



# 全书综合检测

1. C 【解析】因为  $A = \left\{ x \mid \frac{1}{x} > 0 \right\} = \{x \mid x > 0\}$ , 所以  $\complement_{\mathbf{R}} A = \{x \mid x \leq 0\}$ .

又因为  $B = \{x \mid x^2 + x - 2 < 0\} = \{x \mid -2 < x < 1\}$ , 所以  $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B = (-2, 0]$ . 故 C 正确.

2. B 【解析】 $\sin \alpha - \tan \alpha = \tan \alpha (\cos \alpha - 1)$ , 若  $\alpha$  为第一象限角或第三象限角, 则  $\tan \alpha (\cos \alpha - 1) < 0$ , 即  $\sin \alpha < \tan \alpha$ ;

若  $\alpha$  为第二象限角或第四象限角, 则  $\tan \alpha (\cos \alpha - 1) > 0$ , 即  $\sin \alpha > \tan \alpha$ .

故“ $\sin \alpha < \tan \alpha$ ”是“ $\alpha$  为第一象限角”的必要不充分条件, 故 B 正确.

3. B 【解析】原式  $= 3^{3 \times \frac{2}{3}} \times 2 - \log_4 4^{-3} + 2 - 2 \lg 2 - 2 \lg 5 = 9 \times 2 + 3 + 2 - 2(\lg 2 + \lg 5) = 18 + 3 + 2 - 2 = 21$ . 故 B 正确.

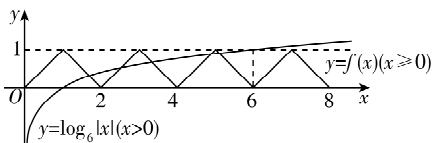
4. C 【解析】若  $f(x) = \begin{cases} f(x-4), & x > 0, \\ 2^x + \frac{1}{3}, & x \leq 0, \end{cases}$  则  $f(2023) = (2023 - 4 \times 505) = f(3) = f(-1) = 2^{-1} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ . 故 C 正确.

5. B 【解析】由题可得  $f(x) = \frac{(1-x^2) \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)}{x} = \frac{(1-x^2) \sin x}{x}$ , 且其定义域为  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ , 关于原点对称,  $f(-x) = \frac{[1-(-x)^2] \sin(-x)}{-x} = \frac{(1-x^2) \sin x}{x} = f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  为偶函数, 故 C, D 错误;

因为当  $x \in (0, 1)$  时,  $1-x^2 > 0$ ,  $\sin x > 0$ , 所以  $f(x) > 0$ , 故 A 错误, B 正确.

6. B 【解析】根据题意, 当  $x \in [0, 1]$  时,  $f(x) = x$ , 且  $f(x)$  为定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 所以当  $x \in [-1, 0]$  时,  $f(x) = -x$ , 因为函数  $f(x)$  满足  $f(x+2) = f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  是周期为 2 的周期函数. 因为函数  $y = f(x) - \log_6 |x|$  的零点个数等于函数  $y = f(x)$  与函数  $y = \log_6 |x|$  的图象的交

点个数,在同一个平面直角坐标系中画出函数  $y = f(x) (x \geq 0)$  与函数  $y = \log_6 |x| (x > 0)$  的图象,如图所示.

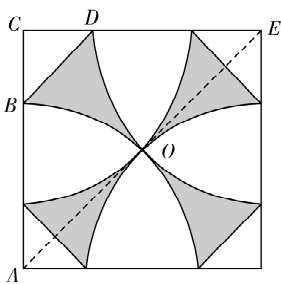


由图可知,函数  $y = f(x)$  的图象与函数  $y = \log_6 |x|$  的图象在  $(0, +\infty)$  上有 5 个交点,又  $f(x)$  与  $y = \log_6 |x|$  均为偶函数,则函数  $y = f(x) - \log_6 |x|$  的零点个数是 10,故 B 正确.

**7. A 【解析】**因为  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数,所以  $f(-x) = -f(x)$ ,因为在区间  $[0, +\infty)$  上的任意两个不相等的实数  $m, n$ ,总有  $\frac{f(m) - f(n)}{m - n} > 0$ ,所以函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调递增.

又因为  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的奇函数,所以函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上是增函数,不等式  $f(2) + f(\log_{\frac{1}{2}} a) \geq 0$ ,即  $f(2) \geq -f(\log_{\frac{1}{2}} a) = f(-\log_{\frac{1}{2}} a) = f(\log_2 a)$ ,所以  $2 \geq \log_2 a$ ,解得  $0 < a \leq 4$ ,所以  $a$  的取值范围是  $(0, 4]$ ,故 A 正确.

**8. A 【解析】**如图,根据正方形以及窗花的对称性可知窗花的一个“花瓣(图形  $OBD$ )”的面积  $S = S_{\triangle ACE} - 2S_{\text{扇形}AOB} - S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}\pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}\right)a^2$ . 故窗花面积为  $4S = \left(2\sqrt{2} - 1 - \frac{\pi}{2}\right)a^2$ . 故 A 正确.



**9. ABC 【解析】**当  $a > b > 0$  时,  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} < 0$ ,所以  $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ,故 A 正确;  
当  $c = 0$  时,由  $a > b$  可推出  $ac^2 = bc^2 = 0$ ,

当  $c \neq 0$  时, 由  $a > b$  可推出  $ac^2 > bc^2$ , 故  $ac^2 \geq bc^2$ , 故 B 正确;

根据不等式的性质, 可知  $a > 1$  等价于  $0 < \frac{1}{a} < 1$ , 可知“ $a > 1$ ”是“ $\frac{1}{a} < 1$ ”的充分不必要条件, 故 C 正确;

命题“ $\forall x > 1, 2^x - 1 > 0$ ”的否定是“ $\exists x > 1, 2^x - 1 \leq 0$ ”, 故 D 错误.

**10. CD** 【解析】由已知, 函数  $f(x)$  的最小

正周期  $T$  满足  $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{4}$ , 所以函数  $f(x)$

的最小正周期为  $\frac{\pi}{2}$ , 故 A 错误.

因为  $T = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{|\omega|}$ , 且  $\omega > 0$ , 所以  $\omega = 2$ ,

此时函数  $f(x) = \tan(2x + \varphi)$ , 因为

$f(0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 所以  $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 所以  $\varphi =$

$\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ . 又因为  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ , 所以

$\varphi = \frac{\pi}{6}$ , 故  $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ , 由  $2x +$

$\frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ , 得  $x \neq \frac{\pi}{6} +$

$\frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ , 所以  $f(x)$  的定义域为

$\left\{x \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$ , 故 B 错误.

由  $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ , 得  $x = -\frac{\pi}{12} +$

$\frac{k\pi}{4} (k \in \mathbf{Z})$ , 故  $f(x)$  图象的对称中心为

点  $\left(\frac{k\pi}{4} - \frac{\pi}{12}, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$ , 故 C 正确.

由  $k\pi - \frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{6} < k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ , 解

得  $\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3} < x < \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6} (k \in \mathbf{Z})$ , 故  $f(x)$

的单调递增区间为  $\left(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} +$

$\frac{\pi}{6}\right) (k \in \mathbf{Z})$ , 故 D 正确.

**11. BC** 【解析】因为  $f(x+1)$  为偶函数, 所

以  $f(x)$  的图象关于直线  $x=1$  对称,  $f(x+1)$

$= f(-x+1)$ , 故  $f(x) = f(2-x)$ , 结

合  $f(x) = -f(4-x)$ , 得  $f(4-x) + f(2-x) =$

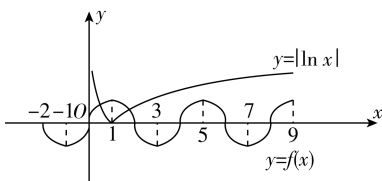
0, 用  $2-x$  代替  $x$ , 得到  $f(x+2) = -f(x)$ ,

则  $f(x+4) = -f(x+2) = f(x)$ , 于是  $f(x)$



的周期为 4. 由  $f(x) = f(2-x)$  可得  $f(-x) = f(2+x)$ , 结合  $f(x+2) = -f(x)$  可得  $f(-x) = -f(x)$ , 故  $f(x)$  为奇函数. 根据幂函数的性质知  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  在  $x \in [-1, 0)$  上单调递增, 根据奇函数的性质知  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上单调递增, 又  $f(x)$  的图象关于直线  $x = 1$  对称, 则  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递减, 又  $f(x)$  的周期为 4, 所以  $f(x)$  在  $[5, 6]$  上单调递减, 故 A 错误.

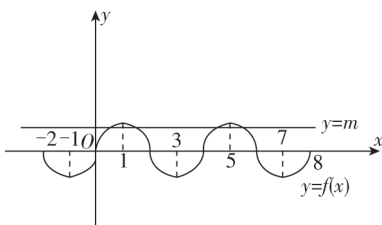
奇函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 故  $f(0) = 0$ , 因为  $f(x)$  的周期为 4, 所以  $f(4) = f(0) = 0$ . 由  $f(x) = -f(4-x)$ , 取  $x = 1$  得  $f(1) + f(3) = 0$ , 取  $x = 2$ , 得  $f(2) = 0$ , 故  $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$ , 由于  $f(x)$  的周期为 4, 故  $f(1) + f(2) + \cdots + f(2\,023) = 505[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] + f(1) + f(2) + f(3) = 0$ , 故 B 正确. 在同一平面直角坐标系中作出  $y = f(x)$  和  $y = |\ln x|$  的图象如图①所示,



图①

由图可知两个函数的图象有 2 个交点, 故  $y = f(x) - |\ln x|$  有 2 个零点, 故 C 正确.

作出  $y = f(x)$  在  $[-2, 8]$  上的图象如图②所示,



图②

若  $0 < m < 1$ , 则根据  $y = f(x)$  图象的对称性可得, 直线  $y = m$  与  $f(x)$  在  $[-2, 8]$  上的图象的交点的横坐标之和为  $2 \times (1 + 5) = 12$ , 故关于  $x$  的方程  $f(x) = m$  在区间  $[-2, 8]$  上的实数根之和为 12, 故 D 错误.



12.  $-\frac{1}{2}$  【解析】 $\because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 且满足

$$\sin \alpha = \sin 2\alpha, \text{ 即 } \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$$\cos \frac{2^{2026}\pi}{3} = \cos \left( 2^{2023} \times \frac{8\pi}{3} \right)$$

$$= \cos \left[ 2^{2023} \times \left( 2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \cos \left( 2^{2023} \times \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= \cos \left[ 2^{2021} \times \left( 2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \cos \left( 2^{2021} \times \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= \cos \left[ 2^{2019} \times \left( 2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \cos \left( 2^{2019} \times \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= \cos \left[ 2^{2017} \times \left( 2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \cos \left( 2^{2017} \times \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= \dots$$

$$= \cos \left[ 2 \times \left( 2\pi + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \cos \left( 2 \times \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{4\pi}{3}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

13.  $(-2, 0)$  【解析】令  $f(x) = x^2 + (a^2 - 1)x + a - 2$ , 则  $f(x)$  的零点一个小于  $-1$ , 另一个大于  $1$ ,

$$\text{则} \begin{cases} f(-1) < 0, \\ f(1) < 0, \end{cases} \text{ 即} \begin{cases} 1 - (a^2 - 1) + a - 2 < 0, \\ 1 + (a^2 - 1) + a - 2 < 0, \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a > 1 \text{ 或 } a < 0, \\ -2 < a < 1, \end{cases} \text{ 所以 } a \in (-2, 0).$$

14.  $\frac{1+2\sqrt{2}}{4}$   $\left\{ a \mid \log_2 \frac{1}{3} \leq a \leq \left( \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ 或 } a \geq 1 \right\}$  【解析】 $\because$  函数  $f(x) =$

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x, x > 0, \\ 2^x, x \leq 0, \end{cases} \therefore f\left(\log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + f(f(9)) =$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(-2) = \frac{1+2\sqrt{2}}{4}.$$

若  $f(f(a)) \leq 1$ , 则  $f(a) \leq 0$  或  $f(a) \geq$

$\frac{1}{3}$ ,  $\therefore \log_2 \frac{1}{3} \leq a \leq \left( \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{3}}$  或  $a \geq 1$ , 故



实数  $a$  的取值范围是  $\left\{ a \mid \log_2 \frac{1}{3} \leq a \leq \left( \frac{1}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \text{ 或 } a \geq 1 \right\}$ .

15. 【解】(1) 当  $a = -8$  时,  $f(x) = x^2 - 2x - 8$ , 由  $f(x) \geq 0$ , 得  $x^2 - 2x - 8 \geq 0$ , 解得  $\{x \mid x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 4\}$ .

(2) 若  $a > 0$ ,  $f(x) < 0$  的解集为  $(m, n)$ , 则  $m, n$  是方程  $x^2 - 2x + a = 0$  的两个不等实数根, 且  $m < n$ . 由根与系数的关系得  $m + n = 2$ ,  $mn = a$ , 因为  $a > 0$ , 所以  $mn = a > 0$ . 又  $m + n = 2 > 0$ , 所以  $m > 0, n > 0$ , 所以  $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{m} + \frac{4}{n} \right) (m + n) = \frac{1}{2} \left( 1 + 4 + \frac{n}{m} + \frac{4m}{n} \right) \geq \frac{1}{2} \left( 5 + 2\sqrt{\frac{n}{m} \cdot \frac{4m}{n}} \right) = \frac{1}{2} \times (5 + 4) = \frac{9}{2}$ , 当且仅当  $\frac{n}{m} = \frac{4m}{n}$ , 即  $m = \frac{2}{3}, n = \frac{4}{3}$  时取等号, 所以  $\frac{1}{m} + \frac{4}{n}$  的最小值为  $\frac{9}{2}$ .

16. 【解】(1)  $\because$  函数  $f(x) = 2\cos^2 x - \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 1 = \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ , 故函数  $f(x)$  的最小正周期为  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ .

(2) 若  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , 则  $2x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ , 则  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ , 则  $f(x) \in (-1, \sqrt{2}]$ .

故  $f(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上的值域为  $(-1, \sqrt{2}]$ .

(3) 函数  $h(x) = f(x) - \sqrt{2}m$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上零点的个数, 即方程  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = m$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上不同解的个数.

当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $2x + \frac{\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ ,

则  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$ .

当  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $m = 1$  时, 方程



$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = m$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上有 1 个解;

当  $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$  时, 方程  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = m$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上有 2 个不同的解;

当  $m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $m > 1$  时, 方程  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = m$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上无解.

综上所述, 当  $-\frac{\sqrt{2}}{2} < m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$  或  $m = 1$  时,

函数  $h(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上的零点个数为

1; 当  $\frac{\sqrt{2}}{2} < m < 1$  时, 函数  $h(x)$  在  $\left(0,$

$\frac{\pi}{2}\right)$  上的零点个数为 2; 当  $m \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

或  $m > 1$  时, 函数  $h(x)$  在  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  上的零点个数为 0.

**17. 【解】** (1) 当  $1 \leq x \leq 20$  时, 设  $P = kx + b$ ,

由题意得  $\begin{cases} k+b=63, \\ 10k+b=90, \end{cases}$  解得  $\begin{cases} k=3, \\ b=60. \end{cases}$  故

该电子产品 9 月份每件售价  $P$  (元) 与时间  $x$  (天) 的函数关系式为

$$P = \begin{cases} 3x+60, & 1 \leq x \leq 20, x \in \mathbf{N}^*, \\ 120, & 21 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

(2) 设 9 月份的日销售金额为  $y$  元, 则

$$y = \begin{cases} (3x+60)(-x+50), & 1 \leq x \leq 20, x \in \mathbf{N}^*, \\ 120(-x+50), & 21 \leq x \leq 30, x \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

当  $1 \leq x \leq 20$  时,  $y = (3x+60) \cdot (-x+50) = -3x^2 + 90x + 3\,000 = -3(x-15)^2 + 3\,675$ , 则当  $x = 15$  时,  $y$  取得最大值 3 675;

当  $21 \leq x \leq 30$  时,  $y = 120(-x+50)$  单调递减, 则当  $x = 21$  时,  $y$  取得最大值 3 480.

综上所述, 9 月份第 15 天的日销售金额最大, 最大日销售金额为 3 675 元.

**18. 【解】** (1) 由题意知  $f(1) = \log_3 10 + a =$

$\log_3 \frac{10}{3}$ , 解得  $a = -1$ , 所以  $f(x) =$

$\log_3(3^{2x} + 1) - x = \log_3(3^{2x} + 1) - \log_3 3^x =$

$$\log_3 \frac{3^{2x} + 1}{3^x} = \log_3(3^x + 3^{-x}).$$



因为  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,  $f(-x) = \log_3(3^{-x} + 3^x) = f(x)$ , 所以函数  $f(x)$  为偶函数.

(2) 由  $g(x) = f(x)$ , 得  $\log_3(3^x + 3^{-x}) = \log_3(3^x + x + t)$ , 即方程  $t = 3^{-x} - x$  在  $x \in [-1, 1]$  上有解.

令  $h(x) = 3^{-x} - x$ ,  $x \in [-1, 1]$ , 因为函数  $y = 3^{-x}$ ,  $y = -x$  在  $[-1, 1]$  上都单调递减, 所以函数  $h(x) = 3^{-x} - x$  在  $[-1, 1]$  上单调递减, 所以  $h(x) = 3^{-x} - x \in \left[-\frac{2}{3}, 4\right]$ ,

所以  $t$  的取值范围为  $\left[-\frac{2}{3}, 4\right]$ .

**19. 【解】** (1) 函数  $f(x) = ax^2 - x + 2a - 1$  ( $a > 0$ ) 的图象开口向上, 且对称轴方程为  $x = \frac{1}{2a}$ . 若函数  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上

单调递增, 则  $\begin{cases} \frac{1}{2a} \leq 1, \\ a > 0, \end{cases}$  解得  $a \geq \frac{1}{2}$ , 所以

实数  $a$  的取值范围为  $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ .

(2) 当  $0 < \frac{1}{2a} \leq 1$ , 即  $a \geq \frac{1}{2}$  时,  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上单调递增, 此时  $g(a) = f(1) = 3a - 2$ ;

当  $1 < \frac{1}{2a} < 2$ , 即  $\frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}$  时,  $f(x)$  在  $\left[1, \frac{1}{2a}\right]$  上单调递减, 在  $\left[\frac{1}{2a}, 2\right]$  上单调递增, 此时  $g(a) = f\left(\frac{1}{2a}\right) = 2a - \frac{1}{4a} - 1$ ;

当  $\frac{1}{2a} \geq 2$ , 即  $0 < a \leq \frac{1}{4}$  时,  $f(x)$  在区间  $[1, 2]$  上单调递减, 此时  $g(a) = f(2) = 6a - 3$ .

$$\text{综上所述, } g(a) = \begin{cases} 3a - 2, & a \geq \frac{1}{2}, \\ 2a - \frac{1}{4a} - 1, & \frac{1}{4} < a < \frac{1}{2}, \\ 6a - 3, & 0 < a \leq \frac{1}{4}. \end{cases}$$

(3) 由对任意  $x_1 \in [1, 2]$ , 都存在  $x_2 \in [1, 2]$ , 使不等式  $f(x_2) \geq h(x_1)$  成立, 可得当  $x \in [1, 2]$  时,  $f(x)_{\max} \geq h(x)_{\max}$ . 因为函数  $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x +$





$\log_2 \frac{1}{x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$  在  $[1, 2]$  上单调递减, 所以  $h(x)$  在  $[1, 2]$  上的最大值为  $h(1) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ .

当  $\frac{1}{2a} > \frac{3}{2}$ , 即  $0 < a < \frac{1}{3}$  时,  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上的最大值为  $f(1) = 3a - 2$ .

令  $3a - 2 \geq -\frac{1}{2}$ , 解得  $a \geq \frac{1}{2}$ , 此时与  $0 < a < \frac{1}{3}$  矛盾.

当  $\frac{1}{2a} \leq \frac{3}{2}$ , 即  $a \geq \frac{1}{3}$  时,  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上的最大值为  $f(2) = 6a - 3$ .

令  $6a - 3 \geq -\frac{1}{2}$ , 解得  $a \geq \frac{5}{12}$ .

综上, 实数  $a$  的取值范围为  $\left[\frac{5}{12}, +\infty\right)$ .