全书综合检测

1. B 【解析】因为 $z=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=i$，所以 $z^2=i^2=-1$，所以 $z^2+z=-1+i$，则 z^2+z 在复平面内对应的点位于第二象限. **故 B 正确.**

2. B 【解析】抛掷一枚质地均匀的硬币三次，共有（正正正），（正正反），（正反正），（反正正），（正反反），（反反正），（反正反），（反反反）8 种结果，事件 A 包含（正正正），（正正反），（正反正），（正反反），共 4 种结果，事件 B 包含（正反反），（反反正），（反正反），共 3 种结果，事件 C 包含（正正反），（正反正），（反正正），共 3 种结果，事件 D 包含（正正正），（反反反），共 2 种结果.

对于 A，事件 A 与事件 B 可能同时发生，即（正反反），不是互斥事件，**故 A 错误；**

对于 B，$P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$，$P(D)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，

$P(AD)=\frac{1}{8}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=P(A)P(D)$，则 A 与 D 相互独立，**故 B 正确；**

对于 C，$P(C)=\frac{3}{8}$，$P(AC)=\frac{1}{4}\neq P(A)P(C)$，则 A 与 C 不独立，**故 C 错误；**

对于 D，C 和 D 互斥但 $C\cup D\neq\Omega$，故它们不对立，**故 D 错误.**

3. A 【解析】因为这组数据的平均数为 48，方差为 7，

所以 $\frac{1}{10}(m+n+48+47+48+50+45+47+49+50)=48$，

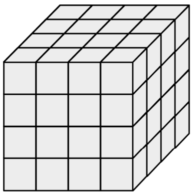
且 $\frac{1}{10}[(m-48)^2+(n-48)^2+(48-48)^2\times 2+(47-48)^2\times 2+(50-48)^2\times 2+(45-48)^2+(49-48)^2]=7$，

整理得 $m+n=96$，且 $(m-48)^2+(n-

$48)^2=50$.

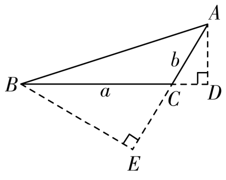
设 $m=48+t$，则 $n=48-t$，因为 $(m-48)^2+(n-48)^2=50$，所以 $2t^2=50$，即 $t^2=25$，则 $|m-n|=2|t|=10$，**故 A 正确.**

4. D 【解析】表面积为 96 cm^2 的大正方体木块棱长为 4 cm，体积为 $4^3=64(cm^3)$，所以该大正方体木块可以分割成 64 个棱长为 1 cm 的小正方体木块，分割后在大正方体木块每个面上既不靠近顶点，又不靠近棱边的位置有 4 个小正方体木块是一面着色的，所以所求概率为 $\frac{4\times6}{64}=\frac{3}{8}$，**故 D 正确.**



5. A 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{2\pi}{3}$，$|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{2\pi}{3}=1\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$. 又因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\frac{1}{2}(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，所以 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{4\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{4\times1^2+4\times(-1)+2^2}=2$. **故 A 正确.**

6. A 【解析】分别过点 A,B 向对边作垂线，垂足分别为点 D,E，如图所示.



设 $AC=b$，$BC=a$，则 $CD=\frac{1}{2}b$，$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，$CE=\frac{1}{2}a$，$BE=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 由题可知旋转形成的几何体都可以看成一个大圆锥挖去一个小圆锥，$V_1=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\times\left(b+\frac{1}{2}a\right)-$

$\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\times\frac{1}{2}a=\frac{\pi}{4}a^2b$, $V_2=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2\times\left(a+\frac{1}{2}b\right)-\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2\times\frac{1}{2}b=\frac{\pi}{4}ab^2$, 所以 $\frac{V_1}{V_2}=\frac{a}{b}=2$, 即 $\frac{AC}{BC}=\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$. **故 A 正确.**

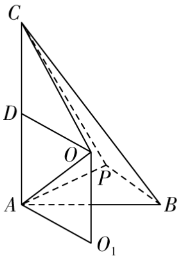
7. B 【解析】由 $\sqrt{3}(a^2+c^2-b^2)=4S$, 得 $\sqrt{3}\times 2ac\cos B=4\times\frac{1}{2}ac\sin B$, 因为 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 所以 $\cos B\neq 0$, 上式整理得 $\tan B=\sqrt{3}$, 所以 $B=\frac{\pi}{3}$, 由题意得 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$. 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(B+C)}{\sin C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin C}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan C}+1\right)$, 则 $\triangle ABC$ 面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan C}+1\right)\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan C}+1\right)$. 因为 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$, 所以 $\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $0<\frac{\sqrt{3}}{\tan C}<3$, 所以 $\triangle ABC$ 面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan C}+1\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **故 B 正确.**

8. C 【解析】在 $\triangle ABP$ 中, 由余弦定理得 $AP=\sqrt{AB^2+BP^2-2AB\cdot BP\cos\angle ABP}=\sqrt{9+2-2\times3\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{5}$, 由正弦定理得 $\triangle ABP$ 外接圆半径 $r=\frac{AP}{2\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 设 $\triangle ABP$ 外接圆圆心为 O_1, 三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心为 O, 连接 OO_1, 则 $OO_1\perp$ 平面 PAB, 又 $AC\perp$ 平面 PAB, 于是 $OO_1//AC$. 令 AC 的中点为 D, 连接 OD, OA, O_1A, 由 $OA=OC$ 得 $OD\perp AC$. 又 $AO_1\subset$ 平面 PAB, 所以 $AO_1\perp AC$, 又

AO_1, $OD\subset$ 平面 $ADOO_1$, 所以 $OD// AO_1$,

所以四边形 $ADOO_1$ 是矩形, $OO_1=\frac{1}{2}AC=2$, 故三棱锥 $P-ABC$ 外接球的半径 $R=OA=\sqrt{r^2+OO_1^2}=\sqrt{\frac{10}{4}+4}=\frac{\sqrt{26}}{2}$,

所以三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积 $S=4\pi R^2=26\pi$. **故 C 正确.**



名师点拨 求解几何体的外接球的表面积、体积计算问题,借助球的截面小圆的性质找出球心位置是解题的关键.

9. ABC 【解析】设 $z=\mathrm{i}$, 则 $z^2=\mathrm{i}^2=-1$, **故 D 错误**; $|z-1|\leqslant|z|+1=2$, **故 C 正确**; 设 $z=a+b\mathrm{i}\ (a, b\in\mathbf{R})$, 因为 $|z|=1$, 所以 $\sqrt{a^2+b^2}=1$, 即 $a^2+b^2=1$, 所以 $z\cdot\bar{z}=(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=a^2-b^2\mathrm{i}^2=a^2+b^2=1$, **故 A 正确**; $z+\frac{1}{z}=z+\frac{z\cdot\bar{z}}{z}=z+\bar{z}=a+b\mathrm{i}+a-b\mathrm{i}=2a\in\mathbf{R}$, **故 B 正确.**

10. BCD 【解析】对于 A, 由图知 $10\times(x+0.015+0.02+0.03+0.025)=1$, 解得 $x=0.01$, **故 A 错误**;

对于 B, 成绩在 $[50,80)$ 内对应的频率为 $0.1+0.15+0.2=0.45<0.6$, 成绩在 $[50,90)$ 内对应的频率为 $0.1+0.15+0.2+0.3=0.75>0.6$, 因此第 60 百分位数 m 位于区间 $[80,90)$ 内, $m=80+\frac{0.6-0.45}{0.3}\times(90-80)=85$, 所以样本数据的第 60 百分位数约为 85, **故 B 正确**;

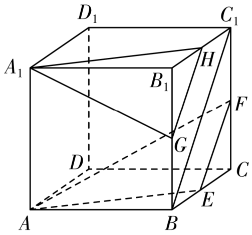
对于 C, 平均数约为 $55\times0.1+65\times0.15+75\times0.2+85\times0.3+95\times0.25=79.5$, **故 C 正确**;

对于 D, 成绩低于 80 分的三组学生的人数之比为 $0.1:0.15:0.2=2:3:4$, 则

应选取成绩在[60,70)内的学生人数为

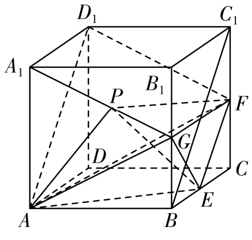
$30\times\frac{3}{2+3+4}=10$，**故 D 正确.**

11. ABC 【解析】取 B_1C_1 中点 H，连接 GH,A_1H,BC_1，如图①. 则由题意可知 $A_1H=A_1G=\sqrt{A_1B_1^2+B_1G^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，$GH=\sqrt{B_1H^2+B_1G^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，且 $GH\,/\!/\,BC_1\,/\!/\,EF$，所以 $\angle A_1GH$ 即为直线 EF 与 A_1G 所成角（或其补角），且 $\cos\angle A_1GH=\frac{A_1G^2+GH^2-A_1H^2}{2A_1G\cdot GH}=\frac{\sqrt{5}^2+\sqrt{2}^2-\sqrt{5}^2}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以直线 EF 与 A_1G 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$，**故 A 正确.**



图①

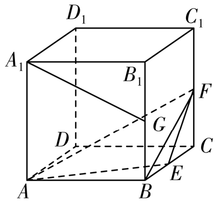
如图②，在线段 A_1G 上任取一点 P，连接 $AD_1,FD_1,BC_1,PA,PE,PF,GA,GE$，由正方体几何性质可知 $AB\,/\!/\,D_1C_1$ 且 $AB=D_1C_1$，所以四边形 ABC_1D_1 是平行四边形，故 $AD_1/\!/BC_1$. 又 $BC_1/\!/EF$，所以 $AD_1/\!/EF$，故 AD_1 与 EF 共面且过 AD_1 与 EF 的平面有且只有一个，故四边形 AD_1FE 是平面 AEF 截正方体所得的截面图形. 连接 GF，则由 G,F 均为所在棱的中点以及正方体性质得 $GF/\!/B_1C_1/\!/A_1D_1$，且 $GF=B_1C_1=A_1D_1$，所以四边形 A_1D_1FG 为平行四边形，故 $A_1G\,/\!/\,D_1F$，又 $D_1F\subset$ 平面 AD_1FE，$A_1G\not\subset$ 平面 AD_1FE，所以 $A_1G/\!/$ 平面 AD_1FE，故点 P 到平面 AEF 的距离即为点 G 到平面 AEF 的距离，所以 $V_{三棱锥P-AEF}=V_{三棱锥G-AEF}$ 为定值，即三棱锥 $P-AEF$ 的体积为定值，**故 B 正确.**



图②

由选项 B 可知平面 AEF 截正方体所得的截面图形为四边形 AD_1FE，又 $AE=D_1F=A_1G=\sqrt{5}$，$FE=\sqrt{EC^2+FC^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$，$AD_1=2FE=2\sqrt{2}$，所以平面 AEF 截正方体所得的截面周长为 $AD_1+D_1F+FE+AE=2\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{5}=3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$，**故 C 正确.**

对于 D，如图③，连接 BF，由正方体性质可知 $AB\perp$ 平面 B_1BCC_1，故 $\angle AFB$ 是直线 AF 与平面 B_1BCC_1 所成的角，$AB\perp BF$，又 $AB=2$，$BF=\sqrt{BC^2+FC^2}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，所以 $AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{2^2+\sqrt{5}^2}=3$，所以 $\sin\angle AFB=\frac{AB}{AF}=\frac{2}{3}$，故直线 AF 与平面 B_1BCC_1 所成角的正弦值为 $\frac{2}{3}$，**故 D 错误.**



图③

12. $\frac{3}{13}$ 【解析】由 $2\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{FA}$，可设 $FA=2$，$DF=3$，则 $AD=5$，$BD=AF=2$.

由题可知 $\angle ADB=120°$，在 $\triangle ADB$ 中，由余弦定理可得 $AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB=39$，所以 $AB=\sqrt{39}$，则 $AC=AB=\sqrt{39}$，所以 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\times DF^2\sin 60°=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB^2\sin 60°=\frac{39\sqrt{3}}{4}$，所以 $\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{9\sqrt{3}}{4}}{\frac{39\sqrt{3}}{4}}=\frac{3}{13}$.

13. $\frac{2}{3}$　$\frac{2}{3}$ 【解析】记事件 $A=$“两人在自主传球环节得分之和为 2 分”，$B_i=$“甲在自主传球环节得 i 分”$(i=0,2)$，$C_j=$“乙在自主传球环节得 j 分”$(j=0,2)$，

由题意可知，B_i 与 C_j 相互独立，$A=B_0C_2\cup B_2C_0$，且 B_0C_2 与 B_2C_0 互斥，

故 $P(A)=P(B_0C_2)+P(B_2C_0)=\frac{3}{4}(1-p)+\frac{1}{4}p=\frac{5}{12}$，解得 $p=\frac{2}{3}$.

记事件 D="'梦队'在比赛中得分不低于 6 分"，E_k="甲在自主投篮环节得 k 分"$(k=0,2)$，F_l="乙在自主投篮环节得 l 分"$(l=0,2)$，

由题意可知 B_i,C_j,E_k,F_l 相互独立，

则 $D=B_0E_2C_2F_2\cup B_2E_0C_2F_2\cup B_2E_2C_0F_2\cup B_2E_2C_2F_0\cup B_2E_2C_2F_2$，

且事件 $B_0E_2C_2F_2,B_2E_0C_2F_2,B_2E_2C_0F_2,B_2E_2C_2F_0,B_2E_2C_2F_2$ 两两互斥，

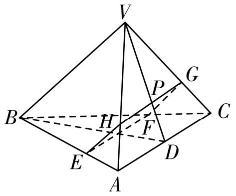
则 $P(D)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{96}{144}=\frac{2}{3}$.

14. $\frac{200}{9}$ 【解析】如图，取 AC 的中点 D，连接 VD,BD，则 P 在 VD 上且 $\frac{VP}{PD}=\frac{2}{1}$.

过点 P 作 $HG/\!/AC$ 分别交 VA,VC 于点 H,G，则 H,G 分别为 VA,VC 的三等分点（分别靠近 A,C），

取 BA,BC 的三等分点 E,F（分别靠近 A,C），连接 HE,EF,FG，

则 $HG/\!/AC$ 且 $HG=\frac{2}{3}AC=\frac{20}{3}$，$EF/\!/AC$ 且 $EF=\frac{2}{3}AC=\frac{20}{3}$，$HE/\!/VB$ 且 $HE=\frac{1}{3}VB=\frac{10}{3}$，$GF/\!/VB$ 且 $GF=\frac{1}{3}VB=\frac{10}{3}$，所以 $EF/\!/HG$ 且 $EF=HG$，$GF/\!/HE$ 且 $GF=HE$，故四边形 $EFGH$ 为平行四边形. 因为 $GF,HG\subset$ 平面 $EFGH$，$VB,AC\not\subset$ 平面 $EFGH$，所以 $VB/\!/$平面 $EFGH$，$AC/\!/$平面 $EFGH$，所以四边形 $EFGH$ 即为所求截面. 又 $VD\perp AC,BD\perp AC,VD\cap BD=D,VD,BD\subset$ 平面 VBD，所以 $AC\perp$ 平面 VBD. 又 $VB\subset$ 平面 VBD，所以 $AC\perp VB$，所以 $HG\perp GF$，所以四边形 $EFGH$ 为矩形，所以截面面积为 $\frac{20}{3}\times\frac{10}{3}=\frac{200}{9}(\mathrm{cm}^2)$.



15.【解】(1)依题意,$\overrightarrow{AB}=(1,m-2)$,$\overrightarrow{AC}=(n-2,2)$,$\overrightarrow{BC}=(n-3,4-m)$,$\overrightarrow{OA}=(2,2)$.

由 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,得 $n-2+2(m-2)=0$,即 $2m+n=6$①. 由 $\overrightarrow{BC}/\!/\overrightarrow{OA}$,得 $2(n-3)=2(4-m)$,即 $m+n=7$②,联立①②式,解得 $m=-1$,$n=8$.

(2)由(1)知,$B(3,-1)$,$C(8,4)$,$\overrightarrow{BC}=(5,5)$,由 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{BC}$,$\lambda=\dfrac{3}{5}$,得 $\overrightarrow{PC}=(3,3)$,$\overrightarrow{CA}=(-6,-2)$,$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA}=(3,3)+(-6,-2)=(-3,1)$,

所以 $\cos\angle APC=\cos\langle\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|}=\dfrac{-3\times3+1\times3}{\sqrt{10}\times3\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

(3)$\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{BC}=(5\lambda,5\lambda)$,$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CA}=(5\lambda,5\lambda)+(-6,-2)=(5\lambda-6,5\lambda-2)$,则 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=5\lambda(5\lambda-6)+5\lambda(5\lambda-2)=2(5\lambda)^2-8\cdot5\lambda=2(5\lambda-2)^2-8$. 由 P 为线段 BC 上一点,且 $\overrightarrow{PC}=\lambda\overrightarrow{BC}$,得 $0\leqslant\lambda\leqslant1$.

当 $\lambda=\dfrac{2}{5}$ 时,$(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC})_{\min}=-8$,当 $\lambda=1$ 时,$(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC})_{\max}=10$,所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的取值范围为$[-8,10]$.

16.【解】(1)样本甲中数据在[80,90)的频率为 0.04×10=0.4. 又因为样本甲中数据在[80,90)的有 20 个,所以 $\dfrac{20}{n}=0.4$,解得 $n=50$. 由 $(0.006+0.016+0.020+0.04+a)\times10=1$,得 $a=0.018$.

(2)因为 $(0.006+0.016+0.02)\times10=0.42<0.5$,$(0.006+0.016+0.02+0.04)\times10=0.82>0.5$,所以样本甲数据的中位数在[80,90)内. 设中位数为 x 分,则$(x-80)\times0.04+0.42=0.5$,解得 $x=82$.

(3)结论是 $\mu_1<\mu_2$,$s_1^2<s_2^2$.

方法一:因为样本甲数据主要集中在 70 分到 90 分,样本乙数据主要集中在 80 到 100 分,所以 $\mu_1<\mu_2$. 因为样本甲数据更

加集中,样本乙数据更加分散,所以 $s_1^2<s_2^2$.

方法二:若同一组中的数据用该组区间的中点值为代表,由题图可得,$\mu_1=55\times0.06+65\times0.16+75\times0.2+85\times0.4+95\times0.18=79.8$,$\mu_2=55\times0.1+65\times0.1+75\times0.15+85\times0.35+95\times0.3=81.5$,所以 $\mu_1<\mu_2$. $s_1^2=(55-79.8)^2\times0.06+(65-79.8)^2\times0.16+(75-79.8)^2\times0.2+(85-79.8)^2\times0.4+(95-79.8)^2\times0.18=128.96$,$s_2^2=(55-81.5)^2\times0.1+(65-81.5)^2\times0.1+(75-81.5)^2\times0.15+(85-81.5)^2\times0.35+(95-81.5)^2\times0.3=162.75$,所以 $s_1^2<s_2^2$.

17.【解】(1)设 2 个白球为 A,B,3 个红球为 a,b,c,则不放回地依次摸出 2 个球的情况有 $AB,BA,Aa,aA,Ab,bA,Ac,cA,Ba,aB,Bb,bB,Bc,cB,ab,ba,ac,ca,bc,cb$,共有 20 种情况. 其中摸出的 2 个球颜色相同的有 AB,BA,ab,ba,ac,ca,bc,cb,共 8 种情况,所以若某顾客有一次抽奖机会,其中奖的概率为 $\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$.

(2)设在第 i 次抽奖时中奖为事件 $A_i(i=1,2)$,由于每次抽奖的情况相同,由(1)可知 $P(A_i)=\frac{2}{5}$,$P(\overline{A_i})=\frac{3}{5}(i=1,2)$. 设两次抽奖至少有一次中奖为事件 B,则 $B=A_1A_2\cup\overline{A_1}A_2\cup A_1\overline{A_2}$,其中 A_1A_2,$\overline{A_1}A_2$,$A_1\overline{A_2}$ 为互斥事件,则 $P(B)=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)+P(A_1\overline{A_2})$. 因为每次抽奖之间相互独立,所以 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$,$P(\overline{A_1}A_2)=P(\overline{A_1})P(A_2)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$,$P(A_1\overline{A_2})=P(A_1)P(\overline{A_2})=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$,所以 $P(B)=P(A_1A_2)+P(\overline{A_1}A_2)+P(A_1\overline{A_2})=\frac{4}{25}+\frac{6}{25}+\frac{6}{25}=\frac{16}{25}$,即若某顾客有两次抽奖机会,则至少有一次中奖的概率为 $\frac{16}{25}$.

18.【解】(1)选①. 因为 $a\sin B-$

$\sqrt{3}b\cos B\cos C=\sqrt{3}c\cos^2 B$，由正弦定理得 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos B\cos C+\sqrt{3}\sin C\cos^2 B$，即 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\cos B\cdot(\sin B\cos C+\sin C\cos B)=\sqrt{3}\cos B\cdot\sin(B+C)$，所以 $\sin A\sin B=\sqrt{3}\cos B\sin A$. 由 $A\in(0,\pi)$，得 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin B=\sqrt{3}\cos B$，即 $\tan B=\sqrt{3}$，因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

选②. 由 $(\sin A-\sin C)^2=\sin^2 B-\sin A\sin C$，化简得 $\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B=\sin A\sin C$.

由正弦定理得 $a^2+c^2-b^2=ac$，所以 $\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，即 $\cos B=\dfrac{1}{2}$. 因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

选③. 因为 $\dfrac{\sqrt{3}b\sin A}{1+\cos B}=a$，由正弦定理得 $\dfrac{\sqrt{3}\sin B\sin A}{1+\cos B}=\sin A$，即 $\sqrt{3}\sin B\sin A=\sin A(1+\cos B)$. 因为 $0<A<\pi$，所以 $\sin A\neq 0$，所以 $\sqrt{3}\sin B=1+\cos B$，所以 $\sin\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$.

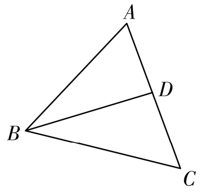
又因为 $-\dfrac{\pi}{6}<B-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，所以 $B-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，因为角 B 的角平分线为 BD，由等面积法得 $\dfrac{1}{2}\times a\times BD\times\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\times c\times BD\times\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}\times a\times c\times\sin\dfrac{\pi}{3}$，即 $\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{4}c=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac$，即 $a+c=\sqrt{3}ac=4\sqrt{3}$.

又 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\dfrac{\pi}{3}=(a+c)^2-3ac=36$，所以 $b=6$.

设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，则 $2R=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4\sqrt{3}$，即 $R=2\sqrt{3}$，

故 $\triangle ABC$ 外接圆的面积 $S=\pi R^2=12\pi$.



(3) 在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

则 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}$,$b=\frac{c\sin B}{\sin C}$.

由(1)知在 $\triangle ABC$ 中,$B=\frac{\pi}{3}$,又 $c=1$,所以 $a=\frac{\sin A}{\sin C}$,$b=\frac{\sqrt{3}}{2\sin C}$,

所以 $a^2+b^2=c^2+2ab\cos C$

$=1+2\times\frac{\sin A}{\sin C}\times\frac{\sqrt{3}}{2\sin C}\times\cos C$

$=1+\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin^2 C}\cos C$

$=1+\frac{\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}+C\right)}{\sin^2 C}\cos C$

$=1+\sqrt{3}\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin^2 C}\cos C$

$=1+\frac{3}{2\tan^2 C}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}$.

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,

所以 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\ 0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得 $C\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$,

所以 $\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $\frac{1}{\tan C}\in(0,\sqrt{3})$,

则 $1+\frac{3}{2\tan^2 C}+\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{\tan C}+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\frac{7}{8}\in(1,7)$,

所以 a^2+b^2 的取值范围为(1,7).

19. (1)【证明】因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$,$BC\subset$ 底面 $ABCD$,所以 $PD\perp BC$. 因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $DC\perp BC$. 因为

$PD\cap DC=D$，PD，$DC\subset$平面 PCD，所以 $BC\perp$平面 PCD. 因为 $DE\subset$平面 PCD，所以 $BC\perp DE$. 在 $\triangle PCD$ 中，$PD=CD$，E 是 PC 的中点，则 $DE\perp PC$. 因为 $BC\cap PC=C$，BC，$PC\subset$平面 PBC，所以 $DE\perp$平面 PBC. 因为 $PB\subset$平面 PBC，所以 $DE\perp PB$. 因为 $EF\perp BP$，$DE\cap EF=E$，DE，$EF\subset$平面 DEF，所以 $BP\perp$平面 DEF. 因为 $DF\subset$平面 DEF，所以 $BP\perp DF$.

(2)【解】连接 AC 交 BD 于点 M，连接 CF，如图所示，则 $AC\perp BD$.

因为 $PD\perp$底面 $ABCD$，$AC\subset$平面 $ABCD$，所以 $AC\perp PD$.

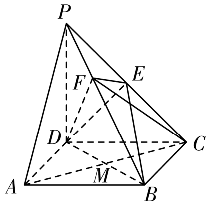
又 $PD\cap BD=D$，PD，$BD\subset$平面 PDB，所以 $AC\perp$平面 PDB，则点 C 到平面 PDB 的距离为 $CM=\sqrt{2}$.

因为 E 是 PC 的中点，所以 $V_{F-BDE}=V_{E-BDF}=\frac{1}{2}V_{C-BDF}$.

因为 $BD=2\sqrt{2}$，$BP=\sqrt{BD^2+DP^2}=2\sqrt{3}$，$DF=\frac{BD\cdot DP}{BP}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，$BF=\sqrt{BD^2-DF^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以 $S_{\triangle BDF}=\frac{1}{2}BF\cdot DF=\frac{4\sqrt{2}}{3}$，

$V_{C-BDF}=\frac{1}{3}\times\frac{4\sqrt{2}}{3}\times\sqrt{2}=\frac{8}{9}$，

所以 $V_{F-BDE}=\frac{1}{2}V_{C-BDF}=\frac{4}{9}$.



(3)【解】由(1)可得 $DE\perp$平面 PBC，因为 $EF\subset$平面 PBC，$EB\subset$平面 PBC，所以 $DE\perp EF$，$DE\perp EB$.

又因为 $EF\subset$平面 DEF，$EB\subset$平面 DEB，所以 $\angle BEF$ 为二面角 $F-DE-B$ 的平面角.

由题意可知 $PE=\frac{1}{2}PC=\sqrt{2}$，由(1)知，

$BC\perp$平面 PCD,

因为 $PC\subset$平面 PCD,所以 $BC\perp PC$,所以

$BE=\sqrt{CE^2+BC^2}=\sqrt{6}$.

易知 $\triangle PFE\backsim\triangle PCB$, 所以 $\frac{PE}{PB}=\frac{EF}{BC}$, 即

$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{EF}{2}$,解得 $EF=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

因为 $EF\perp BP$,即$\angle EFB=90°$,

所以 $\cos\angle BEF=\frac{EF}{BE}=\frac{1}{3}$.

故二面角 $F-DE-B$ 的余弦值为$\frac{1}{3}$.