



第1章 四边形

1.1 多边形

课时1 多边形的概念及内角和

刷基础

1. B 【解析】①各边相等是正确的；②各个内角相等是正确的；③各个外角相等是正确的；④各条对角线不一定相等；⑤从正 n 边形的一个顶点引出的对角线将正 n 边形分成 $(n-2)$ 个三角形，而这 $(n-2)$ 个三角形的面积不一定相等. 综上，属于正多边形的特征的有 3 个.

2. B 【解析】设这个多边形有 n 条边，则 $n-3=5$ ，解得 $n=8$ ，所以这个多边形的边数为 8，即它是八边形，故选 B.

3. D 【解析】由条件可知 $\angle C = \angle D = \angle ABC = \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$. 由折叠的性质得， $\angle CBF = \angle C'BF$. $\because \angle 1 = 18^\circ$ ， $\therefore \angle CBF = \angle C'BF = \frac{1}{2}(108^\circ - 18^\circ) = 45^\circ$ ， \therefore 在四边形 $BCDF$ 中， $\angle 2 = 360^\circ - \angle CBF - \angle C - \angle D = 360^\circ - 45^\circ - 108^\circ - 108^\circ = 99^\circ$ ，故选 D.

4. C 【解析】根据正五边形的性质可得 $OA = OB = OC = OD$ ， $AB = BC = CD$ ， $\therefore \triangle AOB \cong \triangle BOC \cong \triangle COD$ ， $\therefore \angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \angle OCD = \angle ODC$ ， $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$. \because 正五边形每个内角的度数为 $\frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 108^\circ$ ， $\therefore \angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \angle OCD = \angle ODC = 54^\circ$ ， $\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 180^\circ - 2 \times 54^\circ = 72^\circ$ ， $\therefore \angle AOD = 360^\circ - 3 \times 72^\circ = 144^\circ$. $\because OA = OD$ ， $\therefore \angle ADO = \frac{1}{2}(180^\circ - 144^\circ) = 18^\circ$. 故选 C.

5. 72° 【解析】 \because 五边形 $ABCDE$ 是正五边形，

关键点拨

本题主要考查了多边形的内角和公式，掌握多边形的内角和是 180° 的整倍数是解题的关键.

关键点拨

如果一个多边形有 n 条边，则从该多边形的某个顶点出发有 $(n-3)$ 条对角线，这 $(n-3)$ 条对角线把该多边形分成了 $(n-2)$ 个三角形.

易错警示

一个多边形截去一个角后，边数可能减少 1，可能不变，可能增加 1，边数不同的多边形内角和也不同.

$\therefore \angle ABC = \angle BAE = [(5-2) \times 180^\circ] \div 5 = 108^\circ$ ，
 $BA = BC$ ， $\therefore \angle BCA = \angle BAC = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$ ，
 $\therefore \angle EAC = \angle BAE - \angle BAC = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ$.

6. 【解】(1) 设这个多边形的边数是 n ，重复计算的内角的度数是 x ($0^\circ < x < 180^\circ$)，则 $(n-2) \cdot 180^\circ = 1\ 840^\circ - x$.

$\because n$ 为正整数， $1\ 840^\circ - x$ 为 180° 的倍数， $\therefore n = 12$ ， $x = 40^\circ$.

故这个多边形的边数是 12.

(2) 设这个多边形的边数是 m ，漏算的那个内角的度数是 y ($0^\circ < y < 180^\circ$)，则 $(m-2) \cdot 180^\circ = 1\ 840^\circ + y$.

$\because m$ 为正整数， $1\ 840^\circ + y$ 为 180° 的倍数， $\therefore m = 13$ ， $y = 140^\circ$ ，

故漏算的那个内角是 140° ，这个多边形是十三边形.

刷易错

7. 8 或 9 或 10 【解析】设截去一个角后，得到的新多边形的边数为 n . 由题意得 $(n-2) \times 180^\circ = 1\ 260^\circ$ ，解得 $n = 9$. 因为多边形截去一角后边数可能不变，可能增加 1，可能减少 1， \therefore 原多边形的边数可能为 8 或 9 或 10. 故答案为 8 或 9 或 10.

课时2 多边形的外角和

刷基础

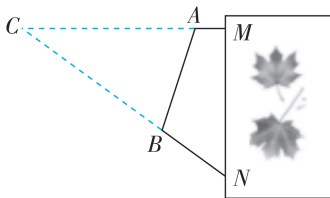
1. C 【解析】这个正多边形的边数是 $\frac{360^\circ}{36^\circ} = 10$ ，故选 C.

2. B 【解析】由多边形的外角和等于 360° ，可得 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360^\circ$. 故选 B.

3. C 【解析】当四边形形状改变时，四边形的边长、周长、内角和都不会改变，改变的只是某些角的大小.

4. B 【解析】 $\because \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 210^\circ, \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle FBC + \angle FCB = 360^\circ, \therefore \angle FBC + \angle FCB = 150^\circ, \therefore \angle F = 180^\circ - \angle FBC - \angle FCB = 30^\circ$, 故选 B.

5. 5 【解析】如图, 延长 NB 交 MA 的延长线于点 C , 则 $\angle C = 36^\circ$. \because 在正 n 边形中, $\angle MAB = \angle ABN, \therefore \angle CAB = \angle CBA, \therefore \angle CAB = \angle CBA = \frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ, \therefore$ 正 n 边形的边数 $n = \frac{360^\circ}{72^\circ} = 5$.



6. 【解】 \because 正五边形的内角和为 $(5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$, 正五边形的每一个内角、外角都相等, $\therefore \angle COF = 540^\circ \div 5 = 108^\circ$, 正五边形的外角 $\angle OCB = 360^\circ \div 5 = 72^\circ$. \because 正六边形的内角和为 $(6-2) \times 180^\circ = 720^\circ$, 正六边形的每一个内角、外角都相等, $\therefore \angle BOP = 720^\circ \div 6 = 120^\circ$, 正六边形的外角 $\angle OBC = 360^\circ \div 6 = 60^\circ$. 在 $\triangle BOC$ 中, $\because \angle BOC + \angle OCB + \angle OBC = 180^\circ$, $\therefore \angle BOC = 180^\circ - \angle OBC - \angle OCB = 180^\circ - 60^\circ - 72^\circ = 48^\circ$. $\therefore \angle POB + \angle BOP + \angle BOC + \angle COF = 360^\circ$, $\therefore \angle POB = 360^\circ - \angle BOP - \angle BOC - \angle COF = 360^\circ - 120^\circ - 108^\circ - 48^\circ = 84^\circ$.

刷易错

7. 【解】(1) $\because n$ 边形的内角和是 $(n-2) \cdot 180^\circ$, \therefore 内角和一定是 180° 的整数倍. $\because 2\ 014 \div 180 = 11 \cdots 34, \therefore$ 凸多边形的内角和为 $2\ 014^\circ$ 是不可能的. (2) 设小华求的多边形的边数为 x . 依题意有 $(x-2) \cdot 180^\circ < 2\ 014^\circ$, 解得 $x < 13 \frac{17}{90}$, 因而多边形的边数是 13, 故小华求的是十三边形的内角和.

思路分析

根据多边形的内角和公式, 正多边形的每一个内角都相等, 可分别求出正六边形、正五边形的一个内角度数, 即 $\angle BOP, \angle COF$ 的度数, 根据多边形的外角和等于 360° , 正多边形的每一个外角都相等, 得出 $\angle OCB, \angle OBC$ 的度数. 在 $\triangle BOC$ 中, 根据三角形的内角和为 180° 可求出 $\angle BOC$ 的度数, 再根据 $\angle POB + \angle BOP + \angle BOC + \angle COF = 360^\circ$ 即可得出答案.

易错警示

$n (n \geq 3, \text{且 } n \text{ 为整数})$ 边形的内角和计算公式为 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 内角和是 180° 的整数倍, 计算多边形的边数时要按实际情况取值.

1.2 平行四边形

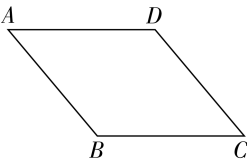
1.2.1 平行四边形的性质

课时 1 平行四边形的边、角性质

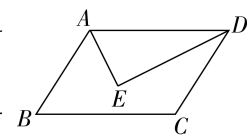


刷基础

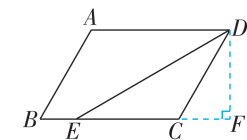
1. A 【解析】如图. \because 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\therefore AD \parallel BC, \angle A = \angle C, \therefore \angle A + \angle B = 180^\circ. \because \angle A + \angle C = 100^\circ, \therefore \angle A = 50^\circ, \therefore \angle B = 130^\circ$. 故选 A.



2. B 【解析】如图. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB \parallel CD, \therefore \angle BAD + \angle ADC = 180^\circ. \because \angle BAD$ 与 $\angle CDA$ 的平分线交于点 $E, \therefore \angle EAD = \frac{1}{2} \angle BAD, \angle ADE = \frac{1}{2} \angle ADC, \therefore \angle EAD + \angle ADE = \frac{1}{2} (\angle BAD + \angle ADC) = 90^\circ, \therefore \angle E = 90^\circ, \therefore \triangle ADE$ 是直角三角形. 故选 B.



3. C 【解析】 $\because DE, CE$ 分别平分 $\angle ADC, \angle BCD, \therefore \angle ADE = \angle CDE, \angle DCE = \angle BCE. \because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB \parallel CD, AD = BC, AB = CD, \therefore \angle CDE = \angle DEA, \angle DCE = \angle CEB, \therefore \angle ADE = \angle AED, \angle BCE = \angle CEB, \therefore AD = AE, BE = BC, \therefore AE = BE = AD = BC = \frac{1}{2} AB. \because$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 18, $\therefore AB + AD + CD + BC = 3AB = 18, \therefore AB = 6$, 故选 C.



4. B 【解析】过点 D 作 $DF \perp BC$, 交 BC 的延长线于 F , 如图. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AD \parallel BC, \angle A = \angle BCD = 120^\circ, AB = CD = 8, \therefore \angle ADE = \angle DEC, \angle DCF = \angle ADC = 60^\circ. \because DE$ 平分 $\angle ADC, \therefore \angle ADE = \angle CDE = 30^\circ, \therefore \angle CDE = \angle DEC = 30^\circ, \therefore EC = CD = 8. \because \angle DCF = 60^\circ, \therefore \angle CDF = 30^\circ, \therefore CF = \frac{1}{2} CD = 4, \therefore DF = \sqrt{CD^2 - CF^2} = 4\sqrt{3}, \therefore DE = 2DF = 8\sqrt{3}, \therefore \triangle CDE$ 的周长为 $8\sqrt{3} + 16$. 故选 B.

5. C 【解析】设 $\angle ECD = x^\circ$, 则 $\angle ACE = 2x^\circ$,
 $\therefore \angle ACD = 3x^\circ$. \because 四边形 $ABCD$ 为平行四边
 形, $\therefore AB \parallel CD$, $\therefore \angle BAC = \angle ACD = 3x^\circ$. 由折叠
 可知, $\angle E = \angle B = 80^\circ$, $\angle CAE = \angle BAC = 3x^\circ$.
 在 $\triangle ACE$ 中, $\angle E + \angle EAC + \angle ACE = 180^\circ$, 即
 $80^\circ + 3x^\circ + 2x^\circ = 180^\circ$, 解得 $x = 20$, $\therefore \angle BAC =$
 60° . 故选 C.

6. 22 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AB = CD = 4, AD = BC$. $\because CD$ 是 $\triangle BDE$ 的中
 线, $\therefore BC = CE = 5$, $\therefore AD = 5$. $\because DE \perp CD$,
 $\therefore \angle CDE = 90^\circ$, $\therefore DE = \sqrt{CE^2 - CD^2} =$
 $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$, \therefore 四边形 $ABED$ 的周长为 $AB +$
 $BC + CE + DE + AD = 4 + 5 + 5 + 3 + 5 = 22$, 故答案
 为 22.

7. 【解】(1) \because 在 $\square ABCD$ 中, $AB = 10, AD = 14$,
 $\therefore \square ABCD$ 的周长为 $2(AB + AD) = 2 \times (10 +$
 $14) = 48$.
 (2) 在 $\square ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle ADE = \angle DEC = 25^\circ$.
 $\because DE$ 平分 $\angle ADC$,
 $\therefore \angle ADC = 2\angle ADE = 50^\circ$,
 $\therefore \angle B = 50^\circ$.

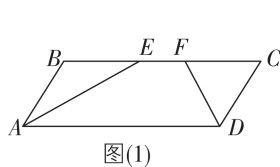
8. (1) 【证明】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AD = BC, AD \parallel BC$,
 $\therefore \angle DAF = \angle BCE$.
 $\because AF = CE$,
 $\therefore \triangle ADF \cong \triangle CBE$ (SAS),
 $\therefore BE = DF$.
 (2) 【解】 $\because AB \perp AC$, $\therefore \angle BAE = 90^\circ$.
 $\because AE = 2, BE = 2\sqrt{5}$,
 $\therefore AB = \sqrt{BE^2 - AE^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2^2} = 4$.
 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore CD = AB = 4$.

刷易错

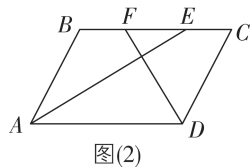
9. 36 或 24 【解析】 $\because AE$ 平分 $\angle BAD$,
 $\therefore \angle BAE = \angle DAE$. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四
 边形, $\therefore AD \parallel CB, CD = AB = 5$, $\therefore \angle AEB =$
 $\angle DAE$, $\therefore \angle BAE = \angle BEA$, $\therefore BE = AB = 5$. 同
 理可得, $CF = CD = 5$. 分两种情况:
 ①如图(1), $\because EF = 3$, $\therefore BC = BE + EF + CF =$
 $5 + 3 + 5 = 13$, \therefore 四边形 $ABCD$ 的周长为
 $2(AB + BC) = 2 \times (5 + 13) = 36$;

思路分析
 设 $\angle ECD = x^\circ$, 则 $\angle ACE = 2x^\circ$, 进而可得 $\angle ACD = 3x^\circ$, 由折叠可知, $\angle E = \angle B = 80^\circ$, $\angle CAE = \angle BAC = 3x^\circ$, 再根据三角形的内角和为 180° 列出方程即可得出答案.

易错警示
 对于几何问
 题, 要仔细审
 题, 题中没有
 明确指出点 E
 与点 F 的位
 置关系, 注意
 分两种情况进
 行讨论.



图(1)

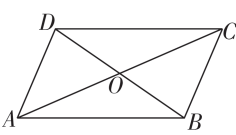


图(2)

②如图(2), $\because EF = 3, BE = CF = 5$, $\therefore BF =$
 $BE - EF = 2$, $\therefore BC = BF + CF = 2 + 5 = 7$, \therefore 四边
 形 $ABCD$ 的周长为 $2(AB + BC) = 2 \times (5 +$
 $7) = 24$.
 综上所述, 四边形 $ABCD$ 的周长为 36 或 24.
 故答案为 36 或 24.

课时2 平行四边形的对角线性质

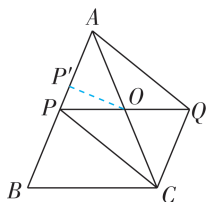
刷基础

- 1. B** 【解析】平行四边形的对角线互相平分.
2. D 【解析】如图, 设 AC ,
 BD 相交于点 O . \because 四边
 形 $ABCD$ 是平行四边形, A 
 $AC = 8, AB = 6$, $\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC = 4, OB = OD =$
 $\frac{1}{2}BD$, $\therefore 6 - 4 < OB < 6 + 4$, 即 $2 < OB < 10$, $\therefore BD$ 的
 长的取值范围是 $4 < BD < 20$. 故选 D.
3. $\sqrt{2}$

添加辅助线

设 AC, PQ 交于点 O . 因为点 P 和点 Q 都是动
 点, PQ 的长度会随着点 P 的运动而改变, 考
 虑到四边形 $PAQC$ 是平行四边形, 所以 PQ 的
 长度可以转化为 $2OP$ 的长. 因为点 O 是固定
 点, 所以只要 OP 的值最小, 即可求出 PQ 的最
 小值, 故过 O 作 AB 的垂线段 OP' , 再根据等
 腰直角三角形的性质求出 OP' 的长, 即可得到
 PQ 的最小值.

【解析】 设 AC, PQ 交于点
 O , 如图所示. \because 四边形
 $PAQC$ 是平行四边形,
 $\therefore AO = CO, OP = OQ$, \therefore 当
 PO 最小时 PQ 也最小. 过 O
 作 $OP' \perp AB$ 于点 P' . $\because \angle BAC = 45^\circ$,
 $\therefore \triangle AP'O$ 是等腰直角三角形. $\therefore AO = \frac{1}{2}AC =$
 $\frac{1}{2} \times 2 = 1$, $\therefore OP' = \frac{\sqrt{2}}{2}AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\therefore PQ$ 的最小值
 为 $2OP' = \sqrt{2}$. 故答案为 $\sqrt{2}$.

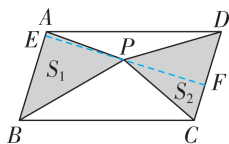


4. 【证明】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 对角线 AC, BD 相交于点 O ,
 $\therefore OB=OD, OA=OC$.
 \because 点 E, F 分别是 OA, OC 的中点,
 $\therefore OE=\frac{1}{2}OA, OF=\frac{1}{2}OC$,
 $\therefore OE=OF$.

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle DOF$ 中, $\begin{cases} OB=OD, \\ \angle BOE=\angle DOF, \\ OE=OF, \end{cases}$
 $\therefore \triangle BOE \cong \triangle DOF$ (SAS), $\therefore \angle OBE=\angle ODF$,
 $\therefore BE \parallel DF$.

5. B 【解析】 $\because \square ABCD$ 的周长为 28 cm,
 $\therefore BC+CD=14$ cm. \because 在 $\square ABCD$ 中, $AE \perp BC$,
 $AF \perp CD$, $\therefore S_{\square ABCD} = BC \cdot AE = CD \cdot AF$.
 $\because AE=3$ cm, $AF=4$ cm, $\therefore 3BC=4CD$, $\therefore BC=8$ cm, $CD=6$ cm, $\therefore \square ABCD$ 的面积为 $8 \times 3 = 24$ (cm²). 故选 B.

6. 30 【解析】过点 P 作 $EF \perp AB$ 交 AB 于点 E , 交 CD 于点 F , 如图. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AB \parallel CD, AB=CD$. $\because EF \perp AB, \therefore EF \perp CD$,
 $\therefore S_{\square ABCD} = AB \cdot EF, S_1 = \frac{AB \times PE}{2}, S_2 = \frac{CD \times PF}{2}$.
 $\because EF = PE + PF, AB = CD, \therefore S_{\square ABCD} = 2(S_1 + S_2) = 30$, 故答案为 30.



7. 【解】(1) \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AB \parallel CD, AB=CD, AD=BC$,
 $\therefore \angle BAE = \angle AED$.
 $\because AE$ 平分 $\angle DAB$,
 $\therefore \angle DAE = \angle BAE$,
 $\therefore \angle DAE = \angle AED$,
 $\therefore AD=ED=5$.
 $\because EC=8, \therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 的周长为 $2 \times (5+5+8) = 36$.
(2) 在三角形 ADC 中, $AD=5, DC=5+8=13, AC=12$,
 $\therefore AD^2 + AC^2 = DC^2$,
 $\therefore \triangle ADC$ 为直角三角形, 且 $\angle DAC = 90^\circ$, 即 $AC \perp AD$,
 \therefore 平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $AD \times AC = 60$.

思路分析

(2) ①由 $AD=DE, \angle ADC=60^\circ$, 得 $\triangle ADE$ 为等边三角形. 由 $\frac{AD}{DC} = 2$ 得点 C 是 DE 的中点, 则 $AC \perp DE$. 再由勾股定理求得 CD 的长, 即可求得平行四边形 $ABCD$ 的面积; ②易证 $\triangle BAF$ 为等边三角形, 再证明 $\triangle AOB \cong \triangle COD$, 则有 $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$, 从而得 $\frac{S_{\text{四边形}ABFO}}{S_{\triangle COD}} = \frac{S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOF}}{S_{\triangle COD}} = 1 + \frac{S_{\triangle BOF}}{S_{\triangle BOC}} = 1 + \frac{DC}{AD}$, 由此即可得出 m 与 k 满足的关系式.

关键点拨

掌握整体代入法是解题的关键.

8. (1) 【证明】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,
 $\therefore AB \parallel DC, \therefore \angle BAE = \angle E$.
 $\because AE$ 平分 $\angle BAD, \therefore \angle DAE = \angle BAE$,
 $\therefore \angle DAE = \angle E, \therefore AD=DE$.

(2) 【解】① $\because AD=DE, \angle ADC=60^\circ$,

$\therefore \triangle ADE$ 为等边三角形, $\therefore AD=DE=AE$.

$\because \frac{AD}{DC} = 2, \therefore AD=AE=DE=2CD, \therefore AC \perp DE$.

在 $\text{Rt} \triangle ACD$ 中, $AC=2\sqrt{3}, \angle ADC=60^\circ$,

由勾股定理得 $AD^2 = CD^2 + AC^2$, 即 $4CD^2 = 12 + CD^2, \therefore CD=2$,

\therefore 平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $CD \cdot AC = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

② $\because \triangle ADE$ 为等边三角形, $AB \parallel CD$,

$\therefore \angle BAF = \angle E = 60^\circ$.

又 $\because \angle ABF = \angle ADE = 60^\circ$,

$\therefore \triangle BAF$ 为等边三角形, $\therefore AB=AF=BF$.

在平行四边形 $ABCD$ 中,

$\because OA=OC, OB=OD, \angle AOB = \angle COD$,

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$ (SAS),

$\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$.

$\therefore \frac{S_{\text{四边形}ABFO}}{S_{\triangle COD}} = \frac{S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOF}}{S_{\triangle COD}}$

$= \frac{S_{\triangle COD} + S_{\triangle BOF}}{S_{\triangle COD}}$

$= 1 + \frac{S_{\triangle BOF}}{S_{\triangle COD}}$

$= 1 + \frac{S_{\triangle BOF}}{S_{\triangle BOC}}$

$= 1 + \frac{BF}{BC}$

$= 1 + \frac{AB}{AD}$

$= 1 + \frac{DC}{AD}$,

$\therefore m = 1 + \frac{1}{k}$.



刷提升

1. A 【解析】设点 E 到 AB 的距离为 m , 点 A 到 BE 的距离为 n . \because 四边形 $ABCD$ 和四边形 $BEFG$ 都是平行四边形, $\therefore S_{\square ABCD} = AB \cdot m$,

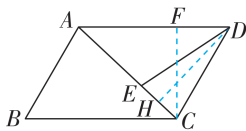
$S_{\square BEFG} = BE \cdot n$. $\therefore S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times AB \cdot m = \frac{1}{2} \times BE \cdot n$, $\therefore AB \cdot m = BE \cdot n$, $\therefore S_{\square BEFG} = S_{\square ABCD}$, \therefore 平行四边形 $BEFG$ 的面积始终不变, 故选 A.

2. C 【解析】

过点 D 作

$DH \perp AC$ 于点 H , 过点

C 作 $CF \perp AD$ 于点 F , 如图



所示. \therefore 点 E 是对角线 AC 上的动点,

\therefore 当 $DE \perp AC$ 时, DE 的值最小, \therefore 当点 E 与

点 H 重合时, DE 的值最小, 最小值是线段 DH

的长. \therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 且 $AB =$

$2, AD = 3, \angle B = 60^\circ, \therefore CD = AB = 2, \angle ADC =$

$\angle B = 60^\circ. \therefore CF \perp AD, \therefore \triangle CDF$ 和 $\triangle CFA$ 都

是直角三角形. 在 $Rt\triangle CDF$ 中, $\angle DCF = 90^\circ -$

$\angle ADC = 30^\circ, \therefore DF = \frac{1}{2}CD = 1$, 由勾股定理得

$CF = \sqrt{CD^2 - DF^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. 在 $Rt\triangle CFA$

中, $AF = AD - DF = 3 - 1 = 2$, 由勾股定理得 $AC =$

$\sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$. 由三角形的面

积公式得 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AC \cdot DH = \frac{1}{2}AD \cdot CF$,

$\therefore DH = \frac{AD \cdot CF}{AC} = \frac{3 \times \sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{7}$, $\therefore DE$ 的最小

值为 $\frac{3\sqrt{21}}{7}$. 故选 C.

3. 【解】

(1) \therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel BC, AO = CO, \therefore \angle EAO = \angle FCO$.

在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中, $\begin{cases} \angle EAO = \angle FCO, \\ AO = CO, \\ \angle AOE = \angle COF, \end{cases}$

$\therefore \triangle AOE \cong \triangle COF, \therefore AE = CF = 3$,

$\therefore BC = BF + CF = 5 + 3 = 8$.

(2) \therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AO = CO = \frac{1}{2}AC, BO = DO = \frac{1}{2}BD, AD =$

$BC = 8$.

$\therefore AC + BD = 20, \therefore AO + DO = 10$,

$\therefore \triangle AOD$ 的周长为 $AO + DO + AD = 18$.

4. (1) 【证明】

\therefore 平行四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle AEB = \angle CBE$.

关键点拨

(1) 连接 EF ,

由三角形的面

积公式可以推

出 $S_{\triangle EFC} =$

$S_{\triangle BCF}, S_{\triangle EFD} =$

$S_{\triangle ADF}$, 所以

$S_{\triangle EFQ} = S_{\triangle BQC}$,

$S_{\triangle EFP} = S_{\triangle APD}$,

进而可得 $S =$

$S_1 + S_2$.

思路分析

(1) 根据平行

四边形 $ABCD$

中, $AD \parallel BC$,

得到 $\angle AEB =$

$\angle CBE$, 再由

$AB = AE$ 可得

$\angle ABE = \angle AEB$,

进而得到 BE

平分 $\angle ABC$,

然后由 CF 是

$\angle ACB$ 的平分

线可得 AP 平

分 $\angle BAC$, 最

后由等腰三角

形的性质可证

得结论.

$\therefore AB = AE, \therefore \angle ABE = \angle AEB$,

$\therefore \angle ABE = \angle CBE$,

$\therefore BE$ 平分 $\angle ABC$.

$\therefore CF$ 是 $\angle ACB$ 的平分线, BE 交 CF 于点 P ,

$\therefore AP$ 平分 $\angle BAC$.

$\therefore AB = AC$,

$\therefore AH$ 垂直平分 BC ,

$\therefore PB = PC$.

(2) 【解】 $\therefore AH$ 垂直平分 BC ,

$\therefore AH \perp BC, BH = CH = \frac{1}{2}BC = 2$.

$\therefore \angle ABH = 45^\circ$,

$\therefore AH = BH = 2$,

\therefore 平行四边形 $ABCD$ 的面积为 $BC \times AH = 4 \times 2 = 8$.

刷素养

5. 【证明】

(1) 连接 EF , 如图(1).

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB \parallel CD$,

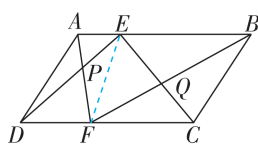
$\therefore \triangle EFC$ 的 FC 边上的高与 $\triangle BCF$ 的 FC 边

上的高相等,

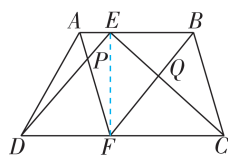
$\therefore S_{\triangle EFC} = S_{\triangle BCF}, \therefore S_{\triangle EFQ} = S_{\triangle BQC} = S_2$.

同理可得 $S_{\triangle EFD} = S_{\triangle ADF}, \therefore S_{\triangle EFP} = S_{\triangle APD} = S_1$,

$\therefore S = S_1 + S_2$.



图(1)



图(2)

(2) 连接 EF , 如图(2). $\therefore AB \parallel CD, \therefore \triangle EFC$

的 FC 边上的高与 $\triangle BCF$ 的 FC 边上的高

相等,

$\therefore S_{\triangle EFC} = S_{\triangle BCF}, \therefore S_{\triangle EFQ} = S_{\triangle BQC} = S_2$.

同理可得 $S_{\triangle EFD} = S_{\triangle ADF}$,

$\therefore S_{\triangle EFP} = S_{\triangle APD} = S_1, \therefore S = S_1 + S_2$.

1.2.2 平行四边形的判定

课时1 平行四边形的判定定理1、2

刷基础

1. C 【解析】

A 选项, 添加 $AB = BC$ 无法证明四

边形 $ABCD$ 为平行四边形, 故不符合题意; B

选项, 添加 $OA = OB$ 无法证明四边形 $ABCD$ 为

平行四边形,故不符合题意;C选项,因为 $AD \parallel BC, AD=BC$,所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形,故符合题意;D选项,添加 $AC \perp BD$ 无法证明四边形 $ABCD$ 为平行四边形,故不符合题意. 故选 C.

2. 【证明】 $\because BE=DF$,

$$\therefore BE+EF=DF+EF, \text{即 } BF=DE.$$

$$\because EA \perp AD, CF \perp BC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BCF = 90^\circ.$$

$$\because AD=BC, DE=BF,$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle EAD \cong \text{Rt} \triangle FCB,$$

$$\therefore \angle CBF = \angle ADE,$$

$$\therefore AD \parallel BC.$$

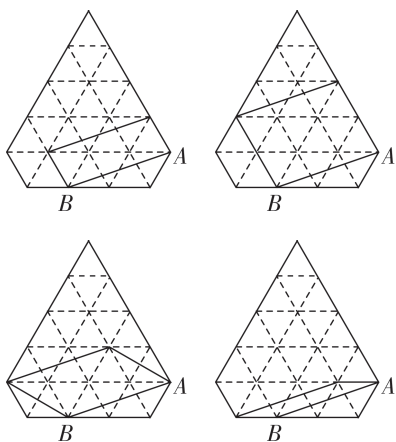
$$\text{又} \because AD=BC,$$

$$\therefore \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形.}$$

3. **A** 【解析】 \because 分别以 A, C 为圆心, BC, AB 长为半径画弧, 两弧交于点 $D, \therefore AD=BC, AB=CD, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 故选 A.

4. **D** 【解析】根据 $a^2+b^2+c^2+d^2=2ac+2bd$, 整理得 $(a-c)^2+(b-d)^2=0, \therefore a=c, b=d, \therefore$ 此四边形是平行四边形. 故选 D.

5. **4** 【解析】如图所示的平行四边形即为所求.



故最多可画出 4 个平行四边形.

6. 【证明】(1) \because 点 A, D, C, B 在同一条直线上,
 $AD=BC$,
 $\therefore AD+DC=BC+CD$,
 即 $AC=BD$.
 $\because AE=BF, CE=DF$,
 $\therefore \triangle ACE \cong \triangle BDF$ (SSS),
 $\therefore \angle A = \angle B$,
 $\therefore AE \parallel FB$.
 (2) $\because AD=BC, AE=BF, \angle A = \angle B$,

易错警示 对于动点问题, 要根据图形, 全面分析所有可能出现的情况, 不能漏解.

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BCF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore DE=CF.$$

$$\text{又} \because CE=DF,$$

$$\therefore \text{四边形 } CFDE \text{ 是平行四边形.}$$

刷易错

7. 2 或 6 【解析】①当点 F 在点 C 的左侧时, 根据题意得 $AE=t \text{ cm}, BF=2t \text{ cm}$, 则 $CF=BC-BF=(6-2t) \text{ cm}$. $\because AG \parallel BC, \therefore$ 当 $AE=CF$ 时, 四边形 $AECF$ 是平行四边形, 即 $t=6-2t$, 解得 $t=2$.
 ②当点 F 在点 C 的右侧时, 根据题意得 $AE=t \text{ cm}, BF=2t \text{ cm}$, 则 $CF=BF-BC=(2t-6) \text{ cm}$. $\because AG \parallel BC, \therefore$ 当 $AE=CF$ 时, 四边形 $AECF$ 是平行四边形, 即 $t=2t-6$, 解得 $t=6$.
 综上所述, 当 $t=2$ 或 6 时, 以 A, C, E, F 为顶点的四边形是平行四边形.
 故答案为 2 或 6.

课时 2 平行四边形的判定定理 3

刷基础

1. **B** 【解析】根据对角线互相平分的四边形是平行四边形可知选项 B 正确, 故选 B.
 2. ①③ 【解析】①两组对角分别相等的四边形是平行四边形, 故①是真命题; ②一组对角相等且一组对边相等的四边形不一定是平行四边形, 故②是假命题; ③一组对边平行且一条对角线平分另一条对角线的四边形是平行四边形, 故③是真命题; ④一组对边相等且一条对角线平分另一条对角线的四边形不一定是平行四边形, 故④是假命题. 综上, 真命题有 ①③. 故答案为 ①③.

思路分析 根据全等三角形的判定和性质得出 $EO=FO$, 再根据平行四边形的判定解答即可.

3. 【证明】 $\because AD \parallel BC, \therefore \angle AEO = \angle CFO, \angle EAO = \angle FCO$. 在 $\triangle AEO$ 与 $\triangle CFO$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEO = \angle CFO, \\ \angle EAO = \angle FCO, \\ AO = CO, \end{cases} \therefore \triangle AEO \cong \triangle CFO \text{ (AAS)},$$

 $\therefore EO=FO, \therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形.
 4. 【解】可以选择 P_1, P_7 , 可得 $\square AP_1CP_7$. 理由:
 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore P_4A=P_4C, P_4B=P_4D$.
 $\because P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ 是对角线 BD 的八等分点, $\therefore BP_1=DP_7$,

$\therefore P_1P_4=P_4P_7, \therefore$ 四边形 AP_1CP_7 是平行四边形. (答案不唯一)

5. **D** 【解析】当三个内角度数依次是 $88^\circ, 108^\circ, 88^\circ$ 时, 第四个角是 76° , 故 A 不符合题意; 两组对角分别相等的四边形是平行四边形, 故 B 不符合题意; 当三个内角度数依次是 $88^\circ, 92^\circ, 92^\circ$ 时, 第四个角是 88° , 而 C 中相等的两个角不是对角, 故 C 不符合题意; D 中满足两组对角分别相等, 因而是平行四边形. 故选 D.

6. 【解】证法不正确.

推出 $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ 后, 由 $\angle ABC = \angle ADC$ 不能直接得出 $\angle 1 = \angle 4, \angle 2 = \angle 3$.

修改如下:

$\because \angle ABC = \angle ADC, \therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4,$

$\therefore \angle 1 = \angle 4, \angle 2 = \angle 3,$

$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC,$

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.



1. **D** 【解析】A 选项, $80^\circ + 110^\circ \neq 180^\circ$, 故 A 选项不符合题意; B 选项, 只有一组对边平行不能确定是平行四边形, 故 B 选项不符合题意; C 选项, 不能判断出四边形是平行四边形, 故 C 选项不符合题意; D 选项, 有一组对边平行且相等的四边形是平行四边形, 故 D 选项符合题意. 故选 D.

2. **C** 【解析】如图,

连接 EF . $\because F$ 是

$\square ABCD$ 的边 CD 上的点, $\therefore BE \parallel$

$CF, \therefore \angle EBF = \angle CFB, \angle BEC = \angle FCE.$

$\because BQ = FQ, \therefore \triangle EBQ \cong \triangle CFQ$ (AAS), $\therefore BE =$

$CF, EQ = CQ, \therefore$ 四边形 $EBCF$ 是平行四边形,

$\therefore S_{\triangle BEF} = 2S_{\triangle BQC} = 16 \text{ cm}^2$. 易得四边形 $ADFE$

是平行四边形, $\therefore S_{\triangle APD} = S_{\triangle EPF} = 2 \text{ cm}^2,$

$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\triangle EPF} + S_{\triangle EBF} = 18 \text{ cm}^2$. 故选 C.

3. **24** 【解析】由作图可得 $AF = AB, AG$ 垂直平分 $BF, \therefore \angle AFB = \angle ABF, BO = FO, AE \perp FB,$
 $\therefore BO = 4, \therefore AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} = 3. \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AF \parallel BC, \therefore \angle AFB = \angle EBF, \therefore \angle ABF = \angle EBF$. 在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle EOB$

刷有所得

两组对边分别平行的四边形是平行四边形, 两组对边分别相等的四边形是平行四边形, 一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

思路分析

根据作图可得 AG 垂直平分 BF , 利用勾股定理计算出 AO 的长, 证明四边形 $ABEF$ 是平行四边形, 根据平行四边形的性质可得答案.

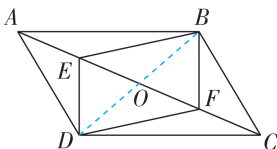
中, $\begin{cases} \angle AOB = \angle EOB, \\ BO = BO, \\ \angle ABO = \angle EBO, \end{cases} \therefore \triangle AOB \cong \triangle EOB$

(ASA), $\therefore AO = EO. \because BO = FO, \therefore$ 四边形 $ABEF$ 是平行四边形, \therefore 四边形 $ABEF$ 的面积

为 $4S_{\triangle AOB} = 4 \times \frac{1}{2} AO \cdot BO = 2 \times 3 \times 4 = 24$. 故答案为 24.

4. (1) 【证明】连接 BD

交 AC 于点 O , 如图所示.



\therefore 四边形 $ABCD$ 是

平行四边形, $\therefore OB = OD, OA = OC.$

$\because AE = CF, \therefore OA - AE = OC - CF,$

即 $OE = OF.$

又 $\because OB = OD,$

\therefore 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

(2) 【解】连接 BD 交 AC 于点 $O. \because DE \perp AC,$
 $DE = 3, DF = 5,$

$\therefore EF = \sqrt{DF^2 - DE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$

\therefore 四边形 $BEDF$ 是平行四边形,

$\therefore OE = \frac{1}{2} EF = 2, BD = 2OD,$

$\therefore OD = \sqrt{DE^2 + OE^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13},$

$\therefore B, D$ 两点之间的距离为 $BD = 2OD = 2\sqrt{13}.$

刷素养

5. (1) 【解】 \because 在“邻余四边形” $ABCD$ 中, $\angle A,$
 $\angle D$ 是钝角,

$\therefore \angle B + \angle C = 90^\circ.$

又 $\because \angle C = 50^\circ, \therefore \angle B = 40^\circ,$

故答案为 40° .

(2) 【证明】连接 $CE,$

如图(1).

$\because DE$ 垂直平分 $AC,$

$\therefore CE = AE, DE \perp AD,$

$AD = \frac{1}{2} AC.$

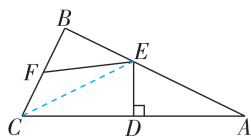
$\because AC = 8\sqrt{5}, \therefore AD = 4\sqrt{5}.$

又 $\because DE = 2\sqrt{5}, \therefore CE = AE = \sqrt{AD^2 + DE^2} = 10.$

又 $\because BC = 8, BE = 6, \therefore BC^2 + BE^2 = 100 = CE^2,$

$\therefore \angle B = 90^\circ, \therefore \angle A + \angle ACF = 90^\circ,$

\therefore 四边形 $AEFC$ 是“邻余四边形”.



图(1)

(3)【解】①四边形 $ADCE$ 是平行四边形.

证明: \because 在“邻余四边形” $ABCD$ 中, $\angle ADC$, $\angle BCD$ 是钝角,

$\therefore \angle A + \angle B = 90^\circ$.

$\because \angle DEC = 90^\circ, CE \perp BC$,

$\therefore \angle DEC = \angle BCE = 90^\circ$,

$\therefore DE \parallel BC$,

$\therefore \angle AED = \angle B$,

$\therefore \angle A + \angle AED = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADE = 90^\circ$,

$\therefore \angle ADE = \angle ECB$.

$\because E$ 是 AB 的中点, $\therefore AE = BE$,

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle ECB$,

$\therefore AD = EC, \angle A = \angle CEB$,

$\therefore AD \parallel EC$,

\therefore 四边形 $ADCE$ 是平行四边形.

② $CD = 2\sqrt{13}$. 如图(2),

过 A 作 $AF \parallel BC$ 交 CE 的
延长线于 F , 连接 DF ,

则 $\angle FAE = \angle B$.

$\because AE = BE, \angle AEF = \angle BEC$,

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle BEC$,

$\therefore AF = BC = 6, EF = EC$.

$\because \angle DAE + \angle B = 90^\circ$,

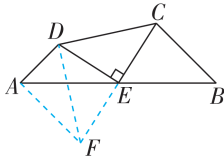
$\therefore \angle DAE + \angle EAF = 90^\circ$, 即 $\angle DAF = 90^\circ$. -----

$\because AD = 4, AF = 6$,

$\therefore DF = \sqrt{AD^2 + AF^2} = 2\sqrt{13}$.

$\because DE \perp CE, EF = EC$,

$\therefore CD = DF = 2\sqrt{13}$.



图(2)

刷有所得

成中心对称的
两个图形全
等,对应线段
相等.

关键点拨

(3)②过 A 作 $AF \parallel BC$ 交 CE 的
延长线于 F , 连接 DF ,
可证 $\triangle AEF \cong$
 $\triangle BEC$, 得出
 $AF = BC, EF =$
 EC , 由“邻余
四边形”知
 $\angle DAE + \angle B =$
 90° , 可求出
 $\angle DAF = 90^\circ$,
再根据勾股定
理求出 $DF =$
 $2\sqrt{13}$, 最后
根据线段的垂
直平分线的性
质求解即可.

$OB', \angle AOB = \angle A'OB', \therefore$ 选项 A, B, C 都不合
题意. $\because \angle ACB$ 与 $\angle C'A'B'$ 不是对应角,
 $\therefore \angle ACB = \angle C'A'B'$ 不成立. 故选 D.

4.2 【解析】 $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 关于点 C 成中
心对称, $\therefore AC = CD, DE = AB = 3. \therefore AE = 5$,
 $\angle D = 90^\circ, \therefore AD = 4, \therefore AC = \frac{1}{2}AD = 2$.

5. 平行且相等 【解析】根据中心对称的性质
知, 对应线段的位置关系是平行(或在同一直
线上), 数量关系是相等. 故答案为平行且
相等.

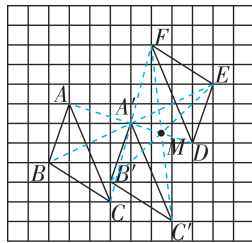
6.9 【解析】 $\because O$ 为长方形的对称中心, \therefore 阴影
部分的面积是长方形面积的一半. \because 长方形
面积为 $6 \times 3 = 18, \therefore$ 阴影部分的面积为 9. 故答
案为 9.

7. 【解】 $\because \triangle DEC$ 与 $\triangle ABC$ 关于点 C 成中心对
称, $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEC, \therefore BC = CE. \because AB = 5$,
 $AC = 2, \angle A = 90^\circ, \therefore BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} =$
 $\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}, \therefore CE = BC = \sqrt{29}$.

8. 【解】(1) 如图所示, $\triangle A'B'C'$ 即为所求.

(2) 如图所示, $\triangle DEF$ 即为所求.

(3) $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle DEF$ 成中心对称,
点 M 的位置如图所示.



课时2 中心对称图形

刷基础

1. A 【解析】若两个阴影三角形关于点 O 成中
心对称, 则将其中一个阴影三角形绕点 O 旋
转 180° 后, 能够与另一个阴影三角形重合, 观
察各选项可知, 只有 A 选项符合. 故选 A.

2. A 【解析】根据中心对称的概念可知, 选项 A
中阴影部分两个三角形关于点 O 成中心对
称. 故选 A.

3. D 【解析】 $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于点 O 成
中心对称, \therefore 点 A 与 A' 是一组对称点, $OB =$



刷基础

1. D 【解析】A 选项, 是轴对称图形, 不是中心
对称图形, 故本选项不符合题意; B 选项, 既不
是轴对称图形, 也不是中心对称图形, 故本选
项不符合题意; C 选项, 既不是轴对称图形, 也
不是中心对称图形, 故本选项不符合题意; D
选项, 既是轴对称图形, 又是中心对称图形,
故本选项符合题意. 故选 D.

2. B 【解析】正三角形、等腰直角三角形是轴对
称图形, 平行四边形是中心对称图形, 正方形
既是轴对称图形又是中心对称图形. 故选 B.

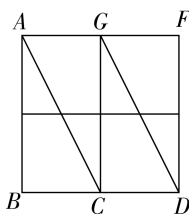
3. 中心对称 【解析】“巳巳如意纹”是中心对称图形,故答案为中心对称.

4. D 【解析】 $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle CDA$ 关于点 O 成中心对称, $\therefore AB=CD, AD=BC, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, \therefore 点 O 就是 $\square ABCD$ 的对称中心. ①点 M 和点 N ,点 B 和点 D 分别关于点 O 对称,正确;②直线 BD 必经过点 O ,正确;③四边形 $ABCD$ 是中心对称图形,正确;④四边形 $DMOC$ 与四边形 $BNOA$ 的面积相等,正确;⑤ $\triangle AOM$ 与 $\triangle CON$ 关于点 O 成中心对称,正确. 其中正确的有 5 个,故选 D.

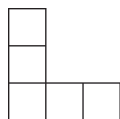
5. 2 【解析】 \because 六边形 $ABCDEF$ 是中心对称图形, \therefore 将六边形绕对称中心旋转 180° 后,边 BC 与边 EF 重合, $\therefore EF=BC=2$.

6. 【解】是中心对称图形. 理由如下:
 $\because AB \parallel CD, \therefore \angle A = \angle C, \angle B = \angle D$.
 在 $\triangle AOB$ 与 $\triangle COD$ 中, $\begin{cases} \angle A = \angle C, \\ AB = CD, \\ \angle B = \angle D, \end{cases}$
 $\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD (ASA),$
 $\therefore OA = OC, OB = OD,$
 且点 D, O, B 共线,点 A, O, C 共线,
 \therefore 此图形是中心对称图形.

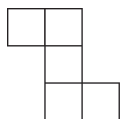
7. 2 【解析】如图,与 $\triangle ABC$ 成中心对称的三角形有 $\triangle CGA, \triangle DFG$,共 2 个. 故答案为 2.



8. 【解】(1) 如图(1)所示(答案不唯一).
 (2) 如图(2)所示.
 (3) 如图(3)所示(答案不唯一).



图(1)



图(2)



图(3)

1.4 三角形的中位线定理

刷基础

1. A 【解析】 \because 点 D, E, F 分别为 AB, AC, BC 的

知识拓展

过中心对称图形的对称中心的直线将中心对称图形分成两个全等的图形.

思路分析

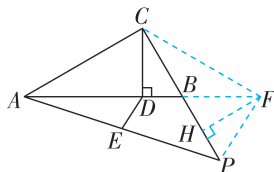
延长 AB 到 F 点,使 $DF = AD$,连接 CF, PF ,作 $FH \perp BC$ 交 CB 延长线于 H ,利用含 30° 度角的直角三角形的性质计算出 $FH = \sqrt{3}BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$,再证明 DE 为 $\triangle AFP$ 的中位线,得到 $DE = \frac{1}{2}FP$,利用垂线段最短,可知当点 P 在点 H 的位置时, FP 的长度取得最小值,于是得到 DE 长度的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

中点, $\therefore DE, EF, DF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,
 $\therefore DE = \frac{1}{2}BC = 3, EF = \frac{1}{2}AB = 2, DF = \frac{1}{2}AC = 4,$
 $\therefore \triangle DEF$ 的周长为 $3+2+4=9$.

2. B 【解析】 $\because DE$ 为 $\triangle ABC$ 的中位线, $\therefore DE \parallel BC, AD = BD, \therefore \angle EDC = \angle DCB. \because AC = BC, AD = BD, \therefore CD \perp AB, \therefore \angle BDC = 90^\circ. \because \angle B = 68^\circ, \therefore \angle DCB = 90^\circ - \angle B = 22^\circ, \therefore \angle EDC = \angle DCB = 22^\circ$,故选 B.

3. B 【解析】在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$,点 F 是边 CA 的中点,则 $BF = \frac{1}{2}AC. \because$ 点 D, E 分别是边 AB, BC 的中点, $\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $\therefore DE = \frac{1}{2}AC, \therefore DE = BF. \because DE + BF = 8, \therefore BF = 4$. 故选 B.

4. B 【解析】延长 AB 到 F 点,使 $DF = AD$,连接 CF, PF ,作 $FH \perp BC$ 交 CB 延长



线于 H ,如图. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\because \angle ACB = 90^\circ, \angle CAB = 30^\circ, \therefore \angle ABC = 60^\circ. \because CD \perp AB, \therefore \angle BCD = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle BCD$ 中, $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}, \therefore BC^2 - BD^2 = 3BD^2 = CD^2, \therefore CD = \sqrt{3}BD = \frac{\sqrt{3}}{2}. \because DF = AD, CD \perp AB, \therefore CD$ 垂直平分 $AF, \therefore AC = CF, \therefore \triangle AFC$ 是等腰三角形, $\therefore \angle CFA = \angle CAB = 30^\circ, \therefore CD = \frac{1}{2}CF$. 在 $\text{Rt} \triangle CDF$ 中, $CF^2 - CD^2 = 3CD^2 = DF^2, \therefore DF = \sqrt{3}CD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = \frac{3}{2}, \therefore BF = DF - BD = 1. \because \angle BCD + \angle CBD = \angle BFH + \angle FBH = 90^\circ, \angle CBD = \angle FBH, \therefore \angle BCD = \angle BFH = 30^\circ, \therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle BFH$ 中, $BH = \frac{1}{2}BF = \frac{1}{2}$. 同理得 $FH = \sqrt{3}BH = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\because DA=DF, AE=EP, \therefore DE$ 为 $\triangle AFP$ 的中位线, $\therefore DE=\frac{1}{2}FP$. 当点 P 在点 H 的位置时, FP 的长度取得最小值, 此时 DE 的长度也取得最小值, 最小值为 $\frac{1}{2}FH=\frac{\sqrt{3}}{4}$. 故选 B.

5. $2\alpha-90^\circ$ 【解析】 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90^\circ$, $\angle C=\alpha$, $\therefore \angle B=90^\circ-\alpha$. $\because AD\perp BC$, $\therefore \angle ADB=90^\circ$. $\because E, F$ 分别为 AB, BC 的中点, $\therefore EF$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $DE=BE=\frac{1}{2}AB$, $\therefore EF\parallel AC$, $\angle EDB=\angle B=90^\circ-\alpha$, $\therefore \angle BFE=\angle C=\alpha$, $\therefore \angle FED=\angle BFE-\angle BDE=\alpha-(90^\circ-\alpha)=2\alpha-90^\circ$. 故答案为 $2\alpha-90^\circ$.

6. (1) 【证明】 $\because \angle ABF=\angle AFB, \therefore AB=AF$. $\because AE$ 平分 $\angle BAC, \therefore AE\perp BF$.
(2) 【解】 $\because AB=AF=9, AE\perp BF, \therefore BE=EF$. \because 点 D 是 BC 边的中点, $\therefore DE$ 是 $\triangle BCF$ 的中位线, $\therefore CF=2DE=4, \therefore AC=AF+CF=9+4=13, \therefore \triangle ABC$ 的周长为 $AB+BC+AC=9+11+13=33$.

7. A 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore BC=AD=4$. \because 点 E, F 分别是 BD, CD 的中点, $\therefore EF$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线, $\therefore EF=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 4=2$. 故选 A.

8. 【解】 $\triangle BMN$ 是等腰直角三角形. 证明如下:
 $\because AC$ 平分 $\angle BAD, \angle BAD=60^\circ, \therefore \angle DAC=\angle BAC=30^\circ$.
在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ABC=90^\circ, M$ 为 AC 的中点, 则 $BM=\frac{1}{2}AC=MA, \therefore \angle MBA=\angle MAB=30^\circ$, $\therefore \angle BMC=\angle MBA+\angle MAB=60^\circ$.
 $\because M, N$ 分别为 AC, CD 的中点, $\therefore MN\parallel AD$, $MN=\frac{1}{2}AD, \therefore \angle CMN=\angle CAD=30^\circ$, $\therefore \angle BMN=30^\circ+60^\circ=90^\circ$.
 $\because AD=AC, \therefore MN=MB, \therefore \triangle BMN$ 是等腰直角三角形.

思路分析

由 $\angle BAC=90^\circ, \angle C=\alpha$, 可得 $\angle B=90^\circ-\alpha$. 由直角三角形中斜边上中线的性质、三角形中位线定理及等边对等角可得 $DE=BE=\frac{1}{2}AB, EF\parallel AC, \angle EDB=\angle B=90^\circ-\alpha$, 则 $\angle BFE=\angle C=\alpha$, 进而可得结论.

关键点拨

(1) 根据等角对等边可得 $AB=AF$, 再利用等腰三角形的三线合一性质即可解答;
(2) 利用等腰三角形的三线合一性质可得 $BE=EF$, 利用三角形中位线定理可得 $CF=2DE=4$, 进行计算即可得解.

正确. $\because FG\parallel AM, \therefore \angle MAP=\angle GFA=30^\circ, \therefore \angle GFA=\angle NAP=30^\circ, \therefore AG=GF$, 故②正确.
 $\because DF\perp AP, \therefore \angle AFE=\angle AFD=90^\circ$.
 $\because \angle MAP=\angle GAF=30^\circ, \therefore \angle AED=\angle ADE=\angle EAD=60^\circ, \therefore \triangle ADE$ 是等边三角形, 故③正确.
 $\because AF\perp DE, \therefore EF=DF$. 又 $\because FG\parallel AM, \therefore GF$ 是 $\triangle AED$ 的中位线, 故④正确. 综上所述, ①②③④正确, 故选 D.

2. A 【解析】 如图, 作 $CH\parallel AB$, 连接 DN 并延长交 CH 于 H , 连接 EH .
 $\because AB\parallel CH, \therefore \angle B=\angle NCH, \angle ECH+\angle A=180^\circ$. $\because \angle A=90^\circ, \therefore \angle ECH=\angle A=90^\circ$. 在 $\triangle DNB$ 和 $\triangle HNC$ 中,
$$\begin{cases} \angle B=\angle NCH, \\ BN=CN, \\ \angle DNB=\angle HNC, \end{cases} \therefore \triangle DNB\cong\triangle HNC(ASA),$$

 $\therefore CH=BD=4, DN=NH$. 在 $Rt\triangle CEH$ 中, $\because CH=4, CE=3, \therefore EH=\sqrt{CH^2+CE^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. $\because DM=ME, DN=NH, \therefore MN=\frac{1}{2}EH=2.5$, 故选 A.

3. $10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是长方形, $\therefore AD=BC, \angle D=\angle C=90^\circ$. $\because M$ 为 CD 的中点, $\therefore DM=CM, \therefore \triangle ADM\cong\triangle BCM(SAS), \therefore AM=BM$. $\because AM\perp MB, \therefore \triangle ABM$ 是等腰直角三角形, $\therefore \angle MAB=\angle MBA=45^\circ, \therefore \angle DAM=\angle CBM=45^\circ, \therefore \angle DAM=\angle DMA=45^\circ, \therefore AD=MD=\frac{1}{2}CD$. \because 长方形 $ABCD$ 的周长为 30, $\therefore CD=10, AD=5$. $\because P, Q$ 分别是 AM, BM 的中点, \therefore 易得长方形 $PSRQ$ 的长和宽之比为 $2:1, PQ=\frac{1}{2}AB=5$, 则宽 PS 为 $\frac{5}{2}$, 同理可得第 3 个长方形的长和宽分别为 $10\times\left(\frac{1}{2}\right)^2$ 和 $5\times\left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots$, 第 n 个长方形的长和宽分别为 $10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
故答案为 $10\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.



刷提升

1. D 【解析】 由作图可知, AP 平分 $\angle MAN$.
 $\because \angle MAN=60^\circ, \therefore \angle MAP=\angle NAP=30^\circ$, 故①

4. 【解】(1) 如图(1), 过点 E 作 $EG \perp BC$ 交 BC 延长线于点 G .

$$\because CD = 2BC + AC, AC = BC = 1, \therefore CD = 3.$$

$$\because \angle ACB = 90^\circ, EG \perp BC,$$

$$\therefore \angle BCD = \angle EGB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle D + \angle CBD = 90^\circ.$$

$$\because BE \perp BD, \therefore \angle EBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBG + \angle CBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBG = \angle D.$$

$$\text{在 } \triangle BCD \text{ 和 } \triangle EGB \text{ 中, } \begin{cases} \angle D = \angle EBG, \\ \angle BCD = \angle EGB = 90^\circ, \\ BD = EB, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle EGB (\text{AAS}),$$

$$\therefore CD = GB = 3, BC = EG = 1,$$

$$\therefore CG = BG - BC = 2,$$

$$\therefore CE = \sqrt{CG^2 + EG^2} = \sqrt{5},$$

故答案为 $\sqrt{5}$.

$$(2) CF = \frac{1}{2}AB.$$

证明: 如图(2), 过点 E 作 $EG \perp BC$ 交 BC 延长线于点 G , 在线段 CG 上截取 $CH = BC$, 连接 EH .

由(1)得 $CD = GB, BC = EG$.

$$\because CD = 2BC + AC,$$

$$\therefore GB = 2BC + AC = 2BC + HG, \therefore AC = HG.$$

在 $\triangle ACB$ 和 $\triangle HGE$ 中,

$$\begin{cases} AC = HG, \\ \angle ACB = \angle HGE = 90^\circ, \\ BC = EG, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACB \cong \triangle HGE (\text{SAS}),$$

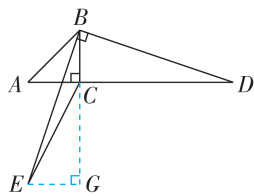
$$\therefore AB = HE.$$

\because 点 F 为 BE 中点, $CH = CB$, 即点 C 为 BH 中点,

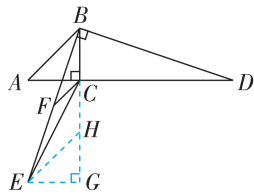
$\therefore CF$ 为 $\triangle BEH$ 的中位线,

$$\therefore CF = \frac{1}{2}EH,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}AB.$$



图(1)



图(2)

思路分析

(1) 已知 M 是 AF 的中点, 添加辅助线, 证明 BM 为 $\triangle ADF$ 的中位线即可得证;

(2) 作辅助线, 推出 BM, ME 分别是 $\triangle ADF, \triangle AFG$ 的中位线, 进而可得出结论;

(3) 作辅助线, 推出 $BM = \frac{1}{2}KF, ME = \frac{1}{2}AN$, 证明 $\triangle ACN \cong \triangle KCF$, 得到 $KF = AN$, 从而证明 $BM = ME$.

思路分析

(1) 过点 E 作 $EG \perp BC$ 交 BC 延长线于点 G , 由 $CD = 2BC + AC, AC = BC = 1$, 可得 $CD = 3$, 证明 $\triangle BCD \cong \triangle EGB (\text{AAS})$, 得到 $BC = 3, EG = 1$, 进而得到 $CG = 2$, 最后利用勾股定理即可求解.

刷素养

5. (1) 【证明】如图(1), 延长 AB 交 CF 于点 D , 则易知 $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形, $\therefore BC = BD$.

$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\therefore AB = BC$,

$\therefore AB = BD$, \therefore 点 B 为线段 AD 的中点.

又 \because 点 M 为线段 AF 的中点, $\therefore BM$ 为 $\triangle ADF$ 的中位线, $\therefore BM \parallel CF$.

(2) 【解】如图(1), 由(1)知 $AB = BC = BD$,

$$\therefore AB = BC = BD = a, \therefore AC = CD = \sqrt{2}a.$$

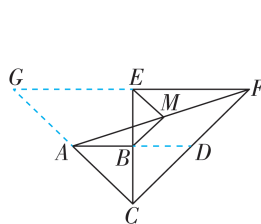
$$\because BM \text{ 是 } \triangle ADF \text{ 的中位线}, \therefore BM = \frac{1}{2}DF.$$

延长 FE 与 CA 相交于点 G , 则易知 $\triangle CEG$ 为等腰直角三角形, $\therefore CE = GE = 2a$. $\because \triangle CEF$ 为等腰直角三角形, $\therefore CE = EF = 2a$, $\therefore GE = EF = 2a, CG = CF = 2\sqrt{2}a$, \therefore 点 E 为 FG 的中点. 又

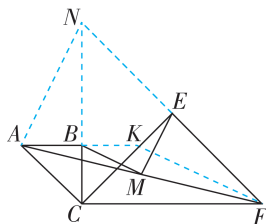
$$\because \text{点 } M \text{ 为 } AF \text{ 的中点}, \therefore ME = \frac{1}{2}AG. \because CG =$$

$$CF = 2\sqrt{2}a, CA = CD = \sqrt{2}a, \therefore AG = DF = \sqrt{2}a,$$

$$\therefore BM = ME = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$



图(1)



图(2)

(3) 【证明】如图(2), 延长 AB 交 CE 于点 K , 连接 KF , 则易知 $\triangle BCK$ 为等腰直角三角形,

$\therefore BC = BK$. $\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AB = BC$, $\therefore AB = BC = BK$, $\therefore AC = CK$, 点 B 为 AK 的中点. 又 \because 点 M 为 AF 的中点, $\therefore BM =$

$$\frac{1}{2}KF. \text{ 延长 } FE \text{ 与 } CB \text{ 相交于点 } N, \text{ 连接 } AN, \text{ 则}$$

易知 $\triangle CEN$ 为等腰直角三角形, $\therefore CE = EN$.

$\because \triangle CEF$ 为等腰直角三角形, $\therefore CE = EF$,

$\therefore CE = EF = EN$, $\therefore CF = CN$, 点 E 为 FN 的中点. 又 \because 点 M 为 AF 的中点, $\therefore ME = \frac{1}{2}AN$.

$$\text{在 } \triangle ACN \text{ 与 } \triangle KCF \text{ 中, } \begin{cases} AC = CK, \\ \angle ACN = \angle KCF = 45^\circ, \\ CN = CF, \end{cases}$$

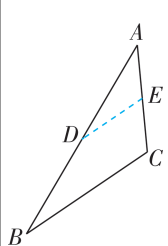
$$\therefore \triangle ACN \cong \triangle KCF (\text{SAS}), \therefore KF = AN, \therefore BM = ME.$$

大招专题1 构造中位线的方法

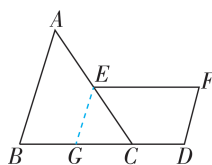
刷难关

大招解读 | 取一边中点构造三角形中位线

根据定义可知,中位线是三角形任意两边中点的连线,因此最为直接的构造方式就是连接两边中点.此种构造方式适用于已知三角形边上中点的情形,若仅已知其中一边的中点,则可以取另一边的中点,进而构造出三角形中位线.

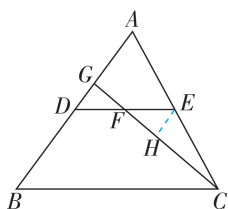
模型特征	操作方法
	条件:已知 D 是 AB 边的中点; 辅助线:取 AC 边的中点 E ,连接 DE ; 结论: $DE \parallel BC, DE = \frac{1}{2}BC$

1. **B** 【解析】如图,取 BC 的中点 G ,连接 EG . $\because E$ 是 AC 的中点, $\therefore EG = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times$



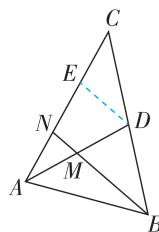
$8 = 4$. $\therefore EF = 2CD, CD = \frac{1}{2}BC, \therefore EF = BC$. 设 $CD = x$, 则 $EF = BC = 2x, \therefore BG = CG = x, \therefore EF = DG = 2x. \because EF \parallel CD, \therefore$ 四边形 $EGDF$ 是平行四边形, $\therefore DF = EG = 4$. 故选 B.

2. **A** 【解析】如图,取 CG



的中点 H ,连接 EH . $\because E$ 是 AC 的中点, $\therefore EH$ 是 $\triangle ACG$ 的中位线, $\therefore EH \parallel AD, \therefore \angle GDF = \angle HEF. \because F$ 是 DE 的中点, $\therefore DF = EF$. 又 $\because \angle DFG = \angle EFH, \therefore \triangle DFG \cong \triangle EFH (ASA), \therefore FG = FH, S_{\triangle EFH} = S_{\triangle DGF}$. 又 $\because FC = FH + HC = FH + GH = FH + FG + FH = 3FH, \therefore S_{\triangle CEF} = 3S_{\triangle EFH} = 3S_{\triangle DGF}, \therefore S_{\triangle DGF} = \frac{1}{3} \times 12 = 4 (cm^2)$. 故选 A.

3. $\frac{4}{3}$ 【解析】如图,取 CN 的中点 E ,连接 DE . $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\therefore BD = CD. \because CE = EN, \therefore DE \parallel BN. \because M$ 是 AD 的中点, \therefore 易知点 N 为 AE 中点, $\therefore AN =$



刷有所得

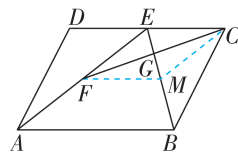
在解题时,如果中点出现在一般三角形中,那么就想能不能构造中位线;如果出现在等腰三角形中,可以看看是不是底边上

思路分析

取 BC 的中点 G ,连接 EG . 根据三角形中位线定理得到 $EG = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}BC$, 可得 $EF = BC$, 然后可得 $EF = DG$, 进而可得结论.

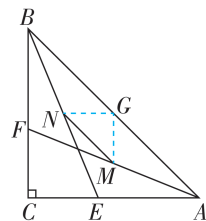
$EN, \therefore AN = EN = CE = \frac{1}{3}AC. \because AC = 4, \therefore AN = \frac{4}{3}$. 故答案为 $\frac{4}{3}$.

- 4.2 【解析】取 BE 的中点 M ,连接 FM, CM , 如图所示. $\because F$ 为 AE 的中点, M



为 BE 的中点, $\therefore MF = \frac{1}{2}AB, FM \parallel AB. \because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore DC = AB, DC \parallel AB. \because E$ 为 CD 的中点, $\therefore CE = \frac{1}{2}DC, \therefore CE = FM, CE \parallel FM, \therefore$ 四边形 $EFMC$ 是平行四边形, $\therefore EG = GM. \because BM = EM = \frac{1}{2}BE = 4, \therefore EG = \frac{1}{2}EM = 2$, 故答案为 2.

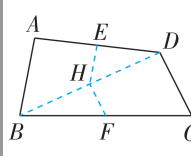
5. 【证明】如图,取 AB 的中点 G ,连接 MG, NG .



$\because M, N$ 分别为 AF, BE 的中点, $\therefore NG = \frac{1}{2}AE, NG \parallel AE, MG = \frac{1}{2}BF, MG \parallel BF. \because CA = CB, CE = CF, AC \perp BC, \therefore AE = BF, NG \perp MG, \therefore MG = NG, \angle MGN = 90^\circ, \therefore \triangle MNG$ 是等腰直角三角形, $\therefore MG^2 + NG^2 = MN^2, \therefore 2NG^2 = MN^2. \because AE = 2NG, \therefore AE^2 = 4NG^2 = 2MN^2$.

大招解读 | 在四边形中取对角线中点构造三角形中位线

已知四边形两对边的中点,则可连接一条对角线并取其中点,此时可出现两条中位线.

模型特征	操作方法
	条件:已知 $AE = ED, BF = FC$; 辅助线:连接对角线 BD ,取 BD 的中点 H ,连接 HE, HF ; 结论: $EH \parallel AB, EH = \frac{1}{2}AB,$ $HF \parallel CD, HF = \frac{1}{2}CD,$ $\angle EHF = \angle ABD + 180^\circ - \angle BDC$

6. **C** 【解析】如图,连接 BD ,取 BD 的中点 G ,连接 MG, NG . \because 点 M, N 分别是 AD, BC 的中点,

$\therefore MG$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线, NG 是 $\triangle BCD$ 的中位线, $\therefore AB = 2MG, DC = 2NG$. $\therefore AB = 4, DC = 2$, $\therefore MG = 2, NG = 1$. 由三角形三边关系得 $MG - NG < MN < MG + NG$, $\therefore 1 < MN < 3$, \therefore ③猜测正确. 故选 C.

7. (1) 【解】如图, 取 BD

的中点 P , 连接 EP, FP . $\because E, F$ 分别是 AD, BC 的中点, $AB = 6, CD = 8$, $\therefore PE \parallel AB$, 且 $PE = \frac{1}{2}AB = 3, PF \parallel CD$, 且 $PF = \frac{1}{2}CD = 4$. 又 $\because \angle ABD = 30^\circ, \angle BDC = 120^\circ, \therefore \angle EPD = \angle ABD = 30^\circ, \angle DPF = 180^\circ - \angle BDC = 60^\circ$, $\therefore \angle EPF = \angle EPD + \angle DPF = 90^\circ$.

在 $\text{Rt} \triangle EPF$ 中, 由勾股定理得 $EF = \sqrt{EP^2 + PF^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

(2) 【证明】如图, $\because E, F$ 分别是 AD, BC 的中点, $\therefore PE \parallel AB$, 且 $PE = \frac{1}{2}AB, PF \parallel CD$, 且 $PF = \frac{1}{2}CD$, $\therefore \angle EPD = \angle ABD, \angle DPF = 180^\circ - \angle BDC$. $\because \angle BDC - \angle ABD = 90^\circ, \therefore \angle BDC = 90^\circ + \angle ABD, \therefore \angle EPF = \angle EPD + \angle DPF = \angle ABD + 180^\circ - \angle BDC = \angle ABD + 180^\circ - (90^\circ + \angle ABD) = 90^\circ, \therefore PE^2 + PF^2 = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 + \left(\frac{1}{2}CD\right)^2 = EF^2, \therefore AB^2 + CD^2 = 4EF^2$.

大招解读 | 倍长线段构造三角形中位线

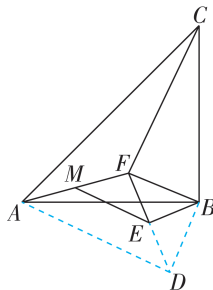
倍长法是构造三角形中位线的常用方法, 即通过作延长线, 取倍长线段构造中点. 该方法适用于只知道一边中点的情形, 同时出现“类中位线”的半缺三角形, 此时可以延长线段, 设定中点, 构建出中位线对应的三角形.

模型特征	操作方法
	条件: 已知 D 是 AB 边的中点; 辅助线: 延长 AC 到 E , 使 $CE = AC$, 连接 BE (也可倍长 BC); 结论: $DC \parallel BE, DC = \frac{1}{2}BE$

思路分析

连接 BD , 取 BD 的中点 G , 连接 MG, NG . 根据三角形的中位线平行于第三边并且等于第三边的一半可得 $AB = 2MG, DC = 2NG$, 再根据三角形的三边关系得出 $MG - NG < MN < MG + NG$, 即可得出结果.

8. 【证明】如图, 延长 FE 到 D , 使 $DE = EF$, 连接 AD, BD .



$\because \triangle BEF$ 为等腰直角三角形, $\angle BEF = 90^\circ$, $\therefore \angle BFE = 45^\circ, BE \perp DF, \therefore BE$ 垂直平分 DF , $\therefore BD = BF, \therefore \angle BDE = 45^\circ, \therefore \angle DBF = 90^\circ$, $\therefore \triangle BDF$ 是等腰直角三角形. $\because \angle CBF + \angle ABF = \angle ABC = 90^\circ, \angle ABD + \angle ABF = \angle DBF = 90^\circ, \therefore \angle CBF = \angle ABD$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBF$ 中, $\begin{cases} AB = BC, \\ \angle ABD = \angle CBF, \\ BD = BF, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBF (\text{SAS}), \therefore AD = CF$.

$\because M$ 为 AF 的中点, $DE = EF, \therefore ME$ 是 $\triangle ADF$ 的中位线, $\therefore ME = \frac{1}{2}AD, \therefore ME = \frac{1}{2}CF$.

思路分析

延长 FE 到 D , 使 $DE = EF$, 连接 AD, BD . 判断出 BE 垂直平分 DF , 可得 $BD = BF$, 再求出 $\angle CBF = \angle ABD$, 利用“边角边”证明 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBF$ 全等, 根据全等三角形对应边相等可得 $AD = CF$, 再根据三角形的中位线等于第三边的一半可得 $ME = \frac{1}{2}AD$, 从而得到 $ME = \frac{1}{2}CF$.

9. 【解】(1) $\because CA = CB, \angle ACB = 90^\circ, AD = BD$, $\therefore CD \perp AB, \angle A = \angle B = 45^\circ, \angle ACD = \angle BCD = 45^\circ, \therefore CD = AD = DB$.

$\because \triangle CDE$ 是等腰直角三角形, CD 为斜边, $\therefore \angle DCE = 45^\circ, \therefore$ 点 E 在线段 CB 上.

$\because DE \perp BC, \therefore \angle EDB = \angle B = 45^\circ, \therefore DE = BE$. $\because DH = HB, \therefore EH \perp DB, \angle DEH = \angle BEH = 45^\circ$, $\therefore EH = DH = HB = \frac{1}{2}DB = \frac{1}{2}AD$. 故答案为 $EH = \frac{1}{2}AD, EH \perp AD$.

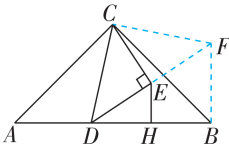
(2) 结论仍然成立. 证明:

如图, 延长 DE 到 F , 使得 $EF = DE$, 连接 CF, BF .

$\because DE = EF, CE \perp DF$, $\triangle CDE$ 是等腰直角三角形, $\therefore CD = CF, \angle CDE = \angle DCE = 45^\circ, \therefore \angle CDF = \angle CFD = 45^\circ, \angle ECF = \angle ECD = 45^\circ, \therefore \angle ACB = \angle DCF = 90^\circ, \therefore \angle ACD = \angle BCF$.

又 $\because CA = CB, \therefore \triangle ACD \cong \triangle BCF (\text{SAS}), \therefore AD = BF, \angle A = \angle CBF = 45^\circ$.

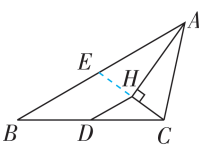
$\because \angle ABC = 45^\circ, \therefore \angle ABF = 90^\circ, \therefore BF \perp AB$.



$\because DE = EF, DH = HB, \therefore EH = \frac{1}{2}BF, EH \parallel BF,$
 $\therefore EH \perp AD, EH = \frac{1}{2}AD.$

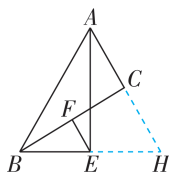
大招解读 | 角平分线与垂线组合构造三角形中位线

当只知道一个中点,且给出“角平分线+垂直”时,可以通过延长线段构造全等三角形,确定另一个中点,进而构造三角形的中位线.

模型特征	操作方法
	条件:已知 D 是 BC 边的中点, AH 平分 $\angle BAC$, $AH \perp BC$; 辅助线:延长 CH 交 AB 于点 E ; 结论: $DH \parallel AB, DH = \frac{1}{2}(AB - AC)$

10. (1) 【证明】 $\because AE$ 平分 $\angle BAC, \therefore \angle BAE = \angle DAE. \because BE \perp AE, \therefore \angle AEB = \angle AED = 90^\circ.$
 在 $\triangle AEB$ 和 $\triangle AED$ 中, $\begin{cases} \angle BAE = \angle DAE, \\ AE = AE, \\ \angle AEB = \angle AED, \end{cases}$
 $\therefore \triangle AEB \cong \triangle AED (ASA), \therefore BE = ED, AD = AB.$
 $\because BF = FC, \therefore EF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(AC - AD) = \frac{1}{2}(AC - AB).$

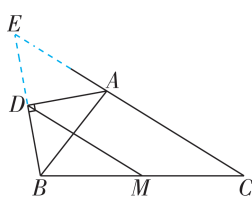
(2) 【解】如图,分别延长 BE, AC 交于点 H . 同(1)可证明 $\triangle ABE \cong \triangle AHE,$
 $\therefore BE = EH, AH = AB = 9.$



$\because BE = EH, BF = FC, \therefore EF = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{2}(AH - AC) = \frac{1}{2} \times (9 - 5) = 2.$

11. 7.5 【解析】如图,延

长 BD 交 CA 的延长线于 $E. \because AD$ 为 $\angle BAE$ 的平分线, $BD \perp AD,$
 $\therefore \angle EAD = \angle BAD,$



$\angle ADE = \angle ADB = 90^\circ. \because AD = AD, \therefore \triangle ADE \cong \triangle ADB (ASA), \therefore BD = DE, AB = AE = 6, \therefore CE =$

思路分析

首先证明 $\triangle ADE \cong \triangle ADB,$ 得到 $AB = AE,$ 进而求出 CE 的长,再根据中位线的性质即可求解.

刷有所得

有一个角是直角的平行四边形叫作矩形.

归纳总结

矩形的对角线把矩形分成四个等腰三角形,并且分成的四个等腰三角形的面积相等,如果对角线相交所成的锐角为 $60^\circ,$ 那么四个小三角形中有两个全等的等边三角形.

易错警示

题目未明确对应线段的长度,注意画图分两种情况讨论求解.

$AC + AE = 9 + 6 = 15.$ 又 $\because M$ 为 BC 的中点, $\therefore DM$ 是 $\triangle BCE$ 的中位线, $\therefore MD = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2} \times 15 = 7.5.$ 故答案为 7.5.

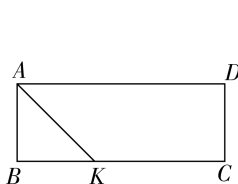
1.5 矩形

1.5.1 矩形的性质

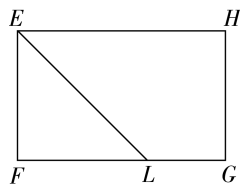


刷基础

1. B 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore \angle A = \angle C. \because \angle A + \angle C = 180^\circ, \therefore \angle A = \angle C = 90^\circ, \therefore \square ABCD$ 是矩形. 故选 B.
2. D 【解析】A 选项,矩形的对角线不一定互相垂直,本选项错误;B 选项,矩形的对角线不一定平分一组对角,本选项错误;C 选项,矩形的邻边不一定相等,本选项错误;D 选项,矩形的邻边互相垂直,本选项正确. 故选 D.
3. A 【解析】 $\because M, N$ 分别为 BC, OC 的中点, $\therefore BO = 2MN = 8. \because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AC = BD = 2BO = 16.$ 故选 A.
4. C 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AD \parallel BC, \therefore \angle AEB = \angle EBC. \because \triangle EBC$ 是等边三角形, $\therefore \angle EBC = 60^\circ, \therefore \angle AEB = 60^\circ,$ 故选 C.
5. C 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore \angle BAD = 90^\circ, AO = BO = OD. \because \angle AOB = 120^\circ, \therefore \angle OAB = \angle OBA = 30^\circ, \therefore BD = 2AD = 4, \therefore AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}, \therefore$ 矩形 $ABCD$ 的面积是 $AB \times AD = 4\sqrt{3},$ 故选 C.
6. A 【解析】如图(1). $\because AK$ 平分 $\angle BAD, \therefore \angle BAK = \angle DAK. \because AD \parallel BC, \therefore \angle DAK = \angle BKA, \therefore \angle BAK = \angle BKA, \therefore BK = BA = 3 \text{ cm}, \therefore$ 矩形 $ABCD$ 的周长为 $(3 + 5 + 3) \times 2 = 22(\text{cm}).$



图(1)



图(2)

如图(2). $\because EL$ 平分 $\angle FEH, \therefore \angle FEL = \angle HEL. \because EH \parallel FG, \therefore \angle HEL = \angle FLE, \therefore \angle FEL = \angle FLE, \therefore FE = FL = 5 \text{ cm}, \therefore$ 矩形 $FEHG$ 的周长为 $(5 + 3 + 5) \times 2 = 26(\text{cm}).$ 综上所述,矩形的周长为 22 cm 或 26 cm. 故选 A.

7. b d 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ ① $AB = CD$, $\angle ABC = \angle DCB = 90^\circ$. 又 ∵ ② $BC = CB$, ∴ $\triangle ABC \cong \triangle DCB$, ∴ $AC = BD$.

8. 8+2√13 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $AB = CD = 6$, $BC = AD = 8$, ∴ $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$. ∵ O 是矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点, ∴ $OB = \frac{1}{2}AC =$

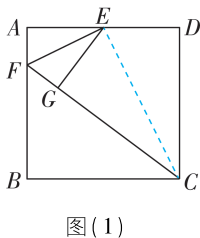
5. ∵ E 为 AD 的中点, ∴ $AE = \frac{1}{2}AD = 4$, OE 为 $\triangle ACD$ 的中位线, ∴ $OE = \frac{1}{2}CD = 3$, $BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$, ∴ $\triangle BOE$ 的周长为 $OB + OE + BE = 5 + 3 + 2\sqrt{13} = 8 + 2\sqrt{13}$, 故答案为 $8 + 2\sqrt{13}$.

刷易错

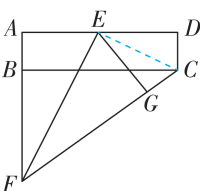
9. 4 或 1 【解析】根据题意分两种情况讨论.

① 当点 F 在 AB 边上时, 如图(1), 连接 CE . 在矩形 $ABCD$ 中, $\angle A = \angle D = \angle B = 90^\circ$, $AD = BC = 4$. ∵ E 为 AD 的中点, ∴ $AE = DE = 2$. ∵ EF 平分 $\angle AEG$, $EG \perp CF$, $EA \perp AF$, ∴ $AF = GF$. 在 $Rt \triangle AEF$ 和 $Rt \triangle GEF$ 中, $\begin{cases} EF = EF, \\ AF = GF, \end{cases}$ ∴ $Rt \triangle AEF \cong Rt \triangle GEF$ (HL), ∴ $AE = EG = 2$, ∴ $EG = ED$. 在 $Rt \triangle CDE$ 和 $Rt \triangle CGE$ 中, $\begin{cases} CE = CE, \\ ED = EG, \end{cases}$ ∴ $Rt \triangle CDE \cong Rt \triangle CGE$ (HL), ∴ $CD = CG$. 在 $Rt \triangle BCF$ 中, $BC = 4$, $BF = 3$, ∴ $CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = 5$. 设 $AF = FG = x$, 则 $CG = CF - FG = 5 - x$. ∵ $CD = AB = AF + BF = x + 3$, ∴ $x + 3 = 5 - x$, 解得 $x = 1$, ∴ $AB = x + 3 = 4$.

② 当点 F 在 AB 的延长线上时, 如图(2), 连接 EC . 同理可得 $AF = FG$, $CG = CD$, $CF = 5$. 设 $AF = FG = y$, 则 $CG = CF - FG = 5 - y$, $CD = AB = AF - BF = y - 3$, ∴ $y - 3 = 5 - y$, 解得 $y = 4$, ∴ $AB = y - 3 = 1$. 综上所述, AB 的长为 4 或 1. 故答案为 4 或 1.



图(1)



图(2)

易错警示

点 F 在射线 AB 上, 分点 F 在 AB 边上和点 F 在 AB 的延长线上两种情况. 分别画出两种情况的示意图, 根据矩形的性质、全等三角形的判定与性质、角平分线的性质及勾股定理等解决问题.

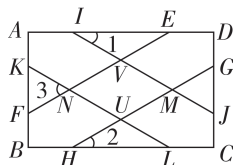
思路分析

由矩形的性质、折叠的性质和平行线的性质可得 $\angle B = \angle B' = \angle B'MD + \angle B'EA = 90^\circ$, 进而得 $\angle B'EA = 40^\circ$, 从而得到 $\angle B'EB = 140^\circ$, 最后由折叠的性质可得 $\angle BEF = 70^\circ$.



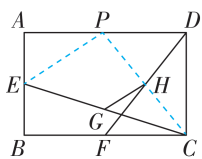
刷提升

1. D 【解析】如图, ∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形, ∴ $\angle D = \angle C = 90^\circ$. ∵ $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$, ∴ $\angle HGC = \angle IJD = 60^\circ$, ∴ $\angle GMJ = 60^\circ$, ∴ $\angle VMU = 60^\circ$. ∵ $IJ \parallel KL$, $EF \parallel GH$, ∴ 四边形 $NUMV$ 是平行四边形, ∴ $\angle VNU = \angle VMU = 60^\circ$, ∴ $\angle 3 = \angle VNU = 60^\circ$. 故选 D.



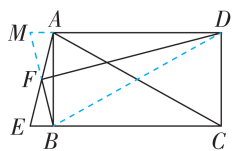
2. B 【解析】设 $AG = a$, $GD = b$, $AE = c$, $EB = d$. 易得 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD}$, $S_{\triangle AEP} = S_{\triangle AGP}$, $S_{\triangle CFP} = S_{\triangle CHP}$, ∴ $S_{\text{矩形}BHPE} = S_{\text{矩形}DGPF}$, 即 $ad = bc$, 则 $S = (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$, $S_{\text{空白}} = \frac{1}{2}a(c + d) + \frac{1}{2}d(a + b) = \frac{1}{2}(ac + ad + ad + bd) = \frac{1}{2}(ac + ad + bc + bd) = \frac{1}{2}S$, ∴ $S_{\text{阴影}} = S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S$, 故选 B.

3. B 【解析】如图, 连接 CH 并延长交 AD 于点 P , 连接 PE . ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ $\angle A = 90^\circ$, $AD \parallel BC$. ∵ E, F 分别是边 AB, BC 的中点, $AB = 6$, $BC = 8$, ∴ $AE = \frac{1}{2}AB = 3$, $CF = \frac{1}{2}BC = 4$. ∵ $AD \parallel BC$, ∴ $\angle DPH = \angle FCH$. 在 $\triangle PDH$ 和 $\triangle CFH$ 中, $\angle DPH = \angle FCH$, $\angle DHP = \angle FHC$, $DH = FH$, ∴ $\triangle PDH \cong \triangle CFH$ (AAS), ∴ $PD = CF = 4$, $CH = PH$, ∴ $AP = AD - PD = 4$, ∴ $PE = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. ∵ 点 G 是 EC 的中点, ∴ $GH = \frac{1}{2}PE = \frac{5}{2}$.



4. 70° 【解析】依题意, 得 $\angle B = \angle B' = \angle B'MD + \angle B'EA = 90^\circ$, 所以 $\angle B'EA = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$, 所以 $\angle B'EB = 180^\circ - \angle B'EA = 140^\circ$. 又因为 $\angle B'EF = \angle BEF$, 所以 $\angle BEF = 70^\circ$.

5. 【证明】如图, 延长 BF , 交 DA 的延长线于点 M , 连接 BD . ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ $MD \parallel$



$BC, \therefore \angle AMF = \angle EBF, \angle E = \angle MAF. \because F$ 是 AE 的中点, $\therefore FA = FE$. 在 $\triangle AFM$ 和 $\triangle EFB$ 中, $\angle M = \angle FBE, \angle MAF = \angle E, AF = EF, \therefore \triangle AFM \cong \triangle EFB (AAS), \therefore AM = BE, FB = FM. \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AC = BD, AD = BC, \therefore BC + BE = AD + AM$, 即 $CE = MD. \therefore CE = AC, \therefore MD = BD. \therefore FB = FM, \therefore BF \perp DF$.

刷素养

6. 【解】 (1) ① \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AD = BC = 15, \angle A = \angle D = 90^\circ, AB = CD = 12$. 由折叠可得 $CF = CB = 15, EF = BE$, $\therefore DF = \sqrt{CF^2 - CD^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$, $\therefore AF = AD - DF = 15 - 9 = 6$. 设 $AE = a$, 则 $BE = EF = 12 - a$. 在 $Rt \triangle AEF$ 中, $AE^2 + AF^2 = EF^2$, 即 $a^2 + 6^2 = (12 - a)^2$, 解得 $a = \frac{9}{2}$, 即 $AE = \frac{9}{2}$.

② $BN = AB$. 理由: $\because S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2}CF \cdot BN = \frac{1}{2}BC \cdot AB, CF = CB, \therefore BN = AB$. (2) $QD = 5. \because$ 点 F 落在 AD 上方, $\angle PFQ = 90^\circ, \therefore \angle APF > 90^\circ$. $\because \triangle APF$ 为等腰三角形, $\therefore AP = PF$. $\because \angle EAP = \angle QFP = 90^\circ, \angle EPA = \angle QPF, \therefore \triangle EPA \cong \triangle QPF (ASA), \therefore EP = QP, EA = QF$. 设 $AE = x, AP = y$, 则 $AE = FQ = x, AP = PF = y, EB = 12 - x, EP = QP = 12 - x - y, QD = 15 - y - (12 - x - y) = 3 + x, QC = 15 - x$. 在 $Rt \triangle QDC$ 中, $QC^2 = QD^2 + DC^2$, 即 $(15 - x)^2 = (3 + x)^2 + 12^2$, 解得 $x = 2$, 则 $QD = 3 + 2 = 5$.

1.5.2 矩形的判定

刷基础

1. C 【解析】 A 选项, 一组邻边相等的平行四边形不一定是矩形; B 选项, 对角线互相垂直的平行四边形不一定是矩形; C 选项, 有一个角是直角的平行四边形是矩形; D 选项, 对角线平分一组对角的平行四边形不一定是矩形. 故选 C.

易错警示 2. ①互相平分 ②矩形 ③平行四边形 ④BD ⑤相等 ⑥AC 【解析】延长 BO 至点 D , 使得 $OD = OB$, 连接 $AD, CD. \because OA = OC, OB = OD, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形 (对角线互相平分的四边形是平行四边形). $\because \angle ABC = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 为矩形 (一个角是直角的平行四边形是矩形), $\therefore AC = BD$ (矩形的对角线相等), $\therefore BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$. 故答案为 ①互相平分; ②矩形; ③平行四边形; ④BD; ⑤相等; ⑥AC.

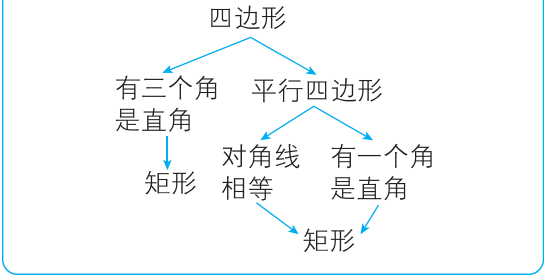
思路分析

(1) ①根据矩形的性质得 $AD = BC = 15, \angle A = \angle D = 90^\circ, AB = CD = 12$, 由折叠得 $CF = CB = 15, EF = BE$, 利用勾股定理求得 DF 的长, 设 $AE = a$, 则 $BE = EF = 12 - a$, 再次利用勾股定理即可求得 AE 的长. ②根据三角形的面积公式即可得到结论.

3. B 【解析】 如图, 连接 $CM. \because \angle ACB = 90^\circ, ME \perp AC, MF \perp BC, \therefore \angle MEC = \angle MFC = \angle ECF = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $MECF$ 是矩形, $\therefore MC = EF. \because \angle ACB = 90^\circ, AC = 3, BC = 4, \therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5$. 当 $CM \perp AB$ 时, CM 取得最小值, 即 EF 取得最小值, 此时 $\frac{1}{2} \times AB \times CM = \frac{1}{2} \times AC \times BC, \therefore CM = \frac{AC \times BC}{AB} = \frac{3 \times 4}{5} = 2.4, \therefore EF = CM = 2.4$, 即 EF 的最小值是 2.4. 故选 B.

4. C 【解析】 依据是对角线相等的平行四边形是矩形, 故 C 选项符合题意. 故选 C.

5. 归纳总结 矩形的判定思路



(1) 【证明】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC, OB = OD = \frac{1}{2}BD$. $\because \angle 1 = \angle 2, \therefore OB = OC, \therefore OA = OB = OC = OD$, 即 $AC = BD, \therefore \square ABCD$ 是矩形. (2) 【解】 $\because OA = OB, \angle AOB = 60^\circ, \therefore \triangle AOB$ 是等边三角形, $\therefore AB = OA = OB = 6, \therefore AC = 12$.

$\because \square ABCD$ 是矩形, $\therefore \angle ABC = 90^\circ$.
在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $AC = 12, AB = 6$,
 $\therefore BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}$.

刷易错

6. B 【解析】A 选项, 四个角相等的四边形是矩形, 该说法正确, 不符合题意; B 选项, 一个内角是直角且对角线相等的四边形不一定是矩形, 该说法错误, 符合题意; C 选项, 对角线相等的平行四边形是矩形, 该说法正确, 不符合题意; D 选项, 对角线互相平分且相等的四边形是矩形, 该说法正确, 不符合题意. 故选 B.

刷提升

1. A 【解析】甲: $\because AB = AC, AD \perp BC, \therefore \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC, \angle ADC = 90^\circ. \therefore AE$ 平分 $\angle CAN$,
 $\therefore \angle CAE = \frac{1}{2} \angle CAN, \therefore \angle CAD + \angle CAE = \frac{1}{2} (\angle BAC + \angle CAN) = 90^\circ$, 即 $\angle DAE = 90^\circ$.
 $\because CE \perp AE, \therefore \angle E = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $ADCE$ 是矩形, \therefore 甲的作业正确. 乙: 由题意知 $AD = BE, AE = BD, \therefore$ 四边形 $ADBE$ 是平行四边形.
 $\because AD \perp BC, \therefore \angle ADB = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $ADBE$ 是矩形, \therefore 乙的作业正确. 故选 A.

2. D 【解析】如图, 过点 B 作 $BF \perp ON$, 过点 C 作 $CF \perp OM, BF$ 与 CF 相交于点 F , 在 CF 上截取 CK , 使 $CK = OA$, 连接 $BK, AK. \because \angle MON = 90^\circ, \therefore \angle OBF = \angle OCF = \angle MON = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $OBFC$ 是矩形, $\therefore OC = BF, OB = CF, \angle F = 90^\circ. \because AC = OB, CK = OA, \angle AOB = \angle KCA = 90^\circ, \therefore \triangle AOB \cong \triangle KCA$ (SAS), $\therefore \angle OBA = \angle CAK, AB = AK. \because \angle OAB + \angle OBA = 90^\circ, \therefore \angle OAB + \angle CAK = 90^\circ, \therefore \angle BAK = 90^\circ, \therefore \triangle ABK$ 是等腰直角三角形, $\therefore \angle ABK = 45^\circ. \because OB = CF, \therefore OD + BD = CK + KF. \because BD = OA = CK, \therefore OD = KF. \because OC = BF, \angle DOC = \angle F = 90^\circ, \therefore \triangle COD \cong \triangle BFK$ (SAS), $\therefore \angle OCD = \angle FBK. \because \angle OBA + \angle FBK = \angle OBF - \angle ABK = 45^\circ, \therefore \angle OBA + \angle OCD = 45^\circ$. 故选 D.

易错警示

对角线相等的四边形不一定是矩形, 对角线相等的平行四边形才是矩形. 可以利用对角线相等结合平行四边形的几种判定定理来判定矩形.

思路分析

过点 B 作 $BF \perp ON$, 过点 C 作 $CF \perp OM, BF$ 与 CF 相交于点 F , 在 CF 上截取 CK , 使 $CK = OA$, 连接 BK, AK , 得出四边形 $OBFC$ 是矩形. 由矩形的性质进一步证明 $\triangle AOB \cong \triangle KCA$ (SAS), 由全等三角形的性质进一步推出 $\triangle ABK$ 是等腰直角三角形. 由等腰直角三角形的性质得出 $\angle ABK = 45^\circ$, 再证明 $\triangle COD \cong \triangle BFK$ (SAS), 由全等三角形的性质得出 $\angle OCD = \angle FBK$, 进而可得出答案.

3. (1) 【证明】 $\because O$ 为 AD 的中点, $\therefore AO = DO$.

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB \parallel CD, \therefore \angle BAO = \angle EDO$.

又 $\because \angle AOB = \angle DOE$,

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle DOE$ (ASA), $\therefore AB = DE$.

又 $\because AB \parallel DE$,

\therefore 四边形 $ABDE$ 是平行四边形.

$\because \angle BDC = 90^\circ, \therefore \angle BDE = 90^\circ$,

\therefore 平行四边形 $ABDE$ 是矩形.

(2) 【解】 如图, 过点 O 作 $OF \perp DE$ 于点 F .

\because 四边形 $ABDE$ 是矩形,

$\therefore DE = AB = 4, OB = OE =$

$\frac{1}{2} BE, AD = BE$.

又 $\because OD = \frac{1}{2} AD$,

$\therefore OD = OE$.

$\because OF \perp DE, \therefore DF = EF = \frac{1}{2} DE = 2$,

$\therefore OF$ 为 $\triangle BDE$ 的中位线,

$\therefore OF = \frac{1}{2} BD = \sqrt{5}$.

\because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore CD = AB = 4$,

$\therefore CF = CD + DF = 6$.

在 $\text{Rt} \triangle OCF$ 中, 由勾股定理得 $OC =$

$\sqrt{OF^2 + CF^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 6^2} = \sqrt{41}$,

即 OC 的长为 $\sqrt{41}$.

刷素养

4. (1) 【证明】 $\because AB = AC, AD$ 是 $\triangle ABC$ 的一条角平分线, $\therefore BD = CD, AD \perp BC, \therefore \angle ABC = \angle ACB, \therefore \angle BAM = \angle ABC + \angle ACB = 2\angle ABC$.

$\because AN$ 平分 $\angle BAM, \therefore \angle MAN = \angle BAN = \frac{1}{2} \angle BAM$,

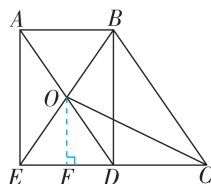
$\therefore \angle BAN = \angle ABC, \therefore AN \parallel BC, \therefore \angle DAE + \angle ADB = 180^\circ$.

$\because \angle ADB = 90^\circ, \therefore \angle DAE = 90^\circ$.

又 $\because BE \perp AN, \therefore \angle AEB = \angle ADB = \angle DAE = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $ADBE$ 是矩形.

【解】 (2) 如图(1), 延长 AF, EG 交于点 K .

在矩形 $ADBE$ 中, $BE = AD = 4, AE = BD = 3$,



$BE \parallel AD$, $\angle ADB = \angle DAE = 90^\circ$,

$$\therefore AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 5,$$

$$\therefore AF = AB = 5.$$

$\because BE \parallel AD$, $\therefore \angle BEG = \angle K$,
 $\angle EBG = \angle KFG$.

$\because G$ 为 BF 的中点,

$$\therefore BG = GF,$$

$$\therefore \triangle BEG \cong \triangle FKG (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = FK = 4, EG = GK, \therefore AK = 9,$$

$$\therefore EK = \sqrt{AE^2 + AK^2} = 3\sqrt{10},$$

$$\therefore EG = \frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

(3) 如图(2), 取 AC 的中点 J , 连接 CF, JH .

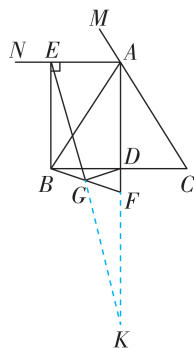
\because 点 J 是 AC 的中点, 点 H 是 CQ 的中点, $\therefore JH$ 是 $\triangle ACQ$ 的中位线, $\therefore JH = \frac{1}{2}AQ, JH \parallel$

AQ , \therefore 点 H 在 JH 上移动. 当

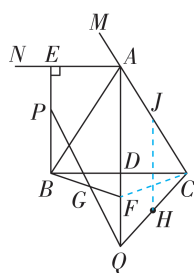
点 P 在点 E 处时, 由(2)可知

$AQ = 9$, 当点 P 在点 B 处时, $AQ = AF = 5$,

\therefore 点 H 经过的路径长为 $\frac{1}{2} \times (9 - 5) = 2$.



图(1)



图(2)

一题多解

连接 AC , 由菱形的性质可得 $DA = DC$, 根据等边对等角得出 $\angle DAC = \angle DCA$, 再证明 $\triangle ACE \cong \triangle CAF (\text{SAS})$ 即可得出结论.

$\sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$, $\therefore AC = 2$, $\therefore AB = AC = BC = 2$, $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle ABC = 60^\circ$. $\because AD \parallel BC$, $\therefore \angle BAD = 120^\circ$, \therefore 两邻角的度数比为 $2:1$ 或 $1:2$. 故选 D.

5. D 【解析】如图, 连接

BD 与 AC 交于点 O .

\because 四边形 $ABCD$ 是菱

形, $\therefore AB \parallel CD, AB = AD$,

$$AC \perp BD, AO = OC = \frac{1}{2}AC. \because \angle ADC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ. \because AB = AD, AC \perp$$

$$BD, \therefore \angle OAB = \frac{1}{2} \angle BAD = 30^\circ, \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\therefore OB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}, \therefore AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} =$$

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore AC = 2AO = \sqrt{3}. \text{ 故选 D.}$$

6. 【证明】 \because 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AD = CD$.

$$\because AF = CE, \therefore AD - AF = CD - CE, \therefore DF = DE.$$

$$\text{在 } \triangle ADE \text{ 和 } \triangle CDF \text{ 中, } \begin{cases} AD = CD, \\ \angle D = \angle D, \\ DE = DF, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF (\text{SAS}), \therefore AE = CF.$$

7. C 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是菱形, $BD = 4$,

$$\therefore \angle AOD = 90^\circ, OD = OB = \frac{1}{2}BD = 2, OA = OC =$$

$$\frac{1}{2}AC. \because \angle DAC = 30^\circ, \therefore AD = 2OD = 4. \text{ 在}$$

$\text{Rt} \triangle AOD$ 中, 根据勾股定理得 $AO =$

$$\sqrt{AD^2 - OD^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}, \therefore AC = 2AO =$$

$$4\sqrt{3}, \therefore S_{\text{菱形}ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 =$$

$$8\sqrt{3}. \text{ 故选 C.}$$

8. (1) 【证明】 \because 点 F 是 AB 的中点,

$$\therefore AF = BF.$$

$$\because EF = OF,$$

\therefore 四边形 $AOBE$ 是平行四边形.

\because 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O ,

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

\therefore 平行四边形 $AOBE$ 是矩形.

(2) 【解】 \because 四边形 $AOBE$ 是矩形,

$$\therefore AF = BF = OF = EF, \angle OAE = 90^\circ.$$

1.6 菱形

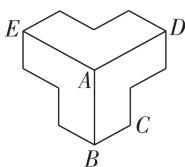
1.6.1 菱形的性质

刷基础

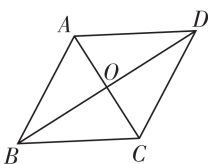
1. 一组邻边相等的平行四边形是菱形

2. C 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore \angle BAC = \angle DAC, AB = AD, AC \perp BD$, 故选项 A、B、D 的结论正确. 无法得出 $AC = BD$, 故选项 C 的结论错误, 故选 C.

3. C 【解析】如图, 由题意得 $\angle DAE = \angle BAE = \angle BAD$. 又 $\because \angle DAE + \angle BAE + \angle BAD = 360^\circ$, $\therefore \angle BAD = 360^\circ \div 3 = 120^\circ$. 由题意得 $AD \parallel BC$, $\therefore \angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 60^\circ$, 故选 C.



4. D 【解析】如图. \because 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AB = BC = 2, AO = CO, BO = DO = \sqrt{3}$, $AC \perp BD, AD \parallel BC$, $\therefore AO =$



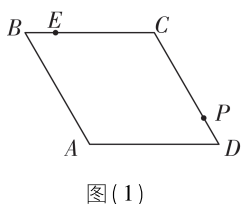
易错警示
要注意菱形与矩形性质的区别: 矩形的对角线相等, 菱形的对角线互相垂直, 四条边相等. 两者不可混淆.

$\therefore AE=EF$,
 $\therefore AE=EF=AF$,
 $\therefore \triangle AEF$ 为等边三角形,
 $\therefore \angle FAE=60^\circ$,
 $\therefore \angle OAB=\angle OAE-\angle FAE=30^\circ$.
 \therefore 菱形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 交于点 O ,
 $\therefore AC \perp BD, BC=AB=4, BD=2OB, AC=2OA$,
 $\therefore OB=\frac{1}{2}AB=2$,
 $\therefore OA=\sqrt{AB^2-OB^2}=2\sqrt{3}$,
 $\therefore BD=2OB=4, AC=2OA=4\sqrt{3}$,
 \therefore 菱形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$.

刷易错

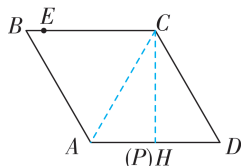
9. $8-4\sqrt{3}$ 或 4 或 $4\sqrt{7}$ 【解析】①当点 P 位于边

CD 上时,如图(1)所示.
 \therefore 在菱形 $ABCD$ 中, $AB=$
 $CD=8, CE=CP, CE=$
 $4\sqrt{3}, \therefore DP=CD-CP=8-$
 $4\sqrt{3}$.

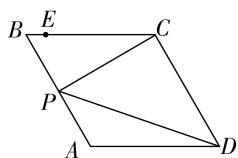


图(1)

②当点 P 位于边 AD 上时,如图(2)所示,连接 AC . \therefore 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = \angle D = 60^\circ$, $AB=AD=DC=8, \therefore \triangle ACD$ 是等边三角形. 过点 C 作 $CH \perp AD$ 于点 $H, \therefore AH=HD=4$. 在 $Rt\triangle CDH$ 中,由勾股定理得 $CH=4\sqrt{3}$. $\therefore CE=4\sqrt{3}, CE=CP, \therefore$ 点 P 与点 H 重合, $\therefore DP=4$.



图(2)



图(3)

③当点 P 位于边 AB 上时,如图(3)所示.
 \therefore 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle B = 60^\circ, \therefore \angle BCD = 120^\circ$. $\therefore \angle B = 60^\circ$, 由②可知 $PC \perp AB$,
 $\therefore \angle BCP = 30^\circ, \therefore \angle PCD = \angle BCD - \angle BCP = 90^\circ, \therefore$ 由勾股定理得 $DP = \sqrt{PC^2 + CD^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 8^2} = 4\sqrt{7}$.

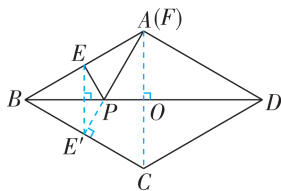
综上, DP 的长为 $8-4\sqrt{3}$ 或 4 或 $4\sqrt{7}$.



刷提升

1. A 【解析】由折叠的性质得 $\angle BAE = \angle CAE$.
 \therefore 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore \angle BAD = 90^\circ, AD \parallel BC, \therefore \angle DAC = \angle ACE$. \therefore 四边形 $AECF$ 是菱形, $\therefore AE = CE, \therefore \angle CAE = \angle ACE, \therefore \angle BAE = \angle CAE = \angle DAC, \therefore \angle BAE = \frac{1}{3} \times 90^\circ = 30^\circ$, 故选 A.

2. A 【解析】如图,连接 AC , 交 BD 于点 O , 过 A 作 $AE' \perp BC$, 垂足为 E' , 交 BD 于点 P , 当点 F

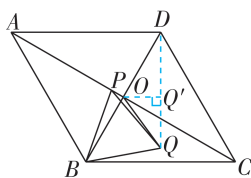


与点 A 重合时,过 E' 作 BD 的垂线,交 AB 于点 E . \therefore 菱形 $ABCD$ 是轴对称图形, \therefore 易得点 E, E' 关于 BD 对称, $\therefore EP = E'P, \therefore PE + PF = PE' + PF = E'F$. 再根据垂线段最短可知此时 $PE + PF$ 有最小值,最小值为 AE' 的长. \therefore 菱形 $ABCD$ 的周长为 24, $\angle BAD = 120^\circ, \therefore AB = BC = 6, \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 60^\circ, \therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AB = AC$. $\therefore AE' \perp BC$, 垂足为 $E', \therefore BE' = CE' = \frac{1}{2}BC = 3, \therefore$ 在 $Rt\triangle ABE'$ 中,由勾股定理得, $AE' = \sqrt{AB^2 - BE'^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}, \therefore PE + PF$ 的最小值为 $3\sqrt{3}$. 故选 A.

关键点拨

过 A 作 $AE' \perp BC$, 垂足为 E' , 交 BD 于点 P , 当点 F 与点 A 重合时,过 E' 作 BD 的垂线,交 AB 于点 E , 此时 $PE + PF$ 有最小值,最小值为 AE' 的长.

3. 2 【解析】如图,连接 DQ . \therefore 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AB = AD, AD \parallel BC, \angle ABD = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ, DO = \frac{1}{2}BD, \therefore \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ, \therefore \triangle ABD$



是等边三角形, $\angle BAO = 30^\circ, \therefore AB = BD = 8, \therefore DO = 4$. $\therefore \triangle BPQ$ 是等边三角形, $\therefore BP = BQ, \angle PBQ = 60^\circ, \therefore \angle ABP = \angle ABD - \angle PBO = \angle PBQ - \angle PBO = \angle DBQ, \therefore \triangle ABP \cong \triangle DBQ$ (SAS), $\therefore \angle BDQ = \angle BAP = 30^\circ, \therefore Q$ 点在直线 DQ 上运动,故当 $OQ \perp DQ$ 时, OQ 最小. 过点 O 作 $OQ' \perp DQ$. 在 $Rt\triangle DOQ'$ 中, $DO = 4, \angle ODQ' = 30^\circ, \therefore OQ' = \frac{1}{2}DO = 2, \therefore OQ$ 长度的最小值是 2. 故答案为 2.

1.6.2 菱形的判定

刷基础

1. **B** 【解析】由题意知 $AB=BD, AC=CD$. $\therefore AB=AC, \therefore AB=BD=CD=AC, \therefore$ 四边形 $ABDC$ 是菱形. 故选 B.

2. 67° 【解析】由作图可得 $AB=AD=BC=DC$, \therefore 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AD \parallel BC, \angle ABD = \angle CBD$. $\therefore \angle A = 46^\circ, \therefore \angle MBC = \angle A = 46^\circ, \therefore \angle CBD = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle MBC) = \frac{1}{2}(180^\circ - 46^\circ) = 67^\circ$, 故答案为 67° .

3. $AB=AC$ (答案不唯一) 【解析】添加条件: $AB=AC$. 理由如下: $\therefore AD \perp BC, \therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$. $\therefore E, F$ 分别是 AB, AC 边的中点, $\therefore DE = \frac{1}{2}AB = AE, DF = \frac{1}{2}AC = AF$. $\therefore AB=AC, \therefore DE=DF=AE=AF, \therefore$ 四边形 $AEDF$ 是菱形. 故答案为 $AB=AC$ (答案不唯一).

4. 【证明】(1) $\therefore AB=AC, \therefore \angle B = \angle ACB, \therefore \angle FAC = \angle B + \angle ACB = 2\angle B$. $\therefore AD$ 平分 $\angle FAC, \therefore \angle FAC = 2\angle FAD, \therefore \angle FAD = \angle B, \therefore AD \parallel BC, \therefore \angle ADC = \angle DCE$. $\therefore CD$ 平分 $\angle ACE, \therefore \angle ACD = \angle DCE, \therefore \angle ACD = \angle ADC$. (2) $\therefore AB=AC, \angle B = 60^\circ, AD \parallel BC, \therefore \angle ACB = \angle CAD = 60^\circ$. $\therefore \angle ACD = \angle ADC, \therefore \triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 都是等边三角形, $\therefore AB=BC=AC=CD=AD, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

5. $\frac{24}{5}$ 【解析】 \therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 3, OB = \frac{1}{2}BD = 4. \therefore AB = 5, \therefore OA^2 + OB^2 = AB^2, \therefore \angle AOB = 90^\circ$, 即 $AC \perp BD, \therefore$ 平行四边形 $ABCD$ 为菱形, $\therefore BC=AB=5. \therefore AE \perp BC, \therefore$ 菱形 $ABCD$ 的面积为 $BC \cdot AE = \frac{1}{2}AC \cdot BD, \therefore 5AE = \frac{1}{2} \times 6 \times 8, \therefore AE = \frac{24}{5}$, 故答案为 $\frac{24}{5}$.

6. (1) 【证明】 \therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB=CD, AB \parallel CD, \therefore \angle BAE = \angle DCF$.

易错警示

判定菱形时, 若前提是四边形, 则判断四条边是否相等; 若四边形是平行四边形, 再看添加其他条件能否判定为菱形.

思路分析

由直角三角形斜边上中线的性质得出 $DE = \frac{1}{2}AB = AE, DF = \frac{1}{2}AC = AF$, 再由 $AB=AC$, 得 $DE=DF=AE=AF$, 即可得出结论.

$$\text{在 } \triangle ABE \text{ 和 } \triangle CDF \text{ 中, } \begin{cases} AB=CD, \\ \angle BAE = \angle DCF, \\ AE=CF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF (SAS).$

(2) 【解】 \therefore 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore OA=OC, OB=OD, AC \perp BD.$

$\therefore AE=CF, OE=OA-AE, OF=OC-CF,$

$\therefore OE=OF, \therefore$ 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

$\therefore EF \perp BD,$

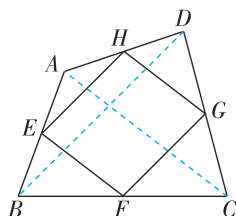
\therefore 平行四边形 $BEDF$ 是菱形.

刷易错

7. **C** 【解析】A 选项, 四条边相等的四边形是菱形, 能判定为菱形, 不符合题意; B 选项, 有一组对边平行且相等的四边形是平行四边形, 邻边相等的平行四边形是菱形, 能判定为菱形, 不符合题意; C 选项, 不能判定四边形为菱形, 符合题意; D 选项, 两组对边平行的四边形是平行四边形, 邻边相等的平行四边形是菱形, 能判定为菱形, 不符合题意. 故选 C.

刷提升

1. **B** 【解析】如图, 连接 AC, BD . $\therefore E, F, G, H$ 分别是 AB, BC, CD, AD 的中点, $\therefore EF \parallel AC, HG \parallel AC, EF = \frac{1}{2}AC, HG =$



$\frac{1}{2}AC, \therefore EF \parallel HG, EF=HG, \therefore$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形. A 选项, 同理可得 $EH \parallel BD \parallel FG$. $\therefore AC \perp BD, \therefore EF \perp EH, \therefore \angle FEH = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形, 不符合题意. B 选项, 同理可得 $EH=FG = \frac{1}{2}BD. \therefore AC=BD, \therefore GH=GF, \therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形, 符合题意. C 选项, 添加 $AB=BC$, 不能证明平行四边形 $EFGH$ 是菱形, 不符合题意. D 选项, 添加 $AB \perp BC$, 不能证明平行四边形 $EFGH$ 是菱形, 不符合题意. 故选 B.

2. **D** 【解析】 \therefore 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AD \parallel BC, \therefore \angle ADB = \angle CBD$. 由轴对称的性质可知, $\angle ADE_1 = \angle ADB, \angle CBF_1 = \angle CBD, \therefore \angle BDE_1 =$

$\angle DBF_1, \therefore E_1F_2 \parallel E_2F_1$. 由题意得 $OE = OF$, $OB = OD, \therefore DF = EB, DE = BF$. 由轴对称的性质可知, $DF = DF_2, BF = BF_1, BE = BE_2, DE = DE_1, \therefore E_1F_2 = E_2F_1, \therefore$ 四边形 $E_1E_2F_1F_2$ 是平行四边形. 如图 (1), 当 E, F, O 三点重合时, 连接 AO , 则 $DO = AO$. 由轴对称的性质可知, $DE_1 = DO = DF_2, AE_1 = AO = AE_2, \therefore DE_1 = DF_2 = AE_1 = AE_2$, 即 $E_1E_2 = E_1F_2, \therefore$ 四边形 $E_1E_2F_1F_2$ 是菱形.

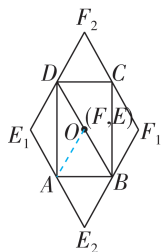


图 (1)

如图 (2), 当 E, F 分别为 OB, OD 的中点时, 连接 AE, AO , 则 $OA = OB$. $\because \angle ABO = 60^\circ, \therefore \triangle ABO$ 是等边三角形. $\because E$ 为 OB 中点, $\therefore AE \perp OB, \therefore \angle AED = 90^\circ$. 由轴对称的性质易得, $\angle AE_1D = \angle AED = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $E_1E_2F_1F_2$ 是矩形.

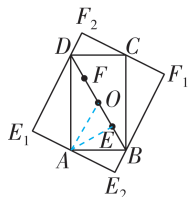


图 (2)

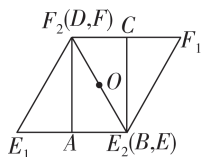
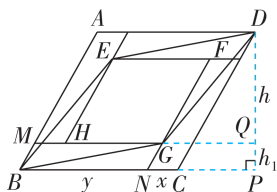


图 (3)

如图 (3), 当 F, E 分别与 D, B 重合时, 易得 $\triangle BE_1D$ 是等边三角形, $\therefore E_1E_2 = E_1F_2, \therefore$ 四边形 $E_1E_2F_1F_2$ 是菱形. \therefore 在整个过程中, 四边形 $E_1E_2F_1F_2$ 的形状依次是菱形 \rightarrow 平行四边形 \rightarrow 矩形 \rightarrow 平行四边形 \rightarrow 菱形, 故选 D.

3. B 【解析】如图, 过点 D 作 $DP \perp BC$, 交 BC 的延长线于 P , 交 MG 的延长线于 Q . 设小平行四边形的短边是 x , 长边是 y , $DQ = h, PQ = h_1. \therefore$ 周围四张小平行四边形纸片都全等, $\therefore EH = GH = FG = EF = y - x, \therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱形. $\therefore S_2 = \frac{5}{3}S_1, \therefore \frac{S_2}{S_1} = \frac{5}{3}$, 即



$$\frac{(x+y)(h+h_1) - 2yh_1 - 2xh_1}{(y-x)(h-h_1)} = \frac{5}{3}, \therefore \frac{(x+y)(h-h_1)}{(y-x)(h-h_1)} = \frac{5}{3}, \therefore \frac{x}{y} = \frac{1}{4}.$$
 故选 B.

关键点拨

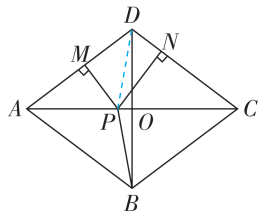
本题分为五个阶段: E, F, O 三点重合; E, F 离开点 O 分别向 OB, OD 的中点运动; E, F 分别为 OB, OD 的中点; E, F 离开 OB, OD 的中点分别向点 B, D 运动; E, F 分别与 B, D 重合, 分别讨论每一阶段四边形 $E_1E_2F_1F_2$ 的形状.

关键点拨

由题意得出 $PM + PN = 4.8$, 进而得出当 $BP \perp AC$ 时, PB 最短, 即 $PM + PN + PB$ 有最小值是解题的关键.

4. 4 或 $4\sqrt{3}$ 【解析】连接 OD . \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 点 O 为对角线 AC 的中点, $\therefore OA = OC, OB = OD$. 当 $\angle AOB = 90^\circ$, 即 $AC \perp BD$ 时, 平行四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AB = BC$. $\because \angle ABC = 60^\circ, \therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AC = AB = 4$. 当 $\angle BAO = 90^\circ$ 时, $\therefore \angle ABC = 60^\circ, \therefore \angle BCA = 180^\circ - \angle BAO - \angle ABC = 30^\circ, \therefore BC = 2AB = 8, \therefore AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$. 综上所述, AC 的长为 4 或 $4\sqrt{3}$, 故答案为 4 或 $4\sqrt{3}$.

5. 7.8 【解析】 $\because AO = CO = 4, BO = DO = 3, \therefore AC = 8$, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. $\because AC \perp BD$ 于点 O, \therefore 平行四边形 $ABCD$ 是菱形, $AD = \sqrt{AO^2 + DO^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5, \therefore CD = AD = 5$. 连接 PD , 如图所示.



$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle ADP} + S_{\triangle CDP} &= S_{\triangle ADC}, \therefore \frac{1}{2}AD \cdot PM + \frac{1}{2}DC \cdot PN = \frac{1}{2}AC \cdot OD, \end{aligned}$$

即 $\frac{1}{2} \times 5 \times PM + \frac{1}{2} \times 5 \times PN = \frac{1}{2} \times 8 \times 3, \therefore 5 \times (PM + PN) = 8 \times 3, \therefore PM + PN = 4.8, \therefore$ 当 PB 最短时, $PM + PN + PB$ 有最小值. 由垂线段最短可知, 当 $BP \perp AC$ 时, PB 最短, \therefore 当点 P 与点 O 重合时, $PM + PN + PB$ 有最小值, 最小值为 $4.8 + 3 = 7.8$, 故答案为 7.8.

刷素养

6. $\frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n-2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$ 【解析】 $\because \angle MON = 30^\circ, \angle A_1B_1O = 90^\circ, \therefore OA_1 = 2A_1B_1. \therefore OB_1^2 + A_1B_1^2 = OA_1^2, \therefore OB_1^2 + A_1B_1^2 = 4A_1B_1^2, \therefore A_1B_1 = \frac{\sqrt{3}OB_1}{3}. \therefore OB_1 = 2, \therefore$ 等边 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边长 $A_1B_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \therefore B_1A_1 \perp OM, B_2A_2 \perp OM, \therefore A_1B_1 \parallel A_2B_2$. 又 $\because \angle MON = 30^\circ, \triangle A_1B_1C_1$ 为等边三角形, $\therefore \angle C_1B_1A_1 = \angle OA_1B_1 = 60^\circ, A_1B_1 = B_1C_1, \therefore B_1C_1 \parallel A_1A_2, \therefore$ 四边形 $A_1A_2C_1B_1$ 为菱形, $\therefore S_{\triangle A_1B_1C_1} = S_{\triangle A_1A_2C_1}$. 在

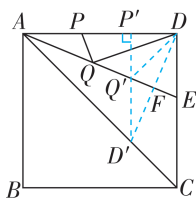
Rt $\triangle B_1C_1B_2$ 中, $\angle C_1B_1B_2 = \angle O = 30^\circ$, $B_1C_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\therefore C_1B_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore B_1B_2 = \sqrt{B_1C_1^2 - B_2C_1^2} = 1$, $\therefore OB_2 = 2 + 1 = 3$. 在 Rt $\triangle OA_2B_2$ 中, 同理可得 $A_2B_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}OB_2 = \sqrt{3} = \frac{3}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 同理可得四边形 $A_2A_3C_2B_2$ 是菱形, $\therefore A_2A_3 = A_2B_2$. 过点 B_2 作 $B_2D \perp ON$ 于 D , $\therefore B_2D = \frac{1}{2}OB_2 = \frac{3}{2}$, $\therefore S_{\triangle A_2B_2C_2} = S_{\triangle A_2A_3C_2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. 同理可得 $B_2C_2 \parallel ON$, \therefore 在 Rt $\triangle B_2C_2B_3$ 中, $\angle C_2B_2B_3 = \angle MON = 30^\circ$. $\therefore B_2C_2 = A_2B_2 = \sqrt{3}$, $\therefore C_2B_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore B_2B_3 = \frac{3}{2}$, $\therefore OB_3 = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$. 在 Rt $\triangle OB_3A_3$ 中, 同理可得 $\triangle A_3B_3C_3$ 的边长 $A_3B_3 = \frac{\sqrt{3}}{3}OB_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$. $\therefore \triangle A_nB_nC_n$ 的边长 $A_nB_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 同理可得四边形 $A_nA_{n+1}C_nB_n$ 是菱形, \therefore 易得 $S_{\triangle A_nB_nC_n} = S_{\triangle A_nA_{n+1}C_n} = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2n-2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$. 故答案为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}, \left(\frac{3}{2}\right)^{2n-2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1.7 正方形

课时 1 正方形的性质

刷基础

- B** 【解析】正方形具有而菱形不一定具有的性质是对角线相等.
- A** 【解析】 \because 四边形 $AEFG$ 是正方形, $\therefore \angle AEF = 90^\circ$. \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AD \parallel BC$, $\angle C = \angle BAD$, $\therefore \angle EAD = 180^\circ - \angle AEC = 180^\circ - 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$, $\therefore \angle BAD = 40^\circ + 75^\circ = 115^\circ$, $\therefore \angle C = 115^\circ$. 故选 A.
- C** 【解析】如图, 过点 D 作 $DD' \perp AE$ 交 AC 于点 D' , 交 AE 于点 F . $\because \angle AFD = \angle AFD' = 90^\circ$, $AF = AF$, $\angle DAE = \angle CAE$, $\therefore \triangle DAF \cong \triangle D'AF$, $\therefore DF = D'F$, $AD' = AD = 8$, $\therefore D'$ 是 D



方法总结

证明一个角等于 90° , 可证这个角所在的三角形为直角三角形, 利用两个锐角互余或勾股定理的逆定理求证.

思路分析

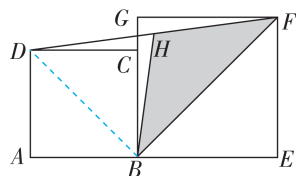
由 4 个直角三角形全等及两直角边长之比为 $1:2$, 设参数为 a , 再根据勾股定理求出 $EH = \sqrt{5}a$, 利用正方形 $EFGH$ 的面积求出 a^2 的值, 从而求出正方形 $ABCD$ 的面积.

关于 AE 的对称点. 过点 D' 作 $D'P' \perp AD$ 于点 P' , 交 AE 于点 Q' , 连接 DQ' , $\therefore D'Q' = DQ'$, $\therefore P'Q' + DQ' = P'Q' + D'Q' = P'D'$, 则 $P'D'$ 为 $DQ + PQ$ 的最小值. \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore \angle DAD' = 45^\circ$, $\therefore \angle AD'P' = \angle DAD' = 45^\circ$, $\therefore AP' = P'D'$, \therefore 在 Rt $\triangle AP'D'$ 中, $P'D'^2 + AP'^2 = AD'^2$, $\therefore 2P'D'^2 = AD'^2 = 64$, $\therefore P'D' = 4\sqrt{2}$, 即 $DQ + PQ$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$. 故选 C.

- (1) 【解】** \because 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $\therefore AD = DC = AB = 4$, $\angle D = 90^\circ$. $\because CF = 1$, $\therefore DF = DC - CF = 4 - 1 = 3$. 在 Rt $\triangle ADF$ 中, $AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = 5$, 即 AF 的长为 5.
- (2) 【证明】** \because 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $\therefore BC = AB = 4$, $\angle B = \angle C = 90^\circ$. \because 在 Rt $\triangle ABE$ 中, $BE = 2$, $AB = 4$, $\therefore AE^2 = AB^2 + BE^2 = 16 + 4 = 20$. 在 Rt $\triangle EFC$ 中, $CE = BC - BE = 2$, $CF = 1$, $\therefore EF^2 = CE^2 + CF^2 = 4 + 1 = 5$. 由 (1) 得, $AF^2 = 25$, $\therefore AE^2 + EF^2 = AF^2$, $\therefore \triangle AEF$ 是以 AF 为斜边的直角三角形, $\therefore \angle AEF = 90^\circ$.

- 5. C** 【解析】设矩形 $OF CG$ 中的 $CF = a$, $OF = b$. \because 四边形 $OH DG$ 和四边形 $OEBF$ 都为正方形, $\therefore OG = OH = CF = a$, $OE = OF = b$, \therefore 正方形 $OH DG$ 和正方形 $OEBF$ 的面积之和为 $a^2 + b^2$. $\because S_{\text{矩形} OF CG} = 8$, $C_{\text{矩形} AEOH} = 12$, $\therefore ab = 8$, $a + b = 6$, $\therefore a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 36 - 16 = 20$. 故选 C.
- 6. D** 【解析】根据题意可知题图中 4 个直角三角形全等. \because 每张直角三角形纸片的两条直角边长之比为 $1:2$, \therefore 设 $AE = 2a$, $AH = a$, 则 $EH = \sqrt{AE^2 + AH^2} = \sqrt{5}a$. 由全等可知, $HD = AE = 2a$, $\therefore S_{\text{正方形} ABCD} = AD^2 = (AH + HD)^2 = 9a^2$. $\because S_{\text{正方形} EFGH} = EH^2 = 5a^2 = 5$, $\therefore a^2 = 1$, $\therefore S_{\text{正方形} ABCD} = 9 \times 1 = 9$. 故选 D.

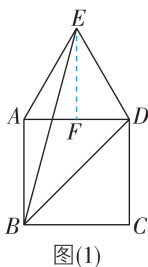
- 7. 6** 【解析】如图所示, 连接 BD . \because 点 A, B, E 在同一条直线上, 正方形 $ABCD$, 正方形 $BEFG$ 的边长分别为 3, 4, $\therefore \angle DBC = \angle CBF = 45^\circ$, $AB = AD = 3$, $EB = EF = 4$, $\angle A = \angle E = 90^\circ$, $\therefore DB = \sqrt{DA^2 + AB^2} = 3\sqrt{2}$,



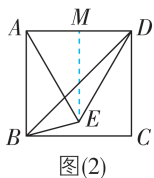
$BF = \sqrt{EB^2 + EF^2} = 4\sqrt{2}$, $\angle DBF = 90^\circ$, $\therefore \triangle DBF$ 是直角三角形, $\therefore S_{\triangle DBF} = \frac{1}{2}DB \times BF = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 12$. $\because H$ 为线段 DF 的中点, \therefore 阴影部分的面积是 $\frac{1}{2}S_{\triangle DBF} = \frac{1}{2} \times 12 = 6$.

刷易错

8. $\sqrt{3}+1$ 或 $\sqrt{3}-1$ 【解析】分两种情况: ①如图(1), 等边三角形 ADE 在正方形 $ABCD$ 外部, 过 E 点作 $EF \perp AD$ 于 F . \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $CD=2$, $\therefore AB=AD=2$. \because 三角形 ADE 是等边三角形, $\therefore AE=AD=2$. $\because EF \perp AD$, $\therefore AF = \frac{1}{2}AD = 1$, $\therefore EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{3}$, $\therefore \triangle BDE$ 的面积为 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ABE} = 2 \times 2 \div 2 + 2 \times \sqrt{3} \div 2 - 2 \times 1 \div 2 = 2 + \sqrt{3} - 1 = \sqrt{3} + 1$. ②如图(2), 等边三角形 ADE 在正方形 $ABCD$ 的内部, 过 E 点作 $EM \perp AD$ 于 M . \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $CD=2$, $\therefore AB=AD=2$. \because 三角形 ADE 是等边三角形, $\therefore AE=AD=2$. $\because EM \perp AD$, $\therefore AM = \frac{1}{2}AD = 1$, $\therefore EM = \sqrt{AE^2 - AM^2} = \sqrt{3}$, $\therefore \triangle BDE$ 的面积为 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADE} - S_{\triangle ABD} = 2 \times 1 \div 2 + 2 \times \sqrt{3} \div 2 - 2 \times 2 \div 2 = 1 + \sqrt{3} - 2 = \sqrt{3} - 1$. 综上, $\triangle BDE$ 的面积为 $\sqrt{3}+1$ 或 $\sqrt{3}-1$. 故答案为 $\sqrt{3}+1$ 或 $\sqrt{3}-1$.



图(1)



图(2)

刷提升

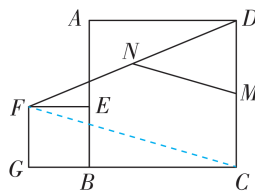
1. B 【解析】连接 FC , 如图. \because 四边形 $BEFG$ 是正方形, $\therefore \angle G = 90^\circ$, $FG = BG = BE = 7$. \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore BC = AB = 17$, $\therefore GC = GB + BC = 24$. 在 $Rt\triangle CFG$ 中, $FC = \sqrt{FG^2 + GC^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$. $\because M, N$ 分别是 DC, DF 的中点, $\therefore MN$ 是 $\triangle DFC$ 的中位线, $\therefore MN = \frac{1}{2}FC = \frac{25}{2}$. 故选 B.

思路分析

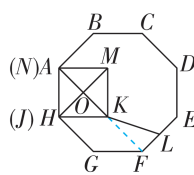
根据正方形的性质得出 $\triangle DBF$ 是直角三角形, 由勾股定理求出 BD, BF 的长, 即可求出 $\triangle BDF$ 的面积, 再根据 H 为线段 DF 的中点即可求解.

易错警示

对于未给题图, 的题目一定要注意分类讨论, 如本题中的等边三角形 ADE 分在正方形 $ABCD$ 外部和内部两种情况.



(第1题图)



(第2题图)

2. B 【解析】如图所示, 连接 KF . 根据题意得,

$$\angle AHG = \angle G = \angle GFE = \frac{180^\circ \times (8-2)}{8} = 135^\circ,$$

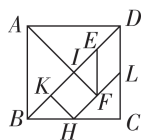
$$\angle AJK = 90^\circ, \therefore \angle KHG = \angle AHG - \angle AHK = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ, \therefore \angle KHG + \angle G = 180^\circ, \therefore HK \parallel GF.$$

又 $\because HK = AH = GF$, \therefore 四边形 $KHGF$ 是平行四边形. $\because HG = GF$, \therefore 平行四边形 $KHGF$ 是菱形, $\therefore KF = GF$. 设正方形 $JKMN$ 对角线的交点为 O , 则 $OA = OM = 2$, \therefore 正方形 $JKMN$ 的边长为 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\therefore KF = HK = FE = 2\sqrt{2}$.

$\therefore \angle KFG = \angle KHG = 45^\circ$, $\angle GFE = 135^\circ$, $\therefore \angle KFL = \angle GFE - \angle KFG = 90^\circ$. $\therefore L$ 为 EF 的中点, $\therefore FL = \frac{1}{2}EF = \sqrt{2}$, $\therefore LK = \sqrt{KF^2 + FL^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$, 故选 B.

3. 5 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $ME \perp OA$, $MF \perp OB$, $\therefore \angle MEO = \angle EOF = \angle OFM = 90^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$, \therefore 四边形 $EMFO$ 为矩形, $\triangle AEM$ 是等腰直角三角形, $\therefore MF = OE$, $AE = EM$, $\therefore ME + MF = AE + OE = AO$. 又 \because 正方形 $ABCD$ 中, 对角线 $AC = 10$, $\therefore ME + MF = AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$.

4. 24 【解析】如图, 由题意可知, 四边形 $ABCD$ 和四边形 $HKIF$ 都是正方形, 且正方形 $ABCD$ 的边长为 8, $\therefore S_{\text{正方形}ABCD} = 8 \times 8 = 64$,



$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2}S_{\text{正方形}ABCD} = 32. \because \triangle ABI \text{ 和 } \triangle ADI \text{ 都是等腰直角三角形, } \therefore S_{\triangle ABI} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} = 16. \because \triangle BHK, \triangle EFI, \triangle CHL \text{ 都是等腰直角三角形, 四边形 } HKIF \text{ 是正方形, 四边形 } EFLD \text{ 是平行四边形, } \therefore \text{易得 } IK = BK = HK = HF = LF = FI = EI = ED, DL = CL, \therefore \text{平行四边形 } EFLD, \text{正方形 } HKIF, \triangle CHL \text{ 面积相等, } \triangle BHK \text{ 与 } \triangle EFI \text{ 面积的和等于 } \triangle CHL \text{ 的面积,}$$

$\therefore S_{\text{平行四边形}EFLD} = \frac{1}{4}S_{\triangle CBD} = 8$. \therefore 题图(2)中的阴影部分由图中的 $\triangle ABI$ 和平行四边形 $EFLD$ 组成, $\therefore S_{\text{阴影}} = 16 + 8 = 24$, 故答案为 24.

5. (1)【证明】 \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AB = BC$, $\angle B = 90^\circ$. $\because FH \perp BH$, $\therefore \angle H = 90^\circ = \angle B$. $\because \angle AEF = 90^\circ$, $\therefore \angle AEB = 90^\circ - \angle FEH = \angle EFH$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle EHF$ 中, $\angle B = \angle H$, $\angle AEB = \angle EFH$, $AE = EF$, $\therefore \triangle ABE \cong \triangle EHF$ (AAS), $\therefore AB = EH$, $\therefore BC = EH$, $\therefore BC - EC = EH - EC$, 即 $BE = CH$.

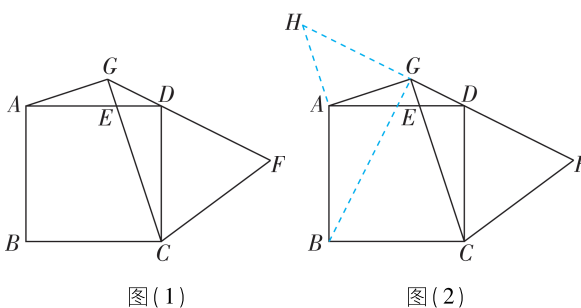
(2)【解】延长 HF , AD 交于点 G , 如图.

由(1)知 $\triangle ABE \cong \triangle EHF$, $BE = CH$, $\therefore FH = BE = CH = 2$. $\because \angle DCH = \angle H = \angle GDC = 90^\circ$, \therefore 四边形 $DCHG$ 是矩形, $\therefore \angle G = 90^\circ$, $GH = CD = AB = 6$, $DG = CH = 2$, $\therefore FG = GH - FH = 6 - 2 = 4$.

在 $\text{Rt} \triangle DGF$ 中, $DF = \sqrt{DG^2 + FG^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, $\therefore DF$ 的长是 $2\sqrt{5}$.

刷素养

6. 【解】(1) 补全图形如图(1)所示.



图(1)

图(2)

(2) 设 $\angle DCG = \alpha$. 如图(1), \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore CB = CD$, $\angle BCD = 90^\circ$, $\therefore \angle BCG = 90^\circ - \alpha$. \because 将线段 CB 沿直线 CE 翻折, 得到线段 CF , $\therefore CF = CB$, $\angle FCG = \angle BCG = 90^\circ - \alpha$, $\therefore CF = CD$, $\angle FCD = \angle FCG - \angle DCG = 90^\circ - 2\alpha$, $\therefore \angle CDF = \angle F = \frac{180^\circ - \angle FCD}{2} = 45^\circ + \alpha$, $\therefore \angle CGF = \angle CDF - \angle DCG = 45^\circ$.

(3) $DF = \sqrt{2}AG$. 证明如下: 如图(2), 作 $AH \perp AG$, 交 FG 的延长线于点 H , 连接 BG .

关键点拨

根据题意分别求出七巧板中阴影等腰直角三角形和平行四边形的面积是解题的关键.

思路分析

(2) 设 $\angle DCG = \alpha$, 根据正方形的性质可得 $CB = CD$, $\angle BCG = 90^\circ - \alpha$, 再由翻折的性质可得 $CF = CB$, 最后根据等腰三角形的性质及角的和差求解即可.

$\because AH \perp AG$, $\therefore \angle HAG = 90^\circ$. \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AB = AD$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\therefore \angle HAG + \angle GAD = \angle BAD + \angle GAD$, 即 $\angle HAD = \angle GAB$. \because 将线段 CB 沿直线 CE 翻折, 得到线段 CF , $\therefore BC = CF$, $\angle BCG = \angle FCG$. $\because GC = GC$, $\therefore \triangle GCB \cong \triangle GCF$, $\therefore GB = GF$, $\angle GBC = \angle F$. 由(1)知 $\angle CDF = \angle F$, $\therefore \angle ADH = 90^\circ - \angle CDF = 90^\circ - \angle F$. $\because \angle ABG = 90^\circ - \angle GBC$, $\therefore \angle ABG = \angle ADH$, $\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADH$ (ASA), $\therefore AG = AH$, $GB = HD$, $\therefore \triangle AGH$ 是等腰直角三角形, $GF = HD$, $\therefore GH = \sqrt{2}AG$, $\therefore DF = GF - DG = HD - DG = HG = \sqrt{2}AG$, $\therefore DF = \sqrt{2}AG$.

课时2 正方形的判定

刷基础

1. C 【解析】A 选项, 根据对角线互相垂直的矩形是正方形可判定矩形 $ABCD$ 为正方形, 故不符合题意; B 选项, 根据有一组邻边相等的矩形是正方形可判定矩形 $ABCD$ 为正方形, 故不符合题意; C 选项, \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore OD = OB = \frac{1}{2}BD$, $OC = OA = \frac{1}{2}AC$, $BD = AC$, $\therefore AO = OB$, $\therefore \angle BAO = \angle ABO$, \therefore 无法判定矩形 $ABCD$ 为正方形, 故符合题意; D 选项, \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AD \parallel BC$, $\therefore \angle DAC = \angle ACB$. $\because \angle BAC = \angle DAC$, $\therefore \angle BAC = \angle ACB$, $\therefore AB = BC$, \therefore 矩形 $ABCD$ 是正方形, 故不符合题意. 故选 C.

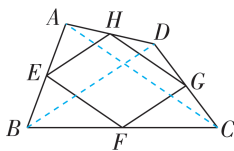
2. 【证明】 $\because \angle ACB = 90^\circ$, $DE \perp BC$, $DF \perp AC$, \therefore 四边形 $CFDE$ 是矩形. 又 $\because CD$ 平分 $\angle ACB$, $DE \perp BC$, $DF \perp AC$, $\therefore DE = DF$, \therefore 四边形 $CFDE$ 是正方形.

3. D 【解析】①有一组邻边相等的矩形是正方形, 故①正确; ②对角线互相垂直的矩形是正

方形,故②正确;③有一个角是直角的菱形是正方形,故③正确;④对角线相等的菱形是正方形,故④正确.

4. ①④ 【解析】如图,连

接 AC, BD . $\because E, F, G, H$ 分别是 AB, BC, CD, AD



的中点, $\therefore EF \parallel AC, EF = \frac{1}{2}AC, HG \parallel AC, EH \parallel BD,$

$EH = \frac{1}{2}BD, GF \parallel BD, \therefore EF \parallel GH, EH \parallel FG, \therefore$ 四

边形 $EFGH$ 是平行四边形,故①正确. \because 四边

形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore AC = BD. \therefore EF = \frac{1}{2}AC,$

$EH = \frac{1}{2}BD, \therefore EF = EH, \therefore$ 四边形 $EFGH$ 是菱

形,故②错误. \because 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD. \therefore EF \parallel AC, FG \parallel BD, \therefore EF \perp FG,$

$\therefore \angle EFG = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $EFGH$ 是矩形,故③

错误. \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AC = BD,$

$AC \perp BD. \therefore EF = \frac{1}{2}AC, EH = \frac{1}{2}BD, \therefore EF = EH,$

\therefore 四边形 $EFGH$ 是菱形. $\therefore EF \parallel AC, EH \parallel BD,$

$AC \perp BD, \therefore EF \perp EH, \therefore \angle FEH = 90^\circ, \therefore$ 四边

形 $EFGH$ 是正方形,故④正确. 故正确的是

①④. 故答案为①④.

5. ② 【解析】由四边形 $ABCD$ 是菱形加上条件

$AB = AD$ 不能使四边形 $ABCD$ 成为正方形,故

①不符合;由四边形 $ABCD$ 是菱形加上条件

$AC = BD$ 可由 $\triangle ABD \cong \triangle DAC$ (SSS) 得到

$\angle ADC = \angle BAD = 90^\circ$, 能使四边形 $ABCD$ 成为

正方形,故②符合;由四边形 $ABCD$ 是菱形加

上条件 $\angle ABC = \angle ADC$ 不能使四边形 $ABCD$

成为正方形,故③不符合. 故答案为②.

6. 【证明】(1) 由题意可知 $HE = HB + BE = HB +$

$AH = AB = AD = DC = BC = BG + GC = CK + GC =$

$GK, AH = EF = GF = CK, \angle A = \angle E = \angle DCK =$

$\angle KGF = 90^\circ,$

$\therefore \triangle ADH \cong \triangle EHF \cong \triangle GKF \cong \triangle CDK$ (SAS),

$\therefore DH = HF = KF = DK, \angle ADH = \angle EHF,$

易错警示

判定正方形时,注意前提是矩形、平行四边形还是菱形,弄清楚前提条件,再找符合判定正方形的条件.

\therefore 四边形 $HFKD$ 是菱形,

$\angle AHD + \angle EHF = \angle AHD + \angle ADH = 90^\circ,$

$\therefore \angle DHF = 90^\circ,$

\therefore 菱形 $HFKD$ 是正方形.

(2) 设 $AD = AB = BC = CD = a, BE = EF = BG =$

$FG = b, DH = HF = DK = FK = c.$

$\therefore S_{\text{正方形}ABCD} + S_{\text{正方形}BEFG} - S_{\triangle ADH} - S_{\triangle EHF} =$

$S_{\text{正方形}HFKD} - S_{\triangle DCK} - S_{\triangle GFK},$

$\triangle ADH \cong \triangle EHF \cong \triangle GKF \cong \triangle CDK,$

$\therefore S_{\triangle ADH} = S_{\triangle EHF} = S_{\triangle DCK} = S_{\triangle GFK},$

$\therefore S_{\text{正方形}ABCD} + S_{\text{正方形}BEFG} = S_{\text{正方形}HFKD},$

$\therefore a^2 + b^2 = c^2.$

刷易错

7. B 【解析】A 选项,有一个角是直角的平行四

边形是矩形,此选项错误,不符合题意;B 选

项,对角线互相垂直的矩形是正方形,此选项

正确,符合题意;C 选项,有一组邻边相等的菱

形还是菱形,此选项错误,不符合题意;D 选

项,各边都相等的四边形是菱形,此选项错

误,不符合题意. 故选 B.



刷提升

1. C 【解析】 \because 点 D, E 分别是边 AB, AC 的中

点, $\therefore DE = \frac{1}{2}BC, AE = \frac{1}{2}AC.$ 当 $AC = BC$ 时,

$AE = DE. \therefore$ 将 $\triangle ADE$ 绕点 E 旋转 180° 得

$\triangle CFE, \therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE, \therefore AE = CE, DE =$

EF, \therefore 四边形 $ADCF$ 是平行四边形. $\because AE =$

$DE, \therefore AE = CE = DE = EF, \therefore AC = DF, \therefore$ 四边形

$ADCF$ 是矩形. 当 $\angle B = 45^\circ$ 时, $\because AC = BC, AD =$

$BD, \therefore CD \perp AB, \therefore \angle BCD = \angle ACD = \angle DAC =$

$45^\circ, \therefore AD = DC, \therefore$ 四边形 $ADCF$ 是正方形,

\therefore C 选项正确. 故选 C.

技巧点拨

2. ①②③ 【解析】① $\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC,$ 有一个角是直角且邻边相等的平行四边形是正方形,由正方形的性质进行判断即可.

② $\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC, AF \perp BC, \therefore BF = CF. \therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行

四边形, $\therefore AB \parallel DE, \therefore \angle BAF = \angle CEF.$

又 $\because \angle AFB = \angle CFE, \therefore \triangle ABF \cong \triangle ECF$ (AAS),

$\therefore AB = CE, \therefore$ 四边形 $ABEC$ 是平行四边形.

$\because \angle BAC = 90^\circ, AB = AC, \therefore$ 四边形 $ABEC$ 是正

方形,故此结论正确. ③ $\because AB = CD = EC,$

$\therefore DE=2AB$. $\because AB=AC, \angle BAC=90^\circ$, \therefore 易得 $AB=\frac{\sqrt{2}}{2}BC$, $\therefore DE=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}BC=\sqrt{2}BC$, 故此结论正确. ③ $\because AF=EF, BF=CF, AD\parallel BC$, $\therefore S_{\triangle CDF}=S_{\triangle BEF}$, 故此结论正确. 综上, 正确的结论有①②③.

3. (1) 【证明】 \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore BO=DO=\frac{1}{2}BD, AB\parallel CD$, $\therefore \angle ABD=\angle CDB$.

$\because \angle ABE=\angle CDF$,
 $\therefore \angle EBO=\angle FDO$.

在 $\triangle EBO$ 与 $\triangle FDO$ 中,

$$\begin{cases} \angle EBO=\angle FDO, \\ BO=DO, \\ \angle BOE=\angle DOF, \end{cases}$$

$\therefore \triangle EBO\cong\triangle FDO(\text{ASA})$,

$\therefore BE=DF$.

(2) 【解】(答案不唯一) 添加 $BE=DE$. 理由: 如图, 设 AD 与 BE 交于点 M .

$\because \angle ABE=\angle ADE, \angle AMB=\angle DME$,

$\therefore \angle BED=\angle BAD=90^\circ$.

$\because \angle ABE=\angle ADE, \angle ABE=\angle CDF$,

$\therefore \angle ADE=\angle CDF$,

$\therefore \angle ADE+\angle ADF=\angle ADF+\angle CDF=90^\circ$,

$\therefore \angle EDF=90^\circ$,

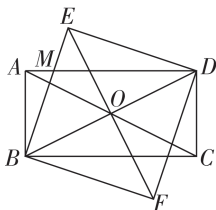
$\therefore BE\parallel DF$.

$\because BE=DF$,

\therefore 四边形 $BEDF$ 是平行四边形.

$\because \angle BED=90^\circ, BE=DE$,

\therefore 四边形 $BEDF$ 是正方形.



4. (1) 【证明】 $\because DE\perp BC$, $\therefore \angle DFB=90^\circ$. -----

$\because \angle ACB=90^\circ$, $\therefore \angle ACB=\angle DFB$, $\therefore AC\parallel DE$.

$\because MN\parallel AB$, 即 $CE\parallel AD$,

\therefore 四边形 $ADEC$ 是平行四边形,

$\therefore CE=AD$.

思路分析

(1) 由直线 $MN\parallel BC$, MN 交 $\angle ACB$ 的平分线于点 E , 交 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线于点 F , 易证得 $\triangle OEC$ 与 $\triangle OFC$ 是等腰三角形, 则可证得 $OE=OF$;

(2) 四边形 $AECF$ 若是正方形, 则必有 $OA=OC, AC\perp EF$, 所以 O 为 AC 的中点, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$.

关键点拨

熟练掌握平行四边形、菱形、正方形的判定是解题的关键.

【解】(2) 四边形 $BECD$ 是菱形. 理由如下:

$\because D$ 为 AB 中点, $\angle ACB=90^\circ$,

$\therefore AD=BD=CD$.

$\because CE=AD$, $\therefore BD=CE$.

$\because BD\parallel CE$, \therefore 四边形 $BECD$ 是平行四边形.

$\because CD=BD$, \therefore 四边形 $BECD$ 是菱形.

(3) 当 $AC=BC$ 时, 四边形 $BECD$ 是正方形. 理由: $\because D$ 为 AB 的中点, $AC=BC$, $\therefore CD\perp AB$, $\therefore \angle CDB=90^\circ$, \therefore 菱形 $BECD$ 是正方形. 故答案为 $AC=BC$.

刷素养

5. 【解】(1) $OE=OF$. 理由如下:

$\because CE$ 是 $\angle ACB$ 的平分线,

$\therefore \angle ACE=\angle BCE$.

又 $\because MN\parallel BC$, $\therefore \angle NEC=\angle ECB$,

$\therefore \angle NEC=\angle ACE$,

$\therefore OE=OC$.

$\because CF$ 是 $\angle ACD$ 的平分线,

$\therefore \angle OCF=\angle FCD$.

又 $\because MN\parallel BC$, $\therefore \angle OFC=\angle FCD$,

$\therefore \angle OFC=\angle OCF$,

$\therefore OF=OC$,

$\therefore OE=OF$.

(2) 当点 O 运动到 AC 的中点, 且 $\triangle ABC$ 满足 $\angle ACB$ 为直角时, 四边形 $AECF$ 是正方形. 理由如下:

\because 当点 O 运动到 AC 的中点时, $AO=CO$,

由 (1) 知 $EO=FO$,

\therefore 四边形 $AECF$ 是平行四边形.

$\because FO=CO$,

$\therefore AO=CO=EO=FO$,

$\therefore AO+CO=EO+FO$,

$\therefore AC=EF$,

\therefore 四边形 $AECF$ 是矩形.

$\because MN\parallel BC, \angle ACB=90^\circ$,

$\therefore \angle COF=\angle ACB=90^\circ$,

$\therefore AC\perp EF$,

\therefore 四边形 $AECF$ 是正方形.

综上, 当点 O 运动到 AC 的中点, 且 $\triangle ABC$ 满足 $\angle ACB$ 为直角时, 四边形 $AECF$ 是正方形.

大招专题2 特殊平行四边形中的折叠问题

刷难关

大招解读 | 折叠中求角度

根据特殊平行四边形的性质求出各角的度数,然后再利用折叠前后的两部分图形全等得对应角相等,最后利用角的和差关系进行计算即可.

1. 117.5° 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore \angle A = 90^\circ, \therefore \angle ABD = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.
 $\because B'E \parallel BD, \therefore \angle AEB' = \angle ABD = 55^\circ$. 由折叠
 的性质可知, $\angle BEC = \angle B'EC = \frac{1}{2}(180^\circ -$
 $\angle AEB') = \frac{1}{2}(180^\circ - 55^\circ) = 62.5^\circ. \because B'E \parallel BD,$
 $\therefore \angle B'EC + \angle EMD = 180^\circ, \therefore \angle EMD = 180^\circ -$
 $62.5^\circ = 117.5^\circ$, 故答案为 117.5° .

2. 【解】连接 BD , 设 $C'D$ 与 AB 的交点为 P . \because 四
 边形 $ABCD$ 为菱形, $\therefore AB = AD, AB \parallel CD$.
 $\because \angle A = 60^\circ, \therefore \triangle ABD$ 为等边三角形,
 $\angle ADC = 120^\circ, \angle C = 60^\circ. \therefore DC'$ 是 AB 的垂直
 平分线, $\therefore P$ 为 AB 的中点, $\therefore DP$ 为 $\angle ADB$ 的
 平分线, 即 $\angle ADP = \angle BDP = 30^\circ, \therefore \angle PDC =$
 $90^\circ, \therefore$ 由折叠的性质得到 $\angle CDE = \angle PDE = 45^\circ$,
 \therefore 在 $\triangle DEC$ 中, $\angle DEC = 180^\circ - (\angle CDE +$
 $\angle C) = 75^\circ$.

大招解读 | 分类讨论求边长

当要求直角三角形或等腰三角形的边长或角度
 时,若没有明确指出直角或腰,要分情况进行讨
 论,然后分别求解.

3. $\frac{3}{2}$ 或 3 【解析】当 $\triangle CEB'$ 为直角三角形时,
 有两种情况: ① 当点 B' 落在矩形内部时,
 $\angle CB'E = 90^\circ$, 如图(1)所示. $\because \triangle ABE$ 沿 AE
 折叠, 点 B 落在点 B' 处, $\therefore \angle AB'E = \angle B =$
 $90^\circ. \therefore \angle CB'E = 90^\circ, \therefore \angle AB'C = 180^\circ, \therefore$ 点
 A, B', C 共线, 即 $\triangle ABE$ 沿 AE 折叠, 点 B 落在
 对角线 AC 上的点 B' 处, $\therefore EB = EB', AB =$
 $AB' = 3$. 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB = 3, BC = 4, \therefore AC =$
 $\sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \therefore CB' = 5 - 3 = 2$. 设
 $BE = x$, 则 $EB' = x, CE = 4 - x$. 在 $Rt\triangle CEB'$ 中,

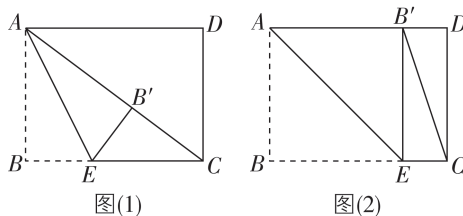
关键点拨

本题考查矩形的
 折叠, 熟练
 应用矩形的性
 质及折叠的性
 质是解题的
 关键.

关键点拨

当 $\triangle CEB'$ 为
 直角三角形
 时, 有两种情
 况: ① 当点 B'
 落在矩形内部
 时, $\angle CB'E =$
 90° , 如图(1)
 所示. ② 当点
 B' 落在 AD 边
 上时, $\angle CEB' =$
 90° , 如图(2)
 所示.

$\therefore EB'^2 + CB'^2 = CE^2, \therefore x^2 + 2^2 = (4 - x)^2$, 解得
 $x = \frac{3}{2}, \therefore BE = \frac{3}{2}$. ② 当点 B' 落在 AD 边上时,
 $\angle CEB' = 90^\circ$, 如图(2)所示, 此时易知四边形
 $ABEB'$ 为正方形, $\therefore BE = AB = 3$. 综上所述, BE
 的长为 $\frac{3}{2}$ 或 3. 故答案为 $\frac{3}{2}$ 或 3.

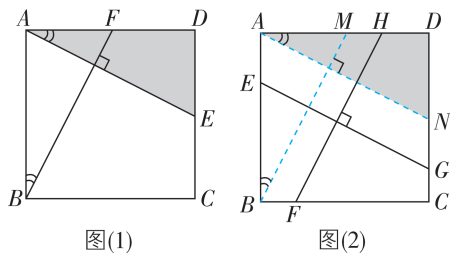


大招解读 | “十字架”模型

在正方形的对边分别取点并相连, 所得两条线
 段, 若垂直, 则相等; 若相等, 则垂直.

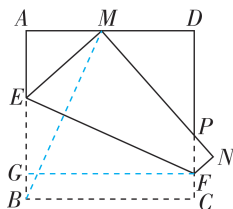
简记: 垂直即相等; 相等即垂直.

- ① 线段过顶点时, 如图(1). 易证 $\triangle ADE \cong \triangle BAF$
 (ASA), $\therefore AE = BF$.



- ② 线段不过顶点时, 如图(2), 作 $AN \parallel EG, BM \parallel$
 HF . 易证 $\triangle ADN \cong \triangle BAM$ (ASA), $\therefore AN = BM$,
 \therefore 易得 $EG = FH$.

4. 13 【解析】如图, 过点 F 作 $FG \perp AB$, 垂足为
 G , 连接 BM . \because 四边形 $ABCD$ 是正方形,
 $\therefore AB = BC, \angle A = 90^\circ$. 易知四边形 $BCFG$ 是矩
 形, $\therefore FG = BC, \therefore AB = FG$. \because 由折叠易知
 $BM \perp FE, \therefore \angle EBM + \angle BEF = 90^\circ. \because \angle BMA +$
 $\angle EBM = 90^\circ, \therefore \angle BEF = \angle BMA$. 又 $\because \angle A =$
 $\angle EGF = 90^\circ, \therefore \triangle ABM \cong \triangle GFE, \therefore EF = BM =$
 $\sqrt{AB^2 + AM^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (cm). 故答案
 为 13.



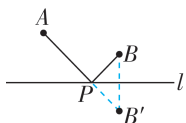
5. 【解】如图,过点 F 作 $FG \perp AD$,垂足为 G ,连接 AA' 交 EF 于点 H . 易得四边形 $ABFG$ 是矩形, $\therefore FG=AB=AD=8$, \therefore 在 $\text{Rt} \triangle EFG$ 中, $EG = \sqrt{EF^2 - FG^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 8^2} = 4$. 由折叠的性质易知 $AA' \perp EF$, $\therefore \angle EAH + \angle AEH = 90^\circ$. $\because FG \perp AD$, $\therefore \angle GEF + \angle EFG = 90^\circ$, $\therefore \angle DAA' = \angle GFE$. 在 $\triangle GEF$ 和 $\triangle DA'A$ 中, $\begin{cases} \angle EGF = \angle D = 90^\circ, \\ FG = AD, \\ \angle GFE = \angle DAA', \end{cases}$ $\therefore \triangle GEF \cong \triangle DA'A$ (ASA), $\therefore DA' = EG = 4$. 设 $AE = x$, 由折叠的性质可知 $EA' = x$, 则 $DE = 8 - x$. 在 $\text{Rt} \triangle EDA'$ 中, 由勾股定理得 $EA'^2 = DE^2 + A'D^2$, 即 $x^2 = (8-x)^2 + 4^2$, 解得 $x = 5$, $\therefore AE = 5$.

大招专题 3 特殊平行四边形中的动点问题

刷难关

大招解读 | “将军饮马”求最值

求直线同侧两点与直线上一点所连线段和的最小值时,作其中一点关于直线的对称点,将两点转化到直线的两侧,利用两点之间线段最短求最小值.



1. B 【解析】设 $\triangle ABP$ 中 AB 边上的高是 h . $\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{3} S_{\text{矩形} ABCD}$, $\therefore \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{3} AB \cdot AD$, $\therefore h = \frac{2}{3} AD = 2$, \therefore 动点 P 在与 AB 平行且与 AB 的距离是 2 的直线 l 上. 如图,作 A 关于直线 l 的对称点 E , 连接 BE 交直线 l 于点 P , 易得 A, D, E 三点共线, $PA = PE$, $\therefore PA + PB = PE + PB = BE$, $\therefore BE$ 的长就是所求的最小值. 在 $\text{Rt} \triangle ABE$ 中, $\because AB = 4, AE = 2 + 2 = 4$, $\therefore BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, 即 $PA + PB$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$. 故选 B.

2. A 【解析】连接 BF , 作点 A 关于 CD 的对称点 G , 连接 BG, FG, BF , 如图所示, 则易知 $A,$

思路分析

过点 F 作 $FG \perp AD$, 垂足为 G , 连接 AA' 交 EF 于点 H . 在 $\text{Rt} \triangle GEF$ 中, 由勾股定理可求得 EG 的长, 由折叠的性质易知 $AA' \perp EF$, 由同角的余角相等证明 $\angle DAA' = \angle GFE$, 从而可证明 $\triangle DA'A \cong \triangle GEF$, 得 $GE = DA'$, 最后在 $\text{Rt} \triangle EDA'$ 中利用勾股定理列方程求解即可.

关键点拨

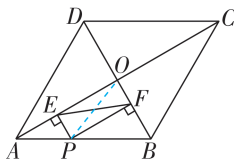
综合利用“将军饮马”和矩形的性质, 实现线段和的转化是解题的关键.

D, G 三点共线, $AF = FG, AD = DG$. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$. $\therefore EF \parallel BC$, \therefore 四边形 $BEFC$ 是矩形, $\therefore CE = BF$, $\therefore AF + CE$ 的最小值等于 $GF + BF$ 的最小值, 即 BG 的长度. $\because AB = 8, AD = 4$, $\therefore AG = 8$, \therefore 根据勾股定理, 得 $BG = \sqrt{AB^2 + AG^2} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$, $\therefore AF + CE$ 的最小值为 $8\sqrt{2}$, 故选 A.

大招解读 | 根据垂线段最短求最值

在直角三角形中求线段长度的最小值时, 通常利用矩形的对角线相等这一性质将所求线段长度的最小值转化成直角顶点与斜边上的动点连线长度的最小值, 此时根据垂线段最短即可求解.

3. C 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AC \perp BD, OA = OC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 8 = 4, OB = OD = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} \times 6 = 3$, $\therefore \angle AOB = 90^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle AOB$ 中, $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. 如图所示, 连接 OP . $\because PE \perp OA$ 于点 $E, PF \perp OB$ 于点 F , $\therefore \angle PEO = \angle PFO = \angle EOF = 90^\circ$, \therefore 四边形 $OEFP$ 是矩形, $\therefore EF = OP$. 当 $OP \perp AB$ 时, OP 的值最小, 即 EF 的值最小, 此时 $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} AB \cdot OP$, $\therefore OP = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{4 \times 3}{5} = \frac{12}{5}$, $\therefore EF$ 的最小值为 $\frac{12}{5}$, 故选 C.



4. (1) 【证明】在平行四边形 $ABCD$ 中, $AC = 3, CD = 4, AD = 5$, $\therefore AB = CD = 4, BC = AD = 5$, $\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$, $\therefore \angle BAC = 90^\circ$. $\because PE \perp AB$ 于点 $E, PF \perp AC$ 于点 F , $\therefore \angle EAC = \angle AEP = \angle PFA = 90^\circ$,

∴ 四边形 $AEPF$ 是矩形.

(2)【解】存在. 如图, 连接 AP .

∵ 四边形 $AEPF$ 是矩形,

∴ $EF=AP$.

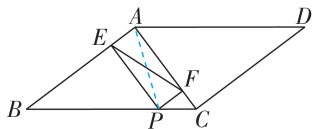
当 $AP \perp BC$ 时, AP 最短,

即 EF 的长度存在最小值,

此时 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2}BC \cdot AP$,

∴ $AP = \frac{AB \cdot AC}{BC} = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5}$,

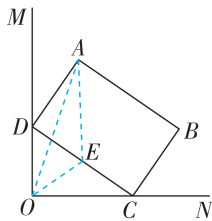
∴ EF 的最小值为 $\frac{12}{5}$.



大招解读 根据三角形三边关系求最值

利用三角形三边关系解决最值问题时, 构造出来的这个三角形要有两条边的长为定值, 另外一边为要求的那条边.

5. 12 【解析】如图, 取 CD 的中点 E , 连接 OE , AE , OA . ∵ $AB=9$, $BC=6$, $\angle MON=90^\circ$, ∴ $CD=9$, $AD=6$, ∴ $OE=DE=\frac{1}{2}CD=\frac{9}{2}$, $AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+6^2}=\frac{15}{2}$. ∵ $OA \leq OE+AE$, ∴ 当 O, A, E 三点共线时, 点 A 到点 O 的距离最大, ∴ OA 的最大值为 $\frac{9}{2}+\frac{15}{2}=12$. 故答案为 12.



6. $2\sqrt{5}-2$ 【解析】取 AB 的中点 O , 连接 OH , OD . ∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形, ∴ $AB=DA$, $\angle BAE=\angle ADF=90^\circ$. 在 $\triangle BAE$ 和 $\triangle ADF$ 中, $\begin{cases} AE=DF, \\ \angle BAE=\angle ADF, \\ AB=AD, \end{cases}$ ∴ $\triangle BAE \cong \triangle ADF$ (SAS), ∴ $\angle ABE=\angle DAF$. ∵ $\angle DAF+\angle BAF=90^\circ$, ∴ $\angle ABE+\angle BAF=$

关键点拨

(2) 连接 AP . 由矩形的性质得出 $AP=EF$, 进而由垂线段最短得出当 $AP \perp BC$ 时, AP 最短, 即 EF 的长度存在最小值是解题的关键.

关键点拨

由点 M, N 分别是 AC, DE 的中点, 联想到作辅助线, 构造三角形的中位线是解题的关键.

90° , ∴ $\angle AHB=90^\circ$, ∴ $OH=\frac{1}{2}AB=2$. ∴ $OD=\sqrt{OA^2+AD^2}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, $DH \geq OD-OH$, ∴ 线段 DH 长度的最小值为 $OD-OH=2\sqrt{5}-2$. 故答案为 $2\sqrt{5}-2$.

全章综合训练



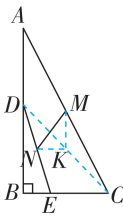
刷中考

1. D 【解析】正三角形的每个内角度数为 $\frac{180^\circ}{3}=60^\circ$, 正方形的每个内角度数为 $\frac{360^\circ}{4}=90^\circ$, ∴ $\angle ABC=60^\circ+90^\circ=150^\circ$, 故选 D.
2. C 【解析】∵ $360^\circ \div 45^\circ=8$, ∴ 这个正多边形是正八边形, 故选 C.
3. B 【解析】

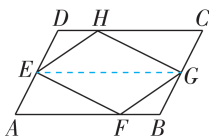
选项	分析	结论
A	该曲线是中心对称图形, 不是轴对称图形	不符合题意
B	该曲线既是轴对称图形 又是中心对称图形	符合题意
C	该曲线是轴对称图形, 不是中心对称图形	不符合题意
D	该曲线不是中心对称图形, 也不是轴对称图形	不符合题意

4. C 【解析】∵ 点 D, E 分别为 BC, AB 的中点, ∴ DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线, ∴ $DE \parallel AC$, ∴ $\angle DEB=\angle A=70^\circ$. 同理可得 $DF \parallel AB$, ∴ $\angle EDF=\angle DEB=70^\circ$, 故选 C.

5. A 【解析】如图, 连接 CD , 取 CD 的中点 K , 连接 MK, NK . ∵ 点 M, N 分别是 AC, DE 的中点, ∴ MK, NK 分别是 $\triangle ACD$ 和 $\triangle DCE$ 的中位线, ∴ $MK \parallel AB, NK \parallel BC, MK=\frac{1}{2}AD, NK=\frac{1}{2}CE$. ∵ $AD=4, CE=3$, ∴ $MK=2, NK=\frac{3}{2}$. ∵ $\angle B=90^\circ$, ∴ $AB \perp BC$, ∴ $MK \perp NK$, ∴ $\angle MKN=90^\circ$, ∴ $MN=\sqrt{MK^2+NK^2}=\frac{5}{2}$. 故选 A.



6. C 【解析】如图所示,连接 EG . \because 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $\therefore AD \parallel BC$, $\angle A = \angle C$, $AD = BC$. $\because E, G$ 分别为边 AD, BC 的中点, $\therefore DE = AE = BG = CG$. 又 $\because AF = CH$, $\therefore \triangle AEF \cong \triangle CGH$ (SAS), $\therefore EF = GH$, 同理可证 $EH = GF$, \therefore 四边形 $EFGH$ 为平行四边形. $\because AE \parallel BG$, 且 $AE = BG$, \therefore 四边形 $EABG$ 为平行四边形, $\therefore S_{\triangle EFG} = \frac{1}{2} S_{\square EFGH} = \frac{1}{2} S_{\square ABGE} = \frac{1}{4} S_{\square ABCD}$, $\therefore S_{\square EFGH} = \frac{1}{2} S_{\square ABCD}$, 故四边形 $EFGH$ 的面积为定值, 故选 C.



思路分析

(1) 根据线段垂直平分线的性质得到 $AB = BC$, 根据菱形的判定定理得到 $\square ABCD$ 是菱形;

(2) 根据等腰三角形的性质得到 $\angle EBF = \angle EFB$, $\angle CEF = \angle CFE$, 进而求得 $\angle CBE = 30^\circ$, $\angle BCA = 60^\circ$, 得到 $\angle BCE = \angle DCF$.

根据全等三角形的判定和性质得到 $\angle DFC = \angle BEC = 90^\circ$, 进而得到 $DF = 4\sqrt{3}$, 最后根据三角形的面积公式即可得到答案.

7. 【解】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore BC \parallel AD, BC = AD = 5,$$

$$\therefore \angle D = \angle FCE.$$

$$\because E \text{ 是 } CD \text{ 的中点}, \therefore DE = CE.$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle D = \angle FCE, \\ DE = CE, \\ \angle AED = \angle CEF, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle FCE \text{ (ASA)},$$

$$\therefore FC = AD = 5,$$

$$\therefore BF = BC + FC = 5 + 5 = 10.$$

8. (1) 【证明】 \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AD = BC, \angle B = \angle D.$$

$$\because AF = CE, \therefore AD - AF = BC - CE, \therefore DF = BE.$$

$$\text{在 } \triangle ABE \text{ 与 } \triangle CDF \text{ 中}, \begin{cases} AB = CD, \\ \angle B = \angle D, \\ BE = DF, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (SAS)}.$$

- (2) 【解】添加 $BE = CE$ (答案不唯一).

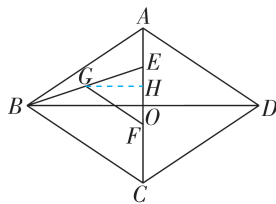
$$\because AF = CE, BE = CE, \therefore AF = BE.$$

$$\because AD \parallel BC, \therefore \text{四边形 } ABEF \text{ 是平行四边形}.$$

9. C 【解析】在四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 互相垂直平分, $\therefore AB = AD, CB = CD, BA = BC$, $\therefore BC = CD = DA = AB$, \therefore 四边形 $ABCD$ 是菱形. $\because AB = 3$, \therefore 四边形 $ABCD$ 的周长为 $3 \times 4 = 12$. 故选 C.

10. $\sqrt{13}$ 【解析】在菱形 $ABCD$ 中, 对角线 AC

与 BD 相交于点 O , $AC = 8, BD = 12$, $\therefore OA = \frac{1}{2}AC = 4, OB = \frac{1}{2}BD = 6, AC \perp BD$. $\because AE = 2$, $\therefore OE = OA - AE = 4 - 2 = 2$. 如图, 取 OE 中点 H , 连接 GH . \because 点 G 为 BE 的中点, 点 H 为 OE 的中点, $\therefore GH$ 是 $\triangle EBO$ 的中位线, $\therefore GH = \frac{1}{2}OB = 3, GH \parallel OB$, $\therefore \angle GHE = \angle BOA = 90^\circ$. $\because OF = 1$, $\therefore HF = OH + OF = \frac{1}{2}OE + OF = \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2$, \therefore 在 $\text{Rt} \triangle GFH$ 中, 由勾股定理得 $GF = \sqrt{GH^2 + HF^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, 故答案为 $\sqrt{13}$.



11. 【证明】 \because 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AB = BC$.

$$\because AE = CF, \therefore AB - AE = BC - CF,$$

$$\text{即 } BE = BF.$$

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CBE$ 中,

$$\begin{cases} AB = CB, \\ \angle B = \angle B, \\ BF = BE, \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore AF = CE.$$

12. (1) 【证明】 $\because E$ 为对角线 AC 上的中点,

$$BE \perp AC,$$

$$\therefore BE \text{ 垂直平分 } AC,$$

$$\therefore AB = BC.$$

$$\because \text{四边形 } ABCD \text{ 是平行四边形},$$

$$\therefore \square ABCD \text{ 是菱形}.$$

- (2) 【解】 $\because BE = EF$,

$$\therefore \angle EBF = \angle EFB.$$

$$\because CF = CE,$$

$$\therefore \angle CEF = \angle CFE,$$

$$\therefore \angle BCE = \angle CEF + \angle CFE = 2\angle CFE = 2\angle EBF.$$

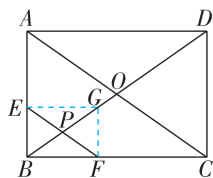
$$\because BE \perp AC, \therefore \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE + \angle BCE = \angle CBE + 2\angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = 30^\circ, \therefore \angle BCA = 60^\circ,$$

$\therefore \angle ACB = \angle ACD = 60^\circ$,
 $\therefore \angle DCF = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BCE = \angle DCF$.
 \therefore 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore BC = CD$.
 又 $\because CE = CF$, $\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCF$ (SAS),
 $\therefore \angle DFC = \angle BEC = 90^\circ$, $\therefore \angle CDF = 30^\circ$.
 $\therefore CF = CE = 4$,
 $\therefore CD = 2CF = 8$,
 $\therefore DF = \sqrt{CD^2 - CF^2} = 4\sqrt{3}$,
 $\therefore \triangle DCF$ 的面积为 $\frac{1}{2}DF \cdot CF = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}$.

13. C 【解析】过点 E 作 $EG \parallel BC$ 交 BD 于点 G , 连接 FG , 如图所示.



\therefore 四边形 $ABCD$ 是矩形,
 $\therefore AD \parallel BC$, $\angle ABC = 90^\circ$,
 $\therefore AD \parallel EG \parallel BC$,
 $\therefore \angle EGP = \angle ADB = \angle FBP = 35^\circ$.
 \therefore 点 P 为 EF 的中点,
 $\therefore PE = PF$.
 在 $\triangle PEG$ 和 $\triangle PFB$ 中,

$$\begin{cases} \angle EGP = \angle FBP, \\ \angle EPG = \angle FPB, \\ PE = PF, \end{cases}$$
 $\therefore \triangle PEG \cong \triangle PFB$ (AAS),
 $\therefore EG = FB$.
 又 $\because EG \parallel FB$,
 \therefore 四边形 $BEGF$ 是平行四边形.
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$,
 \therefore 平行四边形 $BEGF$ 是矩形,
 $\therefore PG = PE$,
 $\therefore \angle GEP = \angle EGP = 35^\circ$,
 $\therefore \angle DPE = 180^\circ - \angle GEP - \angle EGP = 110^\circ$.
 故选 C.

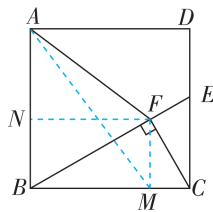
14. (1) 【证明】 $\because O$ 是 AC 的中点, $\therefore OA = OC$.
 $\therefore OD = OB$, \therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.
 又 $\because \angle ABC = 90^\circ$, \therefore 平行四边形 $ABCD$ 是矩形.
 (2) 【解】 \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\therefore OD =$

$OB = OA = OC$.

根据题意得 $l_2 - l_1 = (BC + OC + OB) - (AB + OA + OB) = BC - AB = b - a = 2$,
 $l_3 = 2(BC + AB) = 2(a + b) = 28$,
 $\therefore a + b = 14$,
 $\therefore \begin{cases} b - a = 2, \\ a + b = 14, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a = 6, \\ b = 8, \end{cases}$
 即 $BC = 8, AB = 6$.
 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\therefore \angle ABC = 90^\circ$,
 $\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

关键点拨 15. $AC = BD$ (答案不唯一) 【解析】添加 $AC = BD$. \because 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC = BD$, \therefore 菱形 $ABCD$ 为正方形. 故答案为 $AC = BD$ (答案不唯一).

16. $\frac{3}{8}$ 【解析】如图, 过点 F 作 $FM \perp BC$, $FN \perp AB$, 垂足分别为 M, N , 连接 AM , 则 $\angle FMC = 90^\circ$. \because 四边形 $ABCD$ 为正方形, $\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $\therefore \angle ABC = \angle FMC$, $\therefore AB \parallel FM$, $\therefore FN = BM$. $\therefore S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2}AB \cdot FN$, $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot BM$, $\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ABM}$. $\because CF \perp BE$, $AB = 1 = BC$, $\angle EBC = 30^\circ$, $\therefore \angle BCF = 60^\circ$, $CF = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}$, $\therefore \angle CFM = 90^\circ - \angle BCF = 30^\circ$, $\therefore CM = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{4}$, $\therefore BM = BC - CM = \frac{3}{4}$, $\therefore S_{\triangle ABF} = S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, 故答案为 $\frac{3}{8}$.



刷章测

1. C 【解析】①由两组对边分别相等可得该四边形是平行四边形, 添加一组邻边相等可得该四边形是菱形, 再添加一个角是直角可得该四边形是正方形, 故符合题意; ②由一组对边平行且相等可得该四边形是平行四边形, 添加一个角是直角可得该四边形是矩形, 再添加一组邻边相等可得该四边形是正方形,

故符合题意;③由两组对边分别相等和一组对边平行且相等均可得该四边形为平行四边形,添加一组邻边相等可得该四边形是菱形,故不能判定该四边形是正方形,不符合题意. 综上,正确的有①②. 故选 C.

2. A 【解析】∵ 四边形 ABDE, 四边形 BCHI 均为正方形, 点 D 在直线 HI 上, ∴ $AB=BD, BC=BI, \angle ACB = \angle DIB = 90^\circ$, ∴ $\text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DBI$ (HL), ∴ $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBI}$. 设 $AC=a, BC=b, AB=c$, ∴ 由勾股定理得, $a^2 + b^2 = c^2$, 即 $S_{\text{正方形ACFG}} + S_{\text{正方形BCHI}} = S_{\text{正方形ABDE}}$, ∴ $S_{\text{正方形ACFG}} + S_{\triangle ABC} + S_{\triangle AHJ} + S_{\text{四边形AJIB}} = S_{\triangle BID} + S_{\triangle DEJ} + S_{\text{四边形AJIB}}$, ∴ $S_{\text{正方形ACFG}} + S_{\triangle AHJ} = S_{\triangle DEJ}$, ∴ $S_{\text{正方形ACFG}} = S_{\triangle DEJ} - S_{\triangle AHJ} = 6 - 2 = 4$, 即 $a^2 = 4$, ∴ $a = 2$ (负值已舍去), 即 $AC = 2$, 故选 A.

3. D 【解析】如图, 连接 BD 交 AC 于 O. ∵ 四边形 ABCD 是菱形, ∴ $AC \perp BD, AC = 2OA$. ∵ $\angle DEF = \angle BHG = 90^\circ = \angle EHG$, ∴ $DE \parallel GH$, ∴ $\angle DAB = \angle BGH = 60^\circ$. ∵ E 是 AD 中点, ∴ $AE = DE = EF$. 又 ∵ $FD = 4, DE^2 + EF^2 = DF^2$, ∴ $DE = 2\sqrt{2}$, ∴ $AD = 2DE = 4\sqrt{2}$. ∴ $\angle DAO = \frac{1}{2} \angle DAB = 30^\circ$, ∴ $DO = \frac{1}{2} AD = 2\sqrt{2}$, ∴ $AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = 2\sqrt{6}$, ∴ $AC = 4\sqrt{6}$. 故选 D.

4. A 【解析】∵ 四边形 ABCD 是平行四边形, ∴ $OA = OC, OB = OD$. ∵ 对角线 BD 上的两点 M, N 满足 $BM = DN$, ∴ $OB - BM = OD - DN$, 即 $OM = ON$, ∴ 四边形 AMCN 是平行四边形. ∵ $OM = \frac{1}{2} AC$, ∴ $MN = AC$, ∴ 四边形 AMCN 是矩形. 故选 A.

5. C 【解析】如图 (1), ∵ $AD = DC = \frac{1}{2} BC$, E 是 BC 的中点, ∴ $CE = \frac{1}{2} BC = AD$. ∴ $AD \parallel BC$, ∴ 四边形 ADCE 是平行四边形. ∵ $AD = CD$, ∴ 四边形 ADCE 是菱形. 如图 (2), 连接 AE, DE, DE 交 AC 于 O. ∵ $AD = DC = \frac{1}{2} BC$, E 是

关键点拨

甲: 根据有一组邻边相等的平行四边形是菱形可证明四边形 ADCE 是菱形;

乙: 连接 AE, DE, DE 交 AC 于 O, 易证四边形 ADCE 是菱形, 四边形 ABED 是平行四边形, 由菱形及平行线的性质可证 $\triangle ABC$ 是直角三角形.

刷有所得

求正 n 边形 ($n \geq 3$ 且 n 为整数) 的每个内角度数的方法: $\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$ 或 $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

BC 的中点, ∴ $BE = CE = \frac{1}{2} BC = AD$. ∴ $AD \parallel BC$, ∴ 四边形 ADCE、四边形 ABED 是平行四边形. ∴ $AD = CD$, ∴ 四边形 ADCE 是菱形, ∴ $AC \perp DE$, ∴ $\angle EOC = 90^\circ$. ∴ 四边形 ABED 是平行四边形, ∴ $DE \parallel AB$, ∴ $\angle BAC = \angle EOC = 90^\circ$, ∴ $\triangle ABC$ 是直角三角形. 综上所述, 甲、乙都正确. 故选 C.

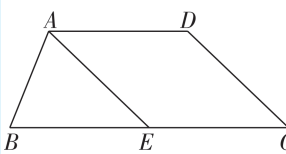


图 (1)

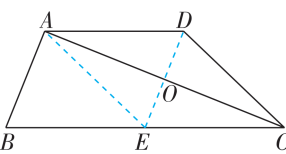
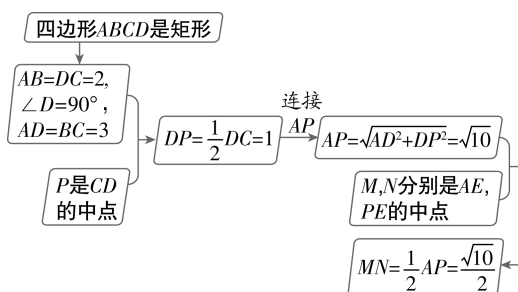
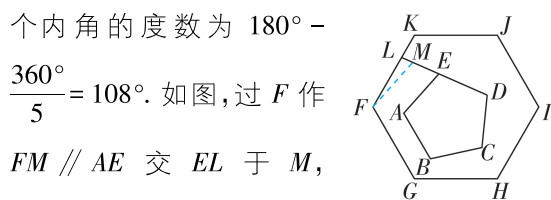


图 (2)

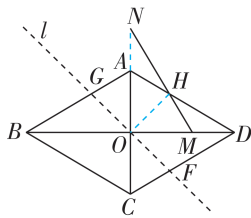
6. C 【解析】



7. B 【解析】正六边形 FGH IJK 每个内角的度数为 $180^\circ - \frac{360^\circ}{6} = 120^\circ$, 正五边形 ABCDE 每个内角的度数为 $180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$. 如图, 过 F 作 $FM \parallel AE$ 交 EL 于 M, ∴ $\angle FME = \angle AED = 108^\circ$, ∴ $\angle FML = 72^\circ$. ∵ $FM \parallel AE, AB \parallel FG$, $\angle GFM$ 与 $\angle EAB$ 开口方向相同, ∴ $\angle GFM = \angle EAB = 108^\circ$, ∴ $\angle LFM = 120^\circ - 108^\circ = 12^\circ$, ∴ $\angle ELF = 180^\circ - 72^\circ - 12^\circ = 96^\circ$. 故选 B.



8. C 【解析】∵ 四边形 ABCD 是菱形, $\frac{BD}{AC} = \frac{5}{3}$, ∴ $AC \perp BD$. 设 $BD = 10a, AC = 6a$, ∴ $OB = OD = \frac{1}{2} BD = 5a$, $OA = OC = \frac{1}{2} AC = 3a$. 如图所示, 连接 ON, OH,



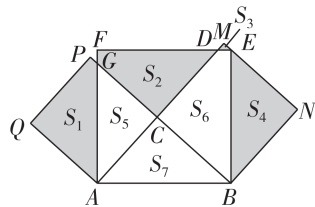
设直线 l 交 CD 于点 F , 交 AB 于点 G . \because 线段 BC 与 NM 关于过点 O 的直线 l 对称, 点 C 的对应点 M 在线段 OD 上, \therefore 易知 $\angle COF = \angle DOF = \frac{1}{2} \angle COM = 45^\circ$, $BO = NO = 5a$, $OM = OC = 3a$, $\therefore \angle BOG = \angle DOF = \angle COF = \angle NOG = 45^\circ$, $\therefore \angle BOG + \angle NOG = 90^\circ = \angle AOB$, $\therefore N, A, O$ 三点共线, $\therefore NA = NO - OA = 2a$. $\because MD = OD - OM = 2a$, $\therefore \frac{S_{\triangle DHM}}{S_{\triangle OHM}} = \frac{DM}{OM} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$, $NA = MD$. $\because AD \parallel BC$, $\therefore \angle DAO = \angle BCO$. 由对称的性质易得, $\angle NMO = \angle BCO$, $\therefore \angle NMO = \angle DAO$, $\therefore \angle NAH = \angle DMH$. 又 $\because \angle NHA = \angle DHM$, $\therefore \triangle NHA \cong \triangle DHM$ (AAS), $\therefore AH = MH$. 又 $\because OA = OM = 3a$, $OH = OH$, $\therefore \triangle OAH \cong \triangle OMH$ (SSS), $\therefore S_{\triangle OAH} = S_{\triangle OMH}$, $\therefore \frac{S_{\triangle DMH}}{S_{\text{四边形AOMH}}} = \frac{S_{\triangle DMH}}{S_{\triangle OHM} + S_{\triangle OAH}} = \frac{S_{\triangle DMH}}{2S_{\triangle OHM}} = \frac{S_{\triangle DHM}}{S_{\triangle OHM}} = \frac{DM}{OM} = \frac{2a}{3a} = \frac{2}{3}$. 故选 C.

9. 3 或 3.5 【解析】依题意得 $AP = t$ cm, $CQ = 3t$ cm, $\therefore PD = AD - AP = (12 - t)$ cm, $BQ = BC - CQ = (13 - 3t)$ cm. 当 $PQ = CD$ 时, 分两种情况讨论: ①当四边形 $PQCD$ 为平行四边形时, $PD = CQ$, 即 $12 - t = 3t$, 解得 $t = 3$; ②当四边形 $PQCD$ 为等腰梯形时, 易得 $CQ = PD + 2(BC - AD)$, 即 $3t = 12 - t + 2(13 - 12)$, 解得 $t = 3.5$. 综上, 当 $PQ = CD$ 时, $t = 3$ 或 3.5. 故答案为 3 或 3.5.

10. $BE = DF$ (答案不唯一) 【解析】添加条件 $BE = DF$. 理由: \because 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$, $AB = CD$, $\therefore \angle E = \angle F$. $\because BE = DF$, $\therefore BE + AB = CD + DF$, 即 $AE = CF$. 在 $\triangle AEG$ 和 $\triangle CFH$ 中, $\begin{cases} \angle E = \angle F, \\ AE = CF, \\ \angle A = \angle C, \end{cases}$ $\therefore \triangle AEG \cong \triangle CFH$ (ASA). 故答案为 $BE = DF$ (答案不唯一).

11. $12\sqrt{5}$ 【解析】

如图, 在正方形 $ABEF$ 中, $AF = AB$, $\angle F = \angle FAB = 90^\circ$.



思路分析

设 $BD = 10a$, $AC = 6a$, 首先根据菱形的性质得到 $OB = OD = \frac{1}{2}BD = 5a$, $OA = OC = \frac{1}{2}AC = 3a$, 连接 ON, OH , 设直线 l 交 CD 于点 F , 交 AB 于点 G , 易得 N, A, O 三点共线, $NO = 5a$, $OM = 3a$, 可得 $NA = NO - OA = 2a$, $MD = OD - OM = 2a$, 然后证明 $\triangle NHA \cong \triangle DHM$ (AAS), 得到 $AH = MH$, 再证明 $\triangle OAH \cong \triangle OMH$ (SSS), 得到 $S_{\triangle OAH} = S_{\triangle OMH}$, 进而求解即可.

思路分析

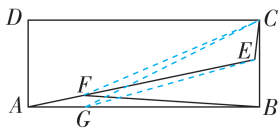
根据 $PQ = CD$, 分两种情况讨论: ①四边形 $PQCD$ 为平行四边形, 可得方程 $12 - t = 3t$. ②四边形 $PQCD$ 为等腰梯形, 可得方程 $3t = 12 - t + 2(13 - 12)$. 分别解方程即可求得答案.

$\because \angle ACB = 90^\circ$, $\therefore \angle FAD + \angle CAB = 90^\circ$, $\angle ABC + \angle CAB = 90^\circ$, $\therefore \angle ABC = \angle FAD$, $\therefore \triangle ADF \cong \triangle BGA$, $\therefore S_2 + S_5 = S_7 + S_5$, $\therefore S_2 = S_7$. $S_{\text{正方形ACPQ}} = S_1 + S_5$, $S_{\text{正方形BCMN}} = S_3 + S_6 + S_4$, $S_{\text{正方形ABEF}} = S_2 + S_5 + S_6 + S_7$. $\because \angle ACB = 90^\circ$, \therefore 由勾股定理可得 $S_{\text{正方形ABEF}} = S_{\text{正方形ACPQ}} + S_{\text{正方形BCMN}}$, $\therefore S_1 + S_5 + S_6 + S_3 + S_4 = S_2 + S_5 + S_6 + S_7$, $\therefore S_1 + S_3 + S_4 = S_2 + S_7$, $\therefore S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 2S_2 + S_7 = 3S_7$. $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AC = 4$, $AB = 6$, $\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 2\sqrt{5}$, $\therefore 3S_7 = 3 \times \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{5} = 12\sqrt{5}$, 故答案为 $12\sqrt{5}$.

12. $3\sqrt{5}$

【解析】如

图, 在 AB 上截取 $AG = AF$, 连接 GE ,



CF, CG . 在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle AEG$ 中, $\begin{cases} AB = AE, \\ \angle BAF = \angle EAG, \\ AF = AG, \end{cases}$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle AEG$ (SAS), $\therefore BF = GE$, $\therefore BF + CE = GE + CE \geq CG$, $\therefore BF + CE$ 的最小值为 CG 的长. $\because AB = AE = 8$, 且 $AF = \frac{1}{4}AE$, $\therefore AF = AG = 2$, $\therefore BG = AB - AG = 6$. \because 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AD = 3$, $\therefore \angle ABC = 90^\circ$, $BC = AD = 3$. 在 $\text{Rt} \triangle BCG$ 中, $CG = \sqrt{BG^2 + CB^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$, $\therefore BF + CE$ 的最小值为 $3\sqrt{5}$, 故答案为 $3\sqrt{5}$.

13. 【解】由题意知 $\triangle ABC$ 和 $\triangle AEC$ 关于折痕 AC

对称, $AB = 4$,

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle AEC$,

$\therefore AE = AB = 4$, $\angle B = \angle E = 90^\circ$.

在矩形 $ABCD$ 中, $AB = CD$, $\angle B = \angle D = 90^\circ$,

$\therefore AE = CD$, $\angle E = \angle D = 90^\circ$.

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle CDF$ 中, $\begin{cases} \angle E = \angle D, \\ \angle AFE = \angle CFD, \\ AE = CD, \end{cases}$

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle CDF$,

$\therefore EF = DF$,

设 $EF = DF = x$.

$\therefore AD = 8$,

$\therefore AF = 8 - x$.

在 $\text{Rt} \triangle AEF$ 中,

$$AE^2 + EF^2 = AF^2,$$

$$\text{即 } 4^2 + x^2 = (8-x)^2,$$

解得 $x=3$,

$\therefore EF$ 的长为 3.

14. (1) 【证明】选择① $AB \perp BC$.

$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC$,

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\therefore AB \perp BC$,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$,

\therefore 平行四边形 $ABCD$ 是矩形.

选择② $AC = BD$.

$\therefore AB \parallel CD, AD \parallel BC$,

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$\therefore AC = BD$,

\therefore 平行四边形 $ABCD$ 是矩形.

(选择其中一个证明即可)

(2) 【解】由 (1) 得四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$.

$\therefore \angle ACB = 30^\circ, AB = 3$,

$\therefore AC = 2AB = 2 \times 3 = 6$,

\therefore 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$,

$\therefore S_{\text{矩形}ABCD} = AB \times BC = 3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

15. 【解】(1) \therefore 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle B + \angle C = 180^\circ$.

$\therefore \angle B = 50^\circ$,

$\therefore \angle C = 130^\circ$,

\therefore 由折叠的性质可得 $\angle N = \angle C = 130^\circ$.

故答案为 130° .

(2) $\triangle MAB$ 为直角三角形. 理由如下:

由折叠的性质可知 $BE = ME$.

$\therefore E$ 是 AB 的中点,

$\therefore AE = BE = ME$,

$\therefore \angle AME = \angle MAE, \angle BME = \angle MBE$.

$\therefore \angle AME + \angle MAE + \angle BME + \angle MBE = 180^\circ$,

$\therefore \angle AME + \angle BME = \angle AMB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle MAB$ 为直角三角形.

(3) DP 的长为 $\sqrt{15} - \sqrt{3}$. 由折叠的性质易得 DE 垂直平分 BM .

思路分析

(2) 根据折叠的性质和 E 为 AB 的中点, 得到 $AE = BE = ME$, 然后根据等边对等角结合三角形的内角和为 180° , 求出 $\angle AMB = 90^\circ$, 即可得出结论;

(3) 先证明 $DE \parallel AM$, 得到 $\angle AED = \angle MAB = 30^\circ$, 作 $AF \perp DE$ 于 F , 根据含 30° 度角的直角三角形的性质和勾股定理求出 AF , EF 的长, 再利用等腰三角形三线合一的性质求出 PF 的长, 利用勾股定理求出 DF 的长, 最后利用线段的和差关系进行求解即可.

由 (2) 可知 $AM \perp BM, \therefore DE \parallel AM$,

$\therefore \angle AED = \angle MAB = 30^\circ$.

在菱形 $ABCD$ 中, $AB = AD = 4$.

$\therefore E$ 为 AB 的中点, $\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 2$.

如图, 作 $AF \perp DE$ 于 F , 则 $AF = \frac{1}{2}AE = 1$,

$\therefore EF = \sqrt{AE^2 - AF^2} = \sqrt{3}$.

$\therefore \triangle AEP$ 是以 $\angle EAP$

为顶角的等腰三角形,

$\therefore AE = AP$,

$\therefore PF = EF = \sqrt{3}$.

在 $\text{Rt} \triangle AFD$ 中, 由勾股定理得 $DF =$

$\sqrt{AD^2 - AF^2} = \sqrt{15}$,

$\therefore DP = DF - FP = \sqrt{15} - \sqrt{3}$.

16. 【解】(1) $\therefore \square ABCD$ 中, $AB = 6$ cm,

$\therefore AB = CD = 6$ cm.

当点 P 在 DC 边上运动时, $DP = 4t$ cm,

$\therefore CP = (6 - 4t)$ cm,

故答案为 $4t, (6 - 4t)$.

(2) $\therefore AB = 6$ cm, $AD = 10$ cm, $BD = 8$ cm,

$\therefore AB^2 + BD^2 = 6^2 + 8^2 = 10^2 = AD^2$,

$\therefore \triangle ABD$ 是直角三角形, 且 $\angle ABD = 90^\circ$.

\therefore 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD, AB = CD = 6$ cm,

$\therefore \angle BDC = \angle ABD = 90^\circ$,

\therefore 当 $\triangle OPD$ 是等腰三角形时, $DP = DO = 4t$ cm,

$\therefore \angle DOP = \angle DPO$.

又 $\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore \angle BAO = \angle DPO$.

$\therefore \angle AOB = \angle DOP$,

$\therefore \angle BAO = \angle BOA$,

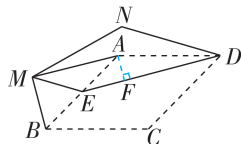
$\therefore AB = BO = 6$ cm.

又 $\therefore BO = BD - DO = (8 - 4t)$ cm,

$\therefore 8 - 4t = 6$, 解得 $t = \frac{1}{2}$,

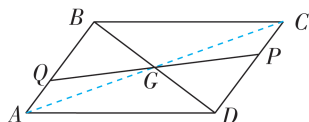
\therefore 在 (1) 的条件下, 当 $\triangle OPD$ 是等腰三角形时, t 的值是 $\frac{1}{2}$.

(3) t 的值为 $\frac{6}{5}$ 或 5 或 6. 连接 AC 交 BD 于



G , 则点 G 为 $\square ABCD$ 的对称中心. 由题意知 $AQ=t$ cm, $\therefore BQ=(6-t)$ cm. 如图(1), 当点 P 在 CD 上, 且 PQ 过点 G 时, 直线 PQ 平分 $\square ABCD$ 的面积.

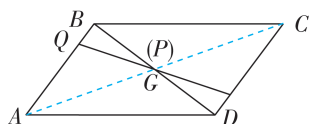
$\therefore AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle ABD = \angle CDB, \angle BQG = \angle DPG$.
 $\therefore GB = GD, \therefore \triangle BQG \cong \triangle DPG$ (AAS),
 $\therefore BQ = DP$, 即 $4t = 6 - t$,
 $\therefore t = \frac{6}{5}$.



图(1)

如图(2), 当点 P 运动到点 G 时, 直线 PQ 平分 $\square ABCD$ 的面积, 此时 $BP = PD = 4$ cm.

$\therefore BP = (4t - 16)$ cm, $\therefore 4t - 16 = 4, \therefore t = 5$.



图(2)

当 Q 与 B 重合, P 与 D 重合时, 直线 PQ 平分 $\square ABCD$ 的面积, 此时 $t = 6$.

综上所述, t 的值为 $\frac{6}{5}$ 或 5 或 6.

17.【解】(1) 在平行四边形、菱形、矩形、正方形中, 只有正方形的邻边相等且对角互补, \therefore 正方形一定是“等补四边形”. 故答案为 C.

(2) ①四边形 $AFHB$ 是“等补四边形”. 理由:

如图(1), 连接 CF .

\therefore 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore AB = BC$,

$\angle ABD = \angle CBD = 45^\circ$.

又 $\therefore BF = BF, \therefore \triangle ABF \cong \triangle CBF$ (SAS),

$\therefore AF = CF, \angle BAF = \angle BCF$.

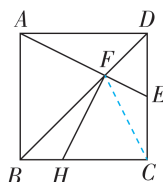
$\therefore HF \perp AE, \therefore \angle AFH = \angle ABH = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAF + \angle BHF = 180^\circ$.

$\therefore \angle BHF + \angle FHC = 180^\circ$,

$\therefore \angle FHC = \angle BAF$,

$\therefore \angle FHC = \angle FCH$,



图(1)

思路分析

(2) 证明 $\triangle ABD$ 是直角三角形, 且 $\angle ABD = 90^\circ$, 由 $AB \parallel CD$ 可得 $\angle BDC = \angle ABD = 90^\circ$, 可得当 $\triangle OPD$ 是等腰三角形时, $DP = DO = 4t$ cm, 再证明 $\angle BAO = \angle BOA$, 可得 $BO = AB = 6$ cm, 根据 $BO = BD - DO = (8 - 4t)$ cm 建立方程求解即可.

$\therefore FH = FC, \therefore AF = FH, \therefore$ 四边形 $AFHB$ 是“等补四边形”.

②如图(2), 连接 AH , 由①知,

$AF = FH, \angle AFH = 90^\circ$,

$\therefore \triangle AFH$ 为等腰直角三角形,

$\therefore \angle HAF = 45^\circ$. 将 $\triangle ABH$ 绕

点 A 逆时针旋转到 $\triangle ADL$ 的

位置, 点 H 的对应点为 L , 则

$AL = AH, LD = BH, \angle LAD = \angle BAH$, 则 $\angle LAE = \angle LAD + \angle DAE = \angle DAE + \angle BAH = 90^\circ - \angle HAF = 45^\circ = \angle HAF$.

$\therefore AH = AL, AE = AE, \therefore \triangle ALE \cong \triangle AHE$ (SAS), $\therefore HE = LE = LD + DE = BH + DE$, 则 $\triangle CHE$ 的周长为 $HE + CH + CE = BH + DE + CH + CE = BC + CD = 2a$.

③如图(3), 连接 CF .

\therefore 四边形 $ECHF$ 是“等补四边形”, $\angle EFH + \angle C = 180^\circ$, 则存在 $FH = EF, FE = CE, FH = CH, CH = CE$ 四种情况.

当 $FH = CH$ 时, 由①知 $FH = AF = CF, \therefore FH = AF = CF = CH$,

$\therefore \triangle FCH$ 为等边三角形, $\therefore \angle FCB = 60^\circ = \angle FAB$, 则 $\angle DAE = 30^\circ$.

在 $\text{Rt} \triangle ADE$ 中, $AE = 2DE, \therefore DE^2 + DA^2 = (2DE)^2, \therefore DE = \frac{\sqrt{3}}{3}a, \therefore CE = CD - DE = a - \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}a$.

当 $CE = EF$ 时, $\therefore HE = HE, \therefore \text{Rt} \triangle EHF \cong \text{Rt} \triangle EHC$ (HL), $\therefore FH = HC$. 又 $\therefore FH = FC, \therefore \triangle FCH$ 为等边三角形, 故该种情况与 $FH = CH$ 的情况相同.

当 $EC = CH$ 时, 由②知 $\triangle CEH$ 的周长为 $2a$. 设 $CH = EC = x, \therefore HE = \sqrt{2}x$, 则 $x + x + \sqrt{2}x = 2a$, 解得 $x = (2 - \sqrt{2})a, \therefore CE = (2 - \sqrt{2})a$.

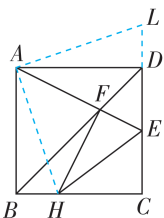
当 $EF = HF$ 时, $AF = EF$.

\therefore 当点 F 是 BD 的中点时, 才存在 $AF = EF$, 此时点 E 与点 C 重合, 不符合题意, 故该种情况不存在.

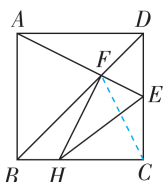
综上所述, CE 的长度为 $(2 - \sqrt{2})a$ 或 $\frac{3 - \sqrt{3}}{3}a$.

关键点拨

(2) ③注意分情况讨论: $FH = CH; CE = EF; EC = CH; EF = HF$.



图(2)



图(3)