全书综合检测

1. B 【解析】$\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x}\right)^5$ 的展开式的通项 $T_{r+1}=C_5^r(\sqrt{x})^{5-r}\left(-\dfrac{2}{x}\right)^r$，$r\in\{0,1,2,3,4,5\}$，所以第 4 项的二项式系数为 $C_5^3=10$. **故选** B.

2. C 【解析】随机事件 A，B 满足 $P(AB)=0.4$，$P(A)=0.6$，则 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.4}{0.6}=\dfrac{2}{3}$.

又 $P(B|\overline{A})=0.5$，所以 $P(B)=P(A)\cdot P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.6\times\dfrac{2}{3}+0.4\times0.5=0.6$. **故选** C.

3. B 【解析】若千位数字是 5，则百位数字只能是 7 或 8，故共有 $C_3^1C_3^1+C_2^1C_3^1=15$(个)；

若千位数字是 7，则共有 $C_3^1A_4^2=36$(个)；

若千位数字是 8，则共有 $C_2^1A_4^2=24$(个).

故符合条件的四位数共有 $15+36+24=75$(个). **故选** B.

4. A 【解析】依题意，求不同涂色方案问题，有用 4 种颜色和用 3 种颜色两类办法.

用 4 种颜色，先涂点 A,B,C，有 A_4^3 种方法，再在 A_1,B_1,C_1 中选一点涂第 4 种颜色，另两点有 3 种涂色方法，因此不同涂色方法数为 $3C_3^1A_4^3=216$；

用 3 种颜色，先涂点 A,B,C，有 A_4^3 种方法，再涂 A_1,B_1,C_1，有 2 种方法，因此不同涂色方法数为 $2A_4^3=48$.

所以不同的涂色方案有 $216+48=264$(种). **故选** A.

5. B 【解析】由 $y=e^{1+at}$ 两边取自然对数得 $\ln y=1+at$，令 $u=\ln y$，

则 $u=1+at$，即 u 与 t 呈线性相关关系，

$\overline{u}=(\ln e^{1.4}+\ln e^{2.2}+\ln e^{2.4})\times\dfrac{1}{3}=2$，$\overline{t}=(1+2+3)\times\dfrac{1}{3}=2$，

$\because$ 经验回归直线必过样本的中心点，

$\therefore 2=2a+1$,解得 $a=\dfrac{1}{2}$,

$\therefore u=1+\dfrac{t}{2}$,则 $y=e^{1+\frac{t}{2}}$,当 $t=7$ 时,$y=e^{4.5}$. **故选 B.**

6. C 【解析】因为随机变量 X 服从两点分布,若 $P(X=0)=\dfrac{1}{4}$,

根据分布列的性质,可得 $P(X=1)=1-P(X=0)=\dfrac{3}{4}$,**故 A 错误;**

$E(X)=0\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}$, $D(X)=\left(0-\dfrac{3}{4}\right)^2\times\dfrac{1}{4}+\left(1-\dfrac{3}{4}\right)^2\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}$,

故 B 错误;

$E(2X+1)=2E(X)+1=2\times\dfrac{3}{4}+1=\dfrac{5}{2}$,

故 C 正确;

$D(2X+1)=2^2\cdot D(X)=4\times\dfrac{3}{16}=\dfrac{3}{4}$,**故 D 错误. 故选 C.**

7. B 【解析】由 $\hat{y}=-0.7x+7.5$ 可知,变量 x,y 之间呈现负相关关系,**故 A 正确;**

由题意可知 $\bar{x}=\dfrac{2+4+6+8}{4}=5$, $\bar{y}=\dfrac{6+m+3+2}{4}=\dfrac{11+m}{4}$,所以样本中心点为 $\left(5,\dfrac{11+m}{4}\right)$,则 $\dfrac{11+m}{4}=-0.7\times5+7.5$,

解得 $m=5$,所以样本中心点为 $(5,4)$,

故 C,D 正确;

样本相关系数 $r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{4}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{4}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{(-3)\times2+(-1)\times1+1\times(-1)+3\times(-2)}{\sqrt{(9+1+1+9)\times(4+1+1+4)}}=\dfrac{-14}{10\sqrt{2}}\approx-0.99$,**故 B 错误. 故选 B.**

8. D 【解析】将 10 人平均分成两个组,有 $\dfrac{C_{10}^5C_5^5}{A_2^2}=126$(种),其中 3 名女生在同一组的分法有 $C_3^3C_7^2=21$(种),故将 10 人平均分成两个组,3 名女生不在同一组的分法有 $126-21=105$(种).

将 10 人按一组 4 人,一组 6 人分成两个组,有 $C_{10}^4C_6^6=210$(种)分法,其中 3 名女生在 4 人组中的分法有 $C_3^3C_7^1=7$(种),3 名女生在 6 人组中的分法有 $C_3^3C_7^3=35$(种),故将 10 人按一组 4 人,一组 6 人分成两个组,3 名女生不在同一组的分法有 $210-7-35=168$(种).

综上所述,将这 10 人分成两组(不区分两组的顺序),要求每组至少 4 人,且 3 名女性不能在同一组,则不同的分组方法共有 $168+105=273$(种). **故选 D.**

9. AD 【解析】$(1-2x)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_5x^5$,令 $x=0$,可得 $(1-2\times0)^5=1=a_0$,**故 A 正确;**

令 $x=1$,可得 $(1-2)^5=-1=a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$,所以 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-1-1=-2$,**故 B 错误;**

$(1-2x)^5$ 展开式的通项 $T_{r+1}=C_5^r(-2)^rx^r$,所以 $a_3=C_5^3(-2)^3=-80$,**故 C 错误;**

由通项可知 $a_r=C_5^r(-2)^r$,所以 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$,

令 $x=-1$,可得 $(1+2)^5=3^5=a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$,即 $|a_0|+|a_1|+|a_2|+|a_3|+|a_4|+|a_5|=3^5$,**故 D 正确. 故选 AD.**

10. ABD

思路导引 根据题意结合事件的关系即可判断 A;计算甲同学得 0 分的概率,即可得甲同学不得 0 分的概率,从而判断 B;分别求解甲、乙、丙三位同学的得分的期望,比较大小即可判断 C;记事件 A="三名同学的得分和 $X+Y+Z=4$",B="他们中有且仅有一人得 0 分",利用条件概率公式求解,即可判断 D.

【解析】由题意,可知 X,Y,Z 不能同时等于 2,即两事件不能同时发生,**故 A**

正确；

X 的可能取值为 0,2,3,4,6,

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{C_3^1}{C_4^1}=\frac{1}{4}$，$P(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{C_2^1}{C_4^1}=\frac{1}{12}$，$P(X=4)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，$P(X=6)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{36}$，

所以 $P(X=0)=1-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4)-P(X=6)=\frac{17}{36}$，则 $P(X\neq0)=\frac{19}{36}>\frac{1}{2}$，**故 B 正确；**

由 B 分析可知，$E(X)=\frac{19}{12}$，Y 的可能取值为 0,2,3，则 $P(Y=0)=\frac{1}{3}\times\frac{C_2^1}{C_4^1}+\frac{2}{3}\times\frac{C_1^1}{C_4^1}=\frac{1}{3}$，$P(Y=2)=\frac{2}{3}\times\frac{C_3^1}{C_4^1}=\frac{1}{2}$，$P(Y=3)=\frac{1}{3}\times\frac{C_2^1}{C_4^1}=\frac{1}{6}$，所以 $E(Y)=\frac{3}{2}$，Z 的可能取值为 0,4,6，则

$P(Z=0)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{C_4^2}+\frac{2}{3}\times\frac{C_3^1}{C_4^2}=\frac{11}{18}$，$P(Z=4)=\frac{2}{3}\times\frac{C_3^2}{C_4^2}=\frac{1}{3}$，$P(Z=6)=\frac{1}{3}\times\frac{C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{18}$，所以 $E(Z)=\frac{5}{3}$，所以 $E(Y)<E(X)<E(Z)$，**故 C 错误；**

记事件 A=“三名同学的得分和 $X+Y+Z=4$”，B=“他们中有且仅有一人得 0 分”，

则 $P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=$

$$\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{11}{18}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{11}{18}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{11}{18}+\frac{17}{36}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}}=$$

$\frac{99}{211}$，**故 D 正确. 故选 ABD.**

11. AC 【解析】在 10 次射击中，击中目标的次数 X 满足 $X\sim B(10,0.8)$，当 $X=k$ 时，对应的概率 $P(X=k)=C_{10}^k\times0.8^k\times0.2^{10-k}(k=0,1,2,\cdots,10)$，因为

$P(X=k)$ 取最大值，易知此时 $k=1,2,\cdots,9$，所以 $\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\end{cases}$

即 $\begin{cases}C_{10}^{k}\times0.8^{k}\times0.2^{10-k}\geqslant C_{10}^{k+1}\times0.8^{k+1}\times0.2^{9-k},\\C_{10}^{k}\times0.8^{k}\times0.2^{10-k}\geqslant C_{10}^{k-1}\times0.8^{k-1}\times0.2^{11-k},\end{cases}$

则 $\begin{cases}k+1\geqslant4(10-k),\\4(11-k)\geqslant k,\end{cases}$ 解得 $\dfrac{39}{5}\leqslant k\leqslant\dfrac{44}{5}$，

因为 $k\in\mathbf{N}$ 且 $1\leqslant k\leqslant9$，所以 $k=8$，

即 $k=8$ 时，概率 $P(X=8)$ 最大，**故 A 正确.**

$D(X)=np(1-p)=n\left[-\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}\right]$，当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时，$D(X)$ 取得最大值，

故 B 错误.

因为 $P(X=k)=C_n^k\times p^k\times(1-p)^{n-k}(k=0,1,2,\cdots,n)$，所以 $P(A)=C_n^1\times p^1\times(1-p)^{n-1}+C_n^3\times p^3\times(1-p)^{n-3}+C_n^5\times p^5\times(1-p)^{n-5}+\cdots$，①

所以 $1-P(A)=C_n^0\times p^0\times(1-p)^n+C_n^2\times p^2\times(1-p)^{n-2}+C_n^4\times p^4\times(1-p)^{n-4}+\cdots$，②

②−①可得，$1-2P(A)=C_n^0\times p^0\times(1-p)^n-C_n^1\times p^1\times(1-p)^{n-1}+C_n^2\times p^2\times(1-p)^{n-2}-\cdots$，由二项式定理可得 $1-2P(A)=[(1-p)-p]^n$，即 $2P(A)=1-(1-2p)^n$，则 $P(A)=\dfrac{1-(1-2p)^n}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.

当 $0<p<\dfrac{1}{2}$，n 为奇数时，$0<1-2p<1$，

$\left\{\dfrac{1-(1-2p)^n}{2}\right\}$ 为正项且递增的数列，

则 $P(A)$ 随着 n 的增大而增大；当 $\dfrac{1}{2}<p<1$，n 为偶数时，$-1<1-2p<0$，$(1-2p)^n$ 随着 p 的增大而增大，则 $P(A)$ 随着 p 的增大而减小，**故 C 正确，D 错误. 故选 AC.**

12. 9.6 【解析】由概率和为 1，可知 $m=0.3$，

根据分布列可求得期望 $E(X)=2\times0.3+3\times0.4+4\times0.3=3$，

方差 $D(X)=(2-3)^2\times0.3+(3-3)^2\times0.4+(4-3)^2\times0.3=0.6$，

根据方差性质可得 $D(Y)=D(4X-3)=16D(X)=16\times0.6=9.6$.

13. $\frac{33}{91}$ 【解析】从 16 个格子中选 4 个排 4 个人,有 A_{16}^4 种排法,

两个男生不同行不同列,有 $4\times4\times3\times3$ 种排法,

两个女生不同行不同列,有 $4\times4\times3\times3$ 种排法,

两个女生分别与两个男生排在一格,有 $4\times4\times3\times3\times2$ 种排法,

两个女生中有一个与其中一个男生排在一格,有 $4\times4\times3\times3\times4\times8$ 种排法,

所以两个男生不同行不同列且两个女生不同行不同列(每人一格)有 $(4\times4\times3\times3)^2-4\times4\times3\times3\times(2+32)$ 种排法,

所以两个男生不同行不同列且两个女生不同行不同列的概率为

$$\frac{(4\times4\times3\times3)^2-4\times4\times3\times3\times(2+32)}{A_{16}^4}=\frac{4\times4\times3\times3\times(16\times9-34)}{A_{16}^4}=\frac{33}{91}.$$

14. $\frac{2}{5}$ $\quad \frac{2}{3}-\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

【解析】记"第 n 次听写的人是甲"为事件 A_n,"第 n 次听写的人是乙"为事件 B_n,

设 $P(A_n)=p_n$, $n\in\mathbf{N}^*$,依题可知 $P(B_n)=1-p_n$,

则 $P(A_{n+1})=P(A_nA_{n+1})+P(B_nA_{n+1})=P(A_n)P(A_{n+1}|A_n)+P(B_n)P(A_{n+1}|B_n)$,

即 $p_{n+1}=0.6p_n+0.2(1-p_n)=0.4p_n+0.2$,

构造等比数列 $\{p_n+\lambda\}$,

设 $p_{n+1}+\lambda=\frac{2}{5}(p_n+\lambda)$,解得 $\lambda=-\frac{1}{3}$,

所以 $p_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{2}{5}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$,

又 $p_1=\frac{1}{2}$,则 $p_1-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$,所以 $\left\{p_n-\frac{1}{3}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$,公比为 $\frac{2}{5}$ 的等比

数列，

即 $p_n-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$，

所以 $p_n=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}, n\in\mathbf{N}^*$.

所以第 2 次听写的人是甲的概率为 $p_2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{2-1}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$.

第 n 次听写的人是甲的概率为 $p_n=\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}$.

第 n 次听写的人是乙的概率为 $1-p_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$.

15.【解】(1)2×2 列联表为

对滑雪的喜爱情况	性别		合计
	男性游客	女性游客	
喜欢滑雪	55	35	90
不喜欢滑雪	45	65	110
合计	100	100	200

零假设 H_0：游客是否喜欢滑雪与性别无关联，

依题意，$\chi^2=\frac{200\times(55\times65-45\times35)^2}{100\times100\times90\times110}\approx 8.081<10.828=x_{0.001}$，

根据小概率值 $\alpha=0.001$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，

因此认为 H_0 成立，即认为游客是否喜欢滑雪与性别无关联.

(2)令事件 $A_i(i=1,2,3,4)$ 分别表示初学者对起步、滑行、转弯、制动的学习达到优秀，滑雪初学者荣获“优秀学员”称号为事件 B，

则 $P(B)=P(A_1A_2A_3A_4)+P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)+P(A_1A_2A_3\overline{A_4})=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$，

所以滑雪初学者荣获“优秀学员”称号的概率是$\frac{1}{3}$.

16.【解】(1)样本数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,10)$的样本相关系数为

$$r=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{169.5}{\sqrt{4.26}\times\sqrt{7\ 250}},$$

其中$\sqrt{4.26}\times\sqrt{7\ 250}=\sqrt{30\ 885}\approx 176$,

$\therefore r\approx\frac{169.5}{176}\approx 0.96$.

(2)易得$\bar{x}=\frac{1}{10}\times(12.1+12.5+11.3+12.4+13.1+11.5+11.0+11.3+12.6+12.2)=12(℃)$,

$\bar{y}=\frac{1}{10}\times(850+880+820+860+895+840+800+830+865+860)=850(\mathrm{mm})$,

$$\therefore \hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{169.5}{4.26}\approx 40,$$

$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}\approx 850-40\times 12=370$,

$\therefore y$ 关于 x 的经验回归方程为 $\hat{y}=40x+370$,

当年平均气温为 13.5 ℃时,$\hat{y}=40\times 13.5+370=910(\mathrm{mm})$.

故预测年平均气温为 13.5 ℃时的年降水量为 910 mm.

17.【解】(1)设“从该校高三学生中随机选取 1 人,这个学生可以在 3 小时内完成各科作业”为事件 A,

则 $P(A)=\frac{3+4+33}{100}=\frac{2}{5}$.

(2)样本中完成各科作业的总时长在 2.5 小时内的学生有 3+4=7(人),

其中可以在 2 小时内完成的有 3 人,

则 X 的所有可能取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=\frac{C_4^3}{C_7^3}=\frac{4}{35}$,$P(X=1)=\frac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\frac{18}{35}$,$P(X=2)=\frac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\frac{12}{35}$,$P(X=3)=$

$\frac{C_3^3}{C_7^3}=\frac{1}{35}$,

X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{4}{35}+1\times\frac{18}{35}+2\times\frac{12}{35}+3\times\frac{1}{35}=\frac{9}{7}$.

(3)由题意得,$Y\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$,

$P(Y=0)=\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{27}{125}$,

$P(Y=1)=C_3^1\left(\frac{2}{5}\right)^1\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{54}{125}$,

$P(Y=2)=C_3^2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{36}{125}$,

$P(Y=3)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$,

$\therefore$ Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$\therefore D(Y)=3\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{25}$.

18. **思路导引** (1)①根据相互独立事件概率乘法公式及对立事件概率公式求解即可;②利用条件概率公式及性质计算即可.(2)由已知可推得 $P(5.25\leqslant\xi\leqslant5.45)=P(\mu-3\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+\sigma)$,根据已知以及正态分布的对称性,可求得 $P(5.25\leqslant\xi\leqslant5.45)\approx0.84$,则 m 服从二项分布,即 $m\sim B(M,0.84)$,利用二项分布概率最大值的求法计算可得结果.

【解】(1)①在进入第四道工序前,该款芯片的次品率为

$p_0=1-(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3)=1-\frac{24}{25}\times\frac{23}{24}\times\frac{22}{23}=\frac{3}{25}$.

②由题意知 $P(B|A)>P(B)$,又 $P(A)>0$,所以 $P(A)\cdot P(B|A)>P(A)\cdot P(B)$,

所以 $P(AB)>P(A)\cdot P(B)$,

因为 $P(AB)+P(A\overline{B})=P(A)P(B|A)+P(A)P(\overline{B}|A)=P(A)$，

所以 $P(AB)>[P(AB)+P(A\overline{B})]\cdot P(B)$，

即 $P(AB)-P(AB)P(B)>P(B)\cdot P(A\overline{B})$，

所以 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\overline{B})}{1-P(B)}$，即 $\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}$，所以 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$.

(2)由已知得

$P(5.25\leqslant\xi\leqslant5.45)=P(5.40-0.15\leqslant\xi\leqslant5.40+0.05)=P(\mu-3\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+\sigma)$，

因为 $P(\mu-3\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+\sigma)=\dfrac{P(\mu-\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+\sigma)+P(\mu-3\sigma\leqslant\xi\leqslant\mu+3\sigma)}{2}\approx\dfrac{0.6827+0.9973}{2}=0.84$，

所以 m 服从二项分布，即 $m\sim B(M,0.84)$，$P(m=24)=C_M^{24}\times0.84^{24}\times0.16^{M-24}$，

设 $f(x)=C_x^{24}\times0.84^{24}\times0.16^{x-24}$，$x>24$ 且 $x\in\mathbf{N}^*$，

由 $\begin{cases}f(x)\geqslant f(x+1),\\f(x)\geqslant f(x-1),\end{cases}$

得 $\begin{cases}C_x^{24}\times0.84^{24}\times0.16^{x-24}\geqslant C_{x+1}^{24}\times0.84^{24}\times0.16^{x-23},\\C_x^{24}\times0.84^{24}\times0.16^{x-24}\geqslant C_{x-1}^{24}\times0.84^{24}\times0.16^{x-25},\end{cases}$

即 $\begin{cases}x-23\geqslant0.16x+0.16,\\0.16x\geqslant x-24,\end{cases}$

解得 $\dfrac{193}{7}\leqslant x\leqslant\dfrac{200}{7}$，由 $x\in\mathbf{N}^*$ 得 $x=28$，

所以 M 的估计值 M_0 为 28.

19.【解】(1)记甲在第一个月的得分为 X，则 X 的取值为 4,5,6,7,8，

则 $P(X=4)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{16}{81}$，

$P(X=5)=C_4^1\times\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{32}{81}$，

$P(X=6)=C_4^2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{8}{27}$，

$P(X=7)=C_4^3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\times\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{8}{81}$，

$P(X=8)=C_4^4\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^4=\dfrac{1}{81}$，

所以甲第一个月得分的分布列为：

X	4	5	6	7	8
P	$\dfrac{16}{81}$	$\dfrac{32}{81}$	$\dfrac{8}{27}$	$\dfrac{8}{81}$	$\dfrac{1}{81}$

所以 $E(X)=4\times\frac{16}{81}+5\times\frac{32}{81}+6\times\frac{8}{27}+7\times\frac{8}{81}+8\times\frac{1}{81}=\frac{16}{3}$.

(2)记事件 A 为"甲、乙第二个月可以一起选择其他兴趣课",

由(1)知 $P(X\geqslant6)=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=\frac{11}{27}$,

记乙在第一个月的得分为 Y,设乙的 4 节课中优秀的节数为 η,

则 $\eta\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$ 且 $Y=\eta+4$,

所以 $P(\eta=k)=C_4^k\left(\frac{1}{2}\right)^4$,$k=0,1,2,3,4$,$P(Y=k+4)=C_4^k\left(\frac{1}{2}\right)^4$,$k=0,1,2,3,4$,

$P(Y\geqslant6)=P(Y=6)+P(Y=7)+P(Y=8)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^4+C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^4+C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{11}{16}$,

所以 $P(A)=P(X\geqslant6)\cdot P(Y\geqslant6)=\frac{121}{432}$.

(3)由(2)知 $P(Y=k+4)=C_4^k\left(\frac{1}{2}\right)^4$,$k=0,1,2,3,4$,所以 Y 的分布列为:

Y	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

记事件 B 为"乙在三个月后得分为 21 分",

事件 C 为"乙在第二个月的得分为 8 分".

乙得分为 21 分共有 3 种情况:

① 8+8+5,这种情况的概率 $P_1=C_3^1\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}\times\frac{1}{16}=\frac{3}{1\ 024}$,

② 8+7+6,这种情况的概率 $P_2=A_3^3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{256}$,

③ 7+7+7,这种情况的概率 $P_3=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$,

所以 $P(B)=P_1+P_2+P_3=\frac{55}{1\ 024}$,

$P(BC)=2\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{16}\times\frac{1}{16}+A_2^2\times\frac{1}{4}\times$

$\frac{1}{16}\times\frac{3}{8}=\frac{7}{512}$,

则 $P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{14}{55}$.

一题多解 (1)记甲的4节课中优秀的节数为ξ,则$\xi\sim B\left(4,\frac{1}{3}\right)$且$X=\xi+4$,则 $E(X)=E(\xi)+4=4\times\frac{1}{3}+4=\frac{16}{3}$.