

全书综合检测

1. B 【解析】因为集合 $A = \{-2, 0, 1, 3\}$, $B = \{-3, 0, 1, 2\}$, 所以集合 $C = A \cup B = \{-3, -2, 0, 1, 2, 3\}$ 的元素共有 6 个, 故 B 正确.

2. A 【解析】当 $x > 0$ 时, 可知 $|x| > 0$, 结合 $|y| \geq 0$ 可得 $|x| + |y| > 0$, 充分性成立;
当 $|x| + |y| > 0$ 时, 可能 $x = -1, y \in \mathbf{R}$, 不能得出 $x > 0$, 必要性不成立.
因此, “ $x > 0$ ” 是 “ $|x| + |y| > 0$ ” 的充分不必要条件, 故 A 正确.

3. D 【解析】因为 $g(x) = f(x-2) + 1$ 是奇函数, 所以 $g(0) = f(-2) + 1 = 0$, 所以 $f(-2) = -1$, 故 D 正确.

4. A 【解析】幂函数 $f(x) = x^\alpha$ 的图象经过点 $A(4, 2), B(16, m)$,
则 $4^\alpha = 2$, 即 $2^{2\alpha} = 2$, 所以 $2\alpha = 1$, 解得 $\alpha = \frac{1}{2}$, 所以 $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$, 则 $m = f(16) = 16^{\frac{1}{2}} = 4$, 故 A 正确.

5. B 【解析】因为关于 x 的不等式 $x^2 - ax - b \leq 0$ 的解集是 $[-2, 4]$, 所以 $x^2 - ax - b = 0$ 的解为 $x = -2, x = 4$,
故 $\begin{cases} -2+4=a, \\ -2 \times 4 = -b, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=8, \end{cases}$ 那么 $\log_a b = \log_2 8 = 3$, 故 B 正确.

6. D 【解析】因为 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $a > b$, 所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^a < \left(\frac{1}{2}\right)^b$, 故 A 错误;
因为 $y = \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 所以只有当 $a > b > 0$ 时才有 $\ln a > \ln b$, 故 B 错误;

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, 因为不能确定 $a+b$ 的符号, 故不能确定 $a^2 - b^2$ 与 0 的大小关系, 故 C 错误;
因为 $y = x^3$ 在 \mathbf{R} 上单调递增, $a > b$, 所以 $a^3 > b^3$, 故 D 正确.

7. C 【解析】由题意知, “ $\forall x \in \mathbf{R}$, 使 $(m-2)x^2 + (m-2)x + 1 > 0$ ” 是真命题.
当 $m-2=0$, 即 $m=2$ 时, 不等式可化为 $1 > 0$, 符合题意;
当 $m-2 \neq 0$, 即 $m \neq 2$ 时, 有 $\begin{cases} m-2 > 0, \\ \Delta = (m-2)^2 - 4(m-2) < 0, \end{cases}$ 解得 $2 < m < 6$.

综上, 实数 m 的取值范围为 $[2, 6)$, 故 C 正确.

8. C 【解析】因为 $f(x) = \frac{x^3 \cdot \ln|x|}{e^{|x|}}$,
所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 关于原点对称. 又因为 $f(-x) = \frac{(-x)^3 \cdot \ln|-x|}{e^{|-x|}} = -\frac{x^3 \cdot \ln|x|}{e^{|x|}} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数, 图象关于原点对称, 故 A, D 错误;
当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $f(x) > 0$, 故 B 错误, C 正确.

9. ABC 【解析】由 $x+2y = 2 \geq 2 \cdot \sqrt{2xy}$, 可得 $xy \leq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $x = 2y = 1$, 即 $x = 1, y = \frac{1}{2}$ 时, 等号成立, 故 A 正确;
由 $(\sqrt{x} + \sqrt{2y})^2 = x + 2y + 2\sqrt{2xy} = 2 + 2\sqrt{2xy} \leq 4$, 可得 $\sqrt{x} + \sqrt{2y} \leq 2$, 当且仅当 $x = 2y = 1$ 时, 等号成立, 故 B 正确;

$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y}\right) \times \left(\frac{x+2y}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 \geq 2\sqrt{1} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{9}{2}$, 当且仅当 $x = y = \frac{2}{3}$ 时, 等号成立, 故 C 正确;
由 $x+2y = 2$ 可得 $x^2 + 4y^2 + 4x \cdot y = 4$, 又 $xy \leq \frac{1}{2}$, 则 $x^2 + 4y^2 \geq 2$, 故 D 错误.

10. CD 【解析】A 选项, 函数的定义域为 \mathbf{R} , 由 $f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$, 可得 $f(x)$ 为偶函数; 又当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 - x$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 故 A 错误;

B 选项 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 由 $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$, 可得 $f(x)$ 为偶函数, 又由幂函数性质可得 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 B 错误;

C 选项, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 由 $f(-x) = \ln|-x| - \frac{1}{(-x)^2} = \ln|x| - \frac{1}{x^2} = f(x)$, 可得 $f(x)$ 为偶函数, 又当 $x > 0$ 时, $f(x) = \ln x - \frac{1}{x^2}$, 因为 $y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $y = \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $f(x) = \ln x - \frac{1}{x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 C 正确;

对于 D, $f(x) = e^{|x|}$ 的定义域为 \mathbf{R} , 由 $f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|} = f(x)$ 可得 $f(x)$ 为偶函数, 又当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^x$, 由指数函数性质可得 $f(x) = e^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故 D 正确.

11. BC 【解析】若 $f(x) = -1$, 即 $[x] - x = -1, x = [x] + 1 (x \in \mathbf{Z})$, 所以 $[x] = [[x] + 1] = [x] + 1$, 矛盾, 故 A 错误;

当 $x \in \mathbf{Z}$ 时, $f(x) = 0$; 当 $x \notin \mathbf{Z}$ 时, $-1 < [x] - x < 0$, 此时 $[f(x)] = -1$, 所以函数 $[f(x)]$ 的值域为 $\{-1, 0\}$, 故 B 正确;

$f(x+1) = [x+1] - (x+1) = [x] + 1 - (x+1) = [x] - x = f(x)$, 当 $T=1$ 时满足 $f(x+T) = f(x)$, 故 C 正确;

取 $x=1$, 则 $f(1) = [1] - 1 = 0$, 取 $x=2$, 则 $f(2) = [2] - 2 = 0$, 所以函数 $f(x)$ 不是减函数, 故 D 错误.

12. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (答案不唯一) 【解析】当

$a = \frac{1}{2}, b = \frac{2}{3}$ 时, 满足 $a+b \geq 1$, 但

$a^3 + b^3 = \frac{1}{8} + \frac{8}{27} < 1$, 不满足 $a^3 + b^3 \geq$

1. 故答案可以为 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ (答案不唯一).

13. $\frac{47}{216}$ 【解析】若甲第一次投壶投

得“贯耳”, 则甲“有初”“贯耳”均投得, 其概率为 $\frac{1}{6}$;

若甲第一次投壶投中且未投得“贯耳”, 则甲在后面 2 次投壶中至少要投中 1 次“贯耳”, 其概率为 $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \times \left[1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2\right] = \frac{11}{216}$, 故所求概率为 $\frac{1}{6} + \frac{11}{216} = \frac{47}{216}$.

14. $\left[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right]$ 【解析】因为 $f(x) =$

$\begin{cases} 2ax^2 - x - \frac{1}{4}, & x \leq 1, \\ \log_a x - 1, & x > 1 \end{cases}$ 是 \mathbf{R} 上的单

调函数, 又 $a > 0$ 且 $a \neq 1, x = \frac{1}{4a} >$

0, 故当 $x \leq 1$ 时, 二次函数 $y =$

$2ax^2 - x - \frac{1}{4}$ 只能单调递减,

所以 $\begin{cases} \frac{1}{4a} \geq 1, \\ 0 < a < 1, \\ 2a - 1 - \frac{1}{4} \geq 0 - 1, \end{cases}$ 解得 $\frac{1}{8} \leq$

$a \leq \frac{1}{4}$.

15. 【解】(1) 若命题 p 是真命题, 即 $\exists x \in \mathbf{R}$, 使 $x^2 - 6x + a^2 = 0$, 则有 $\Delta = 36 - 4a^2 \geq 0$, 解得 $-3 \leq a \leq 3$, 则即集合 $A = [-3, 3]$.

(2) 若 $x \in A$ 是 $x \in B$ 的必要不充分条件, 则 $B \subsetneq A$.

当 $B = \emptyset$ 时, $3m - 2 > m - 1$, 解得 $m > \frac{1}{2}$, 符合题意;

当 $B \neq \emptyset$ 时, 则有

$\begin{cases} 3m - 2 \leq m - 1, \\ 3m - 2 \geq -3, \\ m - 1 \leq 3, \end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{3} \leq m \leq \frac{1}{2}$.

综上所述, 实数 m 的取值范围为 $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$.

16. 【解】(1) 因为 $f(x)$ 的图象过点 $(5, 0)$, 所以 $\log_2(5m+n) - 3 = 0$, ①

因为 $f(x)$ 是奇函数, 且 $f(x)$ 的图象过点 $(-1, 1)$, 所以 $f(x)$ 的图象过点 $(1, -1)$, 则 $\log_2(m+n) - 3 = -1$, ②

联立①②, 解得 $m = 1, n = 3$.

(2) 由 (1) 知当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_2(x+3) - 3$,

当 $x < 0$ 时, $-x > 0$,

则 $f(-x) = \log_2(-x+3) - 3$.

因为 $f(x)$ 是奇函数, 所以 $f(-x) = -f(x)$, 则 $f(x) = -\log_2(-x+3) + 3$.

当 $x < 0$ 时, $f(x) > 1$, 即 $-\log_2(-x+3) + 3 > 1$, 解得 $-1 < x < 0$;

当 $x > 0$ 时, $f(x) > 1$, 即 $\log_2(x+3) - 3 > 1$, 解得 $x > 13$;

当 $x = 0$ 时, $f(0) = 0$, 与题意不符.

故不等式 $f(x) > 1$ 的解集是 $(-1, 0) \cup (13, +\infty)$.

17. 【解】根据题意, 设 4 名同学对应的书包分别为 A, B, C, D , 则全部样本点有

$(A, B, C, D), (A, B, D, C), (A, C, B, D), (A, C, D, B), (A, D, B, C), (A, D, C, B), (B, A, C, D), (B, A, D, C), (B, C, A, D), (B, C, D, A), (B, D, A, C), (B, D, C, A), (C, A, B, D), (C, A, D, B), (C, B, A, D), (C, B, D, A), (C, D, A, B), (C, D, B, A), (D, A, B, C), (D, A, C, B), (D, B, A, C), (D, B, C, A), (D, C, A, B), (D, C, B, A)$, 共 24 个.

(1) 其中恰有两名同学拿对了书

包的样本点有 6 个,则恰有两名同学拿对了书包的概率为 $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$.

(2)至少有两名同学拿对了书包的样本点有 7 个,则至少有两名同学拿对了书包的概率为 $\frac{7}{24}$.

(3)书包都拿错了的样本点有 9 个,则书包都拿错了的概率为 $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$.

18.【解】(1) 设饮料每瓶售价为 a 元,由题意得 $[8 - 0.8(a - 15)] \cdot (a - 10) \geq (15 - 10) \times 8$,即 $a^2 - 35a + 300 \leq 0$,解得 $15 \leq a \leq 20$,故饮料每瓶售价最多为 20 元.

(2) 每瓶售价 $x(x \geq 16)$ 元,设下月总利润为 W 万元,则每瓶利润为 $(x - 10)$ 元,月销售量为 $8 - \frac{0.8}{(x - 15)^2} \cdot (x - 15) =$

$\left(8 - \frac{0.8}{x - 15}\right)$ 万瓶,由题意得 $W =$

$(x - 10) \left(8 - \frac{0.8}{x - 15}\right) - \frac{33}{4}(x - 16) =$

$-\frac{1}{4}x - \frac{4}{x - 15} + 51.2 =$

$-\frac{1}{4} \left[(x - 15) + \frac{16}{x - 15} \right] + 47.45 (x \geq 16), \because x \geq 16, \text{则 } x - 15 \geq 1, \therefore (x - 15) + \frac{16}{x - 15} \geq$

$2\sqrt{(x - 15) \cdot \frac{16}{x - 15}} = 8$,当且仅当

$x - 15 = \frac{16}{x - 15}$,即 $x = 19$ 时,等号成

立, $\therefore W = -\frac{1}{4} \left[(x - 15) + \frac{16}{x - 15} \right] +$

$47.45 \leq -\frac{1}{4} \times 8 + 47.45 = 45.45$,

故当每瓶售价为 19 元时,下月的月总利润最大,且下月的最大总利润为 45.45 万元.

19.【解】(1) 根据复合函数同增异减的单调性原则可知, $f(x)$ 需在区

间 $(-1, 2)$ 上单调递减,则 $-\frac{a}{2} \geq$

2,则 $a \leq -4$,

即 a 的取值范围为 $(-\infty, -4]$.

(2) 设 $f(x) = 0$ 的两根分别为 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$,即 $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$,因此由 $f(x^2 + 2x - 1) = 0$,可得 $(x^2 + 2x - 1 - \alpha)(x^2 + 2x - 1 - \beta) = 0$,不妨

设 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$,则 x_1, x_4 为 $x^2 + 2x - 1 - \beta = 0$ 的两个根, x_2, x_3 为 $x^2 + 2x - 1 - \alpha = 0$ 的两个根,由一元二次方程根与系数的关系可得

$x_1 \cdot x_4 = -1 - \beta, x_1 + x_4 = -2, x_2 \cdot$

$x_3 = -1 - \alpha, x_2 + x_3 = -2$,所以 $\frac{1}{x_1} +$

$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{x_1 + x_4}{x_1 x_4} + \frac{x_2 + x_3}{x_2 x_3} = \frac{2}{\alpha + 1} +$

$\frac{2}{\beta + 1} = 4$. 所以 $\frac{2}{\alpha + 1} + \frac{2}{\beta + 1} =$

$\frac{2(\alpha + \beta + 2)}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = 4$. 再由一元二次方

程根与系数的关系可得 $\alpha\beta = b$,

$\alpha + \beta = -a$,所以 $\frac{-a + 2}{b - a + 1} = 2$,所以

$a = 2b > 0$,所以 $\frac{36}{4b + 1} + 4b + 1 - 1 \geq$

11,当且仅当 $a = \frac{5}{2}, b = \frac{5}{4}$ 时取等

号,又因为此时 $f(x) = x^2 + \frac{5}{2}x +$

$\frac{5}{4} = 0$ 在 $x \in (-2, +\infty)$ 上有两个

不同的根,所以符合题意.

因此 $\frac{36}{2a + 1} + 4b$ 的最小值为 11.