**2024-2025学年山西省临汾市八年级（下）期末数学试卷**

**一、选择题（本大题共10小题，每小题3分，共30分．在每个小题给出的四个选项中，只有一项符合要求，请选出并在答题卡上将该项涂黑）**

1．（3分）下列各式：，，，，其中是分式的是（　　）

A． B． C． D．

2．（3分）小盟通过*Deepseek*搜索得知小米汽车中涉及激光雷达，激光雷达波长905纳米，相当于0.000000905米，数字0.000000905用科学记数法表示为（　　）

A．0.905×10﹣6 B．9.05×10﹣6

C．9.05×10﹣7 D．90.5×10﹣5

3．（3分）已知反比例函数*y*，下列结论不正确的是（　　）

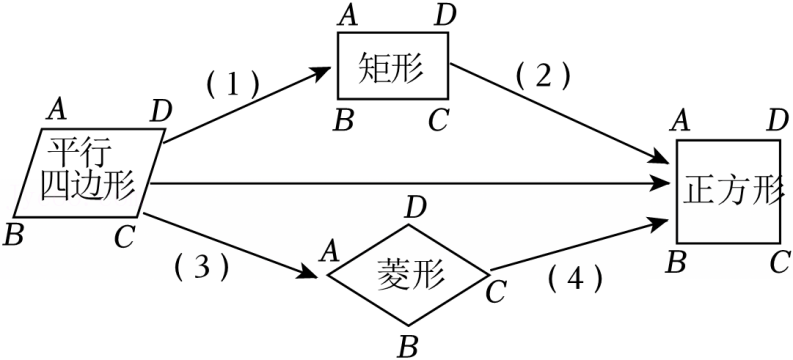
A．图象必经过点（﹣1，2）

B．*y*随*x*的增大而增大

C．图象在第二、四象限内

D．若*x*＞1，则0＞*y*＞﹣2

4．（3分）小琦在复习几种特殊四边形的关系时整理出如图所示的转换图，（1）（2）（3）（4）处需要添加条件，则下列条件添加错误的是（　　）



A．（1）处可填∠*A*＝90° B．（2）处可填*AD*＝*AB*

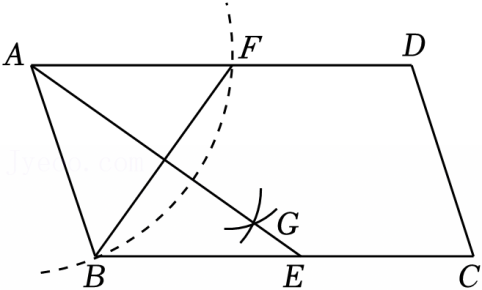
C．（3）处可填*AD*＝*CB* D．（4）处可填∠*A*＝90°

5．（3分）某校在体育中考结束后还有30位同学未达到满分60分，这30位同学的成绩统计如下表（每个同学的分数都是整数），小明是其中一位未满分同学．若去掉小明的成绩，则剩下的29位同学的成绩中，下列统计量一定不受影响的是（　　）

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 成绩 | 55分及以下 | 56分 | 57分 | 58分 | 59分 |
| 人数 | 2 | 1 | 3 | 9 | 15 |

A．方差 B．平均数 C．中位数 D．众数

6．（3分）如图，在平行四边形*ABCD*中，以*A*为圆心，*AB*为半径画弧，交*AD*于*F*，再分别以*B*、*F*为圆心，大于*BF*的长为半径画弧，两弧相交于点*G*，若*BF*＝6，*AB*＝5，则*AE*的长为（　　）



A．11 B．6 C．8 D．10

7．（3分）2025年“体重管理年”正式启动，其中所涉及的体质指数“*BMI*”是衡量人体胖瘦程度的标准，其计算公式为（*m*表示体重，单位：公斤；*h*表示身高，单位：米），成年人*BMI*数值标准见下表；

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *BMI*范围 | *BMI*＜16 | 16≤*BMI*＜18.5 | 18.5≤*BMI*＜24 | 24≤*BMI*＜28 | *BMI*≥28 |
| 胖瘦程度 | 瘦弱 | 偏瘦 | 正常 | 偏胖 | 肥胖 |

已知某位成年人身高为1.6米，以下说法正确的是（　　）

A．*BMI*数值随着体重*m*的值的增加而减少

B．*BMI*数值与体重*m*的值之间成正比例关系

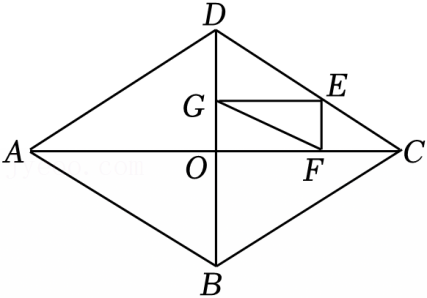
C．*BMI*数值与体重*m*的值之间的函数图象为双曲线位于第一象限的一支

D．如果这位成年人的体重为64公斤，他的胖瘦程度属于正常

8．（3分）对于实数*a*、*b*，定义一种新运算“⊗”为：，这里等式右边是通常的实数运算．例如：，则方程的解是（　　）

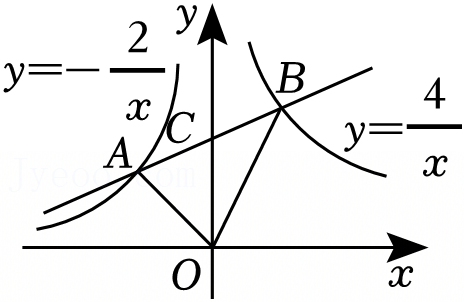
A．*x*＝6 B．*x*＝5 C．*x*＝4 D．无解

9．（3分）如图，菱形*ABCD*的对角线*AC*，*BD*相交于点*O*，*BD*＝12，*AC*＝16，*E*是边*CD*上的一动点，过点*E*作*EF*⊥*OC*于点*F*，*EG*⊥*OD*于点*G*，连接*FG*，则*FG*的最小值为（　　）



A．3.6 B． C． D．4.8

10．（3分）如图，点*A*是反比例函数*y*在第二象限内图象上一点，点*B*是反比例函数*y*在第一象限内图象上一点，直线*AB*与*y*轴交于点*C*，且*AC*＝*BC*，连接*OA*、*OB*，则△*AOB*的面积是（　　）

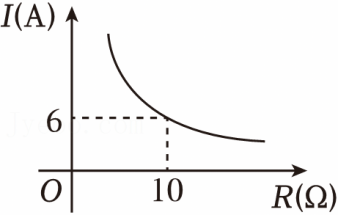


A．2 B．3 C．3.5 D．4

**二、填空题（本大题共5个小题，每小题3分，共15分．把答案写在答题卡的横线上）**

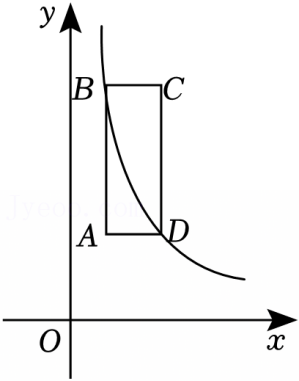
11．（3分）函数中，自变量*x*的取值范围是　 　 ．

12．（3分）已知蓄电池的电压为定值，使用蓄电池时，电流*I*（单位：*A*）与电阻*R*（单位：Ω）是反比例函数关系，它的图象如图所示，如果以此蓄电池为电源的用电器，其限制电流不能超过15*A*，那么用电器可变电阻*R*应控制的范围是　 　 ．

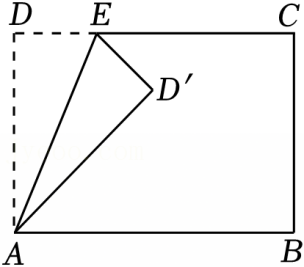


13．（3分）已知关于*x*的方程的解为非负数，则*m*的取值范围是　 　 ．

14．（3分）如图，矩形*ABCD*的边*AB*与*y*轴平行，顶点*A*的坐标为（1，2），点*B*和点*D*在反比例函数的图象上，则矩形*ABCD*的周长为　 　 ．



15．（3分）如图，矩形*ABCD*中，*AD*＝5，*AB*＝6，点*E*为射线*DC*上一个动点，把△*ADE*沿直线*AE*折叠，当点*D*对应点*D*'刚好落在线段*AB*的垂直平分线上时，*DE*的长为　 　 ．



**三、解答题（本题共8个小题，共75分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）**

16．（9分）计算：

（1）；

（2）．

17．（9分）[教材呈现]如图是华师版八年级下册数学教材第77页的部分内容．

|  |
| --- |
| 菁优网：http://www.jyeoo.com  平行四边形的性质定理3 平行四边形的对角线互相平分．  我们可以用演绎推理证明这个结论．  已知：如图▱*ABCD*的对角线*AC*和*BD*相交于点*O*．  求证：*OA*＝*OC*，*OB*＝*OD*． |

请根据教材提示，结合图1，写出完整的证明过程．

[性质应用]如图2，在▱*ABCD*中，对角线*AC*、*BD*相交于点*O*，*EF*过点*O*且与边*AD*、*BC*分别相交于点*E*、*F*．

求证：*OE*＝*OF*．

[拓展提升]在[性质应用]的条件下，连接*AF*，若*EF*⊥*AC*，△*ABF*的周长是13，则▱*ABCD*的周长是 　 　 ．

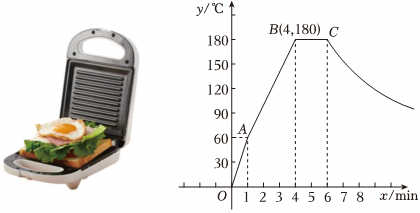
18．（9分）某款三明治机制作三明治的工作原理如下：

①预热阶段：开机1分钟空烧预热至60℃，机器温度*y*与时间*x*成一次函数关系；

②操作阶段：操作3分钟后机器温度均衡升至最高温度180℃后保持恒温状态；

③断电阶段：操作完成后进行断电降温，机器温度*y*与时间*x*成反比例关系．

如图所示为某次制作三明治时机器温度*y*（℃）与时间*x*（*min*）的函数图象，请结合图象回答下列问题：



（1）预热阶段机器温度上升的平均速度是　 　 ℃/*min*，开机3分钟时，温度为　 　 ℃；

（2）当0≤*x*≤4时，求机器温度*y*与时间*x*的函数关系式；

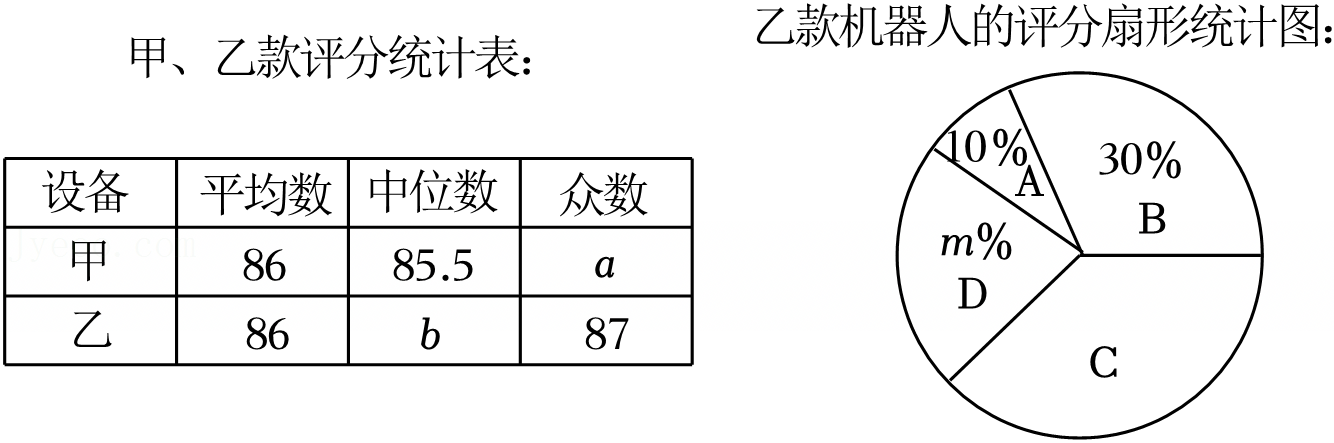
（3）求三明治机工作温度持续在100℃以上的时间是多少分钟？

19．（9分）甲公司推出了“*DeepSeek*”*AI*机器人（简称甲款），乙公司推出了“豆包”*AI*机器人（简称乙款）．有关人员开展了对甲，乙两款机器人的使用满意度评分测验，并分别随机抽取20份评分数据，对数据进行整理、描述和分析（评分分数用*x*表示，分为四个组进行统计：*A*组：60＜*x*≤70，*B*组：70＜*x*≤80，*C*组：80＜*x*≤90，*D*组：90＜*x*≤100），下面给出了部分信息：

甲款评分数据：

64，70，75，76，78，78，85，85，85，85，86，89，90，90，94，95，98，98，99，100；

乙款评分数据中*C*组的所有数据：84，86，87，87，87，88，90，90．



根据以上信息，解答下列问题：

（1）上述图表中*a*＝　 　 ，*b*＝　 　 ，*m*＝　 　 ；

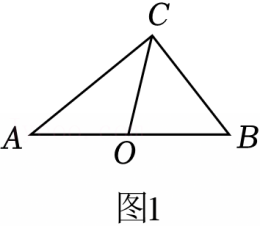
（2）在此次测验中，有280人对甲款进行评分、300人对乙款进行评分．请通过计算，分别估计对甲、乙两款机器人评价为非常满意（*D*组：90＜*x*≤100）的用户人数．

20．（9分）某超市用3000元购进某种干果销售，由于销售状况良好，超市又调拨9000元资金购进该种干果，但这次的进价比第一次的进价提高了20%，购进干果数量是第一次的2倍还多300千克．

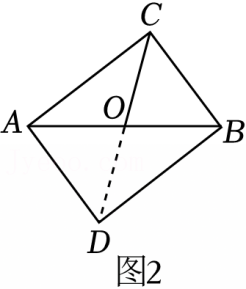
（1）该种干果的第一次进价是每千克多少元？

（2）如果超市将这种干果全部按每千克9元的价格出售，售完这种干果共盈利多少元？

21．（9分）（1）如图1，在Rt△*ABC*中，∠*ACB*＝90°，*CO*为斜边*AB*上的中线，那么*OC*与*AB*之间存在什么样的数量关系呢？



为解决这一问题，小明同学想的办法是：如图2，延长*CO*到*D*，使*DO*＝*CO*，连接*AD*，*BD*…

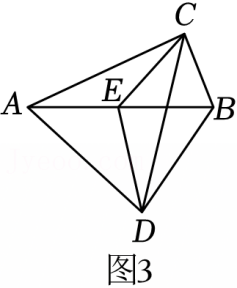


请你顺着小明的思路完成后面的解答；

思考：通过第（1）小题的解答，你能得到什么结论：　 　 ；

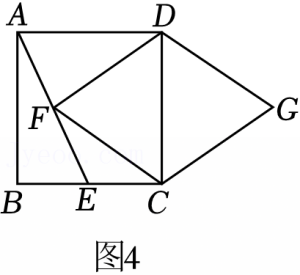
【深入探究】

（2）如图3，已知*AC*⊥*BC*，*AD*⊥*DB*，*E*为*AB*的中点．则∠*CED*与∠*CAD*之间的数量关系为　 　 ；



【应用提升】

（3）如图4，在正方形*ABCD*中，*E*为*BC*上一点，*F*为*AE*的中点，分别过点*D*、*C*作*FC*、*FD*的平行线，交于点*G*，求证：四边形*FCGD*为菱形；



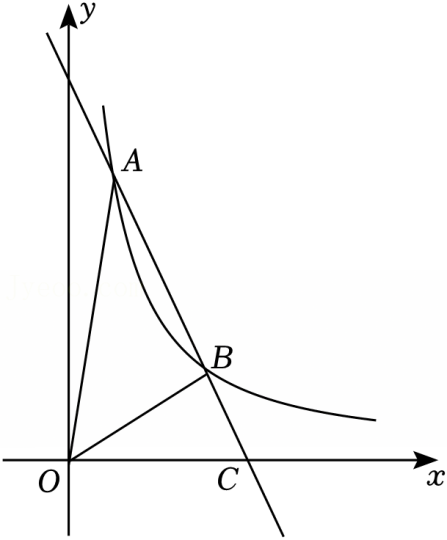
（4）若，请直接写出菱形*FCGD*的面积．

22．（9分）如图，一次函数*y*＝*kx*+*b*的图象与反比例函数的图象交于点*A*（1，6）和点*B*（3*n*﹣6，2），与*x*轴交于点*C*．

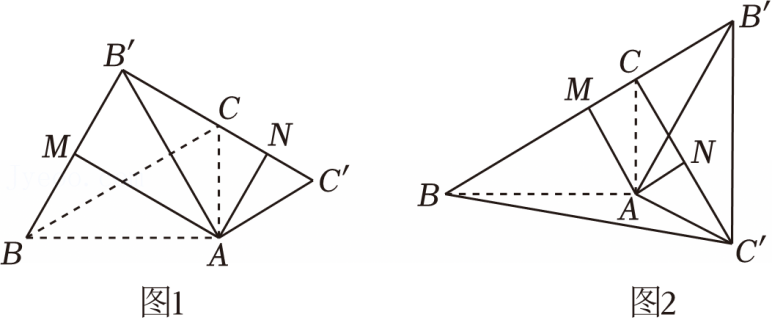
（1）求一次函数和反比例函数的表达式；

（2）根据图象，请直接写出关于*x*的不等式的解集；

（3）连接*OA*、*OB*，在直线*AC*上是否存在点*D*，使△*OCD*的面积是△*AOB*面积的？若存在，求出点*D*的坐标；若不存在，请说明理由．



23．（12分）问题情境：在Rt△*ABC*中，∠*BAC*＝90°，∠*ABC*＝30°，将Rt△*ABC*绕点*A*顺时针旋转α（0°＜α＜180°），点*B*，*C*的对应点分别为点*B*′，*C*′，连接*BB*′，*CC*′，*M*，*N*分别为*BB*′，*CC*′的中点，连接*AM*，*AN*．



（1）猜想结论：如图1，当*B*′*C*′恰好经过点*C*时，*B*′*M*与*AN*的位置关系是　 　 ，数量关系是　 　 ．

（2）问题解决：如图2，当*BB*′恰好经过点*C*时．

①试猜想四边形*AMCN*的形状，并说明理由；

②连接*BC*′，若*AC*＝2，请直接写出线段*BC*′的长．（提示：“在直角三角形中，30°所对的直角边等于斜边的一半”）

**2024-2025学年山西省临汾市八年级（下）期末数学试卷**

**参考答案与试题解析**

**一．选择题（共10小题）**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 答案 | A | C． | B | C | D | C | B | C | D | B |

**一、选择题（本大题共10小题，每小题3分，共30分．在每个小题给出的四个选项中，只有一项符合要求，请选出并在答题卡上将该项涂黑）**

1．（3分）下列各式：，，，，其中是分式的是（　　）

A． B． C． D．

【分析】判断分式的依据是看分母中是否含有字母，如果含有字母则是分式，如果不含有字母则不是分式．

【解答】解：*A*、，分母为*x*，含有字母，符合分式定义，是分式，符合题意；

*B*、，分母为常数2，不含字母，属于整式中的系数形式，不是分式，不符合题意；

*C*、，分母为常数π（圆周率），不含字母，不是分式，不符合题意；

*D*、，分母为常数5，不含字母，不是分式，不符合题意；

故选：*A*．

【点评】本题考查了分式的定义，熟练掌握该知识点是关键．

2．（3分）小盟通过*Deepseek*搜索得知小米汽车中涉及激光雷达，激光雷达波长905纳米，相当于0.000000905米，数字0.000000905用科学记数法表示为（　　）

A．0.905×10﹣6 B．9.05×10﹣6

C．9.05×10﹣7 D．90.5×10﹣5

【分析】科学记数法的表示形式为*a*×10*n*的形式，其中1≤|*a*|＜10，*n*为整数．确定*n*的值时，要看把原数变成*a*时，小数点移动了多少位，*n*的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值≥10时，*n*是正数；当原数的绝对值＜1时，*n*是负数．

【解答】解：0.000000905＝9.05×10﹣7．

故选：*C*．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为*a*×10*n*的形式，其中1≤|*a*|＜10，*n*为整数，表示时关键要正确确定*a*的值以及*n*的值．

3．（3分）已知反比例函数*y*，下列结论不正确的是（　　）

A．图象必经过点（﹣1，2）

B．*y*随*x*的增大而增大

C．图象在第二、四象限内

D．若*x*＞1，则0＞*y*＞﹣2

【分析】根据反比例函数的性质：当*k*＜0，双曲线的两支分别位于第二、第四象限，在每一象限内*y*随*x*的增大而增大进行分析即可．

【解答】解：*A*、图象必经过点（﹣1，2），说法正确，不合题意；

*B*、*k*＝﹣2＜0，每个象限内，*y*随*x*的增大而增大，说法错误，符合题意；

*C*、*k*＝﹣2＜0，图象在第二、四象限内，说法正确，不合题意；

*D*、若*x*＞1，则﹣2＜*y*＜0，说法正确，不符合题意；

故选：*B*．

【点评】此题主要考查了反比例函数的性质，关键是掌握反比例函数的性质：

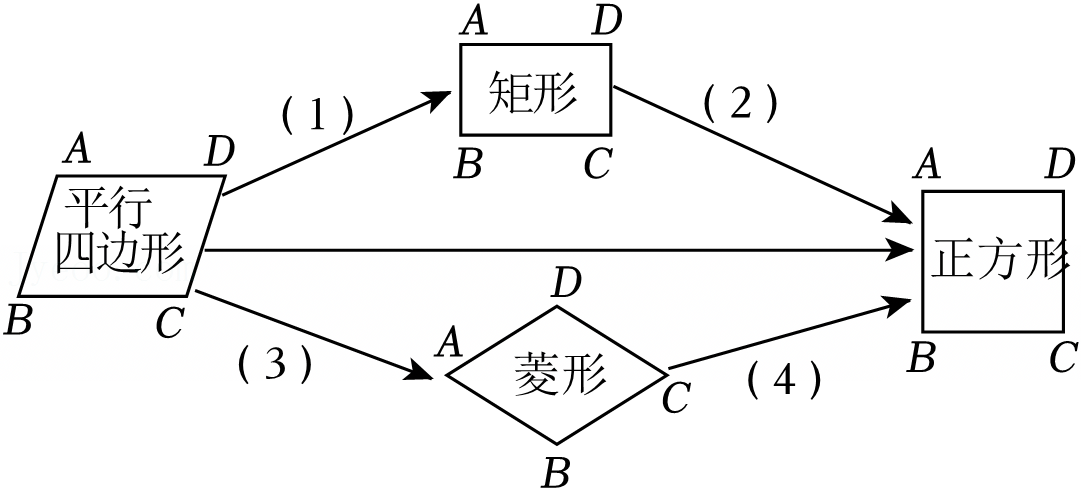
（1）反比例函数*y*（*k*≠0）的图象是双曲线；

（2）当*k*＞0，双曲线的两支分别位于第一、第三象限，在每一象限内*y*随*x*的增大而减小；

（3）当*k*＜0，双曲线的两支分别位于第二、第四象限，在每一象限内*y*随*x*的增大而增大．

注意：反比例函数的图象与坐标轴没有交点．

4．（3分）小琦在复习几种特殊四边形的关系时整理出如图所示的转换图，（1）（2）（3）（4）处需要添加条件，则下列条件添加错误的是（　　）



A．（1）处可填∠*A*＝90° B．（2）处可填*AD*＝*AB*

C．（3）处可填*AD*＝*CB* D．（4）处可填∠*A*＝90°

【分析】根据正方形、矩形、菱形的判定定理判断即可．

【解答】解：*A*、有一个角是直角的平行四边形是矩形，

∴（1）处可填∠*A*＝90°是正确的，故该选项不符合题意；

*B*、一组邻边相等的矩形是正方形，

∴（2）处可填*AD*＝*AB*是正确的，故该选项不符合题意；

*C*、对边相等是平行四边形的性质，故该选项符合题意；

*D*、有一个角是直角的菱形是正方形，故该选项不符合题意；

故选：*C*．

【点评】本题主要考查了矩形的判定，正方形的判定和菱形的判定，熟练掌握特殊四边形的关系是解题的关键．

5．（3分）某校在体育中考结束后还有30位同学未达到满分60分，这30位同学的成绩统计如下表（每个同学的分数都是整数），小明是其中一位未满分同学．若去掉小明的成绩，则剩下的29位同学的成绩中，下列统计量一定不受影响的是（　　）

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 成绩 | 55分及以下 | 56分 | 57分 | 58分 | 59分 |
| 人数 | 2 | 1 | 3 | 9 | 15 |

A．方差 B．平均数 C．中位数 D．众数

【分析】逐一分析各统计量是否受去掉一个数据的影响．

【解答】解：平均数：去掉小明的成绩后，总和和个数均改变，平均数可能变化，排除*B*；

方差：方差依赖于数据与平均数的差值，平均数改变则方差改变，排除*A*；

中位数：原数据共30人，中位数为第15、16名的平均（58.5分），去掉一人后，中位数为第15名：

若小明是59分，剩余59分14人，第15名为58分；

若小明是58分，剩余58分8人，第15名为59分．

因此中位数可能变化，排除*C*．

众数：原众数为59分（15人），无论小明属于哪个分数段：

若小明是59分，剩余59分14人，仍为最多；

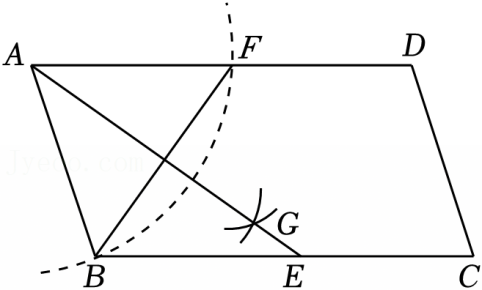
若小明非59分，剩余59分15人，仍为最多．

因此众数始终为59分，不受影响．

故选：*D*．

【点评】本题考查统计量的性质，根据众数，平均数，方差和中位数的定义，掌握以上性质是解题的关键．

6．（3分）如图，在平行四边形*ABCD*中，以*A*为圆心，*AB*为半径画弧，交*AD*于*F*，再分别以*B*、*F*为圆心，大于*BF*的长为半径画弧，两弧相交于点*G*，若*BF*＝6，*AB*＝5，则*AE*的长为（　　）



A．11 B．6 C．8 D．10

【分析】连接*EF*，根据题意得出*AE*垂直平分*BF*，*AF*＝*AB*＝5，得出*OB*＝*OF*＝3，∠*BAE*＝∠*FAE*，由勾股定理求出*OA*，再证出*BE*＝*AB*＝*AF*，得出四边形*ABEF*是平行四边形，由平行四边形的性质得出*OA*＝*OEAE*，即可得出结果．

【解答】解：连接*EF*，如图所示：

根据题意得：*AE*垂直平分*BF*，*AF*＝*AB*＝5，

∴∠*AOF*＝90°，*OB*＝*OF*＝3，∠*BAE*＝∠*FAE*，

∴*OA*4，

∵四边形*ABCD*是平行四边形，

∴*AD*∥*BC*，

∴∠*FAE*＝∠*AEB*，

∴∠*BAE*＝∠*AEB*，

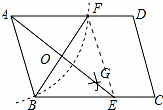
∴*BE*＝*AB*＝*AF*，

∴四边形*ABEF*是平行四边形，

∴*OA*＝*OEAE*，

∴*AE*＝2*OA*＝8；

故选：*C*．



【点评】本题考查了平行四边形的性质与判定、垂直平分线的性质、勾股定理；熟练掌握平行四边形的性质，证明四边形*ABEF*是平行四边形是解决问题的关键．

7．（3分）2025年“体重管理年”正式启动，其中所涉及的体质指数“*BMI*”是衡量人体胖瘦程度的标准，其计算公式为（*m*表示体重，单位：公斤；*h*表示身高，单位：米），成年人*BMI*数值标准见下表；

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *BMI*范围 | *BMI*＜16 | 16≤*BMI*＜18.5 | 18.5≤*BMI*＜24 | 24≤*BMI*＜28 | *BMI*≥28 |
| 胖瘦程度 | 瘦弱 | 偏瘦 | 正常 | 偏胖 | 肥胖 |

已知某位成年人身高为1.6米，以下说法正确的是（　　）

A．*BMI*数值随着体重*m*的值的增加而减少

B．*BMI*数值与体重*m*的值之间成正比例关系

C．*BMI*数值与体重*m*的值之间的函数图象为双曲线位于第一象限的一支

D．如果这位成年人的体重为64公斤，他的胖瘦程度属于正常

【分析】根据题意及反比例函数图象上点的坐标特征，逐项分析判断即可．

【解答】解：*A*、某位成年人身高为1.6米，*BMI*数值随着体重*m*的值的增加而增加，原说法错误，不符合题意；

*B*、某位成年人身高为1.6米，*BMI*数值与体重*m*的值之间成正比例关系，原说法正确，符合题意；

*C*、某位成年人身高为1.6米，*BMI*数值与体重*m*的值之间的函数图象为第一象限内的直线，原说法错误，不符合题意；

*D*、某位成年人身高为1.6米，这位成年人的体重为64公斤，则*BMI*数值是25，属于偏胖，原说法错误，不符合题意；

故选：*B*．

【点评】本题考查了反比例函数的性质、反比例函数图象上点的坐标特征、一次函数的应用，熟练掌握以上知识点是关键．

8．（3分）对于实数*a*、*b*，定义一种新运算“⊗”为：，这里等式右边是通常的实数运算．例如：，则方程的解是（　　）

A．*x*＝6 B．*x*＝5 C．*x*＝4 D．无解

【分析】已知方程利用题中的新定义化简，计算即可求出解．

【解答】解：∵实数*a*、*b*，定义一种新运算“⊗”为：，

∴，

去分母得2＝5﹣*x*+1，

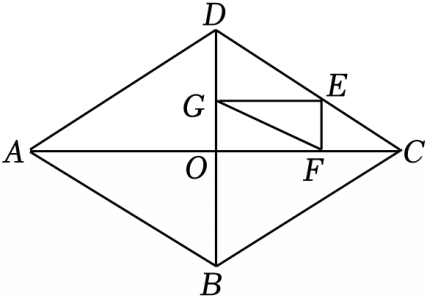
解得*x*＝4，

经检验*x*＝4是原分式方程的解，

故选：*C*．

【点评】本题考查了解分式方程以及新定义，熟练掌握以上知识点是解答本题的关键．

9．（3分）如图，菱形*ABCD*的对角线*AC*，*BD*相交于点*O*，*BD*＝12，*AC*＝16，*E*是边*CD*上的一动点，过点*E*作*EF*⊥*OC*于点*F*，*EG*⊥*OD*于点*G*，连接*FG*，则*FG*的最小值为（　　）



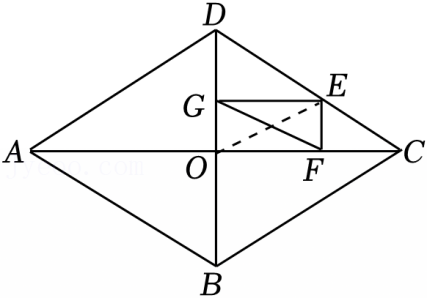
A．3.6 B． C． D．4.8

【分析】由菱形的性质得*AC*⊥*BD*，*AD*＝*CD*，推出四边形*OGEF*是矩形，连接*OE*，则*OE*＝*GF*，当*OE*⊥*DC*时，*GF*的值最小，勾股定理求出*CD*，由三角形面积求出*OE*即可得到*FG*的最小值．

【解答】解：∵*AC*⊥*BD*，*AD*＝*CD*，

∴四边形*OGEF*是矩形，

连接*OE*，则*OE*＝*GF*，



当*OE*⊥*DC*时，*GF*的值最小，

∵*BD*＝12，*AC*＝16，

∴*OD*＝6，*OC*＝8，

∴，

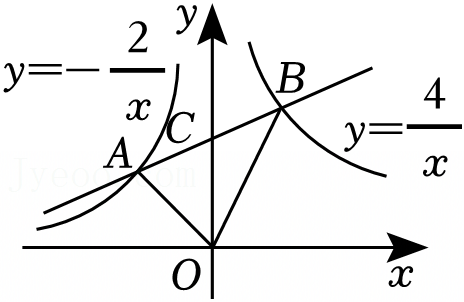
∴，

∴最小值*GF*＝*OE*＝4.8，

故选：*D*．

【点评】此题考查了菱形的性质，矩形的判定及性质，勾股定理，熟练掌握矩形的性质正确引出辅助线是解题的关键．

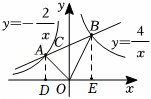
10．（3分）如图，点*A*是反比例函数*y*在第二象限内图象上一点，点*B*是反比例函数*y*在第一象限内图象上一点，直线*AB*与*y*轴交于点*C*，且*AC*＝*BC*，连接*OA*、*OB*，则△*AOB*的面积是（　　）



A．2 B．3 C．3.5 D．4

【分析】分别过*A*、*B*两点作*x*轴的垂线，构成直角梯形，根据*AC*＝*BC*，判断*OC*为直角梯形的中位线，得出*OD*＝*OE*＝*a*，根据双曲线解析式确定*A*、*B*两点的坐标及*AD*、*BE*的长，根据*S*△*AOB*＝*S*梯形*ADEB*﹣*S*△*AOD*﹣*S*△*BOE*求解．

【解答】解：分别过*A*、*B*两点作*AD*⊥*x*轴，*BE*⊥*x*轴，垂足为*D*、*E*．



∵*AC*＝*CB*，

∴*OD*＝*OE*，

设*A*（﹣*a*，），则*B*（*a*，），

故*S*△*AOB*＝*S*梯形*ADEB*﹣*S*△*AOD*﹣*S*△*BOE*（）×2*aaa*3．

故选：*B*．

【点评】本题考查了反比例函数的综合运用，关键是作辅助线构造直角梯形，根据*AC*＝*BC*，得出*OC*为直角梯形的中位线，利用面积的和差关系求解．

**二、填空题（本大题共5个小题，每小题3分，共15分．把答案写在答题卡的横线上）**

11．（3分）函数中，自变量*x*的取值范围是　*x*≥2　 ．

【分析】根据被开方式是非负数列式求解即可．

【解答】解：根据被开方式是非负数可得：

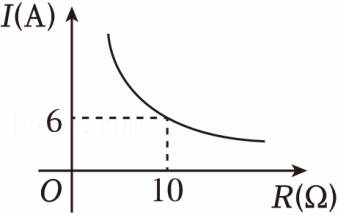
*x*﹣2≥0，

解得*x*≥2，

故答案为：*x*≥2．

【点评】本题考查了函数自变量的取值范围，函数有意义时字母的取值范围一般从几个方面考虑：①当函数解析式是整式时，字母可取全体实数；②当函数解析式是分式时，考虑分式的分母不能为0；③当函数解析式是二次根式时，被开方数为非负数．④对于实际问题中的函数关系式，自变量的取值除必须使表达式有意义外，还要保证实际问题有意义．

12．（3分）已知蓄电池的电压为定值，使用蓄电池时，电流*I*（单位：*A*）与电阻*R*（单位：Ω）是反比例函数关系，它的图象如图所示，如果以此蓄电池为电源的用电器，其限制电流不能超过15*A*，那么用电器可变电阻*R*应控制的范围是　*R*≥4Ω　 ．



【分析】根据图象中的点的坐标先求反比例函数关系式，求解即可．

【解答】解：设反比例函数关系式为：，由条件可得得：*k*＝10×6＝60，

∴，

当*I*＝15时，则，

根据函数图象可得：当*I*≤15时，*R*≥4，

故答案为：*R*≥4Ω．

【点评】本题是反比例函数的应用，会利用待定系数法求反比例函数的关系式，并正确认识图象，运用数形结合的思想，与不等式或等式相结合，解决实际问题．

13．（3分）已知关于*x*的方程的解为非负数，则*m*的取值范围是　*m*≥3且*m*≠9　 ．

【分析】先解关于*x*的方程可得，再根据方程的解*x*为非负数可得*x*≥0且*x*≠3，然后进行计算即可解答．

【解答】解：原分式方程去分母得：2*x*﹣*m*﹣（*x*﹣3）＝﹣*x*，

解得 ，

∵分母 *x*﹣3≠0，即 *x*≠3，代入解得：，

∴*m*≠9，

又∵关于*x*的方程解为非负数，即*x*≥0，

∴，

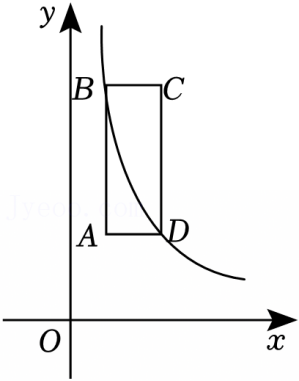
∴*m*≥3．

综上，*m* 的取值范围是 *m*≥3 且 *m*≠9．

故答案为：*m*≥3 且 *m*≠9．

【点评】本题考查了分式方程的解，解一元一次不等式，一定要注意分式方程的最简公分母不能为0．

14．（3分）如图，矩形*ABCD*的边*AB*与*y*轴平行，顶点*A*的坐标为（1，2），点*B*和点*D*在反比例函数的图象上，则矩形*ABCD*的周长为　12　 ．



【分析】当*x*＝1时，根据可求得点*B*的坐标，当*y*＝2时，根据可求得点*C*的坐标，进而可求得*AB*和*AD*的值，进而可求解．

【解答】解：当*x*＝1时，，

∴点*B*的坐标为：（1，6），

当*y*＝2时，，

解得：*x*＝3，

∴点*C*的坐标为：（3，2），

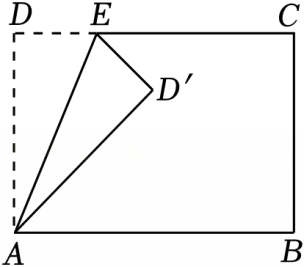
∴*AB*＝6﹣2＝4，*AD*＝3﹣1＝2，

∴矩形*ABCD*的周长为：2×（4+2）＝12，

故答案为：12．

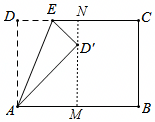
【点评】本题考查了反比例函数与几何综合，根据矩形图形的性质求得相应点的坐标是解题的关键．

15．（3分）如图，矩形*ABCD*中，*AD*＝5，*AB*＝6，点*E*为射线*DC*上一个动点，把△*ADE*沿直线*AE*折叠，当点*D*对应点*D*'刚好落在线段*AB*的垂直平分线上时，*DE*的长为　15或　 ．



【分析】分两种情况讨论，由折叠的性质可得*AD*＝*AD*'＝5，*AM*＝*BM*＝3＝*DN*，*DE*＝*D*'*E*，由勾股定理可求*D*'*M*＝4，再由勾股定理可求*DE*的长．

【解答】解：如图，若点*E*在线段*CD*上时，过点*D*'作*MN*⊥*AB*，



∴四边形*ADNM*是矩形

∴*AD*＝*MN*＝5，*AM*＝*DN*，

∵把△*ADE*沿直线*AE*折叠，当点*D*对应点*D*'刚好落在线段*AB*的垂直平分线上时，

∴*AD*＝*AD*'＝5，*AM*＝*BM*＝3＝*DN*，*DE*＝*D*'*E*，

∴*D*'*M*4，

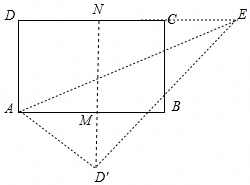
∴*D*'*N*＝*MN*﹣*D*'*M*＝1，

∵*D*'*E*2＝*EN*2+*D*'*N*2，

∴*DE*2＝（3﹣*DE*）2+1，

∴*DE*

如图，点*E*在线段*DC*的延长线上，过点*D*'作*MN*⊥*AB*，



同理可求：*D*'*M*＝4，*DE*＝*D*'*E*，

∴*D*'*N*＝4+5＝9，

∵*D*'*E*2＝*EN*2+*D*'*N*2，

∴*DE*2＝（*DE*﹣3）2+81，

∴*DE*＝15

故答案为：15或

【点评】本题考查了翻折变换，矩形的性质，勾股定理，线段垂直平分线的性质，利用分类讨论思想解决问题是本题的关键．

**三、解答题（本题共8个小题，共75分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）**

16．（9分）计算：

（1）；

（2）．

【分析】（1）先计算负整数指数幂、立方根、零指数幂以及有理数的乘方，再加减运算即可求解；

（2）先计算括号内的分式减法，再将括号为的除法转化为乘法，根据分式的乘法运算法则求解即可．

【解答】解：（1）原式＝﹣1﹣（﹣3）﹣（﹣3）+1

＝﹣1+3+3+1

＝6；

（2）原式

．

【点评】本题考查实数的混合运算、分式的加减乘除，涉及负整数指数幂、立方根、零指数幂以及有理数的乘方，熟练掌握相关运算法则并正确求解是解答的关键．

17．（9分）[教材呈现]如图是华师版八年级下册数学教材第77页的部分内容．

|  |
| --- |
| 菁优网：http://www.jyeoo.com  平行四边形的性质定理3 平行四边形的对角线互相平分．  我们可以用演绎推理证明这个结论．  已知：如图▱*ABCD*的对角线*AC*和*BD*相交于点*O*．  求证：*OA*＝*OC*，*OB*＝*OD*． |

请根据教材提示，结合图1，写出完整的证明过程．

[性质应用]如图2，在▱*ABCD*中，对角线*AC*、*BD*相交于点*O*，*EF*过点*O*且与边*AD*、*BC*分别相交于点*E*、*F*．

求证：*OE*＝*OF*．

[拓展提升]在[性质应用]的条件下，连接*AF*，若*EF*⊥*AC*，△*ABF*的周长是13，则▱*ABCD*的周长是 　26　 ．

【分析】[教材呈现]由平行四边形的性质得出*AB*＝*CD*，*AB*∥*CD*，则∠*BAO*＝∠*DCO*，∠*ABO*＝∠*CDO*，再由*ASA*证得△*ABO*≌△*CDO*，即可得出结论（证明方法不唯一）；

[性质应用]由平行四边形的性质得出*OB*＝*OD*，*AD*∥*BC*，则∠*EDO*＝∠*FBO*，∠*DEO*＝∠*BFO*，再由*AAS*证得△*DEO*≌△*BFO*，即可得出结论；

[拓展提升]由△*DEO*≌△*BFO*，得出*BF*＝*DE*，*OE*＝*OF*，易证△*AEF*是等腰三角形，得出*AE*＝*AF*，则*AE*+*DE*＝*AF*+*BF*，推出△*ABF*的周长＝*AB*+*AD*＝13，再由平行四边形的性质即可得出结果．

【解答】[教材呈现]证明：∵四边形*ABCD*是平行四边形，

∴*AB*＝*CD*，*AB*∥*CD*，

∴∠*BAO*＝∠*DCO*，∠*ABO*＝∠*CDO*，

在△*ABO*和△*CDO*中，

，

∴△*ABO*≌△*CDO*（*ASA*），

∴*OA*＝*OC*，*OB*＝*OD*（证明方法不唯一）；

[性质应用]证明：∵四边形*ABCD*是平行四边形，

∴*OB*＝*OD*，*AD*∥*BC*，

∴∠*EDO*＝∠*FBO*，∠*DEO*＝∠*BFO*，

在△*DEO*和△*BFO*中，

，

∴△*DEO*≌△*BFO*（*AAS*），

∴*OE*＝*OF*；

[拓展提升]解：如图2，∵△*DEO*≌△*BFO*，

∴*BF*＝*DE*，*OE*＝*OF*，

∵*EF*⊥*AC*，

∴△*AEF*是等腰三角形，

∴*AE*＝*AF*，

∴*AE*+*DE*＝*AF*+*BF*，

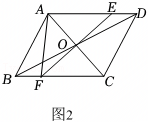
∴△*ABF*的周长＝*AB*+*AF*+*BF*＝*AB*+*AE*+*DE*＝*AB*+*AD*＝13，

∵四边形*ABCD*是平行四边形，

∴*AB*＝*CD*，*AD*＝*BC*，

∴▱*ABCD*的周长＝2（*AB*+*AD*）＝2×13＝26，

故答案为：26．



【点评】本题考查了平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质、平行线的性质等知识；熟练掌握平行四边形的性质与全等三角形的判定是解题的关键．

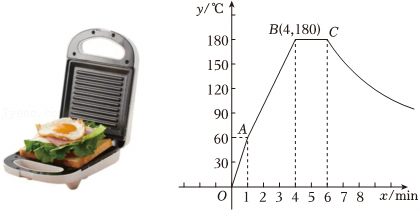
18．（9分）某款三明治机制作三明治的工作原理如下：

①预热阶段：开机1分钟空烧预热至60℃，机器温度*y*与时间*x*成一次函数关系；

②操作阶段：操作3分钟后机器温度均衡升至最高温度180℃后保持恒温状态；

③断电阶段：操作完成后进行断电降温，机器温度*y*与时间*x*成反比例关系．

如图所示为某次制作三明治时机器温度*y*（℃）与时间*x*（*min*）的函数图象，请结合图象回答下列问题：



（1）预热阶段机器温度上升的平均速度是　60　 ℃/*min*，开机3分钟时，温度为　140　 ℃；

（2）当0≤*x*≤4时，求机器温度*y*与时间*x*的函数关系式；

（3）求三明治机工作温度持续在100℃以上的时间是多少分钟？

【分析】（1）根据速度等于温度除以时间计算即；利用待定系数法求解析式，后求函数值解答即可；

（2）分成0≤*x*≤1和1＜*x*≤4两段计算解答即可；

（3）求出反比例函数的解析式，分别计算*y*＝100的自变量的值，自变量的差即为所求．

【解答】解：（1）由题意可得：；

设1≤*x*≤4温度*y*（℃）与时间*x*（*min*）之间的关系式为*y*＝*kx*+*b*，

∴，

∴，

故*y*＝40*x*+20，

当*x*＝3时，*y*＝40×3+20＝140，

故答案为：60，140．

（2）由图象可知：当0≤*x*≤1时，*y*＝60*x*；

当1＜*x*≤4时，*y*＝40*x*+20，

综上：．

（3）当*x*≥6时，设，

将*C*（6，180）代入得：*k*3＝1080

∴；

当*y*＝100时，

依次代入*y*＝40*x*+20及中，

分别解得*x*＝2，*x*＝10.8，

故持续时间长为：10.8﹣2＝8.8 （分钟）；

答：持续8.8分钟．

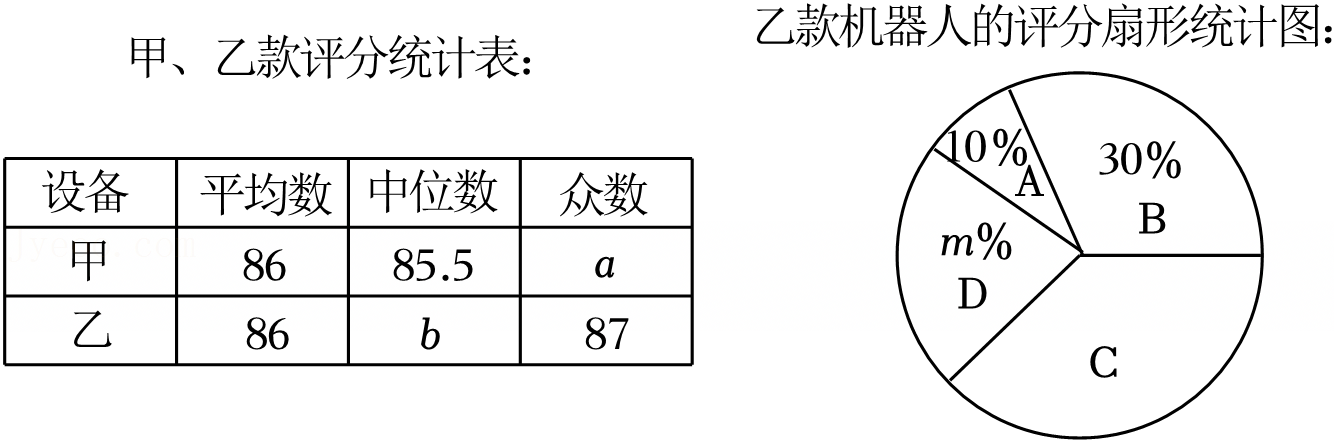
【点评】本题考查了待定系数法求解析式，持续时长的计算，一次函数与反比例函数的应用，熟练掌握应用是解题的关键．

19．（9分）甲公司推出了“*DeepSeek*”*AI*机器人（简称甲款），乙公司推出了“豆包”*AI*机器人（简称乙款）．有关人员开展了对甲，乙两款机器人的使用满意度评分测验，并分别随机抽取20份评分数据，对数据进行整理、描述和分析（评分分数用*x*表示，分为四个组进行统计：*A*组：60＜*x*≤70，*B*组：70＜*x*≤80，*C*组：80＜*x*≤90，*D*组：90＜*x*≤100），下面给出了部分信息：

甲款评分数据：

64，70，75，76，78，78，85，85，85，85，86，89，90，90，94，95，98，98，99，100；

乙款评分数据中*C*组的所有数据：84，86，87，87，87，88，90，90．



根据以上信息，解答下列问题：

（1）上述图表中*a*＝　85　 ，*b*＝　86.5　 ，*m*＝　20　 ；

（2）在此次测验中，有280人对甲款进行评分、300人对乙款进行评分．请通过计算，分别估计对甲、乙两款机器人评价为非常满意（*D*组：90＜*x*≤100）的用户人数．

【分析】（1）根据中位数和众数的定义可求出*a*、*b*的值；求出乙款中*D*组的份数，即可求出*m*的值；

（2）用280乘以样本甲款中*D*组的人数占比，用300乘以样本乙款中*D*组的人数占比，即可求出答案．

【解答】解：（1）∵甲款评分为85分的有4份，份数最多，

∴甲款评分的众数为85分，即*a*＝85，

由条件可知乙款评分在*A*组和*B*组的数量之和为8份，

把乙款评分按照从低到高排列，处在第10名和第11名的评分为86分，87分，

∴乙款的中位数为，即*b*＝86.5；

乙款评分中*D*组份数为20﹣8﹣8＝4份，则，

∴*m*＝20；

故答案为：85，86.5，20；

（2）∵ （人），300×20%＝60（人），

∴对甲、乙两款人工智能软件非常满意的用户总人数分别为84人、60人．

【点评】本题主要考查了中位数，众数，扇形统计图和用样本估计总体，熟知相关知识是解题的关键．

20．（9分）某超市用3000元购进某种干果销售，由于销售状况良好，超市又调拨9000元资金购进该种干果，但这次的进价比第一次的进价提高了20%，购进干果数量是第一次的2倍还多300千克．

（1）该种干果的第一次进价是每千克多少元？

（2）如果超市将这种干果全部按每千克9元的价格出售，售完这种干果共盈利多少元？

【分析】（1）设该种干果的第一次进价是每千克*x*元，根据题意列出方程即可求出答案．

（2）根据题意列算式即可求出答案．

【解答】解：（1）设该种干果的第一次进价是每千克*x*元，

由题意可知：2300，

解得*x*＝5，

经检验：*x*＝5是方程的解，

答：该种干果的第一次进价是每千克5元．

（2）由题意可知：9﹣30009﹣9000

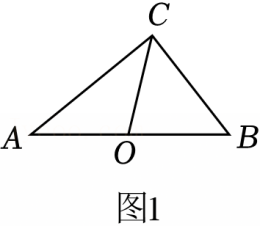
＝2400+4500

＝6900，

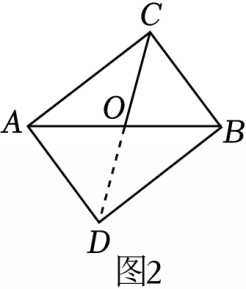
答：售完这种干果共盈利6900元

【点评】本题考查分式方程的应用，解题的关键是正确找出题中的等量关系，本题属于基础题型．

21．（9分）（1）如图1，在Rt△*ABC*中，∠*ACB*＝90°，*CO*为斜边*AB*上的中线，那么*OC*与*AB*之间存在什么样的数量关系呢？



为解决这一问题，小明同学想的办法是：如图2，延长*CO*到*D*，使*DO*＝*CO*，连接*AD*，*BD*…

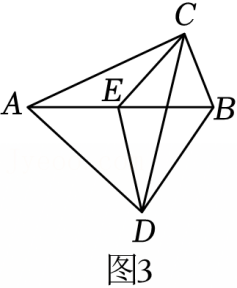


请你顺着小明的思路完成后面的解答；

思考：通过第（1）小题的解答，你能得到什么结论：　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半　 ；

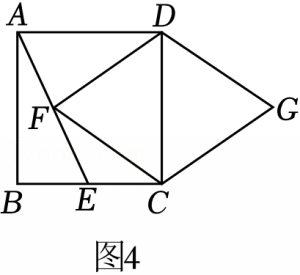
【深入探究】

（2）如图3，已知*AC*⊥*BC*，*AD*⊥*DB*，*E*为*AB*的中点．则∠*CED*与∠*CAD*之间的数量关系为　∠*CED*＝2∠*CAD*　 ；



【应用提升】

（3）如图4，在正方形*ABCD*中，*E*为*BC*上一点，*F*为*AE*的中点，分别过点*D*、*C*作*FC*、*FD*的平行线，交于点*G*，求证：四边形*FCGD*为菱形；



（4）若，请直接写出菱形*FCGD*的面积．

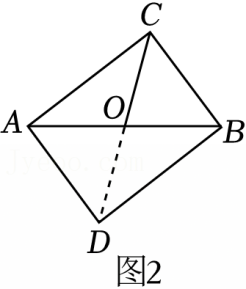
【分析】（1）如图 2，作辅助线构建平行四边形，根据∠*ACB*＝90°，可得矩形*ADBC*，所以*AB*＝*CD*，即可解答；

（2）根据（1）中结论得到，根据等边对等角和三角形外角的性质可得∠*BEC*＝2∠*CAE*，同理得：∠*BED*＝2∠*DAE*，即可解答；

（ 3 ）先证明四边形*FCGD*为平行四边形，连接*BF*，根据*SAS*证明△*AFD*≌△*BFC*，可得*DF*＝*CF*，根据菱形的判定：有一组邻边相等的平行四边形是菱形即可得结论；

（4）连接*FG*，交*CD*于点*O*，证明△*CDF*为等边三角形，三线合一，结合勾股定理求出*OF*的长，进而求出*FG*的长，根据菱形的面积公式进行求解即可．

【解答】（1）解：如图 2，延长*CO*到*D*，使*DO*＝*CO*，连接*AD*，*BD*，



∵*CO*为斜边*AB*上的中线，

∴*AO*＝*OB*，

∴四边形*ADBC*是平行四边形，

∵∠*ACB*＝90°，

∴▱*ADBC*是矩形，

∴*AB*＝*CD*，

∵*OC*＝*OD*，

∴，

∴，即直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，

故答案为：直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半；

（2）解：∵*AC*⊥*BC*，

∴∠*ACB*＝90°，

∵*E*为*AB*的中点，

∴，

∴∠*ACE*＝∠*CAE*，

∵∠*BEC*＝∠*ACE*+∠*CAE*，

∴∠*BEC*＝2∠*CAE*，

∵*AD*⊥*BD*，

∴∠*ADB*＝90°，

∵*E*为*AB*的中点，

∴，

∴∠*ADE*＝∠*DAE*，

∵∠*BED*＝∠*ADE*+∠*DAE*，

∴∠*BED*＝2∠*DAE*，

∴∠*BEC*+∠*BED*＝2∠*CAE*+2∠*DAE*，

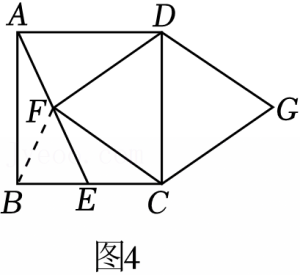
∴∠*CED*＝2∠*CAD*；

故答案为：∠*CED*＝2∠*CAD*；

（3）证明：∵*DG*∥*FC*，*DF*∥*CG*，

∴四边形*FCGD*为平行四边形，

四边形*ABCD*是正方形，如图4，连接*BF*，



∴*AD*＝*BC*，∠*DAB*＝∠*ABC*＝90°，

∵*F*是*AE*的中点，

∴，

∴∠*ABF*＝∠*BAF*，

∴∠*DAB*﹣∠*BAF*＝∠*ABC*﹣∠*ABF*，

∴∠*DAF*＝∠*CBF*，

在△*AFD*和△*BFC*中，

，

∴△*AFD*≌△*BFC*（*SAS*），

∴*DF*＝*CF*，

∴四边形*FCGD*为菱形；

（4）解：菱形*DFCG*的面积为．理由如下：

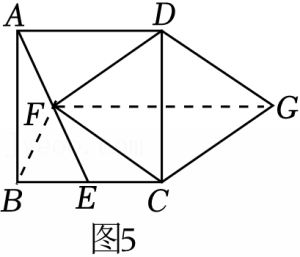
∵四边形*ABCD*正方形，

∴，

∵∠*FCE*＝30°，

∴∠*DCF*＝60°，

连接*BF*，*FG*，交*CD*于点*O*，如图5，



∵四边形*DFCG*为菱形，

∴*FG*⊥*CD*，，，*DF*＝*CF*，

∵∠*DCF*＝60°，

∴△*CDF*为等边三角形，

∴，

在直角三角形*COD*中，由勾股定理得：，

∴*FG*＝2*OF*＝6，

∴菱形*DFCG*的面积为：．

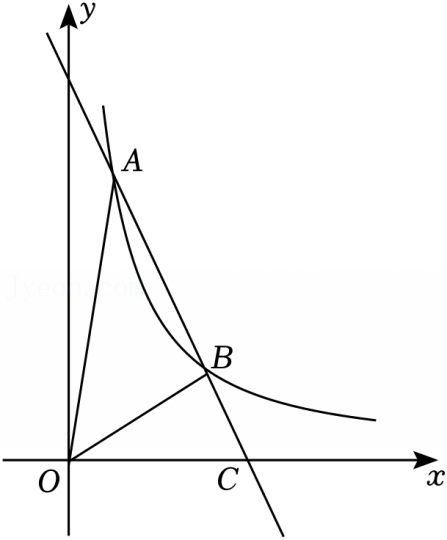
【点评】本题属于四边形综合题，考查的是正方形的性质，菱形的性质和判定，全等三角形的判定和性质，直角三角形斜边中线的性质，勾股定理，等腰三角形的性质等知识，掌握全等三角形的判定定理和性质定理是解题的关键．

22．（9分）如图，一次函数*y*＝*kx*+*b*的图象与反比例函数的图象交于点*A*（1，6）和点*B*（3*n*﹣6，2），与*x*轴交于点*C*．

（1）求一次函数和反比例函数的表达式；

（2）根据图象，请直接写出关于*x*的不等式的解集；

（3）连接*OA*、*OB*，在直线*AC*上是否存在点*D*，使△*OCD*的面积是△*AOB*面积的？若存在，求出点*D*的坐标；若不存在，请说明理由．



【分析】（1）将*A*点坐标代入反比例函数解析式求出反比例函数解析式，进而求出*B*点的坐标，用待定系数法即可求出一次函数表达式；

（2）根据函数图象找到一次函数的图象在反比例函数图象上方时自变量的取值范围即可得到答案；

（3）求出*C*点坐标，根据*A*、*B*、*C*三点坐标求出△*AOB*的面积，再得到△*OCD*的面积，设*D*（*m*，﹣2*m*+8），利用三角形面积求出*m*的值即可得到答案．

【解答】解：（1）由条件可得，解得*m*＝6，

∴反比例函数表达式为，

在中，当时，

∴*B*（3，2），

∴把*A*（1，6），*B*（3，2）代入*y*＝*kx*+*b*，得，

∴，

∴一次函数表达式为*y*＝﹣2*x*+8；

（2）由函数图象可知，当1＜*x*＜3时，一次函数的图象在反比例函数图象上方，

∴关于*x*的不等式的解集为1＜*x*＜3；

（3）在*y*＝﹣2*x*+8中，当*y*＝0时，则﹣2*x*+8＝0得，*x*＝4，

∴点*C*的坐标为（4，0），

∴，

∴，

设*D*（*m*，﹣2*m*+8），则，

∴|﹣2*m*+8|＝3，

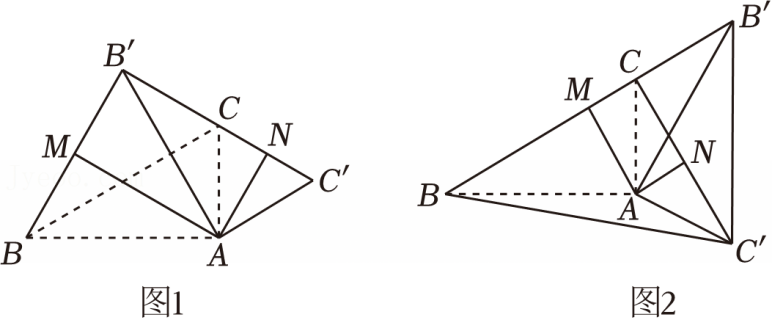
∴﹣2*m*+8＝±3，

解得：或，

故或．

【点评】本题考查了一次函数和反比例函数的综合应用，反比例函数与几何综合，待定系数法求函数解析式，三角形的面积的计算，正确求出一次函数和反比例函数解析式是解题的关键．

23．（12分）问题情境：在Rt△*ABC*中，∠*BAC*＝90°，∠*ABC*＝30°，将Rt△*ABC*绕点*A*顺时针旋转α（0°＜α＜180°），点*B*，*C*的对应点分别为点*B*′，*C*′，连接*BB*′，*CC*′，*M*，*N*分别为*BB*′，*CC*′的中点，连接*AM*，*AN*．



（1）猜想结论：如图1，当*B*′*C*′恰好经过点*C*时，*B*′*M*与*AN*的位置关系是　平行　 ，数量关系是　相等　 ．

（2）问题解决：如图2，当*BB*′恰好经过点*C*时．

①试猜想四边形*AMCN*的形状，并说明理由；

②连接*BC*′，若*AC*＝2，请直接写出线段*BC*′的长．（提示：“在直角三角形中，30°所对的直角边等于斜边的一半”）

【分析】（1）由旋转的性质可证明△*ACC*′、△*BAB*′都是等边三角形，再证明四边形*MANB*′是矩形，即可得出结论；

（2）①由旋转的性质可证明△*ACC*′、△*BAB*′都是等腰三角形，即可证明四边形*AMCN*是矩形；

②在Rt△*ACN*中，由勾股定理可求得，从而求得；在Rt△*ABC*中，由含30度直角三角形的性质得*BC*＝2*AC*＝4，则由勾股定理即可求解．

【解答】解：（1）*B*′*M*与*AN*的位置关系是*B*′*M*∥*AN*，*B*′*M*与*AN*的数量关系是*B*′*M*＝*AN*；

理由：在Rt△*ABC*中，∠*BAC*＝90°，∠*ABC*＝30°，

∴∠*ACB*＝60°；

由旋转性质得：∠*BAB*′＝∠*CAC*′，∠*AB*′*C*′＝∠*ABC*＝30°，∠*C*′＝∠*ACB*＝60°，*AB*＝*AB*′，*AC*＝*AC*′，

∴△*ACC*′是等边三角形，

∴∠*BAB*′＝∠*CAC*′＝60°，

∴△*BAB*′是等边三角形，

∴∠*BB*′*A*＝60°，

∴∠*MB*′*N*＝∠*BB*′*A*+∠*AB*′*C*′＝90°；

∵*M*，*N*分别为*BB*′，*CC*′的中点，

∴*AM*⊥*BB*′，*AN*⊥*CC*′，

∴∠*AMB*′＝∠*ANB*′＝∠*MB*′*N*＝90°，

∴四边形*MANB*′是矩形，

∴*B*′*M*∥*AN*，*B*′*M*＝*AN*；

故答案为：平行；相等；

（2）①四边形*AMCN*是矩形；

理由如下：在Rt△*ABC*中，∠*BAC*＝90°，∠*ABC*＝30°，

∴∠*ACB*＝60°；

由旋转得：∠*BAB*′＝∠*CAC*′，∠*AB*′*C*′＝∠*ABC*＝30°，*AB*＝*AB*′，*AC*＝*AC*′，

∴△*ACC*′是等腰三角形，△*BAB*′是等腰三角形，

∴∠*ACC*′＝∠*AC*′*C*，∠*AB*′*B*＝∠*ABC*＝30°，

∴∠*CAC*′＝∠*BAB*′＝180°﹣2∠*ABC*＝120°，

∴；

∴∠*MCN*＝∠*ACB*+∠*ACN*＝90°；

∵*M*，*N*分别为*BB*′，*CC*′的中点，*AB*＝*AB*′，*AC*＝*AC*′，

∴*AM*⊥*BB*′，*AN*⊥*CC*′，

∴∠*AMC*＝∠*ANC*＝∠*MCN*＝90°，

∴四边形*AMCN*是矩形；

②在Rt△*ACN*中，由①知∠*ACN*＝30°，

∴，

由勾股定理得，

∴；

在Rt△*ABC*中，∠*ABC*＝30°，

∴*BC*＝2*AC*＝4；

在Rt△*BCC*′中，．

【点评】本题考查了旋转的性质，等边三角形的判定与性质，等腰三角形的性质，勾股定理，矩形的判定与性质等知识，掌握这些知识是解题的关键．

声明：试题解析著作权属菁优网所有，未经书面同意，不得复制发布日期：2025/9/13 14:59:22；用户：于晓丹；邮箱：zhongwang31@xyh.com；学号：50893277