triangle OBC$, 得到 $\angle ACO$ 和 $\angle AOC$ 的度数, 再根据三角形内角和定理求解即可.

关键点拨
熟练掌握勾股定理以及全等三角形的性质与判定是解题的关键.

1. $2+1.3=2.5$ (m).

$\because \angle ODB=\angle OEC=90^\circ$, $\therefore \angle OBD+\angle BOD=90^\circ$. $\because \angle BOC=90^\circ$, $\therefore \angle BOD+\angle COE=90^\circ$, $\therefore \angle OBD=\angle COE$.



在 $\triangle BOD$ 和 $\triangle OCE$ 中, $\begin{cases} \angle ODB=\angle CEO, \\ \angle OBD=\angle COE, \\ OB=OC, \end{cases}$

$\therefore \triangle BOD \cong \triangle OCE$ (A. A. S.), $\therefore OE=BD=1.6$ m, $\therefore EF=OF-OE=2.5-1.6=0.9$ (m), 即小丽在 C 处时距离地面的高度是 0.9 m, 故选 A.

7. $DE=EF$ (或 $AD=CF$) 【解析】 $\because CF \parallel AB$, $\therefore \angle A=\angle ECF$, $\angle ADE=\angle CFE$, \therefore 添加条件 $DE=EF$, 可以使得 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ (A. A. S.), 添加条件 $AD=CF$, 可以使得 $\triangle ADE \cong \triangle CFE$ (A. S. A.), 从而得到 $AE=CE$. 故答案为 $DE=EF$ (或 $AD=CF$).

8. 3 【解析】 $\because BE \perp AD$, $CF \perp AD$, $\therefore \angle BEA=\angle AFC=90^\circ$, $\therefore \angle BAE+\angle ABE=90^\circ$. $\because \angle BAC=90^\circ$, $\therefore \angle BAE+\angle FAC=90^\circ$, $\therefore \angle FAC=\angle ABE$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CAF$ 中, $\begin{cases} \angle BEA=\angle AFC, \\ \angle ABE=\angle CAF, \\ AB=AC, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAF$ (A. A. S.), $\therefore AF=BE$, $AE=CF$. $\because BE=4$, $CF=1$, $\therefore AF=BE=4$, $AE=CF=1$, $\therefore EF=AF-AE=4-1=3$, 故答案为 3.

9. 【证明】(1) $\because \angle BAF=\angle EAD$, $\therefore \angle BAF-\angle EAF=\angle EAD-\angle EAF$, $\therefore \angle BAC=\angle FAD$.

$\because AC=AD$, $\angle ACB=\angle ADF$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AFD$.

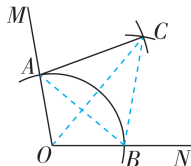
(2) $\because \triangle ABC \cong \triangle AFD$, $\therefore AB=AF$.

$\because BE=FE$, $\therefore AE \perp BF$, 即 $AC \perp BD$.

10. **B** 【解析】如图, 连结 AB , BC , OC . 由作图可得, $OA=OB$, $AC=BC=AB$, $\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形, $\therefore \angle ACB=60^\circ$.

$\because OC=OC$, $\therefore \triangle OAC \cong \triangle OBC$ (S. S. S.), $\therefore \angle ACO=$

$\angle BCO=\frac{1}{2}\angle ACB=30^\circ$,



$\angle AOC=\angle BOC=\frac{1}{2}\angle AOB=50^\circ$, $\therefore \angle OAC=180^\circ-\angle AOC-\angle ACO=180^\circ-30^\circ-50^\circ=100^\circ$. 故选 B.

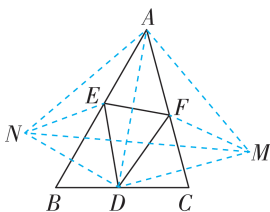
11. **B** 【解析】由题意可得 $\triangle OAB \cong \triangle ODC$,

$\therefore \angle AOB = \angle COD$. $\because \triangle OAB, \triangle ODC$ 都是等腰三角形, 点 E, F 分别是底边 AB, CD 的中点, $\therefore \angle AOE = \angle BOE = \frac{1}{2} \angle AOB$, $\angle COF = \angle DOF = \frac{1}{2} \angle COD$, $\therefore \angle AOE = \angle BOE = \angle COF = \angle DOF$. $\because OE \perp OF$, $\therefore \angle BOE + \angle BOF = 90^\circ$, $\therefore \angle DOF + \angle BOF = 90^\circ$, 即 $\angle BOD = 90^\circ$, $\therefore OB \perp OD$, 故 A 正确. $\because \angle AOB$ 与 $\angle BOC$ 的度数不能确定, \therefore 无法证明 $\angle BOC$ 与 $\angle AOB$ 的关系, 故 B 错误. $\because \triangle OAB \cong \triangle ODC$, 点 E, F 分别是底边 AB, CD 的中点, $\therefore OE = OF$, 故 C 正确. $\because OE \perp OF$, $\therefore \angle COF + \angle EOC = 90^\circ$, $\therefore \angle AOE + \angle EOC = 90^\circ$, $\therefore \angle AOC = 90^\circ$, $\therefore \angle AOB + \angle BOC = 90^\circ$. ① 又 $\because \angle BOD = 90^\circ$, $\therefore \angle BOC + \angle COD = 90^\circ$. ② ①+②得 $\angle AOB + \angle BOC + \angle BOC + \angle COD = 180^\circ$, 即 $\angle BOC + \angle AOD = 180^\circ$, 故 D 正确. 故选 B.

12. 2 【解析】 $\because AB = AC$, $\therefore \angle ABC = \angle C$. $\because \angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$, $\angle A = 36^\circ$, $\therefore \angle ABC = \angle C = 72^\circ$. $\because BD$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle CBD = \angle ABD = 36^\circ$, $\therefore \angle BDC = 180^\circ - \angle C - \angle CBD = 180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ$, $\therefore \angle BDC = \angle C$, $\therefore BD = BC = 2$. $\because \angle A = 36^\circ$, $\angle ABD = 36^\circ$, $\therefore \angle A = \angle ABD$, $\therefore AD = BD = 2$. 故答案为 2.

13. 2 $\sqrt{3}$ 【解析】如图, 作点 D 关于 AB, AC 的对称点 N, M , 连结 AM, AN, EN, FM, MN, AD , $\therefore \triangle DEF$ 的周长为 $DE + EF + FD = NE + EF + FM \geq MN$. $\because N, M$ 分别是点 D 关于 AB, AC 的对称点, $\therefore \angle NAE = \angle EAD$, $\angle FAD = \angle FAM$, $AN = AD = AM$. 又 $\because \angle EAD + \angle FAD = 45^\circ$, $\therefore \angle NAM = \angle NAE + \angle EAD + \angle FAD + \angle FAM = 90^\circ$, $\therefore \triangle AMN$ 是等腰直角三角形, $\therefore MN = \sqrt{2}AN = \sqrt{2}AD$, \therefore 当 N, E, F, M 四点共线, 且 $AD \perp BC$ 时, $\triangle DEF$ 的周长最小. 又 $\because \angle B = 60^\circ$, $AB = 2\sqrt{2}$, $\therefore AD_{\min} = AB \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$, $\therefore \triangle DEF$ 周长的最小值为 $\sqrt{2}AD_{\min} = \sqrt{2} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{3}$, 故答案为 $2\sqrt{3}$.

14. (1) 【证明】 $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\therefore \angle BAD = \angle CAD$.



关键点拨 (1) 利用“三线合一”求出 $\angle DCB$ 的度数是解答本题的关键.

关键点拨 作点 D 关于 AB, AC 的对称点 N, M , 连结 AM, AN, EN, FM, MN, AD , 得出 N, E, F, M 四点共线且 $AD \perp BC$ 时 $\triangle DEF$ 的周长最小是解题的关键.

由题意知 $AE = AF$. 在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle ADF$ 中, $\begin{cases} AE = AF, \\ \angle BAD = \angle CAD, \\ AD = AD, \end{cases} \therefore \triangle ADE \cong \triangle ADF (S.A.S.).$

(2) 【解】 $\because \angle BAC = 80^\circ$, AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\therefore \angle EAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 40^\circ$.

由题意知 $AE = AD$, $\therefore \angle AED = \angle ADE$, $\therefore \angle ADE = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ$.

$\because AB = AC$, AD 为 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\therefore AD \perp BC$, $\therefore \angle BDE = 90^\circ - \angle ADE = 20^\circ$.

15. (1) 【解】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle ACB = 60^\circ$.

$\because D$ 是 AB 的中点,

$\therefore \angle DCB = \angle DCA = \frac{1}{2} \angle ACB = 30^\circ$.

$\because CE \perp BC$, $\therefore \angle BCE = 90^\circ$,

$\therefore \angle DCE = \angle BCE - \angle DCB = 60^\circ$.

(2) 【证明】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, D 是 AB 的中点, $\therefore AB = BC$, $\angle ABC = 60^\circ$, $CD \perp AB$, $\therefore \angle BDC = 90^\circ$.

由平移得 $CD \parallel EF$, $\therefore \angle BAE = \angle BDC = 90^\circ$.

在 $\text{Rt} \triangle ABE$ 和 $\text{Rt} \triangle CBE$ 中, $\begin{cases} AB = CB, \\ BE = BE, \end{cases}$

$\therefore \text{Rt} \triangle ABE \cong \text{Rt} \triangle CBE (H.L.)$,

$\therefore \angle ABE = \angle EBC = 30^\circ$,

$\therefore \angle BEC = 90^\circ - \angle EBC = 60^\circ$.

又 $\because \angle DCE = 60^\circ$, $\therefore \triangle CEG$ 是等边三角形.

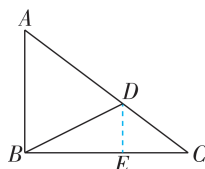
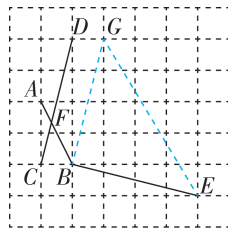
16. C 【解析】如图, 过 B 点作 $BG \parallel CD$, 连结 EG .

$\because BG \parallel CD$, $\therefore \angle ABG = \angle CFB = \alpha$. $\because BG^2 = 1^2 + 4^2 = 17$, $BE^2 = 1^2 + 4^2 = 17$, $EG^2 = 3^2 + 5^2 = 34$,

$\therefore BG^2 + BE^2 = EG^2$, $BG = BE$, $\therefore \triangle BEG$ 是等腰直角三角形, $\therefore \angle GBE = 90^\circ$, $\therefore \angle ABE = \angle GBE + \angle ABG = 90^\circ + \alpha$. 故选 C.

17. B 【解析】 $\because \angle A = 120^\circ$, $AB = AC$, $\therefore \angle C = 30^\circ$, \therefore 在 $\text{Rt} \triangle DEC$ 中, $CD = \frac{DE}{\tan 30^\circ} = 3$. $\because D$ 为 AC 中点, $\therefore AC = 6$. 故选 B.

18. C 【解析】在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = 3$, $BC = 4$, $\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5$, $\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $3 + 4 + 5 = 12$. $\because BD$ 平分 $\triangle ABC$ 的周长, $\therefore AB + AD = BC + CD = 6$, $\therefore AD = 3$, $CD = 2$. 如图, 过 D 作



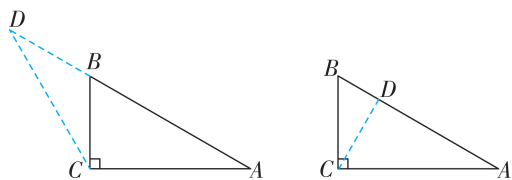
$DE \perp BC$ 于 E , $\therefore AB \parallel DE$, $\therefore \triangle CDE \sim \triangle CAB$,
 $\therefore \frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC} = \frac{CE}{CB}$, $\therefore \frac{DE}{3} = \frac{2}{5} = \frac{CE}{4}$, $\therefore DE = \frac{6}{5}$,
 $CE = \frac{8}{5}$, $\therefore BE = \frac{12}{5}$, $\therefore BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} =$
 $\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$, 故选 C.

19. 11, 60, 61 【解析】通过观察得, 第①组勾股数为 $2 \times 1 + 1 = 3$, $2 \times 1^2 + 2 \times 1 = 4$, $2 \times 1^2 + 2 \times 1 + 1 = 5$; 第②组勾股数为 $2 \times 2 + 1 = 5$, $2 \times 2^2 + 2 \times 2 = 12$, $2 \times 2^2 + 2 \times 2 + 1 = 13$; 第③组勾股数为 $2 \times 3 + 1 = 7$, $2 \times 3^2 + 2 \times 3 = 24$, $2 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 = 25$; 第④组勾股数为 $2 \times 4 + 1 = 9$, $2 \times 4^2 + 2 \times 4 = 40$, $2 \times 4^2 + 2 \times 4 + 1 = 41$; 所以第⑤组勾股数为 $2 \times 5 + 1 = 11$, $2 \times 5^2 + 2 \times 5 = 60$, $2 \times 5^2 + 2 \times 5 + 1 = 61$. 故答案为 11, 60, 61.

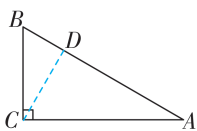
20. 6 或 12 【解析】在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{BC}{AB}$,

$$\therefore BC = \frac{1}{2} \times 8 = 4, \therefore AC = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}.$$

当点 D 在 AB 延长线上时, 如图 (1) 所示.
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $\therefore \angle ABC = 60^\circ$. 又
 $\therefore \angle BCD = 30^\circ$, $\therefore \angle BDC = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$,
 $\therefore BD = BC = 4$, $\therefore AD = 8 + 4 = 12$.



图(1)



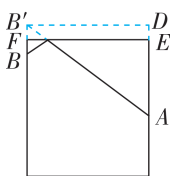
图(2)

当点 D 在线段 AB 上时, 如图 (2) 所示.
 $\therefore \angle ABC = 60^\circ$, $\angle BCD = 30^\circ$, $\therefore \angle CDA = 90^\circ$.

在 $\text{Rt} \triangle ACD$ 中, $\cos A = \frac{AD}{AC}$, $\therefore AD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 6$.

综上所述, AD 的长为 6 或 12. 故答案为 6 或 12.

21. 10 【解析】如图, 将杯子侧面的一半展开, 作 B 关于 EF 的对称点 B' , 连结 $B'A$, 则 $B'A$ 为最短路程, 过点 B' 作 $B'D \perp AE$ 交 AE 的延长线于 D . 根据题意可得 $AD = 9 - 4 + 1 = 6$ (cm),
 $B'D = \frac{1}{2} \times 16 = 8$ (cm), $\therefore B'A = \sqrt{B'D^2 + AD^2} =$
 $\sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (cm), 故答案为 10.



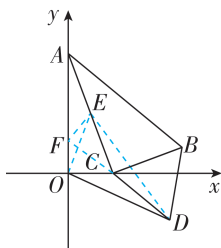
22. $\sqrt{3} + \sqrt{13}$ 【解析】在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 2$, $\therefore AC = BC \div$

思路分析

解直角三角形得出 $AC = 2\sqrt{3}$, 由 $\triangle BCD$ 是等边三角形可得 $CD = BC = 2$, $\angle BCD = 60^\circ$. 取 AC 的中点 E , 连结 OE , DE , 作 $EF \perp CD$ 交 DC 的延长线于 F , 求出 $DE = \sqrt{13}$, 再根据 $OD \leq DE + OE$ 即可求解.

$$\tan 30^\circ = 2 \div \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

$\therefore \triangle BCD$ 为等边三角形, $\therefore CD = BC = 2$, $\angle BCD = 60^\circ$. 如图, 取 AC 的中点 E , 连结 OE , DE , 作 $EF \perp CD$ 交 DC 的延长线于 F , 则
 $AE = CE = OE = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$, $\angle FCE = 180^\circ -$
 $\angle ACB - \angle BCD = 30^\circ$, $\therefore EF = \frac{1}{2}CE = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
 $\therefore CF = \sqrt{CE^2 - EF^2} = \frac{3}{2}$, $\therefore DF = DC + CF = \frac{7}{2}$,
 $\therefore DE = \sqrt{EF^2 + DF^2} = \sqrt{13}$. $\therefore OD \leq DE + OE$,
 $\therefore OD \leq \sqrt{3} + \sqrt{13}$, $\therefore OD$ 的最大值为 $\sqrt{3} + \sqrt{13}$, 故答案为 $\sqrt{3} + \sqrt{13}$.



23. A 【解析】A 选项, 两点之间, 线段最短, 原命题正确, 符合题意; B 选项, 菱形的对角线互相垂直, 不一定相等, 原命题错误, 不符合题意; C 选项, 正五边形的外角和为 360° , 原命题错误, 不符合题意; D 选项, 直角三角形不一定是轴对称图形, 只有等腰直角三角形才是轴对称图形, 原命题错误, 不符合题意. 故选 A.

24. A 【解析】 $\because AB = AC$, $\therefore \angle ABC = \angle ACB$. 当 $\angle DCB = \angle ECB$ 时, $\therefore BC = BC$, $\angle ABC = \angle ACB$, $\therefore \triangle DCB \cong \triangle ECB$ (A. S. A.), $\therefore CD = CE$, $BD = CE$, 故选项 B、D 是真命题, 不符合题意; 当 $BD = CE$ 时, $\therefore BC = BC$, $\angle ABC = \angle ACB$, $\therefore \triangle DCB \cong \triangle ECB$ (S. A. S.), $\therefore \angle DCB = \angle ECB$, 故选项 C 是真命题, 不符合题意; 当 $CD = BE$ 时, 不能证明 $\angle DCB = \angle ECB$, 故选项 A 是假命题, 符合题意. 故选 A.

25. 53 28 【解析】由题意得一名学生单独完成 A, B, C, D, E, F, G 七道工序, 需要 $9 + 9 + 7 + 9 + 7 + 10 + 2 = 53$ (分), 即由一名学生单独完成此木艺艺术品的加工, 需要 53 分钟; 假设这两名学生为甲、乙. \therefore 工序 C, D 须在工序 A 完成后进行, 工序 E 须在工序 B, D 都完成后进行, 且工序 A, B 都需要 9 分钟完成, \therefore 甲学生做工序 A, 乙学生同时做工序 B, 需要 9 分钟, 工序 A, B 加工完成后可以进行的工序有 C, D, G, 为使后续工序顺利进行, 甲学生做工序 D, 乙学生同时做工序 C, 乙学生完成工序 C 后接着做工序 G, 需要 9 分钟, 最后甲学生做工序 E, 乙学生同时做工序 F, 需要 10 分钟, \therefore 若由两名学生合作完成此木艺艺术品的加工, 最少需要 $9 + 9 + 10 = 28$ (分), 故答案为 53, 28.

关键点拨

点 D 的位置不明确, 需分情况讨论:
 ①点 D 在 AB 延长线上;
 ②点 D 在线段 AB 上, 分别求出 AD 的长即可.

归纳总结

解决最短路径问题时, 通常先根据题意把立体图形展开成平面图形, 再确定两点之间的最短路径. 一般情况是两点之间, 线段最短. 在平面图形上构造直角三角形解决问题.

(九) 四边形

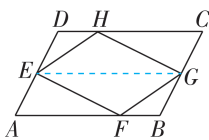
刷考点

1. **C** 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 且对角线交点在原点, \therefore 点 A, C 关于原点对称. $\therefore A(-1, 2), \therefore C(1, -2)$, 故选 C.

2. **C** 【解析】 $\because \angle A = \angle E = \frac{1}{5} \times 180^\circ \times (5-2) = 108^\circ, \therefore \angle AMN + \angle ENM = 360^\circ - \angle A - \angle E = 144^\circ. \therefore \angle 1 = \angle AMN, \angle 2 = \angle ENM, \therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle AMN + \angle ENM = 144^\circ$. 故选 C.

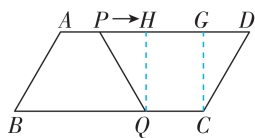
关键点拨
掌握多边形内角和公式是解题关键.

3. **C** 【解析】如图所示, 连结 EG . \because 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\therefore AD \parallel BC, \angle A = \angle C, AD = BC. \therefore E, G$ 分别为边 AD, BC 的中点, $\therefore DE = AE = BG = CG$. 又 $\because AF = CH, \therefore \triangle AEF \cong \triangle CGH$ (S. A. S.), $\therefore EF = GH$, 同理可证 $EH = GF, \therefore$ 四边形 $EFGH$ 为平行四边形. $\because AE \parallel BG$, 且 $AE = BG, \therefore$ 四边形 $EABG$ 为平行四边形, $\therefore S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2} S_{\square EFGH} = \frac{1}{2} S_{\square ABGE} = \frac{1}{4} S_{\square ABCD}, \therefore S_{\square EFGH} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$, 故四边形 $EFGH$ 的面积为定值, 故选 C.

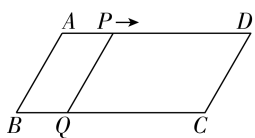


4. **B** 【解析】由已知可得, P 从 A 到 D 需要 12 s, Q 从 C 到 B (或从 B 到 C) 需要 4 s. 设 P, Q 的运动时间为 t s.

①当 $0 \leq t \leq 4$ 时, (i) 点 Q 在点 P 右侧时, 过 Q 作 $QH \perp AD$ 于 H , 过 C 作 $CG \perp AD$ 于 G , 如图(1). 由题易得四边形 $HQCG$ 为矩形, $AP = t$ cm, $CQ = 3t$ cm, $\therefore GH = 3t$ cm. $\because PD \parallel CQ, PQ = CD, \therefore$ 四边形 $CQPD$ 是等腰梯形, $\therefore \angle QPH = \angle D = \angle B = 60^\circ, \therefore \angle PQH = \angle GCD = 30^\circ. \therefore PQ = CD = AB = 6$ cm, $\therefore PH = \frac{1}{2} PQ = 3$ cm, $DG = \frac{1}{2} CD = 3$ cm. $\therefore AP + PH + GH + DG = AD = BC = 12$ cm, $\therefore t + 3 + 3t + 3 = 12$, 解得 $t = 1.5$.



图(1)



图(2)

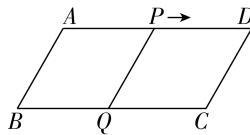
(ii) 点 Q 在点 P 左侧时, 四边形 $CQPD$ 是平行四边形, 如图(2).

此时 $PD = CQ = 3t$ cm, $\therefore t + 3t = 12$, 解得 $t = 3$, \therefore 运动时间为 1.5 s 或 3 s 时, $PQ = CD$.

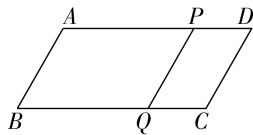
②当 $4 < t \leq 8$ 时, (i) 点 Q 在点 P 左侧时, 四边形 $CQPD$ 是平行四边形, 如图(3).

此时 $BQ = 3(t-4)$ cm, $AP = t$ cm. $\because AD = BC, PD = CQ, \therefore BQ = AP, \therefore 3(t-4) = t$, 解得 $t = 6$.

(ii) 点 Q 在点 P 右侧时, 由①知, 此时四边形 $CQPD$ 是以 CD, PQ 为腰的等腰梯形, 这种情况在 $4 < t \leq 8$ 时不存在, \therefore 运动时间为 6 s 时, $PQ = CD$.



图(3)



图(4)

③当 $8 < t \leq 12$ 时, (i) 点 Q 在点 P 左侧时, 四边形 $CQPD$ 是平行四边形, 如图(4).

此时 $CQ = 3(t-8), PD = 12-t, \therefore 3(t-8) = 12-t$, 解得 $t = 9$. (ii) 同②可知点 Q 在点 P 右侧时的情况在 $8 < t \leq 12$ 时不存在, \therefore 运动时间为 9 s 时, $PQ = CD$.

综上所述, 运动时间为 1.5 s 或 3 s 或 6 s 或 9 s 时, $PQ = CD$. 故选 B.

刷有所得

正 n ($n \geq 3$ 且 n 为整数) 边形的内角和为 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 正 n 边形的每个内角的度数为 $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$, 每个外角的度数为 $\frac{360^\circ}{n}$.

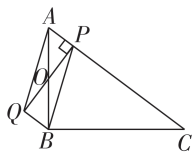
5. **50°** 【解析】 \because 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形, $\therefore \angle AFE = \angle BAF = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$.

$\therefore \angle EFG = 20^\circ, \therefore \angle AFG = 120^\circ - 20^\circ = 100^\circ. \because AH \parallel FG, \therefore \angle FAH = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ, \therefore \angle BAI = 120^\circ - 80^\circ = 40^\circ. \because BI \perp AH, \therefore \angle ABI = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, 故答案为 50° .

6. **12** 【解析】由折叠的性质可知, $\angle BCA = \angle ECA. \because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AD \parallel BC, CD = AB = 6$ cm, $\therefore \angle EAC = \angle BCA, \therefore \angle EAC = \angle ECA. \because \triangle CED$ 为等边三角形, $\therefore \angle CED = \angle ECD = 60^\circ. \therefore \angle CED = \angle EAC + \angle ACE = 60^\circ, \therefore \angle ACE = \angle CAE = 30^\circ, \therefore \angle ACD = \angle ACE + \angle DCE = 90^\circ, \therefore AD = 2CD = 12$ cm. 故答案为 12.

7. **$\frac{24}{5}$** 【解析】在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ, AB = 6, BC = 8, \therefore AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. 设 AB 交 QP 于点 $O. \because$ 四边形 $PAQB$ 是平行四边形, $\therefore OA = \frac{1}{2} AB = 3, OP = \frac{1}{2} PQ, \therefore$ 当 OP 取最小值时, PQ 取最小值. 如图, 当 $OP \perp AC$ 时, OP 取最小值, 此时 $\sin \angle BAC = \frac{OP}{AO} = \frac{BC}{AC}$, 即 $\frac{OP}{3} = \frac{8}{10}$, 解得

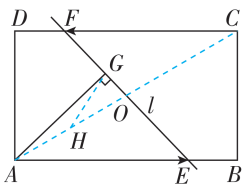
$OP = \frac{12}{5}$, \therefore 线段 PQ 的最小值为 $2OP = \frac{24}{5}$. 故答案为 $\frac{24}{5}$.



思路分析

连结 AC 交 EF 于点 O , 取 OA 中点 H , 连结 GH . 由勾股定理可求 AC 的长, 由“ $A.S.A.$ ”可证 $\triangle AOE \cong \triangle COF$, 可得 $AO = CO = 1$, 再由 $AG \perp EF$, H 是 OA 的中点可得点 G 的运动轨迹, 进而求解.

12. **D** 【解析】连结 AC 交 EF 于点 O , 取 OA 中点 H , 连结 GH , 如图所示. \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $AB \parallel CD$, \therefore 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$, $\angle EAO = \angle FCO$, $\angle AEO = \angle CFO$. 在 $\triangle AOE$ 与 $\triangle COF$ 中, $\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO, \\ AE = CF, \\ \angle AEO = \angle CFO, \end{cases} \therefore \triangle AOE \cong \triangle COF$,



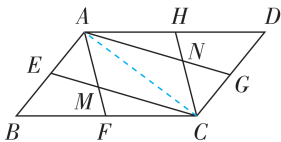
$\therefore AO = CO = \frac{1}{2}AC = 1$. $\therefore AG \perp EF$, H 是 OA 的中点, \therefore 在 $\text{Rt} \triangle AGO$ 中, $GH = \frac{1}{2}AO = \frac{1}{2}$, \therefore 点

G 的轨迹为以 H 为圆心, $\frac{1}{2}$ 为半径长, 即 AO 为直径的圆弧, $\therefore AG$ 的最大值为 AO 的长, 即 AG 的最大值为 1. 故选 D .

13. $\frac{60}{13}$ 【解析】连结 OE . \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $BC = AD = 12$, $AO = CO = BO = DO$. $\because AB = 5$, $BC = 12$, $\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 13$, $\therefore OB = OC = \frac{13}{2}$, $\therefore S_{\triangle BOC} = S_{\triangle BOE} + S_{\triangle COE} = \frac{1}{2} \times OB \cdot EG + \frac{1}{2} \times OC \cdot EF = \frac{1}{2} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 15$, $\therefore \frac{1}{2} \times \frac{13}{2} EG + \frac{1}{2} \times \frac{13}{2} EF = 15$, $\therefore EG + EF = \frac{60}{13}$, 故答案为 $\frac{60}{13}$.

14. 3 或 9 【解析】①当点 P 在 AC 上方时, 如图 (1), PC 交直线 EF 于点 G , 延长 PE 交 AC 于点 H . 在矩形 $ABCD$ 中, $AD = 6$, $\angle CAD = 60^\circ$, $\therefore \angle ACD = 30^\circ$, $\therefore AC = 2AD = 12$, $\therefore CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = 6\sqrt{3}$. \because 点 E 是边 CD 的中点, $\therefore CE = \frac{1}{2}CD = 3\sqrt{3}$. \because 点 C 与点 P 关于直线 EF 对称, $\therefore PE = CE = 3\sqrt{3}$, $\angle EGC = \angle EGP = 90^\circ$. $\because PH \perp AC$, $\therefore \angle EHC = \angle EHF = 90^\circ$, $\therefore \angle CEH = 60^\circ$, $\therefore \angle PEC = 120^\circ$. $\therefore PE = CE$,

8. (1) 【证明】 \because 点 E, F, G, H 分别是 $\square ABCD$ 各边的中点, $\therefore AH \parallel CF$, $AD = BC$, $AH = \frac{1}{2}AD$, $FC = \frac{1}{2}BC$, $\therefore AH = CF$, \therefore 四边形 $AFCH$ 是平行四边形, $\therefore AM \parallel CN$. 同理可得, 四边形 $AECG$ 是平行四边形, $\therefore AN \parallel CM$, \therefore 四边形 $AMCN$ 是平行四边形.



(2) 【解】如图所示, 连结 AC . $\because H, G$ 分别是 AD, CD 的中点, \therefore 点 N 是 $\triangle ACD$ 的重心, $\therefore CN = 2HN$, $\therefore S_{\triangle ACN} = \frac{2}{3} S_{\triangle ACH}$. 又 $\because CH$ 是 $\triangle ACD$ 的中线, $\therefore S_{\triangle ACH} = \frac{1}{2} S_{\triangle ACD}$, $\therefore S_{\triangle ACN} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD}$. 又 $\because AC$ 是 $\square AMCN$ 和 $\square ABCD$ 的对角线, $\therefore S_{\triangle ACN} = \frac{1}{2} S_{\square AMCN}$, $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$, $\therefore S_{\square AMCN} = \frac{1}{3} S_{\square ABCD}$. 又 $\because \square AMCN$ 的面积为 4, $\therefore \square ABCD$ 的面积为 12.

思路分析

(1) 依据四边形 $AFCH$ 是平行四边形, 可得 $AM \parallel CN$, 依据四边形 $AECG$ 是平行四边形, 可得 $AN \parallel CM$, 进而得出四边形 $AMCN$ 是平行四边形;

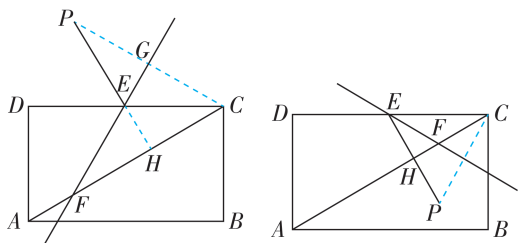
(2) 连结 AC , 依据三角形重心的性质, 即可得到 $S_{\triangle ACN} = \frac{2}{3} S_{\triangle ACH}$, 再根据 CH 是 $\triangle ACD$ 的中线, 即可得出 $S_{\triangle ACN} = \frac{1}{3} S_{\triangle ACD}$, 进而得到 $S_{\square AMCN} = \frac{1}{3} S_{\square ABCD}$, 依据 $\square AMCN$ 的面积为 4, 即可得出结论.

9. **D** 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, \therefore 当 $\angle A = 90^\circ$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是矩形, \therefore 选项 A 可以判定 $\square ABCD$ 为矩形, 故选项 A 不符合题意. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB \parallel CD$, $\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ$. 当 $\angle B = \angle C$ 时, $\angle B = \angle C = 90^\circ$, 此时 $\square ABCD$ 为矩形, \therefore 选项 B 可以判定 $\square ABCD$ 为矩形, 故选项 B 不符合题意. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, \therefore 当 $AC = BD$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是矩形, \therefore 选项 C 可以判定 $\square ABCD$ 为矩形, 故选项 C 不符合题意. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, \therefore 当 $AC \perp BD$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是菱形, \therefore 选项 D 不能判定 $\square ABCD$ 为矩形, \therefore 选项 D 符合题意. 故选 D .

10. **C** 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 为矩形, 对角线 AC, BD 相交于点 O , $\therefore OA = OB = OC = OD$. $\because \angle ABD = 60^\circ$, $\therefore \triangle OAB$ 为等边三角形, $\therefore OA = OB = AB = 2$, $\therefore OC = OA = 2$, $\therefore AC = OA + OC = 4$, 故选 C .

11. **B** 【解析】设 $A(a, b)$, $AB = m$, $AD = n$. \therefore 四边

$\therefore \angle CPE = \angle PCE = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle PEC) = 30^\circ$.
 $\therefore \angle PEG = \angle FEH, \angle EGP = \angle EHF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle CPE = \angle EFC = 30^\circ, \therefore EF = EC, \therefore \triangle CEF$
 是等腰三角形, $\therefore CH = FH = \frac{1}{2}CF$. 在
 $\text{Rt}\triangle CEH$ 中, $CE = 3\sqrt{3}, \angle HCE = 30^\circ, \therefore CH =$
 $CE \cdot \cos \angle HCE = 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}, \therefore CF =$
 $2CH = 9$.



图(1)

图(2)

②当点 P 在 AC 下方时,如图(2). 设 PE 与
 AC 的交点为 H . $\because PE \perp AC, \therefore \angle CHE = 90^\circ$.
 同 ① 可知, $\angle ACD = 30^\circ, CE = 3\sqrt{3}$,
 $\therefore \angle CEP = 60^\circ, \therefore CH = CE \cdot \sin \angle CEH =$
 $3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$. 由对称的性质得 $PE = CE$,
 $\therefore \triangle CEP$ 是等边三角形, $\therefore \angle P = 60^\circ, CE =$
 $PC = PE = 3\sqrt{3}, \angle HEF = 30^\circ, EH = PH =$
 $\frac{1}{2}PE = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore HF = EH \cdot \tan \angle PEF = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times$
 $\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{2}, \therefore CF = CH - HF = 3$.

综上, CF 的长为 3 或 9. 故答案为 3 或 9.

15. (1)【证明】 $\because D, E$ 分别为 AB, AC 的中点,
 $\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $\therefore DE \parallel BC$.

$\because DG = FC, \therefore$ 四边形 $DFCG$ 是平行四边形.
 又 $\because DF \perp BC, \therefore \angle DFC = 90^\circ$,
 \therefore 平行四边形 $DFCG$ 是矩形.

(2)【解】 $\because DF \perp BC, \therefore \angle DFB = 90^\circ$.
 $\because \angle B = 45^\circ, \therefore \triangle BDF$ 是等腰直角三角形,
 $\therefore BF = DF = 3. \because DG = FC = 5, \therefore BC = BF +$
 $FC = 3 + 5 = 8$. 由(1)可知, DE 是 $\triangle ABC$ 的中

位线, 四边形 $DFCG$ 是矩形,
 $\therefore DE = \frac{1}{2}BC = 4, CG = DF = 3, \angle G = 90^\circ$,

$\therefore EG = DG - DE = 5 - 4 = 1$,

$\therefore CE = \sqrt{CG^2 + EG^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

$\because E$ 为 AC 的中点, $\therefore AC = 2CE = 2\sqrt{10}$.

16. (1)【证明】如图(1),

\therefore 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle A = \angle D = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$.

由折叠得 $\angle EPB = \angle A =$

$90^\circ, \therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$,

$\therefore \angle 3 = \angle 2$.

又 $\because \angle D = \angle C = 90^\circ$,

$\therefore \triangle DEP \sim \triangle CPH$.

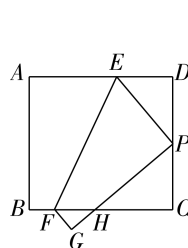
【解】(2)如图(2), \because 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore CD = AB = 2, AD = BC = 3, \angle A = \angle D = \angle C =$
 $90^\circ. \because P$ 为 CD 中点, $\therefore DP = CP = \frac{1}{2} \times 2 = 1$.

设 $EP = AE = x, \therefore ED = AD - AE = 3 - x$. 在
 $\text{Rt}\triangle EDP$ 中, $EP^2 = ED^2 + DP^2$, 即 $x^2 =$
 $(3 - x)^2 + 1$, 解得 $x = \frac{5}{3}, \therefore EP = AE = \frac{5}{3}$,

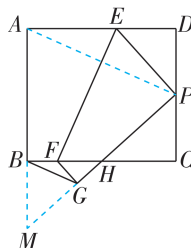
$\therefore ED = AD - AE = \frac{4}{3}$. 由(1)得 $\triangle DEP \sim$

$\triangle CPH, \therefore \frac{ED}{PC} = \frac{EP}{PH}, \therefore \frac{\frac{4}{3}}{1} = \frac{\frac{5}{3}}{PH}$, 解得 $PH = \frac{5}{4}$.

$\therefore PG = AB = 2, \therefore GH = PG - PH = \frac{3}{4}$.



图(2)



图(3)

(3) $AB = \sqrt{6}BG$. 理由: 如图(3), 延长 AB, PG
 交于点 M , 连结 AP . 由折叠得 $AE = EP$,
 $\angle EPG = \angle BAE = 90^\circ, \therefore \angle EAP = \angle EPA$,
 $\therefore \angle BAP = \angle GPA, \therefore MA = MP, \therefore \triangle MAP$ 是
 等腰三角形. $\because P$ 为 CD 中点, \therefore 设 $DP =$
 $CP = y, \therefore AB = PG = CD = 2y. \because H$ 为 BC 中点,
 $\therefore BH = CH. \because \angle BHM = \angle CHP, \angle CBM =$
 $\angle PCH, \therefore \triangle MBH \cong \triangle PCH$ (A. S. A.), $\therefore BM =$
 $CP = y, HM = HP, \therefore MP = MA = MB + AB = 3y$,
 $\therefore HP = \frac{1}{2}PM = \frac{3}{2}y$.

在 $\text{Rt}\triangle PCH$ 中, $CH = \sqrt{PH^2 - PC^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}y$,

$\therefore BC = 2CH = \sqrt{5}y, \therefore AD = BC = \sqrt{5}y$,

\therefore 在 $\text{Rt}\triangle APD$ 中, $AP = \sqrt{AD^2 + PD^2} = \sqrt{6}y$.

\therefore 由折叠易得 $AP \perp EF, BG \perp$ 直线 EF ,

$\therefore BG \parallel AP, \therefore \triangle BMG \sim \triangle AMP$,

$\therefore \frac{BG}{AP} = \frac{BM}{AM} = \frac{1}{3}, \therefore BG = \frac{\sqrt{6}}{3}y$,

易错警示

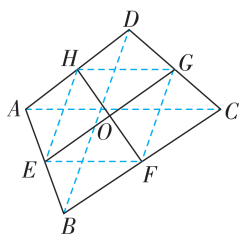
注意分点 P
 在 AC 上方和
 点 P 在 AC 下
 方两种情况讨
 论, 不要漏解.

刷有所得

遇中点, 常倍
 长中点所在的
 线段, 构造全
 等三角形.

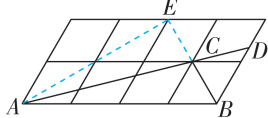
$$\therefore \frac{AB}{BG} = \frac{2y}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}, \therefore AB = \sqrt{6}BG.$$

17. **A** 【解析】如图, 连结 AC, BD, EF, FG, GH, EH . $\because G, H$ 分别是 CD, AD 的中点, $\therefore HG$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线, $\therefore HG \parallel AC, HG = \frac{1}{2}AC$.



同理, $EF \parallel AC, EF = \frac{1}{2}AC, EH = \frac{1}{2}BD, \therefore HG \parallel EF, HG = EF, \therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形. $\because BD = AC, \therefore EH = EF, \therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形, $\therefore EG$ 与 FH 互相垂直平分. 故选 A.

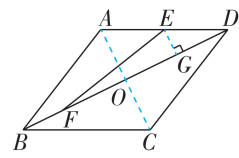
18. **B** 【解析】如图, 延长 BC 交格点于 E , 连结 AE . 由题意可得, $AE \perp BE, AE =$



$$4\sqrt{3}, EC = 2, \therefore \tan \angle BCD = \tan \angle ACE = \frac{AE}{EC} =$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}, \text{ 故选 B.}$$

19. **C** 【解析】结合图象, 可得当 $x = 0$ 时, $PO = AO = 4$, 当点 P 运动到点 B 时, $PO = BO = 2$. 在菱形 $ABCD$ 中, $AC \perp BD, \therefore \angle AOB = \angle BOC = 90^\circ, \therefore AB = BC = \sqrt{AO^2 + BO^2} = 2\sqrt{5}$. 当点 P 运动到 BC 中点时, PO 的长为 $\frac{1}{2}BC = \sqrt{5}$, 故选 C.



20. $\sqrt{85}$ 【解析】连结 AC 交 BD 于点 O , 过点 E 作 $EG \perp OD$ 于点 G , 如图. \because 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AD = AB = 4\sqrt{5}, BO = OD = \frac{1}{2}BD = 8, AO \perp BD, \therefore AO = \sqrt{AD^2 - OD^2} = 4, EG \parallel AO, \therefore \triangle DEG \sim \triangle DAO, \therefore \frac{DE}{AD} = \frac{EG}{AO} = \frac{DG}{OD}. \because E$ 是 AD 的中点, $\therefore \frac{DE}{AD} = \frac{EG}{4} = \frac{DG}{8} = \frac{1}{2}, \therefore EG = 2, DG = 4, \therefore FG = BD - BF - DG = 16 - 3 - 4 = 9, \therefore EF = \sqrt{FG^2 + EG^2} = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}$. 故答案是 $\sqrt{85}$.

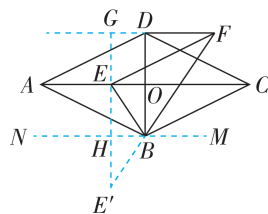
关键点拨

过点 B 作 AC 的平行线 MN , 作点 E 关于 MN 的对称点 E' , 连结 $BE', E'F$, 得到 E', B, F 三点共线时, $BE + BF = BE' + BF$ 取得最小值是解题关键.

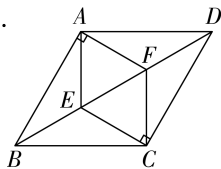
思路分析

连结 AC 交 BD 于点 O , 过点 E 作 $EG \perp OD$ 于点 G , 利用菱形的性质得出 $AD = AB = 4\sqrt{5}, BO = OD = 8, AO \perp BD$, 进而得出 $AO = \sqrt{AD^2 - OD^2} = 4, EG \parallel AO$, 即可证明 $\triangle DEG \sim \triangle DAO$, 即可计算出 $EG = 2, DG = 4$, 即可求得 $FG = BD - BF - DG = 16 - 3 - 4 = 9$, 再利用勾股定理即可求解.

$E'F$. 由对称性得 $BE = BE', \therefore BE + BF = BE' + BF \geq E'F, \therefore$ 点 E', B, F 共线时, $BE' + BF$ 取得最小值, 为 $E'F$ 的长. 设 AC 与 BD 的交点为 O, EE' 交 MN 于点 H , 延长 $E'E$ 交 FD 的延长线于点 G . 在菱形 $ABCD$ 中, $AC = 4, BD = 2, \therefore AO = \frac{1}{2}AC = 2, BO = DO = \frac{1}{2}BD = 1, AC \perp BD. \because AC \parallel MN, EH \perp HB, \therefore AC \perp GH, \therefore \angle OEH = \angle EOB = \angle EHB = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $EOBH$ 是矩形, $\therefore E'H = EH = OB = 1. \because$ 四边形 $DAEF$ 为平行四边形, $\therefore DF = AE, DF \parallel AC, \therefore GD \perp DO, \therefore \angle GDO = \angle DOE = \angle GEO = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $DOEG$ 是矩形, $\therefore GD = EO, GE = DO = 1, \therefore GF = GD + DF = EO + AE = AO = 2, GE' = GE + EH + E'H = 3, \therefore E'F = \sqrt{GF^2 + GE'^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, 即 $BE + BF$ 的最小值为 $\sqrt{13}$, 故答案为 $\sqrt{13}$.



22. (1) 【证明】 $\because AB \parallel CD, \therefore \angle ABF = \angle CDE. \because AF \perp AB, CE \perp CD, \therefore \angle BAF = \angle DCE = 90^\circ. \because BE = EF = FD, \therefore BE + EF = FD + EF$, 即 $BF = DE$. 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$ 中, $\begin{cases} \angle ABF = \angle CDE, \\ \angle BAF = \angle DCE = 90^\circ, \\ BF = DE, \end{cases} \therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE (A.A.S.).$ (2) 【解】四边形 $AECF$ 是菱形. 理由如下: 如图. $\because \angle ABD = 30^\circ, AB \parallel CD, \therefore \angle CDB = \angle ABD =$

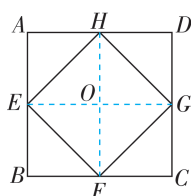


$30^\circ. \because BE = EF, \angle BAF = 90^\circ, \therefore AE = \frac{1}{2}BF.$ 在 $Rt \triangle ABF$ 中, $\angle ABD = 30^\circ, \therefore AF = \frac{1}{2}BF, \therefore AE = AF = \frac{1}{2}BF$, 同理 $CE = CF = \frac{1}{2}DE$. 由 (1) 知, $BF = DE, \therefore AE = AF = CE = CF, \therefore$ 四边形 $AECF$ 是菱形.

23. (1) 【证明】设 CD 与 EF 相交于点 M . \because 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\therefore BC = DC, \angle BCE = \angle DCE, AB \parallel CD. \therefore \angle ABC = 60^\circ, \therefore \angle DCF = 60^\circ$. 在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DCE$ 中, $\begin{cases} BC = DC, \\ \angle BCE = \angle DCE, \\ CE = CE, \end{cases}$

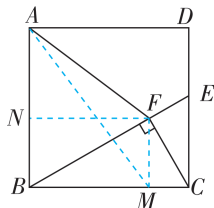
21. $\sqrt{13}$ 【解析】如图, 过点 B 作 AC 的平行线 MN , 作点 E 关于 MN 的对称点 E' , 连结 BE' ,

27. 2 【解析】如图, 连结 HF , EG 交于点 O . \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, 且面积为 4, $\therefore AB \perp BC, AB = BC = 2$. $\therefore H, F$ 分别为边 AD, BC 的中点, \therefore 易得 $AB = HF = 2, AB \parallel HF$. 同理可得 $BC = EG = 2, BC \parallel EG$. $\therefore AB \perp BC, \therefore HF \perp EG, \therefore$ 四边形 $EFGH$ 的面积是 $\frac{1}{2} EG \times HF = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$. 故答案为 2.



归纳总结
对角线互相垂直的四边形的面积等于它的两条对角线长的乘积的一半.

28. $\frac{3}{8}$ 【解析】如图, 过点 F 作 $FM \perp BC, FN \perp AB$, 垂足分别为 M, N , 连结 AM , 则 $\angle FMC = 90^\circ$. \because 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $\therefore \angle ABC = \angle FMC$, $\therefore AB \parallel FM, \therefore FN = BM$. $\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} AB \cdot FN$, $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AB \cdot BM, \therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ABM}$. $\because CF \perp BE, AB = 1 = BC, \angle EBC = 30^\circ, \therefore \angle BCF = 60^\circ, CF = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}, \therefore \angle CFM = 90^\circ - \angle BCF = 30^\circ, \therefore CM = \frac{1}{2} CF = \frac{1}{4}, \therefore BM = BC - CM = \frac{3}{4}, \therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, 故

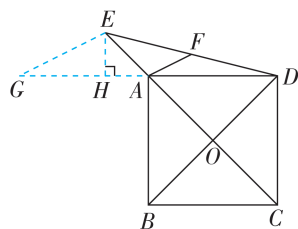


思路分析
过点 F 作 $FM \perp BC, FN \perp AB$, 垂足分别为 M, N , 连结 AM , 则易得 $AB \parallel FM$, 再根据平行线间的距离处处相等得出 $FN = BM$, 继而得出 $S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ABM}$, 通过解直角三角形得出 $BM = \frac{3}{4}$, 即可求解.

答案为 $\frac{3}{8}$.

29. (1) 2 (2) $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 【解析】(1) \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore OA = OC = OD = OB, \angle DOC = 90^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle DOC$ 中, $OD^2 + OC^2 = DC^2$. $\therefore DC = 3\sqrt{2}, \therefore OD = OC = OA = OB = 3$. $\therefore OE = 5, \therefore AE = OE - OA = 5 - 3 = 2$. 故答案为 2.

(2) 延长 DA 到点 G , 使 $AG = AD$, 连结 EG , 过 E 点向 AG 作垂线, 垂足为 H , 如图所示.



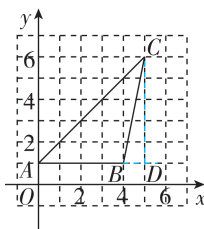
$\because F$ 为 DE 的中点, A 为 GD 的中点, $\therefore AF$ 为 $\triangle DGE$ 的中位线. 在 $\text{Rt} \triangle EAH$ 中, $\angle EAH = \angle DAC = 45^\circ, \therefore AH = EH$. $\therefore AH^2 + EH^2 = AE^2, \therefore AH = EH = \sqrt{2}, \therefore GH = AG - AH = 3\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. 在 $\text{Rt} \triangle EHG$ 中, $EG^2 = EH^2 + GH^2 = 2 + 8 = 10, \therefore EG = \sqrt{10}$. $\therefore AF$ 为 $\triangle DGE$ 的中位线, $\therefore AF = \frac{1}{2} EG = \frac{\sqrt{10}}{2}$. 故答案为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

(十) 锐角三角函数

刷考点

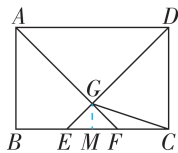
1. A 【解析】 $\tan 45^\circ - \sqrt{2} \cos 45^\circ = 1 - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$, 故选 A.
2. D 【解析】在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, AB = 13, BC = 5$, 则 $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$, 故选 D.
3. D 【解析】 \because 小正方形的面积为 1, 大正方形的面积为 25, \therefore 小正方形的边长为 1, 大正方形的边长为 5. 设直角三角形较短的直角边长为 a , 则较长的直角边长为 $a+1$, 其中 $a > 0$. 由勾股定理得 $a^2 + (a+1)^2 = 5^2$, 解得 $a_1 = 3, a_2 = -4$ (舍去), $\therefore a+1 = 4, \therefore \cos \alpha = \frac{4}{5}$, 故选 D.
4. C 【解析】如图, 过 C 作 $CD \perp AB$ 交 AB 延长线于 D . $\because A(0, 1), B(4, 1), C(5, 6), \therefore D(5,$

$1), \therefore CD = 6 - 1 = 5, AD = 5, \therefore AC = 5\sqrt{2}, \therefore \sin \angle BAC = \frac{CD}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故选 C.



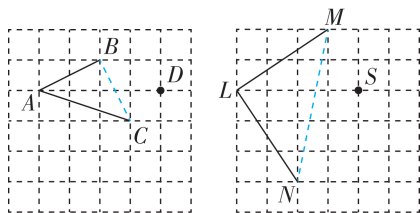
5. B 【解析】过点 G 作 $GM \perp BC$ 于点 M , 如图. $\because E, F$ 是 BC 的三等分点, $\therefore BE = EF = CF = \frac{1}{3} BC = 4, \therefore BF = BE + EF = 8, \therefore AB = BF = 8$. \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AB = CD = 8, \angle B = \angle DCB = 90^\circ, \therefore \triangle ABF$ 是等腰直角三角形, $\therefore \angle BFA = 45^\circ$. 同理可得, $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形, $\therefore \angle CED = 45^\circ, \therefore \angle BFA = \angle CED =$

45° , $\therefore GE = GF$, $\angle EGF = 90^\circ$. $\therefore GM \perp EF$, $\therefore GM = EM = FM = \frac{1}{2}EF = 2$, $\therefore CM = CF + MF = 4 + 2 = 6$. 在 $\text{Rt}\triangle GMC$ 中, $\tan \angle GCF = \frac{GM}{CM} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. 故选 B.



6. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】 $\because \odot A, \odot B$ 分别与 x 轴相切于点 C 和点 D , 半径为 1, $\therefore AC \perp x$ 轴, $BD \perp x$ 轴, $AC = BD = 1$, $\therefore A$ 点的纵坐标为 1. 把 $y = 1$ 代入 $y = \frac{\sqrt{3}}{x}$, 得 $x = \sqrt{3}$, $\therefore A(\sqrt{3}, 1)$, $\therefore OC = \sqrt{3}$, $\therefore \tan \angle OAC = \frac{OC}{AC} = \sqrt{3}$, $\therefore \angle OAC = 60^\circ$, \therefore 第一象限中阴影部分图形(扇形)的面积为 $\frac{60\pi \times 1^2}{360} = \frac{\pi}{6}$. 同理, 第三象限中阴影部分图形(扇形)的面积为 $\frac{\pi}{6}$, $\therefore S_{\text{阴影部分}} = \frac{\pi}{3}$. 故答案为 $\frac{\pi}{3}$.

7. 【解】(1) 如图(1), 连结 BC . 由题意, 得 $\tan \alpha = \tan \angle BAD = \frac{1}{2}$, $\tan \beta = \tan \angle CAD = \frac{1}{3}$, $\therefore \angle \alpha = \angle BAD$, $\angle \beta = \angle CAD$. $\therefore AB = BC = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$, $AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $\therefore AB^2 + BC^2 = AC^2$, $\therefore \triangle ABC$ 是等腰直角三角形, 且 $\angle ABC = 90^\circ$, $\therefore \angle BAC = 45^\circ$, $\therefore \angle \alpha + \angle \beta = 45^\circ$.



图(1)

图(2)

(2) 如图(2), 在边长为 1 的正方形网格中画出 $\angle MLS$ 和 $\angle NLS$ (点 M, L, N, S 都在格点上), 连结 MN . 由题意, 得 $\tan \alpha = \tan \angle MLS = \frac{2}{3}$, $\tan \beta = \tan \angle SLN = \frac{3}{2}$, $\therefore \angle \alpha = \angle MLS$, $\angle \beta = \angle SLN$. $\because LM = LN = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$, $MN = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26}$, $\therefore ML^2 + NL^2 = MN^2$, $\therefore \triangle LMN$ 是等腰直角三角形, 且 $\angle MLN = 90^\circ$, $\therefore \angle \alpha + \angle \beta = \angle MLS + \angle SLN = \angle MLN = 90^\circ$, 故答案为 90° .

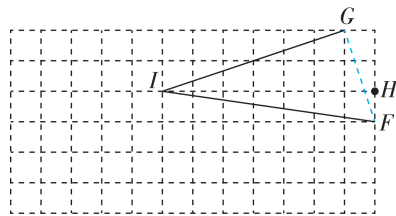
(3) 如图(3), 在边长为 1 的正方形网格中画

关键点拔
求得 $\angle OAC = 60^\circ$ 是解题的关键.

思路分析
由题意得出四边形 $ACDE$ 是矩形, 得到 BC 的长, 再解直角三角形求出 AB 的长即可.

思路分析
延长 AN 交 BC 的延长线于点 E , 设 $DN = x$ cm, 则 $CN = CD - DN = (9 - x)$ cm, 先根据水的体积不变建立方程, 解方程可得 x 的值, 再根据平行线的性质可得 $\angle DAN = \angle AEF = \alpha$, 然后根据正切的定义计算即可.

出 $\angle GIH$ 和 $\angle HIF$ (点 G, I, F, H 都在格点上), 连结 GF . 由题意, 得 $\tan \alpha = \tan \angle GIH = \frac{1}{3}$, $\tan \beta = \tan \angle HIF = \frac{1}{7}$, $\therefore \angle \alpha = \angle GIH$, $\angle \beta = \angle HIF$. $\therefore \angle \alpha + \angle \beta = \angle \theta$, $\therefore \angle \theta = \angle GIH + \angle HIF = \angle GIF$. $\because IG = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$, $GF = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$, $IF = \sqrt{1^2 + 7^2} = 5\sqrt{2}$, $\therefore IG^2 + GF^2 = IF^2$, $\therefore \triangle IGF$ 是直角三角形, 且 $\angle IGF$ 是直角, $\therefore \tan \theta = \tan \angle GIF = \frac{GF}{IG} = \frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = \frac{1}{2}$.

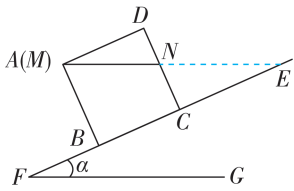


图(3)

8. B 【解析】由题意得, 四边形 $ACDE$ 是矩形, $\therefore CD = AE = n$, $\therefore BC = BD - CD = m - n$. 由题意得, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BAC = \alpha$, $\therefore \sin \alpha = \frac{BC}{AB}$, $\therefore AB = \frac{BC}{\sin \alpha} = \frac{m-n}{\sin \alpha}$, 即 A, B 两点之间的距离为 $\frac{m-n}{\sin \alpha}$ 米. 故选 B.

9. $15\sqrt{3}$ m 【解析】 \because 迎水坡 AB 的斜面坡度 $i = 1 : \sqrt{2}$, $\therefore BC : AC = 1 : \sqrt{2}$. $\because BC = 15$ m, $\therefore AC = 15\sqrt{2}$ m. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 由勾股定理得 $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = \sqrt{15^2 + (15\sqrt{2})^2} = 15\sqrt{3}$ (m), 故答案为 $15\sqrt{3}$ m.

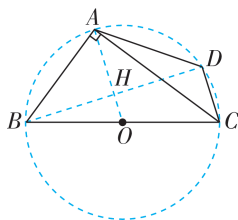
10. $\frac{4}{9}$ 【解析】如图, 延长 AN 交 BC 的延长线于点 E . 由题意得 $AD = BC = CD = 9$ cm, $\angle D = 90^\circ$, $AD \parallel BC$, $AN \parallel FG$. 设 $DN = x$ cm, 则 $CN = CD - DN = (9 - x)$ cm. \therefore 密封透



明正方体容器水平放置在桌面上与放在坡角为 α 的斜坡上, 容器里水的体积不变, 且放在坡角为 α 的斜坡上时, 水的体积等于长为 9 cm、宽为 9 cm、高为 $(9 - x)$ cm 的长方体的体积与长为 9 cm、宽为 9 cm、高为 x cm 的长方体的体积的一半之和, $\therefore 9 \times 9 \times (9 - x) + \frac{1}{2} \times 9 \times 9 \times x = 9 \times 9 \times 7$, 解得 $x = 4$, 即 $DN = 4$ cm. $\therefore AN \parallel FG$, $\therefore \angle AEF = \angle F = \alpha$. $\because AD \parallel BC$,

BC 为直径. 如图, 把 BC 的中点记为点 O , 则 A, B, C, D 四点在 $\odot O$ 上, 连结 BD, AO , 相交于点 H . $\because BC = 5, \therefore BO =$

$OA = OC = \frac{1}{2}BC = \frac{5}{2}$. 设 $OH = x$, 则 $AH = \frac{5}{2} - x$.



$\because AB = AD, \therefore \widehat{AB} = \widehat{AD}, \therefore AO \perp BD, BH = DH$. 在 $Rt\triangle ABH$ 中, $BH^2 = AB^2 - AH^2$, 在 $Rt\triangle BOH$ 中, $BH^2 = BO^2 - OH^2, \therefore BO^2 - OH^2 = AB^2 - AH^2,$

$\therefore \left(\frac{5}{2}\right)^2 - x^2 = 3^2 - \left(\frac{5}{2} - x\right)^2$, 解得 $x = 0.7$, 即 $OH = 0.7, \therefore AH = 2.5 - 0.7 = 1.8, \therefore BH =$

$\sqrt{3^2 - 1.8^2} = 2.4, \therefore BD = 2.4 \times 2 = 4.8. \because BC$ 是直径, $\therefore \angle BDC = 90^\circ. \because BH = DH, BO = OC,$

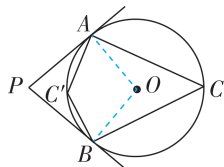
$\therefore OH$ 是 $\triangle BDC$ 的中位线, $\therefore DC = 2HO = 1.4,$

$\therefore S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}BD \cdot DC = \frac{1}{2} \times 4.8 \times 1.4 = 3.36,$

$S_{\triangle BDA} = \frac{1}{2}BD \cdot AH = \frac{1}{2} \times 4.8 \times 1.8 = 4.32, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 的面积为 $S_{\triangle BDC} + S_{\triangle BDA} = 3.36 + 4.32 = 7.68$.

9. D 【解析】如图, 连结 OA, OB . $\because PA, PB$ 分别与 $\odot O$ 相切于 A, B 两点, $\therefore OA \perp PA, OB \perp PB, \therefore \angle OAP = \angle OBP = 90^\circ, \therefore \angle AOB = 360^\circ - \angle OAP - \angle OBP - \angle P = 100^\circ$. 当点 C 在优弧 ACB 上时, $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ;$

当点 C' 在劣弧 AB 上时, $\angle AC'B = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$. 综上所述, $\angle ACB$ 的度数是 50° 或 130° , 故选 D.



10. $2\sqrt{7}$ 【解析】如图, 连结 MP, MQ . 设直线 $y = x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A, B . $\because PQ$ 是 $\odot M$ 的切线, $\therefore MQ \perp PQ, \therefore PQ = \sqrt{PM^2 - MQ^2} = \sqrt{PM^2 - 4}, \therefore$ 当 PM 的值最小时, PQ 的值最小, \therefore 当 $MP \perp AB$ 时, MP 的值最小, 此时 PQ 的值最小. 易知 $A(-4, 0), B(0, 4), \therefore OA = OB = 4, \therefore \angle BAO = 45^\circ, AM =$

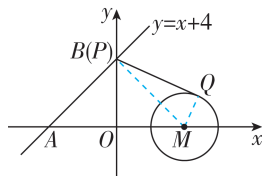
思路分析

连结 MP, MQ , 根据切线的性质得到 $MQ \perp PQ$, 根据勾股定理得到 $PQ = \sqrt{PM^2 - 4}$, 则 PM 的值最小时, PQ 的值最小, 再根据垂线段最短计算即可.

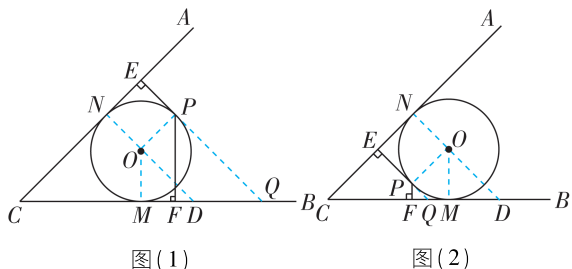
思路分析

(1) 连结 OB , 先证出 $Rt\triangle DEB \cong Rt\triangle FDA$, 得到 $\angle 3 = \angle 4$, 再根据 $OA = OB$, 得到 $\angle 1 = \angle 2$, 则 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$, 进而得出 $\angle OBP = 90^\circ$, 即可得出结论.

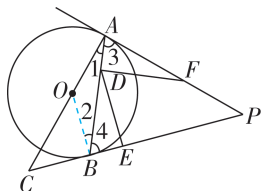
8. 当 $MP \perp AB$ 时, $MP = AM \cdot \sin \angle BAO = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}, \therefore PQ$ 的最小值为 $\sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 4} = 2\sqrt{7}$, 故答案为 $2\sqrt{7}$.



11. $2\sqrt{2} \leq t \leq 4 + 2\sqrt{2}$ 【解析】如图, 设半径为 2 的 $\odot O$ 与角的两边相切于 M, N , 连结 OM, ON , 延长 NO 交 CB 于 D , $\therefore \angle CND = \angle OMD = 90^\circ. \because \angle ACB = 45^\circ, \therefore \triangle CND$ 是等腰直角三角形, $\therefore \angle CDN = 45^\circ, \therefore \triangle OMD$ 是等腰直角三角形. $\because ON = OM = 2, \therefore OD = 2\sqrt{2}, \therefore CN = DN = 2 + 2\sqrt{2}$. 如图 (1), 延长 EP 交 CB 于 Q . $\because EQ \perp AC, PF \perp BC, \therefore \angle CEQ = \angle PFQ = 90^\circ. \because \angle ACB = 45^\circ, \therefore \angle EQC = 45^\circ, \therefore \triangle ECQ$ 与 $\triangle PFQ$ 是等腰直角三角形, $\therefore CE = EQ, PQ = \sqrt{2}PF, \therefore t = PE + \sqrt{2}PF = PE + PQ = EQ$. 当 EQ 与 $\odot O$ 相切且点 P 在圆心的右侧时, t 有最大值. 连结 OP , 则四边形 $ENOP$ 是正方形, $\therefore EN = OP = 2, \therefore t$ 的最大值为 $EQ = CE = CN + EN = 2 + 2\sqrt{2} + 2 = 4 + 2\sqrt{2}$. 如图 (2), 延长 EP 交 CB 于 Q , 当 EQ 与 $\odot O$ 相切且点 P 在圆心的左侧时, t 有最小值. 连结 OP , 同理可得 $t = PE + \sqrt{2}PF = PE + PQ = EQ = CE = CN - EN = 2\sqrt{2}$, 故 t 的取值范围是 $2\sqrt{2} \leq t \leq 4 + 2\sqrt{2}$. 故答案为 $2\sqrt{2} \leq t \leq 4 + 2\sqrt{2}$.



12. (1) 【证明】如图, 连结 OB . $\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle OAP = \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ. \because DF \perp AB, DE \perp BP, \therefore \angle ADF = \angle BED = 90^\circ. \therefore AD = BE, BD =$



AF , $\therefore \text{Rt} \triangle DEB \cong \text{Rt} \triangle FDA$ (H. L.), $\therefore \angle 3 = \angle 4$. $\because OA = OB$, $\therefore \angle 1 = \angle 2$, $\therefore \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$, $\therefore \angle OBP = \angle 2 + \angle 4 = 90^\circ$, 即 $OB \perp BP$. 又 $\because OB$ 是 $\odot O$ 的半径, $\therefore PB$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 【解】 $\because \angle OBP = 90^\circ, \angle OAP = 90^\circ$, $\therefore \sin C = \frac{AP}{PC} = \frac{OB}{OC} = \frac{2}{3}$. 设 $OB = 2x, OC = 3x$, $\therefore BC = \sqrt{OC^2 - OB^2} = \sqrt{5}x, OA = OB = 2x$. $\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore PB = PA = 4$. $\therefore \sin C = \frac{AP}{PC} = \frac{2}{3}$, $\therefore \frac{4}{4 + \sqrt{5}x} = \frac{2}{3}$, 解得 $x = \frac{2}{5}\sqrt{5}$, $\therefore \odot O$ 的半径为 $\frac{2}{5}\sqrt{5} \times 2 = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.

13. C 【解析】由题意得, $\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC = 25^\circ$, \therefore 劣弧 AB 的长为 $\frac{25\pi \times R}{180} = \frac{5\pi}{36}R$ (千米). 故选 C.

14. C 【解析】设该扇面所在圆的半径为 R , 则 $S = \frac{120\pi R^2}{360} = \frac{\pi R^2}{3}$, $\therefore \pi R^2 = 3S$. \because 该折扇张开的角度为 n° 时, 扇面面积为 S_n , $\therefore S_n = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{nS}{120}$, $\therefore \frac{n}{360} \times \pi R^2 = \frac{n}{360} \times 3S = \frac{nS}{120}$, $\therefore m = \frac{S_n}{S} = \frac{120}{S} = \frac{n}{120}$, $\therefore m$ 是 n 的正比例函数. $\because n \geq 0$, $\therefore m$ 与 n 关系的图象是过原点的一条射线. 故选 C.

15. 184 【解析】过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C . 根据题意可得 $OA = 10, OC = 5$, \therefore 在 $\text{Rt} \triangle AOC$ 中, $\sin \angle OAC = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2}$, $\therefore \angle OAC = 30^\circ$, $\therefore \angle AOC = 60^\circ, AC = 5\sqrt{3}$, $\therefore \angle AOB = 2\angle AOC = 120^\circ, AB = 10\sqrt{3}$, $\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形OAB}} - S_{\triangle OAB} = \frac{120}{360}\pi \cdot 10^2 - \frac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 5 = \frac{100}{3}\pi - 25\sqrt{3} \approx 61.4$ (平方米). \therefore 每平方米可以坐 3 名观众, \therefore 最多可容纳的观众数为 $61.4 \times 3 \approx 184$ (名). 故答案为 184.

16. C 【解析】圆锥的侧面展开图为扇形, 这个扇形的弧长等于圆锥底面圆的周长, 扇形的半径等于圆锥的母线长, \therefore 圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2} \times 2\pi \times 30 \times 40 = 1200\pi$ (平方厘米). 故

思路分析

根据平行四边形的性质, 正弦的定义及等腰直角三角形的判定与性质推出 $\angle DAH = 30^\circ, \angle BAC = 45^\circ$, 再利用扇形弧长公式及圆的周长公式求出 r_1, r_2 的值即可得解.

关键点拨

若扇形所在圆的半径为 R , 扇形圆心角为 n° , 弧长为 l , 则 $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{1}{2}lR$.

关键点拨

圆锥的侧面积 $= \frac{1}{2} \times$ 底面圆周长 \times 母线长.

选 C.

17. $\frac{\sqrt{3}}{24}$ 【解析】在 $\square ABCD$ 中, $AB = \sqrt{3} + 1, BC = 2$, $\therefore AD = BC = 2, CD = AB = \sqrt{3} + 1, AB \parallel CD$. $\because AH \perp CD$, 垂足为 $H, AH = \sqrt{3}$, $\therefore \sin D = \frac{AH}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \angle D = 60^\circ$, $\therefore \angle DAH = 90^\circ - \angle D = 30^\circ$, $\therefore DH = \frac{1}{2}AD = 1$, $\therefore CH = CD - DH = \sqrt{3} + 1 - 1 = \sqrt{3}$, $\therefore CH = AH$. $\because AH \perp CD$, $\therefore \triangle ACH$ 是等腰直角三角形, $\therefore \angle ACH = \angle CAH = 45^\circ$. $\because AB \parallel CD$, $\therefore \angle BAC = \angle ACH = 45^\circ$, $\therefore \frac{45\pi \times \sqrt{3}}{180} = 2\pi r_1$, 解得 $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{8}$, $\frac{30\pi \times \sqrt{3}}{180} = 2\pi r_2$, 解得 $r_2 = \frac{\sqrt{3}}{12}$, $\therefore r_1 - r_2 = \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{24}$. 故答案为 $\frac{\sqrt{3}}{24}$.

18. (1) 【解】由题意得 $\angle AOE = \alpha = 60^\circ, OA = OE$, $\therefore \triangle OEA$ 是等边三角形, $\therefore \angle OAE = 60^\circ$. \because 直线 l 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle OAC = 90^\circ$, $\therefore \angle CAE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, 故答案为 30.

(2) ①【证明】 $\because OA = OE$, $\therefore \angle OAE = \angle OEA$. $\because \angle AOE = \alpha$, $\therefore \angle OAE = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. \because 过点 A 作 $\odot O$ 的切线 l , $\therefore \angle OAC = 90^\circ$, $\therefore \angle DAC = \frac{1}{2}\alpha$. \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore FA = CF = DF = \frac{1}{2}AC = r$, $\therefore \angle DAC =$

$\angle FDA = \frac{1}{2}\alpha$, $\therefore \angle DFC = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha = \alpha$. $\because OA = OE = r$, $\therefore OA = FC, OE = FD$. 又 $\because \angle AOE = \angle DFC$, $\therefore \triangle OAE \cong \triangle FCD$, $\therefore AE = CD$. \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore BC = AD$. $\because AD = AE + DE$, $\therefore BC = CD + DE$.

②【解】补全图形如图(1).

如图(2), 过点 O 作 $OG \perp AE$ 于点 $G, AH \perp OE$ 于点 H . 在 $\text{Rt} \triangle AOC$ 中, $OA = r, AC = \frac{4}{3}r$, \therefore 由勾股定理得 $OC = \frac{5}{3}r$. $\because \frac{CE}{OE} = \frac{2}{3}$, $\therefore CE = \frac{2}{3}r$, $\therefore OC = OE + CE$, \therefore 点 E 在线段 OC 上, \therefore 在 $\text{Rt} \triangle ACO$ 中, $\tan \alpha = \frac{AC}{AO} = \frac{4}{3}$. $\therefore OG \perp$

$AE, OA=OE, \therefore \angle EOG = \angle AOG = \frac{1}{2}\alpha.$

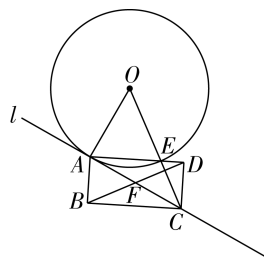
$\because AH \perp OE, \therefore \angle EOG + \angle OEA = \angle EAH + \angle OEA = 90^\circ, \therefore \angle EAH = \angle EOG = \frac{1}{2}\alpha.$ 在

$\text{Rt}\triangle OAH$ 中, $\tan \alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{4}{3}, \therefore$ 设 $AH = 4m, OH = 3m$, 则 $OA = OE = 5m, \therefore HE = 5m - 3m = 2m, \therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle AHE$ 中, $\tan \angle EAH = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{HE}{AH} = \frac{1}{2}.$ 由(2)①可得 $\angle DAC = \frac{1}{2}\alpha. \therefore$ 四边

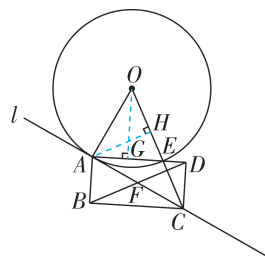
思路分析

(2)②添加辅助线构造直角三角形, 然后设边长, 利用锐角三角函数即可找到线段之间的关系, 进而可求出 $\frac{AB}{BC}$ 的值.

形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AD \parallel BC, \therefore \angle ACB = \angle DAC = \frac{1}{2}\alpha, \therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\tan \angle ACB = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}.$



图(1)



图(2)

(十二) 图形的平移、旋转与对称

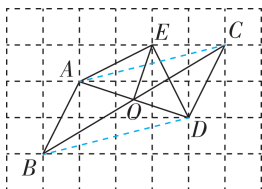
刷考点

1. **B** 【解析】由平移定义知, 平移只改变图形的位置. 观察图形可知, 选项 B 中的图形是由图形 a 通过平移得到的, 选项 A, C, D 均不能由图形 a 通过平移得到, 故选 B.

2. **24** 【解析】由平移可知 $DF=AC, AD=CF=2, \therefore$ 四边形 $ABFD$ 的周长为 $AB+BF+DF+AD=AB+BC+CF+AC+AD=20+2+2=24.$ 故答案为 24.

3. **(4, -4)** 【解析】过点 D 作 $DE \perp y$ 轴于点 E. \because 点 $A(0, -2), B(1, 0), \therefore OA=2, OB=1.$ \because 线段 AB 平移得到线段 DC, $\therefore AB \parallel CD, AB=CD, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. $\because \angle ABC=90^\circ, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore \angle BAD=90^\circ, BC=AD. \because BC=2AB, \therefore AD=2AB. \because \angle BAO+\angle DAE=90^\circ, \angle BAO+\angle ABO=90^\circ, \therefore \angle ABO=\angle EAD. \because \angle AOB=\angle AED=90^\circ, \therefore \triangle ABO \sim \triangle DAE, \therefore \frac{OA}{DE}=\frac{OB}{AE}=\frac{AB}{AD}=\frac{1}{2}, \therefore DE=2OA=4, AE=2OB=2, \therefore OE=OA+AE=4, \therefore D(4, -4).$ 故答案为 (4, -4).

4. 【解】(1) 线段 CD, AD, BC 如图所示.



(2) $\frac{OE}{AD} = \frac{1}{2}.$ 如图, \because 每个小正方形的边长均为 1 个单位长度, $\therefore DE = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}, AD = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}.$ 连结 $AC, BD.$ 由平移易知四边

思路分析

过点 D 作 $DE \perp y$ 轴于点 E, 利用点 A, B 的坐标得出线段 OA, OB 的长, 利用平移的性质和矩形的判定定理得到四边形 $ABCD$ 是矩形, 利用相似三角形的判定与性质求得线段 DE, AE 的长, 进而得到 OE 的长, 即可得出结论.

形 $ABDC$ 是平行四边形, $\therefore O$ 是平行四边形

$ABDC$ 对角线的交点, $\therefore DO = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{10}}{2}.$

$\because AE=DE, \therefore EO \perp AD, \therefore EO = \sqrt{ED^2 - DO^2} =$

$$\sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}, \therefore \frac{OE}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{2}.$$

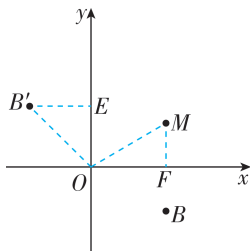
5. **B** 【解析】风力发电机相邻叶片之间的夹角为 $360^\circ \div 3 = 120^\circ$, 故旋转 120° 能够与它本身重合, 故选 B.

6. **A** 【解析】根据题意, 由旋转的性质, 可得 $AB=AD, AC=AE, BC=DE, \angle ABC=\angle ADE$, 故 B 选项和 D 选项不符合题意. $\because \angle ACE=\angle ABC+\angle BAC, \therefore \angle ACE=\angle ADE+\angle BAC$, 故 C 选项不符合题意. $\because \angle ACB=\angle AED, \angle ACB=\angle CAE+\angle CEA, \angle AED=\angle CEA+\angle BED, \therefore \angle CAE=\angle BED$, 故 A 选项符合题意, 故选 A.

7. **75** 【解析】由已知可得, $\angle D=30^\circ, \angle B=45^\circ. \because AB \parallel OD, \therefore \angle B=\angle BOD=45^\circ, \therefore \angle 1=\angle BOD+\angle D=45^\circ+30^\circ=75^\circ$, 故答案为 75.

8. **$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$** 【解析】由题知, 将点 $B(\sqrt{3}, -1)$ 向上平移 2 个单位所得点的坐标为 $(\sqrt{3}, 1).$ 设 $M(\sqrt{3}, 1).$ 如图

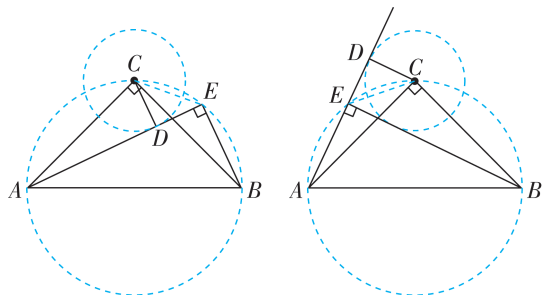
所示, 过点 M 作 x 轴的垂线, 垂足为 F, 连结 OM, 则 $OF=\sqrt{3}, MF=1.$ 在 $\text{Rt}\triangle MOF$ 中, $\tan \angle MOF = \frac{MF}{OF} =$



$\frac{\sqrt{3}}{3}$, $OM = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, 所以 $\angle MOF = 30^\circ$.

由旋转可知, $B'O = MO = 2$, $\angle MOB' = 105^\circ$, 所以 $\angle B'OF = 135^\circ$. 过点 B' 作 y 轴的垂线, 垂足为 E , 则 $\angle B'EO = 90^\circ$. 因为 $\angle B'OE = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$, 所以 $\triangle B'OE$ 是等腰直角三角形, 所以 $B'E = OE = \sqrt{2}$, 所以点 B' 的坐标为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. 故答案为 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

9. $2\sqrt{2}+1$ $2\sqrt{2}-1$ 【解析】 $\because \angle ACB = 90^\circ, CA = CB = 3, \therefore AB = 3\sqrt{2}, \angle BAC = \angle ABC = 45^\circ$. \because 线段 CD 绕点 C 在平面内旋转, $CD = 1, \therefore$ 点 D 在以点 C 为圆心, 1 为半径的圆上运动. $\because BE \perp AE, \therefore \angle AEB = 90^\circ, \therefore$ 点 E 在以 AB 为直径的圆上运动. 在 $Rt \triangle ABE$ 中, $AE = AB \cdot \cos \angle BAE$. $\because AB$ 为定值, \therefore 当 $\cos \angle BAE$ 的值最大时, AE 的值最大, 此时 $\angle BAE$ 最小; 当 $\cos \angle BAE$ 的值最小时, AE 的值最小, 此时 $\angle BAE$ 最大. 当 AE 与 $\odot C$ 相切于点 D , 且点 D 在 $\triangle ABC$ 内部时, $\angle BAE$ 最小, 连结 CE , 如图(1), 则 $CD \perp AE, \therefore \angle ADC = \angle CDE = 90^\circ, \therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$. $\because \widehat{AC} = \widehat{AC}, \therefore \angle CED = \angle ABC = 45^\circ. \therefore \angle CDE = 90^\circ, \therefore \triangle CDE$ 为等腰直角三角形, $\therefore DE = CD = 1, \therefore AE = AD + DE = 2\sqrt{2} + 1$, 即 AE 的最大值为 $2\sqrt{2} + 1$.



图(1)

图(2)

当 AE 与 $\odot C$ 相切于点 D , 且点 D 在 $\triangle ABC$ 外部时, $\angle BAE$ 最大, AE 的值最小, 连结 CE , 如图(2), 则 $CD \perp AD, \therefore \angle CDE = 90^\circ, \therefore AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$. \because 四边形 $ABCE$ 为圆内接四边形, $\therefore \angle CEA = 180^\circ - \angle ABC = 135^\circ, \therefore \angle CED = 180^\circ - \angle CEA = 45^\circ. \therefore \angle CDE = 90^\circ, \therefore \triangle CDE$ 为等腰直角三角形, $\therefore DE = CD = 1, \therefore AE = AD - DE = 2\sqrt{2} - 1$, 即 AE 的最小值为 $2\sqrt{2} - 1$. 故答案为 $2\sqrt{2} + 1, 2\sqrt{2} - 1$.

10. 90° 或 180° 或 270° 【解析】连结 AC , 取 BC 的中点 E , 连结 AE , 如图(1)所示. 在 $\square ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ, BC = 2AB, AB \parallel CD, AB = CD$,

关键点拨

根据题意得出点 E 在以 AB 为直径的圆上运动, 点 D 在以 C 为圆心、1 为半径的圆上运动, 当 $\angle BAE$ 最小时, AE 最大, 当 $\angle BAE$ 最大时, AE 最小是解题的关键.

关键点拨

连结 AC , 根据平行四边形的性质和等边三角形的性质得出 $\angle BAC = \angle ACD = 90^\circ$ 是解题关键.

$$\therefore BE = \frac{1}{2} BC =$$

$AB, \therefore \triangle ABE$ 是等边三角形,

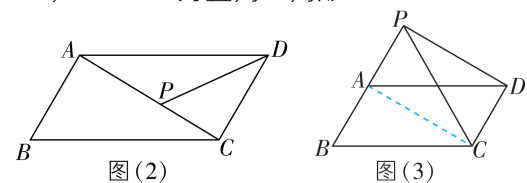
$$\therefore \angle BAE =$$

$$\angle AEB = 60^\circ, AE = BE = EC,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle ECA = \frac{1}{2} \angle AEB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 90^\circ, \therefore \angle ACD = 90^\circ.$$

如图(2)所示, 当点 P 在 AC 上时, $\angle BAP = 90^\circ$, 则旋转角 α 的度数为 90° , 此时 $\angle DCP = 90^\circ, \therefore \triangle PCD$ 为直角三角形.



图(2)

图(3)

当 P 在 BA 的延长线上时, 旋转角 α 的度数为 180° , 如图(3)所示, 连结 $AC. \because PA = AB = CD, PA \parallel CD, \therefore$ 四边形 $PACD$ 是平行四边形. $\because \angle BAC = 90^\circ, \therefore \angle PAC = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $PACD$ 是矩形, $\therefore \angle CDP = 90^\circ, \therefore \triangle PCD$ 是直角三角形.

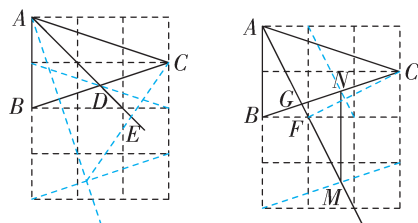
当点 P 在 CA 的延长线上时, 如图(4)所示, 则 $\alpha = 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ, \angle PCD = 90^\circ,$

$\therefore \triangle PCD$ 是直角三角形.

综上所述, 旋转角 α 的度数为 90° 或 180° 或 270° .

故答案为 90° 或 180° 或 270° .

11. 【解】(1) 如图(1), 射线 AD 、点 D 即为所求.
(2) 如图(1), 点 E 即为所求.



图(1)

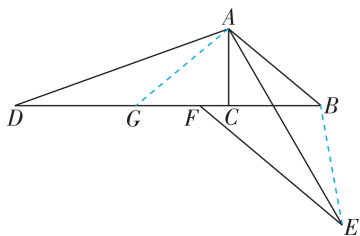
图(2)

- (3) 如图(2), 点 F 、射线 AF 、点 G 即为所求.
(4) 如图(2), 线段 MN 即为所求.

12. (1) 【证明】 $\because \angle ACB = 90^\circ, \angle ABC = 45^\circ, \therefore \angle BAC = \angle ABC = 45^\circ$.
 \because 线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 $180^\circ - 2 \times 45^\circ = 90^\circ$ 得到线段 AE , 点 D 与点 C 重合,
 $\therefore AE = AD = AC, \angle EAB = 90^\circ - \angle BAC = 45^\circ,$
 $\therefore \angle EAB = \angle ABC, \therefore BC \parallel AE. \because EF \parallel AB,$
 \therefore 四边形 $ABFE$ 是平行四边形, $\therefore BF = AE,$
 $\therefore BF = AC$.

(2)【解】 $DF=2BC$.

证明:如图,在 DB 上取一点 G ,连结 AG , 使得 $AG=AB$, 连结 BE ,



$\therefore \angle AGB = \angle ABG = \alpha, \therefore \angle BAG = 180^\circ - 2\alpha$.
 \therefore 将线段 AD 绕点 A 逆时针旋转 $180^\circ - 2\alpha$ 得到线段 $AE, \therefore DA = EA, \angle DAE = \angle GAB = 180^\circ - 2\alpha, \therefore \angle DAG = \angle EAB, \therefore \triangle DAG \cong \triangle EAB$ (S. A. S.), $\therefore DG = BE, \angle AGD = \angle ABE = 180^\circ - \angle AGC = 180^\circ - \alpha$. 又 $\because \angle ABC = \alpha, \therefore \angle FBE = \angle ABE - \angle ABC = 180^\circ - \alpha - \alpha = 180^\circ - 2\alpha. \therefore EF \parallel AB, \therefore \angle BFE = \angle ABF = \alpha, \therefore \angle BEF = 180^\circ - \angle FBE - \angle BFE = \alpha, \therefore BE = BF, \therefore DG = BF. \therefore AG = AB, AC \perp BC, \therefore GC = BC, \therefore DF = BD - BF = BD - DG = BG = BC + CG = 2BC$.

13. D 【解析】

选项	解析	选项正误
A	是轴对称图形,也是中心对称图形	×
B	是轴对称图形,也是中心对称图形	×
C	是轴对称图形,不是中心对称图形	×
D	不是轴对称图形,也不是中心对称图形	✓

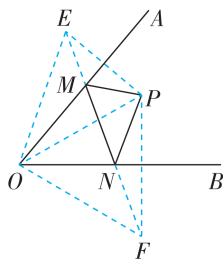
思路分析

根据折叠的性质得出 $\angle AEB = \angle AEF = 90^\circ, BE = EF$, 根据菱形的性质求出 $AB = BC = 6$, 解直角三角形求出 $BF = 2BE = 6\sqrt{2}$, 再根据线段的和差求解即可.

14. D 【解析】由折叠的性质知 $BE = FE, \angle AEB = \angle AEF. \therefore$ 点 B, E, C, F 共线, $\therefore \angle AEB = \angle AEF = 90^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle AEB$ 中, $\because \angle B = 45^\circ, \therefore AE = BE$. 由勾股定理得 $BE^2 + AE^2 = 2BE^2 = AB^2$. 又 \because 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AB = 6, \therefore BC = AB = 6, 2BE^2 = 6^2, \therefore BE = 3\sqrt{2}, \therefore BF = 2BE = 6\sqrt{2}, \therefore CF = BF - BC = 6\sqrt{2} - 6$. 故选 D.

15. 80° 【解析】

如图,作 P 点关于 OA 的对称点 E , 连结 EO, EM, OP . 由对称易得 $EM = MP, \angle MPO = \angle OEM, \angle EOM = \angle MOP$. 作 P 点关于 OB 的对称点 F , 连结 NF, OF, EF . 由对称易得 $PN = FN, \angle OPN = \angle OFN, \angle PON = \angle NOF, \therefore PM + PN + MN = EM + NF + MN \geq EF, \therefore$ 当 E, M, N, F



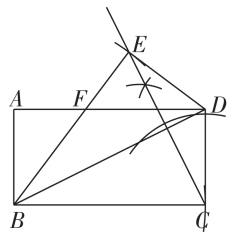
关键点拨

解题的关键是作出对称点, 利用对称性质得到相等的线段和角, 进而利用两点之间线段最短求解.

共线时, $\triangle PMN$ 的周长最小. 又 $\because \angle EOF = \angle EOM + \angle MOP + \angle PON + \angle NOF, \angle AOB = \angle MOP + \angle PON, \therefore \angle EOF = 2\angle AOB$. 又 $\because \angle AOB = 50^\circ, \therefore \angle EOF = 100^\circ. \therefore \angle OEM + \angle OFN + \angle EOF = 180^\circ, \therefore \angle OEM + \angle OFN = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ. \therefore \angle MPO = \angle OEM, \angle OPN = \angle OFN, \therefore \angle MPO + \angle OPN = 80^\circ$, 即 $\angle MPN = 80^\circ$, 故答案为 80° .

16. 【解】(1) 如图, $\triangle BED$

即为所求作. (作法不唯一)



(2) 如图. \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore \angle A = 90^\circ, AD = BC = 2, AD \parallel BC, \therefore \angle CBD = \angle ADB$.

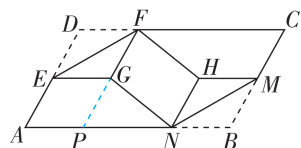
由对称知 $\angle CBD = \angle EBD, \therefore \angle EBD = \angle ADB, \therefore BF = DF$. 设 $AF = x$, 则 $DF = 2 - x = BF$. 在 $\text{Rt} \triangle ABF$ 中, 根据勾股定理得, $AF^2 + AB^2 = BF^2, \therefore x^2 + 1^2 = (2 - x)^2$, 解得 $x = \frac{3}{4}, \therefore AF = \frac{3}{4}$.

17. 【探究发现】【解】四边形 $DEGF$ 是菱形.

【探究证明】【证明】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AD \parallel BC, AD = BC. \therefore E, M$ 分别为边 AD, BC 的中点, $\therefore ED \parallel BM, ED = BM$. 由折叠知, $EG = DE, DF = FG, \therefore DF = DE = EG = FG, \therefore$ 四边形 $DEGF$ 是菱形, $\therefore ED \parallel FG$. 同理四边形 $BNHM$ 是菱形, $\therefore BM \parallel NH, BM = NH. \therefore ED \parallel BM, ED = BM, \therefore NH \parallel FG, NH = FG, \therefore$ 四边形 $GFHN$ 是平行四边形.

【探究提升】【解】能. $\frac{AD}{AB}$ 的值为 $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$.

平行四边形成为轴对称图形, 需分矩形和菱形两种情况进行讨论: 如图, 延长 FG 交 AB 于点 P , 则易得四边形 $AEGP$ 为菱形. 当四边形 $GFHN$ 是菱形



时, 设 $AE = x$, 则 $PG = AP = GN = BN = x. \therefore \angle A = 60^\circ, \therefore \angle GPN = 60^\circ, \therefore \triangle GPN$ 是等边三角形, $\therefore PN = GN = x, \therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$.

当四边形 $GFHN$ 是矩形时, 设 $AE = y$, 则 $PG = AP = BN = y. \therefore \angle A = \angle GPN = 60^\circ, \angle PGH = \angle FGN = 90^\circ, \therefore \angle GNP = 30^\circ, \therefore PN = 2PG = 2y, \therefore \frac{AD}{AB} = \frac{2y}{y + 2y} = \frac{1}{2}$.

(十三) 相似

刷考点

1. **D** 【解析】 $\because \frac{a}{bc} = \frac{b}{ac} = \frac{c}{ab} = 2, \therefore a = 2bc, b = 2ac, c = 2ab, \therefore a^2 = 2abc, b^2 = 2abc, c^2 = 2abc,$
 $\therefore \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = \frac{2abc+2abc+2abc}{abc} = \frac{6abc}{abc} = 6.$ 故选 D.

2. **2** 【解析】当 $\frac{a}{c} = 2$ 时, $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \sqrt{2}$. 理由如下: **关键点拨**
 $\because \frac{a}{c} = 2, \therefore a = 2c, \therefore \frac{2c}{b} = \frac{b}{c}, \therefore b = \sqrt{2}c, \therefore \frac{a}{b} = \frac{2c}{\sqrt{2}c} = \sqrt{2}, \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{2}c}{c} = \sqrt{2}, \therefore \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \sqrt{2}.$ 故答案为 2.

3. **A** 【解析】 $\because DE \parallel BC, \therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AD}{AD+BD} = \frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}.$ 故选 A.

4. **D** 【解析】如图所示,过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于点 D,过点 B 作 $BE \perp x$ 轴于点 E. \because 反比例函数 $y = -\frac{4}{x} (x > 0)$ 的图象与直线 $y = -2x$ 交于点 A, \therefore 联立,得 $-\frac{4}{x} = -2x$, 解得 $x = \sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}$ (舍去), $\therefore OD = \sqrt{2}.$ $\because AD \perp x$ 轴, $BE \perp x$ 轴, $\therefore AD \parallel BE, \therefore \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{OD}.$ $\because AB = 3AC, \therefore 3 = \frac{DE}{\sqrt{2}}, \therefore DE = 3\sqrt{2}, \therefore OE = OD + DE = \sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$ 将 $x = 4\sqrt{2}$ 代入 $y = -\frac{4}{x}$, 得 $y = -\frac{4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore BE = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore OB = \sqrt{OE^2 + BE^2} = \frac{\sqrt{130}}{2}.$ 故选 D.

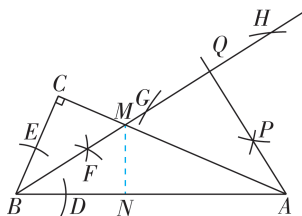
5. **A** 【解析】 \because 在 $Rt \triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ, AB = 13, BC = 5, \therefore AC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$ 由作图可得 BG 平分 $\angle ABC, \therefore \angle CBG = \angle ABG.$ 设 BG, AC 交于点 M, 作 $MN \perp AB$ 于点 N, 如图, 则 $CM = MN.$ 设 $CM = MN = x. \therefore S_{\triangle ABC} = S_{\triangle MBC} + S_{\triangle ABM},$
 $\therefore \frac{1}{2}BC \cdot AC = \frac{1}{2}BC \cdot CM + \frac{1}{2}AB \cdot MN, \therefore 5 \times$

关键是由 $\frac{a}{c} = 2, \frac{a}{b} = \frac{b}{c},$ 得到 $b = \sqrt{2}c.$

由作图痕迹得到 BG 平分 $\angle ABC, AQ \perp BH$ 是解题关键.

$12 = 5x + 13x,$ 解得 $x = \frac{10}{3},$ 即 $CM = \frac{10}{3}, \therefore BM = \sqrt{5^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}\sqrt{13}.$ 由作图可知 $AQ \perp BH, \therefore \angle AQB = \angle C = 90^\circ. \therefore \angle CBG = \angle ABG,$
 $\therefore \triangle ABQ \sim \triangle MBC, \therefore \frac{AQ}{CM} = \frac{AB}{BM},$ 即 $\frac{AQ}{\frac{10}{3}} =$

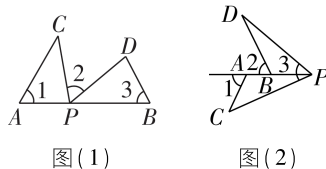
$\frac{13}{\frac{5}{3}\sqrt{13}},$ 解得 $AQ = 2\sqrt{13}.$ 故选 A.



6. C

模型总结 | 一线三等角相似模型

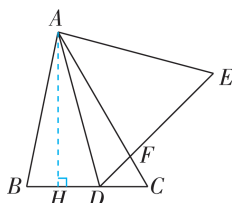
1. 已知: 如图 (1), 点 P 在线段 AB 上, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3,$ 则 $\triangle CAP \sim \triangle PBD.$



2. 已知: 如图 (2), 点 P 在 AB 的延长线上, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3,$ 则 $\triangle APC \sim \triangle BDP.$

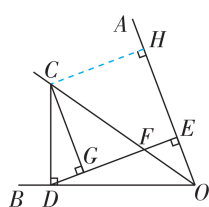
【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore BC = AC, \angle B = \angle C = 60^\circ, \therefore \angle CAD + \angle ADC = 120^\circ.$
 $\therefore \angle ADE = 60^\circ, \therefore \angle BDE + \angle ADC = 120^\circ, \therefore \angle CAD = \angle BDE, \therefore \triangle ADC \sim \triangle DEB, \therefore \frac{AD}{DE} = \frac{AC}{DB}.$ $\because BD = 4DC, \therefore$ 设 $DC = x,$ 则 $BD = 4x,$
 $\therefore BC = AC = 5x, \therefore \frac{AD}{2.4} = \frac{5x}{4x},$ 解得 $AD = 3,$ 即 AD 的长为 3. 故选 C.

7. **$\frac{3}{4}$** 【解析】如图所示, 过点 A 作 $AH \perp BC$ 于 H. 在 $Rt \triangle AHC$ 中, $\angle C = 60^\circ, \angle AHC = 90^\circ, AC =$

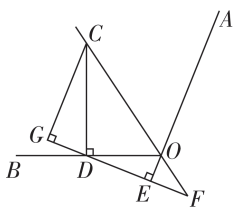


$3, \therefore AH = AC \cdot \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}$. $\therefore \triangle ADE$ 是等边三角形, $\therefore \angle ADE = 60^\circ = \angle C$. 又 $\because \angle DAC = \angle FAD, \therefore \triangle DAC \sim \triangle FAD, \therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AD}, \therefore AF = \frac{AD^2}{AC} = \frac{AD^2}{3}$, \therefore 当 AD 长度取得最小值时, AF 长度取得最小值. 当 $AD \perp BC$ 时, AD 长度取得最小值, 此时点 D 与点 H 重合, $\therefore AD$ 长度的最小值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\therefore AF$ 长度的最小值为 $\frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}{3} = \frac{9}{4}$. $\therefore CF = AC - AF$, \therefore 当 AF 长度取得最小值时, CF 长度取得最大值, $\therefore CF$ 长度的最大值为 $3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$, 故答案为 $\frac{3}{4}$.

8. 【解】(1) 如图(1), 过点 C 作 $CH \perp OA$ 于 H . $\because OC$ 平分 $\angle AOB, CD \perp OB$ 于 $D, CH \perp OA$ 于 $H, \therefore CD = CH$. $\because DE \perp OA$ 于 $E, CG \perp DE$ 于 $G, CH \perp OA$ 于 $H, \therefore \angle CGE = \angle CHE = \angle GEH = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $CGEH$ 为矩形, $\therefore HE = CG$. 在 $\text{Rt}\triangle CDO$ 和 $\text{Rt}\triangle CHO$ 中, $CO = CO, CD = CH, \therefore \text{Rt}\triangle CDO \cong \text{Rt}\triangle CHO$ (H. L.), $\therefore OD = OH = EH + OE = CG + OE$. 故答案为 $CG + OE = OD$.



图(1)



图(2)

(2) 补全后的图形如图(2)所示:

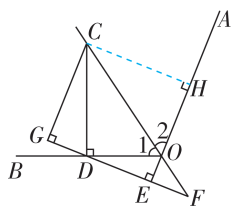
不成立, 正确结论为 $OD + OE = CG$.

证明: 如图(3), 过点 C 作 $CH \perp OA$ 于点 H .

$\because CD \perp OB, \therefore \angle CDO = \angle CHO = 90^\circ$. $\because OC$ 平分 $\angle AOB, \therefore \angle 1 = \angle 2$.

$\because CO = CO, \therefore \triangle COD \cong \triangle COH$ (A. A. S.), $\therefore OD = OH, \therefore OD + OE = OH + OE = HE$.

$\because CH \perp OA, CG \perp DE, DE \perp OA, \therefore \angle DEO = \angle CGD = \angle CHO = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $CGEH$ 是矩形, $\therefore HE = CG, \therefore OD + OE = CG$.



图(3)

关键点拨

根据垂线段最短及相似三角形的性质得到当 AF 长度有最小值时, CF 长度有最大值是解题的关键.

刷有所得

在平面直角坐标系中, 如果坐标原点为位似中心, 相似比为 k , 那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$.

$$(3) \frac{\sqrt{15}}{3} \text{ 或 } \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

①若 $\angle AOB$ 为锐角, 如图(1), 不妨设 $GF = 3, EF = 1$, 则 $CH = CD = GE = FG + FE = 4$.

$\because CG \perp DE, DE \perp OA, \therefore CG \parallel OA, \therefore \triangle CGF \sim \triangle OEF, \therefore \frac{CG}{OE} = \frac{GF}{EF}$, 则 $CG = 3OE$. 设 $OE = x$, 则 $CG = 3x$. 由(1)知, $OD = OE + CG = 4x$, 则 $DO = 4OE$. 易证 $\triangle CDG \sim \triangle DOE$, 则 $\frac{CD}{DG} = \frac{DO}{OE} = 4$, $\therefore DG = 1$. 在 $\text{Rt}\triangle CDG$ 中, $\because CD = 4, DG = 1$, 则 $CG = 3x = \sqrt{15}, \therefore x = \frac{\sqrt{15}}{3}, \therefore \frac{DO}{CD} = \frac{4x}{4} = x = \frac{\sqrt{15}}{3}$.

②若 $\angle AOB$ 为钝角, 如图(3), 不妨设 $FG = 3, EF = 1$, 则 $CH = CD = GE = FG - FE = 3 - 1 = 2$. 易

证 $\triangle CGF \sim \triangle OEF, \therefore \frac{CG}{OE} = \frac{GF}{EF}$, 则 $CG = 3OE$. 设 $OE = y$, 则 $CG = 3y$. 由(2)知, $CG = EH = OE + OD$, 即 $3y = y + OD, \therefore OD = 2y$. 易证 $\triangle CDG \sim \triangle DOE$, 则 $\frac{CD}{DG} = \frac{DO}{OE} = 2, \therefore DG = 1$, 则 $CG =$

$$\sqrt{CD^2 - GD^2} = \sqrt{3}, \text{ 则 } 3y = \sqrt{3}, \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}, \therefore \frac{OD}{CD} =$$

$$\frac{2y}{2} = y = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

综上, $\frac{OD}{CD}$ 的值为 $\frac{\sqrt{15}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

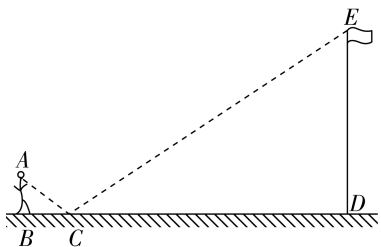
9. D 【解析】 \because 以原点 O 为位似中心, 相似比为 2, 把 $\triangle OAB$ 放大, 点 A 的坐标为 $(2, 2)$, \therefore 点 A 的对应点 A' 的坐标为 $(2 \times 2, 2 \times 2)$ 或 $(2 \times (-2), 2 \times (-2))$, 即 $(4, 4)$ 或 $(-4, -4)$, 故选 D.

10. C 【解析】 \because 点 A, A' 的坐标分别为 $(2, 0), (3, 0), \therefore OA = 2, OA' = 3. \therefore$ 五边形 $ABCDE, A'B'C'D'E'$ 是以坐标原点 O 为位似中心的位似图形, $\therefore OA : OA' = DE : D'E' = 2 : 3$.

$$\because DE = 3, \therefore D'E' = \frac{9}{2}, \text{ 故选 C.}$$

11. B 【解析】如图, 由题意得, $AB = 1.6 \text{ m}, BC = 2 \text{ m}, CD = 10 \text{ m}. \because AB \perp BD, DE \perp BD, \therefore \angle ABC = \angle EDC = 90^\circ. \because$ 由题意得 $\angle ACB = \angle DCE, \therefore \triangle ABC \sim \triangle EDC, \therefore \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD}$, 即

$$\frac{1.6}{DE} = \frac{2}{10}, \therefore DE = 8 \text{ m}, \text{ 故选 B.}$$



12. 18.2 【解析】过点 F 作 $FG \perp CD$, 垂足为 G , **关键点拨**

延长 FG 交 AB 于点 H . 由题意得 $FH \perp AB$, 根据已知条件结合图形添加适当的辅助线, 熟练应用相似三角形的判定和性质是解题的关键.

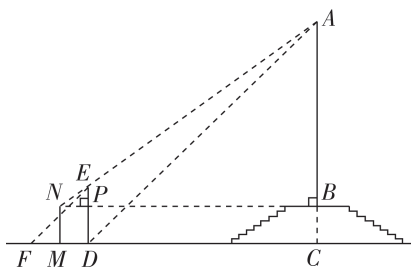
$$\therefore \angle DFG = \angle BFH, \therefore \triangle FDG \sim \triangle FBH, \therefore \frac{DG}{BH} = \frac{FG}{FH}, \therefore \frac{5.6}{BH} = \frac{10}{10+20}, \therefore BH = 16.8 \text{ 米}, \therefore AB = BH + AH = 16.8 + 1.4 = 18.2 \text{ (米)}, \therefore \text{塔的高度为 } 18.2 \text{ 米, 故答案为 } 18.2.$$

$$\therefore \angle DFG = \angle BFH, \therefore \triangle FDG \sim \triangle FBH, \therefore \frac{DG}{BH} = \frac{FG}{FH}, \therefore \frac{5.6}{BH} = \frac{10}{10+20}, \therefore BH = 16.8 \text{ 米}, \therefore AB = BH + AH = 16.8 + 1.4 = 18.2 \text{ (米)}, \therefore \text{塔的高度为 } 18.2 \text{ 米, 故答案为 } 18.2.$$

13. 【解】(1) \because 太阳光线是平行光线, $\therefore \angle EFD = \angle ADC$.

又 $\because \angle EDF = \angle ACD = 90^\circ, \therefore \triangle EFD \sim \triangle ADC, \therefore \frac{DF}{CD} = \frac{DE}{CA}, \therefore DF = DE, \therefore CD = CA$.

(2) 设 BN 与 DE 的交点为 P , 如图. 由题意得 $PN = DM = 1, DP = BC = MN = 1.2, BN = CM, \therefore PE = DE - DP = 2.1 - 1.2 = 0.9$. 设 $AB = x$, 则 $CD = CA = AB + BC = x + 1.2, \therefore BN = CM = CD + DM = x + 1.2 + 1 = x + 2.2$.



$$\text{在 Rt} \triangle PNE \text{ 中}, \tan \angle PNE = \frac{PE}{PN} = \frac{0.9}{1} = 0.9.$$

$$\text{在 Rt} \triangle BNA \text{ 中}, \tan \angle BNA = \frac{AB}{BN} = 0.9, \therefore AB = 0.9BN, \therefore x = 0.9(x + 2.2), \text{ 解得 } x = 19.8.$$

答: 纪念碑 AB 的高度为 19.8 m .

(3) 小红的结果误差较大, 原因可能是平台底部点 C 不可直接到达, 间接测量时产生了较大的误差(原因合理即可).

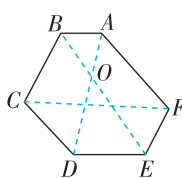
14. (1) 【解】如图(1), 连结 BE, CF, AD, BE 与

AD 交于点 O .

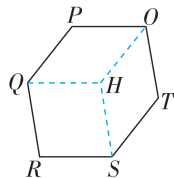
①由 $AB \parallel DE$, 只能知道 $\triangle AOB \sim \triangle DOE$, 不能判断出 $AB = DE$, 同理不能判断出 $BC = EF, AF = CD$, 故平行六边形的三组主对边分别相等是错误的;

② $\because AB \parallel DE, \therefore \angle ABE = \angle BED$, 同理可得 $\angle CBE = \angle BEF, \therefore \angle ABC = \angle DEF$, 同理可得 $\angle BAF = \angle CDE, \angle BCD = \angle AFE$, 故平行六边形的三组主对角分别相等是正确的;

③由图(1)可知, 平行六边形的三条主对角线互相平分是错误的. 故答案为错误, 正确, 错误.



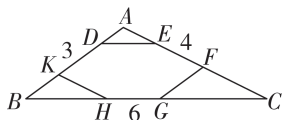
图(1)



图(2)

(2)【证明】如图(2), 过点 Q 作 $QH \parallel PO$, 且 $QH = PO$, 连结 OH, HS , 则四边形 $PQHO$ 是平行四边形, $\therefore PQ \parallel OH, PQ = OH$. 在平行六边形 $OPQRST$ 中, $PO \parallel RS, PO = RS, \therefore QH \parallel RS, QH = RS, \therefore$ 四边形 $QRSH$ 为平行四边形, $\therefore QR \parallel HS, QR = HS$. 在平行六边形 $OPQRST$ 中, $PQ \parallel ST, QR \parallel OT, \therefore OH \parallel ST, HS \parallel OT, \therefore$ 四边形 $HSTO$ 为平行四边形, $\therefore HS = OT, OH = ST, \therefore QR = OT, PQ = ST. \therefore OP = PQ = QR = RS, \therefore PQ = QR = RS = ST = OT = PO, \therefore$ 平行六边形 $OPQRST$ 是菱六边形.

(3)【解】设三角形纸片为 $\triangle ABC$, 剪裁后的纸片为菱六边形 $DEFGHK$, 如图



图(3)

(3), $\therefore DE \parallel HG, HK \parallel EF, DE = EF = FG = HG = KH = DK, \therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC, \triangle BKH \sim \triangle BAC, \therefore \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}, \frac{KH}{AC} = \frac{BK}{AB}$. 设

$$DE = EF = FG = HG = KH = DK = x, \text{ 则 } \frac{x}{6} = \frac{AD}{3} = \frac{AE}{4}, \frac{x}{4} = \frac{BK}{3}, \therefore AD = \frac{1}{2}x, AE = \frac{2}{3}x, BK = \frac{3}{4}x.$$

$$\therefore AB = AD + DK + BK = 3, \therefore \frac{1}{2}x + x + \frac{3}{4}x = 3, \text{ 解得 } x = \frac{4}{3}, \therefore \triangle ADE \text{ 的各边长为 } AD = \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}, AE = \frac{2}{3}x = \frac{8}{9}, DE = x = \frac{4}{3}. (\text{答案不唯一})$$

$$\therefore AB = AD + DK + BK = 3, \therefore \frac{1}{2}x + x + \frac{3}{4}x = 3, \text{ 解得 } x = \frac{4}{3}, \therefore \triangle ADE \text{ 的各边长为 } AD = \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}, AE = \frac{2}{3}x = \frac{8}{9}, DE = x = \frac{4}{3}. (\text{答案不唯一})$$

$$\therefore AB = AD + DK + BK = 3, \therefore \frac{1}{2}x + x + \frac{3}{4}x = 3, \text{ 解得 } x = \frac{4}{3}, \therefore \triangle ADE \text{ 的各边长为 } AD = \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}, AE = \frac{2}{3}x = \frac{8}{9}, DE = x = \frac{4}{3}. (\text{答案不唯一})$$

$$\therefore AB = AD + DK + BK = 3, \therefore \frac{1}{2}x + x + \frac{3}{4}x = 3, \text{ 解得 } x = \frac{4}{3}, \therefore \triangle ADE \text{ 的各边长为 } AD = \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}, AE = \frac{2}{3}x = \frac{8}{9}, DE = x = \frac{4}{3}. (\text{答案不唯一})$$


(十四) 投影与视图

刷考点

1. A 【解析】

选项	分析	结论
A	圆锥的主视图是三角形	符合题意
B	圆柱的主视图是长方形	不符合题意
C	球的主视图是圆	不符合题意
D	正方体的主视图是正方形	不符合题意

2. A 【解析】从左边看,底层有两个小正方形,上层的左边有一个小正方形. 故选 A.

3. D 【解析】该几何体的俯视图为  故选 D.

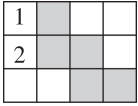
4. A 【解析】这个几何体的主视图与左视图相同,俯视图与主视图、左视图不相同. 故选 A.

5. B 【解析】设该圆锥的底面圆的半径为 r cm,

关键点拔
利用俯视图和
主视图判断
即可.

则 $2\pi r = \frac{90\pi \times 40}{180}$, $\therefore r = 10$, 故选 B.

6. B 【解析】如图所示,选择标有 1 或 2 的空白小正方形,能与阴影部分组成正方体展开图,所以能与阴影部分组成正方体展开图的方法有 2 种. 故选 B.



7. D 【解析】由题意可知, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A_1B_1C_1$ 是位似图形,且相似比为 $\frac{2}{2+3} = \frac{2}{5}$, $\therefore \triangle A_1B_1C_1$ 的面积是 $60 \div \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 375(\text{cm}^2)$, 故选 D.

8. 6 【解析】根据俯视图可得最底层有 4 个小立方块,由主视图可得第二层最多有 2 个小立方块,故最多有 $4+2=6$ (个)小立方块,故答案为 6.

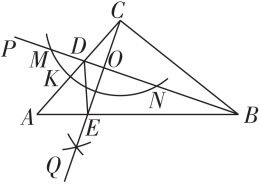
(十五) 尺规作图

刷考点

1. C 【解析】根据作图可得 MN 是 AB 的垂直平分线, $\therefore DA = DB$. $\because \angle BAC = 30^\circ$, $\therefore \angle ABD = \angle BAD = 30^\circ$, $\therefore \angle AOE = 2\angle ABD = 60^\circ$, 故选 C.

2. D 【解析】由作图过程可知, $\angle CBN = \angle BAC$. $\because CD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $\therefore \angle ACD = \angle BCD$. $\because \angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180^\circ$, $\angle CBM + \angle BCM + \angle BMC = 180^\circ$, $\therefore \angle ADC = \angle BMC$, $\therefore \angle BDM = \angle BMD$, $\therefore BM = BD$, 故 D 选项一定正确. 故选 D.

3. B 【解析】由作图可知 $CE \perp BD$. 如图, 设 CE, BD 交于点 O , 则 $\angle BOC = \angle BOE = 90^\circ$. $\because BP$ 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle ABO = \angle CBO$. 在 $\triangle BOC$ 和

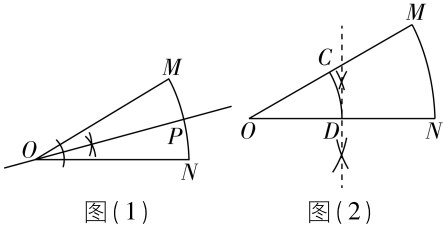


$\triangle BOE$ 中, $\begin{cases} \angle BOC = \angle BOE, \\ OB = OB, \\ \angle CBO = \angle EBO, \end{cases} \therefore \triangle BOC \cong \triangle BOE$ (A. S. A.), $\therefore OC = OE, BC = BE = 12$, $\therefore BD$ 垂直平分 CE , $AE = AB - BE = 4$, $\therefore DE = CD$, $\therefore \triangle ADE$ 的周长为 $AE + DE + AD = AE + CD +$

思路分析
【初步尝试】
作 OP 平分 $\angle MON$ 即可;
【拓展探究】
作线段 ON 的垂直平分线, 垂足为 D , 以 O 为圆心, OD 长为半径作弧交 OM 于点 C , 弧 CD 即为所求.

$AD = AE + AC = 14$. 故选 B.

4. 【初步尝试】如图(1), 直线 OP 即为所求.

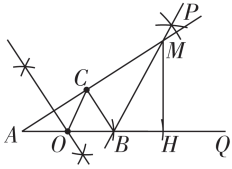


【拓展探究】如图(2), 弧 CD 即为所求.

5. 【解】(1) 如图, 点 O 即为所求作.

(2) 如图, 点 M 即为所求作.

(3) 由作图可知 $OA = OC = OB$, \therefore 点 A, B, C 在以 O 为圆心, OA 为半径的圆上, 且 AB 为直径, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$, $\therefore \angle BCM = 90^\circ$.



$\therefore \sin A = \frac{3}{5}$, \therefore 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$, 设 $BC = 3k, AB = 5k$, 则 $AC = 4k$. 由作图易知 $BC = BH = 3k, \triangle BCM \cong \triangle BHM$, $\therefore \angle MCB = \angle BHM = 90^\circ$, $\therefore AH = AB + BH = 8k$. $\therefore \angle ACB = \angle AHM = 90^\circ, \angle A = \angle A$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle AMH$,

$$\therefore \frac{AC}{AH} = \frac{BC}{MH} = \frac{AB}{AM}, \therefore \frac{4k}{8k} = \frac{3k}{MH} = \frac{5k}{AM}, \therefore MH = 6k,$$
$$AM = 10k, \therefore CM = AM - AC = 10k - 4k = 6k.$$

$$\therefore CM = 12, \therefore k = 2, \therefore BH = 6, MH = 12,$$
$$\therefore BM = \sqrt{BH^2 + MH^2} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}.$$

(十六) 统计与概率初步

刷考点

1. D 【解析】

选项	理由	判断
A	调查过程具有破坏性	适合抽样调查, 不符合题意
B		
C	花费的时间较长, 耗费大	适合全面调查, 符合题意
D	总体数据较少且方便调查	

故选 D.

2. 108 【解析】估计该校全体学生中, 从未使用该平台辅助学习的学生有 $3\,600 \times \frac{3}{100} = 108$ (名). 故答案为 108.

3. 1 500 【解析】由题意可估计, 该地区七年级 2 000 名男生中 BMI 等级为正常的人数是 $2\,000 \times \frac{75}{100} = 1\,500$, 故答案为 1 500.

4. A 【解析】由折线统计图可知, 甲公司 2019~2020 年利润增长接近 20 万元, 2020~2022 年利润增长接近 50 万元, 2022~2023 年利润增长接近 50 万元, 乙公司 2019~2020 年利润增长 10 万元, 2020~2022 年利润增长 20 万元, 2022~2023 年利润增长 10 万元, \therefore 甲始终比乙快. 故选 A.

5. B 【解析】由题意可得 $a = 50 - 4 - 16 - 12 - 8 = 10$, 故 A 不符合题意; 用地面积在 $8 < x \leq 12$ 这一组的公园个数为 16, 个数最多, 故 B 符合题意; 用地面积在 $0 < x \leq 4$ 这一组的公园个数最少, 故 C 不符合题意; $12 + 8 = 20$, \therefore 这 50 个公园中有 20 个公园用地面积超过 12 公顷, 不到一半, 故 D 不符合题意, 故选 B.

6. 200 【解析】 $\because 1\,000 \times 20\% = 200$ (名), \therefore 该校 1 000 名学生中, 最喜爱娱乐节目的学生大约有 200 名, 故答案为 200.

7. A 【解析】28 公里、30 公里、30 公里、26 公里、32 公里的众数为 30 公里, 若后续又新增一条线路, 使得新增后这 6 条线路长度的中

刷有所得

选择全面调查(普查)还是抽样调查要根据所要考察的对象的特征灵活选用, 一般来说, 调查具有破坏性、无法进行普查、普查的意义或价值不大时, 应选择抽样调查.

思路分析

根据加权平均数的定义分别求出 A, B 的值, 再比较大小即可.

位数变为 29 公里, 众数保持不变, 则新增线路长度不可能是 28 公里或 30 公里, 故选项 B、D 不符合题意; 当新增线路长度是 25 公里时, 25 公里、28 公里、30 公里、30 公里、26 公里、32 公里的中位数为 $\frac{28+30}{2} = 29$ (公里), 故选项 A 符合题意; 当新增线路长度是 29 公里时, 29 公里、28 公里、30 公里、30 公里、26 公里、32 公里的中位数为 $\frac{29+30}{2} = 29.5$ (公里), 故选项 C 不符合题意. 故选 A.

8. C 【解析】算式中差的平方的项数为 5, \therefore 对应数据个数 $n = 5$, 故选项 A 正确. 平均数 $\bar{x} = \frac{6+8+8+6+7}{5} = 7$, 故选项 B 正确. 数据中 6 和 8 均出现 2 次, 故众数为 6 和 8, 故选项 C 错误. 该组数据加入两个 7 后, 数据更集中, 故这组新数据的方差变小, 故选项 D 正确. 故选 C.

9. 甲 【解析】 $\because s_{\text{甲}}^2 = 3.6, s_{\text{乙}}^2 = 5.8, \therefore s_{\text{甲}}^2 < s_{\text{乙}}^2$, \therefore 甲种小麦长势更整齐.

10. $>$ 【解析】 $4 + 3 + 2 + 1 = 10$, 由加权平均数可得 $\frac{4}{10}A + \frac{3}{10} \times 70 + \frac{2}{10} \times 80 + \frac{1}{10} \times 90 = 82$, 解得 $A = 90$; $\frac{4}{10}B + \frac{3}{10} \times 90 + \frac{2}{10} \times 80 + \frac{1}{10} \times 70 = 82$, 解得 $B = 80$. $\because 90 > 80, \therefore A > B$. 故答案为 $>$.

11. 5 【解析】 \because 这组数据有唯一众数 8, $\therefore b$ 为 8. \because 中位数是 5, $\therefore a$ 是 5, \therefore 这一组数据的平均数为 $\frac{1+3+5+8+8}{5} = 5$, 故答案为 5.

12. 【解】(1) 由比赛得分统计图可得, 甲队员的得分上下波动幅度小于乙队员的得分上下波动幅度, \therefore 得分更稳定的队员是甲. 将乙队员的得分按照从小到大的顺序排列为 14, 20, 28, 30, 32, 32, 最中间两个数为 28, 30, \therefore 乙队员得分的中位数为 $\frac{28+30}{2} = 29$ (分), 故答案为甲, 29.

(2)∵ 甲队员的平均每场得分大于乙队员的平均每场得分,且甲队员的得分更稳定,∴ 甲队员表现更好.(答案不唯一,合理即可)

(3)甲队员的综合得分为 $26.5 \times 1 + 8 \times 1.5 + 2 \times (-1) = 36.5$ (分),乙队员的综合得分为 $26 \times 1 + 10 \times 1.5 + 3 \times (-1) = 38$ (分). $\therefore 36.5 < 38$, \therefore 乙队员的表现更好.

13. A 【解析】小美和小好同学做“石头、剪刀、布”的游戏,两人同时出相同的手势,这个事件是随机事件. 故选 A.

14. B 【解析】打开电视机,中央台正在播放“嫦娥六号完成人类首次背月采样”的新闻是随机事件,故 A 不符合题意;从两个班级中任选三名学生担任学校安全督查员,至少有两名学生来自同一个班级是必然事件,故 B 符合题意;小明在内江平台一定能抢到龙舟节开幕式门票是随机事件,故 C 不符合题意;从《西游记》《红楼梦》《三国演义》《水浒传》这四本书中随机抽取一本是《三国演义》是随机事件,故 D 不符合题意. 故选 B.

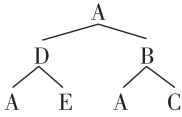
15. A 【解析】∵ 正方体共 6 个面,向上一面出现数字 1 的概率为 $\frac{1}{2}$, \therefore 标有数字 1 的面有 3 个. \therefore 出现数字 2 的概率为 $\frac{1}{3}$, \therefore 标有数字 2 的面有 2 个, \therefore 标有数字 3 的面只有 1 个,而选项 A 中正方体木块至少有 2 个面上标有 3, \therefore 该木块不可能是 A, 故选 A.

16. B 【解析】设扇形 AOB 所在圆的半径为 r . $\because CE \perp AO$, $\therefore \angle OCE = 90^\circ$. \because 点 C 是 AO 的中点, $\therefore OC = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}OE$. 在 $Rt \triangle OCE$ 中, $\therefore \cos \angle COE = \frac{OC}{OE} = \frac{1}{2}$, $\therefore \angle COE = 60^\circ$, $\therefore \angle BOE = \angle AOB - \angle COE = 30^\circ$. $\because ED \perp OB$, $\therefore \angle ODE = 90^\circ$. $\therefore \angle COD = \angle OCE = \angle ODE = 90^\circ$, \therefore 四边形 OCED 为矩形,

$$\therefore S_{\triangle OCE} = S_{\triangle ODE}, \therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形BOE}} = \frac{30 \times \pi \times r^2}{360} = \frac{1}{12} \pi r^2.$$
$$\therefore S_{\text{扇形AOB}} = \frac{90 \pi \times r^2}{360} = \frac{1}{4} \pi r^2, \therefore \text{点 } P \text{ 落在阴影部分的}$$

概率为 $\frac{S_{\text{扇形BOE}}}{S_{\text{扇形AOB}}} = \frac{1}{3}$. 故选 B.

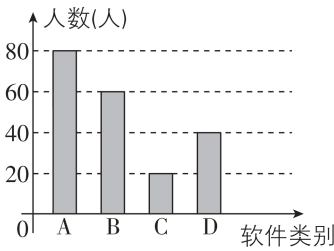
17. $\frac{1}{2}$ 【解析】画树状图如下:



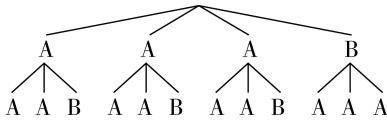
\therefore 所有等可能的情况有 4 种,其中回到格子 A 的情况有 2 种, \therefore 回到格子 A 的概率为 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. 故答案为 $\frac{1}{2}$.

18. 【解】(1)抽取的学生总人数为 $40 \div 20\% = 200$ (人), \therefore 扇形统计图中 A 类软件所占圆心角为 $360^\circ \times \frac{80}{200} = 144^\circ$, 故答案为 200, 144.

(2)使用 B 类软件的人数为 $200 - 80 - 20 - 40 = 60$ (人),补全条形统计图如下:



(3)画树状图如下:



共有 12 种等可能的结果,其中恰好抽到使用 A、B 两类软件各 1 人的结果有 6 种, \therefore 恰好抽到使用 A、B 两类软件各 1 人的概率为 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

中考新考向备考

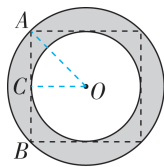
刷考向

1. B 【解析】若收入 10 元记作 +10 元,则支出 10 元记作 -10 元. 故选 B.

2. C 【解析】由题意得 $\begin{cases} x+y=1\ 000, \\ \frac{11}{9}x+\frac{4}{7}y=999, \end{cases}$ 故选 C.

3. D 【解析】如图,设正方形的中心为 O,边 AB 与内

切圆的切点为 C,连结 OA, OC, 则 $\angle OCA = 90^\circ$, $\angle OAC = \angle AOC = 45^\circ$, $OC = 2$, $\therefore OA = \frac{OC}{\sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}$,



$\therefore S_{\text{阴影}} = \pi \cdot OA^2 - \pi \cdot OC^2 = 8\pi - 4\pi = 4\pi$. 故选 D.

4. $3(x-2) = 2x+9$ 【解析】根据“总人数不变”的等量关系可列方程为 $3(x-2) = 2x+9$, 故答案为 $3(x-$