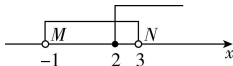


2026 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

1. 【答案】D

【解析】在数轴上表示出集合 M, N , 如图所示, 由图可知 $M \cup N = \{x | x > -1\}$. 故选 D.



2. 【答案】C

【解析】因为 $z_1 = 3 - 2i, z_2 = -5 + 4i$, 所以 $z_1 + z_2 = -2 + 2i$, 则 $|z_1 + z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. 故选 C.

3. 【答案】B

【解析】由双曲线的方程得其渐近线方程为 $y = \pm \frac{2}{a}x$, 所以 $\frac{2}{a} = \frac{2}{3}$, 解得 $a = 3$. 故选 B.

4. 【答案】A

【解析】由 $(a - \sqrt{x})^7 = (a - x^{\frac{1}{2}})^7$, 可得二项展开式的通项为 $T_{r+1} = C_7^r \cdot a^{7-r} \cdot (-x^{\frac{1}{2}})^r = (-1)^r \cdot C_7^r \cdot a^{7-r} x^{\frac{r}{2}}, r = 0, 1, 2, \dots, 7$, 令 $\frac{r}{2} = 2$, 得 $r = 4$, 则展开式中 x^2 的系数为 $(-1)^4 \cdot C_7^4 \cdot a^{7-4} = 35a^3 = 280$, 解得 $a = 2$, 故选 A.

5. 【答案】D

【解析】对于 A, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 关于坐标原点对称 (提示: 讨论函数奇偶性的前提是函数定义域关于坐标原点对称), $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2+1} = \frac{1}{x^2+1} = f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是偶函数, 故 A 错误;

对于 C, $f(x) = \sin x$, 则 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 关于坐标原点对称, 由 $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$, 得 $f(x)$ 是奇函数, 而 $f(x) = \sin x$ 是周期函数, 在 $\mathbb{R}$ 上有增有减, 因此 $f(x)$ 不在定义域上单调递增, 故 C 错误;

对于 B, 易知 $f(x) = 2^{-x} - 2^x$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, $f(-x) = 2^x - 2^{-x} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数, 又 $y = 2^{-x}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的减函数, $y = 2^x$ 是 $\mathbb{R}$ 上的增函数, 所以 $f(x) = 2^{-x} - 2^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减, 故 B 错误;

对于 D, 由 $\frac{5+x}{5-x} > 0$, 得 $-5 < x < 5$, 所以函数 $f(x) = \ln \frac{5+x}{5-x}$ 的定义域关于坐标原点对称,

因为 $f(-x) = \ln \frac{5-x}{5+x} = -\ln \frac{5+x}{5-x} = -f(x)$, 所以函数 $f(x)$ 是奇函数,

因为 $g(x) = \frac{5+x}{5-x} = -1 + \frac{10}{5-x}$ 在 $(-5, 5)$ 上单调递增, $f(t) = \ln t$ 在定义域上单调递增, 所以 $f(x) = \ln(g(x))$ 在 $(-5, 5)$ 上单调递增 (关键: 复合函数的单调性满足“同增异减”), 故 D 正确. 故选 D.

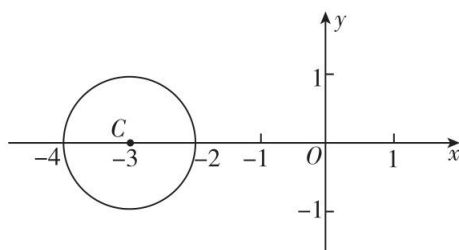
6. 【答案】D

【解析】设 $b = (x, y)$, 则 $a - b = (-3 - x, -y)$, 所以 $|a - b| = \sqrt{(-3 - x)^2 + y^2} = 1$, 整理得 $y^2 = -x^2 - 6x - 8$, 由 $y^2 \geq 0$, 得 $-4 \leq x \leq -2$, 又 $|b| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{-6x - 8}$, 则 $2 \leq |b| \leq 4$, 即 $|b|_{\max} = 4, |b|_{\min} = 2$. 故选 D.

【一题多解】

设 O 为坐标原点, $\overrightarrow{OB} = b = (x, y)$, 则 $a - b = (-3 - x, -y)$, $|a - b| = \sqrt{(-3 - x)^2 + y^2} = 1$, 即 $(x + 3)^2 + y^2 = 1$, 所以点 B 的轨迹是以点 $C(-3, 0)$ 为圆心, 半径 $r = 1$ 的圆.

$|b| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 的几何意义为动点 B 到原点 $O(0, 0)$ 的距离, 由图可知, 圆上的点到原点 O 的最大距离 $|b|_{\max} = |OC| + r = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} + 1 = 4$, 最小距离 $|b|_{\min} = |OC| - r = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} - 1 = 2$. 故选 D.



7. 【答案】A

【解析】若存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n$ 对任意正整数 n 成立, 则必有 $a_n \leq b_n$ (提示: 不等式的传递性), 充分性成立; 反之, 设 $a_n = n$, $b_n = n + 1$, 满足 $a_n \leq b_n$, 但不存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n$ 恒成立, 即必要性不成立, 因此“存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n (n \in N^*)$ ”是“ $a_n \leq b_n (n \in N^*)$ ”的充分不必要条件, 故选 A.

【一题多解】

若存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n$ 对任意正整数 n 成立, 则数列 $\{a_n\}$ 的最大项不大于 M , 数列 $\{b_n\}$ 的最小项不小于 M , 因此必有 $a_n \leq b_n$, 充分性成立; 反之, 设点 $(n, a_n) (n \in N^*)$ 在函数 $f(x)$ 的图像上, 点 $(n, b_n) (n \in N^*)$ 在函数 $g(x)$ 的图像上, 曲线 $y = f(x)$ 总在曲线 $y = g(x)$ 下方 (可以有公共点), 即 $a_n \leq b_n$, 但不一定存在直线 $y = M$, 使曲线 $y = f(x)$ 在直线 $y = M$ 下方 (可以有公共点), 且曲线 $y = g(x)$ 在直线 $y = M$ 上方 (可以有公共点), 因此必要性不成立, 故“存在常数 M , 使 $a_n \leq M \leq b_n (n \in N^*)$ ”是“ $a_n \leq b_n (n \in N^*)$ ”的充分不必要条件, 故选 A.

8. 【答案】C

【解析】 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ 的图像向 x 轴的正方向平移 3φ 个单位长度, 得到函数 $g(x) = \sin(x - 2\varphi)$ 的图像, 由题意, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像关于 x 轴对称, 因此 $f(x) = -g(x)$ 对任意实数 x 恒成立, 即 $\sin(x + \varphi) = -\sin(x - 2\varphi) = \sin(-x + 2\varphi)$ 恒成立, 显然 $x + \varphi = -x + 2\varphi + 2k\pi (k \in Z)$ 不恒成立, 故只有 $(x + \varphi) + (-x + 2\varphi) = \pi + 2k\pi (k \in Z)$ (提示:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$), 即 $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$, 又 $0 < \varphi < 2\pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$, 即 φ 的取值个数为 3. 故选 C.

【一题多解】

$f(x) = \sin(x + \varphi)$ 的最小正周期 $T = 2\pi$, 图像平移不改变周期性, 根据正弦曲线的特征, 要使平移后的图像与 $f(x)$ 的图像关于 x 轴对称, 则需平移 $\frac{1}{2}T + kT (k \in \mathbb{Z})$ 个单位长度, 因此 $3\varphi = \pi + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$, 即 $\varphi = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$, 又 $0 < \varphi < 2\pi$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$, 即 φ 的取值个数为 3. 故选 C.

9. 【答案】B

【解析】设参观甲革命根据地高一年级的人数为 x , 高二年级的人数为 m , 参观乙革命根据地高一年级的人数为 y , 高二年级的人数为 n , 由已知, 有不等式组 $\begin{cases} x + y > m + n, \\ x + m > y + n, \end{cases}$ 两不等式相加可得 $2x + y + m > 2n + y + m$, 即 $x > n$, 故参观甲革命根据地高一年级的人数多于参观乙革命根据地的高二年级的人数, 故 B 正确. 假设 $x = 3, y = 3, m = 4, n = 1$, 满足 $x + y > m + n$ 及 $x + m > y + n$, 但此时 $x = y, y < m, n < m$, 故 A, C, D 错误. 故选 B.

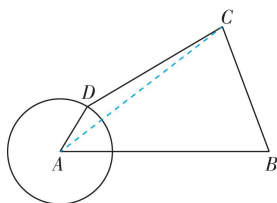
10.

【答案】B

【思路导引】

第一步: 分析机械装置的运动规律, 将动点 D 视为以 A 为圆心、1 为半径的圆上的点, 利用三角形的三边关系求出 AC 的取值范围; 第二步: 在 $\triangle ABC$ 中, 利用余弦定理将 $\cos \angle ABC$ 表示为关于 AC^2 的式子; 第三步: 构造函数, 结合 AC^2 的取值范围, 求出 $\cos \angle ABC$ 的取值范围

【解析】连接 AC , 如图所示. 已知 $AD = 1, CD = 3$, 结合三角形三边关系, 可得 $|CD - AD| \leq AC \leq CD + AD$, 即 $3 - 1 \leq AC \leq 3 + 1$ (提示: 当 A, C, D 三点共线时, AC 取得最大值或最小值), 所以线段 AC 长度的取值范围是 $[2, 4]$.



在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 4, BC = \frac{5}{2}$, 由余弦定理得 $\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC}$, 代入得

$$\cos \angle ABC = \frac{4^2 + (\frac{5}{2})^2 - AC^2}{2 \times 4 \times \frac{5}{2}} = \frac{16 + \frac{25}{4} - AC^2}{20} = \frac{\frac{89}{4} - AC^2}{20}.$$

因为 $2 \leq AC \leq 4$, 所以 $4 \leq AC^2 \leq 16$.

令 $AC^2 = t, t \in [4, 16]$, $y = \frac{89}{4} - \frac{t}{20}$, 易知此函数在 $[4, 16]$ 上单调递减.

当 $t = 4$ 时, y 取得最大值, 最大值为 $\frac{89}{20} - \frac{4}{20} = \frac{73}{20} = \frac{73}{80}$;

当 $t = 16$ 时, y 取得最小值, 最小值为 $\frac{89}{20} - \frac{16}{20} = \frac{25}{20} = \frac{25}{80} = \frac{5}{16}$.

综上所述, $\cos \angle ABC$ 的取值范围是 $[\frac{5}{16}, \frac{73}{80}]$. 故选 B.

11.

【答案】0

【思路导引】

第一步: 通过圆的标准方程确定圆心坐标和半径; 第二步: 利用直线与圆相切时“圆心到直线的距离等于半径”, 列出代数方程; 第三步: 解方程, 求出参数 a 的值

【解析】由圆的方程 $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ 可知, 圆心的坐标为 $(2, 2)$, 半径 $r = \sqrt{4} = 2$. 因为直线 $ax + y = 0$ 与该圆相切, 所以圆心到直线的距离等于圆的半径 r , 由点到直线的距离公式得 $\frac{|2a+2|}{\sqrt{a^2+1}} = 2$, 即 $4a^2 + 8a + 4 = 4a^2 + 4$, 解得 $a = 0$.

12.

【答案】-2; 9 (答案不唯一, 可以填 $[8, 10]$ 中任意一个实数)

【思路导引】

第一空: 根据等差数列前 n 项和公式及已知条件求得公差 d ; 第二空: 根据 $S_n \leq S_5$ 恒成立, 推断出数列 $\{a_n\}$ 的前5项均非负、第6项非正, 即 $a_5 \geq 0$ 且 $a_6 \leq 0$, 代入公差 d , 解出 a_1 的取值范围, 任取一个符合范围的值即可

【解析】由已知可得 $S_6 = \frac{6(a_1+a_6)}{2} = 3a_1 + 3a_6$, 代入 $S_6 = 6a_6 + 30$, 得 $3a_1 + 3a_6 = 6a_6 + 30$, 化简得 $a_1 - a_6 = 10$.

又 $\{a_n\}$ 为等差数列, 所以 $a_6 = a_1 + 5d$, 两式联立, 解得 $d = -2$ (另解: 由等差数列前 n 项和公式得 $S_6 = 6a_1 + 15d = 6(a_1 + 5d) - 15d$, 所以 $S_6 = 6a_6 + 30 = 6a_6 - 15d$, 从而解得 $d = -2$).

若 $\forall n \in N^*, S_n \leq S_5$ 恒成立, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和在 $n = 5$ 时取得最大值, 结合 $d = -2 < 0$, 可知必须满足 $a_5 \geq 0$ 且 $a_6 \leq 0$,

即 $\begin{cases} a_1 + 4d \geq 0, \\ a_1 + 5d \leq 0, \end{cases}$ 解得 $8 \leq a_1 \leq 10$, 即 a_1 的取值范围是 $[8, 10]$.

所以符合条件的 a_1 的一个取值可以填 $[8, 10]$ 中任意一个实数.

13.

【答案】 $[700, 4900]$

【思路导引】

将不等式两端的常数化为同底数的对数形式 $\rightarrow$ 利用对数函数 (底数为10) 的单调性, 直接去掉对数符号建立代数不等式 $\rightarrow$ 解不等式求出 f 的范围

【解析】由已知可得， $\lg 2 \leq \lg(1 + \frac{f}{700}) \leq 3\lg 2$ ，又 $3\lg 2 = \lg 2^3 = \lg 8$ ，所以 $\lg 2 \leq \lg(1 + \frac{f}{700}) \leq \lg 8$.

因为函数 $y = \lg x$ 在定义域上单调递增，所以可以直接去掉对数符号，不等号方向不变，即 $2 \leq 1 + \frac{f}{700} \leq 8$ ，解得 $700 \leq f \leq 4900$ ，所以 f 的取值范围是 $[700, 4900]$.

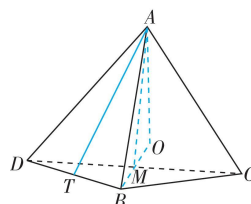
14.

【答案】 $2\sqrt{7} + \sqrt{15} + \sqrt{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【思路导引】

第一空：利用勾股定理和三角形面积公式分别求出该三棱锥四个面的面积→求出三棱锥 $A-BCD$ 的表面积；第二空：点 A 到其他三个顶点的距离相等→顶点 A 在底面的投影为 $\triangle BCD$ 的外心→利用三角形面积公式求出底面外接圆半径→利用勾股定理求出三棱锥 $A-BCD$ 的高→求出三棱锥 $A-BCD$ 的体积

【解析】



已知在 $\triangle BCD$ 中， $BD = 2$ ， $BC = 2$ ， $DC = 2\sqrt{3}$ ，取 DC 的中点 M ，连接 BM ， AM 。因为 $BD = BC$ ，所以 $BM \perp DC$ ， $DM = CM = \sqrt{3}$ ，所以

$$BM = \sqrt{BD^2 - DM^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1, \text{ 所以 } \triangle BCD \text{ 的面积 } S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times DC \times BM = \frac{1}{2} \times$$

$$2\sqrt{3} \times 1 = \sqrt{3}. \text{ 因为 } AD = AC = 2\sqrt{2}, M \text{ 为 } CD \text{ 的中点, 所以 } AM \perp CD, \text{ 所以 } AM =$$

$$\sqrt{AD^2 - DM^2} = \sqrt{5}, \text{ 所以 } \triangle ACD \text{ 的面积 } S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot CD = \sqrt{15}. \text{ 取 } BD \text{ 的中点 } T, \text{ 连接 } AT,$$

$$\text{则 } AT \perp BD, \text{ 所以 } AT = \sqrt{AD^2 - DT^2} = \sqrt{7}. \text{ 所以 } \triangle ABD \text{ 的面积 } S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot AT \cdot BD = \sqrt{7}, \text{ 易}$$

$$\text{知 } \triangle ABD \cong \triangle ABC, \text{ 所以 } S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} = \sqrt{7}, \text{ 故三棱锥 } A-BCD \text{ 的表面积为 } S_{\triangle ABC} +$$

$$S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = 2\sqrt{7} + \sqrt{15} + \sqrt{3}.$$

因为侧棱 $AD = AB = AC = 2\sqrt{2}$ ，所以顶点 A 在底面 BCD 上的投影 O 是 $\triangle BCD$ 的外接圆的圆心。

设 $\triangle BCD$ 的外接圆的半径为 R ，由三角形面积拓展公式 $S = \frac{abc}{4R}$ (a, b, c 为三角形的三边长) 可得

$$R = \frac{BD \cdot BC \cdot DC}{4S_{\triangle BCD}} = \frac{2 \times 2 \times 2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = 2 \text{ (另解：由前面的计算可知 } \angle BCD = 30^\circ, \text{ 所以由正弦定理可得}$$

$$R = \frac{BD}{2\sin \angle BCD} = 2).$$

易知顶点 A 在底面 BCD 的投影 O 必在直线 BM 上, 在 $\text{Rt} \triangle AOB$ 中, $AB = 2\sqrt{2}$,

$BO = R = 2$, 则三棱锥的高 $h = AO = \sqrt{AB^2 - BO^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = \sqrt{8 - 4} = 2$, 所以三棱

锥 $A - BCD$ 的体积 $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot h = \frac{1}{3} \times \sqrt{3} \times 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

15.

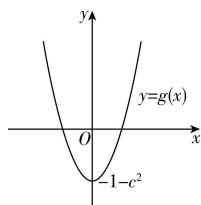
【答案】①②③④

【解析】设 $g(x) = x^2 - \cos x - c^2$, 定义域为 $\mathbf{R}$,

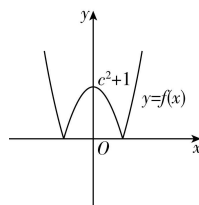
则 $g(-x) = (-x)^2 - \cos(-x) - c^2 = x^2 - \cos x - c^2 = g(x)$, 所以 $g(x)$ 为偶函数, 图像关于 y 轴对称.

$g'(x) = 2x + \sin x$, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 则 $g(0) = -1 - c^2$ 是 $g(x)$ 的极小值, 也是最小值.

又 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$ (提示: 根据 $y = \cos x$ 的有界性, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x)$ 图像的变化趋势近似于 $y = x^2$ 图像的变化趋势), 所以 $g(x)$ 的大致图像如图①所示, 所以 $f(x)$ 的大致图像如图②所示.



图①

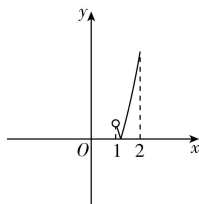


图②

对于①, 结合 $f(x)$ 的图像, 因为 -1 和 1 关于原点对称, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 1]$ 上一定有最大值和最小值, 故①正确;

对于②, 当 $c = 0$ 时, $f(x)$ 的极大值是 1 , 结合图像可知 $f(x) = 1$ 有 3 个解, 故②正确;

对于③, 当 $c = 1$ 时, $f(x) = |x^2 - \cos x - 1|$, $g(x) = x^2 - \cos x - 1$, 由前面的分析知 $g(x)$ 在 $(1, 2]$ 上单调递增, 且 $g(1) = -\cos 1 \in (-1, 0)$, $g(2) = 3 - \cos 2 > 3$, 所以 $f(1) = |g(1)| < f(2) = |g(2)|$, 所以当 $c = 1, x \in (1, 2]$ 时, $f(x)$ 的大致图像如图③所示, 则 $f(x)$ 有最大值, 且在 $x = 2$ 处取得, 故③正确;



图③

对于④, 因为 $f(x)$ 的极大值是 $c^2 + 1$, 又 $c > 0$, 则 $c^2 + 1 > c$ 恒成立,

所以结合图像可知 $f(x)$ 的图像与直线 $y=c$ 有4个交点，故④正确.

综上，正确结论的序号是①②③④.

【一题多解】

对于①， $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ ， $f(-x) = |(-x)^2 - \cos(-x) - c^2| = |x^2 - \cos x - c^2| = f(x)$ ，所以 $f(x)$ 是偶函数，

则 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上的图像关于 y 轴对称.

当 $x \in [0,1]$ 时， $f(x)$ 在闭区间内必有最小值和最大值，

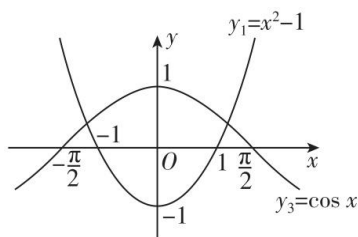
又因为 $f(x)$ 是偶函数，所以即使 $f(x)$ 在开区间 $(-1,0)$ 内没有最值，在 $(-1,1]$ 内也一定有最小值和最大值，故①正确.

对于②，当 $c=0$ 时，令 $f(x) = |x^2 - \cos x| = 1$ ，即 $x^2 - \cos x = 1$ 或 $x^2 - \cos x = -1$ ，即 $x^2 - 1 = \cos x$ 或 $x^2 + 1 = \cos x$ ，令 $y_1 = x^2 - 1$ ， $y_2 = x^2 + 1$ ， $y_3 = \cos x$ ， y_1, y_2, y_3 均为偶函数.

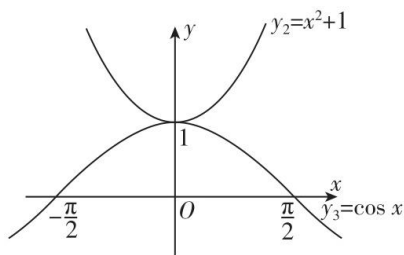
当 $x=0$ 时， $y_1 = -1$ ， $y_2 = 1$ ， $y_3 = 1$ ；当 $x=1$ 时， $y_1 = 0$ ， $y_3 = \cos 1 > 0$ ；当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时，

$y_1 > 0$ ， $y_3 = 0$.

画出 y_1 与 y_3 ， y_2 与 y_3 的大致图像如图①、图②所示，可知 y_1 与 y_3 的图像有2个交点， y_2 与 y_3 的图像有1个交点，



图①



图②

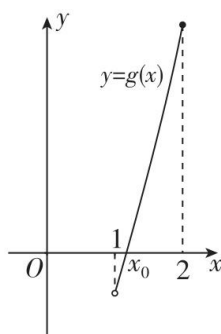
即 $x^2 - 1 = \cos x$ 有2个解， $x^2 + 1 = \cos x$ 有1个解，故 $f(x) = |x^2 - \cos x| = 1$ 共有3个解，故②正确.

对于③，当 $c=1$ 时， $f(x) = |x^2 - \cos x - 1|$ ，令 $g(x) = x^2 - \cos x - 1$ ， $g'(x) = 2x + \sin x$ ，当 $x \in (1,2]$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$ 单调递增，

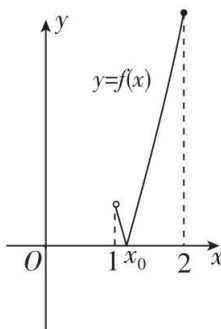
$g(1) = 1 - \cos 1 - 1 = -\cos 1 < 0$ ， $g(2) = 2^2 - \cos 2 - 1 = 3 - \cos 2 > 0$ ，

故存在 $x_0 \in (1,2)$ ，使得 $g(x_0) = x_0^2 - \cos x_0 - 1 = 0$ ，由此可得 $g(x)$ 在 $(1,2]$ 上的大致图像如图③所示，又 $f(x) = |g(x)|$ ， $f(1) = |g(1)| = \cos 1 < \cos 0 = 1$ ， $f(2) = |g(2)| = 3 -$

$\cos 2 > 3 - \cos \frac{\pi}{2} = 3$ ，故 $f(1) < f(2)$ ， $f(x)$ 在 $(1,2]$ 上的大致图像如图④所示，由图易得 $f(x)$ 有最大值 $f(2)$ ，故③正确.



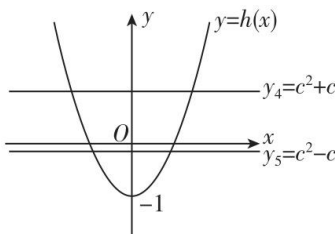
图③



图④

对于④,当 $c > 0$ 时, $f(x) = |x^2 - \cos x - c^2|$ 的图像与直线 $y = c$ 的交点个数, 即 $|x^2 - \cos x - c^2| = c$ 的解的个数, 即 $x^2 - \cos x - c^2 = c$ 和 $x^2 - \cos x - c^2 = -c$ 的不同解的个数和. 令 $h(x) = x^2 - \cos x$, 则 $h'(x) = 2x + \sin x$, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, $h(0) = 0 - \cos 0 = -1$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) \rightarrow +\infty$. 当 $c > 0$ 时, $y_4 = c^2 + c$ 恒大于0, $y_5 = c^2 - c$ 恒大于 $-\frac{1}{4}$, 且 $c^2 + c$ 恒大于 $c^2 - c$.

易知 $h(x)$ 为偶函数, 故 $h(x) = x^2 - \cos x$, $y_4 = c^2 + c$, $y_5 = c^2 - c$ 的大致图像如图⑤所示.



图⑤

由图可知, $h(x)$ 的图像与直线 $y_4 = c^2 + c$ 和 $y_5 = c^2 - c$ 各有2个交点, 且它们的横坐标各不相同, 故 $f(x)$ 的图像与直线 $y = c$ 共有4个交点, 故④正确.

16.

【答案】

(1) 第一步: 将解析式化为 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的形式

由题可得 $f(x) = 2(\sin \omega x \cos \varphi + \cos \omega x \sin \varphi) = 2\sin(\omega x + \varphi)$.

1分

第二步：根据最小正周期求 ω 的值

因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π , $\omega > 0$, 所以 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 解得 $\omega = 2$.

3分

第三步：求 φ 的值

又 $f(\frac{\pi}{4}) = 2\sin(2 \times \frac{\pi}{4} + \varphi) = 1$, 所以 $\cos \varphi = \frac{1}{2}$,

又因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 且 $f(0) = 2\sin \varphi > 0$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 6分

(2) 第一步：将 $2x + \frac{\pi}{3}$ 看作整体，由正弦函数的单调递减区间列出不等式

由(1)得 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 令 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in Z$, 9分

第二步：求出 x 的取值范围，得到 $f(x)$ 的单调递减区间

解得 $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + k\pi, k \in Z$,

所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{7\pi}{12} + k\pi], k \in Z$. 13分

17.

【答案】设从该校学生中随机抽取1人，其数学成绩为 x 分，

(1) $P(x < 120) = \frac{40+60+60}{200} = \frac{160}{200} = \frac{4}{5}$, 故成绩低于120分的概率为 $\frac{4}{5}$. 2分

(2) 第一步：分别求出任取1人数学成绩不低于120分和低于94分的概率

$P(x \geq 120) = \frac{32+8}{200} = \frac{1}{5}, P(x < 94) = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}$, 4分

第二步：求出4人中有2人不低于120分，另外2人低于94分的概率

设4人中有2人不低于120分，另外2人低于94分为事件 A ,

则 $P(A) = C_4^2 \times (\frac{1}{5})^2 \times C_2^2 \times (\frac{1}{5})^2 = \frac{6}{625}$. 6分

(3) 第一步：求出每组数据的频率

设第 i 组数据的频率为 $P_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$, 则 $P_1 = \frac{40}{200} = \frac{1}{5}, P_2 = \frac{60}{200} = \frac{3}{10}, P_3 = \frac{60}{200} = \frac{3}{10}, P_4 =$

$\frac{32}{200} = \frac{4}{25}, P_5 = \frac{8}{200} = \frac{1}{25}$. 7分

第二步：求出每组数据左端、正中间、右端的加权平均数

$\bar{x}_L = 81 \times \frac{1}{5} + 94 \times \frac{3}{10} + 107 \times \frac{3}{10} + 120 \times \frac{4}{25} + 135 \times \frac{1}{25} = 101.1$,

$\bar{x}_H = \frac{81+94}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{94+107}{2} \times \frac{3}{10} + \frac{107+120}{2} \times \frac{3}{10} + \frac{120+135}{2} \times \frac{4}{25} + \frac{135+150}{2} \times \frac{1}{25} = 107.8$,

$\bar{x}_M = 94 \times \frac{1}{5} + 107 \times \frac{3}{10} + 120 \times \frac{3}{10} + 135 \times \frac{4}{25} + 150 \times \frac{1}{25} = 114.5$. 10分

第三步：求出每组数据左端、正中间、右端的方差

$$s_{\text{左}}^2 = \frac{1}{5} \times (81 - 101.1)^2 + \frac{3}{10} \times (94 - 101.1)^2 + \frac{3}{10} \times (107 - 101.1)^2 + \frac{4}{25} \times (120 - 101.1)^2 + \frac{1}{25} \times (135 - 101.1)^2 = 209.49,$$

$$s_{\text{中}}^2 = \frac{1}{5} \times \left(\frac{81+94}{2} - 107.8\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{94+107}{2} - 107.8\right)^2 + \frac{3}{10} \times \left(\frac{107+120}{2} - 107.8\right)^2 + \frac{4}{25} \times \left(\frac{120+135}{2} - 107.8\right)^2 + \frac{1}{25} \times \left(\frac{135+150}{2} - 107.8\right)^2 = 218.41,$$

$$s_{\text{右}}^2 = \frac{1}{5} \times (94 - 114.5)^2 + \frac{3}{10} \times (107 - 114.5)^2 + \frac{3}{10} \times (120 - 114.5)^2 + \frac{4}{25} \times (135 - 114.5)^2 + \frac{1}{25} \times (150 - 114.5)^2 = 227.65.12 \text{ 分}$$

第四步：比较大小，得出结论

所以 $s_{\text{左}}^2 < s_{\text{中}}^2 < s_{\text{右}}^2$.13 分

【快解】

题中数据为不等距分组，对于不等距分组的数据，当用区间最低分代表数据时，较长区间高分侧的数值被向下压缩更明显，从而缩小了整体的极差与方差；当用区间最高分代表数据时，较长区间低分侧的数值被向上拉伸更明显，从而扩大了整体极差与方差.故从左端到中间再到右端方差逐渐增大，即 $s_{\text{左}}^2 < s_{\text{中}}^2 < s_{\text{右}}^2$.13 分

18.

【答案】

(1) 【证明】第一步：作辅助线,证明四边形 DEB_1F 是平行四边形

如图①，取 BC 的中点 F , 连接 DF, B_1F , 因为 D, F 分别为 AC, BC 的中点,

所以 $DF \parallel AB, DF = \frac{1}{2}AB = 1.2$ 分

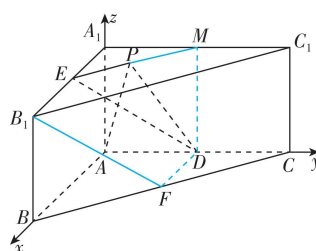
因为 E 为 A_1B_1 的中点, 且 $A_1B_1 \parallel AB$, 所以 $B_1E \parallel AB, B_1E = \frac{1}{2}AB = 1$, 所以 $DF \parallel B_1E$,

所以四边形 DEB_1F 是平行四边形, 4 分

第二步：利用线面平行的判定定理证明

所以 $DE \parallel B_1F$. 又 $B_1F \subset$ 平面 $BB_1C_1C, DE \not\subset$ 平面 BB_1C_1C ,

所以 $DE \parallel$ 平面 BB_1C_1C .6 分



图①

(2) 第一步：建立空间直角坐标系

由题意得, AB, AC, AA_1 两两垂直, 以 A 为坐标原点, 以 AB, AC, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立空间直角坐标系 (如图①).7 分

第二步：写出相关点的坐标

取 A_1C_1 的中点 M ，连接 EM ，

则 $EM//B_1C_1$ ，即点 P 在线段 EM 上，则可设 $P(1-x, x, \sqrt{2})$ ，

易知 $A(0,0,0), D(0,1,0), E(1,0, \sqrt{2})$. 8分

若选条件①：第三步：由 $PA = PD$ 结合点 P, A, D 的坐标，确定点 P 的坐标，并写出相关向量的坐标

$$\text{由 } PA = PD, \text{ 得 } \sqrt{(1-x)^2 + x^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(1-x)^2 + (x-1)^2 + (\sqrt{2})^2},$$

$$\text{解得 } x = \frac{1}{2}, \text{ 则 } P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{PD} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{2}), \overrightarrow{PA} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{2}), \overrightarrow{DE} = (1, -1, \sqrt{2}). 9 \text{ 分}$$

第四步：分别求出平面 PAD 和平面 PDE 的法向量

设平面 PAD 的法向量为 $\mathbf{n}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \\ \overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0, \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} y_1 = 0, \\ x_1 = -2\sqrt{2}z_1, \end{cases}$$

$$\text{令 } z_1 = 1, \text{ 得 } x_1 = -2\sqrt{2}, \text{ 则 } \mathbf{n}_1 = (-2\sqrt{2}, 0, 1). 10 \text{ 分}$$

设平面 PDE 的法向量为 $\mathbf{n}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} \overrightarrow{PD} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \\ \overrightarrow{DE} \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}y_2 - \sqrt{2}z_2 = 0, \\ x_2 - y_2 + \sqrt{2}z_2 = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} z_2 = 0, \\ x_2 = y_2, \end{cases}$$

$$\text{令 } x_2 = 1, \text{ 得 } y_2 = 1, \text{ 则 } \mathbf{n}_2 = (1, 1, 0). 11 \text{ 分}$$

第五步：求出平面 PAD 与平面 PDE 夹角的余弦值

$$\text{所以 } \cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{-2\sqrt{2}}{3 \times \sqrt{2}} = -\frac{2}{3}, 13 \text{ 分}$$

故平面 PAD 与平面 PDE 的夹角的余弦值为 $\frac{2}{3}$. 14分

若选条件②：第三步：由 $PA \perp BC$ 确定点 P 的坐标

$$\text{易知 } \overrightarrow{PA} = (x-1, -x, -\sqrt{2}), B(2,0,0), C(0,2,0), \text{ 则 } \overrightarrow{BC} = (-2, 2, 0),$$

$$\text{因为 } PA \perp BC, \text{ 所以 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0,$$

$$\text{即 } -2x - 2x + 2 = 0, \text{ 解得 } x = \frac{1}{2}, \text{ 则 } P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{2}). 9 \text{ 分}$$

下同选条件①. 14分

若选条件③：连接 DM ，则平面 PDE 即为平面 DEM ，

因为 $DM//BB_1, DM \subset \text{平面 } DEM, BB_1 \not\subset \text{平面 } DEM$ ，

所以 $BB_1//\text{平面 } DEM$ ，即 $BB_1//\text{平面 } PDE$ 一定成立，此时点 P 的位置不唯一，不符合题意（选条件③不计分）。

【一题多解】

第一步：作辅助线，证明 $D_1E//B_1B, DD_1//BC$

如图②,取 AB 的中点 D_1 ,连接 D_1E, D_1D ,因为 D_1, D 分别为 AB, AC 的中点, 所以 $D_1D \parallel BC$.因为 E, D_1 分别为 A_1B_1, AB 的中点, 所以 $D_1E \parallel B_1B$.2分

第二步: 利用线面平行的判定定理证明 $D_1D \parallel$ 平面 $BB_1C_1C, D_1E \parallel$ 平面 BB_1C_1C

因为 $D_1D \parallel BC, D_1D \not\subset$ 平面 $BB_1C_1C, BC \subset$ 平面 BB_1C_1C ,

所以 $D_1D \parallel$ 平面 BB_1C_1C .

同理可得 $D_1E \parallel$ 平面 BB_1C_1C .4分

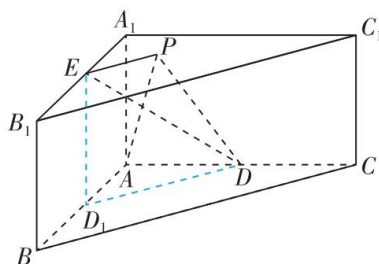
第三步: 利用面面平行的判定定理证明平面 $EDD_1 \parallel$ 平面 BB_1C_1C ,从而证明 $DE \parallel$ 平面

BB_1C_1C

又因为 $D_1D \cap D_1E = D_1, D_1D, D_1E \subset$ 平面 EDD_1 ,

所以平面 $EDD_1 \parallel$ 平面 BB_1C_1C ,

因为 $DE \subset$ 平面 EDD_1 ,所以 $DE \parallel$ 平面 BB_1C_1C .6分



图②

19.

【答案】

(1) 第一步: 根据椭圆顶点坐标和离心率求 a, c

由题意知, $a = 2, \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$, 则 $c = 1$, 3分

第二步: 根据 $a^2 = b^2 + c^2$ 求得 b^2 , 进而求得 E 的方程

又 $a^2 = b^2 + c^2$,

所以 $4 = b^2 + 1$, 则 $b^2 = 3$, 所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.5分

(2) 第一步: 写出直线 BC 的方程, 与椭圆方程联立, 求得 $x_1 + x_2, x_1x_2$

由题意知, 过点 $A(1, 1)$ 且斜率为 $k (k \neq \pm 1)$ 的直线 BC 的方程为 $y - 1 = k(x - 1)$, 设

$B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 则 $D(y_1, x_1)$,

联立 $\begin{cases} y - 1 = k(x - 1), \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \end{cases}$ 整理得 $(3 + 4k^2)x^2 + (8k - 8k^2)x + 4k^2 - 8k - 8 = 0$, 易知

$\Delta > 0, x_1 + x_2 = \frac{8k^2 - 8k}{3 + 4k^2}, x_1x_2 = \frac{4k^2 - 8k - 8}{3 + 4k^2}$.7分

第二步: 根据 $\triangle ABQ$ 与 $\triangle ACQ$ 的面积关系求得 k 的值

连接 AD , 因为 B 与 D 关于直线 $y = x$ 对称, 且 A, Q 均在直线 $y = x$ 上, 所以 $S_{\triangle ABQ} = S_{\triangle ADQ}$,

$$\text{所以 } |S_{\triangle ABQ} - S_{\triangle ACQ}| = |S_{\triangle ADQ} - S_{\triangle ACQ}| = S_{\triangle ACD} = \frac{5}{8}.$$

$$\text{又 } |AC| = \sqrt{1+k^2} \cdot |x_2 - 1|, \text{点 } D \text{ 到直线 } AC \text{ 的距离 } d = \frac{|ky_1 - k - x_1 + 1|}{\sqrt{1+k^2}}, 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} |AC| \cdot d = \frac{1}{2} \sqrt{1+k^2} \cdot |x_2 - 1| \cdot \frac{|ky_1 - k - x_1 + 1|}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{5}{8},$$

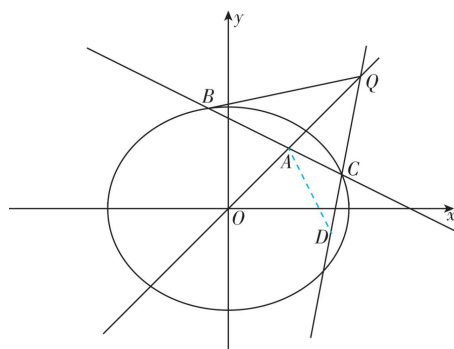
$$\text{则 } |x_2 - 1| \cdot |k^2(x_1 - 1) + k - k - x_1 + 1|$$

$$= |(k^2 - 1)(x_1 - 1)(x_2 - 1)|$$

$$= |(k^2 - 1)[x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1]|$$

$$= |(k^2 - 1)(\frac{4k^2 - 8k - 8}{3 + 4k^2} - \frac{8k^2 - 8k}{3 + 4k^2} + 1)| = \frac{5}{4}, 13 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } k = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}. 15 \text{ 分}$$



20.

【答案】

(1) 第一步：由切线方程求 $f'(-1)$

根据所给切线方程可知, $f'(-1) = -\frac{4}{e^2}$. 1 分

第二步：对 $f(x)$ 求导，用 m, n 表示 $f'(-1)$

因为 $f(x) = x^2 + mx - 4e^{nx-1}$ ，所以 $f'(x) = 2x + m - 4n \cdot e^{nx-1}$ ，可得 $f'(-1) = -2 + m - 4ne^{-n-1}$, 2 分

第三步：求出 m, n 的值

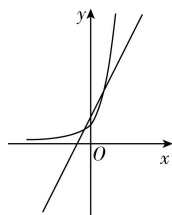
$$\text{所以 } -2 + m - 4ne^{-n-1} = -\frac{4}{e^2},$$

$$\text{则 } \begin{cases} -2 + m = 0, \\ 4n = 4, \\ -n - 1 = -2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m = 2, \\ n = 1. \end{cases} 3 \text{ 分}$$

(2) 第一步：写出 $f(x)$ 及 $f'(x)$

由 (1) 可知, $f(x) = x^2 + 2x - 4e^{x-1}$, $f'(x) = 2x + 2 - 4e^{x-1}$. 4 分

第二步：分析 $f'(x)$ 的零点



令 $f_1(x) = 2x + 2, f_2(x) = 4e^{x-1}$, 在同一平面直角坐标系中分别作出 $y = f_1(x), y = f_2(x)$ 的图像, 如图所示 (关键: 将导函数的零点问题转化为两个函数图像的交点问题)。

由 $f'(-1) = -\frac{4}{e^2} < 0, f'(0) = 2 - \frac{4}{e} > 0, f'(1) = 0, f'(2) = 6 - 4e < 0$, 结合图像可知 $y = f_1(x)$ 的图像与 $y = f_2(x)$ 的图像有 2 个交点, 设其横坐标分别为 $a, b (a < b)$, 则

$a \in (-1, 0), b = 1.6$ 分

第三步: 分别讨论当 $x \rightarrow -\infty$ 和 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f'(x)$ 的情况, 并讨论 $f(x)$ 的单调性

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $2x + 2 \rightarrow -\infty, 4e^{x-1} \rightarrow 0^+$, 此时 $f'(x) \rightarrow -\infty$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $2x + 2 \rightarrow +\infty, 4e^{x-1} \rightarrow +\infty$, 而 $y = 4e^{x-1}$ 的增长速度大于 $y = 2x + 2$ 的增长速度, 故 $f'(x) \rightarrow -\infty$ 。

当 $x \in (-\infty, a)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (a, 1)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减. 7 分

第四步: 判断 $f(x)$ 的极值点个数

所以 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得极小值, 在 $x = 1$ 处取得极大值, 故 $f(x)$ 的极值点个数为 2.8 分

(3) 第一步: 构造函数并求导

令 $g(x) = f(x) - kx + 1 = x^2 + (2 - k)x - 4e^{x-1} + 1$, 则 $g'(x) = 2x + 2 - k - 4e^{x-1}$, 直线 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 的交点个数即为 $g(x)$ 的零点个数.

第二步: 进一步构造函数, 将 $g'(x)$ 与 0 的大小关系问题转化为两个更简单的函数图像的相交情况问题

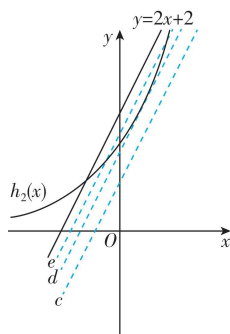
令 $h_1(x) = 2x + 2 - k, h_2(x) = 4e^{x-1}$. 由 (2) 可知, $y = h_1(x)$ 的图像与 $y = h_2(x)$ 的图像的交点个数可以是 0, 1 或 2 (提示: (2) 对应 $k = 0$ 的特殊情况, 上、下移动 $y = f_1(x)$ 的图像, 即可知 $y = h_1(x)$ 与 $y = h_2(x)$ 图像的交点个数). 9 分

第三步: 求出当 $y = h_1(x)$ 的图像与 $y = h_2(x)$ 的图像恰有 1 个交点时 k 的取值

当 $y = h_1(x)$ 的图像与 $y = h_2(x)$ 的图像恰有 1 个交点时, 直线 $y = h_1(x)$ 为曲线 $y = h_2(x)$ 的切线, 此时切点的横坐标 x 满足 $h'_2(x) = 2$, 即 $4e^{x-1} = 2$, 解得 $x = 1 - \ln 2$, 代入 $h_2(x)$, 得 $h_2(1 - \ln 2) = 4e^{1-\ln 2-1} = 2$, 所以 $h_1(x)$ 与 $h_2(x)$ 图像的切点坐标为 $(1 - \ln 2, 2)$, 将其代入 $h_1(x)$, 得 $h_1(1 - \ln 2) = 2(1 - \ln 2) + 2 - k = 2$, 故 $k = 2 - 2\ln 2$. 10 分

第四步: 根据 k 与 $2 - 2\ln 2$ 的大小关系分类讨论

(i) 当 $k \in (2 - 2\ln 2, +\infty)$ 时, 如图①直线 c , 易知 $y = h_1(x)$ 的图像与 $y = h_2(x)$ 的图像没有交点, $g'(x) = 2x + 2 - k - 4e^{x-1} = h_1(x) - h_2(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 单调递减, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$. 又 $g(0) = 1 - \frac{4}{e} < 0$, 故存在唯一的 $x_1 \in (-\infty, 0)$, 使得 $g(x_1) = 0$. 此时直线 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 的交点个数为 1. 11 分



图①

(ii) 当 $k = 2 - 2\ln 2$ 时, 如图①直线 d , $y = h_1(x)$ 的图像与 $y = h_2(x)$ 的图像仅有 1 个交点, $g'(x) = 2x + 2 - k - 4e^{x-1} = h_1(x) - h_2(x) \leq 0$, 当且仅当 $x = 1 - \ln 2$ 时等号成立. 所以当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $g'(x) \leq 0$, $g(x)$ 单调递减.

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, $g(0) = -\frac{4}{e} + 1 < 0$, 同理, 函数 $g(x)$ 有 1 个零点. 此时直线 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 的交点个数为 1. 12 分

(iii) 当 $k \in (0, 2 - 2\ln 2)$ 时, 如图①直线 e , $y = h_1(x)$ 的图像与 $y = h_2(x)$ 的图像有 2 个交点, 设这 2 个交点的横坐标分别为 $x_2, x_3 (x_2 < x_3)$. 由 (2) 可知, x_2, x_3 还进一步满足 $-1 < x_2 < 1 - \ln 2 < x_3 < 1$.

当 $x \in (-\infty, x_2)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

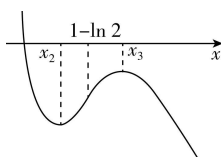
当 $x \in (x_2, x_3)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x \in (x_3, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减.

故 $g(x)$ 在 $x = x_2$ 处取得极小值, 在 $x = x_3$ 处取得极大值.

又 $g(1 - \ln 2) = (1 - \ln 2)^2 + (2 - k)(1 - \ln 2) - 1 > (1 - \ln 2)^2 + (1 - \ln 2) \cdot 2\ln 2 - 1 = -(\ln 2)^2 < 0$, 所以 $g(x_2) < 0$, 由 $g'(x_3) = 0$ 可得 $2x_3 + 2 - k - 4e^{x_3-1} = 0$, 解得 $k = 2x_3 + 2 - 4e^{x_3-1}$, 则 $g(x_3) = x_3^2 + (2 - k)x_3 - 4e^{x_3-1} + 1 = x_3^2 + (-2x_3 + 4e^{x_3-1}) \cdot x_3 - 4e^{x_3-1} + 1 = -x_3^2 + 4e^{x_3-1}(x_3 - 1) + 1 = (x_3 - 1)(4e^{x_3-1} - x_3 - 1)$, 因为 $1 - \ln 2 < x_3 < 1$,

所以 $x_3 - 1 < 0$. 令 $\varphi(x) = 4e^{x-1} - x - 1, x > 0$, 则 $\varphi'(x) = 4e^{x-1} - 1$, 又 $x > 0$, 所以 $\varphi'(x) > \frac{4}{e} - 1 > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 则 $\varphi(x_3) > \varphi(1 - \ln 2) = \ln 2 > 0$, 所以 $g(x_3) < 0$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, 故 $g(x)$ 的大致图像如图②所示, 故函数 $g(x)$ 有 1 个零点,



图②

此时直线 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 的交点个数为 1.14 分

第五步：得出结论

综上所述，当 $k > 0$ 时，直线 $y = kx - 1 (k > 0)$ 与曲线 $y = f(x)$ 的交点个数为 1.15 分

21.

【答案】

理解 $||i - p| - |j - q|| = 2$ 及 $a_{ij} + a_{iq} + a_{pj} + a_{pq} = 0$ 的含义

$||i - p| - |j - q|| = 2$ 表示行数差值绝对值减去列数差值绝对值的绝对值为 2，如在数阵

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ 中，令 $i = 4, p = 1, j = 2, q = 1$ ， $a_{11}, a_{12}, a_{41}, a_{42}$ 四个数对应矩形的四个角，

$$a_{42} + a_{41} + a_{12} + a_{11} = 0,$$

a_{11}	a_{12}
a_{21}	a_{22}
a_{31}	a_{32}
a_{41}	a_{42}

同理，若 $i = 2, p = 1, j = 4, q = 1$ ，可得 $a_{24}, a_{21}, a_{14}, a_{11}$ 四个数也对应矩形的四个角， $a_{24} + a_{21} + a_{14} + a_{11} = 0$.

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}

所以 i, p, j, q 对应此数阵中 长为 4，宽为 2 的矩形，且矩形四个角处的数字是 2 个 1 和 2 个 -1.

(1) 判断 A_1, A_2 是否具有性质 P

对于 $A_1 = \begin{pmatrix} 11 & -11 \\ -11 & -11 \end{pmatrix}$ ，四个角数字之和为 $1 + 1 + (-1) + (-1) = 0$ ，所以 A_1 不具有性质 P.1 分

对于 $A_2 = \begin{pmatrix} 11 & -1 & -1 \\ 1 & -11 & -1 \\ -11 & -11 \end{pmatrix}$ ，前两行组成的矩形四个角数字之和为 $1 + 1 - 1 - 1 = 0$ ，后两行

组成的矩形四个角数字之和为 $1 - 1 - 1 + 1 = 0$ ，所以 A_2 具有性质 P.3 分

(2) 分析具有性质P的 5×4 数阵中的项的性质, 得出结果

令 $|i-p|=3, |j-q|=1$, 则相邻 4 行相邻 2 列对应的矩形, 都满足四个角数字之和为 0.4 分

故取第 1 行到第 4 行, 第 1 列到第 2 列, 对应矩形四个角数字之和为 $a_{11} + a_{12} + a_{41} +$

$a_{42} = 0$; 取第 1 行到第 4 行, 第 3 列到第 4 列, 对应矩形四个角数字之和为 $a_{13} + a_{14} +$

$a_{43} + a_{44} = 0$. 同理可得 $a_{21} + a_{22} + a_{51} + a_{52} = 0$, $a_{23} + a_{24} + a_{53} + a_{54} = 0$. 6 分

故 $a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{41} + a_{42} + a_{43} + a_{44} = 0$, $a_{21} + a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{51} + a_{52} +$

$a_{53} + a_{54} = 0$ (提示: 第 1,2,4,5 行数字之和为 0), 故第 1,2,4,5 行有 8 个 1 及 8 个 -1, 经

检验, 第 3 行可以均为 1, 故 1 的个数最多是 12.9 分

(3) 【证明】第一步: 定义新运算, 并证明该运算满足交换律与结合律

定义新运算: $a = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中 $x_i = \pm 1$, 当 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中有奇数个 -1 时, 其运算结果为 -1, 有偶数个 -1 时, 运算结果为 1.

这个运算满足交换律 (提示: 虽然顺序换了, 但是不影响其中 -1 的个数).

(下面证明结合律: $(x_1, x_2, \dots, x_m, (y_1, \dots, y_n)) = (x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n)$)

若 $(y_1, \dots, y_n) = 1$, 即 $y_1, \dots, y_n$ 中有偶数个 -1, 则 $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ 与 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 中的 -1 的个数之差为偶数, 则 $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ 与在 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 后添加一个 1 后 -1 的个数的奇偶关系相同, 故计算结果相等.

若 $(y_1, \dots, y_n) = -1$, 即 $y_1, \dots, y_n$ 中有奇数个 -1, 则 $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ 与 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 中的 -1 的个数的奇偶关系相反, 则 $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ 与在 $x_1, x_2, \dots, x_m$ 后添加一个 -1 后 -1 的个数的奇偶关系相同, 故计算结果不变. 10 分

第二步: 证明第 1 行与第 1 列中的项满足要求

对于数阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix}$, 因为 $a_{11} = 1$, 所以 $\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $a_{1j} = a_{11} \cdot a_{1j}$,

$$a_{i1} = a_{i1} \cdot a_{11}.$$

第三步: 证明 $a_{24}, a_{35}, a_{46}, a_{42}, a_{53}, a_{64}$ 满足要求

$a_{24} = (a_{21}, a_{11}, a_{14}) = (a_{21}, a_{14}, 1) = (a_{21}, a_{14})$, 运算 a 满足 $a = (b, c) = bc$, $b, c \in \{1, -1\}$,

因此 $a_{24} = a_{21}a_{14}$. 同理可得 $a_{35}, a_{46}, a_{42}, a_{53}, a_{64}$ 满足要求.

第四步: 证明 a_{34} 满足要求, 同理得第 4 列以及第 4 行中的项满足要求

根据交换律及结合律,

$$\begin{aligned} a_{34} &= (a_{21}, a_{24}, a_{31}) = (a_{21}, a_{31}, (a_{11}, a_{14}, a_{21})) = (a_{21}, a_{21}, a_{31}, a_{11}, a_{14}) = \\ &= ((a_{21}, a_{21}), a_{31}, a_{11}, a_{14}) = (1, a_{31}, a_{11}, a_{14}) = (a_{31}, a_{11}, a_{14}) = (a_{31}, a_{14}), \end{aligned}$$

因此 a_{34} 满足要求. 同理可得第 4 列全部满足要求, 第 4 行也全部满足要求. 12 分

第五步：类似地，证明其余项满足要求

同上可得， $a_{25} = (a_{45}, a_{41}, a_{21}) = (a_{21}, a_{15})$ ，因此 a_{25} 满足要求.同理可得， a_{55}, a_{65} 也满足要求，即第5列全部满足要求，同理，第5行也全部满足要求.13分

$a_{22} = (a_{25}, a_{12}, a_{15}) = (a_{21}, a_{12})$ ， $a_{23} = (a_{53}, a_{54}, a_{24}) = (a_{21}, a_{13})$ ， $a_{26} = (a_{25}, a_{55}, a_{56}) = (a_{21}, a_{16})$ ， $a_{32} = (a_{22}, a_{25}, a_{35}) = (a_{31}, a_{12})$ ，同理，第2行与第2列全部满足要求.14分

$a_{36} = (a_{32}, a_{12}, a_{16}) = (a_{31}, a_{16})$ ，同理， a_{63} 满足要求. $a_{33} = (a_{36}, a_{26}, a_{23}) = (a_{31}, a_{13})$ ， $a_{66} = (a_{36}, a_{35}, a_{65}) = (a_{61}, a_{16})$ ，故所有数值均满足要求.得证.15分

一题多解

(3) 第一步：分析性质 P ，构造特征量，并将问题进行转化

由于数阵 A 具有性质 P ，则 $a_{ij} + a_{iq} + a_{pj} + a_{pq} = 0$ ，即其中有2个1，2个-1，故 $a_{ij}a_{iq} = a_{pj}a_{pq}$.

令特征量 $C_i(j, q) = a_{ij}a_{iq}$ ， $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，若数阵 A 具有性质 P ，则当两列间距 $\Delta x = |j - q|$ 固定时，若两行间距 $\Delta y = |i - p| = \Delta x \pm 2$ ，则这两行的特征量相等，即 $C_i(j, q) = C_p(j, q)$.10分

要证明 $a_{ij} = a_{i1}a_{1j}$ ，只需证明 $a_{ij}a_{i1} = a_{11}a_{1j}$ ，即 $C_i(1, j) = C_1(1, j)$ 对所有 i, j 均成立，即证明对于任意列 j ，特征量 $C_i(1, j)$ 都不随行数 i 变化.11分

第二步：分类讨论进行证明

①当 $j = 4$ 时， $\Delta x = |4 - 1| = 3$.由条件知当 $\Delta y \in \{1, 5\}$ 时，特征量相等，即 $C_1(1, 4) = C_2(1, 4) = C_3(1, 4) = C_4(1, 4) = C_5(1, 4) = C_6(1, 4)$ ，即当 $j = 4$ 时，特征量 $C_i(1, 4)$ 不随行数 i 变化.

②当 $j = 5$ 时， $\Delta x = 4$ ，则 $\Delta y = 2$ ，故只能得到奇数行、偶数行特征量分别相等，即 $C_1(1, 5) = C_3(1, 5) = C_5(1, 5)$ ，以及 $C_2(1, 5) = C_4(1, 5) = C_6(1, 5)$. $C_i(1, 5) = a_{i1}a_{i5} = (a_{i1}a_{i4}) \cdot (a_{i4}a_{i5}) = C_i(1, 4) \cdot C_i(4, 5)$ （提示： $a_{i4}^2 = 1$ ），且 $C_i(1, 4)$ 不随行数 i 变化.又 $C_i(4, 5)$ 对应 $\Delta x = 1$ ，在 $\Delta y = 3$ 时相等，即 $C_1(4, 5) = C_4(4, 5)$ ， $C_2(4, 5) = C_5(4, 5)$ ， $C_3(4, 5) = C_6(4, 5)$.故 $C_i(1, 5)$ 不随行数 i 变化.

③当 $j = 2$ 时， $C_i(1, 2) = C_i(1, 5) \cdot C_i(2, 5)$ ，其中 $C_i(1, 5)$ 不随行数 i 变化，而 $C_i(2, 5)$ 对应 $\Delta x = 3$ ，与①同理知也不随行数 i 变化，故 $C_i(1, 2)$ 不随行数 i 变化.13分

④当 $j = 3$ 时， $C_i(1, 3) = C_i(1, 2) \cdot C_i(2, 3)$ ，与②同理，即列距为2推出 $C_1(1, 3) = C_5(1, 3)$ ， $C_2(1, 3) = C_6(1, 3)$ ，结合 $C_i(2, 3)$ 在 $\Delta y = 3$ 时分别相等，可得 $C_i(1, 3)$ 不随行数 i 变化.

⑤当 $j = 6$ 时， $C_i(1, 6) = C_i(1, 3) \cdot C_i(3, 6)$.由于 $C_i(1, 3)$ 及 $C_i(3, 6)$ 不随行数 i 变化（提示： $\Delta x = 3$ ，同①），故 $C_i(1, 6)$ 不随行数 i 变化.

⑥当 $j = 1$ 时， $C_i(1, j) = a_{i1}^2 = 1 = a_{11}^2 = C_1(1, j)$.

综上，对于任意的 $j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，特征量 $C_i(1, j)$ 均不随行数 i 变化，得证.15分