$\sqrt{32}\Big)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}-3\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}+4\sqrt{2}=\dfrac{15\sqrt{2}}{4}-\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$.

(3) $(2-\sqrt{3})^{2\,023}\times(2+\sqrt{3})^{2\,024}-2\times\left|-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|-(-\sqrt{2})^{0}=(2-\sqrt{3})^{2\,023}\times(2+\sqrt{3})^{2\,023}\times(2+\sqrt{3})-2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1=[(2-\sqrt{3})\times(2+\sqrt{3})]^{2\,023}\times(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}-1=(4-3)^{2\,023}\times(2+\sqrt{3})-\sqrt{3}-1=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1=1$.

13.【解】(1)仿照"小丽的做法":

$\because x^2+6x-4=(x+3)^2-13$, $x=\sqrt{5}-3$, $\therefore x^2+6x-4=(\sqrt{5}-3+3)^2-13=5-13=-8$.

(也可仿照"小明的做法"求解)

(2)由题意得, $x^2=\dfrac{14-4\sqrt{10}}{9}$, $6x=2\sqrt{10}-4$.

$\therefore 6x^3+11x^2=x^2(6x+11)=\dfrac{1}{9}(14-4\sqrt{10})\times(2\sqrt{10}+7)=\dfrac{1}{9}\times18=2$.

14.【解】(1)由题意可得 $\sqrt{224}\times\sqrt{224}\times\sqrt{40}=448\sqrt{10}(\mathrm{cm}^3)$.

答:从塑料容器中倒出的水的体积为 $448\sqrt{10}\ \mathrm{cm}^3$.

(2)设圆柱形玻璃容器的底面的半径为 r cm. 根据题意可得 $\pi\times r^2\times\sqrt{490}=448\sqrt{10}$,

解得 $r=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$(负值已舍去).

答:圆柱形玻璃容器的底面的半径为 $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ cm.

15.【解】(1) $\because x>0$, $\therefore x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$,

$\therefore x+\dfrac{1}{x}$ 的最小值为 2.

(2)设与墙垂直的一边长为 $x(x>0)$ m,与墙平行的一边长为 $y(y>0)$ m,则 $xy=200$,

$\therefore x+y\geqslant 2\sqrt{xy}=20\sqrt{2}$, $\therefore 2x+y\geqslant 2\sqrt{2xy}=20\sqrt{2}\times\sqrt{2}=40$.

答:所用的篱笆至少需要 40 m.

关键点拨 解题的关键是将被开方数转化为两个实数的和或差的完全平方.

16.【解】(1) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{4+4\sqrt{3}+3}=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=2+\sqrt{3}$, $\sqrt{41-24\sqrt{2}}=\sqrt{32-24\sqrt{2}+9}=\sqrt{(4\sqrt{2}-3)^2}=4\sqrt{2}-3$. 故答案为 $2+\sqrt{3}$, $4\sqrt{2}-3$.

(2) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\cdots+\sqrt{199-60\sqrt{11}}=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})+\cdots+(10-\sqrt{99})=10-1=9$.

期中综合测试

刷速度

1. A 【解析】由题意得 $x-4\geqslant 0$, $\therefore x\geqslant 4$,只有 A 选项正确,故选 A.

2. C 【解析】$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{3}$ 不能合并, $2\sqrt{2}\times3\sqrt{3}=6\sqrt{2\times3}=6\sqrt{6}$, $\sqrt{8}\div\sqrt{2}=\sqrt{8\div2}=\sqrt{4}=2$, $3\sqrt{2}-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,所以 C 选项正确. 故选 C.

3. A 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AB=AD$, $OA=OC=\dfrac{1}{2}AC$, $OB=OD=\dfrac{1}{2}BD$. 当 $AB=AD$ 时,不能判定菱形 $ABCD$ 是矩形,故选项 A 符合题意. $\because OA=OB$, $\therefore AC=BD$, $\therefore$ 菱形 $ABCD$ 是矩形,故选项 B 不符合题意. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形, $AC=BD$, $\therefore$ 菱形 $ABCD$ 是矩形,故选项 C 不符合题意. $\because DC\perp BC$, $\therefore \angle BCD=90^\circ$, $\therefore$ 菱形 $ABCD$ 是矩形,故选项 D 不符合题意. 故选 A.

4. B 【解析】由数轴可得 $b<0<a$, $\therefore a-b>0$, $\therefore \sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}-\sqrt{(a-b)^2}=|a|-|b|-|a-b|=a+b-(a-b)=a+b-a+b=2b$. 故选 B.

5. A 【解析】$\because m=\sqrt{6}+2$, $n=\sqrt{6}-2$, $\therefore m+n=2\sqrt{6}$, $mn=6-4=2$, $\therefore \dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{m+n}{mn}=\dfrac{2\sqrt{6}}{2}=\sqrt{6}$. 故选 A.

6. B 【解析】设小长方形卡片的长为 x cm,宽为 y cm. 根据题意得 $x+2y=\sqrt{21}$,则题图(2)中两块阴影部分的周长和是 $2\sqrt{21}+2(4-2y)+2(4-x)=2\sqrt{21}+4\times4-4y-2x=2\sqrt{21}+16-2(x+2y)=2\sqrt{21}+16-2\sqrt{21}=16(\mathrm{cm})$. 故选 B.

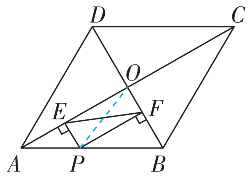
关键点拨 利用等面积法求出 $\triangle AOB$ 的高是解题的关键.

7. C

添加辅助线

连接 OP,易得四边形 $OEPF$ 是矩形,利用矩形对角线相等将求 EF 的最小值转化成求 OP 的最小值.

【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\therefore AC\perp BD$，$OA=OC=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times 8=4$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD=\frac{1}{2}\times 6=3$. 在 Rt$\triangle AOB$ 中，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. 如图所示，



连接 OP. $\because PE\perp OA$ 于点 E，$PF\perp OB$ 于点 F，$\therefore$ 四边形 $OEPF$ 是矩形，$\therefore EF=OP$，$\therefore$ 当 $OP\perp AB$ 时，OP 的值最小，即 EF 的值最小，此时 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}AB\cdot OP$，$\therefore OP=\frac{OA\cdot OB}{AB}=\frac{4\times 3}{5}=\frac{12}{5}$，$\therefore EF$ 的最小值为$\frac{12}{5}$，故选 C.

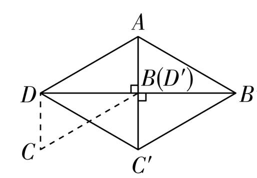
8. C 【解析】$\because BE/\!/AC$，$CE/\!/BD$，$\therefore$ 四边形 $COBE$ 是平行四边形. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore BD=AC$，$OB=OD$，$OC=OA$，$\angle ABC=90°$，$\therefore OB=OC$，$\therefore$ 四边形 $COBE$ 是菱形. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB=6$，$AC=10$，根据勾股定理得 $BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{100-36}=8$，$\therefore\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}BC\cdot AB=\frac{1}{2}\times 8\times 6=24$. $\because AO=CO$，$\therefore S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=12$. $\because$ 四边形 $COBE$ 是菱形，$\therefore S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}S_{\text{菱形}COBE}=12$，$\therefore S_{\text{菱形}COBE}=24$. 故选 C.

▶关键点拨 由矩形的性质得出 $OB=OC$ 是解决问题的关键.

9. B 【解析】设 CE 交 MN 于点 H，BM 交 CP 于点 L. $\because\angle ACB=90°$，四边形 $ABMN$、四边形 $BCPQ$、四边形 $ACEF$ 都是正方形，$\therefore AN=AB$，$AF=AC=EF$，$\angle FAC=\angle NAB=\angle ACB=\angle ACE=\angle E=\angle ABM=\angle BCL=90°$，$MN/\!/AB$，$\therefore\angle FAN=\angle CAB=90°-\angle CAN$，$\angle ACB+\angle ACE=180°$，$\therefore B,C,E$ 三点在同一条直线上，$\therefore\angle NHE=\angle ABC$. $\because\angle BLC=\angle ABC=90°-\angle LBC$，$\therefore\angle NHE=\angle BLC$. 在 $\triangle ANF$ 和 $\triangle ABC$ 中，$\begin{cases}AN=AB,\\\angle FAN=\angle CAB,\\AF=AC,\end{cases}$ $\therefore\triangle ANF\cong\triangle ABC(\mathrm{SAS})$，$\therefore FN=CB$. $\because$ 点 N 是 EF 的中点，$\therefore FN=EN$，$\therefore EN=CB$. 在 $\triangle ENH$ 和 $\triangle CBL$ 中，$\begin{cases}\angle E=\angle BCL,\\\angle NHE=\angle BLC,\\EN=CB,\end{cases}$ $\therefore\triangle ENH\cong\triangle CBL(\mathrm{AAS})$，$\therefore S_{\triangle ENH}=S_{\triangle CBL}$，$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\triangle ENH}+S_{\text{四边形}PQBL}=S_{\triangle CBL}+S_{\text{四边形}PQBL}=S_{\text{正方形}BCPQ}$. $\because S_{\text{阴影}}=6$，$S_{\text{正方形}BCPQ}=CB^2$，$\therefore CB^2=6$，$\therefore CB=\sqrt{6}$（负值已舍去）. $\because AC=EF=2EN=2CB$，$\therefore AB=\sqrt{AC^2+CB^2}=\sqrt{(2CB)^2+CB^2}=\sqrt{5}\,CB=\sqrt{5}\times\sqrt{6}=\sqrt{30}$，故选 B.

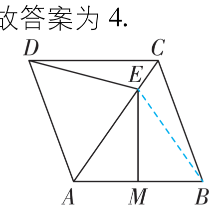
▶关键点拨 由全等三角形的判定及性质得出 $S_{\text{阴影}}=S_{\text{正方形}BCPQ}$ 是解题的关键.

10. C 【解析】①$\because$ Rt$\triangle ABD\cong$ Rt$\triangle CDB$，且 $\angle ADB=\angle CBD=30°$，$\angle ABD=\angle CDB=90°$，$AB=CD=3$，$\therefore AD/\!/BC$，$AD=BC$. 根据平移的性质得 $BC=B'C'$，$BC/\!/B'C'$，$\therefore AD=B'C'$，$AD/\!/B'C'$，$\therefore$ 在平移的过程中，四边形 $AB'C'D$ 一直是平行四边形，故①正确. ②在 Rt$\triangle ABD$ 中，$\angle ABD=90°$，$\angle ADB=30°$，$AB=3$，$\therefore AD=2AB=6$. 由勾股定理得 $BD=\sqrt{AD^2-AB^2}=3\sqrt{3}$. 当平移距离为$\sqrt{3}$时，$DD'=BB'=\sqrt{3}$，$\therefore DB'=DB+BB'=4\sqrt{3}$. 在 Rt$\triangle ABB'$ 中，由勾股定理得 $AB'=\sqrt{AB^2+BB'^2}=2\sqrt{3}$. $\because AD^2+AB'^2=6^2+(2\sqrt{3})^2=48$，$DB'^2=(4\sqrt{3})^2=48$，$\therefore AD^2+AB'^2=DB'^2$，$\therefore\triangle ADB'$ 为直角三角形，且 $\angle DAB'=90°$. $\because$ 四边形 $AB'C'D$ 是平行四边形，$\therefore$ 此时四边形 $AB'C'D$ 是矩形，故②正确. ③$\because BD=3\sqrt{3}$，$\therefore$ 当平移距离为 $3\sqrt{3}$ 时，点 D' 与点 B 重合，此时点 A,B,C' 在同一条直线上，如图所示. $\because BD=B'D'=3\sqrt{3}$，$AB=C'D'=3$，且 $AC'\perp DB'$，$\therefore$ 此时四边形 $AB'C'D$ 是菱形，故③正确. ④$\because$ 四边形在既是矩形又是菱形时才是正方形，$\therefore$ 在平移的过程中，不可能出现正方形，故④不正确. 综上所述，正确的结论是①②③，共 3 个. 故选 C.



11. 4 【解析】$\because$ 最简二次根式$\sqrt{a+1}$与最简二次根式$\sqrt{2a-3}$可以合并，$\therefore$ 最简二次根式$\sqrt{a+1}$与最简二次根式$\sqrt{2a-3}$是同类二次根式，$\therefore a+1=2a-3$，$\therefore a=4$，故答案为 4.

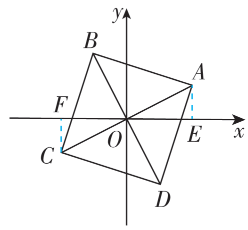
12. 55° 【解析】如图，连接 BE. 在菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=70°$，$AD/\!/BC$，$\angle DAC=\angle BAC$，$\therefore\angle DAB=180°-70°=110°$，$\therefore\angle DAC=\angle BAC=55°$. $\because AB$ 的垂直平分线交对角线 AC 于点 E，$\therefore EA=EB$，$\therefore\angle EAB=\angle EBA=55°$. 由菱形的轴对称的性质可得 $\angle ADE=\angle ABE=55°$. 故答案为 55°.



13. $27+10\sqrt{5}$ 【解析】由题意得$(\sqrt{5}+5)^2-3=5+10\sqrt{5}+25-3=27+10\sqrt{5}$，$\therefore$ 若输入 x 的值为$\sqrt{5}$，则输出的值为 $27+10\sqrt{5}$，故答案为 $27+$

$10\sqrt{5}$.

14. $(-2,-1)$ 【解析】过点 A,C 分别作 x 轴的垂线 AE,CF，垂足分别为点 E,F，如图，$\therefore \angle AEO=\angle CFO=90°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，$\therefore OA=OC$. $\because \angle AOE=\angle COF$，$\therefore \triangle AOE\cong\triangle COF$(AAS)，$\therefore OE=OF,AE=CF$. $\because$ 点 A 的坐标是 $(2,1)$，$\therefore OE=OF=2$，$AE=CF=1$，$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(-2,-1)$，故答案为 $(-2,-1)$.



一题多解 根据正方形的对称性也可得点 C 的坐标.

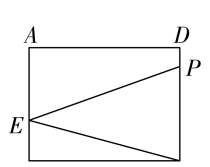
15. $\frac{5}{2}$ 或 5

思路分析

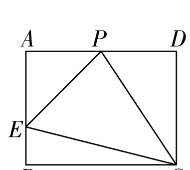
P在CD上 → $S_{\triangle PCE}=20$ → $t=\frac{5}{2}$

P在AD上 → $S_{\triangle PCE}=S_{矩形ABCD}-S_{\triangle PAE}-S_{\triangle BCE}-S_{\triangle PCD}=20$ → $t=5$

【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AB=CD=6$ cm，$AD=BC=8$ cm. 如图(1)，当点 P 在 CD 上，即 $0<t\leqslant 3$ 时，由题意得 $CP=2t$ cm，$\therefore S_{\triangle PCE}=\frac{1}{2}CP\cdot BC=20$，即 $\frac{1}{2}\times 2t\times 8=20$，$\therefore t=\frac{5}{2}$. 如图(2)，当点 P 在 AD 上，即 $3<t\leqslant 7$ 时，$\because AE=2BE$，$AB=6$ cm，$\therefore AE=\frac{2}{3}AB=4$ cm，$\therefore BE=2$ cm. 由题意得，$DP=(2t-6)$ cm. $\because AD=BC=8$ cm，$\therefore AP=8-(2t-6)=(14-2t)$ cm. $\because S_{\triangle PCE}=S_{矩形ABCD}-S_{\triangle APE}-S_{\triangle BCE}-S_{\triangle PCD}$，$\therefore 6\times 8-\frac{1}{2}\times(14-2t)\times 4-\frac{1}{2}\times 2\times 8-\frac{1}{2}\times 6\times(2t-6)=20$，解得 $t=5$. 综上所述，当 $t=\frac{5}{2}$ 或 5 时，$\triangle PCE$ 的面积为 20 cm^2. 故答案为 $\frac{5}{2}$ 或 5.



图(1)



图(2)

16.【解】(1) $\sqrt{\frac{8}{3}}+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{0.125}-\sqrt{6}+\sqrt{32}=\frac{2}{3}\sqrt{6}+\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}-\sqrt{6}+4\sqrt{2}=\left(\frac{2}{3}-1\right)\sqrt{6}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+4\right)\sqrt{2}=-\frac{1}{3}\sqrt{6}+\frac{19}{4}\sqrt{2}$.

(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2-(2\sqrt{5}+\sqrt{3})(2\sqrt{5}-\sqrt{3})=5+3+2\sqrt{15}-(20-3)=8+2\sqrt{15}-17=-9+2\sqrt{15}$.

17.【解】小静的猜想正确. 猜想过程如下：

$\because \left(\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+\left(\sqrt{\frac{4}{3}}-4\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}-2\sqrt{2}=-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$，$-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{18}=-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$3\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore$ “$*$”处的数字为 3.

思路分析 (1)根据矩形的性质推出 $AC\perp BD$ 是解题的关键.

18. (1)【证明】$\because$ 四边形 $BECO$ 是矩形，$\therefore BC=EO$，$\angle BOC=90°$，$\therefore AC\perp BD$. $\because AD=EO$，$\therefore AD=BC$. 又 $\because BC/\!/AD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 又 $\because AC\perp BD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)【解】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle BCD=120°$，$\therefore \angle ABC=180°-120°=60°$，$AB=BC$，$AC\perp BD$，$AO=CO=1$，$BO=DO$，$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形，$\therefore AB=AC=2$，$\therefore BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{3}$，$\therefore BD=2\sqrt{3}$. $\because$ 四边形 $BECO$ 是矩形，$\therefore BE=CO=1$，$\angle DBE=90°$，$\therefore DE=\sqrt{BD^2+BE^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+1^2}=\sqrt{13}$.

19.【解】(1)由题意可得 $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$，则原式 $=(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2\,013}-\sqrt{2\,012})\times(\sqrt{2\,013}+1)=(\sqrt{2\,013}-1)\times(\sqrt{2\,013}+1)=2\,013-1=2\,012$.

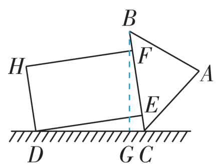
(2) $\frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{11}}=\sqrt{12}+\sqrt{11}$，$\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{12}}=\sqrt{13}+\sqrt{12}$. $\because \sqrt{12}+\sqrt{11}<\sqrt{13}+\sqrt{12}$，$\therefore \frac{1}{\sqrt{12}-\sqrt{11}}<\frac{1}{\sqrt{13}-\sqrt{12}}$，$\therefore \sqrt{12}-\sqrt{11}>\sqrt{13}-\sqrt{12}$.

20.【解】(1)当牙膏盒底面对角线长大于或等于 4 cm 时，牙膏盒能装下这种牙膏. $\because$ 小思制作的牙膏盒的底面对角线长为 $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\approx 2\times 1.41=2.82(cm)<4$ cm，小明制作的牙膏盒的底面对角线长为 $\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}\approx 3\times 1.41=4.23(cm)>4$ cm，小华制作的牙膏盒的底面对角线长为 $\sqrt{3.6^2+2.7^2}=4.5$(cm)$>$

4 cm,∴ 小明和小华制作的盒子能装下这种牙膏,而小思制作的盒子不能装下这种牙膏.

(2)小明制作的牙膏盒更合理. 理由:当牙膏盒的高度相同时,底面积越小越节省材料. ∵ 小明制作的牙膏盒的底面积为 $3\times3=9(\mathrm{cm}^2)$,小华制作的牙膏盒的底面积为 $3.6\times2.7=9.72(\mathrm{cm}^2)>9\ \mathrm{cm}^2$,∴ 小明制作的牙膏盒更合理.

21.【解】(1)他的说法对. 理由如下:如图,过点 B 作 $BG\perp DC$ 于点 G,则 $\angle BGC=90°$. ∵ 四边形 $EFHD$ 是矩形,∴ $\angle DEC=90°$,∴ $\angle BGC=\angle DEC$. 在 $\triangle BCG$ 与 $\triangle DCE$ 中,$\begin{cases}\angle BGC=\angle DEC,\\ \angle BCG=\angle DCE,\\ BC=DC,\end{cases}$



∴ $\triangle BCG\cong\triangle DCE(\mathrm{AAS})$,∴ $BG=DE$,∴ 点 B 到地面的距离就是线段 DE 的长.

(2)∵ 该标识牌是轴对称图形,四边形 $EFHD$ 是矩形,∴ $BF=CE=0.11$ 米,$EF=DH=0.4$ 米,∴ $BC=0.4+0.11\times2=0.62$(米). ∵ $DE=\sqrt{CD^2-CE^2}=\sqrt{0.61^2-0.11^2}=0.6$(米),∴ $\triangle ABC$ 的高为 $1-0.6=0.4$(米),矩形的面积为 $DH\cdot DE=0.4\times0.6=0.24$(平方米),∴ $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2}BC\times0.4=\frac{1}{2}\times0.62\times0.4=0.124$(平方米),则制作标识牌的总费用为 $200\times0.24+0.124\times100=60.4$(元).

答:制作标识牌的总费用为 60.4 元.

22. (1)【证明】∵ CE 平分 $\angle BCA$,CF 平分 $\angle ACD$,∴ $\angle BCE=\angle ACE$,$\angle DCF=\angle ACF$. ∵ $MN/\!/BC$,∴ $\angle BCE=\angle OEC$,$\angle DCF=\angle OFC$,∴ $\angle ACE=\angle OEC$,$\angle ACF=\angle OFC$,∴ $EO=OC$,$OC=FO$,∴ $EO=FO$.

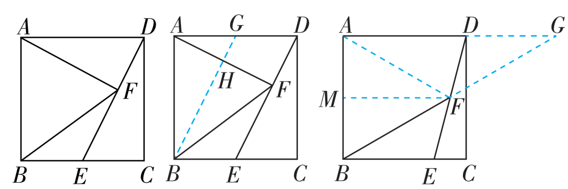
【解】(2)当点 O 运动到 AC 中点时,四边形 $AECF$ 是矩形. 理由:∵ $CO=AO$,$EO=FO$,∴ 四边形 $AECF$ 是平行四边形. ∵ $\angle BCE=\angle ACE$,$\angle DCF=\angle ACF$,$\angle BCE+\angle ACE+\angle DCF+\angle ACF=180°$,∴ $2\angle ACE+2\angle ACF=180°$,∴ $\angle ACE+\angle ACF=90°$,即 $\angle ECF=90°$,∴ 四边形 $AECF$ 是矩形.

(3)当 $\triangle ABC$ 满足 $\angle ACB=90°$ 时,四边形 $AECF$ 是正方形. ∵ $\angle ACB=90°$,$MN/\!/BC$,∴ $\angle COF=90°$,即 $CA\perp EF$. 又∵ 四边形 $AECF$ 是矩形,∴ 四边形 $AECF$ 是正方形. 故答案为 $\angle ACB=90°$(答案不唯一).

23.【解】(1)①补全图形如图(1)所示.

②$AF\perp DE$,$AF=\frac{4}{5}DE$. 设 AD 的中点为 G,连接 BG 交 AF 于 H,如图(2)所示.

∵ 四边形 $ABCD$ 为正方形,∴ $AB=BC=CD=DA$,$AD/\!/BC$,$\angle DAB=\angle ABC=\angle C=\angle CDA=90°$. ∵ 点 E 为 BC 的中点,点 G 为 AD 的中点,∴ $AG=CE$. 在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle CDE$ 中,$\begin{cases}AB=CD,\\ \angle BAG=\angle C,\\ AG=CE,\end{cases}$ ∴ $\triangle ABG\cong\triangle CDE(\mathrm{SAS})$,∴ $\angle BGA=\angle DEC$,$BG=DE$. ∵ $AD/\!/BC$,∴ $\angle DEC=\angle EDA$,∴ $\angle BGA=\angle EDA$,∴ $BG/\!/DE$,∴ GH 为 $\triangle ADF$ 的中位线,∴ $AH=FH$,则 $AF=2AH$. ∵ $BF=AB$,∴ $BH\perp AF$,∴ $AF\perp DE$. 设 $AG=a$,则 $AD=AB=2a$,在 $\mathrm{Rt}\triangle ABG$ 中,由勾股定理得 $BG=\sqrt{AB^2+AG^2}=\sqrt{5}a$,∴ $S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}BG\cdot AH=\frac{1}{2}AB\cdot AG$,∴ $AH=\frac{AB\cdot AG}{BG}=\frac{2a\times a}{\sqrt{5}a}=\frac{2\sqrt{5}a}{5}$,∴ $AF=2AH=\frac{4\sqrt{5}a}{5}$. 又∵ $DE=BG=\sqrt{5}a$,∴ $AF=\frac{4}{5}DE$.



图(1) 图(2) 图(3)

(2)过点 F 作 $FM/\!/BC$ 交 AB 于 M,连接 AF,如图(3),∴ $\angle AMF=\angle ABC=90°$,即 $FM\perp AB$. ∵ 点 F 为 DE 的中点,∴ $DF=FE$. 延长 BF 与 AD 的延长线交于点 G,易证 $\triangle GDF\cong\triangle BEF$,∴ $GF=BF$. 又∵ 在 $\triangle ABG$ 中,$MF/\!/AG$,∴ MF 为 $\triangle ABG$ 的中位线,∴ $AM=BM$,∴ FM 为 AB 的垂直平分线,∴ $FA=BF$. ∵ $BF=AB$,∴ $FA=BF=AB$,∴ $\triangle FAB$ 为等边三角形,∴ $\angle BAF=60°$,∴ $\angle DAF=\angle DAB-\angle BAF=90°-60°=30°$. ∵ $FA=AB=AD$,∴ $\angle ADF=\angle AFD=\frac{1}{2}(180°-\angle DAF)=75°$,∴ $\angle CDF=\angle CDA-\angle ADF=90°-75°=15°$.

思路分析 (2)过点 F 作 $FM/\!/BC$ 交 AB 于 M,连接 AF,则 $FM\perp AB$,延长 BF 与 AD 的延长线交于点 G,易证 $\triangle GDF\cong\triangle BEF$,得 $GF=BF$,则 $AM=BM$,则 FM 垂直平分 AB,可得 $FA=BF$,再根据 $BF=AB$ 得 $\triangle FAB$ 为等边三角形,则 $\angle BAF=60°$,则 $\angle DAF=\angle DAB-\angle BAF=30°$,然后根据 $FA=AB=AD$ 得 $\angle ADF=\angle AFD=75°$,由此可得 $\angle CDF$ 的度数.