全书综合检测

1. D 【解析】数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}=3a_n-n$,

所以 $a_2=3a_1-1=5$, $a_3=3a_2-2=13$. **故选** D.

2. D 【解析】设切点坐标为 $\left(x_0, x_0-\frac{4}{x_0}\right)(x_0\neq 0)$, 对函数 $f(x)$ 求导可得 $f'(x)=1+\frac{4}{x^2}(x\neq 0)$,

则切线的斜率为 $f'(x_0)=1+\frac{4}{x_0^2}$, 所以切线方程为 $y-\left(x_0-\frac{4}{x_0}\right)=\left(1+\frac{4}{x_0^2}\right)(x-x_0)$,

因为切线过点 $(0,-4)$, 将点 $(0,-4)$ 代入切线方程中, 可得 $-4-x_0+\frac{4}{x_0}=\left(1+\frac{4}{x_0^2}\right)(-x_0)$, 整理得 $x_0=2$, 则所求切线方程为 $y=2x-4$. **故选** D.

3. A 【解析】$f(x)$ 与 $f'(x)$ 的定义域都为 $\mathbf{R}$, 当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(-x)=-f(x)$, 两边同时求导,

即 $[f(-x)]'=[-f(x)]'$,

得 $-f'(-x)=-f'(x)$,

即 $f'(-x)=f'(x)$, 所以 $f'(x)$ 为偶函数.

反之, 当 $f'(x)$ 为偶函数时, 取 $f(x)=x^3+1$,

则 $f'(x)=3x^2$, 显然满足条件, 但 $f(x)$ 显然不是奇函数.

所以"$f(x)$ 为奇函数"是"$f'(x)$ 为偶函数"的充分不必要条件.

故选 A.

4. D

思路导引 令 $n=1$，得到 $\{a_m-a_{m-1}\}$ 是公差为 2 的等差数列，赋值计算，可得 $a_2=4$，且 $a_m-a_{m-1}=2m-1(m\geqslant 2)$，运用累加法可得 $a_m=m^2$ 从而求解.

【解析】令 $n=1$，得 $a_{m+1}+a_{m-1}=2a_m+2$，

即 $a_{m+1}-a_m=a_m-a_{m-1}+2(m\geqslant 2)$，

所以数列 $\{a_m-a_{m-1}\}$ 是公差为 2 的等差数列，

所以 $a_m-a_{m-1}=(a_2-a_1)+2(m-2)$.

由 $a_{m+n}+a_{m-n}=2a_m+2a_n(m>n,m,n\in\mathbf{N}_+)$，取 $m=3,n=2$，得 $a_5+a_1=2a_3+2a_2$，结合 $a_3-a_2=a_2-a_1+2$，可得 $a_5=6a_2+1$，

取 $m=4,n=1$，同理可得 $a_5=4a_2+9$，

所以 $6a_2+1=4a_2+9$，解得 $a_2=4$.

因此 $a_m-a_{m-1}=2m-1(m\geqslant 2)$，

所以 $a_2-a_1=3$，$a_3-a_2=5$，$a_4-a_3=7$，$\cdots$，$a_m-a_{m-1}=2m-1(m\geqslant 2)$，

累加得 $a_m-1=\dfrac{(m-1)(3+2m-1)}{2}=\dfrac{(m-1)(2m+2)}{2}=\dfrac{2m^2-2}{2}=m^2-1(m\geqslant 2)$，所以 $a_m=m^2(m\geqslant 2)$.

又当 $m=1$ 时，$a_1=1$ 也符合上式，

故 $a_m=m^2(m\in\mathbf{N}_+)$，所以 $a_{2\,025}=2\,025^2$ 的个位数为 5. **故选 D.**

5. B 【解析】依题意，有 $a_5=a_1q^4=5q^4$，$a_{15}=a_5+10d=5q^4+10d=240$，$q=1$ 时，d 不是正整数，$q=2$ 时，$d=16$，$q\geqslant 3$ 时，$5q^4\geqslant 405$，d 不是正整数. 所以 $q=2$，$d=16$，$a_6=a_1q^4+d=96$. **故选 B.**

6. D 【解析】因为 $\dfrac{a_n+1}{6}=\dfrac{S_n+n}{S_{n+1}-S_n+1}$，故 $\dfrac{a_n+1}{6}=\dfrac{S_n+n}{a_{n+1}+1}$，即 $(a_n+1)(a_{n+1}+1)=6(S_n+n)$，当 $n=1$ 时，$(a_1+1)(a_2+$

$1)=6(a_1+1)$,解得 $a_2=5$,**故①正确;**

当 $n\geqslant 2$ 时,$(a_{n-1}+1)(a_n+1)=6(S_{n-1}+n-1)$,$(a_n+1)(a_{n+1}+1)-(a_{n-1}+1)(a_n+1)=6(S_n+n)-6(S_{n-1}+n-1)$,即 $(a_n+1)(a_{n+1}-a_{n-1})=6(a_n+1)$,又 $a_n>0$,所以 $a_{n+1}-a_{n-1}=6$,则数列 $\{a_n\}$ 的奇数项是以 3 为首项,6 为公差的等差数列,偶数项是以 5 为首项,6 为公差的等差数列,则当 n 为偶数时,$a_n=a_2+6\left(\frac{n}{2}-1\right)=3n-1$,当 n 为奇数时,$a_n=a_1+6\left(\frac{n+1}{2}-1\right)=3n$,**故②正确;**

$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=5+11+\cdots+6n-1=\frac{n(5+6n-1)}{2}=3n^2+2n$,**故③正确. 故选 D.**

7. D

思路导引 由选项信息可知,应将题干中等式转化为不等关系,结合导数中的同构关系,可得 $e^a+a=\frac{1}{b}+\ln\frac{1}{b^2}$,通过放缩有 $\frac{1}{b}+\ln\frac{1}{b}>e^a+a>\frac{1}{b^2}+\ln\frac{1}{b^2}$,进而构造 $f(x)=e^x+x$,利用函数单调性来比较变量之间的大小关系.

【解析】已知 $e^a+2\ln b=\frac{1}{b}-a$,

将等式进行移项可得 $e^a+a=\frac{1}{b}-2\ln b$,

根据对数运算法则 $2\ln b=\ln b^2$,进一步变形为 $e^a+a=\frac{1}{b}+\ln\frac{1}{b^2}$.

因为 $b>1$,所以 $\frac{1}{b}+\ln\frac{1}{b}>\frac{1}{b}+2\ln\frac{1}{b}=\frac{1}{b}+\ln\frac{1}{b^2}>\frac{1}{b^2}+\ln\frac{1}{b^2}$,

所以 $\frac{1}{b}+\ln\frac{1}{b}>e^a+a>\frac{1}{b^2}+\ln\frac{1}{b^2}$.

令 $f(x)=e^x+x$，对 $f(x)$ 求导可得 $f'(x)=e^x+1>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

因为 $e^a+a=f(a)$，$\frac{1}{b^2}+\ln\frac{1}{b^2}=e^{\ln\frac{1}{b^2}}+\ln\frac{1}{b^2}=f\left(\ln\frac{1}{b^2}\right)$，$\frac{1}{b}+\ln\frac{1}{b}=e^{\ln\frac{1}{b}}+\ln\frac{1}{b}=f\left(\ln\frac{1}{b}\right)$，所以 $f\left(\ln\frac{1}{b}\right)>f(a)>f\left(\ln\frac{1}{b^2}\right)$，根据 $f(x)$ 的单调性可知 $\ln\frac{1}{b}>a>\ln\frac{1}{b^2}$，即 $\ln\frac{1}{b}>\ln e^a>\ln\frac{1}{b^2}$，再根据对数函数的性质，得 $b^{-1}>e^a>b^{-2}$，**C 错误，D 正确.**

若 $b=e$，此时 $e^a+a=\frac{1}{e}-2$，且 $-1>a>-2$，而 $\left(e^{-\frac{7}{4}}-\frac{7}{4}\right)-\left(\frac{1}{e}-2\right)=\frac{1}{e\sqrt[4]{e^3}}-\frac{1}{e}+\frac{1}{4}>\frac{1}{3e}-\frac{1}{e}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}-\frac{2}{3e}=\frac{3e-8}{12e}>0$，

所以 $e^{-\frac{7}{4}}-\frac{7}{4}>\frac{1}{e}-2=e^a+a$，则 $-2<a<-\frac{7}{4}$，此时 $a^2>\frac{49}{16}>b$，**排除 A.**

若 $b=e^n(n>0)$，此时 $e^a+a=e^{-n}-2n$，且 $-n>a>-2n$，若 $n\to+\infty$ 时，则必有 $a^2<4n^2<e^n=b$，**排除 B.**

故选 D.

8. A 【解析】函数 $y=e^{-x}-\frac{1}{2}$ 与 $y=\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)$ 的图象关于直线 $y=-x$ 对称，如图，设与直线 $y=-x$ 平行，且与 $y=e^{-x}-\frac{1}{2}$ 的图象相切的直线方程为 $y=-x+m$，切点为 $A(x_1,y_1)$，

设与直线 $y=-x$ 平行，且与 $y=\ln\left(\frac{1}{2}-x\right)$ 的图象相切的直线方程为

$y=-x+n$，切点为 $B(x_2,y_2)$，

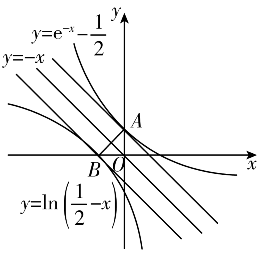
由 $\begin{cases}-e^{-x_1}=-1,\\ y_1=e^{-x_1}-\dfrac{1}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=0,\\ y_1=\dfrac{1}{2},\end{cases}$

所以 $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，

由 $\begin{cases}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-x_2}=-1,\\ y_2=\ln\left(\dfrac{1}{2}-x_2\right),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_2=-\dfrac{1}{2},\\ y_2=0,\end{cases}$

所以 $B\left(-\dfrac{1}{2},0\right)$，

则 $|AB|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，则圆珠直径的取值范围应为 $\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$．**故选 A.**



9. ACD 【解析】A：因为 $0<x_1<1<x_2$，且 $x_1x_2=1$，则 $x_1+x_2>2\sqrt{x_1x_2}=2$，

即 $x_2>2-x_1>0$，又 $f'(x)>f(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x_2)>f(2-x_1)$，**A 正确；**

B：设 $f(x)=e^{2x}$，$f'(x)>f(x)>0$，当 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=2$ 时，$\dfrac{1}{2}f(2)=\dfrac{1}{2}e^4>2e=2f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，**B 不正确；**

C：令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^x}(x>0)$，则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-f(x)}{e^x}>0$，可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，因为 $0<x_1<x_2$，所以 $g(x_1)<g(x_2)$，即 $\dfrac{f(x_1)}{e^{x_1}}<\dfrac{f(x_2)}{e^{x_2}}$，又因为

$f(x)>0$，则 $0<\frac{f(x_1)}{f(x_2)}<\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}}=e^{x_1-x_2}$，可得 $\ln\frac{f(x_1)}{f(x_2)}<\ln e^{x_1-x_2}$，所以 $\ln f(x_1)-\ln f(x_2)<x_1-x_2$，C 正确；

D：由 C 可知 $\frac{f(x_1)}{e^{x_1}}<\frac{f(x_2)}{e^{x_2}}$，且 $x_2=\frac{1}{x_1}$，则 $f(x_2)>\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}}f(x_1)$，令 $h(x)=e^x-x-1$ $(x>0)$，则 $h'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)>h(0)=e^0-0-1=0$，所以 $e^x>x+1(x>0)$，所以 $f(x_2)>\frac{e^{x_2}}{e^{x_1}}f(x_1)=e^{x_2-x_1}f(x_1)>(x_2-x_1+1)f(x_1)>(2-x_1)f(x_1)$，即 $f(x_2)>(2-x_1)f(x_1)$，当 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=2$ 时，$f(2)>\frac{3}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$，即 $2f(2)>3f\left(\frac{1}{2}\right)$，D 正确. 故选 ACD.

10. ACD 【解析】易知 $a_n\neq0$，由 $3na_n=(n+1)a_{n+1}$，可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3n}{n+1}$，故 $a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=\frac{3(n-1)}{n}\times\frac{3(n-2)}{n-1}\times\cdots\times\frac{3\times1}{2}\times3=\frac{3^n}{n}(n\geqslant2)$，$a_1=3$ 也符合上式，故 $a_n=\frac{3^n}{n}$，$a_3=\frac{3^3}{3}=9$，A 正确.

由于 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3n}{n+1}=1+\frac{2n-1}{n+1}>1$，故 $a_{n+1}>a_n$，因此 $\{a_n\}$ 是递增数列，B 错误.

由 $(-1)^n\lambda a_n\leqslant a_{n+1}$，可得 $(-1)^n\lambda\leqslant\frac{a_{n+1}}{a_n}=3\frac{n}{n+1}=3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$，

当 n 为偶数时，则 $\lambda\leqslant3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)_{\min}$ 恒成立，令 $f(n)=1-\frac{1}{n+1}$，由于 $f(n)=1-\frac{1}{n+1}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递增，故 $\lambda\leqslant$

$3\times\left(1-\frac{1}{2+1}\right)=2$,

当 n 为奇数时,则 $-\lambda\leqslant 3\left(1-\frac{1}{n+1}\right)_{\min}$ 恒成立,由于 $f(n)=1-\frac{1}{n+1}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,故 $-\lambda\leqslant 3\times\left(1-\frac{1}{1+1}\right)=\frac{3}{2}$,即 $\lambda\geqslant-\frac{3}{2}$. 故若对任意 $n\in\mathbf{N}_+$,都有 $(-1)^n\lambda a_n\leqslant a_{n+1}$,则 $-\frac{3}{2}\leqslant\lambda\leqslant 2$,**故 C 正确.**

由 $a_n=\frac{3^n}{n}$,可得 $\frac{1}{a_n}=\frac{n}{3^n}$,

则 $T_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}=\frac{1}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\cdots+\frac{n-1}{3^{n-1}}+\frac{n}{3^n}$,

$\frac{1}{3}T_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{3}{3^4}+\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$,

两式相减得 $\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)-\frac{n}{3^{n+1}}$,

所以 $T_n=\frac{3}{4}-\frac{2n+3}{4\times 3^n}<\frac{3}{4}$,**故 D 正确. 故选 ACD.**

11. BCD 【解析】$f(x)=e^{\ln x^x}=e^{x\ln x}$,$f'(x)=e^{x\ln x}(\ln x+1)$,**故 A 错误.**

由 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 得 $x^x=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$,因为 $x>0$,等式两边同时取对数,可得 $x\ln x=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}\ln x$,移项得 $\left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x=0$.

又 $x+\frac{1}{x}>0$,要使等式成立,则 $\ln x=0$,解得 $x=1$,所以方程 $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 只有一个解,**B 正确.**

$g(x)=f(x)-m$ 有两个零点，即方程 $x^x=m$ 有两个根，因为 $x>0$，$x^x>0$，所以 $m>0$.

对方程两边同时取对数可得 $x\ln x=\ln m$，令 $m(x)=x\ln x(x>0)$，对 $m(x)$ 求导得 $m'(x)=\ln x+1$.

令 $m'(x)<0$，即 $\ln x+1<0$，解得 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$；令 $m'(x)>0$，即 $\ln x+1>0$，解得 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$.

所以 $m(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $m(x)$ 的最小值为 $m\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$.

当 $x\to0$ 时，$m(x)\to0$，当 $x\to+\infty$ 时，$m(x)\to+\infty$.

要使 $x\ln x=\ln m$ 有两个根，只需 $-\frac{1}{e}<\ln m<0$，解得 $e^{-\frac{1}{e}}<m<1$，**故 C 正确.**

$h(x)=x^2\left(\log_a f(x)-\frac{1}{2}\right)=x^2\left(\log_a x^x-\frac{1}{2}\right)=x^2\left(x\log_a x-\frac{1}{2}\right)=\frac{x^3\ln x}{\ln a}-\frac{1}{2}x^2$，$h'(x)=\frac{x^2}{\ln a}(3\ln x+1)-x=\frac{x}{\ln a}(3x\ln x+x-\ln a)$，令 $n(x)=3x\ln x+x-\ln a$，则 $n(x)$ 有两个变号零点. $n'(x)=3\ln x+4$，令 $n'(x)<0$，即 $3\ln x+4<0$，解得 $x\in\left(0,e^{-\frac{4}{3}}\right)$；

令 $n'(x)>0$，即 $3\ln x+4>0$，解得 $x\in\left(e^{-\frac{4}{3}},+\infty\right)$.

所以 $n(x)$ 在 $\left(0,e^{-\frac{4}{3}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(e^{-\frac{4}{3}},+\infty\right)$ 上单调递增，所以 $n(x)$ 的最小值为 $n\left(e^{-\frac{4}{3}}\right)=$

$3e^{-\frac{4}{3}}\ln e^{-\frac{4}{3}}+e^{-\frac{4}{3}}-\ln a=-3e^{-\frac{4}{3}}-\ln a$.

当 $x\to0$ 时,$n(x)\to-\ln a$,

当 $x\to+\infty$ 时,$n(x)\to+\infty$.

要使 $n(x)$ 有两个变号零点,只需

$-3e^{-\frac{4}{3}}<\ln a<0$,解得 $e^{-3e^{-\frac{4}{3}}}<a<1$.

故若 $h(x)$ 存在极大值和极小值,则

$e^{-3e^{-\frac{4}{3}}}<a<1$,**故 D 正确.**

故选 BCD.

12. 7 或 12 或 15 或 16(任填其中一个即可) **【解析】**设等比数列$\{a_n\}$的公比为 q,则 $q\neq\pm1$,

由 $\frac{a_3}{a_m}=\frac{a_n}{a_5}$,得 $a_m\cdot a_n=a_3\cdot a_5$,即 $a_1q^{m-1}\cdot a_1q^{n-1}=a_1q^2\cdot a_1q^4$,即 $a_1^2q^{m+n-2}=a_1^2q^6$.

因为 $a_1\neq0$,所以 $q^{m+n-2}=q^6$,则 m,n 的不同组合有 $\begin{cases}m=1,\\n=7\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}m=2,\\n=6\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}m=3,\\n=5\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}m=4,\\n=4\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}m=5,\\n=3\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}m=6,\\n=2\end{cases}$ 或者 $\begin{cases}m=7,\\n=1,\end{cases}$ 所以 mn 的取值集合为$\{7,12,15,16\}$.

13. $[1,+\infty)$ **【解析】**由 $1\leqslant x_1<x_2$,得 $x_2\ln x_1-x_1\ln x_2>ax_1-ax_2\Rightarrow\frac{\ln x_1}{x_1}-\frac{\ln x_2}{x_2}>\frac{a}{x_2}-\frac{a}{x_1}$,

即有 $\frac{\ln x_1}{x_1}+\frac{a}{x_1}>\frac{\ln x_2}{x_2}+\frac{a}{x_2}$.

设 $f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{x}$,则 $f(x_1)>f(x_2)$,

故 $f(x)$ 在$[1,+\infty)$上单调递减,

故 $f'(x)=\frac{1-\ln x-a}{x^2}\leqslant0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立,

故 $a\geqslant1-\ln x$ 在 $x\geqslant1$ 时恒成立,

故 $a\geqslant 1$.

14. $\left[\frac{1}{2e^2},+\infty\right)$ 【解析】因为 $\frac{f(m)-f(n)}{m^2-n^2}<k$,不妨设 $m>n>0$,

故 $m^2-n^2>0$,所以 $f(m)-km^2<f(n)-kn^2$.

令 $g(x)=f(x)-kx^2=x\ln x-2x-kx^2$,

则 $g(m)<g(n)$,所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,

$g'(x)=\ln x+1-2-2kx=\ln x-2kx-1$,

所以 $g'(x)\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,

提示:函数单调递减时,其导数小于等于 0,且不恒为 0

即 $\ln x-2kx-1\leqslant 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,变形为 $2k\geqslant\frac{\ln x-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

令 $h(x)=\frac{\ln x-1}{x}$,

则 $h'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$,

令 $h'(x)=0$,即 $2-\ln x=0$,

解得 $x=e^2$,

当 $0<x<e^2$ 时,$h'(x)>0$,$h(x)$ 单调递增,当 $x>e^2$ 时,$h'(x)<0$,$h(x)$ 单调递减,

所以 $h(x)$ 在 $x=e^2$ 处取得极大值,也是最大值,$h(e^2)=\frac{\ln e^2-1}{e^2}=\frac{1}{e^2}$,

因为 $2k\geqslant\frac{\ln x-1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立,

所以 $2k\geqslant h(x)_{\max}=\frac{1}{e^2}$,

故 $k\in\left[\frac{1}{2e^2},+\infty\right)$.

15.【解】(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d,等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q(q\neq 0)$,

由 $a_1=3$, $b_1=1$, $b_2+a_2=8$, $3a_7-4b_2=$

$3a_5$，得$\begin{cases}q+3+d=8,\\3(3+6d)-4q=3(3+4d),\end{cases}$

即$\begin{cases}q+d=5,\\6d=4q,\end{cases}$解得$\begin{cases}d=2,\\q=3.\end{cases}$

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n+1$，$b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$.

(2)由(1)知，$S_n=\dfrac{n(3+2n+1)}{2}=n(n+2)$，因此当 n 为偶数时，$c_n=\dfrac{2}{n(n+2)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}$，

当 n 为奇数时，$c_n=3^{n-1}$.

所以 $T_{2n}=c_1+c_2+c_3+c_4+c_5+\cdots+c_{2n-1}+c_{2n}$

$=(3^0+3^2+3^4+\cdots+3^{2n-2})+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}+\cdots+\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n+2}\right)$

$=\dfrac{1-9^n}{1-9}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n+2}$

$=\dfrac{9^n+3}{8}-\dfrac{1}{2n+2}$.

16.【解】(1)函数 $f(x)=mx-\ln x-2$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=m-\dfrac{1}{x}$，

当 $m\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $m>0$ 时，由 $f'(x)<0$，得 $0<x<\dfrac{1}{m}$，由 $f'(x)>0$，得 $x>\dfrac{1}{m}$，

所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{m},+\infty\right)$ 上单调递增.

综上，当 $m\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0,+\infty)$，无单调递增区间；当 $m>0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $\left(0,\dfrac{1}{m}\right)$，单调递增区间是 $\left(\dfrac{1}{m},+\infty\right)$.

(2)当 $m=1$ 时,$f(x)=x-\ln x-2$,

当 $x>1$ 时,不等式 $f(x)\leqslant\frac{t-1}{x}+x-t\Leftrightarrow x-\ln x-2\leqslant\frac{t-1}{x}+x-t\Leftrightarrow t\leqslant\frac{x\ln x+1}{x-1}+2.$

令 $g(x)=\frac{x\ln x+1}{x-1}+2$, $x>1$, 求导得 $g'(x)=\frac{(\ln x+1)(x-1)-(x\ln x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x-\ln x-2}{(x-1)^2}$,

令 $h(x)=x-\ln x-2$, $x>1$, 求导得 $h'(x)=1-\frac{1}{x}>0$,所以函数 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,

又 $h(3)=1-\ln 3<0$,$h(4)=2-2\ln 2>0$,则存在 $x_0\in(3,4)$,使得 $h(x_0)=0\Leftrightarrow\ln x_0=x_0-2$,

当 $1<x<x_0$ 时,$g'(x)<0$,当 $x>x_0$ 时,$g'(x)>0$,

所以函数 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减,在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+1}{x_0-1}+2=\frac{x_0(x_0-2)+1}{x_0-1}+2=x_0+1\in(4,5)$.

依题意,$t\leqslant g(x_0)$,而 t 是整数,因此 $t\leqslant 4$,$t\in\mathbf{Z}$,所以 t 的最大值为 4.

17.【解】(1)因为 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$,则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$,则 $f'(1)=1$,

因此,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为 $y=x-1$.

(2)不存在. 理由如下:

假设存在这样的点 A,B,C,

则 $x_2^2=x_1x_3$,

因为 $f(x)$ 的图象在点 B 处的切线与直线 AC 平行,所以直线 AC 的斜率 $k_{AC}=f'(x_2)$,

即$\dfrac{\dfrac{\ln x_3}{x_3}-\dfrac{\ln x_1}{x_1}}{x_3-x_1}=\dfrac{1-\ln x_2}{x_2^2}=\dfrac{1-\ln\sqrt{x_1x_3}}{x_1x_3}$,

即 $x_1\ln x_3-x_3\ln x_1=(x_3-x_1)\left[1-\dfrac{1}{2}\ln(x_1x_3)\right]$,

故 $x_1[2\ln x_3-\ln(x_1x_3)]+x_3[\ln(x_1x_3)-2\ln x_1]-2x_3+2x_1=0$,

所以$\left(\dfrac{x_3}{x_1}+1\right)\ln\dfrac{x_3}{x_1}-\dfrac{2x_3}{x_1}+2=0.$

不妨设 $x_1<x_3$,令 $t=\dfrac{x_3}{x_1}$,则 $t>1$,得$(t+1)\ln t-2t+2=0(t>1)$.

设 $g(t)=(t+1)\ln t-2t+2(t>1)$,则

$g'(t)=\ln t+\dfrac{t+1}{t}-2=\ln t+\dfrac{1}{t}-1$,

令 $h(t)=\ln t+\dfrac{1}{t}-1(t>1)$,则 $h'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t-1}{t^2}>0$,所以 $h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以 $h(t)>h(1)=0$,即 $g'(t)>0$,$g(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,$g(t)>g(1)=0$,

所以方程$(t+1)\ln t-2t+2=0(t>1)$无解. 故这样的点 A,B,C 不存在.

18. (1)【解】根据题意,函数 $f(x)=x^2-2x$,则 $f'(x)=2x-2$,

由$\dfrac{f(a_{n+1})-f(a_n)}{a_{n+1}-a_n}=f'(2a_n+1)$,可得

$\dfrac{a_{n+1}^2-2a_{n+1}-a_n^2+2a_n}{a_{n+1}-a_n}=2(2a_n+1)-2$,即

$\dfrac{(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)-2(a_{n+1}-a_n)}{a_{n+1}-a_n}=4a_n$,

化简得 $a_{n+1}=3a_n+2$.

又 $a_1=2$,所以 $a_2=3\times2+2=8$,$a_3=3\times8+2=26$.

(2)【证明】由 $a_{n+1}=3a_n+2$,可得 $a_{n+1}+1=3(a_n+1)$,即$\dfrac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$,所以数列

$\{a_n+1\}$ 是首项为 3,公比为 3 的等比数列.

(3)【解】存在. 由(2)可得 $a_n+1=3^n$,

则 $a_n=3^n-1$, 所以 $b_n=\frac{3^n}{a_na_{n+1}}=\frac{3^n}{(3^{n+1}-1)(3^n-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)$.

则 $S_n=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3-1}-\frac{1}{3^2-1}\right)+\left(\frac{1}{3^2-1}-\frac{1}{3^3-1}\right)+\left(\frac{1}{3^3-1}-\frac{1}{3^4-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3^n-1}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{n+1}-1}\right)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{-6\times3^n+2}$,

所以存在实数 $p=\frac{1}{4}$, $q=-6$, 满足题意.

19. (1)【解】$f(2,4)=2a_1+2^2a_2+2^3a_3+2^4a_4$, $b_1=a_2-a_1=1-1=0$, 数列 $\{b_n\}$ 的公差为 2, 所以 $b_n=2(n-1)$,

$a_3=a_2+b_2=1+2=3$, $a_4=a_3+b_3=3+4=7$, 所以 $f(2,4)=2\times1+2^2\times1+2^3\times3+2^4\times7=2+4+24+112=142$.

(2)【解】$f(1,n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$, $b_1=a_2-a_1=1-1=0$, 数列 $\{b_n\}$ 的公差为 1,

所以 $b_n=n-1=a_{n+1}-a_n$.

当 $n\geqslant2$, $n\in\mathbf{N}_+$ 时, $a_n=(a_n-a_{n-1})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=(n-2)+\cdots+0+1=\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1=\frac{n^2}{2}-\frac{3n}{2}+2$,

而 $a_1=1$ 也符合上式, 所以 $a_n=\frac{n^2}{2}-\frac{3n}{2}+2(n\in\mathbf{N}_+)$.

$f(1,n)=a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}-\frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2n=$

$\dfrac{n^3-3n^2+8n}{6}(n\in\mathbf{N}_+)$.

设 $g(x)=\dfrac{x^3-3x^2+8x}{6}(x\geqslant 1)$,

则 $g'(x)=\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{4}{3}=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+\dfrac{5}{6}>0$,

所以 $g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(1,n)=\dfrac{n^3-3n^2+8n}{6}(n\in\mathbf{N}_+)$ 单调递增,

注意到 $f(1,1)=1$, $f(1,2)=\dfrac{8-12+16}{6}=2$, $f(1,3)=\dfrac{27-27+24}{6}=4$,

$f(1,4)=\dfrac{64-48+32}{6}=8$,

所以当 $n\geqslant 4$, $n\in\mathbf{N}_+$ 时,均满足 $f(1,n)\geqslant 8$,

所以满足题意的 n 的最小值为 4.

(3)【证明】易知 $a_n=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\times m+1$, 由题意得 $f(m,n)=a_1m+a_2m^2+\cdots+a_nm^n$

$=m+m^2+\cdots+\left[1+\dfrac{(i-1)(i-2)}{2}\times m\right]m^i+\cdots+\left[1+\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}\times m\right]m^n$

$=m+m^2+\cdots+\left[\dfrac{i^2-3i}{2}\times m+(m+1)\right]m^i+\cdots+\left[\dfrac{n^2-3n}{2}\times m+(m+1)\right]m^n$

$=\dfrac{m}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}i^2m^i-\dfrac{3m}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}im^i+(m+1)\sum\limits_{i=1}^{n}m^i$.

由 $S(x)=x+2x^2+\cdots+nx^n$, 得 $S'(x)=1+4x+\cdots+n^2x^{n-1}$,

所以 $xS'(x)=x+4x^2+\cdots+n^2x^n=\sum\limits_{i=1}^{n}i^2x^i$,

所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2m^i=mS'(m)$,

$\sum_{i=1}^{n} im^{i}=S(m)$,

所以 $f(m,n)=\frac{m^{2}}{2}S'(m)-\frac{3m}{2}S(m)+(m+1)\sum_{i=1}^{n} m^{i}(i\in \mathbf{N}_{+})$.