全书综合检测

1. B 【解析】由题意知，$(a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})=25$，即 $a^2+b^2=25$.

z 在复平面内对应的点 (a,b) 关于原点的对称点为 $(-a,-b)$，所以 $-a<0,-b>0$，即 $a>0,b<0$. **故 B 正确.**

2. B 【解析】因为 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$，所以 $2n-12=0$，解得 $n=6$，又因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，所以 $6m=-4$，解得 $m=-\dfrac{2}{3}$，所以 $m+n=-\dfrac{2}{3}+6=\dfrac{16}{3}$，**故 B 正确.**

3. A 【解析】因为 $\tan A$ 和 $\tan B$ 是方程 $x^2-mx+n=0(n\neq1)$ 的两个根，所以 $\tan A+\tan B=m$，$\tan A\cdot\tan B=n$，

所以 $\tan C=\tan(\pi-A-B)=-\tan(A+B)=-\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\dfrac{m}{1-n}=\dfrac{m}{n-1}$. **故 A 正确.**

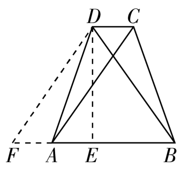
4. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，设 $AC=x$ m，则 $BC=(x-40)$ m，由余弦定理得 $BC^2=AC^2+AB^2-2\cdot AC\cdot AB\cdot\cos\angle BAC$，即 $(x-40)^2=x^2+100^2-100x$，解得 $x=420$.

在 $\triangle ACH$ 中，$AC=420$，$\angle CAH=15^\circ+30^\circ=45^\circ$，$\angle CHA=90^\circ-30^\circ=60^\circ$.

由正弦定理得 $\dfrac{CH}{\sin\angle CAH}=\dfrac{AC}{\sin\angle CHA}$，即 $\dfrac{CH}{\sin 45^\circ}=\dfrac{420}{\sin 60^\circ}$，解得 $CH=140\sqrt{6}$ m.

故 B 正确.

5. C 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$\therefore AC=BD$，如图，过点 D 作 AC 的平行线，交 BA 的延长线于点 F，易知四边形 $ACDF$ 为平行四边形，则 $AF=CD=1$，$DF=AC$，则 $\overrightarrow{FD}$ 与 $\overrightarrow{DB}$ 的夹角，即为 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{DB}$ 的夹角.



过点 D 作 $DE\perp AB$，垂足为 E，则 $AE=\dfrac{1}{2}(AB-CD)=1$，$\therefore DE=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，

则 $DF=BD=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+2^2}=2\sqrt{3}$，

$\therefore \cos\angle BDF=\dfrac{(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3})^2-4^2}{2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{3}$，

则 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}\rangle=-\cos\angle BDF=-\frac{1}{3}$.

6. B　【解析】由 $\sqrt{3}(a^2+c^2-b^2)=4S$，得 $\sqrt{3}\times 2ac\cos B=4\times\frac{1}{2}ac\sin B$，因为 $B\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos B\neq 0$，上式整理得 $\tan B=\sqrt{3}$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，由题意得

$$\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\ 0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$$ 解得 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 得 $a=\frac{c\sin A}{\sin C}=\frac{\sin(B+C)}{\sin C}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C+\frac{1}{2}\sin C}{\sin C}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan C}+1\right)$，

则 $\triangle ABC$ 面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan C}+1\right)\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan C}+1\right)$.

因为 $\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，所以 $\tan C>\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $0<\frac{\sqrt{3}}{\tan C}<3$，所以 $\triangle ABC$ 面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tan C}+1\right)\in\left(\frac{\sqrt{3}}{8},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **故 B 正确.**

7. B　【解析】由 $f(x)$ 的图象的对称中心到对称轴的最小距离为 $\frac{\pi}{4}$，可得 $\frac{1}{4}T=\frac{\pi}{4}$，

即最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$.

将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后可得 $g(x)=A\sin\left(2x-\frac{2\pi}{3}+\varphi\right)$ 的图象，

该图象关于 y 轴对称，所以 $g(x)$ 为偶函数，则 $-\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\varphi=\frac{7\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，由 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$ 可知当 $k=-1$ 时，$\varphi=\frac{\pi}{6}$ 符合题意.

由 $|f(x_1)-f(x_2)|_{\max}=2A=1$ 可得 $A=\frac{1}{2}$，

因此 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

对于①，当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，取得最大值，

所以直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的图象的一条对称轴，**故①正确**；

对于②，当 $x=-\frac{\pi}{3}$ 时，$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\neq 0$，

所以 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$ 不是 $f(x)$ 的图象的一个对称中心，**故②错误**；

对于③，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，可得 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$，又 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right)$ 上不单调，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上不是单调递增的，**故③错误**；

对于④，若 $f(x_1)=f(x_2)=0$，由正弦函数图象性质可知两个相邻零点的距离为半个周期，所以任意两个零点之间的距离为半个周期的整数倍，由 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期为 π，可得 $x_1-x_2=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，**故④正确**.

所以正确的说法只有①和④，共 2 个. **故 B 正确.**

8. C 【解析】将 $\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta>2\cos\alpha\cos\beta$ 两边同时除以 $\cos\alpha\cos\beta$，得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}>2$，由题知 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

若 $0<\alpha+\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}-\beta<\frac{\pi}{2}$，

$\sin\alpha\leqslant\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$，

则 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\leqslant 1$，同理 $\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\leqslant 1$，则 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\leqslant 2$ 与 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}>2$ 矛盾，所以 $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{2}>\alpha>\frac{\pi}{2}-\beta>0$，$\sin\alpha>\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\cos\beta$，则 $\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}>1$，同理 $\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}>1$，所以 $t=\tan\alpha\tan\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\cdot$

$\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}>1.$

因为 $f(x)=\dfrac{1-t^{2x}}{t^x}=\left(\dfrac{1}{t}\right)^x-t^x,t>1$，

且函数 $y=\left(\dfrac{1}{t}\right)^x$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 上单调递减，$y=t^x$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)=\dfrac{1-t^{2x}}{t^x}=\left(\dfrac{1}{t}\right)^x-t^x$ 在 $t\in(1,+\infty)$ 上单调递减，由于 $\sin\alpha$ 与 $\sin\beta,\cos\alpha$ 与 $\cos\beta$ 的大小关系不确定，**故 A，B 错误**；

由于 $\sin\alpha>\cos\beta,\sin\beta>\cos\alpha$，所以 $f(\sin\alpha)<f(\cos\beta),f(\cos\alpha)>f(\sin\beta)$，**故 C 正确，D 错误.**

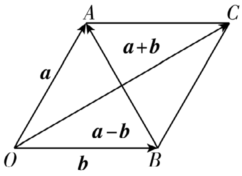
9. ACD 【解析】对于 A，当 $m=-1$ 时，$z=0-2i=-2i$ 为纯虚数，**故 A 正确**；

对于 B，$z=(1+i)(1-i)=2$ 在复平面内对应的点 $(2,0)$ 位于实轴上，**故 B 错误**；

对于 C，设 $z=a+bi,a,b\in\mathbf{R}$，则 $\bar{z}=a-bi$，由 $2z+\bar{z}=3-i$ 得 $2(a+bi)+a-bi=3a+bi=3-i$，即 $\begin{cases}3a=3,\\b=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-1,\end{cases}$ 故 $z=1-i$，**故 C 正确**；

对于 D，复数 $6+5i$ 与 $-3+4i$ 在复平面内分别对应向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$，则向量 $\overrightarrow{BA}$ 表示的复数为 $6+5i-(-3+4i)=9+i$，**故 D 正确.**

10. BC 【解析】非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，令 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，由于 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，如图所示，所以四边形 $OACB$ 为菱形，且 $\triangle AOB$ 为等边三角形，所以 $\angle OAB=60°$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $60°$，**故 A 错误.**



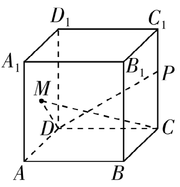
由正弦定理知，若满足条件的 $\triangle ABC$ 有两个，则 $b\sin A<a<b$，即 $b\sin A<\sqrt{6}<b$，解得 $\sqrt{6}<b<2\sqrt{2}$，则 b 的取值范围为 $\sqrt{6}<b<2\sqrt{2}$，**故 B 正确.**

若单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $120°$，则 $|2\boldsymbol{a}+$

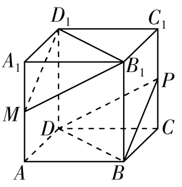
$xb| = \sqrt{x^2-2x+4} = \sqrt{(x-1)^2+3}$，当 $x=1$ 时，$|2a+xb|$ 的最小值为 $\sqrt{3}$，**故 C 正确**.

因为 $\overrightarrow{OA}=(3,-4)$，$\overrightarrow{OB}=(6,-3)$，$\overrightarrow{OC}=(5-m,-3-m)$，所以 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(3,-4)-(6,-3)=(-3,-1)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(5-m,-3-m)-(6,-3)=(-1-m,-m)$，由于 $\angle ABC$ 为锐角，所以 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}>0$ 且 $\overrightarrow{BA}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不同向共线，即 $\begin{cases}3+4m>0,\\3m\neq 1+m,\end{cases}$ 则 $m>-\dfrac{3}{4}$ 且 $m\neq\dfrac{1}{2}$，**故 D 错误**.

11. BC　【解析】如图①，连接 MD，MC，DP，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $CD\perp$ 平面 ADD_1A_1，因为 $MD\subset$ 平面 ADD_1A_1，$DD_1\subset$ 平面 ADD_1A_1，所以 $CD\perp MD$，$CD\perp DD_1$，所以二面角 $M-DC-P$ 的平面角为 $\angle MDD_1$，其中 $\angle MDD_1\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，**故 A 错误；**



图①

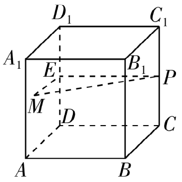


图②

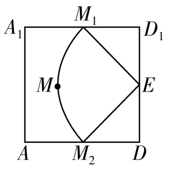
如图②所示，连接 MD_1，MB_1，B_1D_1，PB，PD，BD，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，可得 $B_1D_1/\!/BD$，因为 $B_1D_1\not\subset$ 平面 BDP，且 $BD\subset$ 平面 BDP，所以 $B_1D_1/\!/$ 平面 BDP，当 M 为 AA_1 中点，P 为 CC_1 中点时，易知 $MB_1/\!/DP$，且 $MB_1\not\subset$ 平面 BDP，且 $DP\subset$ 平面 BDP，所以 $MB_1/\!/$ 平面 BDP，因为 $B_1D_1\cap MB_1=B_1$，且 B_1D_1，$MB_1\subset$ 平面 MB_1D_1，所以平面 $BDP/\!/$ 平面 MB_1D_1，**故 B 正确；**

如图③所示，取 DD_1 的中点 E，连接 PE，ME，PM，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$CD\perp$ 平面 ADD_1A_1，且 $CD/\!/PE$，所以 $PE\perp$ 平面 ADD_1A_1，因为 $ME\subset$ 平面 ADD_1A_1，所以 $PE\perp ME$，则 $ME=\sqrt{PM^2-PE^2}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-4^2}=2\sqrt{2}$，所以点 M 在侧面 ADD_1A_1 内的运动轨迹是以 E 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的劣弧，分别

交 AD，A_1D_1 于 M_2，M_1，如图④所示，则 $M_1D_1=\sqrt{8-4}=2=D_1E$，结合对称性可知，$\angle M_1ED_1=\angle M_2ED=\frac{\pi}{4}$，则 $\angle M_1EM_2=\frac{\pi}{2}$，劣弧 M_1M_2 的长为 $\frac{\pi}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}\pi$，**故 C 正确；**



图③



图④

当 M 为 A_1D 中点时，可得 $\triangle AMD$ 为等腰直角三角形，且平面 $ABCD\perp$ 平面 ADD_1A_1，连接 AC 与 BD 交于点 O（图略），可得 $OM=OA=OB=OC=OD=2\sqrt{2}$，所以四棱锥 $M-ABCD$ 外接球的球心即为 AC 与 BD 的交点 O，所以四棱锥 $M-ABCD$ 外接球的半径为 $2\sqrt{2}$，其外接球的表面积为 $4\pi\times(2\sqrt{2})^2=32\pi$，**故 D 错误.**

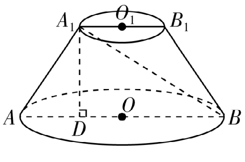
12. 21π　【解析】设上、下底面半径，母线长分别为 r，R，l.

过点 A_1 作 $A_1D\perp AB$ 于点 D，则 $A_1D=3$，$\angle A_1DA=\angle A_1DB=90°$.

又 $\angle A_1AB=60°$，则 $AD=\frac{A_1D}{\tan 60°}=AO-DO=R-r=\sqrt{3}$①.

又 $\angle BA_1A=90°$，则 $\angle BA_1D=60°$，故 $BD=A_1D\tan 60°=DO+BO=R+r=3\sqrt{3}$②.

由①②解得 $R=2\sqrt{3}$，$r=\sqrt{3}$，又圆台高 $h=3$，所以圆台体积 $V=\frac{\pi}{3}h(R^2+Rr+r^2)=\frac{\pi}{3}\times 3\times(12+6+3)=21\pi$.



13. $(5,5\sqrt{2}]$　【解析】由 $2S=a^2-(b-c)^2=a^2-(c^2+b^2)+2bc$，则 $bc\sin A=2bc-2bc\cos A$，所以 $\sin A=2-2\cos A$，

即 $\sin^2A=1-\cos^2A=4\cos^2A-8\cos A+4$，

即 $5\cos^2A-8\cos A+3=0$，解得 $\cos A=\frac{3}{5}$

或 $\cos A=1$（舍去），可得 $\sin A=\frac{4}{5}$，

所以 $\frac{5b+c}{a}=\frac{5\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{5}{4}[5\sin(A+C)+\sin C]=\frac{5}{4}(4\cos C+3\sin C+\sin C)=5\sqrt{2}\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)$，

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，所以 $\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\A+C>\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 所以 $C\in\left(\frac{\pi}{2}-A,\frac{\pi}{2}\right)$，$C+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{3\pi}{4}-A,\frac{3\pi}{4}\right)$，

又 $\sin A=\frac{4}{5}$，$\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{4}{5}<\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\frac{\pi}{4}<A<\frac{\pi}{3}$，

有 $\frac{5\pi}{12}<\frac{3\pi}{4}-A<\frac{\pi}{2}$，

由于 $\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}>\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{3\pi}{4}$，

所以 $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(C+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$，可得 $\frac{5b+c}{a}$ 的取值范围为 $(5,5\sqrt{2}]$.

14. 3 【解析】$f(x)=\sqrt{3}\sin nx\cdot\cos nx+\cos^2nx=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2nx+\frac{1}{2}\cos 2nx+\frac{1}{2}=\sin\left(2nx+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，

当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，$2nx+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6},\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right]$，

令 $t=2nx+\frac{\pi}{6}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 时，t 随 x 的增大而增大，

又 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递减，所以 $y=\sin t+\frac{1}{2}$ 在 $\left[\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6},\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right]$ 上单调递减，

因为函数 $y=\sin t+\frac{1}{2}$ 的最小正周期 $T=2\pi$，所以 $\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant\frac{1}{2}T=$

π，所以 $0<n\leqslant 6,n\in\mathbf{N}^*$.

当 $n=1$ 时，$t\in\left[\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$，$y=\sin t+\frac{1}{2}$ 单调递减，符合题意；

当 $n=2$ 时，$t\in\left[\frac{7\pi}{6},\frac{3\pi}{2}\right]$，$y=\sin t+\frac{1}{2}$ 单调递减，符合题意；

当 $n=3$ 时，$t\in\left[\frac{5\pi}{3},\frac{13\pi}{6}\right]$，$y=\sin t+\frac{1}{2}$ 单调递增，不符合题意；

当 $n=4$ 时，$t\in\left[\frac{13\pi}{6},\frac{17\pi}{6}\right]$，$y=\sin t+\frac{1}{2}$ 不单调，不符合题意；

当 $n=5$ 时，$t\in\left[\frac{8\pi}{3},\frac{7\pi}{2}\right]$，$y=\sin t+\frac{1}{2}$ 单调递减，符合题意；

当 $n=6$ 时，$t\in\left[\frac{19\pi}{6},\frac{25\pi}{6}\right]$，$y=\sin t+\frac{1}{2}$ 不单调，不符合题意.

综上，当 $n=1,2,5$ 时，符合题意，所以满足条件的 n 的值有 3 个.

15.【解】(1) 因为 $b=2,\frac{1}{2}c+2=a\cos C$，所以 $b+\frac{1}{2}c=a\cos C$，由正弦定理得 $\sin B+\frac{1}{2}\sin C=\sin A\cos C$.

又 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，所以 $\cos A\sin C+\frac{1}{2}\sin C=0$.

因为 $\sin C>0$，所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$.

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

(2) 由 $5\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$，得 $2(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$，所以 $\overrightarrow{BD}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$，

所以点 D 在 BC 边上，且 $BD=\frac{3}{2}CD$，因为 $CD=b=2$，所以 $BD=3,BC=3+2=5$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $5^2=2^2+c^2-4c\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，

解得 $c=\sqrt{22}-1$（负值舍去）.

16.【解】(1) $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sqrt{3}\cdot\sin x\cos x+\cos^2x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x+$

$\frac{1}{2}=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{1}{2}$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$.

令 $\frac{\pi}{6}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$，可得 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$，

故函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$.

(2) 当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 时，则 $2x+\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\right]$，

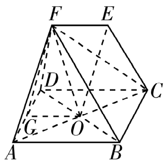
故当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3}{2}$，

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$，即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 的最小值为 0，所以 $|f(x)-1|$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 1，

由于对任意 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，$|f(x)-1|\leqslant m$ 恒成立，故 $m\geqslant 1$，

所以 m 的取值范围为 $[1,+\infty)$.

17.【证明】(1) 如图，取 AD 的中点 G，连接 OG,FG，



$\because$ O 是菱形 $ABCD$ 的对角线 AC,BD 的交点，

$\therefore$ $OG/\!/DC$，且 $OG=\frac{1}{2}DC$，

又 $\because$ $EF/\!/DC$，且 $DC=2EF$，$\therefore$ $OG/\!/EF$，且 $OG=EF$，

从而四边形 $OGFE$ 为平行四边形，

$\therefore$ $OE/\!/FG$，

又 $FG\subset$ 平面 ADF，$OE\not\subset$ 平面 ADF，

$\therefore$ $OE/\!/$平面 ADF.

(2) 连接 OF，$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形，

$\therefore$ $OC\perp BD$，$\because$ $FD=FB$，O 是 BD 的中点，$\therefore$ $OF\perp BD$，

又 $OF\cap OC=O$，$OF,OC\subset$ 平面 AFC，

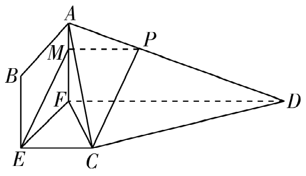
$\therefore BD\perp$平面 AFC，

又 $BD\subset$平面 $ABCD$，$\therefore$ 平面 $AFC\perp$平面 $ABCD$.

18.【解】(1) AD 上存在一点 P，使得 $CP//$平面 $ABEF$，此时$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{1}{2}$，

理由如下：当$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{1}{2}$时，$\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{1}{3}$，

如图，过点 P 作 $PM//FD$ 交 AF 于点 M，连接 ME，



则$\dfrac{MP}{FD}=\dfrac{AP}{AD}=\dfrac{1}{3}$，$\because BE=3$，$\therefore FD=3$，

$\therefore MP=1$，又 $EC=1$，$MP//FD//EC$，

$\therefore MP//EC$，故四边形 $MPCE$ 为平行四边形，$\therefore CP//ME$，

又 $CP\not\subset$平面 $ABEF$，$ME\subset$平面 $ABEF$，

$\therefore CP//$平面 $ABEF$.

综上，存在点 P，使得 $CP//$平面 $ABEF$，此时$\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 设 $BE=x$，则 $AF=x(0<x\leqslant 4)$，$FD=6-x$，故 $V_{A-CDF}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 2\times(6-x)x=-\dfrac{1}{3}(x-3)^2+3$，

$\therefore$ 当 $x=3$ 时，V_{A-CDF} 有最大值，且最大值为 3，

$\therefore$ 此时 $EC=1$，$AF=3$，$FD=3$，$DC=2\sqrt{2}$，

$\therefore AD=\sqrt{AF^2+FD^2}=3\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{EF^2+EC^2+AF^2}=\sqrt{14}$，

在$\triangle ACD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle ADC=\dfrac{18+8-14}{2\times 3\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，$\sin\angle ADC=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

$S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}\cdot DC\cdot AD\cdot\sin\angle ADC=3\sqrt{3}$，

设点 F 到平面 ACD 的距离为 h，

$\because V_{A-CDF}=V_{F-ACD}$，$\therefore \dfrac{1}{3}\cdot S_{\triangle ACD}\cdot h=3$，

$h=\sqrt{3}$.

综上，三棱锥 $A-CDF$ 的体积的最大值为 3，此时点 F 到平面 ACD 的距离

为$\sqrt{3}$.

19.【解】(1) 由正弦定理得 $2bc\cdot\sin A=\sqrt{3}(b^2+c^2-a^2)$，即 $\sin A=\dfrac{\sqrt{3}(b^2+c^2-a^2)}{2bc}$，

由余弦定理有 $\sin A=\sqrt{3}\cos A$，

若 $\cos A=0$，等式不成立，则 $\cos A\neq 0$，

所以 $\tan A=\sqrt{3}$.

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

(2) $T=\dfrac{AB}{PD}+\dfrac{4BC}{PE}+\dfrac{AC}{PF}=\dfrac{c}{PD}+\dfrac{4a}{PE}+\dfrac{b}{PF}=\dfrac{c^2}{c\cdot PD}+\dfrac{4a^2}{a\cdot PE}+\dfrac{b^2}{b\cdot PF}$.

又 $S_{\triangle PAB}=\dfrac{1}{2}c\cdot PD$，$S_{\triangle PBC}=\dfrac{1}{2}a\cdot PE$，$S_{\triangle PAC}=\dfrac{1}{2}b\cdot PF$，$S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ABC}$，所以 $c\cdot PD+a\cdot PE+b\cdot PF=2S_{\triangle ABC}$.

由三维分式型柯西不等式有 $T=\dfrac{c^2}{c\cdot PD}+\dfrac{4\times 2^2}{a\cdot PE}+\dfrac{b^2}{b\cdot PF}\geqslant\dfrac{(b+c+4)^2}{2S_{\triangle ABC}}=\dfrac{2(b+c+4)^2}{\sqrt{3}bc}$.

当且仅当 $\dfrac{1}{PD}=\dfrac{2}{PE}=\dfrac{1}{PF}$，即 $PE=2PD=2PF$ 时等号成立.

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ 得 $4=b^2+c^2-bc$，

所以 $(b+c)^2-4=3bc$，即 $bc=\dfrac{(b+c)^2-4}{3}$，

则 $T\geqslant\dfrac{2(b+c+4)^2}{\sqrt{3}bc}=\dfrac{2\sqrt{3}(b+c+4)^2}{(b+c)^2-4}$.

令 $t=b+c+4$，则 $T\geqslant\dfrac{2\sqrt{3}t^2}{(t-4)^2-4}=\dfrac{2\sqrt{3}}{\dfrac{12}{t^2}-\dfrac{8}{t}+1}$.

因为 $\begin{cases}bc=\dfrac{(b+c)^2-4}{3}\leqslant\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2,\\ b+c>a=2,\end{cases}$

所以 $2<b+c\leqslant 4$，当且仅当 $b=c=2$ 时等号成立.

所以 $6<t\leqslant 8$，则 $\dfrac{1}{8}\leqslant\dfrac{1}{t}<\dfrac{1}{6}$.

令 $y=\dfrac{12}{t^2}-\dfrac{8}{t}+1=12\left(\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{3}\right)^2-\dfrac{1}{3}$，则

$y=12\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}$ 在 $\frac{1}{t}\in\left[\frac{1}{8},\frac{1}{6}\right)$ 上单调递减，

当$\frac{1}{t}=\frac{1}{8}$，即 $b=c=2$ 时，y 有最大值 $\frac{3}{16}$，此时 T 有最小值$\frac{32\sqrt{3}}{3}$.